Álgebra Linear Aplicada à Computação e Machine Learning

1. Por que Álgebra Linear é fundamental?

Em computação científica e Machine Learning, dados raramente são escalares. Imagens, sinais, textos e estados de sistemas são representados como **vetores** e **matrizes**.

Uma imagem em escala de cinza de dimensão $n \times m$ é matematicamente:

$$\mathbf{I} \in \mathbb{R}^{n \times m}$$

Uma rede neural realiza, camada após camada:

$$\mathbf{z}^{(k)} = \mathbf{W}^{(k)}\mathbf{a}^{(k-1)} + \mathbf{b}^{(k)}$$

Logo, compreender quando uma matriz pode ser invertida, quando um sistema possui solução única ou múltiplas soluções é essencial para:

- Treinamento de modelos
- Estabilidade numérica
- Generalização

---

2. Sistemas de Equações Lineares

Um sistema linear é um conjunto de equações da forma:

$$a_1x_1 + a_2x_2 + \cdots + a_nx_n = b$$

Exemplo clássico em computação:

$$\begin{cases} 2x + y = 5 \\ x - y = 1 \end{cases}$$

Resolução algébrica

Somando as equações:

$$3x = 6 \Rightarrow x = 2$$

Substituindo:

$$y = 1$$

Solução única:

$$(x, y) = (2, 1)$$

---

3. Forma Matricial

O sistema anterior pode ser escrito como:

$$\begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Forma compacta:

$$\mathbf{A}\mathbf{x} = \mathbf{b}$$

Resolver o sistema equivale a encontrar:

$$\mathbf{x} = \mathbf{A}^{-1}\mathbf{b}$$

Obs: isso só é possível se $\mathbf{A}$ for não-singular.

---

4. Interpretação Geométrica

4.1 Uma equação → uma reta

$$x + y = 4$$

Pontos que satisfazem a equação:

- $(4, 0)$
- $(2, 2)$
- $(0, 4)$

Todos pertencem à mesma reta no plano.

4.2 Duas equações → interseção de retas

$$\begin{cases} x + y = 4 \\ x - y = 2 \end{cases}$$

As retas se cruzam em um único ponto → solução única.

---

5. Tipos de Sistemas Lineares

5.1 Sistema Não-Singular (Solução Única)

$$\begin{cases} x + y = 4 \\ x + 2y = 5 \end{cases}$$

As equações são independentes. Geometricamente: retas com inclinações diferentes.

5.2 Sistema Singular Redundante (Infinitas Soluções)

$$\begin{cases} x + y = 4 \\ 2x + 2y = 8 \end{cases}$$

A segunda equação é múltipla da primeira:

$$(2x + 2y) = 2(x + y)$$

As retas coincidem → infinitas soluções.

5.3 Sistema Singular Contraditório (Sem Solução)

$$\begin{cases} x + y = 4 \\ x + y = 6 \end{cases}$$

Mesma inclinação, interceptos diferentes → retas paralelas.

---

6. Dependência Linear

Um conjunto de vetores é linearmente dependente se algum deles pode ser escrito como combinação linear dos outros.

Exemplo:

$$\mathbf{v}_1 = (1, 1), \quad \mathbf{v}_2 = (2, 2)$$
$$\mathbf{v}_2 = 2\mathbf{v}_1$$

Isso implica:

- Perda de informação
- Matriz singular
- Colunas redundantes em datasets

---

7. Determinante

Para matrizes 2×2:

$$\det \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} = ad - bc$$

Exemplo 1 (Não-singular)

$$\det \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix} = 4 - 6 = -2 \neq 0$$

Exemplo 2 (Singular)

$$\det \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \end{bmatrix} = 4 - 4 = 0$$

Determinante zero ⇔ linhas dependentes ⇔ matriz singular.

---

8. Sistemas 3×3

$$\begin{cases} x + y + z = 6 \\ 2x + y + z = 7 \\ x + 2y + z = 8 \end{cases}$$

Forma matricial:

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \end{bmatrix}$$

Se $\det(\mathbf{A}) \neq 0$, o sistema tem solução única.

---

9. Aplicação Direta em Machine Learning

Em regressão linear:

$$\mathbf{w} = (\mathbf{X}^T\mathbf{X})^{-1}\mathbf{X}^T\mathbf{y}$$

Se as colunas de $\mathbf{X}$ forem dependentes:

- $\mathbf{X}^T\mathbf{X}$ é singular
- O modelo não pode ser resolvido diretamente

Soluções práticas:

- Regularização (Ridge, Lasso)
- PCA para remover redundância

---

10. Conclusão

Álgebra Linear fornece a estrutura matemática para:

- Entender modelos lineares
- Detectar redundância de dados
- Analisar estabilidade numérica
- Compreender redes neurais