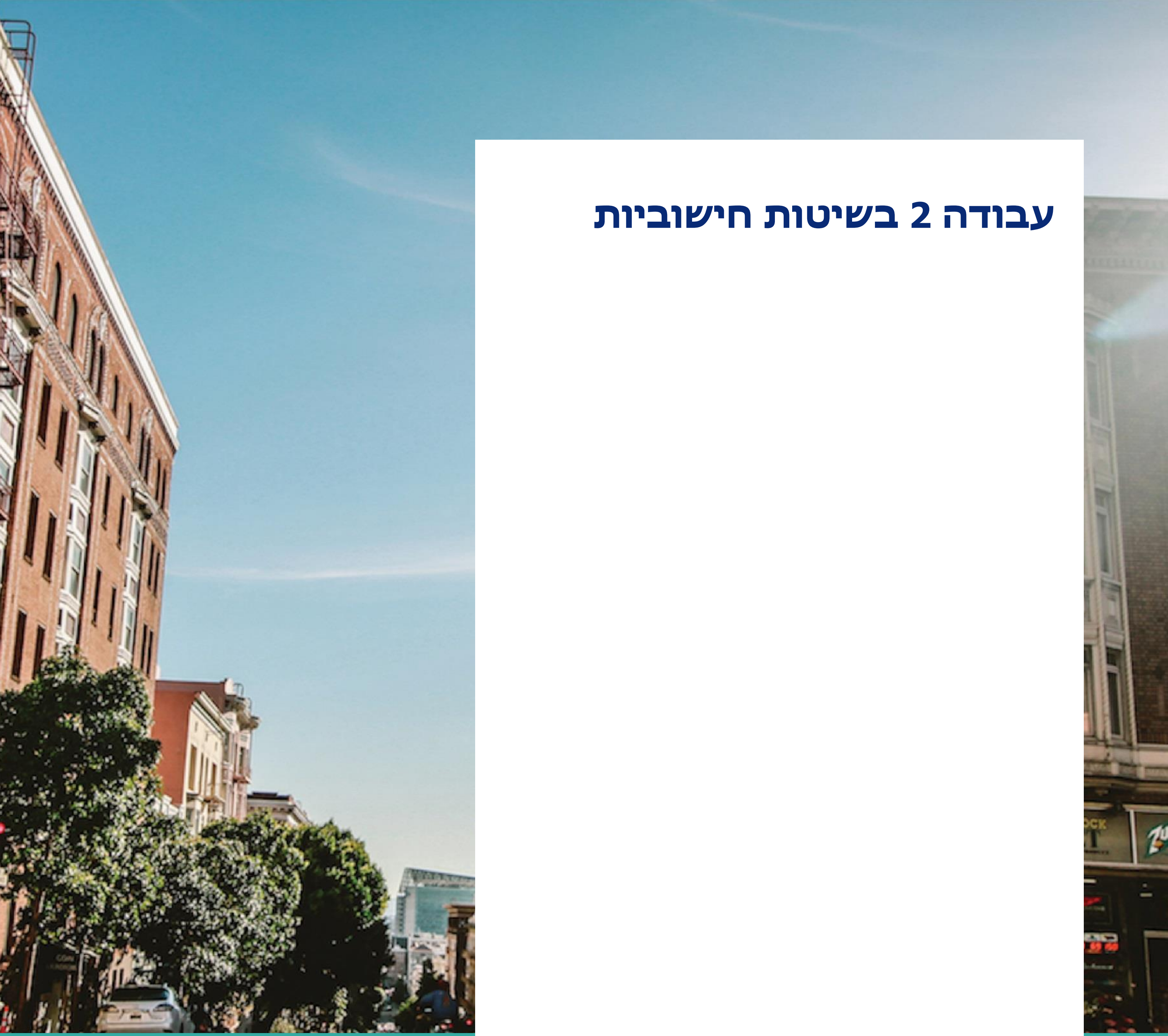


עבודה 2 בשיטות חישוביות

מגישים: גיא כהן (207881004) ותהל
ססונקר (318888005)

שאלה 1

<u>סעיף א' – פתרון משוואה בשיטת ניוטון-רפסון</u>

בסעיף זה נדרשנו לפתור בצורה אנליטית את המשוואה:

$$x^4 - 3 = 0$$

לשם כך עלינו למצוא קטע [a,b] בהנחה ש-b=5. עלינו להציג ערך של x_0 התחלתי אשר יבטיח לנו שנתכנס לשורש $s = 3^{\frac{1}{4}}$.

על מנת להבטיח את התכנסות הפתרון בשיטה, נשתמש במשפט מהכיתה:

משפט- תהא $F(x)$ פונק' ממשית המוגדרת בקטע $[a,b]$ המקיימת את התנאים הבאים:

(1) $F'(x) \neq 0$ (פונק' מונוטונית)

(2) $F''(x) \neq 0$ (אין פיתול של הפונק' בתחום)

(3) $F(a)F(b) < 0$ (יש שורש בתחום)

$\left|\frac{F(a)}{F'(a)}\right| < b-a$ וכמו כן $\left|\frac{F(b)}{F'(b)}\right| < b-a$

אזי שיטת ניוטון רפסון מתכנסת לכל תנאי התחלה בתחום.

נבדוק את שני התנאים הראשונים ע"י גזירת הפונקציה פעמיים:

$$F(x) = x^4 - 3$$

$$F'(x) = 4x^3$$

$$F''(x) = 12x^2$$

נשים לב שעבור x בקטע (0,5] הנגזרות חיוביות ממש ועל כן הפונקציה מונוטונית והנגזרות לא מתאפסות. לכן אין פיתול של הפונקציה בתחום.

כעת עבור התנאי השלישי נחשב (b=5):

$$F(a) \cdot F(5) < 0$$

$$(a^4 - 3)(5^4 - 3) < 0$$

$$a^4 < 3$$

$$a < \sqrt[4]{3} = 1.316$$

נצליב עם התנאים 1,2 שמצאנו (a בקטע [0,5) ובנוסף a<1.316). כלומר, עד כה גילינו כי a צריך להיות שייך לקטע (0,1.316). נבחר שרירותית ולשם נוחות a=1.

כעת נראה שהתנאי האחרון מתקיים גם כן:

$$\left|\frac{F(b)}{F'(b)}\right| < b - a, \left|\frac{622}{500}\right| < 5 - a \to a < 3.756$$

$$\left|\frac{F(a)}{F'(a)}\right| < b - a, \left|\frac{a^4 - 3}{4a^3}\right| < 5 - a \to \frac{1}{2} < 4$$

ראינו כי בבחירת a=1 כל התנאים מתקיימים ועל כן נקבל התכנסות מכל תנאי התחלה בתחום זה.

