



תרגיל מחשב 1

מבוא לשיטות чисוביות

מגישים:
גיא כהן 207881004
תahl ססונקר 318888005

שאלה 1

סעיף א

בסעיף זה נדרשנו לחשב:

- מטריצה A לפי הנוסחה הנתונה בשאלת
- פירוק LU של מטריצה A עם PIVOTING
- מספר המצביע של A
- וקטור v : $v = A^*q$ (q הינו וקטור תיעודות זההות שלנו)
- נורמות של A, $\|A\|_1$

הקוד שכתבנו עבור סעיף א' ($M=18$, $\rho=1$):

בנחת המטריצה A:

```
function A = matrix_q1(h,M)
rho = 1;
A = zeros(M,M);
for m = 1:M
    for n = 1:M
        r_mn = sqrt((h+rho*sin((m*pi)/M))-rho*sin((n*pi)/M)).^2+(rho*cos((m*pi)/M)-rho*cos((n*pi)/M)).^2;
        A(m,n) = 1 ./ (4*pi*r_mn) ;
    end
end
end
```

חישוב הוקטורי v:

v = A * q

| | v | x |
|----|---------|---|
| 1 | | |
| 1 | 9.0151 | |
| 2 | 14.8944 | |
| 3 | 14.8683 | |
| 4 | 13.2989 | |
| 5 | 10.4040 | |
| 6 | 8.2386 | |
| 7 | 7.4935 | |
| 8 | 7.7663 | |
| 9 | 8.6587 | |
| 10 | 9.2136 | |
| 11 | 9.8480 | |
| 12 | 11.7068 | |
| 13 | 13.9690 | |
| 14 | 15.4716 | |
| 15 | 16.5408 | |
| 16 | 16.8261 | |
| 17 | 10.0162 | |
| 18 | 8.6381 | |

וחישבנו את מספר המטר k:

את מספר המטר חישבנו ע"י פונקציה מובנית של matlab .cond() – matlab

| | | |
|---|------------|--|
| | k | |
| | 1x1 double | |
| | 1 | |
| 1 | 2.8120e+19 | |

סעיף ב

סעיף זה מימשנו שתי שלבים לפתורן $y = Ly = b$. לאחר מכן, בעזרת הפתרון של שני השלבים חישבנו את הוקטור q , שהוא הפתרון המקורי למשוואה $Aq = v$.

```
function y = Ly_b(L,b)
%lets find vector y
y = zeros(1,length(L));
y(1) = b(1) / L(1,1);
my_sum = 0;
for j=2:length(L)
    for i=1:j-1
        my_sum = my_sum + L(j,i) .* y(i);
    end
    y(j) = (b(j) - my_sum) ./ L(j,j);
    my_sum = 0;
end
end

function x = Ux_y(U,y)
%lets find vector y
x = zeros(1,length(U));
x(length(U)) = y(length(U)) / U(length(U),length(U));
my_sum = 0;
for i=length(U)-1:-1:1
    for j=length(U):-1:i+1
        my_sum = my_sum + U(i,j).*x(j);
    end
    x(i) = (y(i) - my_sum) ./ U(i,i);
    my_sum = 0;
end
end
```

הקוד מומש עפ"י האלגוריתם הבא:

$Ly = b$ - פירוט 1 גמיש

$PA = LU$: P מושג כטבלת נורמלית של מאובן $Aq = \vec{v}$ ביחס ל U ו $Aq = \vec{v}$ מושג כטבלת נורמלית של מאובן $Ly = \vec{v}$

$A = P^{-1}LU \leftarrow P^{-1}PA = P^{-1}LU$: פירוט P^{-1}

$P^{-1}LUq = \vec{v}$ [בז' ו $Aq = \vec{v}$ בז']

$LUq = P\vec{v}$ [בז' ו $P^{-1}LUq = P\vec{v}$: P^{-1} בז']

$Uq = Ux = y$, $Ly = b$ ו x

(ב) פירוט סעיפים ה-3 וה-4:

$$\begin{pmatrix} a_{11} & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{nn} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix}$$

$$a_{11} \cdot y_1 = b_1 \longrightarrow y_1 = \frac{b_1}{a_{11}} = \frac{b_1}{L(1,1)}$$

$$a_{21} \cdot y_1 = b_2 \longrightarrow y_2 = \frac{b_2 - a_{21}y_1}{L(2,2)}$$

$$a_{n1} \cdot y_1 + \dots + a_{nn} \cdot y_n = b_n \longrightarrow y_n = \frac{b_n - a_{n,n-1}y_{n-1} - \dots - a_{n1}y_1}{L(n,n)}$$

: y_j מתקבל מ- y_{j+1}

$$y_1 = \frac{b_1}{L(1,1)}$$

$$y_j = \frac{b_j - \sum_{i=1}^{j-1} a_{ji} \cdot y_i}{L(j,j)}, \quad 1 \leq j \leq 18$$

הנתק ליניאר 1 - נס

ב: גורע את ה- $Ax = b$ או $b = Ax$

רכז את ה- $Ax = b$ כ- $Ax = \vec{y}$ ה- \vec{y} סוחרים:

$$\underbrace{\begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}}_A \underbrace{\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}}_x = \underbrace{\begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}}_b$$

$$a_{nn} \cdot x_n = y_n \longrightarrow x_n = \frac{y_n}{a_{nn}}$$

$$a_{11} \cdot x_1 + \cdots + a_{nn} \cdot x_n = y_1 \longrightarrow x_1 = \frac{y_1 - a_{1,n-1} \cdot y_{n-1} - \cdots}{a_{1,1}}$$

לואר נקבע את ה- x_j - $x_j = \frac{y_j - \sum_{i=1}^{j-1} a_{j,n-i} \cdot y_{n-i} - \cdots}{a_{j,j}}$

השגיאה היחסית שקיבliśmy ע"י הנוסחה שנלמדה בכיתה:

$$q_rel_error = ||q' - q|| / ||q|| =$$

| | | |
|---|-------------|--|
| | q_rel_error | |
| | 1x1 double | |
| | 1 | |
| 1 | 2.9253e-11 | |

הערה חשובה! - ניתן לראות שהשגיאה נובעת מיצוג סופי של מספרים במחשב. המחשב חותך חלק מהמספרים ועל כן יש שגיאות מינוריות במהלך החישובים.

סעיף ג':

בסעיף זה התבקשנו להוסיף שגיאה קטנה לוקטור המדידות. נפתר כעת את הנוסחה $Aq = v + \delta v$.

ב' שקיבלנו:

| q_aprx | |
|--------|-------------|
| | 18x1 double |
| 1 | 1 |
| 2 | 2.0000 |
| 3 | 5.4811e-11 |
| 4 | 7.0000 |
| 5 | 8.0000 |
| 6 | 8.0000 |
| 7 | 1.0000 |
| 8 | -2.0683e-12 |
| 9 | -3.7187e-12 |
| 10 | 4.0000 |
| 11 | 3.0000 |
| 12 | 1.0000 |
| 13 | 8.0000 |
| 14 | 8.0000 |
| 15 | 8.0000 |
| 16 | 8.0000 |
| 17 | -4.7173e-11 |
| 18 | -4.2518e-11 |
| | 5.0000 |

השגיאה היחסית לפי הנוסחה שרשمنו בסעיף הקודם:

| q_rel_error_c | |
|---------------|------------|
| | 1x1 double |
| 1 | 1 |
| 2 | 0.0067 |

ניתן לשים לב שהשגיאה בסעיף זה גדולה ממשמעותה מהשגיאה היחסית שקיבלנו בסעיף ב'. הסיבה לכך היא שהחומר של השגיאה היחסית של ב' תלוי בשגיאה של וקטור הפתרונות. השגיאה חסומה על ידי מכפלה של מספר המצביע בשגיאה בקלט.

$$\frac{\|\Delta x\|}{\|x\|} \leq \underbrace{\|A^{-1}\| \cdot \|A\|}_{\text{העומק של א-ב}} \underbrace{\|b - \delta b\|}_{\text{העומק של } b} \underbrace{\kappa(A)}_{\text{העומק של } A}$$

סעיף ד':

בסעיף זה התקשנו להוסיף שגיאה קטנה למטריצה A. נפתרו כעת את הנוסחה $v = q(A + \delta A)$.

ב' שקיבלנו:

| | q_aprx_d |
|----|-------------|
| 1 | 18x1 double |
| 1 | 1.6573 |
| 2 | -0.0315 |
| 3 | 6.8887 |
| 4 | 7.8562 |
| 5 | 7.8370 |
| 6 | 0.8239 |
| 7 | -0.1846 |
| 8 | -0.1890 |
| 9 | 3.8106 |
| 10 | 2.8144 |
| 11 | 0.8225 |
| 12 | 7.8355 |
| 13 | 7.8545 |
| 14 | 7.8824 |
| 15 | 7.9265 |
| 16 | -0.0075 |
| 17 | 0.0469 |
| 18 | 3.8128 |

השגיאה היחסית לפי הנוסחה שרשמנו בסעיף הקודם:

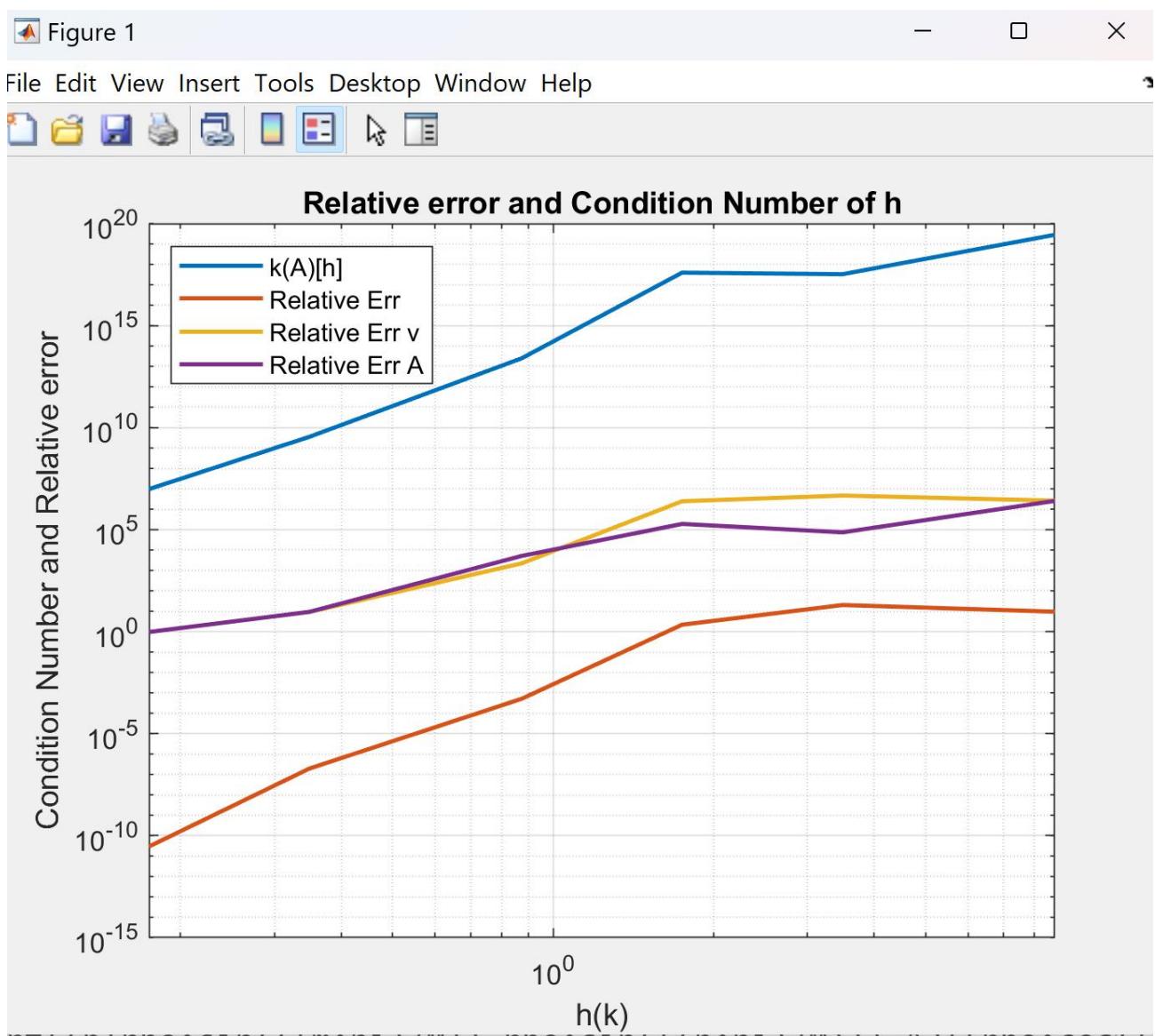
| q_rel_error_d | |
|---------------|------------|
| 1 | 1x1 double |
| 1 | 0.0617 |

בדומה לסעיף הקודם, השגיאה גדולה משמעותית מהשגיאה היחסית שקיבלנו בסעיף ב'. הסיבה לכך היא שהחומר של השגיאה היחסית של \hat{v} תלוי במספר המצביע שגדל בסעיף זה.

