1 概述

1.1 MSCKF

MSCKF 全称 Multi-State Constraint Kalman Filter（多状态约束下的 Kalman 滤波器），是一种基于滤波的 VIO 算法，2007 年由明尼苏达州大学 Mourikis 在 [1] 中首次提出。MSCKF 在 EKF 框架下融合 IMU 和视觉信息，相较于单纯的 VO 算法，MSCKF 能够适应更剧烈的运动、一定时间的纹理缺失等，具有更高的鲁棒性；相较于基于优化的 VIO 算法（VINS，OKVIS），MSCKF 精度相当，速度更快，适合在计算资源有限的嵌入式平台运行。在机器人、无人机、AR/VR 领域，MSCKF 都有较为广泛的运用，如 Google Project Tango 就用了 MSCKF 进行位姿估计。

1.2 MSCKF vs EKF-SLAM

在传统的 EKF-SLAM 框架中，特征点的信息会加入到特征向量和协方差矩阵里，这种方法的缺点是特征点的信息会给一个初始深度和初始协方差，如果不正确的话，极容易导致后面不收敛，出现 inconsistent 的情况。MSCKF 维护一个 pose 的 FIFO，按照时间顺序排列，可以称为滑动窗口，一个特征点在滑动窗口的几个位姿都被观察到的话，就会在这几个位姿间建立约束，从而进行 KF 的更新。 [2]

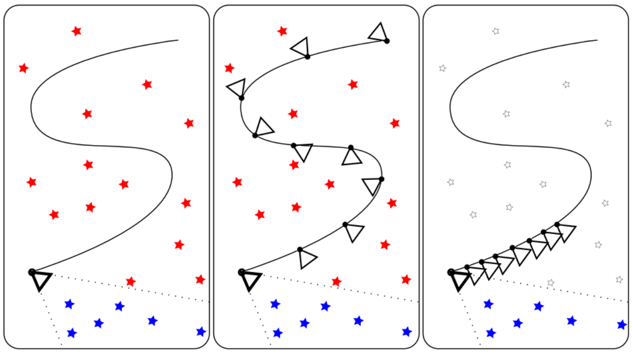
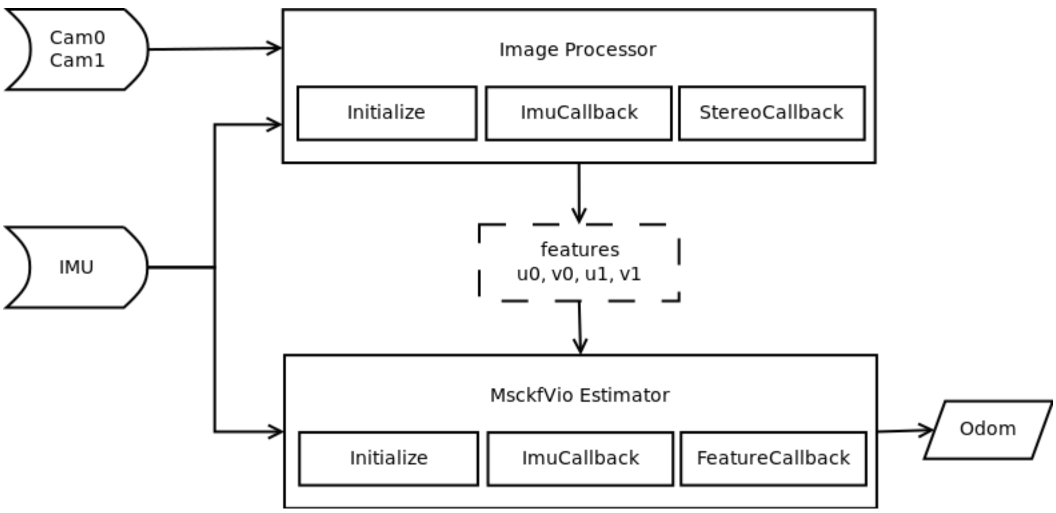


