平面视觉测量

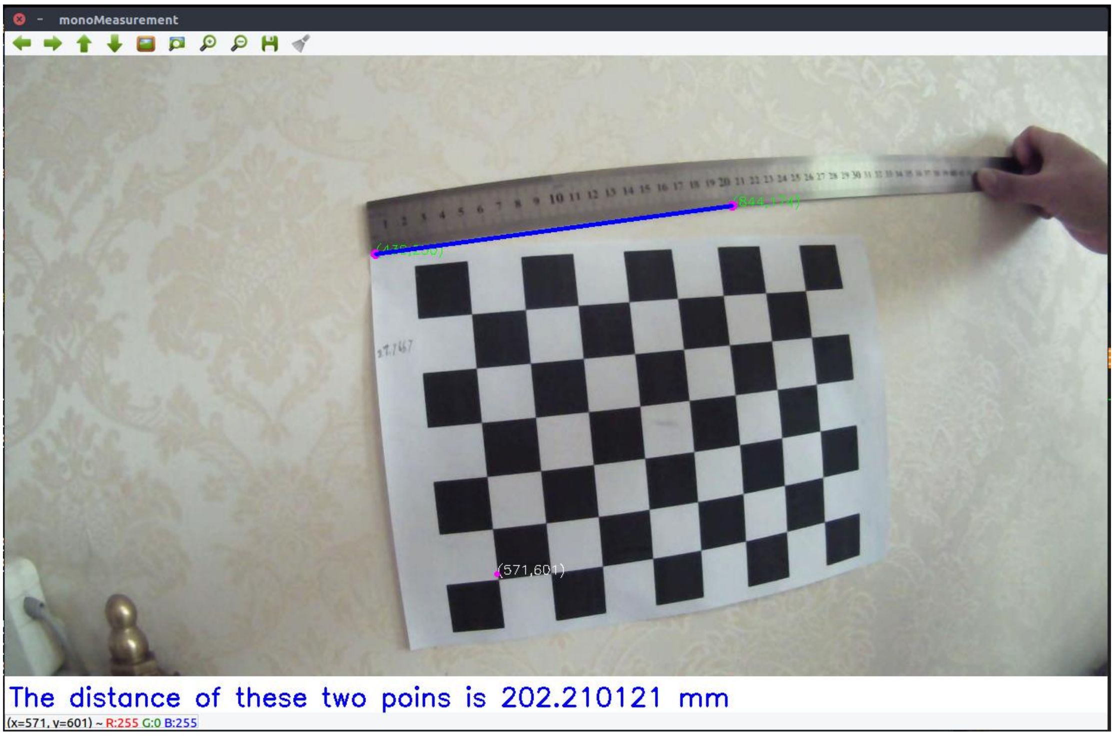
在标定完成相机后，根据下面的公式可以恢复出像素点的真实三维坐标，若像素点不共面，至少需要两张图像才能估计世界坐标系下两点的距离。

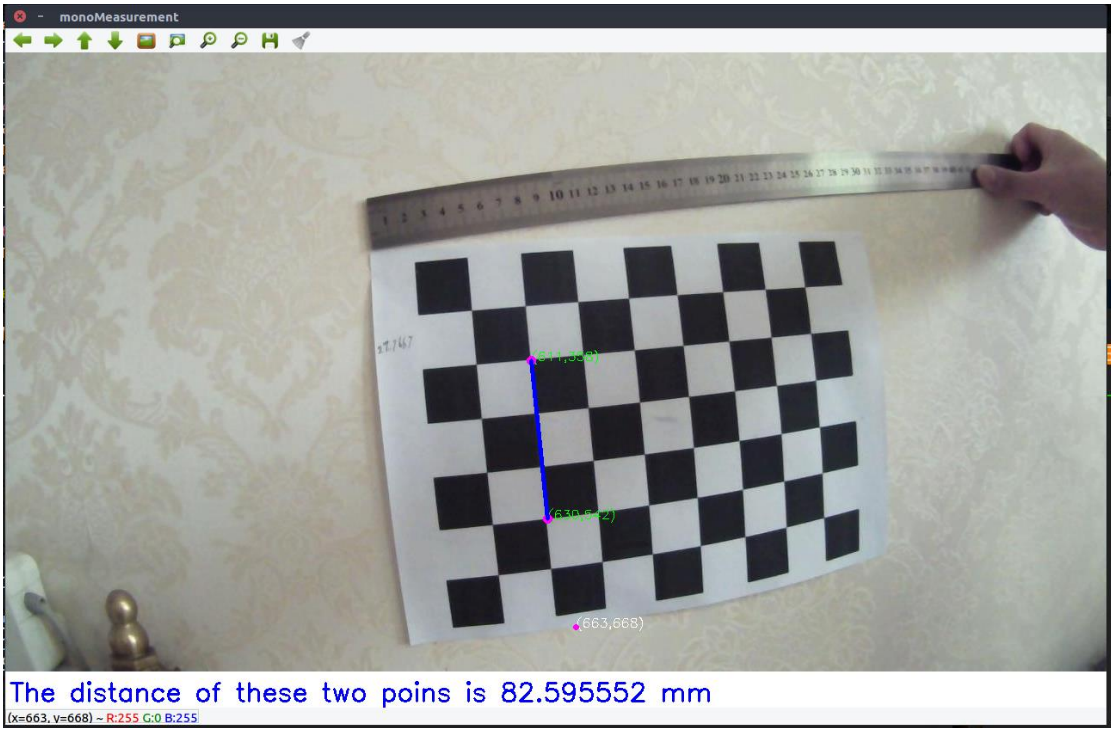
$$z_C\begin{bmatrix}x_p\\y_p\\1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}f_x&0&u_0&0\\0&f_y&v_0&0\\0&0&1&0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_C\\y_C\\z_C\\1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}f_x&\gamma&u_0\\0&f_y&v_0\\0&0&1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}r_1&r_2&t\end{bmatrix}_{3\times3}\begin{bmatrix}x_W\\y_W\\1\end{bmatrix}\tag{4.1}$$

