Analyse de la Convergence et Optimisation de la Simulation Monte-Carlo

Quantification des Techniques de Réduction de Variance (TRV)

Guy Ange GROGUHE

Candidature M1 Mathématiques et Applications

Projet de recherche appliquée personnel — Rapport technique : 27 pages

github.com/Guy-Ange/MBG_Montecarlo

RÉSULTATS CLÉS ET VALIDATION EMPIRIQUE

Convergence rigoureusement validée :

→ Taux $O(N^{-1/2})$: pente log-log = **–0,500** (théorie confirmée, 500 répétitions éliminant bruit stochastique)

→ Intervalles de confiance 95% : taux couverture **94,4%** (validation absence biais, $N = 10^5$/estimation)

Réduction de variance quantifiée :

Technique	S	Mécanisme
Variables antithétiques	3,47	Corrél. négative $(Z, -Z)$
Variables de contrôle	50–500	Coef. α^* optimal
Limite théorique ($\rho = 1$)	$\sim 2{,}5 \times 10^9$	Erreur machine

S = 3,47 signifie réduction temps calcul ×3,5 à précision égale.

MÉTHODOLOGIE — Pipeline de validation industrielle

[1] Modélisation — Mouvement Brownien Géométrique exact (sans discrétisation)

- Solution analytique exacte : $S_T = S_0 \exp[(r - \frac{\sigma^2}{2})T + \sigma\sqrt{T}Z]$ (application Lemme d'Itô)
- Théorème de Girsanov : changement mesure $\mathbb{P} \to \mathbb{Q}$ (drift $\mu \to r$) pour pricing risque-neutre
- Valorisation : $C_0 = e^{-rT}\mathbb{E}^{\mathbb{Q}}[(S_T - K)^+]$ (Théorème Fondamental de la Valorisation)

[2] Validation théorique — Convergence et quantification erreur statistique

- Loi forte des grands nombres (LFGN) : convergence p.s. $\hat{C}_N \xrightarrow{p.s.} C_0$ (consistance estimateur)
- Théorème central limite(TCL) : $\sqrt{N}(\hat{C}_N - C_0) \xrightarrow{D} \mathcal{N}(0, \sigma^2)$ implique vitesse $O(N^{-1/2})$
- Intervalle de confiance (IC) empiriques : test taux couverture sur 500 estimations indépendantes validant absence biais
- Élimination erreur discrétisation : solution analytique GBM (seule erreur statistique subsiste)

[3] Optimisation — Techniques Réduction Variance avec gains mesurés

- **Variables antithétiques** : couplage $(Z, -Z)$ induisant $\text{Cov}(X, X') < 0$ pour payoffs monotones
- Gain VA : $\text{Var}(\hat{C}_{\text{anti}}) = \frac{1}{2N}[\text{Var}(X) + \text{Cov}(X, X')]$ avec S = 3,47 mesuré
- **Variables de contrôle** : coefficient optimal $\alpha^* = \text{Cov}(X, Y)/\text{Var}(Y)$ minimisant variance
- Gain VC : $\text{Var}(\hat{C}^*_{\text{cv}}) = \text{Var}(\hat{C})(1 - \rho^2_{X,Y})$ avec S maximal
- Quantification : $S = \text{Var}(\hat{C}_{\text{std}})/\text{Var}(\hat{C}_{\text{TRV}})$ traduit directement en réduction temps

[4] Implémentation — Code scientifique reproductible

- Python scientifique (NumPy, SciPy), architecture modulaire, validation 500 répétitions (RMSE convergent)
- Générateur validé : Conformité entre la distribution des nombres générés et distribution log-normale de S_T
- Documentation 27 pages : presentation mathématique complète + code critique + bibliographie

COMPÉTENCES TECHNIQUES DÉMONTRÉES

Mathématiques et probabilités

- Calcul stochastique : Lemme de Itô, Théorème de Girsanov, Equations différentielles stochastiques
- Théorie probabiliste : Loi forte des grands nombres, Théorème central limite, martingales
- Statistiques : RMSE, Intervalle de confiance, taux de couverture
- Finance mathématique : pricing risque-neutre, Absence d'opportunité d'arbitrage (AOA)

Méthodes numériques avancées

- Simulation exacte (solution GBM analytique)
- TRV industrielles quantifiées (Variables Antithétiques, Variable de Contrôle)
- Analyse convergence empirique vs théorique
- Validation statistique rigoureuse

Rigueur scientifique et programmation

- Code Python structuré, documenté et entièrement reproductible
- Tests validation systématiques : convergence, biais, variance, couverture IC
- Rapport scientifique 27 pages : cadre théorique, validation numérique, optimisation, annexes code

NIVEAU, PORTÉE ET IMPACT INDUSTRIEL

Niveau du projet : Projet de recherche personnel démontrant une maîtrise opérationnelle de méthodes stochastiques et numériques de niveau **M2**, appliquées au pricing d'options. La validation empirique rigoureuse (RMSE sur 500 répétitions, test taux de couverture IC, analyse facteur d'accélération) confirme une compréhension approfondie des fondements théoriques (calcul d'Itô pour dérivation GBM, changement de mesure de Girsanov pour pricing risque-neutre, TCL pour quantification erreur) et de leur implémentation industrielle avec élimination complète de l'erreur de discrétisation.

Impact industriel : Réduction du temps de calcul par facteur **S** pour options path-dépendantes (options asiatiques à moyenne arithmétique, options barrières knock-in/knock-out) et produits complexes sans formule fermée (options sur panier multi-actifs, modèles à volatilité stochastique type Heston). Les TRV rendent la méthode Monte-Carlo compétitive pour le pricing en production où la précision à 4 décimales est requise avec contrainte temps de réponse inférieur à 1 seconde pour valorisation en temps réel.

Perspectives d'extension : Modèles à volatilité stochastique (Heston : $dv_t = \kappa(\theta - v_t)dt + \xi\sqrt{v_t}dW_t^v$ avec corrélation prix-volatilité), méthodes quasi-Monte-Carlo (suites de Sobol à faible discrépance pour accélération convergence), pricing sous sauts (processus de Lévy : modèles Merton jump-diffusion, Kou double-exponentielle), gestion de portefeuilles d'options exotiques avec calcul des grecques (delta, gamma, vega) par différences finies Monte-Carlo pour couverture dynamique.