# Algoritmos y Estructuras de Datos

## Redictado Cursada 2019

**Prof. Alejandra Schiavoni (ales@info.unlp.edu.ar)**

**Prof. Catalina Mostaccio (catty@lifia.info.unlp.edu.ar)**

**Prof. Pablo Iuliano (piuliano@info.unlp.edu.ar)**

# Análisis de los algoritmos de recorridos en Árboles

# Agenda

- Tiempo de ejecución de los recorridos
  - Árboles Binarios
  - Árboles Generales
  - Árboles AVL

# Árboles binarios

# Recorridos

- ## Preorden
  - Se procesa primero la raíz y luego sus hijos, izquierdo y derecho.
- ## Inorden
  - Se procesa el hijo izquierdo, luego la raíz y último el hijo derecho
- ## Postorden
  - Se procesan primero los hijos, izquierdo y derecho, y luego la raíz
- ## Por niveles
  - Se procesan los nodos teniendo en cuenta sus niveles, primero la raíz, luego los hijos, los hijos de éstos, etc.

# Recorrido Preorden

```
public void preOrden() {
    imprimir (dato);
    si (tiene hijo_izquierdo)
        hijoIzquierdo.preOrden();
    si (tiene hijo_derecho)
        hijoDerecho.preOrden();
}
```

# Recorrido Preorden: Tiempo de Ejecución

Considerando un árbol binario ***lleno*** y altura ***h***

$$T(n) = \begin{cases} c & n = 1 \\ c + 2\,T(\,(n-1)\,/\,2\,) & n > 1 \end{cases}$$

$T(n)$ es $O(n)$

# Recorrido Preorden: Tiempo de Ejecución

Otra forma: expresando en función de la altura

$$T(h) = \begin{cases} c & h = 0 \\ c + 2\,T(h-1) & h > 0 \end{cases}$$

$T(n)$ es $O(n)$

# Recorrido: Por niveles

```
public void  porNiveles() {
      encolar(raíz);
       mientras (cola no se vacíe) {
         desencolar(v);
         imprimir (dato de v);
         si (tiene hijo_izquierdo)
                 encolar(hijo_izquierdo);
          si (tiene hijo_derecho)
                 encolar(hijo_derecho);
       }
 }
```