<u>סעיף ב' +ג'</u>

בסעיף זה נדרשנו לכתוב תכנית במאטלב אשר תפתור את המשוואה מסעיף א'. התוכנה תשתמש במספרי תעודות הזהות שלנו לחישוב הניחוש ההתחלתי x_0.

$$x_0 = a + \frac{I_1}{I_1 + I_2}(b - a)$$

$$x_0 = 1 + \frac{318888005}{318888005 + 207881004} \cdot 4 = 3.4215$$

לצורך סעיפים אלו נעזרנו בפונקציה שבנינו המחשבת קירוב לשורש של F(x) בשיטת ניוטון-רפסון.

```
%----------------------------functions----------------------------------
function [X_n,error_list,Xn_minus_xn_minus_one_list] = Newton_Raphson(x0,tollerence,s)
    X_n = zeros;%initialization
    error_list = zeros; %initialization
    Xn_minus_xn_minus_one_list = zeros; %initialization
    X_n(1) = x0;
    X_n(2) = x0 - h_q1(x0);
    iter = 2;
    difference = abs(X_n(iter)-X_n(iter-1)); %|xn-xn-1|
    Xn_minus_xn_minus_one_list(1) = difference;
    error_list(1) = abs(X_n(1) - s); %|xn - s|
    while difference >= tollerence    %10^-12
        X_n(iter+1) = X_n(iter) - h_q1(X_n(iter)); %formula
        error_list(iter) = abs(X_n(iter) - s);
        iter=iter+1;
        difference = abs(X_n(iter)-X_n(iter-1));
        Xn_minus_xn_minus_one_list(iter-1) = difference;
    end
end
```

כפי שהתבקשנו, חישבנו את הערך המקורב לשורש ועצרנו כאשר הגענו לקירוב מספיק טוב של 12 ספרות משמעותיות לאחר הנקודה.

כלומר השגיאה < 10^{-2}. עבור סעיף ב', נציג טבלה Table ובה שלוש עמודות שיציגו את:

- x_n
- ההפרש בין זוג ניחושים עוקבים $|x_n - x_{n-1}|$
- השגיאה ביחס לפתרון המדויק $|x_n - s|$

הטבלה שקיבלנו:

Table

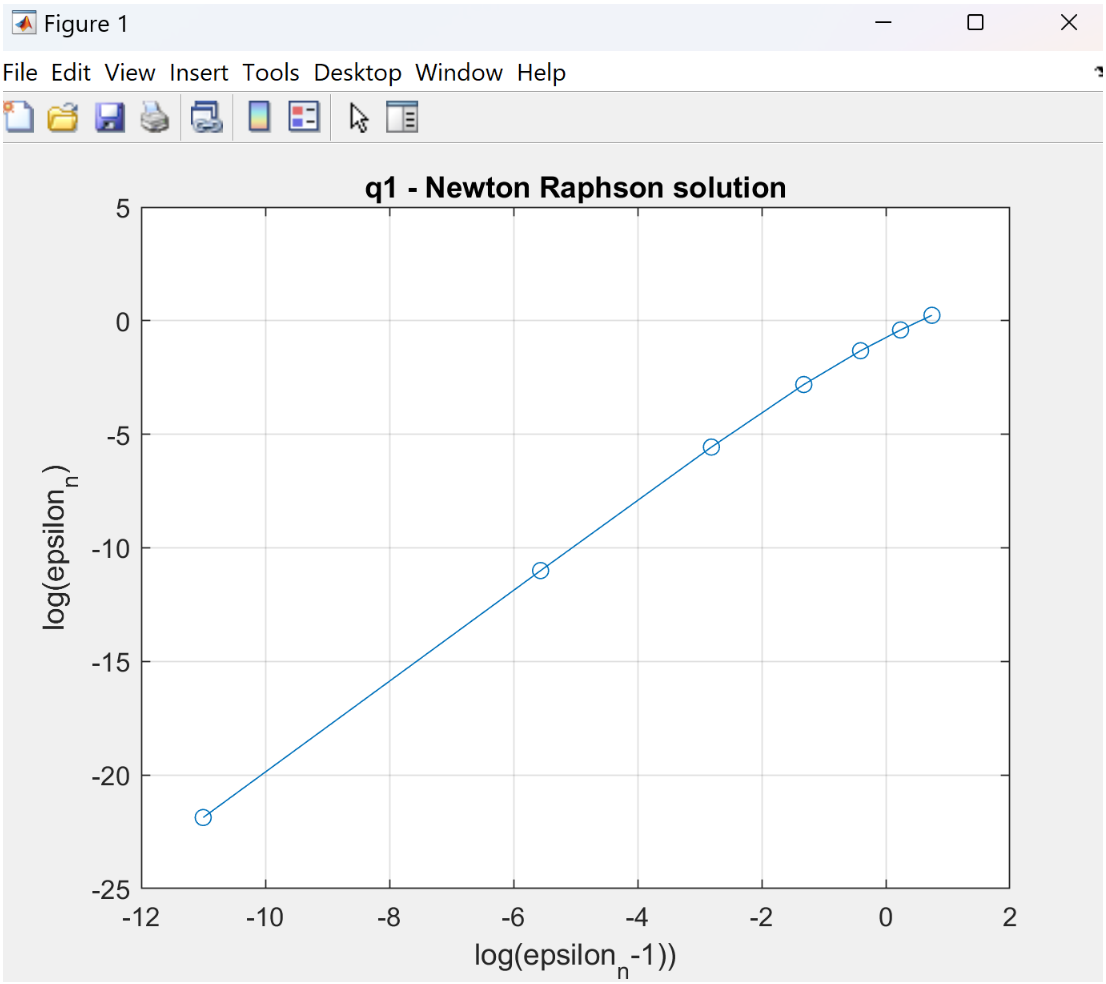
9x4 table

	1 num_of_iter	2 X_n	3 difference	4 Err
1	1	3.4215	0.8366	2.1054
2	2	2.5848	0.6028	1.2687
3	3	1.9820	0.3992	0.6660
4	4	1.5829	0.2066	0.2668
5	5	1.3763	0.0564	0.0602
6	6	1.3199	0.0038	0.0038
7	7	1.3161	1.6676e-05	1.6676e-05
8	8	1.3161	3.1695e-10	3.1695e-10
9	9	1.3161	0	0

כפי שניתן לראות בטבלה, הגענו להתכנסות הרצויה לאחר 9 איטרציות.

בסעיף ג' התבקשנו להציג תרשים אשר מראה את הפונקציה $\log(\epsilon_n)$ כפונקציה של $\log(\epsilon_{n-1})$ (ϵ_n הוא השגיאה היחסית בין x באיטרציה ה-n-ית לבין השורש).
כפי שנלמד בכיתה, מהגרף שקיבלנו נוכל להסיק את סדר ההתכנסות וקבוע ההתכנסות.

הגרף שקיבלנו:

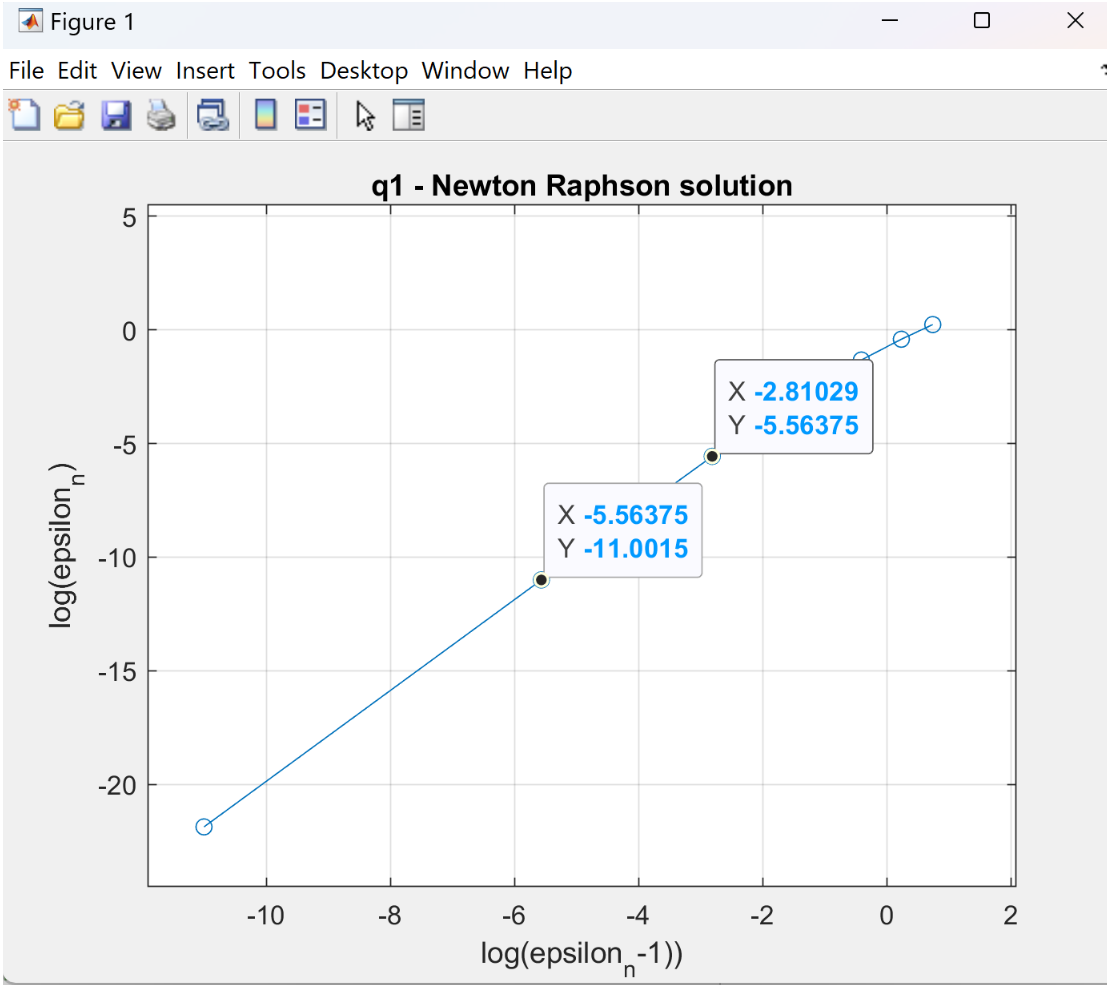


כפי שראינו בהרצאה, שיפוע הגרף הוא בעצם קצב ההתכנסות η. נחשב אותו:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\epsilon_{n+1}}{\epsilon_n^{\eta}} = A$$

כאשר A הוא קבוע ההתכנסות.

בעזרת הנקודות מהגרף נחשב את סדר ההתכנסות וקבוע ההתכנסות:



$$\eta = m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \frac{-5.56375 + 11.0015}{-2.81029 + 5.56375} = 1.97487$$

נשים לב שקיבלנו סדר התכנסות שקרוב מאוד לסדר ריבועי.

נחלץ את A מהמשוואה:

$$log(A) = y - mx = -11.0015 + 2 \cdot 5.56375$$
$$= 0.126$$

לכן נקבל את A:

$$A = 1.134$$

הערה – ניתן לראות כי סדר ההתכנסות הינו אסימפטוטי. וזה מסתדר עם התיאוריה.

נשים לב שהערך שקיבלנו קרוב מאוד אך לא מדויק כיוון שהחישוב שלנו כלל יכולת חישוב של מספרים סופיים.

הערה חשובה! – נשים לב שעבור F(x) השורש s הינו מריבוי 1 ולכן ההתכנסות הריבועית היא כפי שציפינו.

בנוסף נוכל לחשב את A ע"י נוסחה מהכיתה:

$$\boldsymbol{A = \frac{1}{2} \cdot \left|\frac{F''(s)}{F'(s)}\right| = 1.1397}$$

שאלה 2

סעיף א'

בשאלה זו התבקשנו לכתוב תוכנית במטלאב אשר פותרת את המשוואה הבאה בעזרת שיטת המיתר:

$$x^4 - 3 = 0$$

שוב, עלינו להשתמש במספרי תעודות הזהות שלנו על מנת לקבוע את שני הניחושים ההתחלתיים:

$$x_0 = a + \frac{I_1}{I_1 + I_2}(b - a)$$

$$x_0 = 1 + \frac{318888005}{318888005 + 207881004} \cdot 4 = 3.4215$$

$$x_1 = a + \frac{I_1}{I_1 + I_2}(b - x_0)$$

$$x_1 = 1 + \frac{318888005}{318888005+207881004} \cdot (5 - 3.4215) = 4.3771$$

בדומה לשאלה הראשונה, עלינו לעצור את החישוב כאשר נגיע לרמת דיוק המתבקשת וקרובה מספיק לשורש s. כלומר, עלינו להגיע לתוצאה שבה 12 הספרות המשמעותיות לאחר הנקודה של x_n מתייצבות.

ניזכר, כי צעד האיטרציה עבור שיטת המיתר היא:

$$x_{n+1} = x_n - F(x_n)\frac{x_n - x_{n-1}}{F(x_n) - F(x_{n-1})}$$

לשם פתרון השאלה הרכבנו פונקציה בתוכנה אשר משתמשת בשיטת המיתר:

```
function [X_n,error_list,Xn_minus_xn_minus_one_list] = Secant_method(x0, x1, tollerence, s)
    num_of_iter = 2; %initialization
    error_list = zeros; %initialization
    Xn_minus_xn_minus_one_list = zeros;%initialization
    X_n(1) = x0; %given
    X_n(2) = x1; %given
    difference = abs(X_n(num_of_iter)-X_n(num_of_iter-1)); %|Xn - Xn-1|
    Xn_minus_xn_minus_one_list(1) = difference;
    error_list(1) = abs(X_n(1) - s); %|xn - s|
    while difference > tollerence
        X_n(num_of_iter+1) = Secant_formula(num_of_iter, X_n);
        error_list(num_of_iter) = abs(X_n(num_of_iter) - s);  % |Xn -s|
        num_of_iter = num_of_iter + 1;
        difference = abs(X_n(num_of_iter)-X_n(num_of_iter-1));  %|Xn - Xn-1|
        Xn_minus_xn_minus_one_list(num_of_iter-1) = difference;
    end
end



function Secant = Secant_formula(num_of_iter, X_n) %define function
        Secant = X_n(num_of_iter) - func_q2(X_n(num_of_iter))*(X_n(num_of_iter)-X_n(num_of_iter-1))/(func_q2(X_n(num_of_iter))-func_q2(X_n(num_of_iter-1)));
end
```

כנדרש בסעיף זה, נציג טבלה *T2* המכילה את הפרטים הבאים:

- x_n
- ההפרש בין זוג ניחושים עוקבים $|x_n - x_{n-1}|$
- השגיאה ביחס לפתרון המדויק $|x_n - s|$

אזי הטבלה שקיבלנו היא:

T2

13x4 table

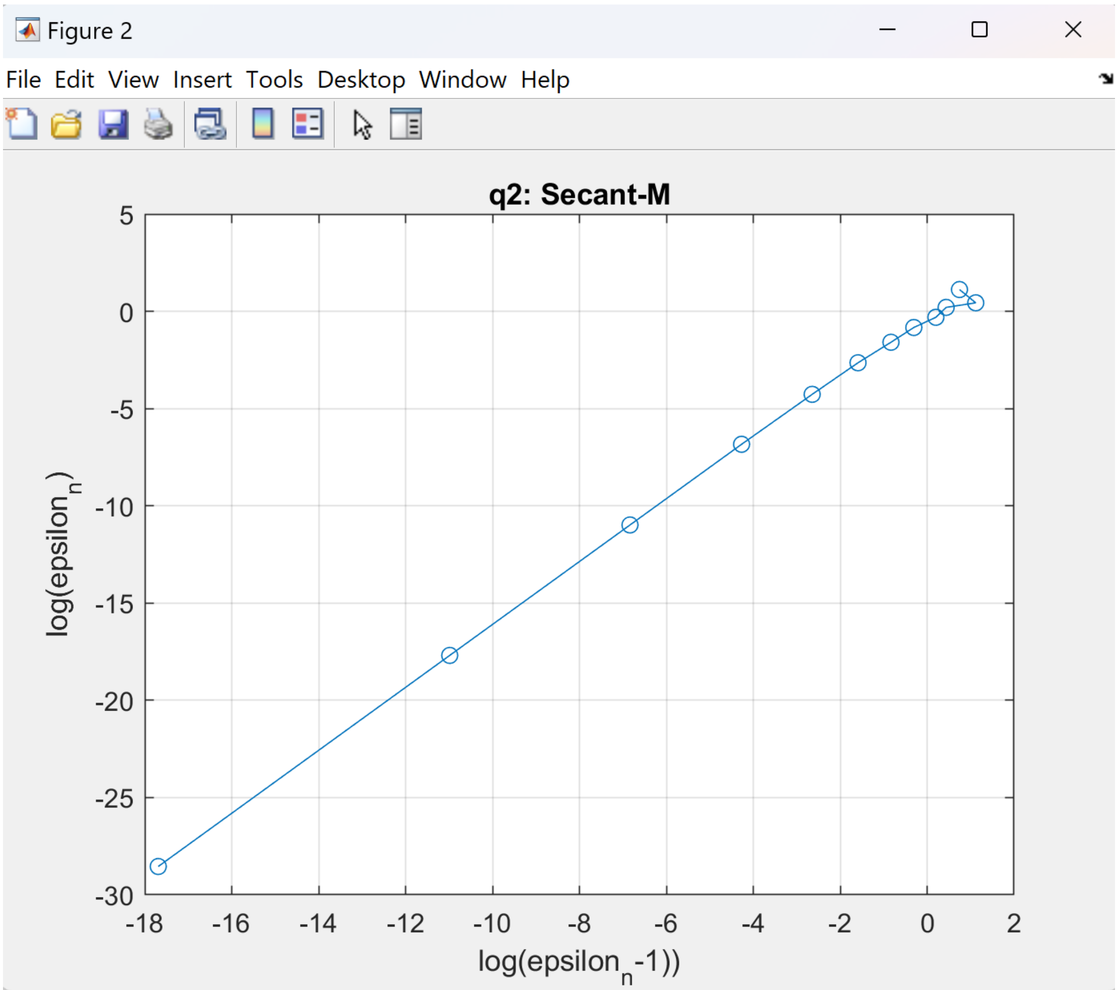
	1 n	2 X_n	3 X_n_Diff	4 Err
1	1	3.4215	0.9556	2.1054
2	2	4.3771	1.5125	3.0610
3	3	2.8646	0.3247	1.5485
4	4	2.5399	0.4875	1.2239
5	5	2.0524	0.3011	0.7363
6	6	1.7513	0.2314	0.4353
7	7	1.5199	0.1329	0.2039
8	8	1.3871	0.0570	0.0710
9	9	1.3301	0.0129	0.0140
10	10	1.3171	0.0011	0.0011
11	11	1.3161	1.6946e-05	1.6966e-05
12	12	1.3161	2.0753e-08	2.0753e-08
13	13	1.3161	4.0146e-13	4.0146e-13

נשים לב כי התכנסות הפתרון של המשוואה בשיטה זו דרשה 13 איטרציות.
ניתן לראות (כפי שראינו בכיתה) שבשיטת המיתר נקבל התכנסות איטית יותר בהשוואה לשיטת ניוטון-רפסון.

<u>סעיף ב'</u>

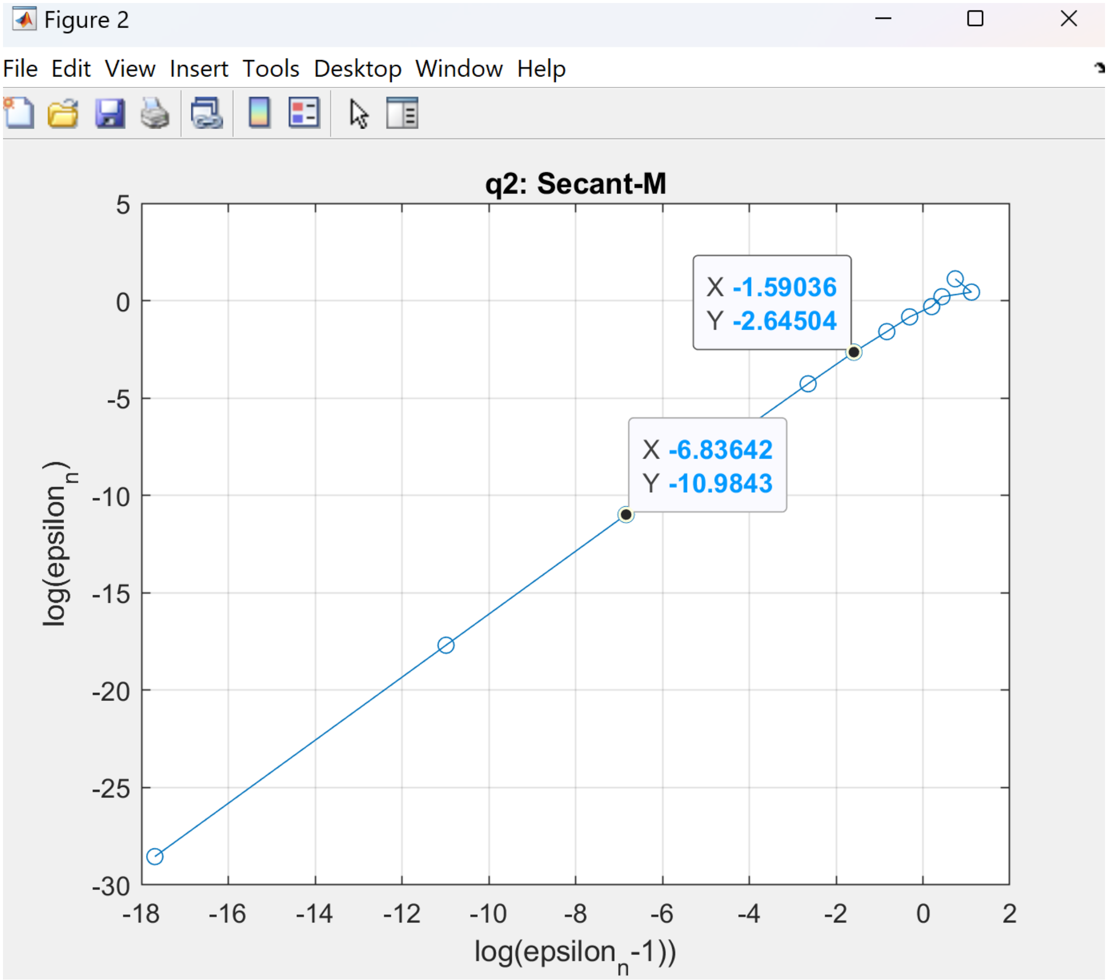
בסעיף זה התבקשנו להציג תרשים אשר מראה את הפונקציה $\log(\epsilon_n)$ כפונקציה של $\log(\epsilon_{n-1})$ (ϵ_n הוא השגיאה היחסית בין x באיטרציה ה-n-ית לבין השורש).
כפי שנלמד בכיתה, מהגרף שקיבלנו נוכל להסיק את סדר ההתכנסות וקבוע ההתכנסות.

