

פרויקט מסכם – יסודות בתורת השערור
086777

**שערור מטריצת סיבוב בין שני
גiroskopim המועוגנים לגוף קשיח**

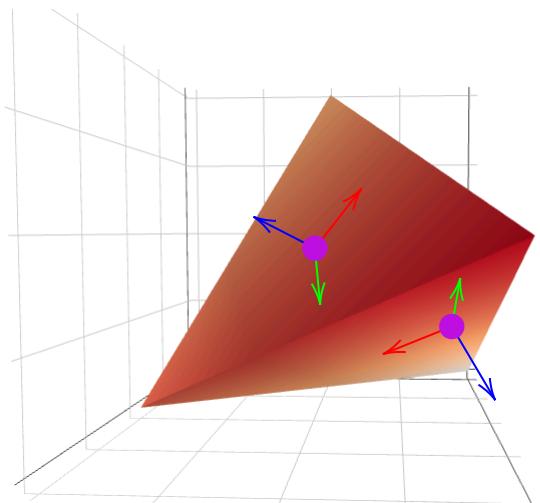
313580805 גיא בן-יוסף
312163272 נעם אילוז

1. מבוא	3
2. גישה	3
3. שיטה	4
3.1. פתרון כללי לבניית הניצבות של פרוקרטוסט	4
3.2. הקשר בין בנייה הניצבות של פרוקרטוסט לבנייה המדונה	6
3.3. הערכות שגיאות	8
3.3.1. שערוך מידת אי הווידאות של תוצריו החישוב	8
3.3.2. קביעת ערך השגיאה השירית	8
3.3.3. שיעור תאימות-עצמית	9
4. ניסוי	9
5. תוצאות	10

1. מבוא

בעולם הקיימים יש חישבות רבתה להסקה נכונה מຕור מדיות של חיישנים, המשמשים כברי חישה ממש במערכות מורכבות כמו רביילוב, מטוסים ולוויינים, המקבילים לעיניים ואוזניים בגוף האדם. מערכות מורכבות אלו צריכות לדעת במידוק היקן הן נמצאות, מה מצבן היזוטטי וכיידן הן נעות. נניח שהוצבו שני חיישנים על מערכת נעה, ונניח שגםיהם מנסים לומר את אותו הדבר במידוק אבל בשפות שונות. זהו הלכה למעשה האתגר שבו אנו נתקלים כאשר שני מדיה מהירות זיזית (גירוסקופים) מעוגנים במצב זיזית שונה ביחס לאותו גוף קשיח. גירוסקופים משמשים במידוק האופן שבו עצם מסתובב, או פונה. הפרויקט שנציג במסמך זה, עוסק כולו בשערוך ערכי המצב היזוטי של גירוסקופ אחד ביחס לשני, ואופטימיזציה של ערכים אלו, באמצעות מספר שיטות מתמטיות.

במסמך נעמיק בנושא שנקרא "בעיית הניצבות של פרוקראוסטס" ("Orthogonal Procrustes Problem"). בעיה זו עוסקת באופן כללי, במצב ההסתrema המיטבית בין שתי קבוצות של חייות סדרות. בפרויקט שלנו, חייות אלו הן שלשות סדרות, ככל אחת מהן היא קריאת נתוני מהירות זיזית מאחד הגירוסקופים. כל קבוצה של N שלשות סדרות היא מטריצה בממד $3 \times N$. כל וקטור באורך N במטריצה זו הוא אוסף מדדיות מהירות זיזית בזמינים שונים באחד מצרי הירוסקופ. בשימוש בהשה זו לפתרון הבעיה, אנו מנסים ליישר את שני הירוסקופים, כך שיתאימו המדדיות המתפללות משליהם לגבי התנועה היזוטית של גוף קשיח.



