אוניברסיטת בן-גוריון בנגב
Ben-Gurion University of the Negev

מבוא לשיטות חישוביות 361-1-2251

תרגיל מחשב III: אינטרפולציה ואינטגרציה

תאריך אחרון להגשה 02/07/2023

הנחיות כלליות: מטרת מטלה זו לתרגל את פתרונן הנומרי של בעיות באלגברה לינארית, בשיטות החישוב שנלמדו בקורס, בעזרת MATLAB. יש להגיש **מסמך מסכם לעבודה, כקובץ PDF**, ובו כל התשובות לסעיפים השונים, כולל כל הפיתוחים והביטויים הסופיים, תרשימים ואיורים, הסברים, נימוקים ופרשנות של התוצאות. יש לצרף את כל קבצי ה- MATLAB שכתבתם במסגרת העבודה, **מתועדים במידה מספקת** המאפשרת הבנת מה מומש. ניתן להגיש מספר קבצי קוד, אך יש להכין קובץ MAIN יחיד, שרק אותו יריץ הבודק, שיקרא לשאר הקבצים. אין להגיש קבצי ZIP, RAR וכו'. עבודה שלא תשחזור של כל התרשימים בה בקריאה לקובץ MAIN יחיד או שהקוד המצורף לה אינו נהיר, לא תבדק ותחשב כלא הוגשה. על התרשימים להיות נוחים להבנה (מקרא, כותרות צירים, קווים וסמנים נוחים לקריאה). יופחת ניקוד על תרשימים לא ברורים. למטלה משקל של 1/3 מסך תרגילי המחשב בציון הסופי וניתן לבצעה בזוגות.

רקע: ההשפעה המרחבית של אוסף גופים נקודתיים (למשל הפוטנציאל האלקטרוסטטי שיוצר אוסף גופים טעונים) ניתנת לשחזור מתוך מדידה באוסף נקודות בדידות. נניח כי שני גופים טעונים q^+ ו- q^- ממוקמים במרחק $\delta = 5\text{mm}$ זה מזה, לאורך ציר y, באופן סימטרי ביחס לראשית. הפוטנציאל על פני קשת ברדיוס r שמרכזה בראשית נתון ע"י:

$$\phi(\theta) = \frac{q^+}{4\pi r^+(\theta)} + \frac{q^-}{4\pi r^-(\theta)}$$

$$r^{\pm}(\theta) = \sqrt{[r\cos(\theta)]^2 + [r\sin(\theta) \mp \delta/2]^2}$$

המטען q^+ נתון ע"י סכום 8 הספרות הימניות של מספרי זהות שני בני הזוג **בסימן חיובי**. המטען q^- נתון ע"י סכום 8 הספרות השמאליות של מספרי זהות שני בני הזוג אך **בסימן שלילי** (יחידים – השתמשו באותו מספר זהות פעמיים).

שאלה 1: שחזור מדידות באמצעות אינטרפולציית לגרנג' (36 נק')

הפונקציה $\phi(\theta)$ נדגמת לאורך הקשת ב-$n+1$ נקודות מדידה בקטע $[0,\pi]$.

א. כתבו שגרה לחישוב אינטרפולציית לגרנג' ממעלה n, עבור נקודות דגימה **שרירותיות** $\theta_j \in [0,\pi]$ ונקודת שחזור $\bar{\theta} \in [0,\pi]$. השתמשו בה בכל הסעיפים הבאים.

ב. הניחו כי θ_j **במרווחים קבועים** וכי $r = 5\text{cm}$. מתוך הערכים המדודים $\phi(\theta_j),\ j \in [0,1,\ldots,n]$, חשבו את הפוטנציאל המקורב $\bar{\phi}(\bar{\theta}_i),\ i \in [0,1,\ldots,\bar{n}]$ ב-$\bar{n}+1 = 41$ נקודות $\bar{\theta}_i \in [0,\pi]$ **במרווחים קבועים**. עשו זאת עבור המקרים $n+1 = 2,3,4,5$. הציגו, **על גבי אותו התרשים**, את הערכים המקורבים המתקבלים $\bar{\phi}(\bar{\theta}_i)$ עבור סדרי האינטרפולציה השונים ואת הערכים המדויקים $\phi(\bar{\theta}_i)$, כפונקציה של θ. הסבירו את התוצאות.