图 1 EKF-SLAM, keyframe-based SLAM, MSCKF

1.3 S-MSCKF

S-MSCKF [3] 是宾夕法尼亚大学 Vijay Kumar 实验室开源的双目版本 MSCKF 算法。



2 Image Processor

2.1 代码流程

2.1.1 Initialize

- load parameters
- create `FastFeatureDetector`

2.1.2 ImuCallback

第一帧图像后，不断添加 IMU message 到 `imu_msg_buffer`。

2.1.3 StereoCallback

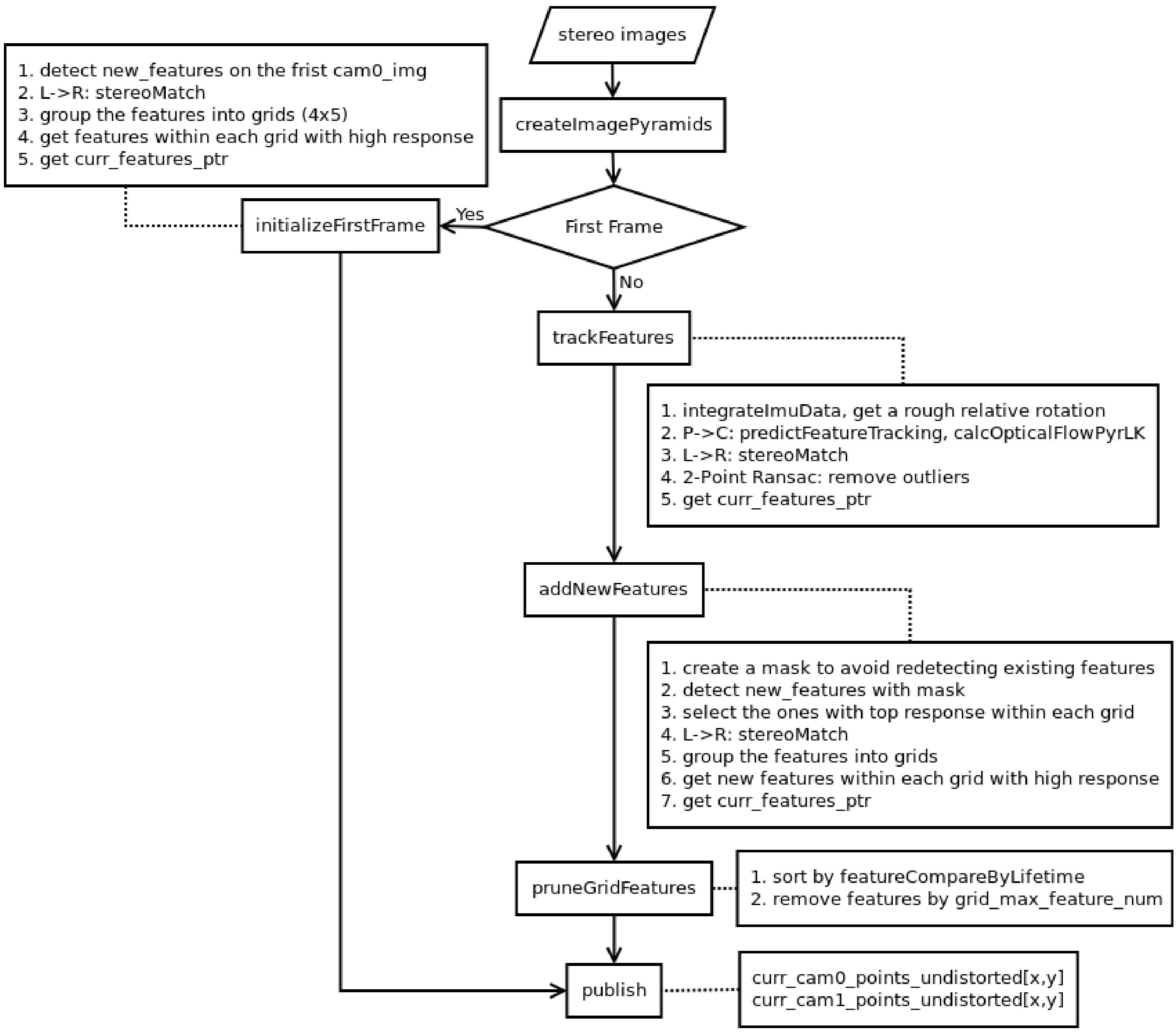


图 2 StereoCallback 流程图

3 MsckfVio Estimator/Filter

3.1 Overview

3.1.1 Kalman Filter

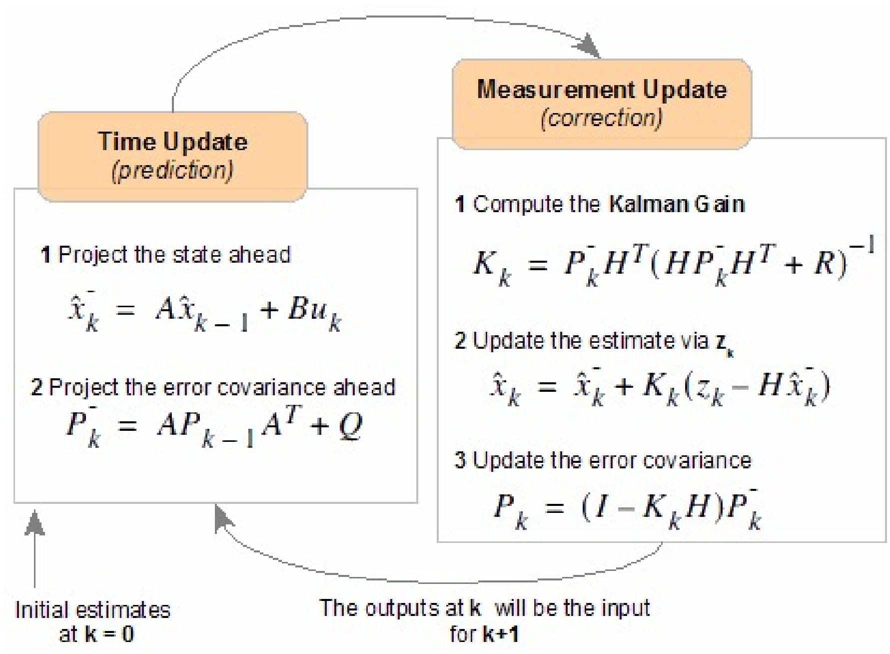


图 3 Kalman Filter 流程图

3.1.2 Multi-State Constraint Filter

Algorithm 1 Multi-State Constraint Filter

Propagation: For each IMU measurement received, propagate the filter state and covariance (cf. Section III-B).

Image registration: Every time a new image is recorded,

- augment the state and covariance matrix with a copy of the current camera pose estimate (cf. Section III-C).
- image processing module begins operation.

Update: When the feature measurements of a given image become available, perform an EKF update (cf. Sections III-D and III-E).

图 4 Multi-State Constraint Filter 流程图

3.2 代码流程

3.2.1 Initialize

- Load Parameters
- Initialize state server: `state_server.continuous_noise_cov`
- Initialize the **chi squared test table** with confidence level **P=0.95** for `MsckfVio::gatingTest()`

```
for (int i = 1; i < 100; ++i) {
    boost::math::chi_squared chi_squared_dist(i);
    chi_squared_test_table[i] = boost::math::quantile(chi_squared_dist, 0.05);
}
```

Degrees of freedom (df)	χ^2 value[19]										
1	0.004	0.02	0.06	0.15	0.46	1.07	1.64	2.71	3.84	6.63	10.83
2	0.10	0.21	0.45	0.71	1.39	2.41	3.22	4.61	5.99	9.21	13.82
3	0.35	0.58	1.01	1.42	2.37	3.66	4.64	6.25	7.81	11.34	16.27
4	0.71	1.06	1.65	2.20	3.36	4.88	5.99	7.78	9.49	13.28	18.47
5	1.14	1.61	2.34	3.00	4.35	6.06	7.29	9.24	11.07	15.09	20.52
6	1.63	2.20	3.07	3.83	5.35	7.23	8.56	10.64	12.59	16.81	22.46
7	2.17	2.83	3.82	4.67	6.35	8.38	9.80	12.02	14.07	18.48	24.32
8	2.73	3.49	4.59	5.53	7.34	9.52	11.03	13.36	15.51	20.09	26.12
9	3.32	4.17	5.38	6.39	8.34	10.66	12.24	14.68	16.92	21.67	27.88
10	3.94	4.87	6.18	7.27	9.34	11.78	13.44	15.99	18.31	23.21	29.59
P value (Probability)	0.95	0.90	0.80	0.70	0.50	0.30	0.20	0.10	0.05	0.01	0.001