סעיף ה':

נחזיר על סעיפים א'-ד' עבור ערכי h משתנים לפי הנדרש בשאלתנו. נמצא את השגיאה היחסית של וקטור \hat{v} ואת מספר המצביע כפונקציה של h המשתנה.

התוצאות שקיבלנו והדפסנו לגרף:



ניתן לראות מהגרף שכלל שמדובר את ה- ϵ , כך שהשגיאה היחסית גדלה. זאת כתוצאה מהגדלת מספר המצביע ומהנוסחה שראינו מעלה לחסם העליון של השגיאה היחסית:

$$\frac{\|Ax\|}{\|x\|} \leq \underbrace{\|A^{-1}\|}_{\text{השגיאה היחסית של } A^{-1}} \cdot \underbrace{\|A\|}_{\text{השגיאה היחסית של } A} \|b\|$$

שאלה 2

בשאלה זו נשתמש בשיטות השונות, שיטת גאוס-זידל ושיטת יעקובי לפתרון המערכת $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$. נחקרו את התכונות פתרון המערכת בשתי השיטות, נפרט את שלבים בעבודתנו ונתעד את התוצאות ונעלה את המסקנות שועלות מהשימוש בשתי השיטות וההבדלים ביניהן.

סעיף א':

نبנה את המטריצה A התלויה בפרמטר h החדש $M/5M/h = (pi^*/(h))$.

נחשב את מטריצה A , את הוקטור b , נפתחור את מערכת המשוואות ונמצא את q , את השגיאה היחסית האמיתית ואת השגיאה היחסית בין זוג פתרונות עוקבים. ניקח ניחוש תחליתי $x_0 = (0, 0, 0)$ ושגיאה מקסימלית אפשרית של עד $(-3)^{10}$.

מטרתנו להציג גרפ המראה את המרחק היחסי בין שני איטרציות כפונקציה של האינדקס k . בנוסף, נציג את מספר האיטרציות הנדרשות להתקנות ואות ההגאה היחסית של q הסופי בהשוואה ל- q .

קaddr 2010-5.6 - נספח נספח רוחקו

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

$$x^{(k)} = \underbrace{(I - \frac{1}{h} A^{-1})}_{G} x^{(k-1)} + \underbrace{\frac{1}{h} b}_{C}$$

לצuge הטעיל. ק:

בפתרון כאן, נשתמש בהיפיכת מטריצה ולא בשיטת הצבה הקדמית מכיוון שהוא לא דורש מעתנו הרבה מידע. ע"י פקודת () נקבל את המטריצה הפוכה הנדרשת למציאת וקטורי הפתרון.

ראשית, נציג את התנאים להתקנות בשיטת גאוס-זידל:

אנו מודים:

העומס מתקכו ותנו לנו כבוד ציון-כיבוי

ו-תודה על גמישותם ותנו לנו נקודות:

תודה על פונקציית

$\underline{x}^T \underline{A} \underline{x} > 0$ סימולר ו-אינטגרל חיקית, גינו יי' \underline{x} :

המטריצה A שקיבliśmy מהצבת \hat{h} :

| A | | | | | | | | | | | | | | | | | | |
|--------------|--------|--------|--------|--------|--------|--------|--------|--------|--------|--------|--------|--------|--------|--------|--------|--------|--------|--------|
| 18x18 double | | | | | | | | | | | | | | | | | | |
| 1 | 2.2797 | 0.5648 | 0.2529 | 0.1637 | 0.1217 | 0.0974 | 0.0817 | 0.0709 | 0.0630 | 0.0571 | 0.0525 | 0.0490 | 0.0463 | 0.0441 | 0.0425 | 0.0413 | 0.0404 | 0.0399 |
| 2 | 0.3822 | 2.2797 | 0.5548 | 0.2506 | 0.1626 | 0.1210 | 0.0969 | 0.0814 | 0.0706 | 0.0627 | 0.0568 | 0.0523 | 0.0488 | 0.0461 | 0.0440 | 0.0423 | 0.0411 | 0.0403 |
| 3 | 0.2093 | 0.3854 | 2.2797 | 0.5410 | 0.2476 | 0.1612 | 0.1202 | 0.0964 | 0.0810 | 0.0702 | 0.0625 | 0.0566 | 0.0521 | 0.0487 | 0.0459 | 0.0438 | 0.0422 | 0.0410 |
| 4 | 0.1448 | 0.2106 | 0.3903 | 2.2797 | 0.5247 | 0.2441 | 0.1597 | 0.1193 | 0.0958 | 0.0805 | 0.0699 | 0.0622 | 0.0564 | 0.0519 | 0.0485 | 0.0458 | 0.0437 | 0.0421 |
| 5 | 0.1114 | 0.1456 | 0.2124 | 0.3969 | 2.2797 | 0.5071 | 0.2403 | 0.1579 | 0.1183 | 0.0951 | 0.0800 | 0.0695 | 0.0619 | 0.0561 | 0.0517 | 0.0483 | 0.0456 | 0.0435 |
| 6 | 0.0910 | 0.1119 | 0.1466 | 0.2147 | 0.4051 | 2.2797 | 0.4892 | 0.2362 | 0.1561 | 0.1172 | 0.0944 | 0.0795 | 0.0692 | 0.0616 | 0.0559 | 0.0515 | 0.0481 | 0.0455 |
| 7 | 0.0775 | 0.0914 | 0.1126 | 0.1478 | 0.2174 | 0.4151 | 2.2797 | 0.4718 | 0.2320 | 0.1543 | 0.1162 | 0.0937 | 0.0791 | 0.0688 | 0.0613 | 0.0557 | 0.0513 | 0.0480 |
| 8 | 0.0679 | 0.0778 | 0.0919 | 0.1133 | 0.1492 | 0.2206 | 0.4269 | 2.2797 | 0.4553 | 0.2280 | 0.1525 | 0.1152 | 0.0931 | 0.0786 | 0.0685 | 0.0611 | 0.0555 | 0.0512 |
| 9 | 0.0608 | 0.0682 | 0.0782 | 0.0925 | 0.1142 | 0.1508 | 0.2241 | 0.4403 | 2.2797 | 0.4403 | 0.2241 | 0.1508 | 0.1142 | 0.0925 | 0.0782 | 0.0682 | 0.0608 | 0.0553 |
| 10 | 0.0555 | 0.0611 | 0.0685 | 0.0786 | 0.0931 | 0.1152 | 0.1525 | 0.2280 | 0.4553 | 2.2797 | 0.4269 | 0.2206 | 0.1492 | 0.1133 | 0.0919 | 0.0778 | 0.0679 | 0.0606 |
| 11 | 0.0513 | 0.0557 | 0.0613 | 0.0688 | 0.0791 | 0.0937 | 0.1162 | 0.1543 | 0.2320 | 0.4718 | 2.2797 | 0.4151 | 0.2174 | 0.1478 | 0.1126 | 0.0914 | 0.0775 | 0.0677 |
| 12 | 0.0481 | 0.0515 | 0.0559 | 0.0616 | 0.0692 | 0.0795 | 0.0944 | 0.1172 | 0.1561 | 0.2362 | 0.4892 | 2.2797 | 0.4051 | 0.2147 | 0.1466 | 0.1119 | 0.0910 | 0.0772 |
| 13 | 0.0456 | 0.0483 | 0.0517 | 0.0561 | 0.0619 | 0.0695 | 0.0800 | 0.0951 | 0.1183 | 0.1579 | 0.2403 | 0.5071 | 0.2797 | 0.3969 | 0.2124 | 0.1456 | 0.1114 | 0.0907 |
| 14 | 0.0437 | 0.0458 | 0.0485 | 0.0519 | 0.0564 | 0.0622 | 0.0699 | 0.0805 | 0.0958 | 0.1193 | 0.1597 | 0.2441 | 0.5247 | 0.2797 | 0.3903 | 0.2106 | 0.1448 | 0.1110 |
| 15 | 0.0422 | 0.0438 | 0.0459 | 0.0487 | 0.0521 | 0.0566 | 0.0625 | 0.0702 | 0.0810 | 0.0964 | 0.1202 | 0.1612 | 0.2476 | 0.5410 | 0.2797 | 0.3854 | 0.2093 | 0.1443 |
| 16 | 0.0411 | 0.0423 | 0.0440 | 0.0461 | 0.0488 | 0.0523 | 0.0568 | 0.0627 | 0.0706 | 0.0814 | 0.0969 | 0.1210 | 0.1626 | 0.2506 | 0.5548 | 0.2797 | 0.3822 | 0.2085 |
| 17 | 0.0404 | 0.0413 | 0.0425 | 0.0441 | 0.0463 | 0.0490 | 0.0525 | 0.0571 | 0.0630 | 0.0709 | 0.0817 | 0.0974 | 0.1217 | 0.1637 | 0.2529 | 0.5648 | 0.2797 | 0.3806 |
| 18 | 0.0400 | 0.0405 | 0.0414 | 0.0426 | 0.0443 | 0.0464 | 0.0492 | 0.0527 | 0.0573 | 0.0632 | 0.0711 | 0.0820 | 0.0978 | 0.1222 | 0.1644 | 0.2543 | 0.5702 | 0.2797 |

וקטור v החדש שקיבלנו:

| v | |
|-------------|---------|
| 18x1 double | |
| 1 | 10.8393 |
| 2 | 10.3330 |
| 3 | 25.2758 |
| 4 | 28.3579 |
| 5 | 26.5992 |
| 6 | 11.8736 |
| 7 | 8.4500 |
| 8 | 8.8564 |
| 9 | 16.8988 |
| 10 | 16.0699 |
| 11 | 13.9132 |
| 12 | 28.1902 |
| 13 | 30.2764 |
| 14 | 30.3218 |
| 15 | 28.5605 |
| 16 | 11.5793 |
| 17 | 8.6840 |
| 18 | 16.7308 |