在两点共面的情况下，上述公式有三个未知变量$\begin{bmatrix}z_C & x_W & y_W\end{bmatrix}$，同时一个平面点根据公式（4.1）可以列出三个约束，故而可以求解出像素点的三维坐标（$z_W=0$）。

$$z_C\begin{bmatrix}x_p\\y_p\\1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}f_x&0&u_0&0\\0&f_y&v_0&0\\0&0&1&0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_C\\y_C\\z_C\\1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}f_x&\gamma&u_0\\0&f_y&v_0\\0&0&1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}r_1&r_2&r_3&t\end{bmatrix}_{3\times3}\begin{bmatrix}x_W\\y_W\\z_W\\1\end{bmatrix}\tag{4.2}$$

若两点不共面，需要求解的未知变量为$\begin{bmatrix}z_C & x_W & y_W & z_W\end{bmatrix}$四个，只在一张图像上取像素点只能建立 3 个约束，此时若在另外一张图像上观测到同一点则可以建立 6 个约束，求解$\begin{bmatrix}z_{C1} & z_{C2} & x_W & y_W & z_W\end{bmatrix}$ 5 个未知变量。实际平面视觉测量的结果如下：





通过这两张量测图可以看出，基于单应矩阵估计的距离近似是准确的。

本质矩阵的估计与分解

根据对极约束的几何关系（三点共面）有如下的方程：

$$p_2^T \hat{T}^R R_L^R p_1 = 0 \tag{5.1}$$

TR 称为本质矩阵，用 E 表示，他可以通过八点法求解，求解出 E 后可以从中分解出旋转矩阵 R，平移向量 T 。一个本质矩阵有两种分解结果，可以判定特征点在相机坐标系下是否是正深度来取舍。

$$\begin{cases} R_1 = UR_z^T\left(+\frac{\pi}{2}\right)V^T \\ \hat{T}_1 = UR_z\left(+\frac{\pi}{2}\right)\sum U^T \end{cases}, \begin{cases} R_2 = UR_z^T\left(-\frac{\pi}{2}\right)V^T \\ \hat{T}_2 = UR_z\left(-\frac{\pi}{2}\right)\sum U^T \end{cases} \tag{5.2}$$

若特征点共面， P^W 点在相机坐标系下满足平面方程：

$$n^T x_1 = d, \frac{1}{d} n^T x_1 = 1 \tag{5.3}$$

两幅图像的特征点有如下的关系：

$$\begin{aligned} x_2 &= Rx_1 + T \\ &= Rx_1 + T\frac{1}{d}n^T x_1 \\ &= \left(R + \frac{1}{d}Tn^T\right)x_1 \end{aligned} \tag{5.4}$$

调整到归一化相机平面则是：

$$\lambda_2 \overline{p}_2 = \left(R + \frac{1}{d}Tn^T\right)\lambda_1 \overline{p}_1 \tag{5.5}$$

任意取一个向量u，根据$\left(u \times \overline{p}_2\right) \cdot \overline{p}_2 = 0$建立如下的约束：

$$0 = \lambda_2 \left(\hat{u}\overline{p}_2\right)^T \overline{p}_2 = -\overline{p}_2^T \hat{u}\left(R + \frac{1}{d}Tn^T\right)\lambda_1 \overline{p}_1 \tag{5.6}$$

$$\begin{aligned} &\overline{p}_2^T \hat{u}\left(R + \frac{1}{d}Tn^T\right)\overline{p}_1 = 0 \\ &\overline{p}_2^T E \overline{p}_1 = 0 \end{aligned}$$

由 $\boldsymbol{u}$ 的任意性可知，E 的解空间维数不为 1。所以当特征点共面时候去计算本质矩阵得到的结果不准确，此时需要计算单应矩阵。