להלן הגרף שקיבלנו:



בדומה לשאלה הקודמת, שיפוע הגרף יהיה קצב ההתכנסות η. וממנו נוכל להסיק את קבוע ההתכנסות A.

לחישוב קבועים אלו נזדקק לשתי נקודות על הגרפים:



$$\eta = m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \frac{-2.64504 + 10.9843}{-1.59036 + 6.83642} = 1.5896$$

$$\begin{aligned} log(A) = y - mx &= -10.9843 + 1.5896 \cdot 6.83642 \\ &= -0.117 \end{aligned}$$

לכן נקבל את A:

$$A = 0.8895$$

כפי שיכולנו לצפות, קצב ההתכנסות אכן איטי יותר ($\boldsymbol{\eta}$ קטן יותר מבשיטת ניוטון-רפסון) ואכן קצב ההתכנסות שקיבלנו קרוב מאוד ליחס הזהב:

$$\frac{1+\sqrt{5}}{2}$$

נשים לב כי קבוע ההתכנסות שקיבלנו אכן תואם את התיאוריה:

$$A=\frac{1}{2}\left|\frac{F''(s)}{F'(s)}\right|^{0.62}=0.8333$$

קרוב מאוד לקבוע שקיבלנו.

שאלה 3

בשאלה זו עלינו לפתור משוואות בעזרת ששיטת ניוטון רפסון המניחה שורש מרובה.

<u>סעיף א'</u>

בסעיף זה עלינו להשתמש באלגוריתם האיטרטיבי משאלה 1 על מנת לפתור את המשוואה הבאה:

$$f(x) = x^5 - 6x^4 + 14x^3 - 20x^2 + 24x - 16 = 0$$

בסעיף זה השתמשנו בניחוש ההתחלתי $x_0 = 5$ הנתון בשאלה ועצרנו לאחר התייצבות 12 ספרות ראשונות. על מנת להגיע להתכנסות הנדרשת היינו צריכים 33 איטרציות בתכנית.

הקוד שבנינו לפונקציית ניוטון-רפסון בסעיף זה:

```
function [X_n,error_list,Xn_minus_xn_minus_one_list] = Newton_Raphson_q3(x0,tollerence,s) %for part a
    X_n = zeros;%initialization
    error_list = zeros; %initialization
    Xn_minus_xn_minus_one_list = zeros; %initialization
    X_n(1) = x0;
    X_n(2) = x0 - h_q3(x0);
    iter = 2;
    difference = abs(X_n(iter)-X_n(iter-1)); %|xn-xn-1|
    Xn_minus_xn_minus_one_list(1) = difference;
    error_list(1) = abs(X_n(1) - s); %|xn - s|
    while difference >= tollerence    %10^-12
        X_n(iter+1) = X_n(iter) - h_q3(X_n(iter)); %formula
        error_list(iter) = abs(X_n(iter) - s);
        iter=iter+1;
        difference = abs(X_n(iter)-X_n(iter-1));
        Xn_minus_xn_minus_one_list(iter-1) = difference;
    end
end
```

נציג בטבלה Table 3_A את:

- ערכי x_n
- ההפרש בין זוג ניחושים עוקבים $|x_n - x_{n-1}|$
- השגיאה ביחס לפתרון המדויק $|x_n - s|$

להלן הטבלה:

Table3_A

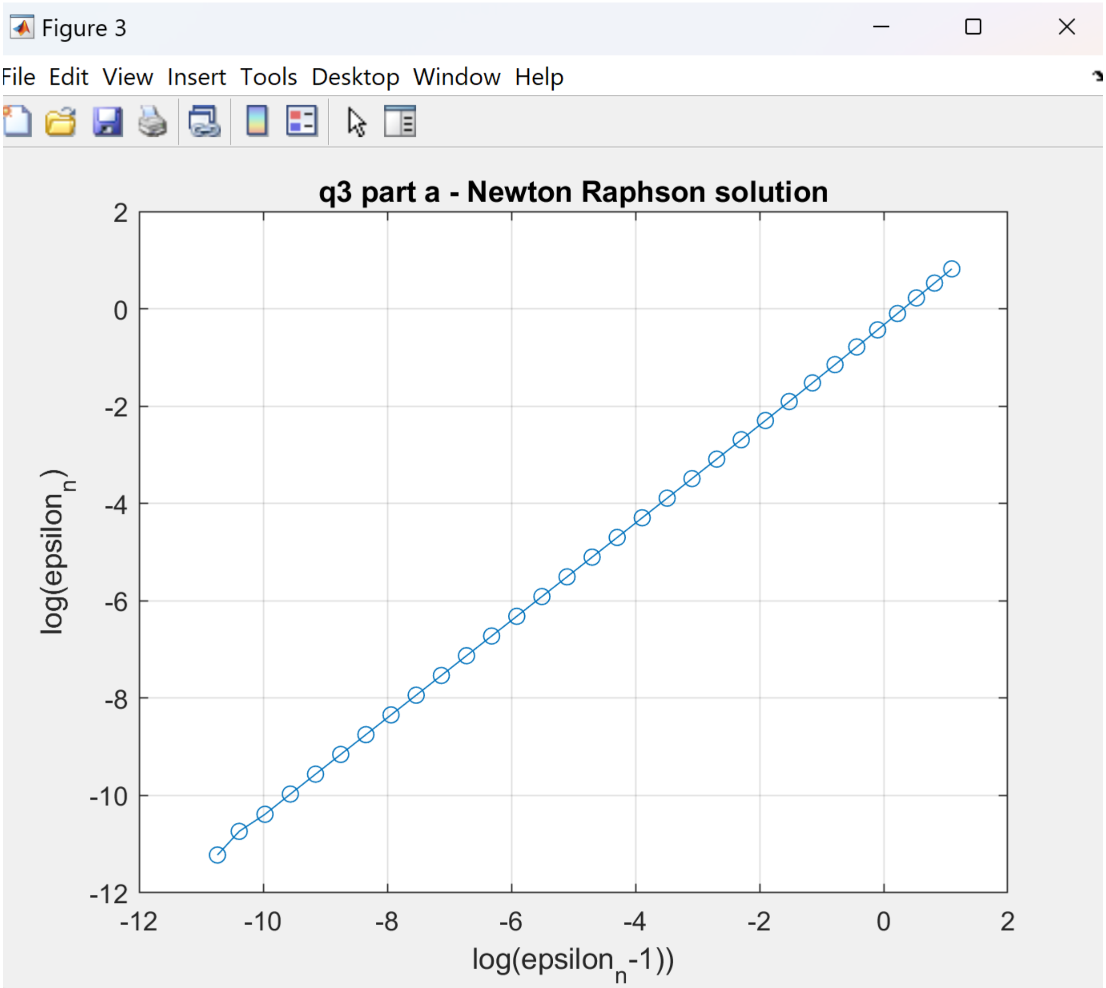
33x4 table

	1 num_of_iter	2 X_n	3 difference	4 Err
1	1	5	0.7297	3
2	2	4.2703	0.5736	2.2703
3	3	3.6967	0.4464	1.6967
4	4	3.2503	0.3428	1.2503
5	5	2.9075	0.2589	0.9075
6	6	2.6485	0.1918	0.6485
7	7	2.4567	0.1393	0.4567
8	8	2.3174	0.0992	0.3174
9	9	2.2182	0.0695	0.2182
10	10	2.1487	0.0480	0.1487
11	11	2.1007	0.0328	0.1007
12	12	2.0679	0.0223	0.0679
13	13	2.0456	0.0150	0.0456
14	14	2.0305	0.0101	0.0305
15	15	2.0204	0.0068	0.0204
16	16	2.0136	0.0045	0.0136
17	17	2.0091	0.0030	0.0091
18	18	2.0061	0.0020	0.0061
19	19	2.0041	0.0014	0.0041
20	20	2.0027	9.0119e-04	0.0027
21	21	2.0018	6.0109e-04	0.0018
22	22	2.0012	4.0086e-04	0.0012
23	23	2.0008	2.6730e-04	8.0205e-04
24	24	2.0005	1.7823e-04	5.3475e-04
25	25	2.0004	1.1882e-04	3.5652e-04
26	26	2.0002	7.9239e-05	2.3770e-04
27	27	2.0002	5.2878e-05	1.5846e-04
28	28	2.0001	3.5231e-05	1.0558e-04
29	29	2.0001	2.3607e-05	7.0351e-05
30	30	2.0000	1.5897e-05	4.6744e-05
31	31	2.0000	9.1265e-06	3.0847e-05
32	32	2.0000	8.3672e-06	2.1720e-05
33	33	2.0000	0	1.3353e-05

