张氏标定法原理

张氏标定法是张正友博士在 1999 年发表在国际顶级会议 ICCV 上的论文《Flexible Camera Calibration By Viewing a Plane From Unknown Orientations》中，提出的一种利用平面棋盘格进行相机标定的实用方法。该方法介于摄影标定法和自标定法之间，既克服了摄影标定法需要的高精度三维标定物的缺点，又解决了自标定法鲁棒性差的难题。

相机标定的目的之一是为了建立物体从三维世界到成像平面上各坐标点的对应关系，这个对应关系可以通过如下的几组模型描述：

1、世界坐标系到相机坐标系

$$\begin{bmatrix} x_C \\ y_C \\ z_C \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} R_{3\times3} & t \\ 0 & 1 \end{bmatrix}_{4\times4} \begin{bmatrix} x_W \\ y_W \\ z_W \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} r_1 & r_2 & r_3 & t \end{bmatrix}_{4\times4} \begin{bmatrix} x_W \\ y_W \\ z_W \\ 1 \end{bmatrix} \tag{0.1}$$

1、 相机坐标系到像素坐标系

$$z_C \begin{bmatrix} x_p \\ y_p \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} f_x & 0 & u_0 & 0 \\ 0 & f_y & v_0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_C \\ y_C \\ z_C \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} f_x & 0 & u_0 \\ 0 & f_y & v_0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_C \\ y_C \\ z_C \\ 1 \end{bmatrix} \tag{0.2}$$

3、畸变的影响

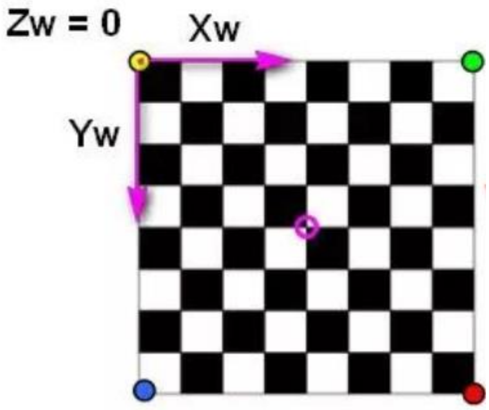
由于相机的镜头使用了凸透镜，透镜的引入带来了图像的畸变。透镜的畸变主要分为径向畸变和切向畸变等，畸变可以在归一化图像平面通过如下的非线性方程校正：

$$\begin{aligned} & r^2 = x^2 + y^2 \\ & x_{\text{dis}} = x\left(1 + k_1 r^2 + k_2 r^4 + k_3 r^6\right) + 2p_1(xy) + p_2\left(r^2 + 2x^2\right) \\ & y_{dis} = y\left(1 + k_1 r^2 + k_2 r^4 + k_3 r^6\right) + p_1\left(r^2 + 2y^2\right) + 2p_2(xy) \\ & K = \begin{bmatrix} k_1 & k_2 & p_1 & p_2 & k_3 \end{bmatrix} \end{aligned} \tag{0.3}$$

同时由于制造误差，CCD 上像元的排列不是严格垂直产生的两个坐标轴偏斜也会影响成像精度，偏斜系数 γ 对成像过程的影响体现在相机内参矩阵中：

$$M = \begin{bmatrix} f_x & \gamma & u_0 \\ 0 & f_y & v_0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \tag{0.4}$$

