



עבודת מחשב 3 בשיטות חישוביות

מגישים: גיא כהן (207881004) ותהל
ססונקר (318888005)

שאלה 1

בתרגיל זה נעסוק באינטרפולציה ואינטגרציה לפונקציות. המטרה היא למצוא פונקציה פשוטה ככל האפשר המייצגת בדיוק מירבי התנהגות של פונקציה כלשהי.

סעיף א'

עלינו לכתוב קוד שיחשב את אינטרפולציית לגראנג' ממעלה n , עבור נקודות דגימה שרירותיות בין 0 ל- π ונקודות שחזור באותו התחום ולהשתמש בו בכל הסעיפים הבאים.

להלן הקוד עבור אינטרפולציית לגראנג':

```
function [LN] = Lagrange_Int(x,teta,part)
    sum = 0; %initialization
    for i = 1:length(teta)
        mone = 1;%initialization
        mehane = 1;%initialization
        for j = 1:length(teta)
            if (j~=i)
                mone = mone * (x-teta(j));
                mehane = mehane * (teta(i)-teta(j));
            end
        end
        sum = sum + potential(teta(i),part) * (mone/mehane); %formula
    end
    LN = sum;
end
```

סעיף ב'

כעת נניח כי תטא במרווחים קבועים וכי $r=5cm$. מתוך הערכים של j נחשב את הפוטנציאל המקורב. נעשה זאת עבור המקרים $n+1=2,3,4,5$.

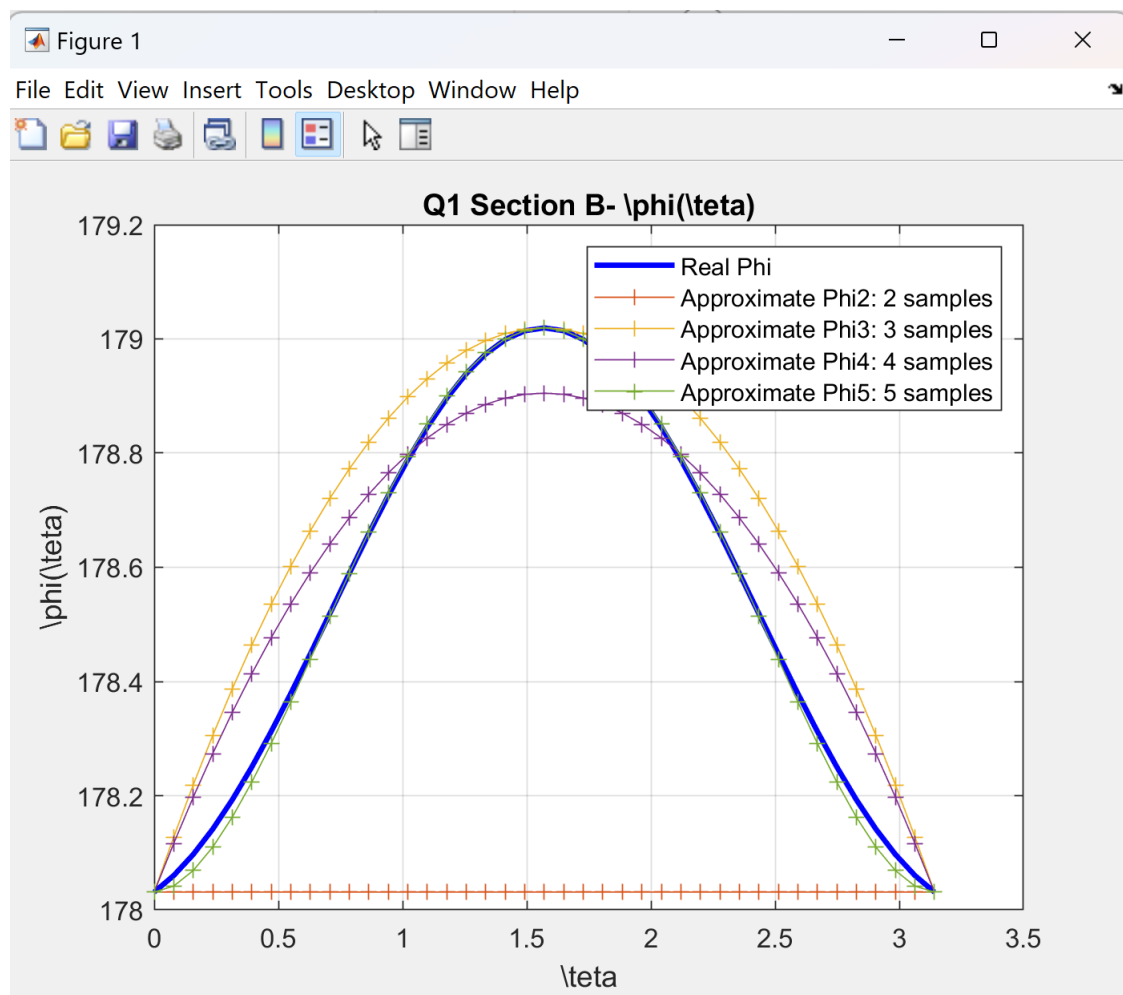
בנוסף נציג על התרשים את הערכים המקורבים לפי של תטא עבור סדרי האינטרפולציה השונים ואת הערכים המדויקים כפונקציה של תטא.

באינטרפולציה לגראנג' כפי שנלמד בכיתה בהינתן סדרה של $N+1$ נקודות הנקראות צמתים ו- $N+1$ נקודות מתאימות (הערכים האמתיים של y) אזי פולינום האינטרפולציה לפי צורת לגראנג' ניתן ע"י:

$$L_N(x) = \sum_{i=0}^N y_i l_i(x) \quad , \quad l_i(x) = \prod_{\substack{j=0 \\ j \neq i}}^N \frac{x - x_j}{x_i - x_j}$$

כש- $L_N(x)$ הוא פולינום האינטרפולציה (הקירוב ל- $f(x)$) ו- $l_i(x)$ הם פולינומי לגרנז'.

להלן הגרף שקיבלנו:



אנו רואים כי ככל שיש יותר נקודות דגימה כך אנו מתקרבים לגרף הפונקציה המקורית. למדנו בכיתה כי עבור פולינומי לגראנג' ממעלה כללית נאלץ להשתמש ביותר נקודות דגימה על מנת לשחזר את הפונקציה בדיוק מירבי.

נשים לב כי עבור $n+1=2$ מתקבלת שגיאה גדולה יחסית לשאר כיוון ששתי נקודות דגימה מייצרות משוואה ממעלה ראשונה (לינארי) ולכן השגיאה היא הגדולה ביותר.

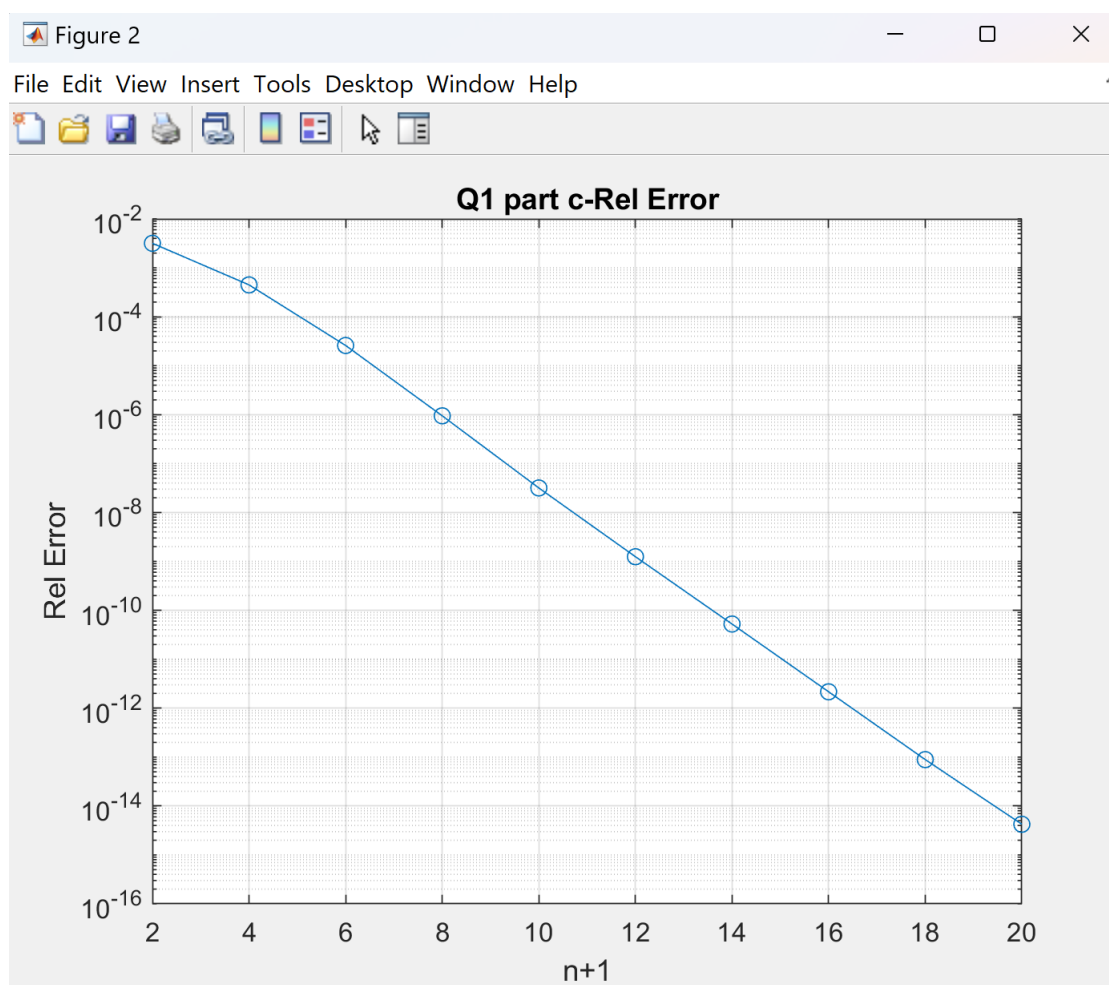
סעיף ג'