图 5 chi-square table

3.2.2 ImuCallback

- 添加 IMU message 到 `imu_msg_buffer`
- `initializeGravityAndBias`，要求前 200 帧 IMU 静止不动　静止下VIO初始化
  - 将前 200 帧加速度和角速度求平均
  - 平均角速度作为陀螺仪的 bias：`state_server.imu_state.gyro_bias`
  - 平均加速度作为 IMU 系下的重力加速度：`gravity_imu`
  - 平均加速度的模值作为重力加速度模长 g：`IMUState::gravity`
  - 计算初始时刻 World 系（水平天向）重力向量 (0,0,-g) 和 IMU 系重力向量`gravity_imu` 之间的姿态 (旋转四元数)：`state_server.imu_state.orientation`

3.2.3 FeatureCallback

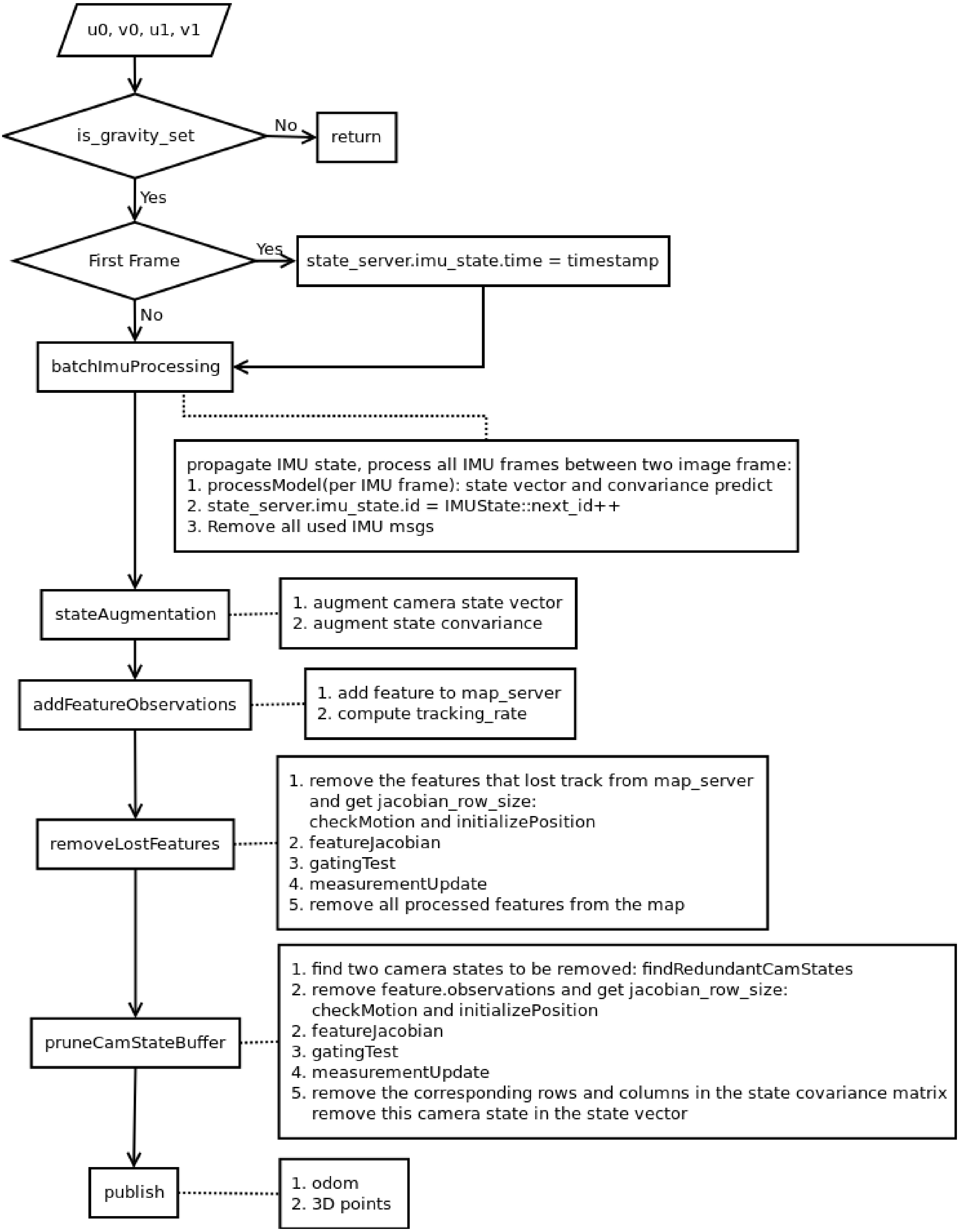


图 6 FeatureCallback 流程图

3.3 EKF 状态向量

IMU 状态向量（true-state）

$$\mathbf{x}_I = \left({}^I_G\mathbf{q}^\top \quad \mathbf{b}_g^\top \quad {}^G\mathbf{v}_I^\top \quad \mathbf{b}_a^\top \quad {}^G\mathbf{p}_I^\top \quad {}^I_C\mathbf{q}^\top \quad {}^I\mathbf{p}_C^\top\right)^\top \in \mathbb{R}^{22\times 1}$$

IMU 误差状态向量

$$\tilde{\mathbf{x}}_I = \left({}^I_G\tilde{\boldsymbol{\theta}}^\top \quad \tilde{\mathbf{b}}_g^\top \quad {}^G\tilde{\mathbf{v}}_I^\top \quad \tilde{\mathbf{b}}_a^\top \quad {}^G\tilde{\mathbf{p}}_I^\top \quad {}^I_C\tilde{\boldsymbol{\theta}}^\top \quad {}^I\tilde{\mathbf{p}}_C^\top\right)^\top \in \mathbb{R}^{21\times 1}$$

