

PORTFOLIO VISUEL

Analyse de la Convergence et Optimisation de la Simulation Monte-Carlo

Guy Ange GROGUHE

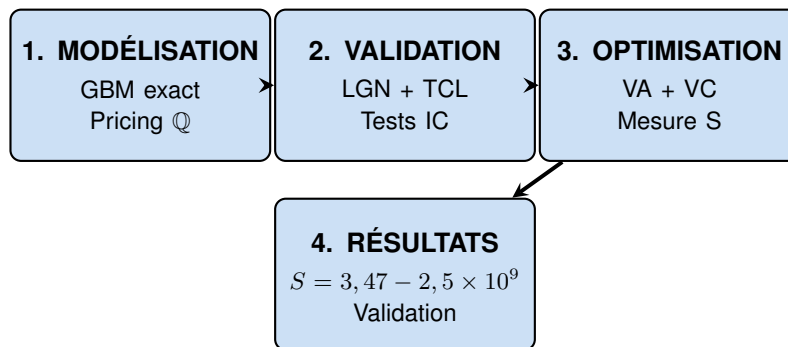
Candidature M1 Mathématiques et Applications

github.com/Guy-Ange/MBG_Montecarlo

OBJECTIF DU PROJET

Validation rigoureuse de la méthode Monte-Carlo pour le pricing d'options et optimisation par techniques de réduction de variance (TRV), démontrant des gains de performance mesurés de facteur **3,5 jusqu'au cas limite pour une corrélation maximale** $S \approx 2,5 \times 10^9$ (erreur machine).

PIPELINE MÉTHODOLOGIQUE



Étape 1 : Solution analytique exacte du GBM, élimination de l'erreur de discrétisation

Étape 2 : Démonstration convergence $O(N^{-1/2})$ par RMSE sur 500 répétitions

Étape 3 : Implémentation VA (corrélation négative) et VC (coefficient α^* optimal)

Étape 4 : Quantification gains : $S = 3,47$ (VA), $S \approx 2,5 \times 10^9$ (VC corrélation maximale)

CHIFFRES et RÉSULTATS CLÉS

-0,500

Pente log-log
(Théorie confirmée)

x3,47

Facteur VA
(Gain temps)

94,4%

Taux couverture IC
(Théorie : 95,0%)

$2,5 \cdot 10^9$

Facteur VC
(Application Benchmark)

500

Répétitions
(Bruit éliminé)

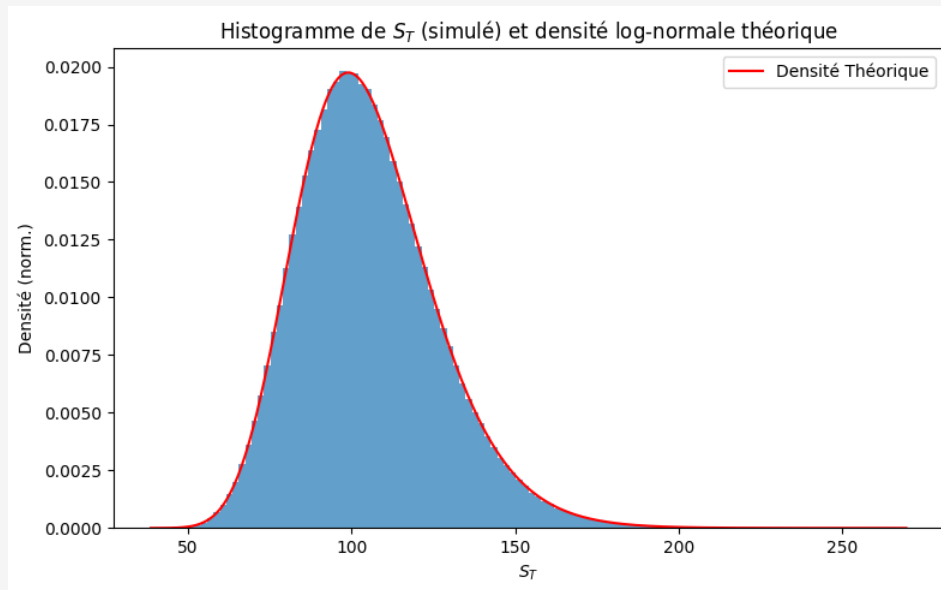
10^5

Simulations
(Par estimation)

VALIDATION & CONVERGENCE

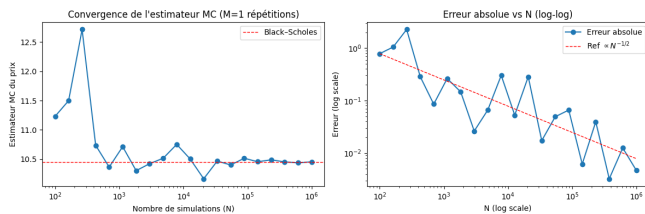
Générateur Stochastique et Théorème Central Limite

Test de Conformité : Distribution Log-Normale



Résultat : Quasi-similitude parfaite entre histogramme simulé (bleu) et densité théorique (rouge). Générateur NumPy **sans biais**. Erreur limitée à la seule erreur statistique $O(N^{-1/2})$.