סעיף זה עלינו להגדיר את השגיאה היחסית:

$$\varepsilon(\phi) = \sqrt{\sum_{i=0}^{\bar{n}} [\bar{\phi}(\bar{\theta}_i) - \phi(\bar{\theta}_i)]^2} / \sqrt{\sum_{i=0}^{\bar{n}} [\phi(\bar{\theta}_i)]^2}$$

נדפיס את השגיאה היחסית המתקבלת כפונקציה של סדר $n + 1$

להלן הגרף שקיבלנו: $[2, 4, 6, \dots, 20]$.



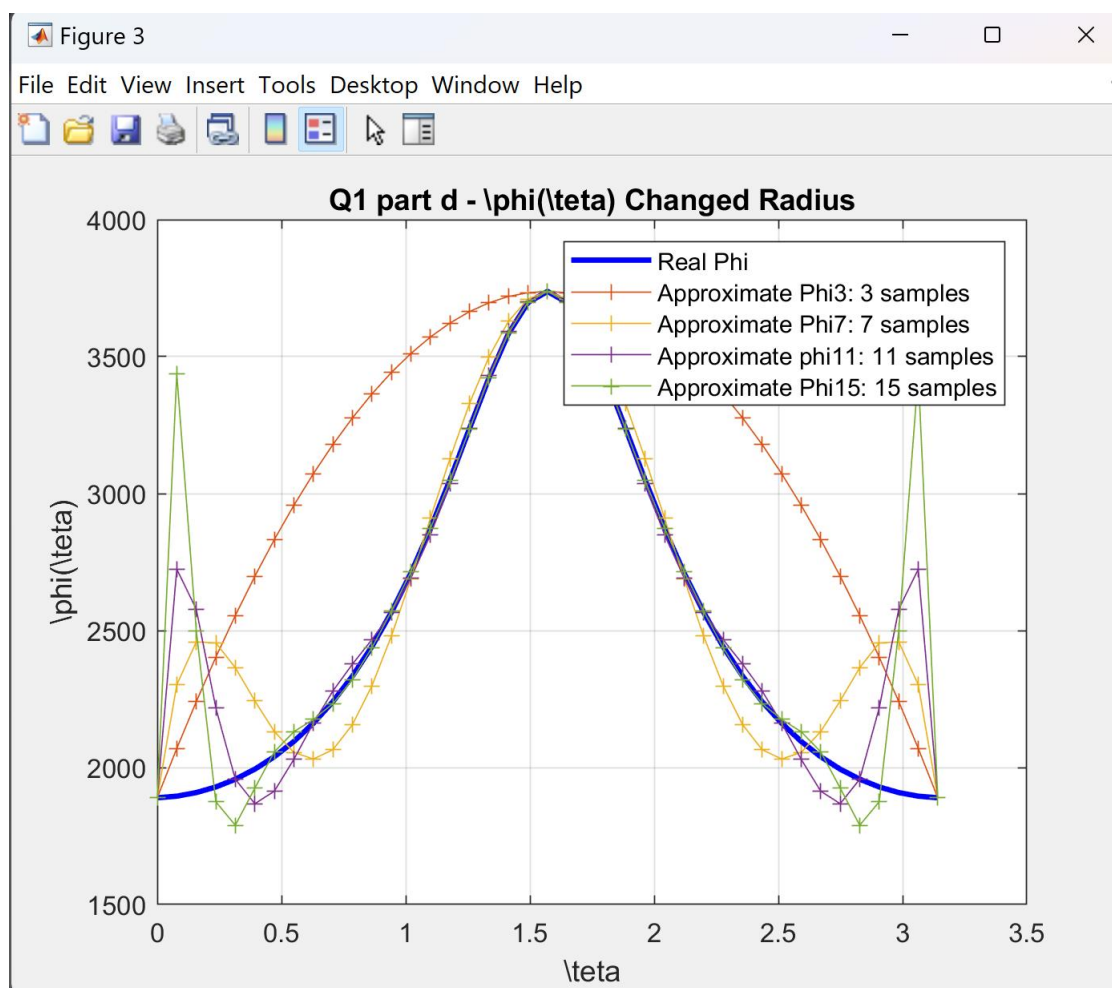
-
- אנו רואים כי גרף השגיאה הוא מונוטוני יורד וזה אומר שהשגיאה היחסית תקטן ככל שיש יותר נקודות דגימה בדומה לסעיף הקודם, כך אנו מגדילים את מעלת הפולינום. מכאן כי נקבל קירוב טוב יותר לגרף הפונקציה המקורית וניתן לראות שאכן קיבלנו את הגרף מסעיף א' במדויק.

- מהגרף ניתן ללמוד כי סדר הפולינום מכריע על השגיאה היחסית – ככל שסדר הפולינום גבוה יותר כך השגיאה היחסית תהיה קטנה יותר. זאת מכיוון שעבור סדר פולינום גבוה מקבלים קירוב טוב לפוטנציאל המדויק.
- בהרצאה למדנו כי השגיאה עבור מספר גדול של נקודות מדגם יחסית גדולה בקצוות. אצלנו זה לא קורה כיוון שאין לנו מספר נקודות דגימה מספיק גדול.
- גרף הפונקציה שקיבלנו לא ממש תלול וזה אומר שחסם הנגזרות מסדר גבוה נמוך יחסית ומכאן כי השגיאה היחסית לא ממש גדולה עבור מספר נקודות מספיק גדול.

סעיף ד'

כעת נתון כי $r=4mm$. נדרש לחזור על סעיף א' אך הפעם עבור $n+1=3,7,11,15$ ועל סעיף ב'. נראה את ההבדלים בין התוצאות ונסביר אותם.

הגרף שקיבלנו עבור איחוד התוצאות שחישבנו:

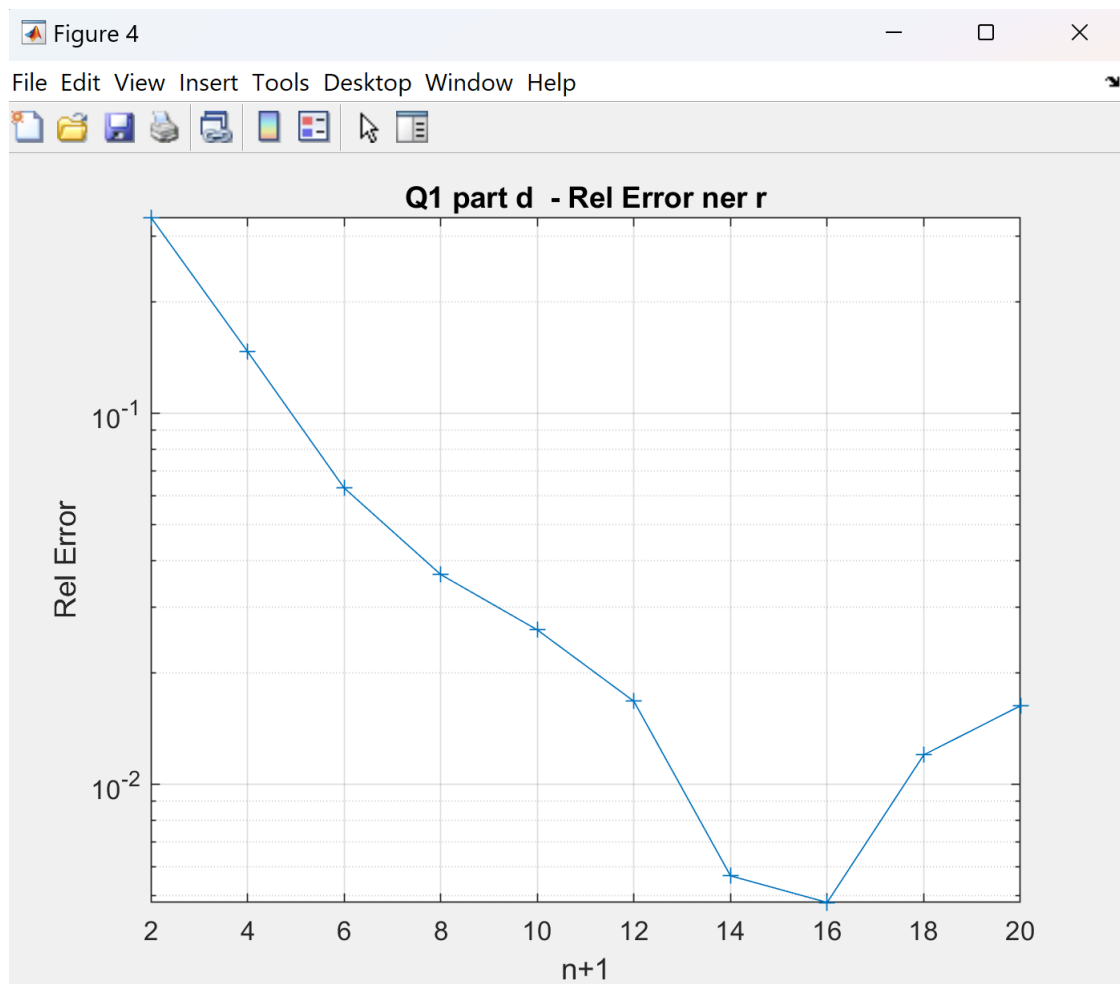


אנו שמים לב כי מתרחשת כאן תופעת רונגה אשר נלמדה בכיתה. השגיאה היחסית גדלה בקצוות ככל שהסדר עולה וככל שמגדילים את קצב הדגימה. תופעה זו נובעת מהקירבה של נקודות המדידה למטענים.

- כאשר הגדלנו את מספר נקודות הדגימה ניתן לראות מהגרף כי מקבלים קירוב פונקציה טוב יותר למעט בקצוות, שם יש קפיצות בגרף והשגיאה

- יחסית גדולה. אנו מסיקים מכך כי העלאת סדר האינטרפולציה לא בהכרח מביאה לפונקציה מדויקת יותר בגלל הקפיצות בקצוות.
- בסעיף א' הפונקציה השתנתה לאט ביחס לסעיף זה. זאת מכיוון שבסעיף זה הרדיוס נמוך יותר משמעותית ואנו מקבלים פונקציה יחסית תלולה.
 - חסם הנגזרות בסעיף זה גדול יותר מבסעיף א'. מכאן שעבור סדר גדול אך רדיוס נמוך מסעיף א' השגיאה גדלה.

להלן גרף השגיאה היחסית שקיבלנו:



אנו רואים כי מתקבל מינימום ב- $n+1=16$ ומתחיל עלייה בשגיאה לאחר סדר זה. כלומר מהגרף ממש ניתן לראות את תופעת רונגה שלמדנו בכיתה

המתארת כי ככל שסדר האינטרפולציה יהיה גדול מספיק וחסם הנגזרות גדול מתקבלת שגיאה גדולה יחסית בקצוות.

ההשוואה לסעיף א'

בסעיף א' החסם על הנגזרות היה נמוך יותר מאשר בסעיף זה. אזי לא התרחשה שם תופעת רונגה והגדלת סדר האינטרפולציה תרם בדיוק השחזור של הפונקציה המקורית. בסעיף זה, חסם הנגזרות הוא גבוה ומכאן כי אכן מתקבלת תופעת רונגה ואנו מקבלים עלייה בגרף השגיאה היחסית עבור סדר אינטרפולציה גבוה.

עבור סעיף זה, החל מ- $n+1=16$ מקבלים שגיאה שהולכת וגדלה ולכן הגדלת סדר האינטרפולציה מזיק לתהליך השחזור של הפונקציה.

סעיף ה'

בסעיף זה נדרשנו להחליף את נקודות המדידה בנקודות המדידה המתקבלות משורשי פולינומי צ'בישב. נחזור על סעיף ג' עבור הנקודות החדשות ונדון בהבדלים בין התוצאות שהתקבלו. בנוסף נציג את עקומי השגיאה מסעיף ג' ומסעיף זה על גבי אותו תרשים, נשווה בין התוצאות ונסביר את ההבדלים.

להלן חומר שנלמד המסביר כיצד בוחרים נקודות לפי שורשי פולינום צ'בישב:

$$\epsilon_N(x) = \frac{f^{(N+1)}(\xi_x)}{(N+1)!} \prod_{i=0}^N (x - x_i) \quad , \min(x_0, x) \leq \xi_x \leq \max(x_N, x) \quad \text{נוסחת קושי לשגיאה:}$$

ממבנה השגיאה (נוסחת קושי) ניתן לראות כי היא תלויה בפולינום המוני (monic polynomial) פולינום כאשר מקדם איבר החזקה ה- N הוא 1 $\prod_{i=0}^N (x - x_i)$, לכן ניתן למזער את החסם העליון על השגיאה ע"י בחירת נקודות $\{x_i\}_{i=0}^N$ כלשהן.

בהרצאה הוכח כי בקטע $[-1, 1]$ עבור פולינום מוני $P(x)$ ממעלה N מתקיים $\max_{x \in [-1, 1]} |P(x)| \geq 2^{1-N}$. והשוויון יתקיים עבור $P(x) = 2^{-N} T_{N+1}(x) = \prod_{i=0}^N (x - x_i)$ כאשר $T_N(x)$ הוא פולינום צ'בישב ממעלה N המוגדר באופן הבא:

$$\begin{aligned} T_0(x) &= 1 \\ T_1(x) &= x \\ T_N(x) &= 2xT_{N-1}(x) - T_{N-2}(x), x \in [-1, 1] \end{aligned}$$

כלומר הנקודות $\{x_i\}_{i=0}^N$ הן השורשים של $2^{-N} T_{N+1}(x)$. ידוע כי מתקיים:

$$T_{N+1}\left(\cos\left(\frac{2i+1}{2N+2}\pi\right)\right) = 0, i = 0, 1, \dots, N \rightarrow x_i = \cos\left(\frac{2i+1}{2N+2}\pi\right) \in [-1, 1]$$

מה נעשה כאשר תחום ערכי x אינו $[-1, 1]$?

עבור $x \in [a, b]$, נבצע העתקה לינארית מ- $t \in [-1, 1]$ ל- $x \in [a, b]$ באופן הבא:

$$x = \frac{b+a}{2} + \frac{(b-a)}{2}t$$

כלומר השורשים יתקבלו בנקודות:

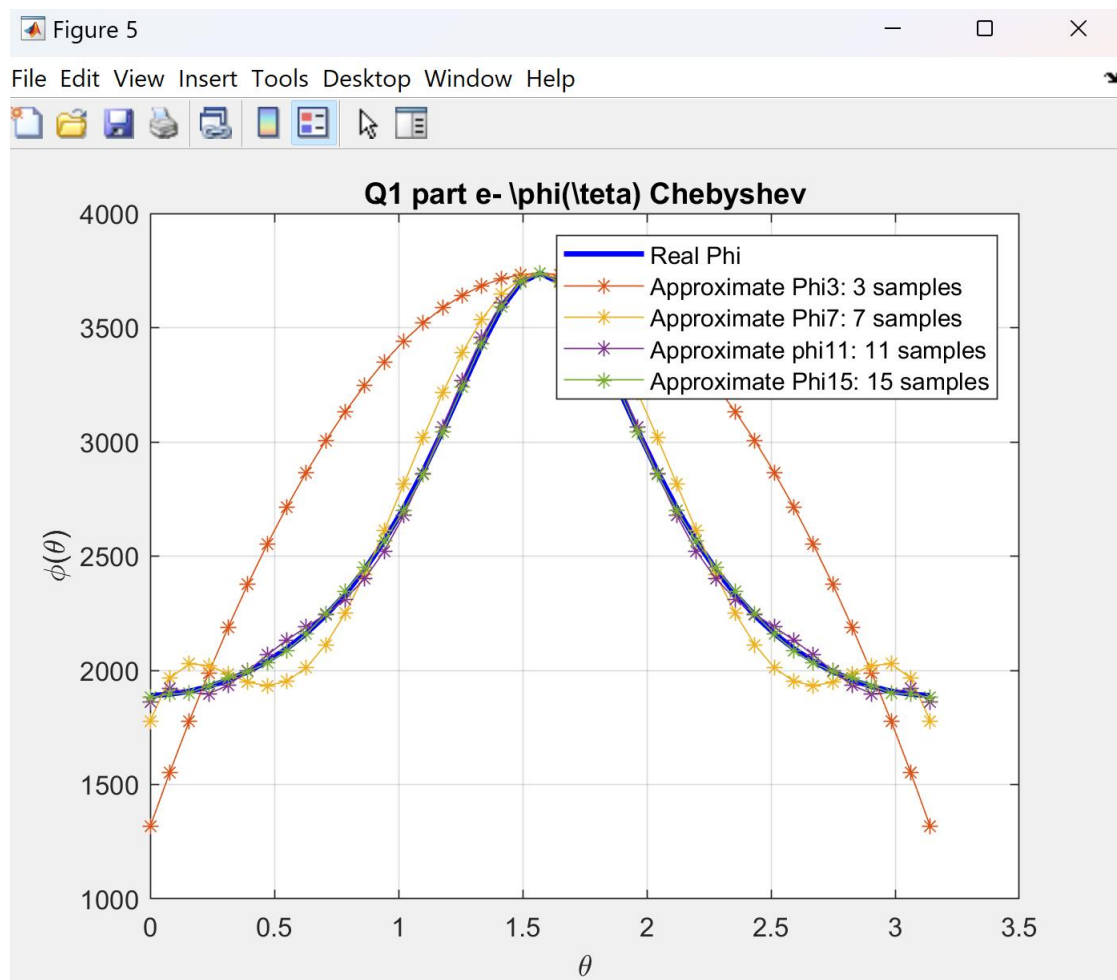
$$x_j = \cos\left(\frac{\pi(2j+1)}{2n}\right); j = 1, 2, \dots, n-1$$

ניתן לראות כי ערכי הדגימות לא בין -1 ו- 1 לכן נבצע את ההעתקה לינארית:

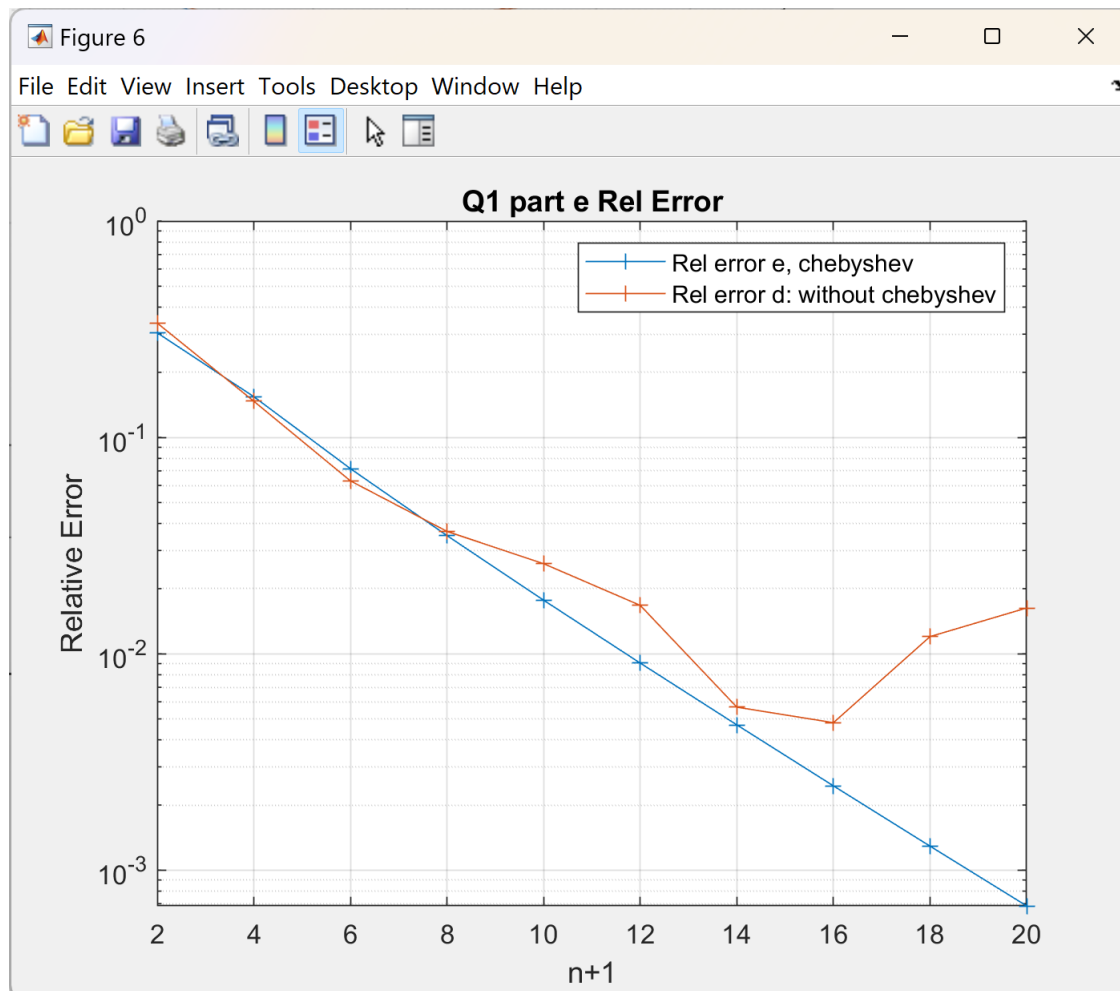
$$m = \frac{b+a}{2} + \frac{b-a}{2} \cdot x_j$$

בהרצאה למדנו כי אם נבחר את הנקודות לפי שיטה זו נקבל דיוק יותר טוב לשחזור הפונקציה המקורית. זאת על פני בחירת נקודות במרווחים קבועים ללא התייחסות ל"תוכן" שלהן.

להלן הגרף שקיבלנו עבור m' בין 0 ל- π ו- $n+1=41$:



להלן גרף השגיאה היחסית:



מהגרף הראשון אנו רואים כי בחירת הנקודות לפי שורשי צ'בישב אכן תרמה לשיפור שחזור הפונקציה המקורית. כעת, ככל שמספר הדגימות עלה כל הדיוק שלנו השתפר והשיטה עזרה לנו לתקן את השיאה היחסית הגדולה והקפיצות שהיו בשולי הגרף.

בגרף השני אנו רואים כי ככל שמספר הדגימות עולה כך באופן לינארי השגיאה קטנה וקטנה והגדלת מספר נקודות הדגימה לא גררה החל ממקום מסוים הגדלה של השגיאה היחסית בניגוד לסעיף הקודם.

בחירת נקודות האינטרפולציה בעזרת שימוש בפולינומי צ'בישב מביאה למינימום את חסם השגיאה היחסית בתחום.

לפי מה שלמדנו בכיתה, השגיאה שמקבלים לאחר שימוש בשורשי צ'בישב
וההעתקה הלינארית לתחום:

$$|r_n(x)| \leq \frac{1}{2^n(n+1)!} \frac{|b-a|^{n+1}}{2^{n+1}} \max_{\xi \in [a,b]} |f^{(n+1)}(\xi)| \quad x \in [a,b]$$

ראינו כי שימוש בפולינומי צ'בישב ביטל את תופעת הרונגה שקיבלנו בקצוות
וקיבלנו כי התוצאות השתפרו והשגיאה היחסית קטנה.

שאלה 2

בשאלה זו נשחזר את המדידות באמצעות שיטת *least squares*.

