A picture containing text

Description automatically generated



INSTITUTO POLITÉCNICO DE COIMBRA

INSTITUTO SUPERIOR

DE ENGENHARIA

DE COIMBRA

DEPARTAMENTO DE INFORMÁTICA E SISTEMAS

**Métodos Numéricos para resolução de Sistemas de ED**

Relatório de Licenciatura

Autores

**Ana Rita Conceição Pessoa – 2023112690**

**João Francisco de Matos Claro – 2017010293**

Coimbra, abril e 2024

# Índice

## Índice de texto

[1 Índice 2](#_Toc166320705)

[1.1 Índice de texto 2](#_Toc166320706)

[1.2 Índice de figuras, quadros e afins 3](#_Toc166320707)

[2 Lista de siglas, acrónimos e símbolos 4](#_Toc166320708)

[2.1 Lista de siglas e acrónimos 4](#_Toc166320709)

[2.2 Lista de símbolos 4](#_Toc166320710)

[2.2.1 Exemplos de listas de símbolos 4](#_Toc166320711)

[3 Introdução 5](#_Toc166320712)

[3.1 Enunciado da Atividade Proposta e Interpretação do mesmo 5](#_Toc166320713)

[3.2 Definição de SED 6](#_Toc166320714)

[4 Métodos Numéricos para Resolução de Sistemas de ED 7](#_Toc166320715)

[4.1 Método de Euler 7](#_Toc166320716)

[4.1.1 Fórmulas e Resolução 7](#_Toc166320717)

[4.1.2 Algoritmo e Função 8](#_Toc166320718)

[4.2 Método de Euler Melhorado ou Modificado 10](#_Toc166320719)

[4.2.1 Fórmulas 10](#_Toc166320720)

[4.2.2 Algoritmo e Função 12](#_Toc166320721)

[4.3 Método de Runge-Kutta de Segunda Ordem 14](#_Toc166320722)

[4.3.1 Fórmulas 14](#_Toc166320723)

[4.3.2 Algoritmo e Função 16](#_Toc166320724)

[4.4 Método de Runge-Kutta de Quarta Ordem 18](#_Toc166320725)

[4.4.1 Fórmulas 18](#_Toc166320726)

[4.4.2 Algoritmo e Função 21](#_Toc166320727)

[5 Exemplos de aplicação e teste dos métodos 25](#_Toc166320728)

[5.1 Algoritmo de Resolução 25](#_Toc166320729)

[5.2 Problema do Pêndulo 27](#_Toc166320730)

[5.2.1 Modelação matemática do problema 27](#_Toc166320731)

[5.2.2 Resolução através da App desenvolvida 30](#_Toc166320732)

[5.3 Movimento Livre Amortecido 31](#_Toc166320733)

[5.3.1 Modelação matemática do problema 31](#_Toc166320734)

[5.3.2 Resolução através da App desenvolvida 34](#_Toc166320735)

[5.4 Modelo Vibratório Mecânico 35](#_Toc166320736)

[5.4.1 Modelação matemática do problema 35](#_Toc166320737)

[5.4.2 Resolução através da App desenvolvida 38](#_Toc166320738)

[5.5 Movimento Harmónico Simples Mecânico 39](#_Toc166320739)

[5.5.1 Modelação matemática do problema 39](#_Toc166320740)

[5.5.2 Resolução através da App desenvolvida 41](#_Toc166320741)

[5.6 Circuito Elétrico 42](#_Toc166320742)

[5.6.1 Modelação matemática do problema 42](#_Toc166320743)

[5.6.2 Resolução através da App desenvolvida 44](#_Toc166320744)

[5.7 Problema do crescimento económico sob restrições 45](#_Toc166320745)

[5.7.1 Modelação matemática do problema 45](#_Toc166320746)

[5.7.2 Resolução através da App desenvolvida 48](#_Toc166320747)

[6 Conclusão 49](#_Toc166320748)

[7 Bibliografia 50](#_Toc166320749)

[8 Autoavaliação e heteroavaliação do trabalho submetido 51](#_Toc166320750)

## Índice de figuras, quadros e afins

[Figura 1 – Problema do Pêndulo 27](#_Toc166320698)

[Figura 2 – Enunciado: Problema do Movimento Livre Amortecido 31](#_Toc166320699)

[Figura 3 – Enunciado: Problema Vibratório Mecânico 35](#_Toc166320700)

[Figura 4 App: Modelo Vibratório Mecânico 38](#_Toc166320701)

[Figura 5 - Problema do Movimento Harmónico Simples Mecânico 39](#_Toc166320702)

[Figura 6 - Problema do Circuito Elétrico 42](#_Toc166320703)

[Figura 7 - App: Problema do crescimento económico sob restrições 48](#_Toc166320704)

## 

# Lista de siglas, acrónimos e símbolos

## Lista de siglas e acrónimos

|  |  |
| --- | --- |
| SED | Sistemas de Equações Diferenciais |
| GUI | Graphical User Interface |
| RK2 | Runge-Kutta de Segunda Ordem |
| RK4 | Runge-Kutta de Quarta Ordem |
| ED | Equação Diferencial |
| PVI | Problema de Valor Inicial |
| PBI | Produto Interno Bruto |

## Lista de símbolos

### Exemplos de listas de símbolos

As tabelas seguintes exemplificam as recomendações anteriormente descritas.

**Alfabeto latino**

|  |  |
| --- | --- |
|  | Constante gravitacional ou à aceleração devida à gravidade na superfície da Terra (aproximadamente 9,8 m/s²) |
| *m* | Massa do objeto |
| *lb* | *Pound;* Peso do objeto |
| ft | *Feet* |
| H | Henry |
| s | Segundos |
| m | Massa |
| F | Farad |

**Alfabeto grego**

|  |  |
| --- | --- |
|  | Ângulo que o pêndulo faz |

# Introdução

## Enunciado da Atividade Proposta e Interpretação do mesmo

Este estudo é parte da unidade curricular de Análise Matemática II - Matemática Computacional, onde o objetivo é redefinir e ajustar funções anteriormente desenvolvidas para resolver Sistemas de Equações Diferenciais (SED) com as condições iniciais. O objetivo da aplicação desses métodos, que é realizado por meio da GUI do MATLAB, é resolver problemas como o pêndulo, o movimento livre amortecido, entre outros, permitindo assim o teste das funções implementadas. Além disso, é discutida a possibilidade de encontrar soluções precisas para os problemas escolhidos.