IMU 噪声向量

$$\mathbf{n}_I^\top = \left(\mathbf{n}_g^\top \; \mathbf{n}_{wg}^\top \; \mathbf{n}_a^\top \; \mathbf{n}_{wa}^\top\right)^\top \in \mathbb{R}^{12\times 1}$$

其对应的噪声协方差矩阵

$$\mathbf{Q}_I = \mathbb{E}\left[\mathbf{n}_I\mathbf{n}_I^\top\right] = \operatorname{diag}\left(\sigma_g^2\mathbf{I}_{3\times 3} \quad \sigma_{bg}^2\mathbf{I}_{3\times 3} \quad \sigma_a^2\mathbf{I}_{3\times 3} \quad \sigma_{ba}^2\mathbf{I}_{3\times 3}\right) \in \mathbb{R}^{12\times 12}$$

Camera 误差状态向量

$$\tilde{\mathbf{x}}_{C_i} = \left({}^{C_i}_G\tilde{\boldsymbol{\theta}}^\top \quad {}^G\tilde{\mathbf{p}}_{C_i}^\top\right)^\top \in \mathbb{R}^{6\times 1}$$

系统 (Imu+Camera) 误差状态向量

$$\tilde{\mathbf{x}} = \left(\tilde{\mathbf{x}}_I^\top \quad \tilde{\mathbf{x}}_{C_1}^\top \quad \cdots \quad \tilde{\mathbf{x}}_{C_N}^\top\right)^\top \in \mathbb{R}^{(21+6N)\times 1}$$

3.4 Propagation/Prediction

3.4.1 IMU 误差状态方程

IMU 运动微分方程（nominal-state 状态方程）

$$\dot{\hat{\mathbf{x}}} = \begin{cases} {}^I_G\dot{\hat{\mathbf{q}}} = \frac{1}{2}\Omega(\hat{\boldsymbol{\omega}}){}^I_G\hat{\mathbf{q}} \\ \dot{\hat{\mathbf{b}}}_g = \mathbf{0}_{3\times 1} \\ {}^G\dot{\hat{\mathbf{v}}} = C\left({}^I_G\hat{\mathbf{q}}\right)^\top \hat{\mathbf{a}} + {}^G\mathbf{g} \\ \dot{\hat{b}}_a = \mathbf{0}_{3\times 1}, \\ {}^G\dot{\hat{\mathbf{p}}}_I = {}^G\hat{\mathbf{v}} \\ {}^I_C\dot{\hat{\mathbf{q}}} = \mathbf{0}_{3\times 1} \\ {}^I\dot{\hat{\mathbf{p}}}_C = \mathbf{0}_{3\times 1} \end{cases} \tag{1}$$

其中，

$$\hat{\boldsymbol{\omega}} = \boldsymbol{\omega}_m - \hat{\mathbf{b}}_g, \quad \hat{\mathbf{a}} = \mathbf{a}_m - \hat{\mathbf{b}}_a$$

并且（使用 JPL 四元数） JPL与Hamilton四元数对应的\Omega不同！，MSCKF_VIO使用的JPL范式

$$\Omega\left(\hat{\boldsymbol{\omega}}\right) \triangleq \begin{bmatrix}\hat{\boldsymbol{\omega}} \\ 0\end{bmatrix}_R = \begin{pmatrix} -[\hat{\boldsymbol{\omega}}_\times] & \boldsymbol{\omega} \\ -\boldsymbol{\omega}^\top & 0 \end{pmatrix}$$

根据 [4] ESKF 中 ***5.3.3 The error-state kinematics*** 小节公式，IMU error-state 状态方程

$$\delta\dot{\mathbf{x}}_I = \begin{cases} \delta\dot{\mathbf{p}} = \delta\mathbf{v} \\ \delta\dot{\mathbf{v}} = -\mathbf{R}\left[\mathbf{a}_m - \mathbf{a}_b\right]_\times \delta\boldsymbol{\theta} - \mathbf{R}\delta\mathbf{a}_b + \delta\mathbf{g} - \mathbf{R}\mathbf{a}_n \\ \delta\dot{\boldsymbol{\theta}} = -\left[\boldsymbol{\omega}_m - \boldsymbol{\omega}_b\right]_\times \delta\boldsymbol{\theta} - \delta\boldsymbol{\omega}_b - \boldsymbol{\omega}_n \\ \delta\dot{\mathbf{a}}_b = \mathbf{a}_w \\ \delta\dot{\boldsymbol{\omega}}_b = \boldsymbol{\omega}_w \end{cases} \tag{2}$$

对式 (2)线性化，得到 IMU **连续形式误差状态方程**

$$\dot{\tilde{\mathbf{x}}}_I = \mathbf{F}\tilde{\mathbf{x}}_I + \mathbf{G}\mathbf{n}_I \tag{3}$$

其中，

$\tilde{\mathbf{x}}_I$ 和 $\mathbf{n}_I$ 为

$$\tilde{\mathbf{x}}_I = \begin{pmatrix} {}^I_G\tilde{\boldsymbol{\theta}}^\top & \tilde{\mathbf{b}}_g^\top & {}^G\tilde{\mathbf{v}}_I^\top & \tilde{\mathbf{b}}_a^\top & {}^G\tilde{\mathbf{p}}_I^\top & {}^I_C\tilde{\boldsymbol{\theta}}^\top & {}^I\tilde{\mathbf{p}}_C^\top \end{pmatrix}^\top \in \mathbb{R}^{21\times 1}$$

$$\mathbf{n}_I^\top = \begin{pmatrix} \mathbf{n}_g^\top & \mathbf{n}_{wg}^\top & \mathbf{n}_a^\top & \mathbf{n}_{wa}^\top \end{pmatrix}^\top \in \mathbb{R}^{12\times 1}$$