מציעים לשחזר את הפוטנציאל על הקשת מתוך $n+1$ נקודות מדידה באמצעות שיטת הריבועים הפחותים, לשם כך אנו מניחים את הפוטנציאל ע"ג הקשת ניתן לתיאור בקירוב על ידי טור הפונקציות

$$\phi(\theta) \approx \phi_{LS}(\theta) = \alpha f_1(\theta) + \beta f_2(\theta) + \gamma f_3(\theta) = \alpha + \beta \sin(\theta) + \gamma \cos(\theta)$$

אנו מחפשים את המקדמים שיביאו למזעור השגיאה הריבועית (בנקודות המדידה) בחישוב ϕ .

סעיף א'

נכתוב ביטוי אנליטי כללי למערכת המשוואות אותה נדרש לפתור לקבלת המקדמים, בהנחה שהפוטנציאל נמדד ב- $n+1$ נקודות.

θ_j – נקודות המדידה

$$\phi = \phi(\theta_j) - \text{הערכים המדודים}$$

$$\begin{pmatrix} \sum_{i=0}^n 1*1 & \sum_{i=0}^n \sin(x_i)*1 & \sum_{i=0}^n \cos(x_i)*1 \\ \sum_{i=0}^n 1*\sin(x_i) & \sum_{i=0}^n \sin^2(x_i) & \sum_{i=0}^n \cos(x_i)*\sin(x_i) \\ \sum_{i=0}^n 1*\cos(x_i) & \sum_{i=0}^n \cos(x_i)*\sin(x_i) & \sum_{i=0}^n \cos^2(x_i) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \\ \gamma \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sum_{i=0}^n \phi_i*1 \\ \sum_{i=0}^n \phi_i*\sin(x_i) \\ \sum_{i=0}^n \phi_i*\cos(x_i) \end{pmatrix}$$

הערה – אנו מתנצלים שזה רשום בכתב יד אך ההקלדה עלולה לגזול מאיתנו זמן יקר לפני המבחנים.

על מנת למצוא את המקדמים יש לגזור את השגיאה הריבועית ולהשוות לאפס.

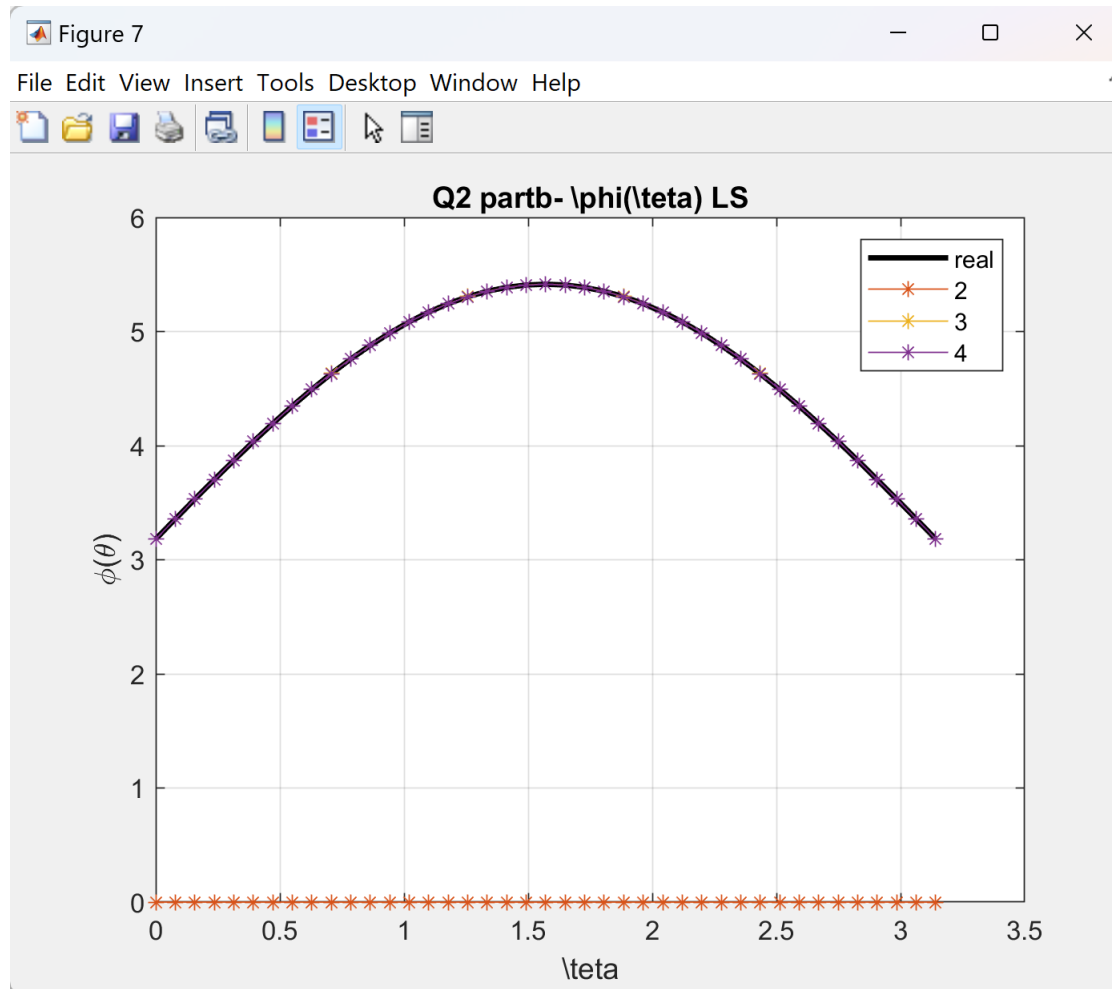
סעיף ב'

בסעיפים זה אנו מניחים כי הנקודות θ_j במרווחים קבועים וכי $r=10cm$. בעזרת הביטוי שקיבלנו בסעיף א' נכתוב תכנית לחישוב המקדמים והערכים $\phi_{Ls}(\theta_i)$ ב- $n+1=41$ נקודות במרווחים קבועים. נבצע את החישוב עבור $n+1=2,3,4$, נסכום בטבלה את המקדמים שהתקבלו עבור ערכי $n+1$ השונים. בנוסף נציג על גבי אותו התרשים את הערכים המקורבים ואת הערכים המדויקים כפונקציה של תטא שהתקבלו בכל אחד מהמקרים. נסביר את התוצאות ונדון בהבדלים מתוצאות סעיף א' בשאלה 1 במונחי דיוק וקצב הדגימה.

המקדמים שקיבלנו:

γ	β	α	$n+1$
0	0	0	2
$e-4.410836400016425$ 16	3.396678534459083	4.593480017633221	3
$e-2.20445678973390$ 16	3.396478865001284	4.593480017633220	4

להלן הגרף של התוצאות שקיבלנו:



על מנת למצוא את המקדמים שיביאו למינימום את השגיאה הריבועית נשתמש בשיטת LS :

$$(\alpha \ \beta \ \gamma) = (A^T * A)^{-1} * A^T * b$$

עבור $n+1=2$ קיבלנו מערכת משוואות לינארית בעלת 2 משוואות ושלושה נעלמים ולכן לא נוכל למצוא את המקדמים ונקבל את הפתרון הטריטויאלי באמצעות הפתרון המקורב ב- LS . הפתרון הוא לא זה שרצינו ונקבל גרף של אפסים שלא משחזר את הפונקציה.

עבור $n+1=3|4$ קיבלנו מערכת משוואות לינארית עם מספר משוואות שגדול או שווה למספר הנעלמים ולכן נוכל למצוא את המקדמים ולשחזר את הפוטנציאל כפי שרצינו. כפי שראינו בהרצאה, נוכל לשחזר את הפונקציה בדיוק רב כיוון

שמצאנו קירוב במונחי פונקציות ידועות שמשחזרות בדיוק רב בממוצע את הפונקציה המקורית.

השוואה לסעיף א שאלה 1

- בשיטה זו השתמשנו בנקודות דגימה קבועות והשיטה מתכנסת מהר יותר לשחזור הפונקציה בדיוק אופטימלי מאשר אינטרפולציית לגראנז'.
- בשתי השיטות נצטרך מינימום של נקודות דגימה על מנת להגיע לדיוק אופטימלי לפוטנציאל.
- שיטת LS יותר טובה ויותר מדויקת עבור אותו מספר של נקודות דגימה ובעלת קצב התכנסות מהיר יחסית. זאת מפני שפונקציית הפוטנציאל מתנהגת כמו צירוף לינארי של \sin ושל קבוע 1, מונ' עולה ואז מונ' יורדת.
- ניתן להבחין כי לפונקציה אין רכיב \cos כיוון שהמקדמים מתאפסים (ערכים מאוד קטנים לכן ניתן להזניח).
- מתוך כך נוכל להסיק כי קירוב באמצעות פונקציית \sin יעזור לנו לקבל התכנסות מהירה יותר מאשר קירוב באמצעות פולינום.