O objetivo é adaptar as funções MATLAB para resolver esses sistemas, usando métodos de Euler, Euler Melhorado e Runge-Kutta de ordens 2 e 4, seguindo as aulas teórico-práticas sobre sistemas de equações diferenciais.

## Definição de SED

Um SED pode ser geralmente definido como um conjunto de equações diferenciais, onde cada equação envolve uma ou mais funções desconhecidas e as respetivas derivadas em relação a uma variável independente comum. Estes sistemas podem surgir em várias áreas da ciência e da engenharia, como física, biologia, química, economia, controlo de qualidade, teoria de controlo, entre outras.

A solução de sistemas de equações diferenciais é uma tarefa complexa, que requer o uso de técnicas avançadas de álgebra linear, cálculo e teoria dos sistemas dinâmicos. O estudo destes sistemas é importante, pois permite obter informações valiosas sobre os processos físicos e fenómenos complexos que descrevem.

Simplificando, um sistema de equações diferenciais é a transformação de uma equação com ordem superior a 1 num sistema de equações diferenciais com ordem 1, seguida da aplicação de um dos métodos numéricos.

# Métodos Numéricos para Resolução de Sistemas de ED

## Método de Euler

### Fórmulas e Resolução

O Método de Euler para resolver um Sistema de Equações é dado pelas seguintes equações:

Onde:

• → Próxima ordenada da solução aproximada ;

• → Próxima ordenada da solução aproximada ;

• → Ordenada atual da solução aproximada ;

• → Ordenada atual da solução aproximada ;

• ℎ → Valor de cada subintervalo (passo);

• ) → Valor de 𝑓 no ponto ;

• ) → Valor de no ponto .

### Algoritmo e Função

**Algoritmo:**

1. Definir o Valor do Passo (*h*):

Determinação do valor do passo de integração ℎ. Este valor determina o tamanho dos incrementos ao longo do tempo ou da variável independente.

1. Inicializar os Vetores de Solução:

Definição de dois vetores, 𝑢 e 𝑣, um para armazenar as soluções das variáveis do sistema e outro para as suas derivadas. Além disso, atribuímos os valores iniciais das variáveis do sistema aos elementos desses vetores.

1. Atribuir o Primeiro Valor:

Atribuição dos primeiros valores das variáveis do sistema aos elementos dos vetores 𝑢 e 𝑣, sendo estes o vetor 𝑢1 e o vetor 𝑣1, respetivamente.

1. Iteração do Método de Euler:

Iteração sobre o método de Euler para avançar de um ponto para o próximo. Para cada iteração 𝑖 de 1 a 𝑛, onde 𝑛 é o número total de iterações:

* Cálculo das derivadas das variáveis no tempo atual usando as equações diferenciais do sistema.
* Atualização das variáveis para o próximo passo de tempo utilizando a fórmula de Euler indicada acima.

1. Conclusão:

Repetição do passo 4 até alcançar o tempo final desejado ou até atender a algum critério de paragem pré-definido.

**Função (MatLab):**

% NEuler - Método de Euler para um Sistema de SED/PVI

%INPUT:

% f - 1ª Função do sistema de equações diferenciais em v, u e t

% g - 2ª Função do sistema de equações diferenciais em v, u e t

% [a, b] - Extremos do intervalo da variável independente t

% n - Número de subintervalos ou iterações do método

% u0 - Condição inicial da 1ª variável dependente

% v0 - Condição inicial da 2ª variável dependente

%OUTPUT:

% t - vector de x, dos passos de "a" a "b"

% u - vector das soluções aproximadas dos deslocamentos

% v - vector das soluções aproximadas das velocidades

% Autores: Arménio Correia | armenioc@isec.pt

% Ana Rita Conceição Pessoa .: a2023112690@isec.pt

% João Francisco de Matos Claro .: a21270422@isec.pt

%

% 28/04/2024

function [t,u,v] = NEuler(f,g,a,b,n,u0,v0)

h = (b-a)/n; % Valor de cada subintervalo

% Alocação de memória

t = a:h:b;

% Armazena as soluções das variáveis

u = zeros(1,n+1);

v = zeros(1,n+1);

u(1) = u0; % Atribuição do valor inicial de u

v(1) = v0; % Atribuição do valor inicial de v

% O número de iterações vai ser igual a n

for i = 1:n

% Aproximação do Método de Euler para a inésima iteração

u(i+1) = u(i)+h\*f(t(i),u(i),v(i));

v(i+1) = v(i)+h\*g(t(i),u(i),v(i));

end

end

## Método de Euler Melhorado ou Modificado

### Fórmulas

O Método de Euler Melhorado ou Modificado para resolver um SED é dado pelas seguintes equações:

Onde:

• → Aproximação do método de Euler Melhorado para **n** iterações;

• → Aproximação do método de Euler Melhorado para **n** iterações;

• → Ordenada atual da solução aproximada ;

• → Ordenada atual da solução aproximada ;

• ℎ → Valor de cada subintervalo (passo);

• → Cálculo da média das inclinações;

Cálculo de e **:**

Onde:

• → Cálculo da média das inclinações;

• → Inclinação no início do intervalo;

• → Inclinação no fim do intervalo.

Cálculo de e **:**

Onde:

• → Inclinação no início do intervalo;

• ) → Valor de 𝑓 no ponto ;

• ) → Valor de no ponto .

Cálculo de e **:**

Onde:

• → Inclinação no fim do intervalo;

• → Próxima abcissa do intervalo escolhido;

• → Ordenada atual da solução aproximada ;

• → Inclinação no início do intervalo;

• ℎ → Valor de cada subintervalo (passo);

• → Ordenada atual da solução aproximada ;

### Algoritmo e Função

**Algoritmo**

1. Definir o Valor do Passo (*h*):

Determinação do valor do passo de integração ℎ. Este valor determina o tamanho dos incrementos ao longo do tempo ou da variável independente.

2. Criar um vetor 𝑢 e um vetor 𝑣 para guardar as soluções:

Os vetores 𝑢 e 𝑣 são usados para armazenar as soluções das variáveis do sistema e as suas derivadas, respetivamente. Estes vetores são atualizados a cada iteração.

3. Atribuir o primeiro valor de 𝑢 e de 𝑣:

Os primeiros valores das variáveis do sistema devem ser atribuídos aos primeiros elementos dos vetores 𝑢 e 𝑣, respetivamente. Esses valores são geralmente fornecidos pelas condições iniciais do problema.