相机标定的目的，就是要确定相机内参数矩阵 M、畸变系数 K 以及外参 R、t。张氏标定法利用相机在不同姿态下对棋盘格的多次观测来标定相机。



通常情况下，在 SLAM 中世界坐标系是可以任选的，但显然我们倾向于选择有利于解决问题或者方便表示姿态的坐标系作为世界坐标系。在张氏标定中，可以选取如上图所示的世界坐标系，在棋盘格大小已知的情况下（27.7667mm），可以方便的表示出棋盘格角点的世界坐标 $P_{i,j}^{W}=\begin{bmatrix}x_{i,j}^{W} & y_{i,j}^{W} & 0\end{bmatrix}$，这个角点在相机中的像点可以通过方程（1.1），（1.2）表述：

$$\begin{bmatrix}x_C\\y_C\\z_C\\1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}R_{3\times3} & t\\0 & 1\end{bmatrix}_{4\times4}\begin{bmatrix}x_W\\y_W\\0\\1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}r_1 & r_2 & r_3 & t\end{bmatrix}_{4\times4}\begin{bmatrix}x_W\\y_W\\0\\1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}r_1 & r_2 & t\end{bmatrix}_{4\times3}\begin{bmatrix}x_W\\y_W\\1\end{bmatrix} \tag{0.5}$$

$$z_C\begin{bmatrix}x_p\\y_p\\1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}f_x & 0 & u_0 & 0\\0 & f_y & v_0 & 0\\0 & 0 & 1 & 0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_C\\y_C\\z_C\\1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}f_x & 0 & u_0 & 0\\0 & f_y & v_0 & 0\\0 & 0 & 1 & 0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}r_1 & r_2 & t\end{bmatrix}_{4\times3}\begin{bmatrix}x_W\\y_W\\1\end{bmatrix} \tag{0.6}$$

公式（1.6）可以进一步简化：

$$z_C\begin{bmatrix}x_p\\y_p\\1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}f_x & 0 & u_0 & 0\\0 & f_y & v_0 & 0\\0 & 0 & 1 & 0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_C\\y_C\\z_C\\1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}f_x & \gamma & u_0\\0 & f_y & v_0\\0 & 0 & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}r_1 & r_2 & t\end{bmatrix}_{3\times3}\begin{bmatrix}x_W\\y_W\\1\end{bmatrix} \tag{0.7}$$

简记为：

$$\begin{bmatrix}x_p\\y_p\\1\end{bmatrix}=s\begin{bmatrix}f_x & \gamma & u_0\\0 & f_y & v_0\\0 & 0 & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}r_1 & r_2 & t\end{bmatrix}_{3\times3}\begin{bmatrix}x_W\\y_W\\1\end{bmatrix}=sM\begin{bmatrix}r_1 & r_2 & t\end{bmatrix}_{3\times3}P^{W} \tag{0.8}$$

上述公式中的 $sM\begin{bmatrix}r_1 & r_2 & t\end{bmatrix}_{3\times3}$ 是单应矩阵，记为 H，它表示平面到平面的变

换，相机标定的一个重点是估计单应矩阵 H 。对 H 矩阵按行分块，重写公式（1.8），有：

$$\begin{bmatrix} x_p \\ y_p \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} h_1^T \\ h_2^T \\ h_3^T \end{bmatrix}_{3\times 3} P^W \tag{0.9}$$

对每行进行展开，得到如下的约束：

$$x_p = \frac{h_1^T P^W}{h_2^T P^W}, y_p = \frac{h_2^T P^W}{h_3^T P^W}, \tag{0.10}$$

即：

$$\begin{aligned} h_1^T P^W - x_p h_2^T P^W &= 0 \\ h_2^T P^W - y_p h_3^T P^W &= 0 \end{aligned} \tag{0.11}$$

对于一副图像中的每对匹配点，可有如上的两个约束方程，故对于实际的一张有 N 对匹配点的棋盘格图像，可以得到如下的方程组：

$$\begin{bmatrix} (P_i^W)_{1\times 3}^T & 0_{1\times 3} & -x_{pi}(P_i^W)_{1\times 3}^T \\ 0_{1\times 3} & (P_i^W)_{1\times 3}^T & -y_{pi}(P_i^W)_{1\times 3}^T \\ \vdots & \vdots & \vdots \end{bmatrix}_{2N\times 9} \begin{bmatrix} h_1 \\ h_2 \\ h_3 \end{bmatrix}_{9\times 1} = 0 \tag{0.12}$$