הfonקציה שבנוינו לצורך חישוב פתרון המערכת בשיטת גאוס-זידל:

```

function [Rel_dist_between_iter,Rel_err_with_q,num_of_iter,qk_out] = Gauss_Seidel(A,v,q)
Max_Error = 10 ^ (-3);
D = diag(diag(A)); %find D
L = tril(A,-1); %find L
Q = L + D;
U_minus = Q - A; %find -U
Q_minus_one = inv(Q);%Q^(-1)
G = Q_minus_one * U_minus ; % by definition
C = Q_minus_one * v; % by definition
qk = C; %iter number one
Rel_dist_between_iter = zeros; %initialization
Rel_err_with_q = zeros;%initialization
iter = 1;
num_of_iter = zeros;%initialization
error = max(abs(q-qk)); %infinity norm
counter = 500; %Limit Iterations
while abs(error) > Max_Error && iter <= counter
    num_of_iter(iter) = iter;
    qk_minus1 = qk; %initialization
    qk = G*(qk_minus1) + C;
    error = norm(q-qk,'inf');
    Rel_err_with_q(iter) = norm(qk - q,'inf') / norm(q,'inf');
    Rel_dist_between_iter(iter) = norm(qk - qk_minus1,'inf') / norm(qk_minus1,'inf');
    iter = iter + 1;
end
qk_out = qk;
end

```

לאחר הפעלת הפונקציה שבנוינו, נקבל את 'q' המקורב:

| qkA | |
|-----|-------------|
| | 18x1 double |
| 1 | 2.0004 |
| 2 | 1.2551e-04 |
| 3 | 7.0000 |
| 4 | 7.9999 |
| 5 | 7.9998 |
| 6 | 0.9999 |
| 7 | -1.1651e-04 |
| 8 | -8.0742e-05 |
| 9 | 3.9999 |
| 10 | 3.0000 |
| 11 | 1.0000 |
| 12 | 8.0000 |
| 13 | 8.0000 |
| 14 | 8.0000 |
| 15 | 8.0000 |
| 16 | 4.3276e-06 |
| 17 | 5.2146e-06 |
| 18 | 5.0000 |

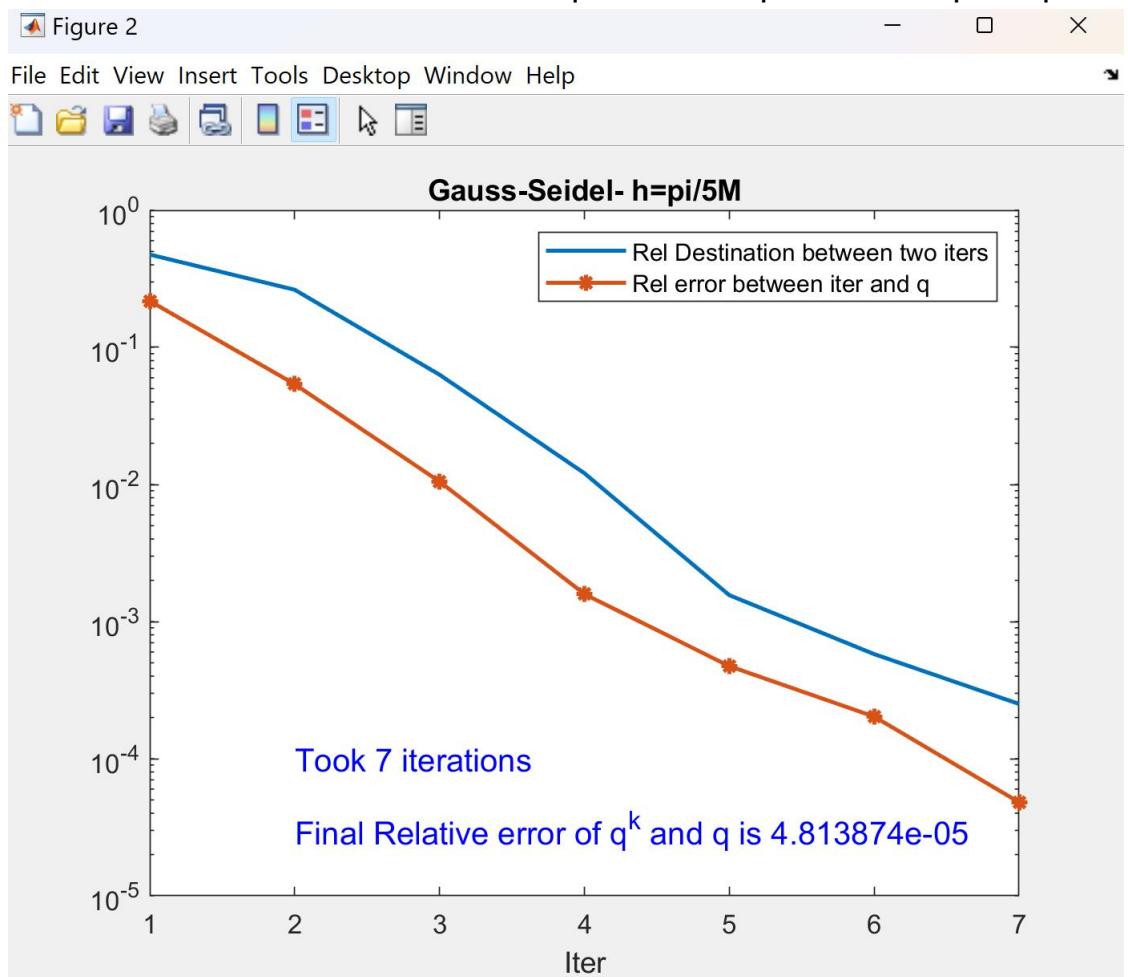
המפרק היחסי של הפתרון בין איטרציות:

| Rel_dist_between_iter_A | | | | | | |
|-------------------------|--------|--------|--------|--------|------------|------------|
| 1x7 double | | | | | | |
| 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 |
| 0.4751 | 0.2631 | 0.0632 | 0.0121 | 0.0016 | 5.7900e-04 | 2.5082e-04 |

השגיאה היחסית של q^k לערך האמיתי של q :

| Rel_err_with_q_A | | | | | | |
|------------------|--------|--------|--------|------------|------------|------------|
| 1x7 double | | | | | | |
| 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 |
| 0.2177 | 0.0539 | 0.0105 | 0.0016 | 4.7316e-04 | 2.0268e-04 | 4.8139e-05 |

להלן הגרף הסופי שקיבלנו בסעיף זה:



כפי שנitin לראות בגרף, השגיאה היחסית היא $(-5) \cdot 4.813874 \cdot 10^{-5}$ וכי מספר האיטרציות שנדרש להתקנסות הוא 7 איטרציות. כפי שציפינו, השיטה עובדת והוכחה לכך היא שהשגיאה מונוטונית יורדת כתלות במספר האיטרציות.

סעיף ב':

בסעיף זה נתקנסנו לחזור על סעיף א' עם הערכים המשתנים של ערכי h
הבאים:

$$h = (\rho * \mu) / (2M)$$

המטריצה A החדשה שקיבלנו:

| A | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | 10 | 11 | 12 | 13 | 14 | 15 | 16 | 17 | 18 |
|----|--------|--------|--------|--------|--------|--------|--------|--------|--------|--------|--------|--------|--------|--------|--------|--------|--------|--------|
| 1 | 0.9119 | 0.8574 | 0.2981 | 0.1808 | 0.1304 | 0.1026 | 0.0851 | 0.0732 | 0.0646 | 0.0583 | 0.0534 | 0.0496 | 0.0467 | 0.0444 | 0.0426 | 0.0413 | 0.0404 | 0.0398 |
| 2 | 0.3066 | 0.9119 | 0.7793 | 0.2892 | 0.1773 | 0.1284 | 0.1012 | 0.0841 | 0.0724 | 0.0640 | 0.0577 | 0.0529 | 0.0492 | 0.0463 | 0.0440 | 0.0423 | 0.0410 | 0.0401 |
| 3 | 0.1849 | 0.3108 | 0.9119 | 0.6958 | 0.2782 | 0.1730 | 0.1260 | 0.0997 | 0.0829 | 0.0715 | 0.0632 | 0.0571 | 0.0524 | 0.0487 | 0.0459 | 0.0437 | 0.0420 | 0.0407 |
| 4 | 0.1331 | 0.1872 | 0.3172 | 0.9119 | 0.6197 | 0.2663 | 0.1682 | 0.1234 | 0.0980 | 0.0817 | 0.0706 | 0.0625 | 0.0565 | 0.0519 | 0.0483 | 0.0455 | 0.0433 | 0.0416 |
| 5 | 0.1046 | 0.1346 | 0.1904 | 0.3262 | 0.9119 | 0.5551 | 0.2543 | 0.1633 | 0.1207 | 0.0962 | 0.0805 | 0.0696 | 0.0618 | 0.0559 | 0.0514 | 0.0479 | 0.0451 | 0.0430 |
| 6 | 0.0867 | 0.1057 | 0.1366 | 0.1946 | 0.3379 | 0.9119 | 0.5019 | 0.2427 | 0.1585 | 0.1180 | 0.0945 | 0.0793 | 0.0687 | 0.0610 | 0.0553 | 0.0509 | 0.0475 | 0.0448 |
| 7 | 0.0745 | 0.0875 | 0.1071 | 0.1391 | 0.1999 | 0.3529 | 0.9119 | 0.4585 | 0.2319 | 0.1538 | 0.1154 | 0.0928 | 0.0781 | 0.0679 | 0.0604 | 0.0548 | 0.0504 | 0.0471 |
| 8 | 0.0657 | 0.0752 | 0.0886 | 0.1088 | 0.1421 | 0.2062 | 0.3715 | 0.9119 | 0.4233 | 0.2222 | 0.1495 | 0.1130 | 0.0913 | 0.0770 | 0.0671 | 0.0598 | 0.0543 | 0.0501 |
| 9 | 0.0592 | 0.0664 | 0.0761 | 0.0899 | 0.1107 | 0.1455 | 0.2136 | 0.3947 | 0.9119 | 0.3947 | 0.2136 | 0.1455 | 0.1107 | 0.0899 | 0.0761 | 0.0664 | 0.0592 | 0.0539 |
| 10 | 0.0543 | 0.0598 | 0.0671 | 0.0770 | 0.0913 | 0.1130 | 0.1495 | 0.2222 | 0.4233 | 0.9119 | 0.3715 | 0.2062 | 0.1421 | 0.1088 | 0.0886 | 0.0752 | 0.0657 | 0.0588 |
| 11 | 0.0504 | 0.0548 | 0.0604 | 0.0679 | 0.0781 | 0.0928 | 0.1154 | 0.1538 | 0.2319 | 0.4585 | 0.9119 | 0.3529 | 0.1999 | 0.1391 | 0.1071 | 0.0875 | 0.0745 | 0.0652 |
| 12 | 0.0475 | 0.0509 | 0.0553 | 0.0610 | 0.0687 | 0.0793 | 0.0945 | 0.1180 | 0.1585 | 0.2427 | 0.5019 | 0.9119 | 0.3379 | 0.1946 | 0.1366 | 0.1057 | 0.0867 | 0.0739 |
| 13 | 0.0451 | 0.0479 | 0.0514 | 0.0559 | 0.0618 | 0.0696 | 0.0805 | 0.0962 | 0.1207 | 0.1633 | 0.2543 | 0.5551 | 0.9119 | 0.3262 | 0.1904 | 0.1346 | 0.1046 | 0.0860 |
| 14 | 0.0433 | 0.0455 | 0.0483 | 0.0519 | 0.0565 | 0.0625 | 0.0706 | 0.0817 | 0.0980 | 0.1234 | 0.1682 | 0.2663 | 0.6197 | 0.9119 | 0.3172 | 0.1872 | 0.1331 | 0.1038 |
| 15 | 0.0420 | 0.0437 | 0.0459 | 0.0487 | 0.0524 | 0.0571 | 0.0632 | 0.0715 | 0.0829 | 0.0997 | 0.1260 | 0.1730 | 0.2782 | 0.6958 | 0.9119 | 0.3108 | 0.1849 | 0.1321 |
| 16 | 0.0410 | 0.0423 | 0.0440 | 0.0463 | 0.0492 | 0.0529 | 0.0577 | 0.0640 | 0.0724 | 0.0841 | 0.1012 | 0.1284 | 0.1773 | 0.2892 | 0.7793 | 0.9119 | 0.3066 | 0.1836 |
| 17 | 0.0404 | 0.0413 | 0.0426 | 0.0444 | 0.0467 | 0.0496 | 0.0534 | 0.0583 | 0.0646 | 0.0732 | 0.0851 | 0.1026 | 0.1304 | 0.1808 | 0.2981 | 0.8574 | 0.9119 | 0.3045 |
| 18 | 0.0401 | 0.0407 | 0.0416 | 0.0430 | 0.0448 | 0.0471 | 0.0501 | 0.0539 | 0.0588 | 0.0652 | 0.0739 | 0.0860 | 0.1037 | 0.1320 | 0.1834 | 0.3040 | 0.9073 | 0.9119 |