Drawing 1: גוף קשיח אליו מעוגנים שני גירוסקופים, כל אחד במערכת צירים שונה

הчисבות בפתרון בעיה מסוג זה, של שערוך מצב זיזתי של גירוסקופ אחד ביחס לשני, חוזה מעבר למרחב התיאורטי של תורת השערור ועשוי להשפיע באופן מגוון על יישומים מעשיים בעולם הנדסת ההנחייה, הניווט והבקרה. מידע מדויק הנוגע להפרש כיווני במרחב בין מספר חיישנים, הוא בסיס לקידום הדיקוק במערכות ניווט, שיפור האופן בו נקבע המצב היזוטי, ואופטימיזציה של אלגוריתמי היתוך חיישנים.

2. גישה

במסמך זה נציג גישה מפורטת לשערוך מטריצת הסיבוב בין שני גירוסקופים המעוגנים לאותו גוף קשיח. התהילה מתחילה באיסוף דגימות מהירות זיזית משני הירוסקופים, שבאופן מהותי מבטאות את התנועה הסיבובית ביחס למערכת הצירים של כל אחד מהם. לאחר מכן נרצה כאמור להשתמש בפתרון

"בע"ת הניצבות של פרוקראסטוס", אך לצורך כך יהיה علينا לבצע מספר התאמות והנחות נוספות. האלגוריתם הפותר את הבעיה המדוברת מזעיר את ההפרש בין מטריצת המדידות המסוובות של אחד הגירוסקופים, דהיינו המדידות לאחר הכפלת במטריצת סיבוב משוערcta, לבין מטריצת המדידות של הגירוסקופ האחר. מזעיר זה נעשה בשיטת הריבועים הפחות. רצף פעולות זה מביא לידי תכליות פשוטות ביצוע, ומתקדם באופן מעשי בישומיות של תורה השערוך בתרחיש הלקו מהעולם האמיתי.

3. שיטה

נתחיל בהעמקה שיטתייה בהצעתו של Peter H. Schönemann לפתרון הבעיה, כפי שכותב במאמר¹ "A generalized solution of the orthogonal Procrustes problem" וナמצאת גישתו כדי לישמה בהקשר של סיבוב הערכים הנמדדים מגירוסקופ אחד ביחס לאחדר. נפרט שלב אחר שלב את הפיתוח האנליטי ואת תהליכי הניסוי כדי להעיר באופן קפדי את השיטה המוצעת לשערוך מטריצת הסיבוב המדוברת. נתחיל בהציג תיאורטית של פתרון הבעיה, לאחר מכן נרחיב את התיאוריה מעט כך שתתאים לישום בעולם האמיתי, ולבסוף נציג ניסוי שביצענו יחד עם תוכנה שאוספת ומנתחת את הנתונים, מעבדת אותנו וпотרת את הבעיה בעזרת יישום האלגוריתם שנציג.

3.1. פתרון כללי לבעיית הניצבות של פרוקראסטוס

שם הבעיה הנידונה, "בעית הניצבות של פרוקראסטוס" מיוחס לבעית ריבועיםՓחותים בהפעלת טרנספורמציה אורתוגונלית T על מטריצה נתונה Ω_1 כך שתתקבל מטריצה Ω_2 , היכן שסכום הריבועים של המטריצה השוירית $E = \Omega_1 T - \Omega_2$ מוגזר. השם פרוקראסטוס, שנכתב על ידי Hurley ו-Cattell במאמר² "Producing direct rotation to test a hypothesized factor structure" מיוחס לפושע מן המיתולוגיה היוונית שזכה על קורבנותיו למיתת העינויים שלו, אם זה על ידי מתיחת גפיהם, או דרך קיצצם. באופן מתמטי הבעיה מוחלקת ל:

- הגדרה

$$\Omega_1 T = \Omega_2 + E \quad (1)$$

- אילוץ

$$TT^\top = T^\top T = I \quad (2)$$

- יעד

$$\text{tr}(E^\top E) = \min \quad (3)$$

היכן שבאופן כללי, Ω_1 ו- Ω_2 שייכות ל- $\mathbb{R}^{n \times m}$ וערךיה ידועים.