值得注意的是 H 矩阵带有一个尺度 s，所以 H 整体缩放公式（1.12）同样成立，这为 H 增加了一个约束，这个约束有两种方式表示，第一种是总元素模数的和，第二种就是将各元素对其中一个归一化处理。故而 H 矩阵的自由度是 8，至少需要 4 对匹配点就可求解单应矩阵 H。

在这种情况下公式（1.12）的解与 $AX=0$ 在 $\|X\|=1$ 情况下的解（$A^T A$ 属于最小特征值的特征向量）只差了一个尺度 λ_1 。因为 $AX=0$ 在 $\|X\|=1$ 情况下的解有两个，**所以这里解出来的单应矩阵可能尺度不对、方向也不对**，但这只需要后续调整就可以了。例如这里的解是 H ，它与真实解的关系为 $H=\lambda_1 H$ 。

求解出单应矩阵 $\lambda_1 H = sM\begin{bmatrix} r_1 & r_2 & t \end{bmatrix}_{3\times 3}$ 后，求解的重点转化为从中恢复出尺度 s 、相机内参数矩阵 M、外参 R、t。

将单应矩阵分解为三个列向量有：

$$H = [h_1 \quad h_2 \quad h_3] = \frac{s}{\lambda_1} M [r_1 \quad r_2 \quad t] \tag{0.13}$$

按元素对应关系可有：

$$
\begin{aligned}
&h_1 = \frac{s}{\lambda_1} M r_1 \text{或} r_1 = \frac{\lambda_1}{s} M^{-1} h_1 \\
&h_2 = \frac{s}{\lambda_1} M r_2 \text{或} r_2 = \frac{\lambda_1}{s} M^{-1} h_2 \\
&h_3 = \frac{s}{\lambda_1} M t \text{或} t = \frac{\lambda_1}{s} M^{-1} h_3
\end{aligned} \tag{0.14}
$$

因为r_1, r_2在旋转矩阵中是正交并且是单位的，利用正交这个条件可得出如下的约束条件：

$$r_1 \cdot r_2 = r_1^T r_2 = 0 \rightarrow h_1^T (M^{-1})^T M^{-1} h_2 = 0 \tag{0.15}$$

利用旋转矩阵中每行每列的模为 1，可得到如下的约束：

$$\| r_1 \| = \| r_2 \| = 1 \rightarrow r_1^T r_1 = r_2^T r_2 \rightarrow h_1^T (M^{-1})^T M^{-1} h_1 = h_2^T (M^{-1})^T M^{-1} h_2 \tag{0.16}$$

因为求解出来的 $\boldsymbol{H}$ 矩阵的尺度不确定（λ_1未知），这时不能保证r_1的模长一定是 1，但是一定能保证r_1与r_2的模长相等。令$B = (M^{-1})^T M^{-1}$，B是一个正定对称矩阵，真正有用的元素只有 6 个，把B带入前面两个约束条件后可转化为：

$$
\begin{cases}
h_1^T B h_2 = 0 \\
h_1^T B h_1 = h_2^T B h_2
\end{cases} \tag{0.17}
$$

上面两约束均可写为通式$h_i^T B h_j = 0$，其中$h_i = \begin{bmatrix} h_{i1} & h_{i2} & h_{i3} \end{bmatrix}^T$。这个公式可以写作如下的矩阵表示形式：

$$
h_i^T B h_j = \begin{bmatrix} h_{i1} h_{j1} \\ h_{i1} h_{j2} + h_{i2} h_{j1} \\ h_{i2} h_{j2} \\ h_{i3} h_{j1} + h_{i1} h_{j3} \\ h_{i3} h_{j2} + h_{i2} h_{j3} \\ h_{i3} h_{j3} \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} B_{11} \\ B_{12} \\ B_{22} \\ B_{13} \\ B_{23} \\ B_{33} \end{bmatrix} \tag{0.18}
$$