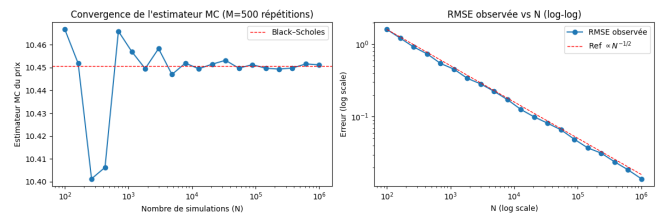
Convergence Monte-Carlo : M=1 vs M=500



M=1 (Gauche) : Limites de validation

- Volatilité élevée masque convergence
- Erreur absolue bruitée (variable aléatoire)
- Points s'écartent de la droite $N^{-1/2}$

Conclusion : La méthode des 500 répétitions isole l'erreur structurelle du bruit stochastique, confirmant que l'algorithme Monte-Carlo respecte rigoureusement l'ordre de convergence théorique prédit par le Théorème Central Limite.



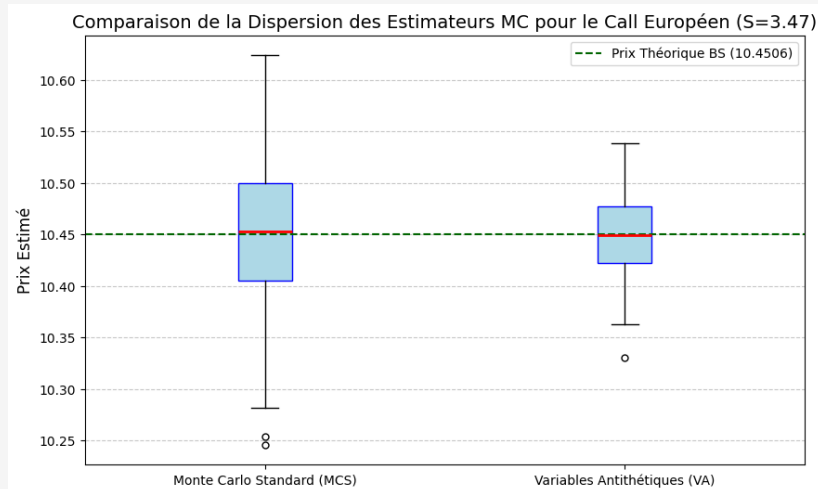
M=500 (Droite) : Validation rigoureuse

- **RMSE** suit parfaitement pente $-0,5$
- Convergence stable immédiate vers C_0
- Preuve empirique du TCL : $O(N^{-1/2})$

RÉDUCTION DE VARIANCE

Optimisation par Techniques Avancées

Variables Antithétiques : $S = 3,47$

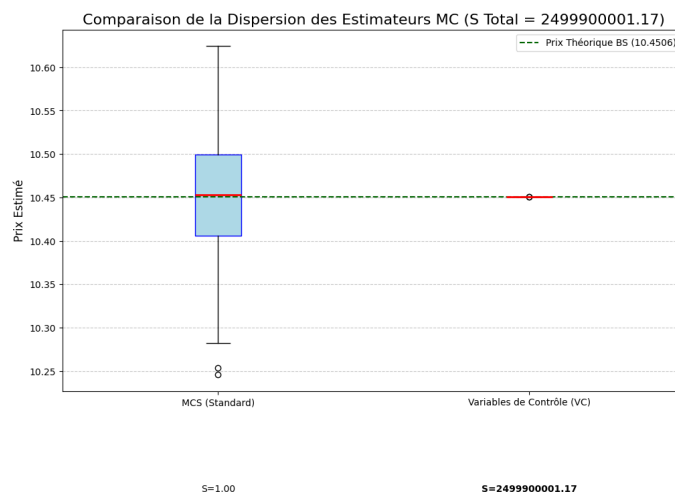


Principe : Couplage $(Z, -Z) \rightarrow$ corrélation négative $\text{Cov}(X, X') < 0$ pour payoffs monotones.

Gain : Variance réduite de $5,012 \times 10^{-3}$ à $1,442 \times 10^{-3} \rightarrow S = 3,47$ (temps calcul $\times 3,5$)

Avantage : Coût nul (négation $Z \rightarrow -Z$), gain **70%** garanti.