וקטור v החדש שקיבלנו:

| v | 1 |
|----|---------|
| 1 | 8.6555 |
| 2 | 12.2065 |
| 3 | 17.1641 |
| 4 | 17.6750 |
| 5 | 14.9777 |
| 6 | 9.7227 |
| 7 | 8.0964 |
| 8 | 8.5107 |
| 9 | 11.0932 |
| 10 | 11.4965 |
| 11 | 11.7165 |
| 12 | 16.4811 |
| 13 | 18.9865 |
| 14 | 19.7248 |
| 15 | 19.1599 |
| 16 | 13.7608 |
| 17 | 8.9391 |
| 18 | 10.2259 |

המරחק היחסי בין איטרציות:

| Rel_dist_between_iter_B | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | 10 | 11 | 12 | 13 | 14 | 15 |
|-------------------------|--------|--------|--------|--------|--------|--------|--------|--------|--------|--------|--------|--------|------------|------------|------------|
| 1 | 1.5290 | 1.4052 | 0.1535 | 0.1523 | 0.0852 | 0.0682 | 0.0520 | 0.0438 | 0.0091 | 0.0107 | 0.0019 | 0.0022 | 2.6114e-04 | 3.3207e-04 | 1.1505e-04 |

השגיאה היחסית בין הפתרון המקורי לפתרון האמיתי:

| Rel_err_with_q_B | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | 10 | 11 | 12 | 13 | 14 | 15 |
|------------------|--------|--------|--------|--------|--------|--------|--------|--------|--------|--------|--------|------------|------------|------------|------------|
| 1 | 1.6291 | 0.3089 | 0.1834 | 0.0798 | 0.0885 | 0.0835 | 0.0307 | 0.0132 | 0.0081 | 0.0026 | 0.0020 | 2.4083e-04 | 2.2070e-04 | 2.0187e-04 | 8.6821e-05 |

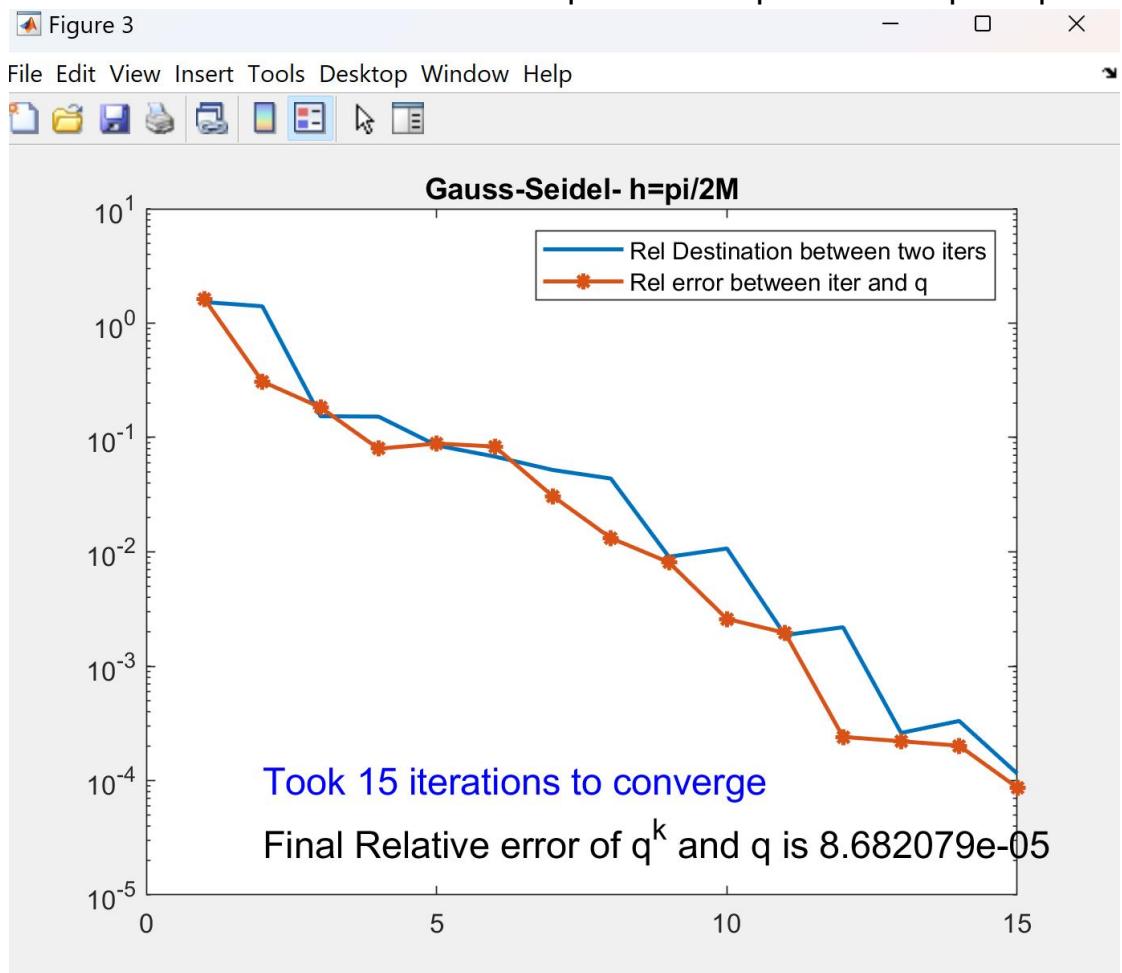
וקטור q הסופי שקיבלנו לאחר כל האיטרציות:

qkB

18x1 double

| | |
|----|-------------|
| 1 | 1 |
| 1 | 1.9993 |
| 2 | -1.8249e-04 |
| 3 | 7.0000 |
| 4 | 8.0000 |
| 5 | 8.0000 |
| 6 | 1.0000 |
| 7 | 1.8332e-05 |
| 8 | 1.7763e-05 |
| 9 | 4.0000 |
| 10 | 3.0000 |
| 11 | 1.0000 |
| 12 | 8.0000 |
| 13 | 8.0000 |
| 14 | 8.0000 |
| 15 | 8.0000 |
| 16 | 2.4249e-05 |
| 17 | -1.4846e-05 |
| 18 | 5.0000 |

להלן הגרף הסופי שקיבלנו בסעיף זה:



כפי שניתן לראות בגרף, השגיאה היחסית היא $(-5) \cdot 10^{-8}$ וכי מספר האיטרציות שנדרש לה收敛ות הוא 15 איטרציות. ניתן להסביר את העובדה שמספר האיטרציות לה收敛ות גדול באופן מובהק ע"י הסבר פיזיקלי. ההסבר הוא ש-ה הוא המרחק בין מרכז כל שתי קשתות צמודות וככל שהמרחב הולך וגדל הכוח בין כל זוג מטענים הולך וקטן.

עבור $M = (\rho \cdot \pi)/h$
המטריצה A החדשה שקיבלנו:

| A | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | 10 | 11 | 12 | 13 | 14 | 15 | 16 | 17 | 18 |
|----|--------|--------|--------|--------|--------|--------|--------|--------|--------|--------|--------|--------|--------|--------|--------|--------|--------|--------|
| 1 | 0.4559 | 1.7477 | 0.4128 | 0.2169 | 0.1474 | 0.1122 | 0.0911 | 0.0772 | 0.0674 | 0.0602 | 0.0548 | 0.0506 | 0.0474 | 0.0448 | 0.0429 | 0.0413 | 0.0402 | 0.0395 |
| 2 | 0.2301 | 0.4559 | 1.0539 | 0.3707 | 0.2052 | 0.1417 | 0.1087 | 0.0886 | 0.0753 | 0.0659 | 0.0590 | 0.0537 | 0.0497 | 0.0465 | 0.0441 | 0.0422 | 0.0407 | 0.0396 |
| 3 | 0.1546 | 0.2337 | 0.4559 | 0.7586 | 0.3296 | 0.1926 | 0.1355 | 0.1049 | 0.0860 | 0.0733 | 0.0643 | 0.0577 | 0.0526 | 0.0487 | 0.0457 | 0.0433 | 0.0415 | 0.0401 |
| 4 | 0.1171 | 0.1573 | 0.2392 | 0.4559 | 0.5961 | 0.2942 | 0.1803 | 0.1293 | 0.1010 | 0.0834 | 0.0714 | 0.0628 | 0.0564 | 0.0516 | 0.0479 | 0.0449 | 0.0427 | 0.0409 |
| 5 | 0.0948 | 0.1191 | 0.1611 | 0.2469 | 0.4559 | 0.4940 | 0.2646 | 0.1689 | 0.1233 | 0.0973 | 0.0808 | 0.0695 | 0.0613 | 0.0553 | 0.0506 | 0.0470 | 0.0442 | 0.0420 |
| 6 | 0.0801 | 0.0964 | 0.1219 | 0.1663 | 0.2572 | 0.4559 | 0.4246 | 0.2404 | 0.1586 | 0.1177 | 0.0938 | 0.0784 | 0.0677 | 0.0600 | 0.0542 | 0.0497 | 0.0463 | 0.0436 |
| 7 | 0.0699 | 0.0815 | 0.0986 | 0.1255 | 0.1730 | 0.2703 | 0.4559 | 0.3747 | 0.2207 | 0.1497 | 0.1127 | 0.0907 | 0.0762 | 0.0661 | 0.0587 | 0.0532 | 0.0489 | 0.0456 |
| 8 | 0.0623 | 0.0710 | 0.0832 | 0.1012 | 0.1300 | 0.1814 | 0.2875 | 0.4559 | 0.3377 | 0.2047 | 0.1420 | 0.1083 | 0.0878 | 0.0742 | 0.0646 | 0.0576 | 0.0523 | 0.0482 |
| 9 | 0.0567 | 0.0634 | 0.0725 | 0.0853 | 0.1045 | 0.1354 | 0.1918 | 0.3094 | 0.4559 | 0.3094 | 0.1918 | 0.1354 | 0.1045 | 0.0853 | 0.0725 | 0.0634 | 0.0567 | 0.0516 |
| 10 | 0.0523 | 0.0576 | 0.0646 | 0.0742 | 0.0878 | 0.1083 | 0.1420 | 0.2047 | 0.3377 | 0.4559 | 0.2875 | 0.1814 | 0.1300 | 0.1012 | 0.0832 | 0.0710 | 0.0623 | 0.0559 |
| 11 | 0.0489 | 0.0532 | 0.0587 | 0.0661 | 0.0762 | 0.0907 | 0.1127 | 0.1497 | 0.2207 | 0.3747 | 0.4559 | 0.2705 | 0.1730 | 0.1255 | 0.0986 | 0.0815 | 0.0699 | 0.0615 |
| 12 | 0.0463 | 0.0497 | 0.0542 | 0.0600 | 0.0677 | 0.0784 | 0.0938 | 0.1177 | 0.1586 | 0.2404 | 0.4246 | 0.4559 | 0.2572 | 0.1663 | 0.1219 | 0.0964 | 0.0801 | 0.0689 |
| 13 | 0.0442 | 0.0470 | 0.0506 | 0.0553 | 0.0613 | 0.0695 | 0.0808 | 0.0973 | 0.1233 | 0.1689 | 0.2646 | 0.4940 | 0.4559 | 0.2469 | 0.1611 | 0.1191 | 0.0948 | 0.0791 |
| 14 | 0.0427 | 0.0449 | 0.0479 | 0.0516 | 0.0564 | 0.0628 | 0.0714 | 0.0834 | 0.1010 | 0.1293 | 0.1803 | 0.2942 | 0.5961 | 0.4559 | 0.2392 | 0.1573 | 0.1171 | 0.0936 |
| 15 | 0.0415 | 0.0433 | 0.0457 | 0.0487 | 0.0526 | 0.0577 | 0.0643 | 0.0733 | 0.0860 | 0.1049 | 0.1355 | 0.1926 | 0.3298 | 0.7586 | 0.4559 | 0.2337 | 0.1546 | 0.1157 |
| 16 | 0.0407 | 0.0422 | 0.0441 | 0.0465 | 0.0497 | 0.0537 | 0.0590 | 0.0659 | 0.0753 | 0.0886 | 0.1087 | 0.1417 | 0.2052 | 0.3707 | 1.0539 | 0.4559 | 0.2301 | 0.1530 |
| 17 | 0.0402 | 0.0413 | 0.0429 | 0.0448 | 0.0474 | 0.0506 | 0.0548 | 0.0602 | 0.0674 | 0.0772 | 0.0911 | 0.1122 | 0.1474 | 0.2169 | 0.4128 | 1.7477 | 0.4559 | 0.2283 |
| 18 | 0.0401 | 0.0409 | 0.0420 | 0.0436 | 0.0456 | 0.0482 | 0.0515 | 0.0558 | 0.0614 | 0.0688 | 0.0789 | 0.0933 | 0.1152 | 0.1520 | 0.2261 | 0.4470 | 5.2292 | 0.4559 |

וקטור v החדש שקיבלנו:

| v | 1 |
|----|---------|
| 1 | 9.0151 |
| 2 | 14.8944 |
| 3 | 14.8683 |
| 4 | 13.2989 |
| 5 | 10.4040 |
| 6 | 8.2386 |
| 7 | 7.4935 |
| 8 | 7.7663 |
| 9 | 8.6587 |
| 10 | 9.2136 |
| 11 | 9.8480 |
| 12 | 11.7068 |
| 13 | 13.9690 |
| 14 | 15.4716 |
| 15 | 16.5408 |
| 16 | 16.8261 |
| 17 | 10.0162 |
| 18 | 8.6381 |

המרחב היחסי בין איטרציות:

| Rel_dist_between_iter_C | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | 10 | 11 | 12 | 13 | 14 | 15 | 16 | 17 | 18 |
|-------------------------|--------|--------|--------|--------|--------|--------|--------|--------|--------|--------|--------|--------|--------|--------|--------|--------|--------|--------|
| 1 | 1.1907 | 0.3499 | 0.1048 | 0.7770 | 7.5669 | 1.9390 | 0.9793 | 0.6789 | 0.5247 | 0.4276 | 0.3594 | 0.3079 | 0.2670 | 0.2333 | 0.2047 | 0.1798 | 0.1576 | 0.1375 |

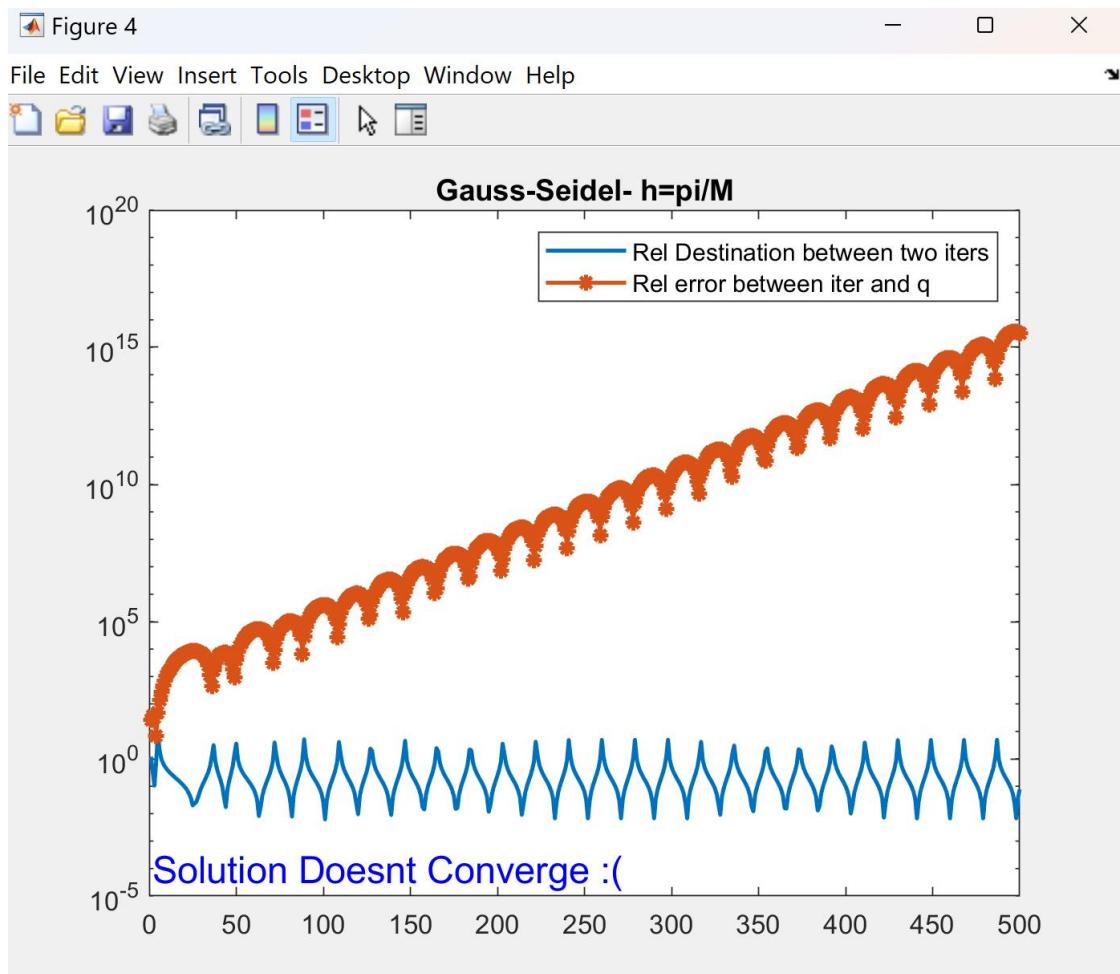
השגיאה היחסית בין הפתרון הקרוב לפתרון האמתי:

| | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | 10 | 11 | 12 | 13 | 14 | 15 | 16 | 17 | 18 |
|---|---------|---------|---------|--------|---------|----------|----------|----------|----------|------------|------------|------------|------------|------------|------------|------------|------------|------------|
| 1 | 26.8505 | 36.4648 | 32.5766 | 6.7804 | 49.2556 | 143.5525 | 283.5171 | 475.5686 | 724.7573 | 1.0344e+03 | 1.4060e+03 | 1.8386e+03 | 2.3293e+03 | 2.8725e+03 | 3.4602e+03 | 4.0822e+03 | 4.7255e+03 | 5.3754e+03 |

וקטור 'q הסופי שקיבלנו לאחר כל האיטרציות:

| | 1 |
|----|-------------|
| 1 | -1.1181e+15 |
| 2 | 1.3238e+14 |
| 3 | -1.1592e+14 |
| 4 | -1.9342e+14 |
| 5 | -2.3703e+14 |
| 6 | -2.7233e+14 |
| 7 | -3.0786e+14 |
| 8 | -3.4838e+14 |
| 9 | -3.9826e+14 |
| 10 | -4.6308e+14 |
| 11 | -5.5153e+14 |
| 12 | -6.7873e+14 |
| 13 | -8.7288e+14 |
| 14 | -1.1865e+15 |
| 15 | -1.7010e+15 |
| 16 | -2.4112e+15 |
| 17 | -1.8939e+15 |
| 18 | 2.6148e+16 |

להלן הגרף הסופי שקיבלנו בסעיף זה:



במקרה זה ניתן לראות שהפתרון לא מתכנס לפתרון האמתי. ניתן היה לצפות זאת ע"י כך שנשים לב שלא קיים אלכסון דומיננטי למטריצה A. כפי שניתן לראות בגרף מעלה שהאלגוריתם נעצר לא בשל קבלת התוכנות אלא בשל הגעתו למספר האיטרציות המקסימלי שהציבנו לו.