$\mathbf{F}$ 和 $\mathbf{G}$ 为（代码在 `MsckfVio::processModel`）

$$\mathbf{F}_{21\times 21} = \begin{pmatrix} -\lfloor\hat{\boldsymbol{\omega}}_\times\rfloor & -\mathbf{I}_3 & \mathbf{0}_{3\times3} & \mathbf{0}_{3\times3} & \mathbf{0}_{3\times3} & \mathbf{0}_{3\times3} & \mathbf{0}_{3\times3} \\ \mathbf{0}_{3\times3} & \mathbf{0}_{3\times3} & \mathbf{0}_{3\times3} & \mathbf{0}_{3\times3} & \mathbf{0}_{3\times3} & \mathbf{0}_{3\times3} & \mathbf{0}_{3\times3} \\ -C\left({}^I_G\hat{\mathbf{q}}\right)^\top \lfloor\hat{\mathbf{a}}_\times\rfloor & \mathbf{0}_{3\times3} & \mathbf{0}_{3\times3} & -C\left({}^I_G\hat{\mathbf{q}}\right)^\top & \mathbf{0}_{3\times3} & \mathbf{0}_{3\times3} & \mathbf{0}_{3\times3} \\ \mathbf{0}_{3\times3} & \mathbf{0}_{3\times3} & \mathbf{0}_{3\times3} & \mathbf{0}_{3\times3} & \mathbf{0}_{3\times3} & \mathbf{0}_{3\times3} & \mathbf{0}_{3\times3} \\ \mathbf{0}_{3\times3} & \mathbf{0}_{3\times3} & \mathbf{I}_3 & \mathbf{0}_{3\times3} & \mathbf{0}_{3\times3} & \mathbf{0}_{3\times3} & \mathbf{0}_{3\times3} \\ \mathbf{0}_{3\times3} & \mathbf{0}_{3\times3} & \mathbf{0}_{3\times3} & \mathbf{0}_{3\times3} & \mathbf{0}_{3\times3} & \mathbf{0}_{3\times3} & \mathbf{0}_{3\times3} \\ \mathbf{0}_{3\times3} & \mathbf{0}_{3\times3} & \mathbf{0}_{3\times3} & \mathbf{0}_{3\times3} & \mathbf{0}_{3\times3} & \mathbf{0}_{3\times3} & \mathbf{0}_{3\times3} \end{pmatrix}$$

$$\mathbf{G}_{21\times 12} = \begin{pmatrix} -\mathbf{I}_3 & \mathbf{0}_{3\times3} & \mathbf{0}_{3\times3} & \mathbf{0}_{3\times3} \\ \mathbf{0}_{3\times3} & \mathbf{I}_3 & \mathbf{0}_{3\times3} & \mathbf{0}_{3\times3} \\ \mathbf{0}_{3\times3} & \mathbf{0}_{3\times3} & -C\left({}^I_G\hat{\mathbf{q}}\right)^\top & \mathbf{0}_{3\times3} \\ \mathbf{0}_{3\times3} & \mathbf{0}_{3\times3} & \mathbf{0}_{3\times3} & \mathbf{I}_3 \\ \mathbf{0}_{3\times3} & \mathbf{0}_{3\times3} & \mathbf{0}_{3\times3} & \mathbf{0}_{3\times3} \\ \mathbf{0}_{3\times3} & \mathbf{0}_{3\times3} & \mathbf{0}_{3\times3} & \mathbf{0}_{3\times3} \\ \mathbf{0}_{3\times3} & \mathbf{0}_{3\times3} & \mathbf{0}_{3\times3} & \mathbf{0}_{3\times3} \end{pmatrix}$$

3.4.2 IMU 状态向量预测

代码在 `MsckfVio::predictNewState`。

- 姿态预测（[5] 中 122 式 0阶四元数积分，代码据 $|\omega|$ 是否接近 0分两种情况，提高数值计算稳定性，因\omega出现在分母上，模长较小时，取极限近似！）

$$ {}^I_G\mathbf{q}(t_{k+1}) = \left(\cos\left(\frac{|\omega|}{2}\Delta t\right)\cdot\mathbf{I}_{4\times4} + \frac{1}{|\omega|}\sin\left(\frac{|\omega|}{2}\Delta t\right)\cdot\boldsymbol{\Omega}(\omega)\right){}^I_G\mathbf{q}(t_k) \tag{4}$$

- 位置和速度预测（4 阶 Runge-Kutta 积分，求解微分方程）

$$y_{n+1} = y_n + \frac{\Delta t}{6}(k_1 + 2k_2 + 2k_3 + k_4) \tag{5}$$

3.4.3 系统状态协方差预测

代码在 MsckfVio::processModel，处理两帧图像间的每一帧 IMU 数据。
离散时间状态转移矩阵

$$
\begin{aligned}
\mathbf{\Phi}_k &= \mathbf{\Phi}(t_{k+1}, t_k) \\
&= \exp\left(\int_{t_k}^{t_{k+1}} \mathbf{F}(\tau)d\tau\right) \\
&= \exp(\mathbf{F}\Delta t) \\
&\approx \mathbf{I} + \mathbf{F}\Delta t + \frac{1}{2}(\mathbf{F}\Delta t)^2 + \frac{1}{6}(\mathbf{F}\Delta t)^3 \quad (\Delta t\text{比较小时，一般 <0.01s})
\end{aligned}
\tag{6}
$$

可以看出，VINS的推导方式只是这个的一阶近似

Modify the transition matrix to make the observability matrix have proper null space离散时间噪声协方差矩阵

$$
\begin{aligned}
\mathbf{Q}_k &= \int_{t_k}^{t_{k+1}} \mathbf{\Phi}(t_{k+1}, \tau)\mathbf{G}\mathbf{Q}_I\mathbf{G}\mathbf{\Phi}(t_{k+1}, \tau)^\top d\tau \\
&\approx \mathbf{\Phi}_k\mathbf{G}\mathbf{Q}_I\mathbf{G}^T{\mathbf{\Phi}_k}^T\Delta t
\end{aligned}
\tag{7}
$$

IMU 状态传播协方差矩阵为

$$
\mathbf{P}_{II_{k+1|k}} = \mathbf{\Phi}_k\mathbf{P}_{II_{k|k}}\mathbf{\Phi}_k^\top + \mathbf{Q}_k \tag{8}
$$