ניתן לרשום את הבעיה באופן הבא

$$\begin{aligned} g_1 &= \text{tr}(E^\top E) \\ &= \text{tr}\left(T^\top \Omega_1^\top \Omega_1 T - (\Omega_2^\top \Omega_1 T)^\top - \Omega_2^\top \Omega_1 T + \Omega_2^\top \Omega_2\right) \\ &= \text{tr}\left(T^\top \Omega_1^\top \Omega_1 T - 2T^\top \Omega_1^\top \Omega_2 + \Omega_2^\top \Omega_2\right) \end{aligned} \quad (4)$$

כאמור עליינו לפתור את הבעיה תחת אילוץ (2) שנitin לרשום כ-

¹ Schönemann, P. H. (1966). A generalized solution of the orthogonal procrustes problem. *Psychometrika*, 31(1), 1-10. <https://doi.org/10.1007/BF02289451>

² Hurley, J. R., & Cattell, R. B. (1962). The Procrustes program: Producing direct rotation to test a hypothesized factor structure. *Behavioral science*, 7(2), 258.

<https://doi.org/10.1002/bs.3830070216>

$$g_2 = \text{tr} [L(T^\top T - I)] \quad (5)$$

היכן ש- $\mathbb{R}^{m \times n} \in L$ היא מטריצה של כופלי לגראנץ'. את הפונקציה g , עליה מפעלים נגזרות חלקיות לפי האלמנטים השונים של מטריצה T נרשום כ

$$g = g_1 + g_2 \quad (6)$$

גזרה חלקית של (6) לפ' האלמנטים השונים של T מוגבהת מטריצה של נגזרות חלקיות

$$\frac{\partial g}{\partial T} = (\Omega_1^\top \Omega_1 + \Omega_2^\top \Omega_2) T - 2\Omega_1^\top \Omega_2 + T(L + L^\top) \quad (7)$$

כדי למצאו קיצון של (4) בהינתן אילוץ האורתוגונליות של T , נחפש את ערכי T עבורם (7) אפשרה. נסמן

$$P = \Omega_1^\top \Omega_1$$

$$S = \Omega_2^\top \Omega_2$$

$$Q = (L + L^\top) / 2$$

לפי סימון זה ניתן לרשום את (7) כ-

$$\frac{\partial g}{\partial T} = 2PT - 2S + 2TQ \quad (8)$$

מכאן ש-(7) אפשרה אם מתקיים

$$S = PT + TQ \quad (9)$$

נשים לב שגם P וגם Q סימטריות ולכן מתקיים

$$Q = T^\top S - T^\top PT = Q^\top \quad (10)$$

אבל היות שמתוך הסימטריה של P , גם $T^\top PT$ סימטרית, אז מתקיימת סימטריה גם במקרה של

$$T^\top S = (T^\top S)^\top = S^\top T \quad (11)$$

נכפול את שני צדדי המשוואה אחד בשני, פעמיינן ופעם משמאלו ונקבל

$$T^\top SS^\top T = S^\top TT^\top S$$

אך לפי אילוץ האורתוגונליות של T נרשום את הסימטריה המתבקשת

$$S^\top S = T^\top SS^\top T = TS^\top ST^\top = SS^\top \quad (12)$$

עתה לפנינו שתי מטריצות סימטריות S, S^\top פשוטות לחישוב בהינתן Ω_1 ו- Ω_2 . קיימם הכרח שהן D_s^\top והן $S^\top S$ יлокסנו על ידי מטריצה אורתוגונלית ויחלקו את מטריצת הערכים העצמיים, כך שאם

היא היא מטריצת הערכים העצמיים וכן מתקיים

$$I = W^\top W = WW^\top = V^\top V = VV^\top \quad (13)$$

ואז

$$\begin{aligned} SS^\top &= WD_s W^\top \\ S^\top S &= VD_s V^\top \end{aligned} \quad (14)$$