סעיף ג'

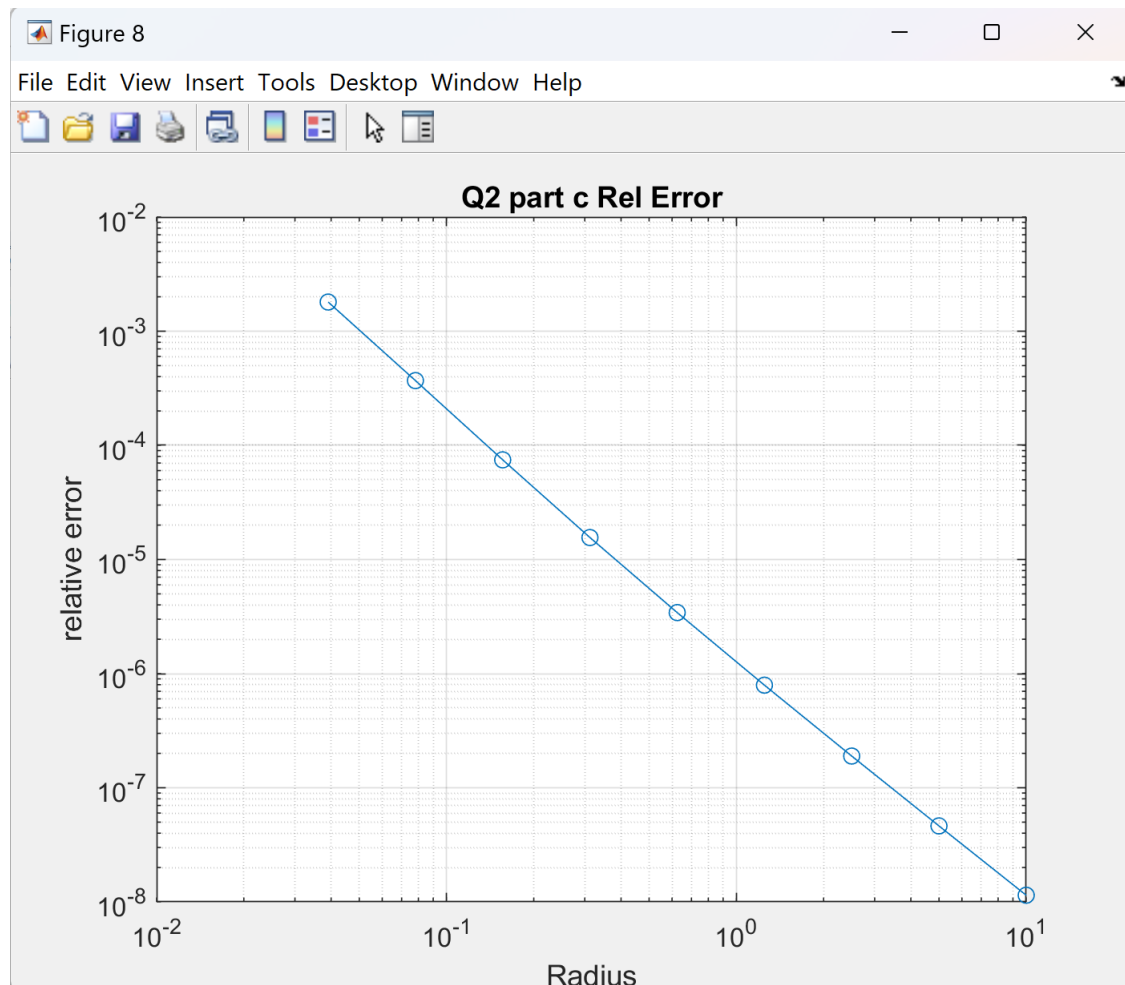
כעת נניח $n+1=4$ עבור ערכים של r :

$$r \in \{r_0, \frac{r_0}{2}, \frac{r_0}{2}, \dots, \frac{r_0}{2^8}\}$$

כאשר $r_0 = 10m$ נחשב את $\phi_{LS}(\theta)$ כפונקציה של תטא שהתקבלו בכל אחד מהמקרים, ונציג בתרשים את השגיאה היחסית כפונקציה של r .

$$\varepsilon_{LS}(\phi) = \sqrt{\sum_{i=0}^{\bar{n}} [\bar{\phi}_{LS}(\bar{\theta}_i) - \phi(\bar{\theta}_i)]^2} / \sqrt{\sum_{i=0}^{\bar{n}} [\phi(\bar{\theta}_i)]^2}$$

להלן גרף המתאר את השגיאה היחסית שקיבלנו:



מהגרף אנו רואים כי כאשר הרדיוס קטן כך השגיאה היחסית גדלה. כלומר, ככל שהמרחק של נקודות המדידה מהמקורות קטן כך השגיאה גדלה. אנו מבינים מזה כי ברדיוסים קטנים לא ניתן לתאר את פונקציית הפוטנציאל כצירוף לינארי באופן מדויק עבור פונקציות הבסיס שבחרנו.

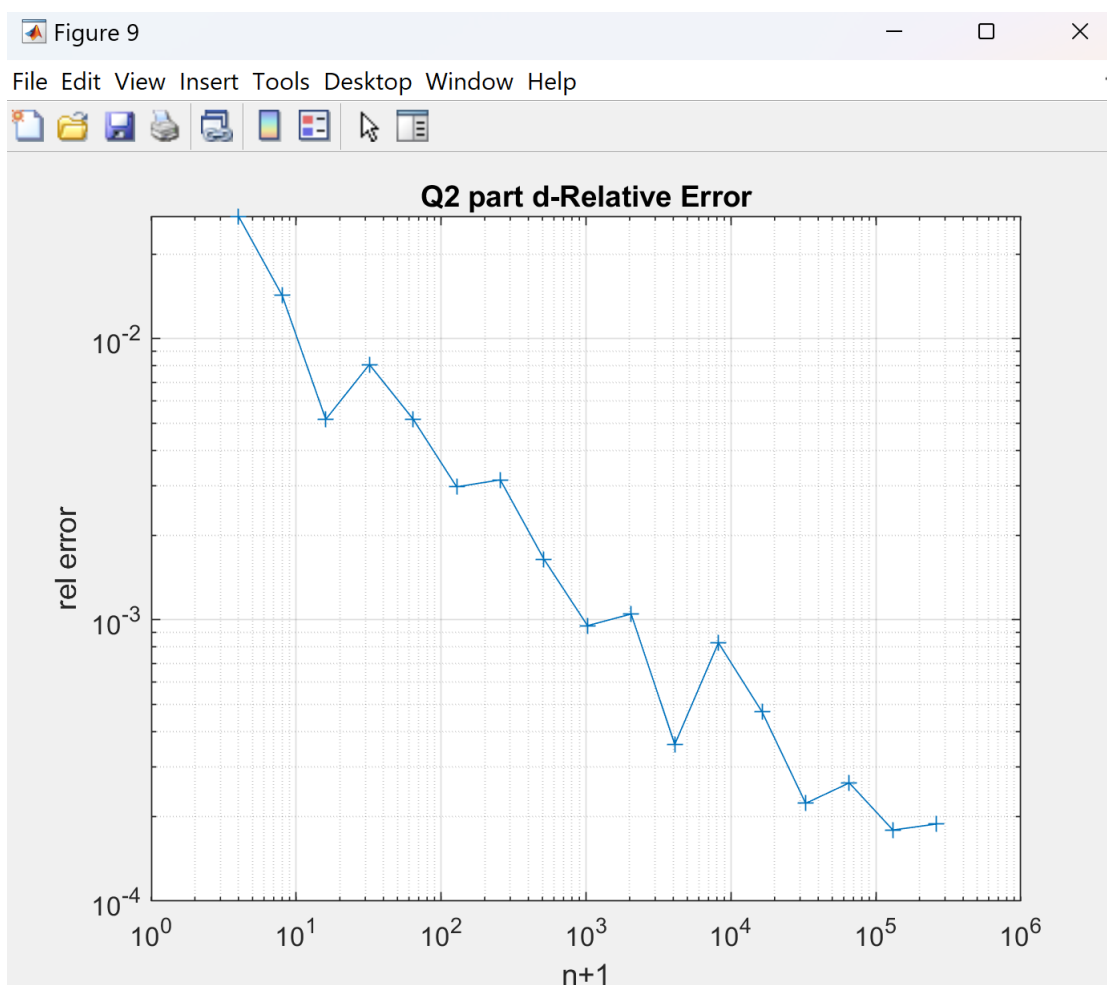
נסביר את התופעה שבה ככל שהרדיוס קטן כך הדיוק יורד –

המקדמים של \cos מתאפסים ברדיוסים קטנים לכן ניתן לשחזר פחות טוב את פונקציית \cos רק מפונקציית \sin והקבוע 1. לכן נצטרך פונקציות בסיס נוספות שיעזרו לנו לשחזר את הפונקציה גם ברדיוסים קטנים שיתארו באופן טוב יותר את פונקציית ה- \cos .