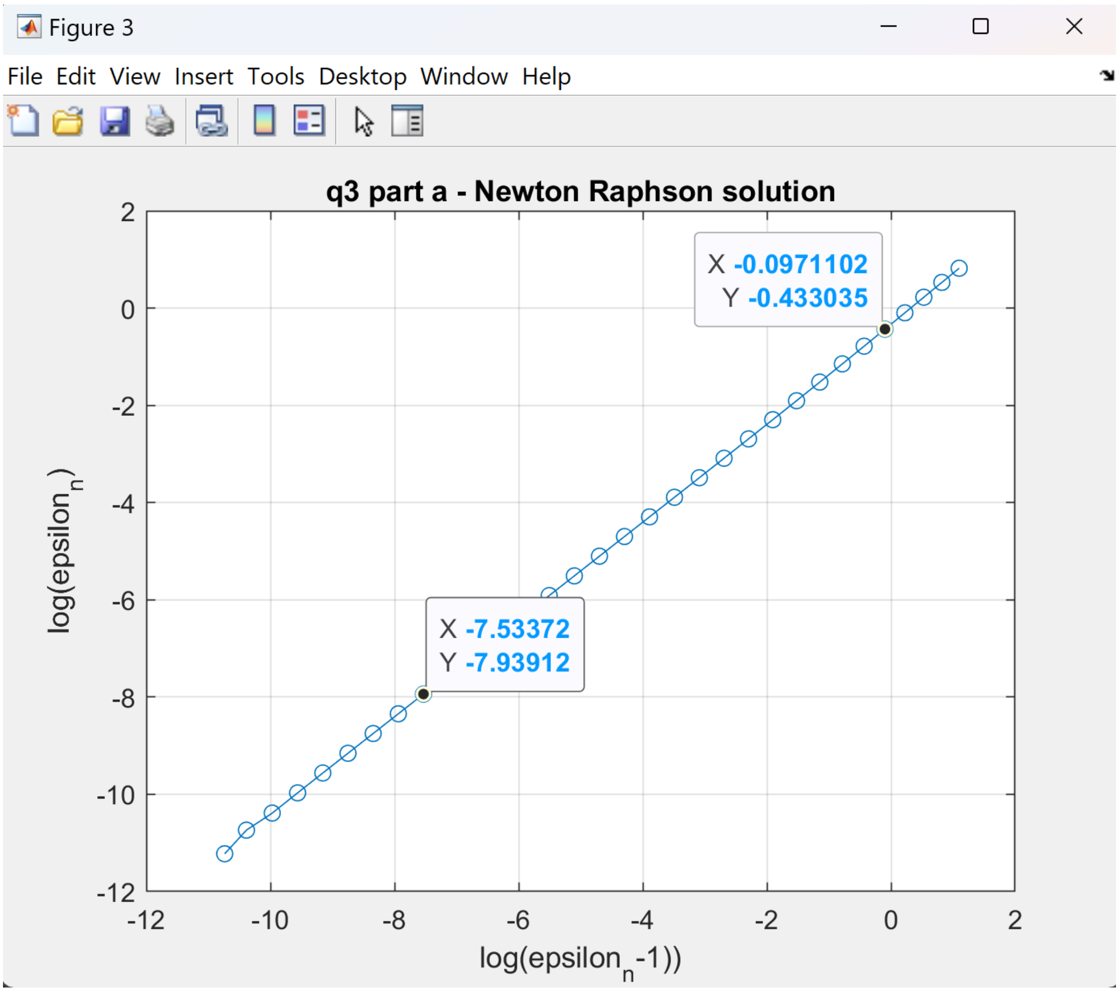
נציג את גרף הפונקציה $\log(\epsilon_n)$ כפונקציה של $\log(\epsilon_{n-1})$ (ϵ_n הוא השגיאה היחסית בין x באיטרציה ה-n-ית לבין השורש).

כפי שנלמד בכיתה, מהגרף שקיבלנו נוכל להסיק את סדר ההתכנסות וקבוע ההתכנסות.

הגרף שקיבלנו:



יחד עם הנקודות על הגרף נחשב את קבוע ההתכנסות וסדר ההתכנסות:



$$\eta = m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \frac{-7.93912 + 0.433035}{-7.53372 + 0.0971102} = 1.00934 \approx 1$$

$$log(A) = |y - mx| = |-7.93912 + 1.00934 \cdot 7.53372| = 0.335$$

לכן נקבל את A:

$$A = 1.39796$$

ניתן לראות מהגרף כי השיפוע שואף ל-1, מה שתואם את הנלמד בכיתה שכאשר ריבוי השורש גדול מ-1 נקבל שיפוע לינארי.

לפי התיאוריה:

$$A = q - \frac{1}{q} = 2 - 0.5 = 1.5$$

מה שקרוב לקבוע ההתכנסות שקיבלנו.

<u>סעיף ב'</u>

בסעיף זה בדומה לסעיף א' נמצא פתרון למשוואה המבוקשת, אך הפעם לפי נוסחת ניוטון-רפסון המואצת לריבוי לא ידוע. בשיטת זו מגדירים פונקציה u(x):

$$\boldsymbol{u(x) = \frac{f(x)}{f'(x)}}$$

לפונקציה זו יש את אותם השורשים אך עם ריבוי יחיד ונבצע עליה את האלגוריתם שראינו בכיתה.