בסעיף זה נתקנסנו לחזור על סעיף א' תוך שימוש בשיטת יעקובי.
ראשית, נציג את המטריצה Q בהתאם לדרישת השיטה כמטריצה אלכסונית D:

$$Q = \begin{bmatrix} a_{11} & & & 0 \\ & a_{22} & & \\ & & \ddots & \\ 0 & & & a_{nn} \end{bmatrix}$$

נוצרת מ- a_{ij} .

$$\underline{x}^{(k)} = (\underline{\underline{I}} - \underline{\underline{Q}}^{-1}\underline{\underline{A}}) \underline{x}^{(k-1)} + \underline{\underline{Q}}^{-1}\underline{b}$$

(3.1) הינה ותאיינט. כי:

כפי גוראותם מתרץ נמכרו רצון:

$$\|\underline{\underline{I}} - \underline{\underline{Q}}^{-1}\underline{\underline{A}}\|_\infty = \|G\|_\infty = \max_{1 \leq i \leq n} \sum_{j \neq i} \left| \frac{a_{ij}}{a_{ii}} \right| < 1$$

נזכיר A נסיבת קולר בונ. גור. נזכיר: $\sum_{j=1}^n |a_{ij}| < |a_{ii}|$

ומונען שארה רני. מ. נסיב נסיבת נסיבת הוק. ו. מ. $\underline{x}^{(k)}$

הערך גלגולו הניכר נט עפ. (ערך $\underline{x}^{(0)}$)

להלן הפונקציה שמיימשנו על מנת לבצע את החישובים באמצעות שיטת יעקובי:

```

function [Rel_dist_between_iter,Rel_err_with_q,num_of_iter,qk_out] = Jacobi(A,v,q)
    Max_Error = 10 ^ (-3); %maximum error
    D = diag(diag(A)); %lets find D
    Q = D ;
    I = eye(18);
    Q_minus_one = inv(Q); %Q^(-1)
    G = I - (Q_minus_one * A);
    norm_G = norm(G,'inf'); %lets check if converge
    C = Q_minus_one * v; % by definition
    qk = C; %iter number one
    Rel_dist_between_iter = zeros; %initialization
    Rel_err_with_q = zeros; %initialization
    iter = 1;
    num_of_iter = zeros; %initialization
    error = max(abs(qk-q));
    max_iter = 500; %Limit Iterations
    while abs(error) > Max_Error && iter <=max_iter
        qk_minus1 = qk;
        qk = G*(qk_minus1) + C; %initialization
        error = norm(qk-q,'inf');
        Rel_err_with_q(iter) = norm(qk - q,'inf') / norm(q,'inf');
        Rel_dist_between_iter(iter) = norm(qk - qk_minus1, 'inf') / norm(qk_minus1, 'inf');
        num_of_iter(iter) = iter;
        iter = iter + 1;
    end
    qk_out = qk;
end

```

המטריצה A שקיבלנו בסעיף זה היא:

| A | | | | | | | | | | | | | | | | | | |
|--------------|--------|--------|--------|--------|--------|--------|--------|--------|--------|--------|--------|--------|--------|--------|--------|--------|--------|--------|
| 18x18 double | | | | | | | | | | | | | | | | | | |
| 1 | 2.2797 | 0.5648 | 0.2529 | 0.1637 | 0.1217 | 0.0974 | 0.0817 | 0.0709 | 0.0630 | 0.0571 | 0.0525 | 0.0490 | 0.0463 | 0.0441 | 0.0425 | 0.0413 | 0.0404 | 0.0399 |
| 2 | 0.3822 | 2.2797 | 0.5548 | 0.2506 | 0.1626 | 0.1210 | 0.0969 | 0.0814 | 0.0706 | 0.0627 | 0.0568 | 0.0523 | 0.0488 | 0.0461 | 0.0440 | 0.0423 | 0.0411 | 0.0403 |
| 3 | 0.2093 | 0.3854 | 2.2797 | 0.5410 | 0.2476 | 0.1612 | 0.1202 | 0.0964 | 0.0810 | 0.0702 | 0.0625 | 0.0566 | 0.0521 | 0.0487 | 0.0459 | 0.0438 | 0.0422 | 0.0410 |
| 4 | 0.1448 | 0.2106 | 0.3903 | 2.2797 | 0.5247 | 0.2441 | 0.1597 | 0.1193 | 0.0958 | 0.0803 | 0.0699 | 0.0622 | 0.0564 | 0.0519 | 0.0485 | 0.0458 | 0.0437 | 0.0421 |
| 5 | 0.1114 | 0.1456 | 0.2124 | 0.3969 | 2.2797 | 0.5071 | 0.2403 | 0.1579 | 0.1183 | 0.0951 | 0.0800 | 0.0695 | 0.0619 | 0.0561 | 0.0517 | 0.0483 | 0.0456 | 0.0435 |
| 6 | 0.0910 | 0.1119 | 0.1466 | 0.2147 | 0.4051 | 2.2797 | 0.4892 | 0.2362 | 0.1561 | 0.1172 | 0.0944 | 0.0795 | 0.0692 | 0.0616 | 0.0559 | 0.0515 | 0.0481 | 0.0455 |
| 7 | 0.0775 | 0.0914 | 0.1126 | 0.1478 | 0.2174 | 0.4151 | 2.2797 | 0.4718 | 0.2320 | 0.1543 | 0.1162 | 0.0937 | 0.0791 | 0.0688 | 0.0613 | 0.0557 | 0.0513 | 0.0480 |
| 8 | 0.0679 | 0.0778 | 0.0919 | 0.1133 | 0.1492 | 0.2206 | 0.4269 | 2.2797 | 0.4553 | 0.2280 | 0.1525 | 0.1152 | 0.0931 | 0.0786 | 0.0685 | 0.0611 | 0.0555 | 0.0512 |
| 9 | 0.0608 | 0.0682 | 0.0782 | 0.0925 | 0.1142 | 0.1508 | 0.2241 | 0.4403 | 2.2797 | 0.4403 | 0.2241 | 0.1508 | 0.1142 | 0.0925 | 0.0782 | 0.0682 | 0.0608 | 0.0553 |
| 10 | 0.0555 | 0.0611 | 0.0685 | 0.0786 | 0.0931 | 0.1152 | 0.1525 | 0.2280 | 0.4553 | 2.2797 | 0.4269 | 0.2206 | 0.1492 | 0.1133 | 0.0919 | 0.0778 | 0.0679 | 0.0606 |
| 11 | 0.0513 | 0.0557 | 0.0613 | 0.0688 | 0.0791 | 0.0937 | 0.1162 | 0.1543 | 0.2320 | 0.4718 | 2.2797 | 0.4151 | 0.2174 | 0.1478 | 0.1126 | 0.0914 | 0.0775 | 0.0677 |
| 12 | 0.0481 | 0.0515 | 0.0559 | 0.0616 | 0.0692 | 0.0795 | 0.0944 | 0.1172 | 0.1561 | 0.2362 | 0.4892 | 2.2797 | 0.4051 | 0.2147 | 0.1466 | 0.1119 | 0.0910 | 0.0772 |
| 13 | 0.0456 | 0.0483 | 0.0517 | 0.0561 | 0.0619 | 0.0695 | 0.0800 | 0.0951 | 0.1183 | 0.1579 | 0.2403 | 0.5071 | 2.2797 | 0.3969 | 0.2124 | 0.1456 | 0.1114 | 0.0907 |
| 14 | 0.0437 | 0.0458 | 0.0485 | 0.0519 | 0.0564 | 0.0622 | 0.0699 | 0.0805 | 0.0956 | 0.1193 | 0.1597 | 0.2441 | 0.5247 | 2.2797 | 0.3903 | 0.2106 | 0.1448 | 0.1110 |
| 15 | 0.0422 | 0.0438 | 0.0459 | 0.0487 | 0.0521 | 0.0566 | 0.0625 | 0.0702 | 0.0810 | 0.0964 | 0.1205 | 0.1612 | 0.2476 | 0.5410 | 2.2797 | 0.3854 | 0.2093 | 0.1443 |
| 16 | 0.0411 | 0.0423 | 0.0440 | 0.0461 | 0.0488 | 0.0523 | 0.0568 | 0.0627 | 0.0706 | 0.0814 | 0.0969 | 0.1210 | 0.1626 | 0.2506 | 0.5548 | 2.2797 | 0.3822 | 0.2085 |
| 17 | 0.0404 | 0.0413 | 0.0425 | 0.0441 | 0.0463 | 0.0490 | 0.0525 | 0.0571 | 0.0630 | 0.0709 | 0.0817 | 0.0974 | 0.1217 | 0.1637 | 0.2529 | 0.5648 | 2.2797 | 0.3806 |
| 18 | 0.0400 | 0.0405 | 0.0414 | 0.0426 | 0.0443 | 0.0464 | 0.0492 | 0.0527 | 0.0573 | 0.0632 | 0.0711 | 0.0820 | 0.0978 | 0.1222 | 0.1644 | 0.2543 | 0.5702 | 2.2797 |

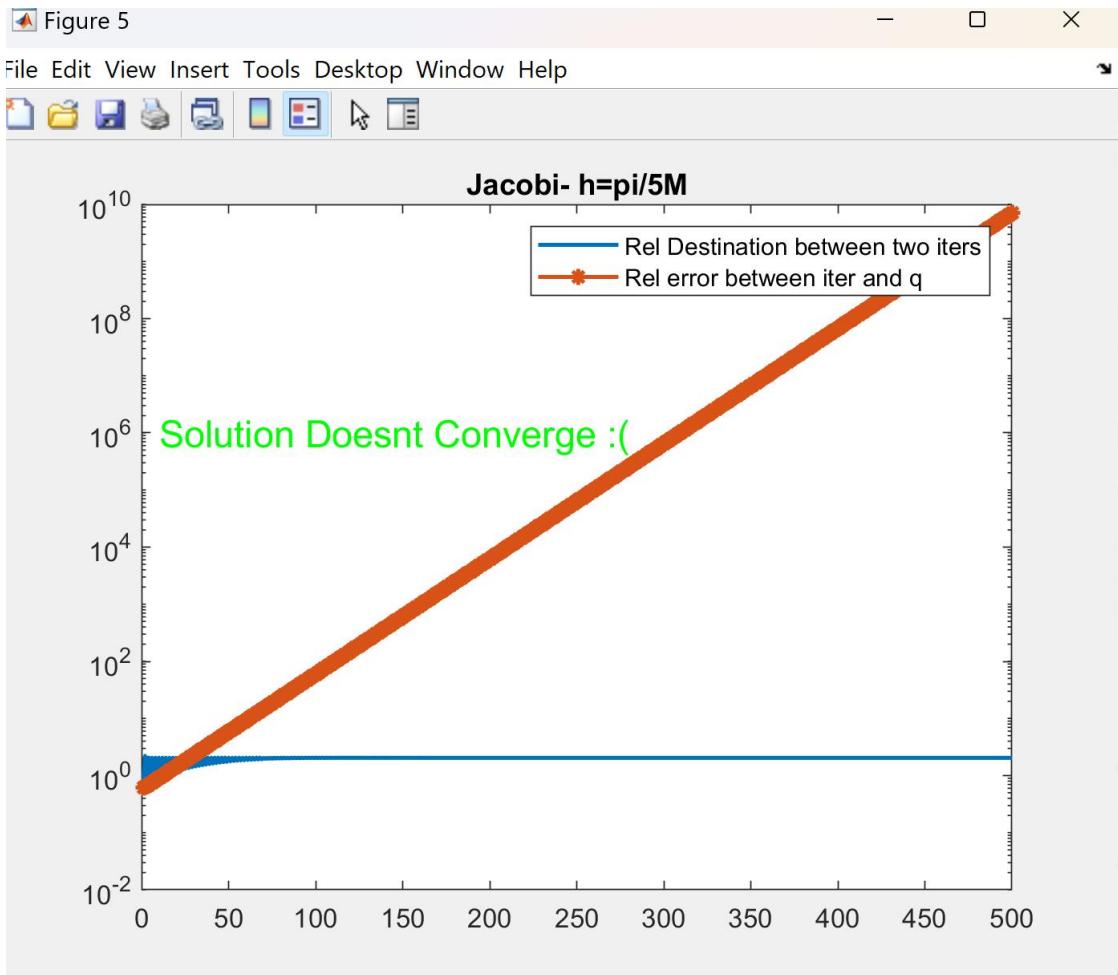
וקטור v שהתקבל לאחר חישובו ע"י מטריצה A:

| v |
|-------------|
| 18x1 double |
| 1 |
| 1 10.8393 |
| 2 10.3330 |
| 3 25.2758 |
| 4 28.3579 |
| 5 26.5992 |
| 6 11.8736 |
| 7 8.4500 |
| 8 8.8564 |
| 9 16.8988 |
| 10 16.0699 |
| 11 13.9132 |
| 12 28.1902 |
| 13 30.2764 |
| 14 30.3218 |
| 15 28.5605 |
| 16 11.5793 |
| 17 8.6840 |
| 18 16.7308 |

חשוב לציין כי אם נחשב את הנורמה של מטריצה G בשיטת יעקובי נקבל כי הנורמה גדולה ממש מ-1. כמובן, התנאי להכנסות לא מתקיים ונראה כי לא תהיה הכנסות בשיטה זו לפתרון האמתי.