4. Cálculo da inclinação no início do intervalo:

Para cada iteração, é calculada a inclinação inicial usando as equações diferenciais do sistema e os valores das variáveis do sistema no início do intervalo.

5. Cálculo da inclinação no fim do intervalo:

Em seguida, é feita uma estimativa da inclinação no final do intervalo. Isto é feito utilizando o método de Euler padrão para avançar as variáveis do sistema até ao final do intervalo, usando a inclinação inicial.

6. Cálculo da média das inclinações:

A média ponderada é calculada entre as inclinações inicial e final. Daqui é obtida uma melhor estimativa da inclinação média ao longo do intervalo.

7. Cálculo do valor aproximado para iterações:

Utilizando a inclinação média calculada, são atualizadas as variáveis do sistema para o próximo passo. Repetimos este processo para o número desejado de iterações 𝑛.

**Função (MatLab):**

% NEuler - Método de Euler para um Sistema de SED/PVI

%INPUT:

% f - 1ª Função do sistema de equações diferenciais em v, u e t

% g - 2ª Função do sistema de equações diferenciais em v, u e t

% [a, b] - Extremos do intervalo da variável independente t

% n - Número de subintervalos ou iterações do método

% u0 - Condição inicial da 1ª variável dependente

% v0 - Condição inicial da 2ª variável dependente

%OUTPUT:

% t - vector de x, dos passos de "a" a "b"

% u - vector das soluções aproximadas dos deslocamentos

% v - vector das soluções aproximadas das velocidades

% Autores: Arménio Correia | armenioc@isec.pt

% Ana Rita Conceição Pessoa .: a2023112690@isec.pt

% João Francisco de Matos Claro .: a21270422@isec.pt

%

% 28/04/2024

function [t, u, v] = NEulerMelhorado(f, g, a, b, n, u0, v0)

h = (b-a)/n;

% Alocação de memória

t = a:h:b; % Alocação de memória

u = zeros(1,n+1);

v = zeros(1,n+1);

u(1) = u0; % Atribuição do valor inicial de u

v(1) = v0; % Atribuição do valor inicial de v

% O número de iterações vai ser igual a n

for i=1:n

% Inclinação no início do intervalo

uk1 = f(t(i),u(i),v(i));

vk1 = g(t(i),u(i),v(i));

% Inclinação no fim do intervalo

uk2 = f(t(i+1), u(i) + h\*uk1, v(i) + h\*vk1);

vk2 = g(t(i+1), u(i) + h\*uk1, v(i) + h\*vk1);

% Cálculo da média das inclinações e aproximação do Método de Euler Melhorado para a inésima iteração

u(i+1) = u(i) + h/2\*(uk1+uk2);

v(i+1) = v(i) + h/2\*(vk1+vk2);

end

end

## Método de Runge-Kutta de Segunda Ordem

### Fórmulas

O Método de Runge-Kutta de Segunda Ordem (RK2) para resolver um SED é dado pelas seguintes equações:

Onde:

• → Aproximação do método de RK2 para **n** iterações;

• → Aproximação do método de RK2 para **n** iterações;

• → Ordenada atual da solução aproximada ;

• → Ordenada atual da solução aproximada ;

• → Cálculo da média das inclinações;

• → Cálculo da média das inclinações.

Cálculo de e **:**

Onde:

• → Cálculo da média das inclinações;

• → Inclinação no início do intervalo;

• → Inclinação no fim do intervalo.

Cálculo de e **:**

Onde:

• → Inclinação no início do intervalo;

• ) → Valor de 𝑓 no ponto ;

• ) → Valor de no ponto .

Cálculo de e **:**

Onde:

• → Inclinação no fim do intervalo;

• ℎ → Valor de cada subintervalo (passo);

• → Próxima abcissa do intervalo escolhido;

• → Ordenada atual da solução aproximada ;

• → Inclinação no início do intervalo;

• → Ordenada atual da solução aproximada ;

### Algoritmo e Função

**Algoritmo:**

1. Definir o Valor do Passo (*h*):

Determinação do valor do passo de integração ℎ. Este valor determina o tamanho dos incrementos ao longo do tempo ou da variável independente.

2. Criar um vetor 𝑢 e um vetor 𝑣 para guardar as soluções:

Os vetores 𝑢 e 𝑣 são usados para armazenar as soluções das variáveis do sistema e as suas derivadas, respetivamente. Estes vetores são atualizados a cada iteração.

3. Atribuir o primeiro valor de 𝑢 e de 𝑣:

Os primeiros valores das variáveis do sistema devem ser atribuídos aos primeiros elementos dos vetores 𝑢 e 𝑣, respetivamente. Esses valores são geralmente fornecidos pelas condições iniciais do problema.

4. Cálculo da inclinação no início do intervalo:

Para cada iteração, é calculada a inclinação inicial usando as equações diferenciais do sistema e os valores das variáveis do sistema no início do intervalo.

5. Cálculo da inclinação no fim do intervalo:

Em seguida, é feita uma estimativa da inclinação no final do intervalo. Isto é feito usando o método de Euler padrão para avançar as variáveis do sistema até o final do intervalo, usando a inclinação inicial.

6. Cálculo da média das inclinações:

A média ponderada é calculada entre as inclinações inicial e final. Daqui é obtida uma melhor estimativa da inclinação média ao longo do intervalo.

7. Cálculo do valor aproximado para iterações:

Utilizando a inclinação média calculada, são atualizadas as variáveis do sistema para o próximo passo. Repetimos este processo para o número desejado de iterações 𝑛.