נגזור את u ונקבל:

$$\boldsymbol{u'(x) = 1 - \frac{f(x) * f''(x)}{\left(f'(x)\right)^2}}$$

כעת נריץ את צעד האיטרציה שהוא:

$$\boldsymbol{x_{n+1} = x_n - \frac{u(x)}{u'(x)}}$$

להלן התוצאות שקיבלנו:

הטבלה המציגה את:

- ערכי $\boldsymbol{x_n}$
- ההפרש בין זוג ניחושים עוקבים $\boldsymbol{|x_n - x_{n-1}|}$
- השגיאה ביחס לפתרון המדויק $\boldsymbol{|x_n - s|}$

Table3_B

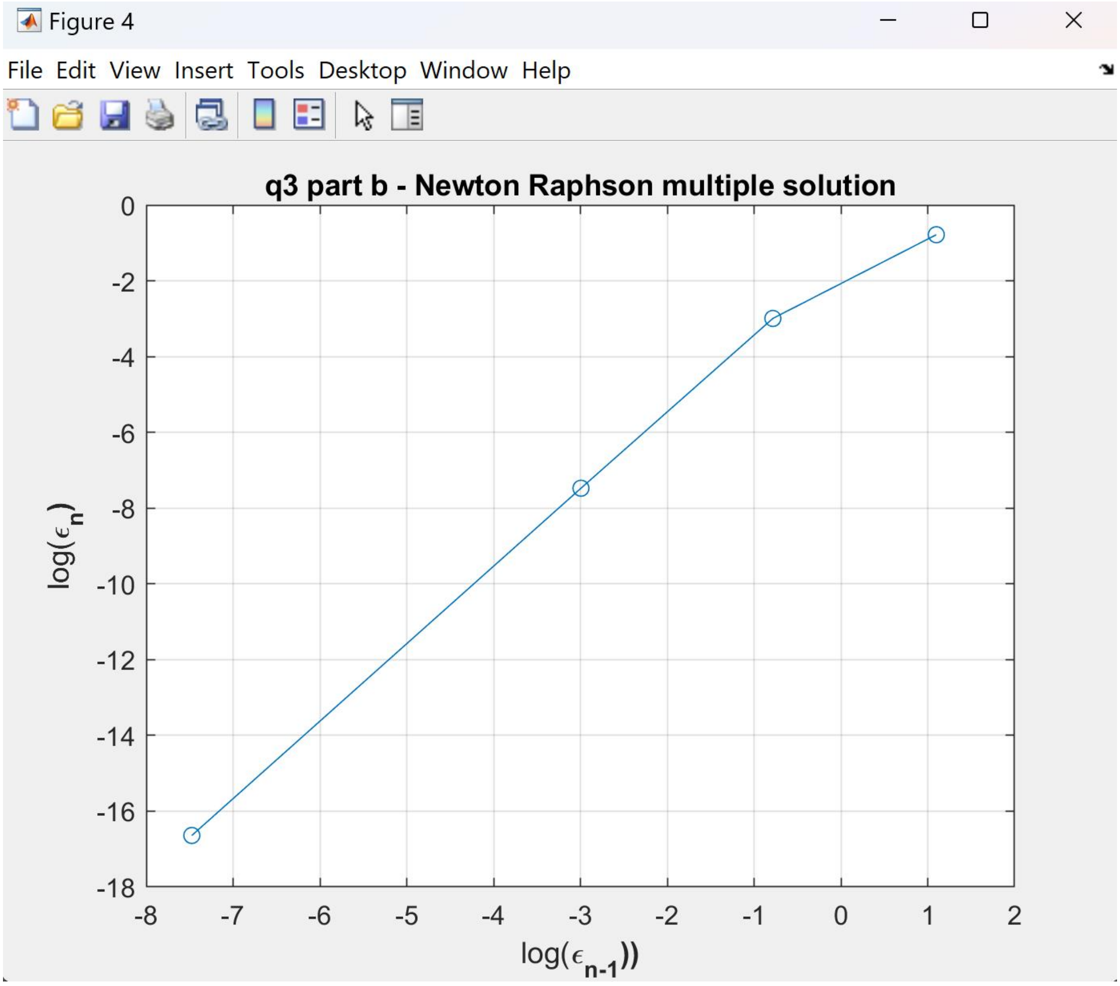
5x4 table

	1 n	2 X_n	3 difference	4 error_list_2
1	1	5	3.4567	3
2	2	1.5433	0.4066	0.4567
3	3	1.9499	0.0495	0.0501
4	4	1.9994	5.6694e-04	5.6700e-04
5	5	2.0000	1.9979e-08	5.9275e-08

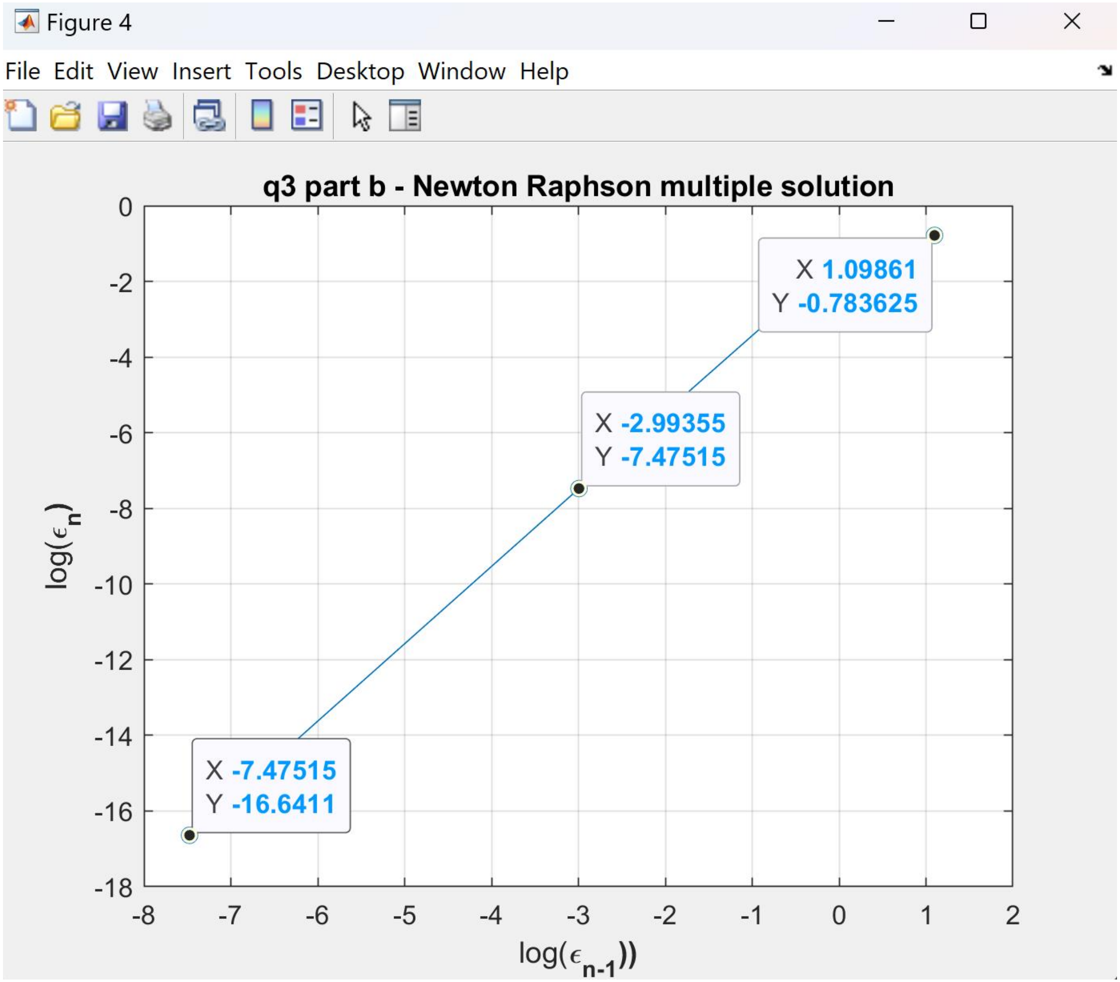
ניתן לראות מהטבלה כי על מנת לקבל התכנסות הנדרשת לפתרון המשוואה היינו צריכים לבצע 5 איטרציות. מכך שההתכנסות הפעם הייתה מהירה יותר, ניתן להבין כי היה ריבוי מסוים של השורש.

להלן גרף הפונקציה $\log(\epsilon_n)$ כפונקציה של $\log(\epsilon_{n-1})$ (ϵ_n הוא השגיאה היחסית בין x באיטרציה ה-n-ית לבין השורש).