אם כן, מ-(12) ו-(14) מתקובל

$$WD_s W^\top = TVD_s (TV)^\top \quad (15)$$

כך שלמעשה

$$W = TV \quad (16)$$

ואו

$$T = WV^\top \quad (17)$$

נשים לב שאת הביטויים מ-(14) ניתן לרשום גם עבור פירוק של S בלבד

$$S = WD_s^{1/2}V^\top \quad (18)$$

פירוק זה היה ידוע בעבר כ-"Eckart-Young decomposition" והוא מוכר כ-SVD – פירוק לערכים סינגולריים. קיבלנו אם כן תנאי הכרחי ל- T כדי שיתקיים (3). עם זאת, לאחר ונקבעה מגמה שרירותית עבור הווקטורים העצמיים ב- V ו- W , גם אם הריבוי האלגברי של כל אחד מהערכים העצמיים ב- D_s הוא 1, תנאי (17) הכרחי גם לקיום של

$$\text{tr}(E^\top E) = \max$$

כלומר, علينا למצאו תנאי מספיק ל- T כדי שבחכרה (3) יתקיים. בהינתן הסימון שבחרנו מוקדם יותר, את נרשם כ-

$$\begin{aligned} g_1 &= \text{tr}(T^\top PT - 2T^\top S + \Omega_2^\top \Omega_2) \\ &= \text{tr}(P + \Omega_2^\top \Omega_2) - 2\text{tr}(T^\top S) \end{aligned}$$

כאשר השתמשנו בעובדה ש- $\text{tr}(PT) = \text{tr}(P)$ הנובעת מאורתוגונליות של T . נשתמש בתוצאה מ- (17) ונסמן

$$\begin{aligned} \theta &= \text{tr}(T^\top S) \\ &= \text{tr}(VW^\top S) \end{aligned} \quad (19)$$

בעזרת הסימון נשים לב שכדי למצער את (4) علينا לマルב את θ . אבל לפי (18)

$$\theta = \text{tr}(VW^\top WD_s^{1/2}V^\top) \quad (20)$$

ומתכונת התמורה הציקלית של העקבה מתקיים

$$\begin{aligned} \theta &= \text{tr}(W^\top WD_s^{1/2}V^\top V) \\ &= \text{tr}(D_s^{1/2}) \end{aligned} \quad (21)$$

כלומר, כדי למצער את (4) על ידי מירוב של (19), علينا לבחור את כל הערכים הסינגולריים של $D_s^{1/2}$ איזוטיליים. בחירה כזו תשליך על מגמת הווקטורים העצמיים של W ו- V שמתקיים כאמור מ-(14) או מ-(18). בסך הכל קיבלנו, שבמקרה שלנו בו כל המטריצות מורכבות מאיברים ממשיים וכל הערכים העצמיים ב- D_s ייחודיים, שימוש ב-(18) וב-(17) יבטיח T אחת ויחידה.

3.2. הקשר בין בעיית הניצבות של פרוקרטוסטוס לבעיה הנדונה

היו שתי מטריצות Ω_1, Ω_2 שמדוודות מהירותיות זוויתית בשלושה צירים כך ש:

$$[\Omega_1] = N \times 3 = [\Omega_2]$$

כאמור, בעיה שלנו הגרוסקופים מעוגנים לאותו גוף קשיח ולכן בהנחה רעש מדידה קטן ממש מהאות הננדד, קיימת מטריצת סיבוב (מטריצה אורתוגונלית) כך שמתקיים

$$\Omega_2 \approx \Omega_1 T \quad (22)$$

אבל, אמנם ניתן להניח ש- Ω_2 הינה הוא חישון מכוייל – כלומר, ציריו ניצבים זה לזו והמדידה של כל ציר מתאימה למציאות, אולם לא ניתן להניח זאת ביחס ל- Ω_1 . אם כן, לפי הנחה זאת לא מתקיים ש- T אורתונורמלית. כאמור לא מתקיים אילוץ (2). מצד שני, T מטריצה ריבועית ואיבריה ממשיים, לכן ניתן לפירוק פירוק קוטבי

$$T = CR \quad (23)$$

כך ש-

C מטריצה סימטרית
 R מטריצה אורתונורמלית
 לפי ההנחות והצבה של (23) ל-(22) מתקיים

$$\Omega_2 = \Omega_1 CR \quad (24)$$

כעת נרצה לחשב את C . נפעיל שחלוף על (24) ונקבל

$$\begin{aligned} \Omega_2^\top &= (\Omega_1 CR)^\top \\ &= R^\top C^\top \Omega_1^\top \\ &= R^{-1} C \Omega_1^\top \end{aligned}$$