系统状态传播协方差矩阵拆解表示为

$$
\mathbf{P}_{k|k} = \begin{pmatrix} \mathbf{P}_{II_{k|k}} & \mathbf{P}_{IC_{k|k}} \\ \mathbf{P}_{IC_{k|k}}^\top & \mathbf{P}_{CC_{k|k}} \end{pmatrix} \tag{9}
$$

其传播形式表示为

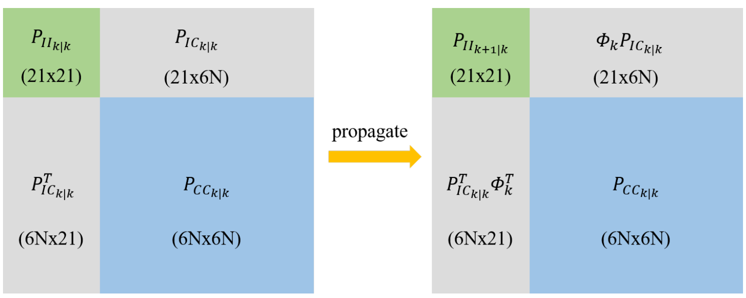
$$
\mathbf{P}_{k+1|k} = \begin{pmatrix} \mathbf{P}_{II_{k+1|k}} & \mathbf{\Phi}_k\mathbf{P}_{IC_{k|k}} \\ \mathbf{P}_{IC_{k|k}}^\top\mathbf{\Phi}_k^\top & \mathbf{P}_{CC_{k|k}} \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{(21+6N)\times(21+6N)} \tag{10}
$$

Fix the covariance to be symmetric

$$
\mathbf{P}_{k+1|k} = \frac{\mathbf{P}_{k+1|k} + \mathbf{P}_{k+1|k}^\top}{2} \tag{11}
$$

其中 Camera 的 covariance 暂时还没有变化是因为这个时间段图像还没有到来，只有 IMU 的影响，但是会影响到 IMU 与 Camera 协方差。

整个状态 (IMU+Camera) 的 covariance 传播过程如图所示 [2]：



仅使用IMU测量预测时，只有右下角的Pcc块不更新

3.5 State Augmentation

代码在 `MsckfVio::stateAugmentation`。

3.5.1 相机状态向量扩增

根据 IMU 位姿求取 Camera 位姿

$$ {}^{C}_{G}\hat{\mathbf{q}} = {}^{C}_{I}\hat{\mathbf{q}} \otimes {}^{I}_{G}\hat{\mathbf{q}}, \quad {}^{G}\hat{\mathbf{p}}_{C} = {}^{G}\hat{\mathbf{p}}_{I} + C\left({}^{I}_{G}\hat{\mathbf{q}}\right)^{\top} {}^{I}\hat{\mathbf{p}}_{C} \tag{12} $$

3.5.2 状态协方差扩增

增广的状态协方差矩阵为

$$ \mathbf{P}'_{k|k} = \begin{pmatrix} \mathbf{I}_{21+6N} \\ \mathbf{J} \end{pmatrix} \mathbf{P}_{k|k} \begin{pmatrix} \mathbf{I}_{21+6N} \\ \mathbf{J} \end{pmatrix}^{\top} = \begin{bmatrix} \mathbf{P}_{k|k} & (\mathbf{J}\mathbf{P}_{k|k})^{T} \\ \mathbf{J}\mathbf{P}_{k|k} & \mathbf{J}\mathbf{P}_{k|k}\mathbf{J}^{T} \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{(21+6N+6)\times(21+6N+6)} \tag{13} $$

其中，J是新增的状态误差量对原所有状态误差量的Jacobian

$$ \mathbf{J} = \frac{\partial \tilde{\mathbf{x}}_{C_i}}{\partial \tilde{\mathbf{x}}} = \frac{\partial \begin{pmatrix} {}^{C_i}_{G}\tilde{\boldsymbol{\theta}}^{\top} & {}^{G}\tilde{\mathbf{p}}_{C_i}^{\top} \end{pmatrix}^{\top}}{\partial \begin{pmatrix} \tilde{\mathbf{x}}_{I}^{\top} & \tilde{\mathbf{x}}_{C_1}^{\top} & \cdots & \tilde{\mathbf{x}}_{C_N}^{\top} \end{pmatrix}^{\top}} = \begin{pmatrix} \mathbf{J}_{I_{6x21}} \mathbf{0}_{6\times 6N} \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{6\times(21+6N)} $$

$$ \mathbf{J}_{I} = \frac{\partial \tilde{\mathbf{x}}_{C_i}}{\partial \tilde{\mathbf{x}}_{I}} = \begin{pmatrix} C\left({}^{I}_{G}\hat{\mathbf{q}}\right) & \mathbf{0}_{3\times 9} & \mathbf{0}_{3\times 3} & \mathbf{I}_{3} & \mathbf{0}_{3\times 3} \\ -C\left({}^{I}_{G}\hat{\mathbf{q}}\right)^{\top} \lfloor {}^{I}\hat{\mathbf{p}}_{C\times} \rfloor & \mathbf{0}_{3\times 9} & \mathbf{I}_{3} & \mathbf{0}_{3\times 3} & C\left({}^{I}_{G}\hat{\mathbf{q}}\right)^{\top} \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{6\times 21} $$

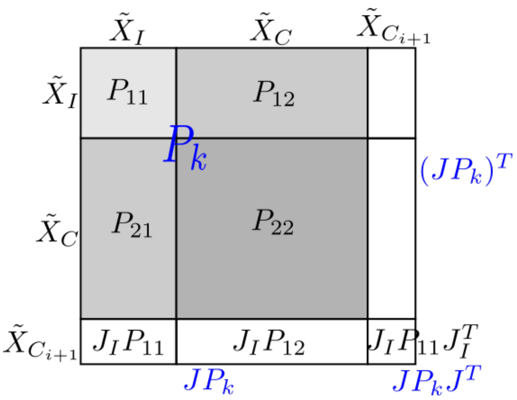
为表示方便，拆解 $\mathbf{P}_{k|k}$ 为

$$ \mathbf{P}_{k|k} = \begin{bmatrix} \mathbf{P}_{11_{21x21}} & \mathbf{P}_{12} \\ \mathbf{P}_{21} & \mathbf{P}_{22} \end{bmatrix} \tag{14} $$