סעיף ד'

עבור סעיף זה נתון ש- $r=10cm$ אבל נוספה שגיאה אקראית למדידות. עבור כל ערך מדוד עלינו לחשב ערך "שגוי" ע"י הוספת ערך אקראי. עלינו לחזור על החישוב מסעיף ב' עבור $n+1 \in [4, 8, \dots, 4 \cdot 2^{16}]$ ולהדפיס את השגיאה ביחס לפוטנציאל המדויק כפונקציה $n+1$. בנוסף, נסביר את תוצאותינו.

להלן גרף השגיאה היחסית שקיבלנו:



מהגרף אנו רואים כי ככל שיש יותר נקודות דגימה בפיתוח LS כך השגיאה היחסית קטנה.

אנו מבינים כי למרות השגיאה שהוספנו למדידות, ערך השגיאה היחסית קטן ככל שמגדילים את מס' נקודות הדגימה בעקבות היחס הנמוך שיש בין ערך

הפוטנציאל לערך השגיאה שהוספנו. לכן השגיאה שהוספנו היא יחסית זניחה כאשר מקבלים יותר ויותר מידע שכמעט מדויק על הפונקציה.

נשים לב כי בגלל שהקירוב הממוצע האופטימלי שמתקבל ממספר רב של נקודות דגימה, אנו מקבלים כי עבור ערכי m השונים, ככל שמוסיפים עוד נקודות דגימה כך הפונקציה משוחזרת בדיוק טוב יותר.

הסבר עבור ההתיישובות עם תוצאות סעיף ב -

בסעיף ב' הגרף המשוחזר דומה יותר לפונקציה המקורית כאשר מוסיפים נקודות דגימה והשגיאה היחסית קטנה.

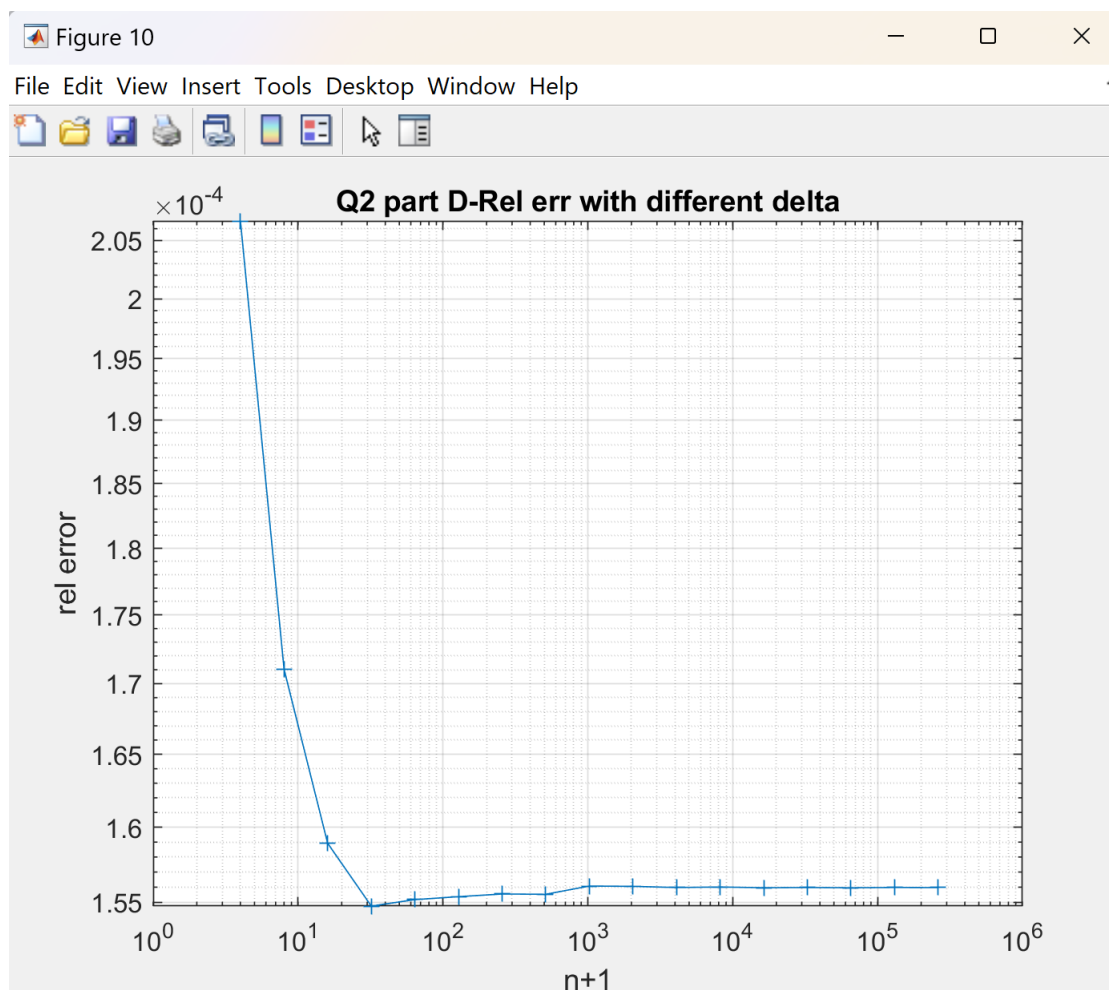
בסעיף זה גם כן ככל שמוסיפים יותר נקודות דגימה השגיאה קטנה ובנוסף מן הסתם ככל ששגיאת המדידה תהיה קטנה יותר כך נתקרב יותר מהר לפונקציה המקורית, כלומר בפחות $n+1$.

לכן, אנו מצפים כי ככל ששגיאת המדידה תהיה קטנה יותר וככל שיוספו נקודות דגימה כך ההתכנסות תהיה מהירה ונתקרב לפונקציה. כלומר, אם ניקח את סעיף זה ונקטין ונקטין את שגיאת המדידות כך נתקרב לתוצאה שקיבלנו בסעיף ב'.

עבור ϕ_j חדש:

עבור $\phi_j = (1 + \delta_j * 10^{-4})\phi_j$ אנו רואים שכאן השגיאה קטנה יותר מהשגיאה שדרשנו במהלך סעיף זה. לכן אנו מבינים שההתכנסות תהיה דומה יותר להתכנסות שקיבלנו בסעיף ב'.

להלן הגרף של השגיאה היחסית עבור שגיאה זו:



מסקנות מהגרף:

- אנו רואים בגרף כי כאשר מוסיפים מספר רב של נקודות דגימה יחס השגיאה כמעט ולא משתנה ונשאר קרוב לאפס.
- נשים לב כי כאשר ערכי נקודות הדגימה גדולים יותר השגיאה המתווספת יחסית זניחה ולכן מספיק לנו מספר קטן של נקודות דגימה על מנת לקבל את ההתכנסות הנדרשת ולהעריך את פונקציית הפוטנציאל בצורה אופטימלית.
- כאשר אנו משמשים במספר גדול של נקודות דגימה, השגיאה מתכנסת לשגיאה הריבועית המינימלית בלי השגיאה האקראית, שזה בעצם מה

שקיבלנו בסעיף ב'. נשים לב כי אם מקטינים של השגיאה של המדידה
מקבלים התכנסות לשגיאה ריבועית מינימלית מהירה אף יותר.

שאלה 3

בשאלה זו נעסוק באינטגרציה בשיטת ניוטון-קוטס. נחשב את האינטגרל ההיטל של הפוטנציאל על פונקציות המוגדרות $f_i(\theta)$ המוגדרות בתחום בין 0 לפאי.

סעיף א'

בסעיף זה עלינו לממש בשיטת הטרפז ובשיטת סימפסון שגרות לקירוב אינטגרל מסוים מהצורה $\int_a^b g(t)dt$ בגבולות מ- a ל- b .

עלינו לבדוק ולהראות כי השגרות עובדות ע"י הפעלתן לחישוב קירוב לאינטגרל של הפונקציה $g(t) = \frac{4}{\pi(1+t^2)}$ בקטע $[0,1]$. נכתוב את תוצאות הקירוב והשגיאות היחסיות בחישוב האינטגרל המתקבלות עבור כל אחת מהשיטות, בהשוואה לפתרון המדויק.