נכפול את התוצאה ב-

$$\Omega_2 \Omega_2^\top = \Omega_1 C R R^{-1} C \Omega_1^\top$$

מכאן ש-

$$\Omega_2 \Omega_2^\top = \Omega_1 C^2 \Omega_1^\top \quad (25)$$

נכפול משמאל ב- Ω_1^\top ומימין ב- Ω_1 ונקבל

$$\Omega_1^\top \Omega_2 \Omega_2^\top \Omega_1 = \Omega_1^\top \Omega_1 C^2 \Omega_1^\top \Omega_1 \quad (26)$$

נוסף

$$\begin{aligned} M &= \Omega_1^\top \Omega_2 \\ D &= \Omega_1^\top \Omega_1 \end{aligned}$$

ונכתוב את (26) כ-

$$MM^\top = DC^2D \quad (27)$$

D מטריצה ריבועית PSD הפיכה ולכן נוכל לבדוק את C^2 באופן הבא

$$C^2 = D^{-1} MM^\top D^{-1} \quad (28)$$

נזכיר ש- C סימטרית אז גם C^2 סימטרית. בעזרה פירוק עצמי ניתן לרשום

$$C^2 = U \Lambda U^{-1}$$

ואז

$$C = U \Lambda^{1/2} U^{-1}$$

נרצה להציג את המשמעות הפיזיקלית של C . נרשום

$$C = \begin{pmatrix} \sigma_{11} & \sigma_{12} & \sigma_{13} \\ & \sigma_{22} & \sigma_{23} \\ & & \sigma_{33} \end{pmatrix}$$

היות שהגירוסקופ שלנו מכיל שלושה חיישנים, שמודדים ציר שונה כל אחד, נעשה ניסיון להציב אותם בኒצב זה לזה, כך שייהיו כמו שפחות תלויים זה בזה. הערכים σ_{ij} מבטאים את חוסר הניצבות של הצירים $i \neq j$

השונים בגירוסקופ. הערכים σ_{ij} מבטאים קבוע מכפלה "יחוד" לכל אחד משלושת החישנים. עבור חיישן שכoil באופן מושלם, נצפה לראות

$$C = I$$

3.3. הערצת שגיאות

בדרכ לשערוך מטריצת הסיבוב בין שני הגירוסקופים, קיימת חשיבות מהותית להערכת מידות שונות של שגיאה. שגיאות זו נובעת מה הצורך לקבל מושג על הדיק והאמינות של תוצאות החישוב.ណון בניתוח שגיאות מושלשת הכוללות:

1. שערוך מידת אי הוודאות של תוצרי החישוב
2. קביעת ערך השגיאה השיורית
3. שיעור תאימות- עצמית

כל אחד מהיבטים אלו של הערכת השגיאות יתרום להבנה של נוכנות וסבירות השיטה שאנו מציעים.

3.3.1. שערוך מידת אי הוודאות של תוצרי החישוב

אופן זה של הערכת השגיאות הכרחי לכימות רמת הסmgr במדידות שהתקבלו משני הגירוסקופים. נציג לחשב את אי הוודאות בעזרת יחס בין הרעש לצפויות של מדידות הגירוסקופים. הרעש, שמייצג את ממוצע אי התאמה בגודל המהירות הזוויתית בין שני הגירוסקופים, מבוטא מתמטית כתוחלת ההפרש מעל כל התצפויות

$$\varphi = \frac{1}{N} \sum_i [|\Omega_2(t_i)| - |\Omega_1(t_i)|] \quad (29)$$

ערך זה חשוב ועשי לסייע בכיוון תהילך השערוך דרך הפחתת ההשפעה של רעש מדידה אקררא. לצורך חישוב הצפויות נשתמש בנוסחה

$$O = \det[I \cdot \text{tr}(\Omega_1^\top \Omega_1) - \Omega_1^\top \Omega_1] \quad (30)$$