则

因为J中包含大量的0元素，这里仅仅使用J中的非0矩阵参与计算：

$$ \mathbf{P}'_{k|k} = \begin{bmatrix} \mathbf{P}_{k|k} & \mathbf{J}_{P}^{T} \\ \mathbf{J}_{P} & \mathbf{J}_{I}\mathbf{P}_{11}\mathbf{J}_{I}^{T} \end{bmatrix} \quad \text{where} \quad \mathbf{J}_{P} = \begin{pmatrix} \mathbf{J}_{I}\mathbf{P}_{11} & \mathbf{J}_{I}\mathbf{P}_{12} \end{pmatrix} \tag{15} $$



Fix the covariance to be symmetric

$$ \mathbf{P}'_{k|k} = \frac{\mathbf{P}'_{k|k} + \mathbf{P}'^{\top}_{k|k}}{2} \tag{16} $$

3.6 Measurement Update

特征更新发生在两处：
1、视觉特征点跟踪丢失时，对应函数removeLostFeatures()
2、滑动窗口满时，对应函数pruneCamStateBuffer()，详细说明如下

3.6.1 Measurement Model

1. 计算获取世界坐标系下的 3D 特征点，代码在 `Feature::initializePosition`，双眼都用来三角化
   - 据对极几何原理，三角化计算初始深度，得到初始三维点坐标，只选取两帧相机计算路标点。
   - 通过 L-M 算法迭代优化得到更加精确的世界系三维点，只优化三维路标点，相机位姿固定。

2. 投影世界系三维点到相机系

1、从map_server中寻找当前帧跟踪丢失的特征点，选择至少被3帧相机观测到的路标点做三角化，来完成Measurement Update，之后这些特征点从map_server中移除。三角化时，除了新扩维进去的相机帧，其他相机帧都是经过更新的，Msckf认为这些帧位姿是准确的。

左眼

$$^{C_{i,1}}\mathbf{p}_j = \begin{pmatrix} ^{C_{i,1}}X_j \\ ^{C_{i,1}}Y_j \\ ^{C_{i,1}}Z_j \end{pmatrix} = C\left(^{C_{i,1}}_{G}\mathbf{q}\right)\left(^{G}\mathbf{p}_j - {}^{G}\mathbf{p}_{C_{i,1}}\right)$$

右眼

$$^{C_{i,2}}\mathbf{p}_j = \begin{pmatrix} ^{C_{i,2}}X_j \\ ^{C_{i,2}}Y_j \\ ^{C_{i,2}}Z_j \end{pmatrix} = C\left(^{C_{i,2}}_{G}\mathbf{q}\right)\left(^{G}\mathbf{p}_j - {}^{G}\mathbf{p}_{C_{i,2}}\right)$$

$$= C\left(^{C_{i,2}}_{C_{i,1}}\mathbf{q}\right)\left(^{C_{i,1}}\mathbf{p}_j - {}^{C_{i,1}}\mathbf{p}_{C_{i,2}}\right)$$

2、Msckf无边缘化，为了在滑动窗口满时，移除历史状态不丢失约束，Msckf每次移除两帧相机状态（会根据相机帧的位移、特征跟踪率等决定移除滑窗中的新帧还是老帧）。执行此函数时，路标点都被最新帧观测，寻找被移除这两帧共视的路标点做Measurement Update，并移除对应的相机状态以及协方差矩阵P的对应块。

3. 线性化测量模型，视觉测量残差可近似表示为

   单个特征点j在单帧相机i上的重投影误差：

$$\mathbf{r}_i^j = \mathbf{z}_i^j - \hat{\mathbf{z}}_i^j \quad = \mathbf{H}_{X_i}^j \tilde{\mathbf{x}} + \mathbf{H}_{f_i}^j \, {}^{G}\tilde{\mathbf{p}}_j + \mathbf{n}^j{}_i \in \mathbb{R}^{4\times 1} \tag{17}$$

   重投影误差是关于相机真实状态与特征点真实状态的函数，将此函数在期望状态处展开，才会有公式（17）的形式

   其中，测量雅克比矩阵（代码在 `MsckfVio::measurementJacobian`）

$$\begin{aligned} \mathbf{H}_{X_i}^j &= \frac{\partial \mathbf{z}_i^j}{\partial {}^{C_{i,1}}\mathbf{p}_j} \cdot \frac{\partial {}^{C_{i,1}}\mathbf{p}_j}{\partial \mathbf{x}_{C_{i,1}}} + \frac{\partial \mathbf{z}_i^j}{\partial {}^{C_{i,2}}\mathbf{p}_j} \cdot \frac{\partial {}^{C_{i,2}}\mathbf{p}_j}{\partial \mathbf{x}_{C_{i,1}}} \in \mathbb{R}^{4\times(21+6N)} \\ \mathbf{H}_{f_i}^j &= \frac{\partial \mathbf{z}_i^j}{\partial {}^{C_{i,1}}\mathbf{p}_j} \cdot \frac{\partial {}^{C_{i,1}}\mathbf{p}_j}{\partial {}^{G}\mathbf{p}_j} + \frac{\partial \mathbf{z}_i^j}{\partial {}^{C_{i,2}}\mathbf{p}_j} \cdot \frac{\partial {}^{C_{i,2}}\mathbf{p}_j}{\partial {}^{G}\mathbf{p}_j} \in \mathbb{R}^{4\times 3} \end{aligned} \tag{18}$$

   why: Modifty the measurement Jacobian to ensure observability constrain, Ref: OC-VINS

4. 叠加对同一特征点的多个观测（代码在 `MsckfVio::featureJacobian`）

   单个特征点j在所有观测到此点的相机帧上（Mj个）的重投影误差：

$$\mathbf{r}^j = \mathbf{H}_{\mathbf{x}}^j \tilde{\mathbf{x}} + \mathbf{H}_f^j \, {}^{G}\tilde{\mathbf{p}}_j + \mathbf{n}^j \text{ with } \mathbf{H}_{\mathbf{x}}^j \in \mathbb{R}^{4Mj\times(21+6N)}, \quad \mathbf{H}_f^j \in \mathbb{R}^{4Mj\times 3}$$