**Função (MatLab):**

% RK2 - Método de Runge-Kutta de 2ª Ordem para um Sistema de SED/PVI

%INPUT:

% f - 1ª Função do sistema de equações diferenciais em v, u e t

% g - 2ª Função do sistema de equações diferenciais em v, u e t

% [a, b] - Extremos do intervalo da variável independente t

% n - Número de subintervalos ou iterações do método

% u0 - Condição inicial da 1ª variável dependente

% v0 - Condição inicial da 2ª variável dependente

%OUTPUT:

% t - vector de x, dos passos de "a" a "b"

% u - vector das soluções aproximadas dos deslocamentos

% v - vector das soluções aproximadas das velocidades

% Autores: Arménio Correia | armenioc@isec.pt

% Ana Rita Conceição Pessoa .: a2023112690@isec.pt

% João Francisco de Matos Claro .: a21270422@isec.pt

%

% 28/04/2024

function [t, u, v] = RK2(f, g, a, b, n, u0, v0)

h = (b-a)/n;

% Alocação de memória

t = a:h:b;

u = zeros(1,n+1);

v = zeros(1,n+1);

u(1) = u0; % Atribuição do valor inicial de u

v(1) = v0; % Atribuição do valor inicial de v

% O número de iterações vai ser igual a n

for i=1:n

% Inclinação no início do intervalo

uk1 = h\*f(t(i),u(i),v(i));

vk1 = h\*g(t(i),u(i),v(i));

% Inclinação no fim do intervalo

uk2 = h\*f(t(i+1),u(i)+uk1,v(i)+vk1);

vk2 = h\*g(t(i+1),u(i)+uk1,v(i)+vk1);

% Cálculo da média das inclinações e aproximação do RK2 para a inésima iteração

u(i+1) = u(i)+(uk1+uk2)/2;

v(i+1) = v(i)+(vk1+vk2)/2;

end

end

## Método de Runge-Kutta de Quarta Ordem

### Fórmulas

O Método de Runge-Kutta de Quarta Ordem (RK4) para resolver um SED é dado pelas seguintes equações:

Onde:

• → Aproximação do método de RK4 para **n** iterações;

• → Aproximação do método de RK4 para **n** iterações;

• → Ordenada atual da solução aproximada ;

• → Ordenada atual da solução aproximada ;

• → Cálculo da média das inclinações;

• → Cálculo da média das inclinações.

Cálculo de e **:**

Onde:

• → Cálculo da média das inclinações;

• → Inclinação no início do intervalo;

• → Inclinação no ponto médio do intervalo;

• → Inclinação no ponto médio do intervalo;

• → Inclinação no fim do intervalo.

Cálculo de e **:**

Onde:

• → Inclinação no início do intervalo;

• ℎ → Valor de cada subintervalo (passo);

• ) → Valor de 𝑓 no ponto ;

• ) → Valor de no ponto .

Cálculo de e **:**

Onde:

• → Inclinação no ponto médio do intervalo;

• ℎ → Valor de cada subintervalo (passo);

• → Abcissa atual do intervalo escolhido;

• → Ordenada atual da solução aproximada ;

• → Inclinação no início do intervalo;

• → Ordenada atual da solução aproximada ;

Cálculo de e **:**

Onde:

• → Inclinação no fim do intervalo;

• ℎ → Valor de cada subintervalo (passo);

• → Abcissa atual do intervalo escolhido;

• → Ordenada atual da solução aproximada ;

• → Inclinação no início do intervalo;

• → Ordenada atual da solução aproximada ;

Cálculo de e **:**

Onde:

• → Inclinação no fim do intervalo;

• ℎ → Valor de cada subintervalo (passo);

• → Próxima abcissa do intervalo escolhido;

• → Ordenada atual da solução aproximada ;

• → Inclinação no ponto médio do intervalo;

• → Ordenada atual da solução aproximada ;

### Algoritmo e Função

**Algoritmo:**

1. Definir o Valor do Passo (*h*):

Determinação do valor do passo de integração ℎ. Este valor determina o tamanho dos incrementos ao longo do tempo ou da variável independente.

2. Criar um vetor 𝑢 e um vetor 𝑣 para guardar as soluções:

Os vetores 𝑢 e 𝑣 são usados para armazenar as soluções das variáveis do sistema e as suas derivadas, respetivamente. Estes vetores são atualizados a cada iteração do método.

3. Atribuir o primeiro valor de 𝑢 e de 𝑣:

Os primeiros valores das variáveis do sistema devem ser atribuídos aos primeiros elementos dos vetores 𝑢 e 𝑣, respetivamente. Estes valores são geralmente fornecidos pelas condições iniciais do problema.

4. Cálculo da inclinação no início do intervalo:

Para cada iteração, é calculada a inclinação inicial usando as equações diferenciais do sistema e os valores das variáveis do sistema no início do intervalo.

1. Cálculo da inclinação no ponto médio do intervalo (1ª aproximação):

É calculada uma primeira estimativa da inclinação no ponto médio do intervalo utilizando uma média ponderada entre a inclinação inicial e a inclinação calculada a partir de uma estimativa preliminar das variáveis.

1. Cálculo da inclinação no ponto médio do intervalo (2ª aproximação):

Em seguida, é recalculada a inclinação no ponto médio do intervalo usando a mesma técnica utilizada no passo anterior, mas utilizando a inclinação calculada na primeira aproximação.

1. Cálculo da inclinação no fim do intervalo:

Determinação da inclinação no final do intervalo usando as equações diferenciais do sistema e os valores das variáveis do sistema no ponto médio do intervalo.

1. Cálculo da média ponderada das inclinações:

Determinação da média ponderada entre as inclinações inicial e final, bem como as inclinações nos pontos médios do intervalo calculadas nas duas aproximações anteriores.

1. Cálculo do valor aproximado para 𝑛 iterações:

Usando a média ponderada das inclinações, há a atualização das variáveis do sistema para o próximo passo de tempo. Repetimos este processo para o número desejado de iterações 𝑛, avançando assim a solução do sistema ao longo do domínio da variável independente.

1. Cálculo final utilizando o método RK4:

Uma vez que os passos anteriores envolvem aproximações, o método de RK4 realiza o cálculo final da solução utilizando as inclinações calculadas ao longo do intervalo. Este passo garante uma solução mais precisa para o sistema de equações diferenciais.