ג. נגדיר את השגיאה היחסית:

$$\varepsilon(\phi) = \sqrt{\sum_{i=0}^{\bar{n}} [\bar{\phi}(\bar{\theta}_i) - \phi(\bar{\theta}_i)]^2} \Big/ \sqrt{\sum_{i=0}^{\bar{n}} [\phi(\bar{\theta}_i)]^2}$$

הדפיסו (ע"י semilogy) את השגיאה היחסית המתקבלת, כפונקציה של סדר הפולינום, עבור $n+1 \in [2,4,6,\ldots,20]$. הסבירו את התוצאות שקיבלתם.

ד. כעת $r = 4\text{mm}$. חזרו על סעיף א' (הפעם עבור $n+1 = 3,7,11,15$) ועל סעיף ב'. דונו בהבדלים בתוצאות. מה הסיבה להבדלים?

ה. החליפו את נקודות המדידה $\theta_j \in [0,\pi]$ בנקודות $\tilde{\theta}_j \in [0,\pi]$ המתקבלות משורשי פולינומי צ'בישב. חזרו על סעיף ג' עבור הנקודות החדשות. דונו בהבדלים בין התוצאות שהתקבלו. הציגו את עקומי השגיאה מסעיף ג' וסעיף זה על גבי אותו תרשים, השוו את התוצאות והסבירו את ההבדלים.

שאלה 2: שחזור מדידות בשיטת Least Squares (36 נק')

מציעים לשחזר את הפוטנציאל על הקשת מתוך $n+1$ נקודות מדידה באמצעות שיטת הריבועים הפחותים. לשם כך, מניחים כי הפוטנציאל ע"ג הקשת ניתן לתיאור בקירוב על ידי טור הפונקציות

$$\phi(\theta) \approx \phi_{\text{LS}}(\theta) = \alpha f_1(\theta) + \beta f_2(\theta) + \gamma f_3(\theta) = \alpha + \beta \sin(\theta) + \gamma \cos(\theta)$$

ומחפשים את המקדמים α,β,γ שיביאו למזעור השגיאה הריבועית (בנקודות המדידה) בחישוב ϕ.

א. נסמן את נקודות המדידה ב- θ_j ואת הערכים המדודים ב- $\phi_j = \phi(\theta_j)$. כתבו ביטוי אנליטי כללי למערכת המשוואות אותה נדרש לפתור לקבלת המקדמים α,β,γ, בהנחה שהפוטנציאל נמדד ב $n+1$ נקודות.

ב. הניחו כי הנקודות θ_j במרווחים קבועים וכי $r = 10\text{cm}$. בעזרת הביטוי שקיבלתם בסעיף א', כתבו תכנית לחישוב המקדמים α,β,γ והערכים $\phi_{\text{LS}}(\bar{\theta}_i)$ ב- $\bar{n}+1 = 41$ נקודות במרווחים קבועים $\bar{\theta}_i \in [0,\pi]$. בצעו את החישוב עבור $n+1 = 2,3,4$. סכמו בטבלה את המקדמים α,β,γ שהתקבלו עבור ערכי $n+1$ השונים. הציגו, **על גבי אותו התרשים**, את הערכים המקורבים $\phi_{\text{LS}}(\bar{\theta}_i)$ ואת הערכים המדויקים $\phi(\bar{\theta}_i)$ כפונקציה של θ, שהתקבלו בכל אחד מהמקרים. הסבירו את התוצאות. בפרט, דונו בהבדלים מתוצאות סעיף א' משאלה 1 במונחי דיוק וקצב הדגימה.