# Recorrido por niveles: Tiempo de Ejecución

$$T\,(n) = cte_1 + \sum_{i=1}^{n}(cte_2)$$

$$= cte_1 + n \, * cte_2$$

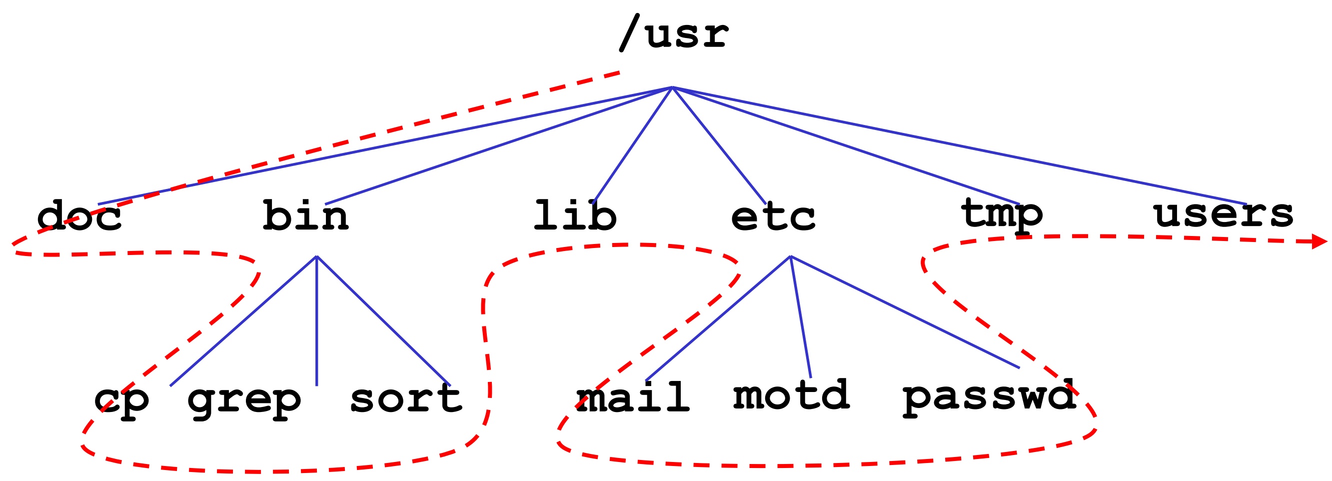
$T(n)$ es $O(n)$

# Árboles Generales

# Recorridos

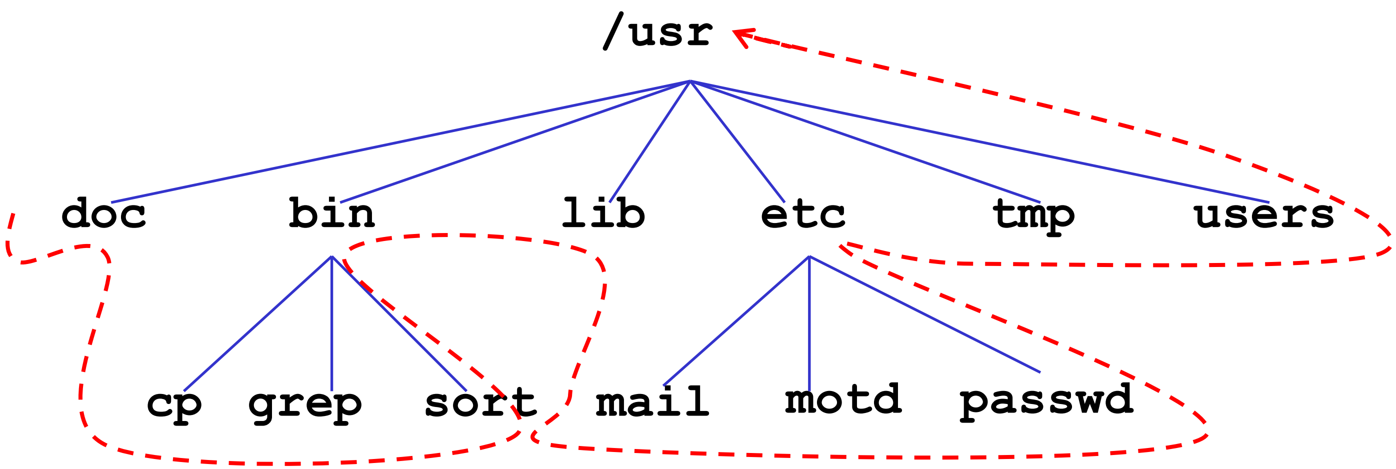
- **Preorden**
  - Se procesa primero la raíz y luego los hijos
- **Inorden**
  - Se procesa el primer hijo, luego la raíz y por último los restantes hijos
- **Postorden**
  - Se procesan primero los hijos y luego la raíz
- **Por niveles**
  - Se procesan los nodos teniendo en cuenta sus niveles, primero la raíz, luego los hijos, los hijos de éstos, etc.

# Recorrido Preorden




```
public void preOrden() {
   imprimir (dato);
   obtener lista de hijos;
   mientras (lista tenga datos) {
         hijo ← obtenerHijo;
         hijo.preOrden();
   }
}
```

# Recorrido Postorden




```
public void postOrden() {
   obtener lista de hijos;
   mientras (lista tenga datos) {
         hijo ← obtenerHijo;
         hijo.postOrden();
   }
  imprimir (dato);
}
```