**Função (MatLab):**

% RK4 - Método de Runge-Kutta de 4ª Ordem para um Sistema de SED/PVI

%INPUT:

% f - 1ª Função do sistema de equações diferenciais em v, u e t

% g - 2ª Função do sistema de equações diferenciais em v, u e t

% [a, b] - Extremos do intervalo da variável independente t

% n - Número de subintervalos ou iterações do método

% u0 - Condição inicial da 1ª variável dependente

% v0 - Condição inicial da 2ª variável dependente

%OUTPUT:

% t - vector de x, dos passos de "a" a "b"

% u - vector das soluções aproximadas dos deslocamentos

% v - vector das soluções aproximadas das velocidades

% Autores: Arménio Correia | armenioc@isec.pt

% Ana Rita Conceição Pessoa .: a2023112690@isec.pt

% João Francisco de Matos Claro .: a21270422@isec.pt

%

% 28/04/2024

function [t, u, v] = RK4(f, g, a, b, n, u0, v0)

h = (b-a)/n;

% Alocação de memória

t = a:h:b;

u = zeros(1,n+1);

v = zeros(1,n+1);

u(1) = u0; % Atribuição do valor inicial de u

v(1) = v0; % Atribuição do valor inicial de v

for i=1:n % O número de iterações vai ser igual a n

% Inclinação no início do intervalo

uk1 = h\*f(t(i),u(i),v(i));

vk1 = h\*g(t(i),u(i),v(i));

% Inclinação no ponto médio do intervalo

uk2 = f(t(i)+(h/2),u(i)+h\*uk1/2,v(i)+h\*vk1/2);

vk2 = g(t(i)+(h/2),u(i)+h\*uk1/2,v(i)+h\*vk1/2);

% Inclinação no ponto médio do intervalo

uk3 = f(t(i)+(h/2),u(i)+h\*uk2/2,v(i)+h\*vk2/2);

vk3 = g(t(i)+(h/2),u(i)+h\*uk2/2,v(i)+h\*vk2/2);

% Inclinação no fim do intervalo

uk4 = f(t(i)+(h/2),u(i)+h\*uk3,v(i)+h\*vk3);

vk4 = g(t(i)+(h/2),u(i)+h\*uk3,v(i)+h\*vk3);

% Cálculo da média das inclinações e aproximação do Método RK4 para a inésima iteração

u(i+1) = u(i)+(h/6)\*(uk1+2\*uk2+2\*uk3+uk4);

v(i+1) = v(i)+(h/6)\*(vk1+2\*vk2+2\*vk3+vk4);

end

end

end

# Exemplos de aplicação e teste dos métodos

## Algoritmo de Resolução

De modo a resolver e aplicar a GUI desenvolvida são processadas, de forma constante, os seguintes passos após a apresentação de uma Equação Diferencial (ED) de 2ª ordem, como por exemplo:

Sendo **y** uma função e **A, B, C** e **D** constantes em **t**.

Temos como objetivo obter, numericamente, , solução da Equação Diferencial.

**1º Passo:** Resolver em ordem a a equação dada:

**2º Passo:** Mudança de variável:

**3º Passo:** Derivar e e efetuar as devidas substituições:

**4º Passo:** Definir os Problemas de Valores Iniciais (PVI’s) e o SED:

**5º Passo:** Aplicar Métodos Numéricos na GUI, com e , de modo a obter uma aproximação de

## Problema do Pêndulo

### Modelação matemática do problema

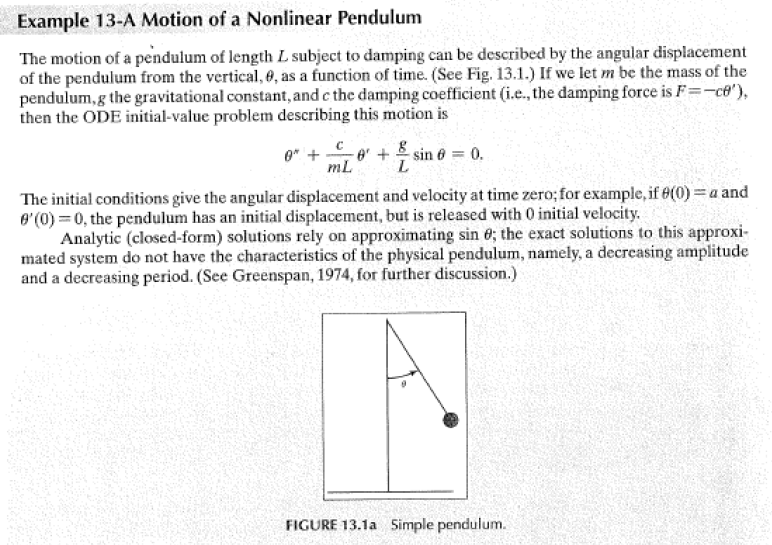


Figura 1 – Problema do Pêndulo

* Utilizando o programa desenvolvido em MATLAB, conseguimos resolver o problema do pêndulo de maneira simples.
* Como este problema é uma equação diferencial de segunda ordem homogénea não linear, não podemos apresentar uma solução exata.
* No programa, serão exibidos a função fornecida no enunciado, os parâmetros de entrada, os métodos utilizados para resolver o problema, um gráfico e uma tabela.
* Ao utilizar todos os métodos disponíveis para compará-los, podemos observar a precisão de cada um na resolução deste problema.

A resolução seguinte foi feita na aula:

Pelo enunciado, sabemos que a equação que traduz o movimento é:

Assume-se que:

Assume-se que:

|  |  |
| --- | --- |
| Ângulo que o pêndulo faz com a base antes de ser largado |  |
| Velocidade antes do pêndulo ser largado |  |

Obtém-se:

Problema:

Temos uma equação diferencial de n=2 homogénea , então vamos transformar a ED de ordem n=2 num SED de ordem n=1 (transformar o problema) e depois é aplicado um método numérico ao sistema.

Substituição:

∴ e

Aplicando as condições iniciais que sabemos e as equações diferenciais obtidas após a transformação é obtido o seguinte problema equivalente:

### Resolução através da App desenvolvida

Após a modelação matemática do problema iremos introduzir os dados obtidos na app desenvolvida:

Não dá para calcular a exata -->

STRESSES

Uma imagem com texto, captura de ecrã, Tipo de letra, número

Descrição gerada automaticamente

**Observação:** Uma vez a equação diferencial deste problema não é linear, não é possível calcular uma solução exata através do MATLAB.

## Movimento Livre Amortecido

### Modelação matemática do problemaUma imagem com texto, captura de ecrã, Tipo de letra, documento

Figura 2 – Enunciado: Problema do Movimento Livre Amortecido

* Este problema é um exemplo clássico para sistemas mecânicos e são utilizados para estudos de oscilações.
* Sabemos que a mola tem um comportamento linear, o amortecedor também e as superfícies em contacto não têm atrito.

Pelo enunciado, sabemos que a equação que traduz o movimento é:

Assume-se que:

Assume-se que:

|  |  |
| --- | --- |
| Ângulo que o objeto faz com a base antes de ser largado |  |
| Velocidade antes do objeto ser largado |  |

Obtém-se:

Problema:

Temos uma equação diferencial de n=2 homogénea, então vamos transformar a ED de ordem n=2 num SED de ordem n=1 (transformar o problema) e depois é aplicado um método numérico ao sistema.