שמספקת מידת סקלרית לאיכות ההסקה שניתן לבצע על סmgr המדידות. כאמור, את אי הוודאות נחשב בעזרת

$$\Delta = O^{-1/6} \cdot \varphi \quad (31)$$

3.3.2. קביעת ערך השגיאה השיורית

במהשר לחישוב הטרנספורמציה שמוסבבת מדידות של גירוסקופ אחד כך שתתאים למדידות של גירוסקופ אחר, קיימ צורך חינוי לאמת מידת שיוירות השגיאה כדי להעריך את נוכנות הטרנספורמציה. שגיאה זו מכומנת בעזרת חישוב הזווית בין כל שני בני זוג של וקטורי קצב סיבוב אחורי הפעלת הטרנספורמציה. תוחלת זווית אלה על פני הזמן תשמש באופן ישיר לקביעת ערך השגיאה השיורית, מה שיספר על אפקטיביות הטרנספורמציה שחושבה.

$$\epsilon = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N \arccos \left(\frac{\Omega_1(t_i)T \cdot \Omega_2(t_i)}{|\Omega_1(t_i)T| |\Omega_2(t_i)|} \right) \quad (32)$$

3.3.3. שיעור תאימות-עצמית

עקרון התאימות העצמית מתיחס לעקביות הנתונים עם היפוטזה הטרנספורמציה הייחודית. בעזרתו שורש ממוצע הריבועים של ההפרש בין המהירות היזואית המשובבת והنمדדת, אנו מושגים שיעור לתאימות-עצמית.

$$\Gamma = \sqrt{\frac{1}{N} \sum_{i=1}^N [(\Omega_2(t_i) - \Omega_1(t_i)T)^2]}$$

להלן למעשה, מידת זו מושעת את חופפות הערכות הנמדדים עם הערכות המשובבים לפי הטרנספורמציה המוחשבת. אם הנתונים אכן עוקבים לפיה טרנספורמציה יחידה, אז מידת זו היא הערכה גסה לרשות במדידת המהירות היזואית. ערך נמוך עשוי לאותה על צורך לחידוד נוספת של תהליך שערוך מטריצת הסיבוב, או להציג מגבלות מוגבלות באיכות הנתונים.

4. ניסוי

כדי לחת תוקף אמפירי לפיתוחים שהציגו במסמך זה וכן במטרה להשיג הבנה עמוקה יותר בעניין הערכת השגיאות בהקשר של שערוך מטריצת סיבוב בין שני גiroskopים המעווגנים לאוטו גוף קשיח, תכננו וביצענו ניסוי מודיעין. ניסוי זה תוכנן בפרט על מנת לבדוק את היעילות של גישתנו מבוססת "ביעית הניצבות של פרוקורוסטס" בשערוך הטרנספורמציה הנדונה. דרך הcppטת השיטה שהצענו לתנאי העולם האמתי על ידי שימוש בשני גiroskopים תלת-ממדיים וגוף קשיח אחד, אנו מוצפים להעיר באופן ביקורתית את דיויק השיטה ואמינותו. מערכ הניסוי נבנה כך שידמה בצורה מיטבית את הנחות היסוד בשיטה שהצענו, מה שעשו להבטיח את תוקף הממצאים שנתקבל.

Figure 1: מערך הניסוי



Figure 2: מערך הניסוי



כאמור, מערך הניסוי כולל גוף קשיח אחד ושני giroskopים תלת-ממדיים. ניתן לראות ב-1 ו-2 Figure 2 שני טלפונים ניידים המוקבעים באופן הדוק למשולש עץ קשיח. הגiroskopים שמובנים בתווך הטלפונים הניידים נדגמו בתדר של [Hz] 60 באמצעות יישומון MATLAB. בהמשך נציג תוצאות של שני ניסויים:

1. ניסוי B – הגוף הקשיח הונע בידי אדם בתנעות מחזוריות מעורבות בשלושת הממדים.