ג. הניחו $n+1 = 4$. עבור ערכי r $r \in \{r_0, r_0/2, r_0/2^2, \ldots, r_0/2^8\}$ כאשר $r_0 = 10\text{m}$ חשבו את $\phi_{\text{LS}}(\bar{\theta}_i)$ (ניתן גם לציירו לשם ההבנה) והציגו (loglog) בתרשים את השגיאה היחסית $\varepsilon_{\text{LS}}(\phi)$

$$\varepsilon_{\text{LS}}(\phi) = \sqrt{\sum_{i=0}^{\bar{n}} [\bar{\phi}_{\text{LS}}(\bar{\theta}_i) - \phi(\bar{\theta}_i)]^2} \Big/ \sqrt{\sum_{i=0}^{\bar{n}} [\phi(\bar{\theta}_i)]^2}$$

כפונקציה של r. דונו בתוצאות שהתקבלו: כיצד משפיע r על יכולת שחזור הפוטנציאל בדרך המוצעת?

ד. כעת $r = 10\text{cm}$, אולם נוספה שגיאה אקראית למדידות. עבור כל ערך מדוד ϕ_j חשבו ערך "שגוי" על ידי הוספת ערך אקראי δ_j מוגרל בהסתברות אחידה בקטע $\delta_j \in [-1/2, 1/2]$ (השתמשו בפונקציה rand עם הזזה מתאימה), כלומר $\hat{\phi}_j = (1 + \delta_j \cdot 10^{-1})\phi_j$. חזרו על חישוב $\phi_{\text{LS}}(\bar{\theta}_i)$ מסעיף ב' (ניתן, אך לא נדרש, לצייר את הפוטנציאל לשם הבנה), עבור $n+1 \in [4, 8, \ldots, 4 \cdot 2^{16}]$, והדפיסו את השגיאה $\varepsilon_{\text{LS}}(\phi)$ ביחס לפוטנציאל **המדויק**, כפונקציה של $n+1$. הסבירו את התוצאה שהתקבלה. כיצד מתיישבת תוצאה זאת עם תוצאות סעיף ב'? כיצד ישתנו התוצאות אם $\hat{\phi}_j = (1 + \delta_j \cdot 10^{-4})\phi_j$ ומדוע?

שאלה 3: אינטגרציה בשיטת ניוטון-קוטס (28 נק')

מעוניינים לחשב את אינטגרל ההיטל של הפוטנציאל על פונקציות $f_i(\theta)$ המוגדרות בתחום $\theta \in [0,\pi]$.

א. לשם כך, תחילה, ממשו, בשיטת הטרפז ובשיטת סימפסון (<u>לא מצרפיות</u>), שגרות לקירוב אינטגרל מסוים מהצורה

$$\int_a^b dt\, g(t)$$

בדקו והראו כי השגרות עובדות ע"י הפעלתן לחישוב קירוב לאינטגרל של הפונקציה $g(t)=4/[\pi(1+x^2)]$ בקטע $t\in[0,1]$. כתבו את תוצאות הקירוב והשגיאות היחסיות בחישוב האינטגרל המתקבלות עבור כל אחת מהשיטות, בהשוואה לפתרון (הניתן לחישוב אנליטית) המדויק.

ב. השתמשו בשגרות מסעיף א' למימוש תכנית המחשבת קירוב $Q_{i,M}$ לאינטגרל הנתון על ידי הביטוי

$$I_i=\int_{\theta=0}^{\pi} d\theta\phi(\theta)f_i(\theta)\approx Q_{i,n+1}$$

עבור הפונקציות f_i משאלה 2. התכנית תחשב את האינטגרל בעזרת נוסחאות אינטגרציה טרפז וסימפסון <u>מצרפיות</u>. בשתי השיטות, חשבו את האינטגרלים מתוך ערכי הפונקציה ב- $n+1\in[5,9,17,...,513]$ נקודות במרווחים אחידים. הניחו כי $r=10\text{cm}$. לצורך הדגמת ההתכנסות, התייחסו לתוצאה $Q_{i,513}$ בתור ערך האינטגרל ה"מדויק" והדפיסו (ע"ג אותו התרשים) את השגיאה היחסית $\varepsilon_{i,n+1}=|Q_{i,n+1}-Q_{i,513}|/|Q_{i,513}|$ המתקבלת, עבור כל אחד משני סוגי האינטגרציה, עבור כל אחת מהפונקציות f_i (6 סדרות נתונים סה"כ), כפונקציה של $n+1$.

בהצלחה!