Substituição:

∴ e

Aplicando as condições iniciais que sabemos e as equações diferenciais obtidas após a transformação é obtido o seguinte problema equivalente:

### Resolução através da App desenvolvida

Após a modelação matemática do problema iremos introduzir os dados obtidos na app desenvolvida:

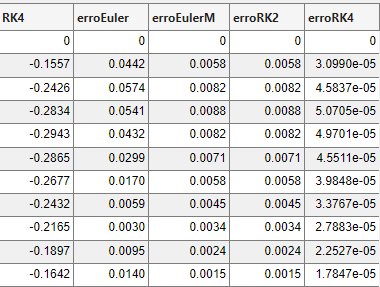
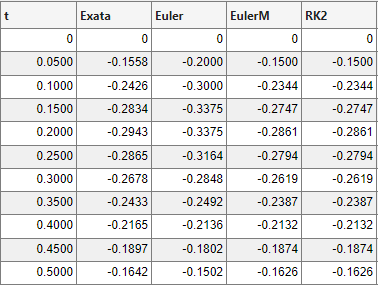
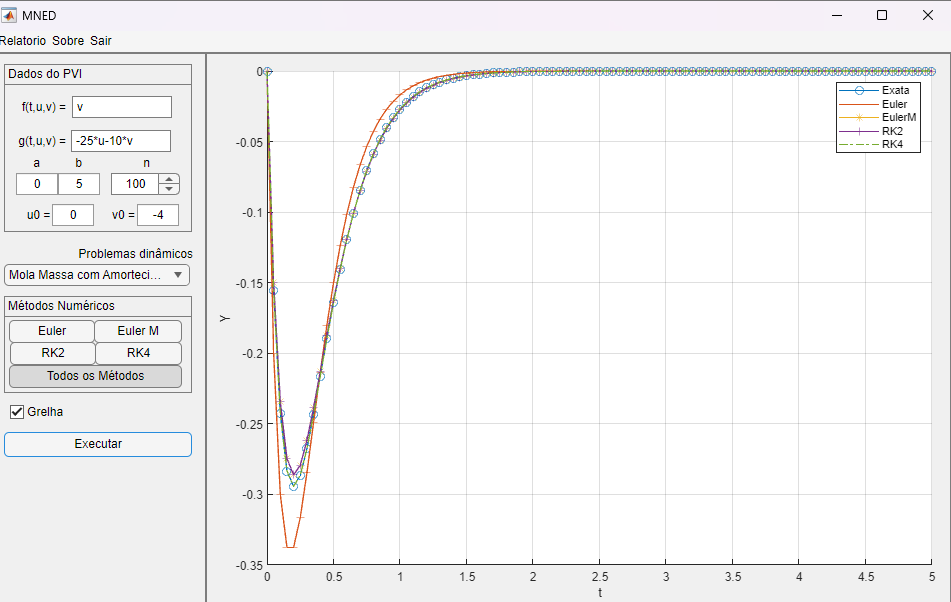


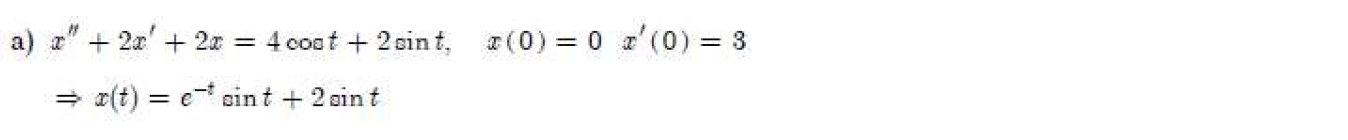
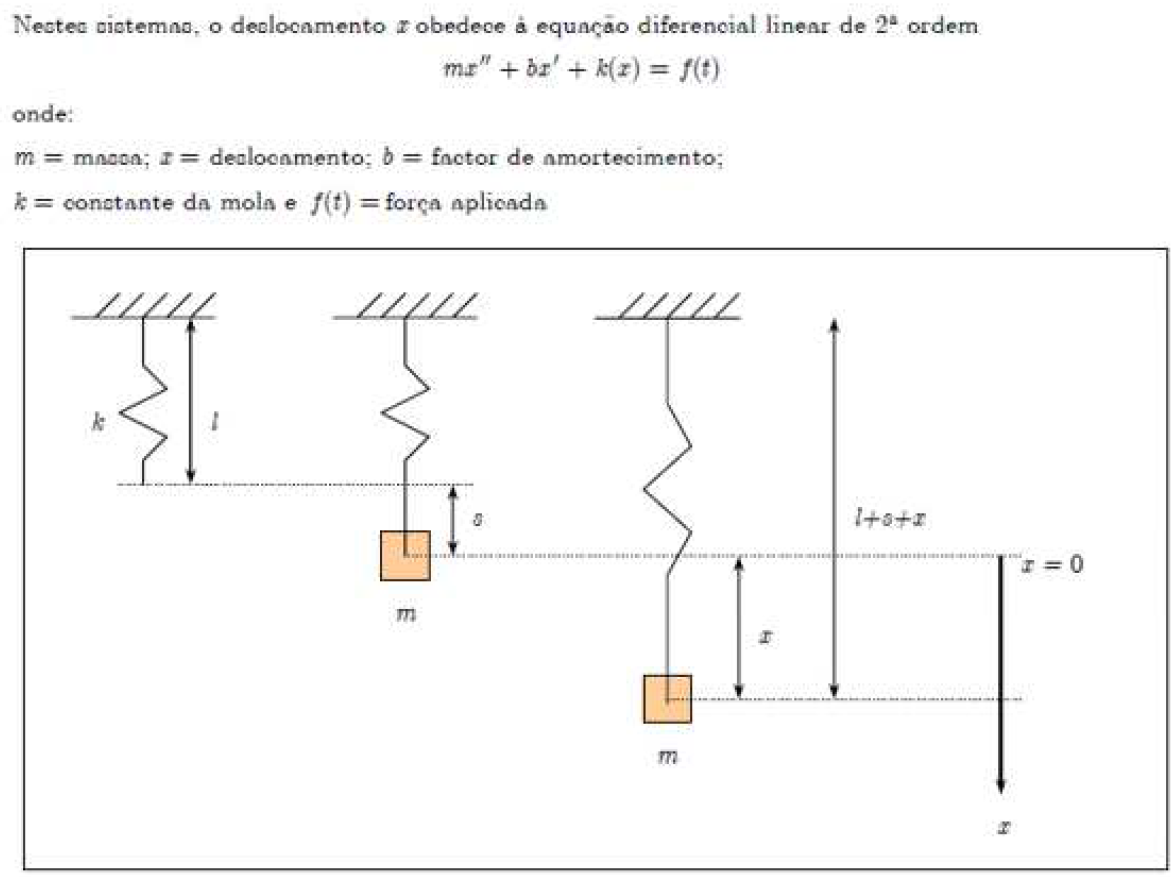
Figura 3 – App: Problema do Movimento Livre Amortecido

**Observação:** Tendo em conta que o objeto parte da posição de equilíbrio com uma velocidade dirigida para cima e que as forças opostas atuam na direção oposta ao movimento é natural que a velocidade do objeto comece com uma velocidade negativa no gráfico.