הנורמה של G שקיבלנו לאחר הרצת הפונקציה היא 1.1036. כפי שניתן לראות בגרף מעלה, כמו קודם, האלגוריתם נוצר לא בשל קבלת הכנסות אלא בשל הגעתו למספר האיטרציות המקסימלי שהצבנו לו.

להלן הגרף שקיבלנו סעיף זה:



סעיף ד':

בסעיף זה נתבקשנו לחזור על סעיף ג', רק הפעם עם מטריצה A חדשה המתקבלת ע"י נוסחה נוספת.
הfonקציה שבנו לסעיף זה עבר בנית המטריצה A החדשה (הfonקציה השנייה בתמונה):

```

function A = matrix_q2(h,M)
rho = 1;
A = zeros(M,M);
for m = 1:M
    for n = 1:M
        r_mn = sqrt((h+rho*sin(((m*pi)/M))-rho*sin(((n*pi)/M))).^2+(rho*cos((m*pi)/M)-rho*cos((n*pi)/M)).^2);
        A(m,n) = 1 ./ (4*pi*r_mn) ;
    end
end
end

function A = matrix_q2_part_D(h,M)
rho = 1;
A = zeros(M,M);
for m = 1:M
    for n = 1:M
        r_mn = (h+rho*sin(((m*pi)/M))-rho*sin(((n*pi)/M))).^2+(rho*cos((m*pi)/M)-rho*cos((n*pi)/M)).^2;
        A(m,n) = 1 ./ (4*pi*r_mn) ;
    end
end
end

```

מטריצה A החדש היא:

| | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | 10 | 11 | 12 | 13 | 14 | 15 | 16 | 17 | 18 |
|----|---------|---------|---------|---------|---------|---------|---------|---------|---------|---------|---------|---------|---------|---------|---------|---------|---------|---------|
| 1 | 65.3094 | 4.0093 | 0.8034 | 0.3366 | 0.1860 | 0.1933 | 0.0840 | 0.0631 | 0.0499 | 0.0409 | 0.0347 | 0.0302 | 0.0269 | 0.0245 | 0.0227 | 0.0214 | 0.0205 | 0.0200 |
| 2 | 1.8354 | 65.3094 | 3.8679 | 0.7892 | 0.3322 | 0.1840 | 0.1181 | 0.0832 | 0.0626 | 0.0495 | 0.0406 | 0.0344 | 0.0300 | 0.0267 | 0.0243 | 0.0225 | 0.0212 | 0.0204 |
| 3 | 0.5503 | 1.8666 | 65.3094 | 3.6783 | 0.7707 | 0.3267 | 0.1815 | 0.1167 | 0.0824 | 0.0626 | 0.0490 | 0.0403 | 0.0342 | 0.0297 | 0.0265 | 0.0241 | 0.0224 | 0.0211 |
| 4 | 0.2636 | 0.5571 | 1.9142 | 65.3094 | 3.4602 | 0.7490 | 0.3203 | 0.1787 | 0.1152 | 0.0814 | 0.0614 | 0.0486 | 0.0399 | 0.0339 | 0.0295 | 0.0263 | 0.0240 | 0.0222 |
| 5 | 0.1559 | 0.2664 | 0.5668 | 1.9791 | 65.3094 | 3.2318 | 0.7253 | 0.3134 | 0.1757 | 0.1136 | 0.0805 | 0.0607 | 0.0481 | 0.0396 | 0.0336 | 0.0293 | 0.0262 | 0.0238 |
| 6 | 0.1042 | 0.1574 | 0.2700 | 0.5791 | 2.0625 | 65.3094 | 3.0075 | 0.7009 | 0.3063 | 0.1727 | 0.1120 | 0.0795 | 0.0601 | 0.0477 | 0.0393 | 0.0334 | 0.0291 | 0.0260 |
| 7 | 0.0755 | 0.1051 | 0.1592 | 0.2745 | 0.5941 | 2.1656 | 65.3094 | 2.7968 | 0.6765 | 0.2991 | 0.1696 | 0.1104 | 0.0785 | 0.0595 | 0.0472 | 0.0390 | 0.0331 | 0.0289 |
| 8 | 0.0579 | 0.0761 | 0.1062 | 0.1614 | 0.2798 | 0.6115 | 2.2898 | 65.3094 | 2.6055 | 0.6532 | 0.2922 | 0.1667 | 0.1089 | 0.0776 | 0.0589 | 0.0468 | 0.0387 | 0.0329 |
| 9 | 0.0465 | 0.0584 | 0.0768 | 0.1075 | 0.1639 | 0.2857 | 0.6313 | 2.4363 | 65.3094 | 2.4363 | 0.6313 | 0.2857 | 0.1639 | 0.1075 | 0.0768 | 0.0584 | 0.0465 | 0.0384 |
| 10 | 0.0387 | 0.0468 | 0.0589 | 0.0776 | 0.1089 | 0.1667 | 0.2922 | 0.6532 | 2.6055 | 65.3094 | 2.2898 | 0.6115 | 0.2798 | 0.1614 | 0.1062 | 0.0761 | 0.0579 | 0.0462 |
| 11 | 0.0331 | 0.0390 | 0.0472 | 0.0595 | 0.0785 | 0.1104 | 0.1696 | 0.2991 | 0.6765 | 2.7968 | 65.3094 | 2.1656 | 0.5941 | 0.2745 | 0.1592 | 0.1051 | 0.0755 | 0.0575 |
| 12 | 0.0291 | 0.0334 | 0.0393 | 0.0477 | 0.0601 | 0.0795 | 0.1120 | 0.1727 | 0.3063 | 0.7009 | 3.0075 | 65.3094 | 2.0625 | 0.5791 | 0.2700 | 0.1574 | 0.1042 | 0.0750 |
| 13 | 0.0262 | 0.0293 | 0.0356 | 0.0396 | 0.0461 | 0.0607 | 0.0805 | 0.1136 | 0.1757 | 0.3134 | 0.7253 | 3.2318 | 65.3094 | 1.9791 | 0.5666 | 0.2664 | 0.1559 | 0.1035 |
| 14 | 0.0240 | 0.0263 | 0.0295 | 0.0339 | 0.0399 | 0.0486 | 0.0614 | 0.0814 | 0.1152 | 0.1787 | 0.3203 | 0.7490 | 3.4602 | 65.3094 | 1.9142 | 0.5571 | 0.2636 | 0.1548 |
| 15 | 0.0224 | 0.0241 | 0.0265 | 0.0297 | 0.0342 | 0.0403 | 0.0490 | 0.0620 | 0.0824 | 0.1167 | 0.1815 | 0.3267 | 0.7707 | 3.6783 | 65.3094 | 1.8666 | 0.5503 | 0.2617 |
| 16 | 0.0212 | 0.0225 | 0.0243 | 0.0267 | 0.0300 | 0.0344 | 0.0406 | 0.0495 | 0.0626 | 0.0832 | 0.1181 | 0.1840 | 0.3322 | 0.7892 | 3.8679 | 65.3094 | 1.8354 | 0.5461 |
| 17 | 0.0205 | 0.0214 | 0.0227 | 0.0245 | 0.0269 | 0.0302 | 0.0347 | 0.0409 | 0.0499 | 0.0631 | 0.0840 | 0.1193 | 0.1860 | 0.3366 | 0.8034 | 4.0093 | 65.3094 | 1.8199 |
| 18 | 0.0201 | 0.0206 | 0.0215 | 0.0228 | 0.0246 | 0.0271 | 0.0304 | 0.0349 | 0.0412 | 0.0502 | 0.0636 | 0.0846 | 0.1202 | 0.1876 | 0.3397 | 0.8124 | 4.0851 | 65.3094 |

וקטור v שקיבלנו הוא:

| | v_1 |
|----|----------|
| 1 | 141.8331 |
| 2 | 41.3651 |
| 3 | 495.8996 |
| 4 | 566.9252 |
| 5 | 548.5189 |
| 6 | 92.3377 |
| 7 | 16.6626 |
| 8 | 21.1350 |
| 9 | 277.5282 |
| 10 | 220.2903 |
| 11 | 103.8521 |
| 12 | 553.7523 |
| 13 | 572.6329 |
| 14 | 574.4472 |
| 15 | 563.6309 |
| 16 | 45.4348 |
| 17 | 21.7753 |
| 18 | 333.3793 |

וקטור v' המקורב הסופי לאחר k איטרציות הוא:

| qkD | |
|-----|-------------|
| | 18x1 double |
| 1 | 1 |
| 2 | 3.8015e+10 |
| 3 | 4.4297e+10 |
| 4 | 4.8272e+10 |
| 5 | 5.1028e+10 |
| 6 | 5.2985e+10 |
| 7 | 5.4376e+10 |
| 8 | 5.5345e+10 |
| 9 | 5.5986e+10 |
| 10 | 5.6352e+10 |
| 11 | 5.6466e+10 |
| 12 | 5.6320e+10 |
| 13 | 5.5878e+10 |
| 14 | 5.5072e+10 |
| 15 | 5.3793e+10 |
| 16 | 5.1882e+10 |
| 17 | 4.9098e+10 |
| 18 | 4.5015e+10 |
| | 3.8544e+10 |

המרךק היחסי בין איטרציות:

| Rel_dist_between_iter | | | | | | | | | | | | | | | | | | | |
|-----------------------|--------------|--------|--------|--------|--------|--------|--------|--------|--------|--------|--------|--------|--------|--------|--------|--------|--------|--------|----|
| | 1x500 double | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | 10 | 11 | 12 | 13 | 14 | 15 | 16 | 17 | 18 |
| 1 | 0.6688 | 1.1279 | 0.6116 | 1.1455 | 0.6477 | 1.2086 | 0.6903 | 1.2652 | 0.7347 | 1.3198 | 0.7806 | 1.3735 | 0.8278 | 1.4263 | 0.8760 | 1.4781 | 0.9252 | 1.5286 | |

השגיאה היחסית האמיתית בין הפתרון המקורב לוקטור φ האמיתית:

| Rel_err_with_q | | | | | | | | | | | | | | | | | | | |
|----------------|--------------|---------|---------|---------|---------|---------|---------|---------|---------|---------|---------|---------|---------|---------|---------|---------|---------|---------|----|
| | 1x500 double | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | 10 | 11 | 12 | 13 | 14 | 15 | 16 | 17 | 18 |
| 1 | 17.5094 | 31.8649 | 18.3280 | 33.0038 | 19.1001 | 34.0346 | 20.0264 | 35.1262 | 21.0668 | 36.3142 | 22.2150 | 37.6154 | 23.4766 | 39.0426 | 24.8616 | 40.6086 | 26.3816 | 42.3271 | |

הגרף שקיבלנו בסעיף זה:



מספר האיטרציות להתקנסות הפתרון שקיבלנו הוא 4 איטרציות. בנוסף השגיאה היחסית שהתקבל היא 1.475657×10^{-5} .

שתי המסקנות שקיבלנו מביצוע סעיף זה הן:

1. עבור אותה בעיה בדיק, הפתרון בשיטת גאוס-זידל התקנס ואילו הפתרון בשיטת יעקובי לא התקנס. لكن שיטת גאוס-זידל מומלצת יותר לשימוש. (כפי שראינו בכיתה, סדר ההתקנסות של שיטת גאוס-זידל הוא ריבועי לעומת שיטת יעקובי שסדר ההתקנסות בה הוא לינארי).
2. אם נגדיל את המכנה בפרמטר α אז ההתקנסות תבוצע מהר יותר. אם נקטין את המכנה משמעותית יתכן ונקבל התקנסות לאחר מספר רב של איטרציות או שמא לא נקבל התקנסות כלל.