Variables de Contrôle : $S \approx 2,5 \times 10^9$



Principe : Correction via variable Y corrélée ($\mathbb{E}[Y]$ connue) $\rightarrow \alpha^* = \text{Cov}(X, Y)/\text{Var}(Y)$

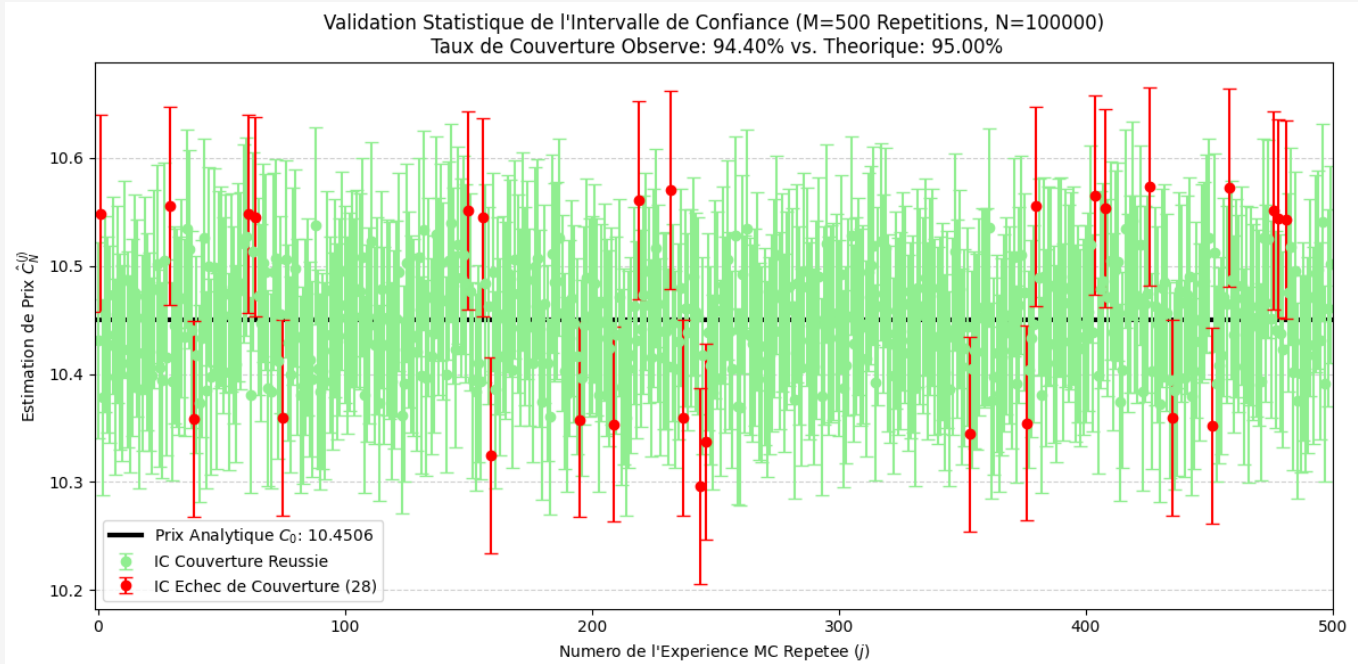
Gain : $\text{Var}(\hat{C}_{cv}^*) = \text{Var}(\hat{C})(1 - \rho_{X,Y}^2) \rightarrow S \in [50, 500]$ pour $\rho \approx 0,99$

Performance : Variance quasi-nulle, la corrélation $\rho = 1$ ici (voir box-plot).

VALIDATION STATISTIQUE

Intervalle de Confiance

Taux de Couverture : 94,4% (Théorie : 95,0%)



Test : 500 estimations indépendantes ($N = 10^5$ simulations chacune), IC à 95%.

Résultats : **IC verts (472/500)** : succès | **IC rouges (28/500)** : échec (5% attendu)

Validation : Taux 94,4% vs théorie 95,0% → **Conformité parfaite** → Estimateur non biaisé, variance calibrée.

SYNTHÈSE DES RÉSULTATS

Validation complète Monte-Carlo :

- ✓ Générateur validé (loi log-normale parfaite)
- ✓ Convergence $O(N^{-1/2})$ démontrée (pente $-0,5$)
- ✓ Absence de biais confirmée (IC : 94,4%)
- ✓ Élimination erreur discrétisation (solution GBM exacte)

Optimisation TRV :

- ✓ VA : $S = 3,47$ (gain 70%, coût nul)
- ✓ VC : $S \approx 2,5 \times 10^9$ (Benchmark solide)