2. ניסוי C – הגוף הקשיח הונע במישור אחד בלבד. הגוף הואז למהירות קבועה ולאחר מכן הואז למהירות דומה בмагמה הפוכה.

5. תוצאות

עבור כל אחד מהניסויים נציג שתי קבוצות גרפים:

1. ניתוח שגיאות.

2. התרשומות כלילת לאיכות השערור לפי פרק זמן שמתאים לשערור מיטבי.

נביט ב-4 Figure ו-6 Figure ונאמר שבאופן כללי, בשני הניסויים מתקבלות תוצאות מסוימות, כאשר מטריצת מדידות מסובבת מגירוסקופ אחד מתאימה למטריצת המדיידות מגירוסקופ השני. בניתוח השגיאות חישבנו את ערכי Δ , ϵ , ו- Γ בחולנות זמן שונים בין [s] 1 ל-[s] 25. בכל גודל של חלון זמן, חישבנו את הערכים על פני דגימות שונות ומרובות מתוך הקלטות הניסויים והצגנו את הערך החזוי. למשל, עבור חלון זמן בגודל 4 שניות, חישבנו את שלושת הערכים עבור חלון זמן בין [s] 0 = t_0 ל-[s] 4 = t_f , לאחר מכן עבור חלון זמן בין [s] $t_0 = 0.1$ ל-[s] $t_f = 4.1$ וכך הלאה פעמים רבות. נשים לב שהשני הניסויים איזהו הדאות הולכת וPOCHתת ככל שחלון הזמן גדול. מנגד, בעניין השגיאה השינויית, ניתן לראות כי אמנים בניסוי B השגיאה השינויית הולכת ומتعצמת עם התוצאות חלון הזמן, אבל בניסוי C החל מגודל חלון של [s] 9 השגיאה השינויית הולכת וקטנה. עובדה זו מפתיעה היהות שניתן לשער שתനועה מגוונת כמו בניסוי C הייתה מיניבה תוצאות טובות יותר מאשר תנועה מנומנת כמו בניסוי C. לגבי התאימות העצמית של הטרנספורמציה, נראה שמתקבלת מוגמה הפוכה למוגמה שזיהינו בשגיאה השינויית – בניסוי B התאימות העצמית מתגברת עם התרחבות החלון, ובניסוי C מתמעטת עם הצטמצמות החלון. נזכיר שקייםים הסברים נוספים לשגיאות. הסברים אלו מובנים בערך ניסוי בעולם האמיתי:

- קשייחות הגוף עליי הוציאו הגירוסקופים מגבלת וסופית.
- לכל אחד מגירוסקופים שגיאות שונות שתחולתן לא בהכרח אפשר עם הוספה דגימות.
- אפשר שגיאות הגירוסקופים תלויות בגודל המהירות היזויתית ובטמפרטורת החישן.
- סyncron היגירוסקופים נעשה באופן ידני.