## Modelo Vibratório Mecânico

### Modelação matemática do problema

Figura 3 – Enunciado: Problema Vibratório Mecânico



Pelo enunciado, sabemos que a equação que traduz o movimento é:

Pela alínea a) assume-se que:

Assume-se que:

|  |  |
| --- | --- |
| Ângulo que o objeto faz com a base antes de ser largado |  |
| Velocidade antes do objeto ser largado |  |

Obtém-se:

Problema:

Temos uma equação diferencial de n=2 homogénea , então vamos transformar a ED de ordem n=2 num SED de ordem n=1 (transformar o problema) e depois é aplicado um método numérico ao sistema.

Substituição:

∴ e

Aplicando as condições iniciais que sabemos e as equações diferenciais obtidas após a transformação é obtido o seguinte problema equivalente:

### Resolução através da App desenvolvida

Uma imagem com texto, captura de ecrã, Gráfico, número

Descrição gerada automaticamenteApós a modelação matemática do problema iremos introduzir os dados obtidos na app desenvolvida:

Figura 4 App: Modelo Vibratório Mecânico

NÃO FAZ SENTIDO

c/ amort -> devia diminuir ……

**Observação:** Tendo em conta que o objeto é sujeito a um fator de amortecimento o gráfico deste problema deveria mostrar a diminuição da velocidade do mesmo ao longo do tempo, porém isso não acontece pois mostra um movimento característico de objetos quando não estão sujeitos a essa condição..

## Movimento Harmónico Simples Mecânico

### Uma imagem com texto, captura de ecrã, file, Tipo de letra Descrição gerada automaticamenteModelação matemática do problema

Figura 5 - Problema do Movimento Harmónico Simples Mecânico

Pelo enunciado, sabemos que a equação que traduz o movimento é:

Assume-se que:

Assume-se que:

|  |  |
| --- | --- |
| Ângulo que o objeto faz com a base antes de ser largado |  |
| Velocidade antes do objeto ser largado |  |

Obtém-se:

Problema:

Temos uma equação diferencial de n=2 homogénea, então vamos transformar a ED de ordem n=2 num SED de ordem n=1 (transformar o problema) e depois é aplicado um método numérico ao sistema.

Substituição:

∴ e

Aplicando as condições iniciais que sabemos e as equações diferenciais obtidas após a transformação é obtido o seguinte problema equivalente:

### Resolução através da App desenvolvida

Após a modelação matemática do problema iremos introduzir os dados obtidos na app desenvolvida:

EULER ESTRANHO…. S/ AMORT

Uma imagem com texto, captura de ecrã, Gráfico, diagrama

Descrição gerada automaticamente

**Observação:** Este gráfico mostra o comportamento típico de um objeto quando não é sujeito a forças de amortecimento, ou seja, um movimento contínuo ao longo do tempo.

Neste gráfico, também é possível observar que o Método de Euler é o método que apresenta um erro muito maior em comparação com os restantes métodos e que esse erro é cada vez maior com o aumento do número de iterações feitas.

## Circuito Elétrico

### Modelação matemática do problema

Neste caso, o circuito elétrico é composto apenas por um indutor (L) e um condensador (C) em paralelo, sem resistência (R). O comportamento deste circuito é governado pela lei de Kirchhoff para correntes e tensões.

A equação diferencial que descreve o comportamento do circuito é dada por:

Assumem-se os seguintes valores significativos para L e C:

Uma imagem com preto, escuridão

Descrição gerada automaticamente

Figura 6 - Problema do Circuito Elétrico

Assume-se que:

|  |  |
| --- | --- |
| Carga inicial |  |
| Velocidade incial |  |

Obtém-se:

Problema:

Temos uma equação diferencial de n=2 homogénea, então vamos transformar a ED de ordem n=2 num SED de ordem n=1 (transformar o problema) e depois é aplicado um método numérico ao sistema.

Substituição:

∴ e

Aplicando as condições iniciais que sabemos e as equações diferenciais obtidas após a transformação é obtido o seguinte problema equivalente:

### Resolução através da App desenvolvida

Após a modelação matemática do problema iremos introduzir os dados obtidos na app desenvolvida:

**?!!?!?!!!?!?**

Uma imagem com texto, captura de ecrã, Tipo de letra, software

Descrição gerada automaticamente

## Problema do crescimento económico sob restrições

### Modelação matemática do problema

Supondo que estamos a analisar o crescimento económico de uma região que depende de recursos naturais, mas está sujeita a restrições ambientais, como limitações de recursos naturais, poluição ou degradação ambiental. Podemos modelar a dinâmica deste sistema usando uma equação diferencial homogénea de segunda ordem.

Uma equação diferencial que descreve este problema pode ser uma versão modificada do modelo de crescimento económico de Solow-Swan, que leva em consideração as restrições ambientais. Uma possível forma da equação diferencial é:

Onde:

• → Produto interno bruto (PIB) ou a produção económica da região no tempo ;

• → Taxa de variação da produção em relação ao tempo;

• → Coeficiente de amortecimento, que representa os efeitos das restrições ambientais na taxa de crescimento económico;

• → Taxa de crescimento económico, que representa a contribuição do investimento e da tecnologia para o crescimento económico;

• → Função que representa choques externos, políticas económicas ou mudanças no ambiente.

Esta equação descreve como o crescimento económico da região é influenciado não apenas pelos investimentos e avanços tecnológicos, mas também pelas restrições ambientais. A presença do termo “amortecimento” (𝛼) reflete como estas restrições podem diminuir a taxa de crescimento económico ao longo do tempo.