   为避免 ${}^{G}\mathbf{p}_j$ 的不确定性对测量残差的影响，将残差投影到 $\mathbf{H}_{f_i}^j$ 的左零空间 $\mathbf{V} \in \mathbb{R}^{4Mj\times(4Mj-3)}$

   $H_{f_i}^j$的秩为3，所以行向量的零空间-3维

$$\mathbf{r}_o^j = \mathbf{V}^\top \mathbf{r}^j = \mathbf{V}^\top \mathbf{H}_{\mathbf{x}}^j \tilde{\mathbf{x}} + \mathbf{V}^\top \mathbf{n}^j = \mathbf{H}_{\mathbf{x},o}^j \tilde{\mathbf{x}} + \mathbf{n}_o^j \in \mathbb{R}^{(4Mj-3)\times 1} \tag{19}$$

   零空间 $\mathbf{V}$ 通过 SVD 分解得到（代码在 `MsckfVio::featureJacobian`）

```
// Project the residual and Jacobians onto the nullspace of H_fj.
JacobiSVD<MatrixXd> svd_helper(H_fj, ComputeFullU | ComputeThinV);
MatrixXd A = svd_helper.matrixU().rightCols(jacobian_row_size - 3);
H_x = A.transpose() * H_xj;
r   = A.transpose() * r_j;
```

5. 叠加所有特征点的多个观测，得到

$$\mathbf{r}_o = \mathbf{H}_{\mathbf{X}} \widetilde{\mathbf{X}} + \mathbf{n}_o \in \mathbb{R}^{r\times 1} \quad r = \sum_{j}^{Num} (4M_j - 3) \quad \text{Num是路标点数量} \tag{20}$$

```
if (gatingTest(H_xj, r_j, cam_state_ids.size()-1)) {
  H_x.block(stack_cntr, 0, H_xj.rows(), H_xj.cols()) = H_xj;
  r.segment(stack_cntr, r_j.rows()) = r_j;
  stack_cntr += H_xj.rows();
}
```

3.6.2 能观性约束

OC-EKF   //TODO

3.6.3 EKF Update

代码在 `MsckfVio::measurementUpdate`。

根据 [1]，为降低 EKF 更新的计算复杂度，对 $\mathbf{H_X}$ 进行 QR 分解，来降低观测模型的行数，通常来讲，Hx的行数r会大于其列数21+6N。

$$\mathbf{H_X} = \begin{bmatrix} \mathbf{Q}_1 & \mathbf{Q}_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{T}_H \\ \mathbf{0} \end{bmatrix} \tag{21}$$

带入式 (20)，得

$$\mathbf{r}_o = \begin{bmatrix} \mathbf{Q}_1 & \mathbf{Q}_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{T}_H \\ \mathbf{0} \end{bmatrix} \tilde{\mathbf{X}} + \mathbf{n}_o \tag{22}$$

$$\begin{bmatrix} \mathbf{Q}_1^T \mathbf{r}_o \\ \mathbf{Q}_2^T \mathbf{r}_o \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{T}_H \\ \mathbf{0} \end{bmatrix} \tilde{\mathbf{X}} + \begin{bmatrix} \mathbf{Q}_1^T \mathbf{n}_o \\ \mathbf{Q}_2^T \mathbf{n}_o \end{bmatrix} \tag{23}$$

上式 $\mathbf{Q}_2^T \mathbf{r}_o$ 仅含有噪声，对其忽略，取 $\mathbf{Q}_1^T \mathbf{r}_o$ 用于 EKF 更新

$$\mathbf{r}_n = \mathbf{Q}_1^T \mathbf{r}_o = \mathbf{T}_H \widetilde{\mathbf{X}} + \mathbf{n}_n \tag{24}$$

噪声向量 $\mathbf{n}_n$ 的协方差矩阵为

$$\mathbf{R}_n = \mathbf{Q}_1^T \mathbf{R}_o \mathbf{Q}_1 = \sigma_{\mathrm{im}}^2 \mathbf{I}_r \tag{25}$$

计算 Kalman 增益

$$\mathbf{K} = \mathbf{P} \mathbf{T}_H^T \left(\mathbf{T}_H \mathbf{P} \mathbf{T}_H^T + \mathbf{R}_n \right)^{-1} \tag{26}$$

更新系统误差状态

$$\Delta \mathbf{X} = \mathbf{K} \mathbf{r}_n \tag{27}$$

更新系统状态

$$\mathbf{X}_{k+1} = \mathbf{X}_k \oplus \Delta \mathbf{X} \tag{28}$$

更新系统状态协方差矩阵

$$\mathbf{P}_{k+1|k+1} = \left(\mathbf{I}_\xi - \mathbf{K} \mathbf{T}_H \right) \mathbf{P}_{k+1|k} \left(\mathbf{I}_\xi - \mathbf{K} \mathbf{T}_H \right)^T + \mathbf{K} \mathbf{R}_n \mathbf{K}^T \tag{29}$$

参考文献

[1] Anastasios I Mourikis and Stergios I Roumeliotis. A multi-state constraint kalman filter for vision-aided inertial navigation. In *Proceedings 2007 IEEE International Conference on Robotics and Automation*, pages 3565–3572. IEEE, 2007.

[2] 钟心亮. 一步步深入了解 s-msckf. http://www.xinliang-zhong.vip/msckf_notes/, 2019.

[3] Ke Sun, Kartik Mohta, Bernd Pfrommer, Michael Watterson, Sikang Liu, Yash Mulgaonkar, Camillo J Taylor, and Vijay Kumar. Robust stereo visual inertial odometry for fast autonomous flight. *IEEE Robotics and Automation Letters*, 3(2):965–972, 2018.

[4] Joan Solà. Quaternion kinematics for the error-state kalman filter. *CoRR*, abs/1711.02508, 2017.

[5] Nikolas Trawny and Stergios I Roumeliotis. Indirect kalman filter for 3d attitude estimation. *University of Minnesota, Dept. of Comp. Sci. & Eng., Tech. Rep*, 2:2005, 2005.

用一张图可以形象地表示QR分解：