为了简化表达形式，令：

$$
v_{ij} = \begin{bmatrix} h_{i1} h_{j1} \\ h_{i1} h_{j2} + h_{i2} h_{j1} \\ h_{i2} h_{j2} \\ h_{i3} h_{j1} + h_{i1} h_{j3} \\ h_{i3} h_{j2} + h_{i2} h_{j3} \\ h_{i3} h_{j3} \end{bmatrix}, b = \begin{bmatrix} B_{11} \\ B_{12} \\ B_{22} \\ B_{13} \\ B_{23} \\ B_{33} \end{bmatrix} \tag{0.19}
$$

所以公式（1.17）的约束就有了如下的简化表示：

$$\begin{cases} v_{12}^T b = 0 \\ (v_{11}^T - v_{22}^T) b = 0 \end{cases} \rightarrow \begin{bmatrix} v_{12}^T \\ v_{11}^T - v_{22}^T \end{bmatrix} b = 0 \tag{0.20}$$

如果拍摄了 n 张标定图像，每张图像都可以得到上述两个约束，可知至少需要三幅图像即可恢复出 b。这里 b 的解与 $AX=0$ 在 $\|X\|=1$ 情况下的解相似，也相差了一个尺度 λ_2，同时根据 $B=(M^{-1})^T M^{-1}$ 可以轻易推导出 $B_{11}=\frac{1}{f_x^2}$，b 的方向可以根据 B_{11} 的符号判定。

令求解出来的尺度不准确的 b 构成的 B 矩阵为 B，则有 $\lambda_2 B=(M^{-1})^T M^{-1}$，注意到 B 的形式是一个正定的对称矩阵，它能唯一地分解为 $L^T L$（Cholesky 分解，Eigen 中的 LLT 分解，L 是正线上三角矩阵）。 根据 B 分解出来的矩阵 L 做一个逆运算便可以得到相机的内参数矩阵 M，由于 B 尺度的不准确，此时得到的内参数矩阵 M 与真实的相机内参数矩阵 M 相差一个整体的缩放，**注意到相机内参矩阵（3,3）位置元素是单位 1 的这一特殊性，将 M 对 $M(3,3)$ 元素做整体的归一化便可恢复出尺度正确的内参矩阵 M。**

根据约束（1.15）、（1.16）我们可以保证 r_1 与 r_2 正交，且模长相等，在估计出

$$\begin{cases} r_1 = \frac{\lambda_1}{s} M^{-1} h_1 \\ r_2 = \frac{\lambda_1}{s} M^{-1} h_2, \begin{cases} t = \frac{\lambda_1}{s} M^{-1} h_3 \end{cases} \\ r_3 = r_1 \times r_2 \end{cases} \tag{0.21}$$

内参矩阵 M 后我们可以利用 r_1 的模长是 1 来恢复出 H 矩阵的尺度。根据上述公式（1.21），这个约束可以解出尺度 $\frac{\lambda_1}{s}$，进而确定了外参 R,t。在前边解单应矩阵 H 时，我们解得的 H 矩阵尺度可能不对，方向也不对，这里解决了尺度问题；如果当初选择的 H 方向不对，由公式（1.21）可知，这会导致解出的旋转矩阵不满足右手系（行列式不为 1），根据这个条件方向问题也得到了解决。至此，相机内参矩阵 M，外参 R,t 得以恢复。

相机畸变是通过一组非线性方程建模的，对于畸变系数的估计通常是通过非线性优化手段完成的。三维空间点 P^W 在图像中对应的二维像素为 x，三维空间点经过相机内参 M，外参 R,t，畸变 K 变换后得到的二维像素为 x'，通过最小化这个重投影误差来求解这个最大似然估计问题：

$$\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m}\left\| x_{ij} - x'\left(M, R_i, t_i, K, X_j\right)\right\|^2 \tag{0.22}$$

借助 OpenCV 完成标定

借助 OpenCV 完成小觅相机左眼的标定，流程如下：