תחילה נבצע חישוב אנליטי של האינטגרל:

$$I_i = \int_a^b g(t)dt = \int_0^1 \frac{4}{\pi(1+t^2)} dt = \frac{4}{\pi} * \int_0^1 \frac{1}{t^2+1} dt = \frac{4}{\pi} * [\arctan(1) - \arctan(0)] = \frac{4}{\pi} * \frac{\pi}{4} = 1$$

עבור שיטת הטרפז הלא מצרפית מקבלים:

$$Q = \int_0^1 \frac{4}{\pi(1+t^2)} dt \cong \frac{1-0}{2} * \left(\frac{4}{\pi} + \frac{4}{2\pi} \right) = 0.954929$$

$$E = |1 - Q| = 0.04507$$

עבור שיטת סימפסון הלא מצרפית מקבלים:

$$Q = \int_0^1 \frac{4}{\pi(1+t^2)} dt \cong \frac{0.5}{3} * \left(\frac{4}{\pi} + 4 * \frac{\frac{4}{5\pi}}{\frac{4}{4}} + \frac{4}{2\pi} \right) = 0.99737$$

$$E = |1 - Q| = 0.002629$$

מכאן כי בשיטת סימפסון מקבלים דיוק גבוה יותר משיטת הטרפז (אנו רואים כי השגיאה E קטנה יותר, וזה תואם את שנלמד בהרצאה).

הסיבה לכך שהשגיאה בשיטת סימפסון קטנה יותר משיטת הטרפז היא שבשיטת סימפסון מקרבים את הפונקציה עם פולינום בסדר גבוה יותר.

סעיף ב'

עלינו להשתמש בשגרות מסעיף א' למימוש תכנית המחשבת קירוב לאינטגרל הנתון על ידי הביטוי:

$$I_i = \int_0^{\pi} \phi(\theta) f_i(\theta) d\theta = Q_{i,n+1}$$

עבור הפונקציות f_i משאלה 2. מזכיר כי פונקציות אלה הן:

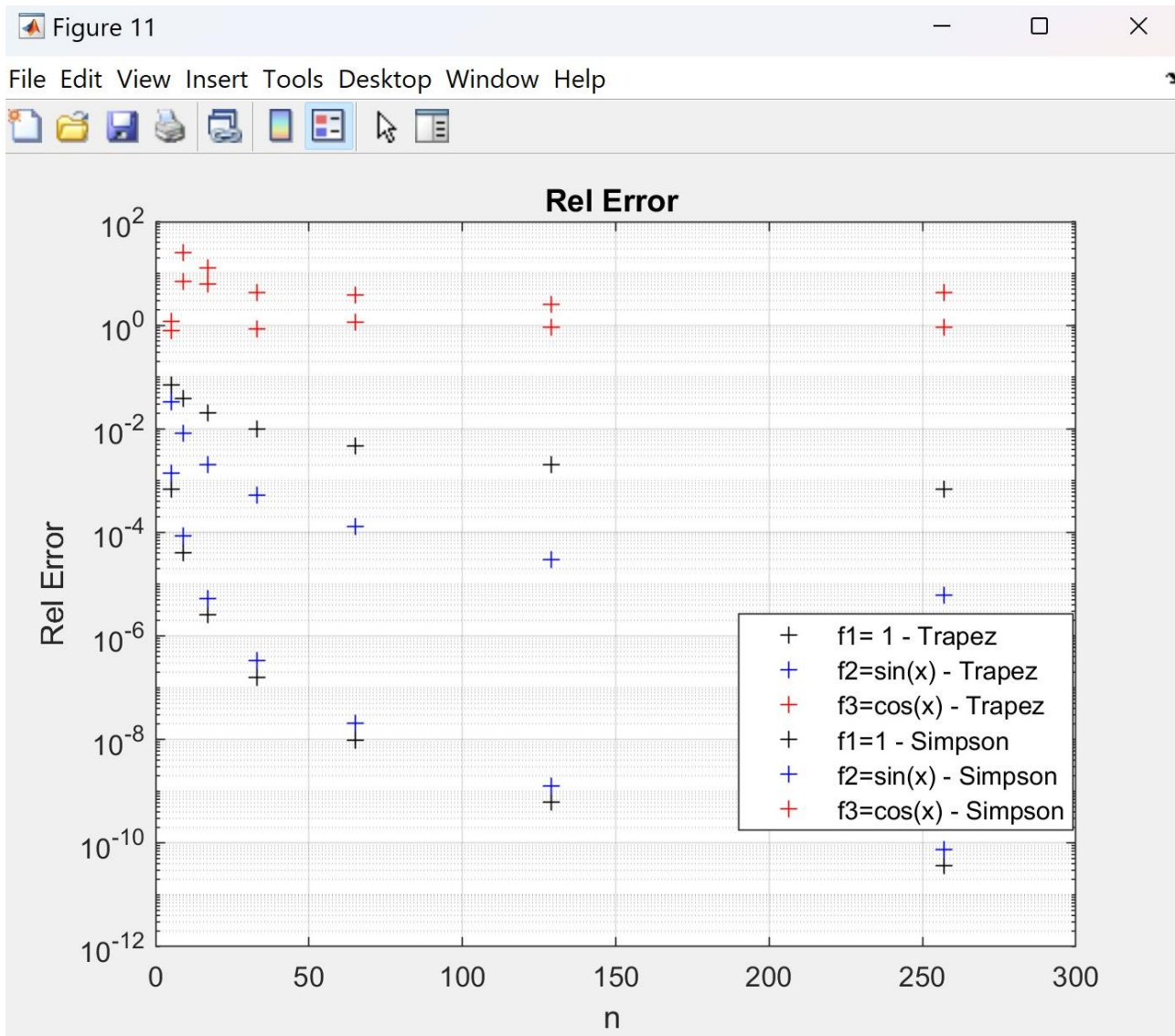
$$f_1 = 1 ; f_2 = \sin(\theta) ; f_3 = \cos(\theta)$$

עלינו לחשב את האינטגרלים מתוך ערכי הפונקציה ב- $n+1$ ϵ [5, 9, 17, ..., 513] נקודות במרווחים אחידים. נניח $r=10cm$. נשתמש בנוסחאות אינטגרציה טרפז וסימפסון מצרפיות.

כפי שנדרש בשאלה, נתייחס לתוצאה $Q_{i,513}$ בתור ערך האינטגרל המדויק ונדפיס את השגיאה היחסית עבור כל אחד מסוגי האינטגרציה, עבור כל אחת מהפונקציות כפונקציה של $n+1$:

$$\epsilon_{i,n+1} = \frac{|Q_{i,n+1} - Q_{i,513}|}{|Q_{i,513}|}$$

להלן הגרף שקיבלנו של השגיאה היחסית כפונקציה של $n+1$:



מסקנות מהגרף:

- נשים לב כי ככל שהשתמשנו ביותר נקודות דגימה כך השגיאה היחסית קטנה עבור פונקציות $\sin, 1$ בירידה יחסית חדה.
- נשים לב כי ככל שהשתמשנו ביותר נקודות דגימה כך השגיאה היחסית יחסית קבועה עבור פונקציית \cos . מה שתואם את שהסברנו בשאלה 2, שפונק' הפוטנציאל היא צירוף לינארי של קבוע 1 וסינוס וכי המקדמים של \cos מתאפסים.

- ניתן לראות מהגרף כי עבור פונקציית \sin מקבלים את השגיאה הכי גדולה.
- מהגרף ניתן לראות כי ככל שיש יותר נק' דגימה כך חישוב האינטגרל מדויק יותר.
- עבור הפונקציה $\int_0^1 \frac{4}{\pi(1+x^2)} \cos(x)$ ראינו כי בשתי השיטות האינטגרל שואף לאפס ומכאן כי השגיאות הקטנות ביותר גם הן משפיעות כי הן גדולות ביחס ל-0 ומכאן כי השגיאה בחישוב האינטגרל לא תרד גם אם נוסיף עוד נקודות. אנו מקבלים כי הערכים נעים סביב האפס כפי שרואים בגרף.
- השגיאה מושפעת מאורך הקטע, אשר קטן בכל פעם שמוסיפים נקודות (מחלקים את הקטע ליותר קטעים). לכן ככל שיש יותר קטעים קטנים כך מקבלים תוצאה מדויקת ויותר קרובה לערך האמיתי של האינטגרל.