Figure 3: B ב' מיניסויים

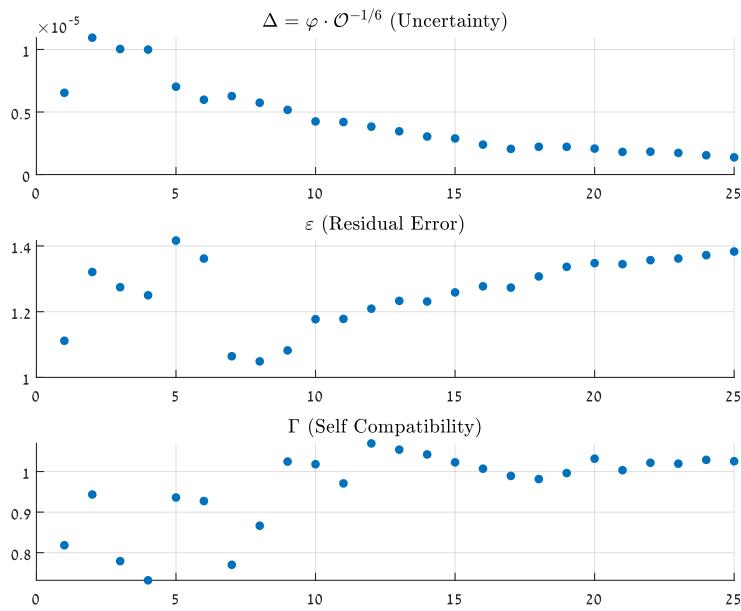


Figure 4: B ב' מיניסויים

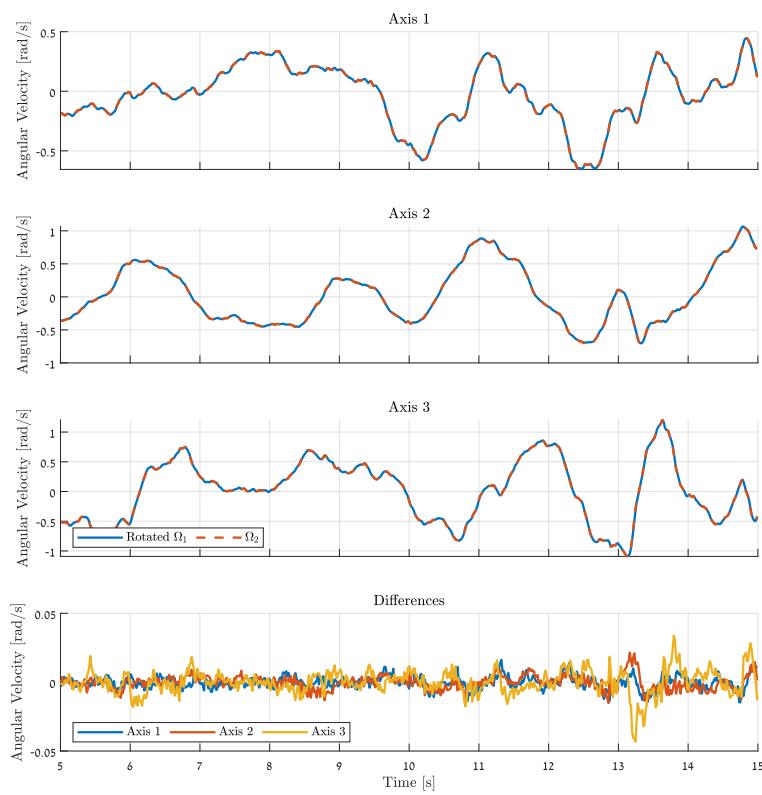


Figure 5: C ניתוח שגיאות מניסוי

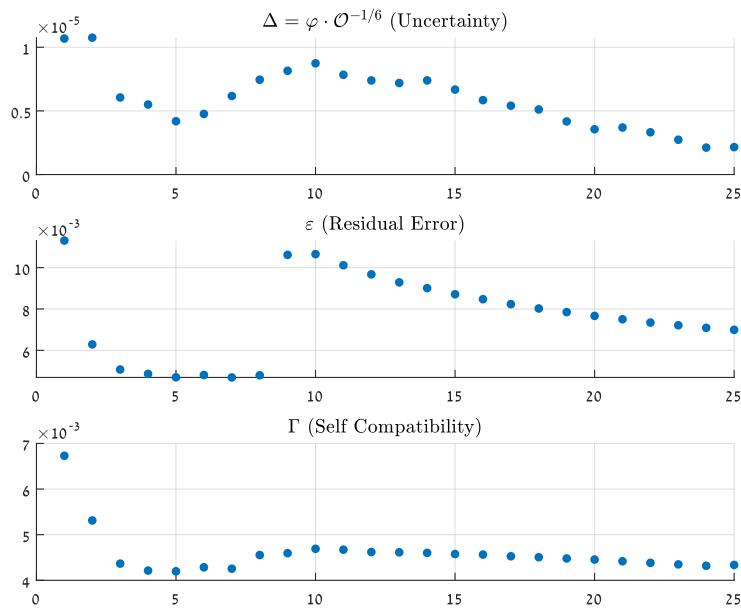


Figure 6: C התרשומות כליליות מניסוי