Resolver esta equação diferencial permite entender como o crescimento económico é afetado pelas restrições ambientais e como políticas económicas e ambientais podem ser formuladas para promover um desenvolvimento sustentável.

Assumem-se os seguintes valores significativos:

* Um valor significativo poderia ser , indicando que as restrições ambientais reduzem a taxa de crescimento económico em 5% ao longo do tempo.
* Um valor significativo poderia ser, indicando uma taxa de crescimento económico de 10% por ano devido ao investimento e avanços tecnológicos.

Uma expressão significativa para poderia ser:

Onde:

* Amplitude do choque ou da política económica
* Frequência do choque ou da política económica que ocorre ao longo do tempo. Pode ser interpretada como o número de ciclos completos que ocorrem em uma unidade de tempo

Considerando os seguintes valores hipotéticos para e :

* Um valor significativo poderia ser , indicando um choque relativamente forte ou uma política com um impacto substancial.
* Um valor significativo poderia ser , indicando que o choque ou a política ocorre aproximadamente uma vez a cada 10 unidades de tempo.

Assume-se que:

|  |  |
| --- | --- |
| PIB inicial |  |
| Taxa de variação inicial do PIB |  |

Obtém-se:

Problema:

Temos uma equação diferencial de n=2 homogénea,então vamos transformar a ED de ordem n=2 num SED de ordem n=1 (transformar o problema) e depois é aplicado um método numérico ao sistema.

Substituição:

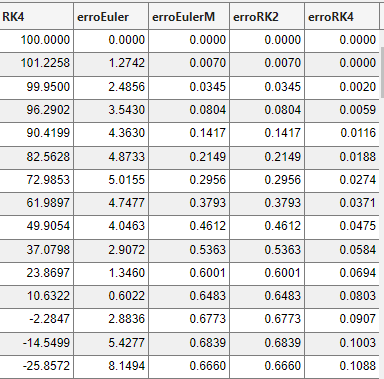
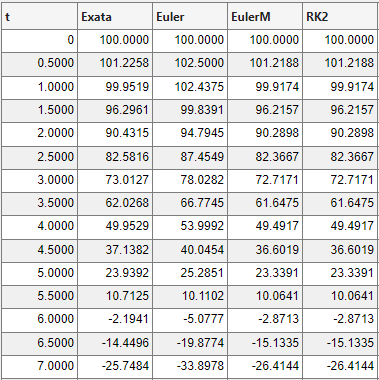
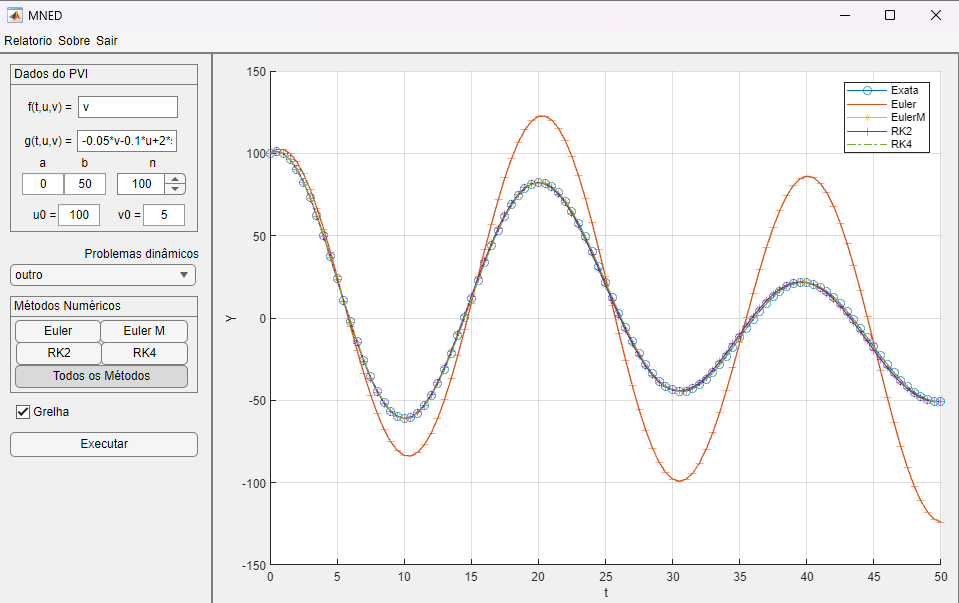
∴ e

Aplicando as condições iniciais que sabemos e as equações diferenciais obtidas após a transformação é obtido o seguinte problema equivalente:

### Resolução através da App desenvolvida

Após a modelação matemática do problema iremos introduzir os dados obtidos na app desenvolvida:

Figura 7 - App: Problema do crescimento económico sob restrições



# Conclusão

Este trabalho demonstrou a aplicação bem-sucedida de métodos numéricos, como Euler, Euler Melhorado, RK2 e RK4, na resolução de sistemas de equações diferenciais de segunda ordem com condições iniciais.

Estes métodos foram adaptados para resolver uma variedade de problemas aplicados à vida real onde foi possível observar, que o aumento do número de subintervalos melhora a precisão dos métodos.

Métodos mais avançados, como o RK4, geralmente fornecem maior precisão, enquanto o método de Euler tende a ter erros maiores (notável no Movimento Harmónico Simples Mecânico).

Além disso, lidámos com equações diferenciais não lineares, adaptando o nosso código para situações em que não há solução exata.

Este trabalho destaca a importância prática dos conceitos aprendidos.

# Bibliografia

1. Zill, D. (2017). *First Course in Differential Equations with Modeling Applications*. Blue Kingfisher.
2. Correia, A. (s.d.). *Equações Diferenciais de ordem 2 \_ Problemas de aplicação*. Moodle. <https://moodle.isec.pt/moodle/mod/forum/discuss.php?d=37842>

# Autoavaliação e heteroavaliação do trabalho submetido

Tendo em conta o que foi feito ao longo do trabalho e que o mesmo vale 5 valores, concluímos assim as seguintes auto e hétero avaliações:

**Autoavaliação:**

Ana Rita Conceição Pessoa – 4 valores

João Francisco de Matos Claro – 5 valores

**Heteroavaliação:**

Ana Rita Conceição Pessoa – 4 valores

João Francisco de Matos Claro – 5 valores

Text

Description automatically generated with medium confidence