שאלה 3

בשאלה זו נדרשו להשתמש בשיטת LEAST SQUARES לפתרון המערכת $Aq = b$ בהערכתה למדנו כי הפתרון 'q' שהוא הפתרון המקורי לוקטור q מגיע מהביוטי:

בשאלה ביקשו מאיתנו קודם לבנות את מטריצה A שבה שהשתמשנו במהלך כל העבודה רק עם ערכי h שונים ומשתנים. לכן יצרנו במלראב רשימה של h המכילת את הערכים ובכל פעם בנינו מחדש את המטריצה A. ניתן לראות את עבודתנו בקוד שבנוו שלהלן:

```
A_determinata = zeros(5,1);%initialization
Rel_error_q = zeros(5,1);%initialization
q = [2;0;7;8;8;1;0;0;4;3;1;8;8;8;8;0;0;5];%initialization
M = 18;%initialization
rho = 1 ;%initialization
h_list = [1/5,1/2,2,5,10];%initialization
h_graph = h_list.*((pi * rho) ./ M);%initialization
for i=1:5
    h = h_graph(i);
    A = matrix_q3(h,18);
    v = A * q;
    A_determinata(i) = abs(det(A)); %list of final determinants
    A_transpose = transpose(A);
    q_aprx = inv(A_transpose * A) * A_transpose * v; %formula
    Rel_error_q(i) = (norm(q_aprx - q)) / norm(q); %formula, list of final relative errors
end

%lets print a graph :
figure(7);
lg_3 = loglog(h_graph,A_determinata,"*-",h_graph,Rel_error_q,"*");
lg_3(1).LineWidth = 2;
lg_3(2).LineWidth = 2;
title('Least Squares');
xlabel('h');
legend('|det(A)|','|q"-q|/|q|','Location','southwest');
grid on;
```

בסעיף זה חישבנו את מטריצה A עם הערך $M \backslash (\rho * \pi)$ עם הערך A שקיבלנו:

וקטור v:

| | v |
|----|--------|
| 1 | 3.3969 |
| 2 | 3.1580 |
| 3 | 2.9771 |
| 4 | 2.8405 |
| 5 | 2.7394 |
| 6 | 2.6679 |
| 7 | 2.6221 |
| 8 | 2.5997 |
| 9 | 2.5997 |
| 10 | 2.6219 |
| 11 | 2.6673 |
| 12 | 2.7380 |
| 13 | 2.8375 |
| 14 | 2.9711 |
| 15 | 3.1466 |
| 16 | 3.3762 |
| 17 | 3.6779 |
| 18 | 4.0811 |

הדטרמיננטה של A:

הערך הוא החמישי בתמונה, כולם –

| | A_determinata |
|---|---------------|
| 1 | 1.2392e+06 |
| 2 | 0.0019 |
| 3 | 3.4450e-36 |
| 4 | 2.5204e-89 |
| 5 | 7.5197e-147 |

וקטור 'q' (המקורב) :

| q_aprx | |
|-------------|-----------|
| 18x1 double | |
| 1 | 1 |
| 2 | -175.9701 |
| 3 | -77.2139 |
| 4 | 92.2353 |
| 5 | 30.0008 |
| 6 | -320.5945 |
| 7 | -194.9492 |
| 8 | -76.9914 |
| 9 | -453.0214 |
| 10 | 187.5212 |
| 11 | 61.8377 |
| 12 | -89.9979 |
| 13 | -49.4380 |
| 14 | -51.8515 |
| 15 | -200.6211 |
| 16 | -237.4405 |
| 17 | 50.1417 |
| 18 | -134.3193 |
| | 80.1973 |

השגיאה היחסית בין q לפתרון המקורב:
השגיאה היא הערך החמישי בתמונה, קלומר .34.59.

| Rel_error_q | |
|-------------|------------|
| 5x1 double | |
| 1 | 1 |
| 2 | 5.6360e-16 |
| 3 | 5.2206e-15 |
| 4 | 1.7111 |
| 5 | 131.4190 |
| | 34.5934 |

נשים לב כי קיבלנו שגיאה גדולה כיוון שהערך של h הוא יחסית גדול, מה שמשפיע על כך שהמטריצה שואפת לסינגולריות. כמו שאנו כבר יודעים,

כאשר מגדילים את h ההתכנסות תהיה איטית יותר ומכאן מגיעה השגיאה הגדולה.

סעיף ב'

בסעיף זה התבקשנו לשנות את הפרמטר h לערכים הבאים:

- () •
- () •
- () •
- () •

בנוסף עלינו להציג את הגраф של שגיאת החישוב היחסית והדטרמיננטה (בערכה המוחלט) כתלות בערכי h המשתנים.

לאחר חישוב של כל אחת מהמטריצות, חישבנו בנפרד את הדטרמיננטה של A , הדטרמיננטות מסודרות לפי הסדר שברשימה מעלה והערך האחרון הוא עבור

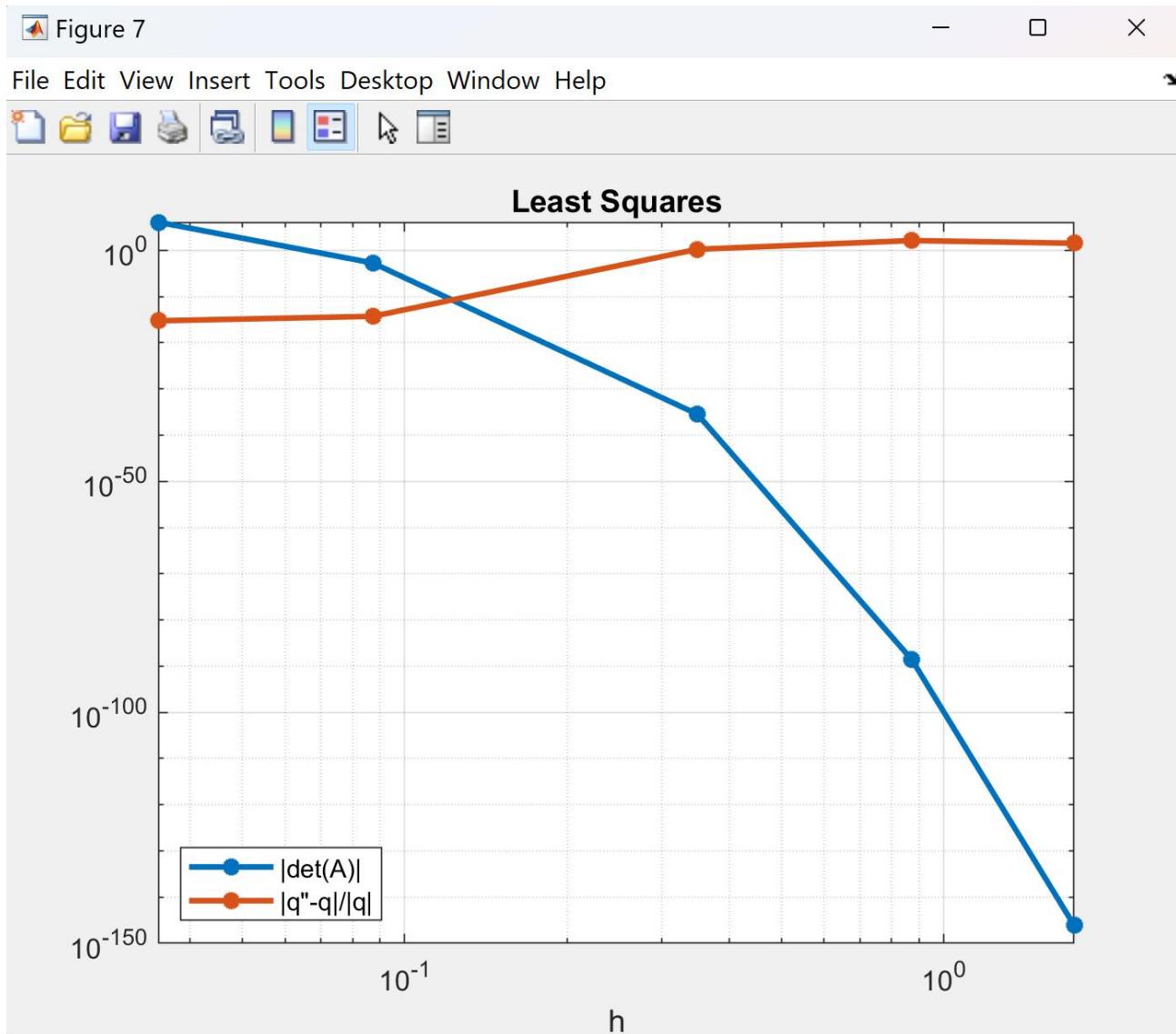
סעיף א':

| A_determinata | | |
|---------------|-------------|---|
| | 5x1 double | |
| | 1 | 2 |
| 1 | 1.2392e+06 | |
| 2 | 0.0019 | |
| 3 | 3.4450e-36 | |
| 4 | 2.5204e-89 | |
| 5 | 7.5197e-147 | |

בנוסף, לאחר שהישבנו את הדטרמיננטה לכל ערך של h , את A ואת $(A)^{trans}$, קיבלנו את φ המקורי. כל מה שנותר לנו לעשות הוא למצוא את השגיאה היחסית לפי הנוסחה שנלמדה בכיתה. את השגיאות היחסיות ניתן לראות לפי הסדר המבוקש בטבלה הבאה:

| Rel_error_q | | |
|-------------|------------|--|
| | 5x1 double | |
| | 1 | |
| 1 | 5.6360e-16 | |
| 2 | 5.2206e-15 | |
| 3 | 1.7111 | |
| 4 | 131.4190 | |
| 5 | 34.5934 | |

לבסוף קיבלנו את הגרף של השגיאה היחסית והדטרמיננטה כתלות בערכי h הרצויים.



מהגרף מעלה ניתן להסיק מספר מסקנות:

- ניתן לראות שבערכים h גדולים, הדטרמיננטה של A מקבלת ערכים שליליים ועל כן החלטנו לקחת את הגודל של הדטרמיננטה בערכה המוחלט.
- ככל ש- h גדול, הערך המוחלט של $\det(A)$ הולך וקטן, זאת ממחישה שאיברי המטריצה A נעים ביחס הפוך ל- h .
- עבור ערכי h גדולים, המטריצה הולכת ונהיית סינגולרית ולכן השיטה LEAST SQUARES תיהה פחות טובה ומודיקת עבורה.
- פתרון השיטה הולך וושאך לפתרון המדויק כאשר הדטרמיננטה אינה אפס (השורות לא תלויות לינארית).

- הסביר פיזיקלי – בדומה להסביר בנוגע לדטרמיננטה, נשים לב כי כאשר ערכו של h הולך וגדל כך גם השגיאה היחסית תלך ותגדל. h בעצם מייצג את המרחק בין המרכיבים של שתי קשתות הצמודות זו לזו, ככל שהמרחב ביןין הולך וגדל וכך הכוח בין זוג שני מטענים הולך וקטן (במקרה זה, השגיאה תשפיע הרבה יותר).

נספחים:

תמונה של גאוס (משיטת גאוס זידל)



תמונה של יעקב יעקבי (משיטת יעקבי)