# Recorrido Preorden: Tiempo de Ejecución

Considerando un árbol lleno de grado ***k*** y altura ***h***

$$T(n) = \begin{cases} c & n = 1 \\ c + k\,T((n-1)/k) & n > 1 \end{cases}$$

$T(n)$ es $O(n)$

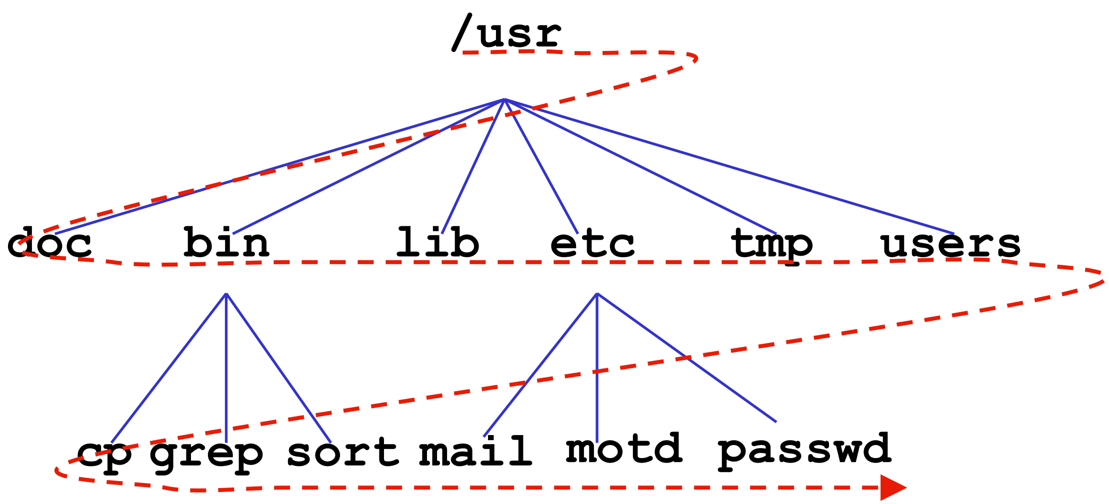
# Recorrido Preorden: Tiempo de Ejecución

Otra forma: expresando en función de la altura

$$T(h) = \begin{cases} c & h = 0 \\ c + k\,T(h-1) & h > 0 \end{cases}$$

$T(n)$ es $O(n)$

# Recorrido por niveles




```
public void porNiveles() {
   encolar(raíz);
   mientras cola no se vacíe {
      v ← desencolar();
      imprimir (dato de v);
      para cada hijo de v
      encolar(hijo);
   }
}
```

# Recorrido por niveles: Tiempo de Ejecución

```
public void porNiveles() {
1.    encolar(raíz);
2.    mientras cola no se vacíe {
3.        v ← desencolar();
4.        imprimir (dato de v);
5.        para cada hijo de v
6.            encolar(hijo);  }}
```

$$T(n) = cte_1 + \sum_{i=1}^{n} (cte_2 + h_{v_i} * cte_1)$$

1. 2. 3.y 4. 5. 6.

$$= cte_1 + n * cte_2$$

$$+ (h_{v1} * cte_1 + h_{v2} * cte_1 + \cdots + h_{vn} * cte_1)$$

$$= cte_1 + n * cte_2 + (h_{v1} + h_{v2} + \cdots + h_{vn}) * cte_1$$

$$= cte_1 + n * cte_2 + (n - 1) * cte_1$$

$T(n)$ es $O(n)$

# Árboles AVL

# Árboles AVL - Tiempo de Ejecución

Dado que el árbol AVL es un árbol binario de búsqueda balanceado, tomamos $N_h$ como el número de nodos en un árbol AVL de altura h

$$
\begin{aligned}
N_h &\geq N_{h-1} + N_{h-2} + 1 \\
&\geq 2\, N_{h-2} + 1 \\
&\geq 1 + 2(1 + 2\, N_{h-4}) = 1 + 2 + 2^2\, N_{h-4} \\
&\geq 1 + 2 + 2^2 + 2^3\, N_{h-6} \\
&\ldots \\
&\geq 1 + 2 + 2^2 + 2^3 + \ldots + 2^{h/2} = 2^{h/2+1} - 1
\end{aligned}
$$

continúa …

# Árboles AVL - Tiempo de Ejecución

Entonces,

$2^{h/2+1} - 1 \leq n$

$h/2 \leq \log_2(n + 1) - 1$

$h \leq 2 \log_2(n + 1) - 2$

Un análisis cuidadoso basado en la teoría de los números de Fibonacci, nos da un valor más ajustado de $1.44 \log_2(n + 2)$.