כפי שנלמד בכיתה, מהגרף שקיבלנו נוכל להסיק את סדר ההתכנסות וקבוע ההתכנסות.



הגרף עם הנקודות:



נחלץ את קבוע ההתכנסות ואת סדר ההתכנסות מגרף הפונקציה:
נשים לב כי נצפה לקבל סדר התכנסות מסדר שני כפי שלמדנו בכיתה כיוון שיש ריבוי גדול מ-1 לשורש ומשתמשים בשיטת ניוטון רפסון המואצת.

$$\eta = m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \frac{-16.6411 + 7.47515}{-7.47515 + 2.99355} = 2.04524 \approx 2$$

$$log(A) = |y - mx| = |-16.6411 + 2.04524 \cdot 7.47515| = 1.3526$$

לכן נקבל את A:

$$A = 3.8675$$

אכן קיבלנו שיפוע 2 בקירוב כפי שציפינו. נוכל להסביר זאת ע"י כך שבכך שהשתמשנו בפונקציה u(x) המבטלת את התאפסות הנגזרת הראשונה והשנייה, נצפה לקבל התכנסות עבור שורש מריבוי 1 בשיטת ניוטון רפסון הרגילה כמו בשאלה 1.

נשים לב כי קבוע ההתכנסות תואם את התיאוריה שלמדנו בכיתה לפיה:

$$A = \frac{1}{q}\left|\frac{G'(x_n)}{G(x_n)}\right|$$

<u>סעיף ג'</u>

בסעיף זה נחשב את הריבוי האמיתי q:

נשתמש בקשר הבא: $\boldsymbol{lim_{x\to s}\frac{u(x)}{x-s} = \frac{1}{q}}$.

$$\boldsymbol{lim_{x\to s}\frac{u(x)}{x-s} = lim_{x\to s}\frac{\frac{(x-2)(x^2+2)}{5x^2-4x+6}}{x-2} = lim_{x\to 2}\frac{x^2+2}{5x^2-4x+6} = \frac{1}{3} = \frac{1}{q}}$$

לכן קיבלנו $q=3$.

כעת ניגש לחישוב השורש של המשוואה ע"י הצבה בנוסחה משאלה 1 עם ריבוי $q=3$.

צעד האיטרציה עכשיו:

$$\boldsymbol{x_{n+1} = x_n - q\frac{f(x_n)}{f'(x_n)}}$$

להלן הקוד שכתבנו עבור סעיף זה:

```
function [X_n,error_list,Xn_minus_xn_minus_one_list] = Newton_Raphson_q3_part_c(x0,mul,tollerence,s)
    iter = 2; %Number of iterations.
    error_list = zeros; %initialization
    Xn_minus_xn_minus_one_list = zeros;%initialization
    X_n(1) = x0;
    X_n(2) = x0 - mul*u(x0);
    difference = abs(X_n(iter)-X_n(iter-1)); %|X_n - X_(n-1)|
    Xn_minus_xn_minus_one_list(1) = difference;
    error_list(1) = abs(X_n(1) - s);
    while (abs(X_n(iter)-X_n(iter-1))>tollerence) && (abs(X_n(iter)-s)<(abs(X_n(iter-1)-s))) % condition for converging
        X_n(iter+1) = X_n(iter) - mul*u(X_n(iter));
        error_list(iter) = abs(X_n(iter) - s);  % |X_n -s|
        iter = iter+1;
        difference = abs(X_n(iter)-X_n(iter-1));
        Xn_minus_xn_minus_one_list(iter-1) = difference;
    end
end
```

התוצאות שקיבלנו עבור -

- ערכי x_n
- ההפרש בין זוג ניחושים עוקבים $|x_n - x_{n-1}|$
- השגיאה ביחס לפתרון המדויק $|x_n - s|$

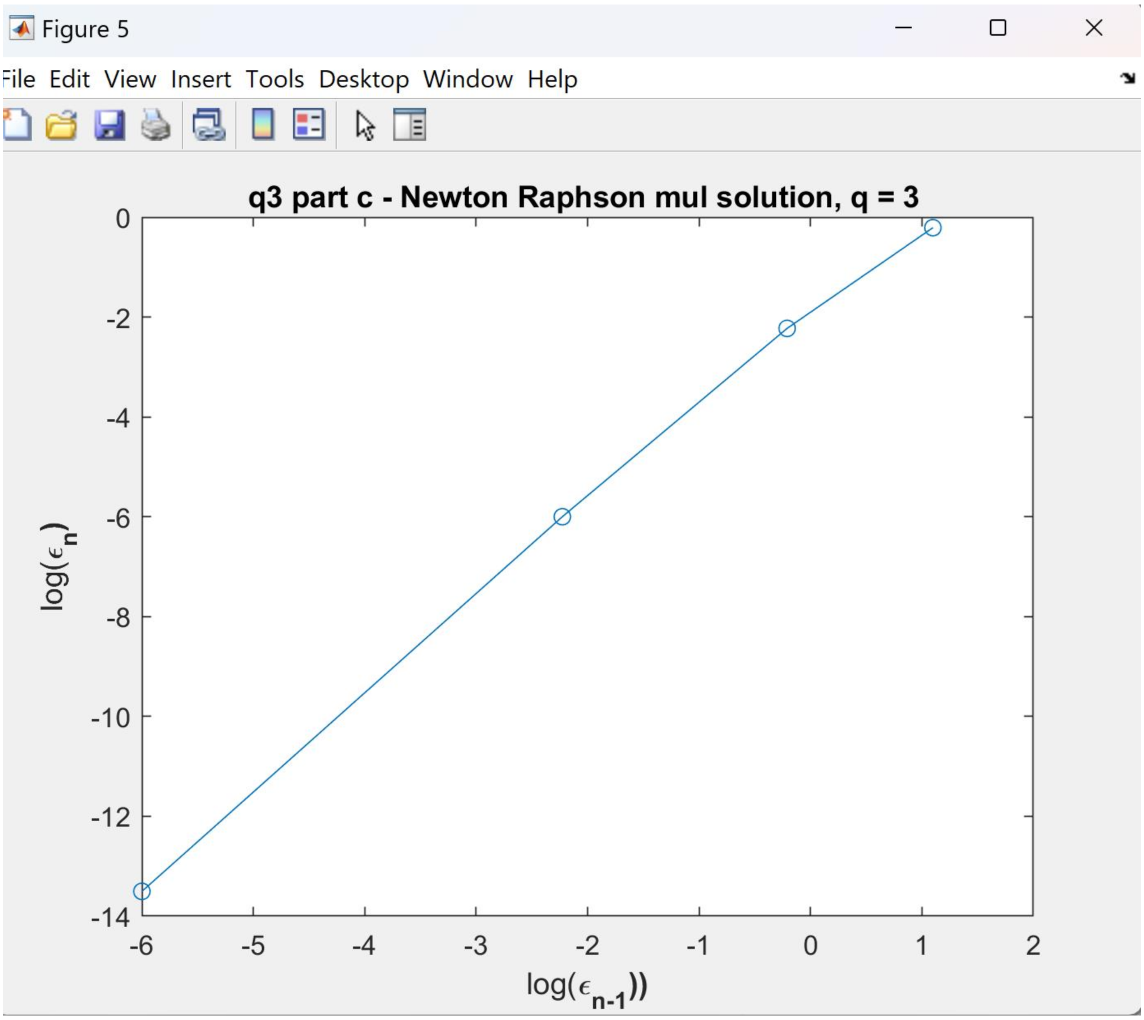
מוצגות בטבלה הבאה:

Table3_C

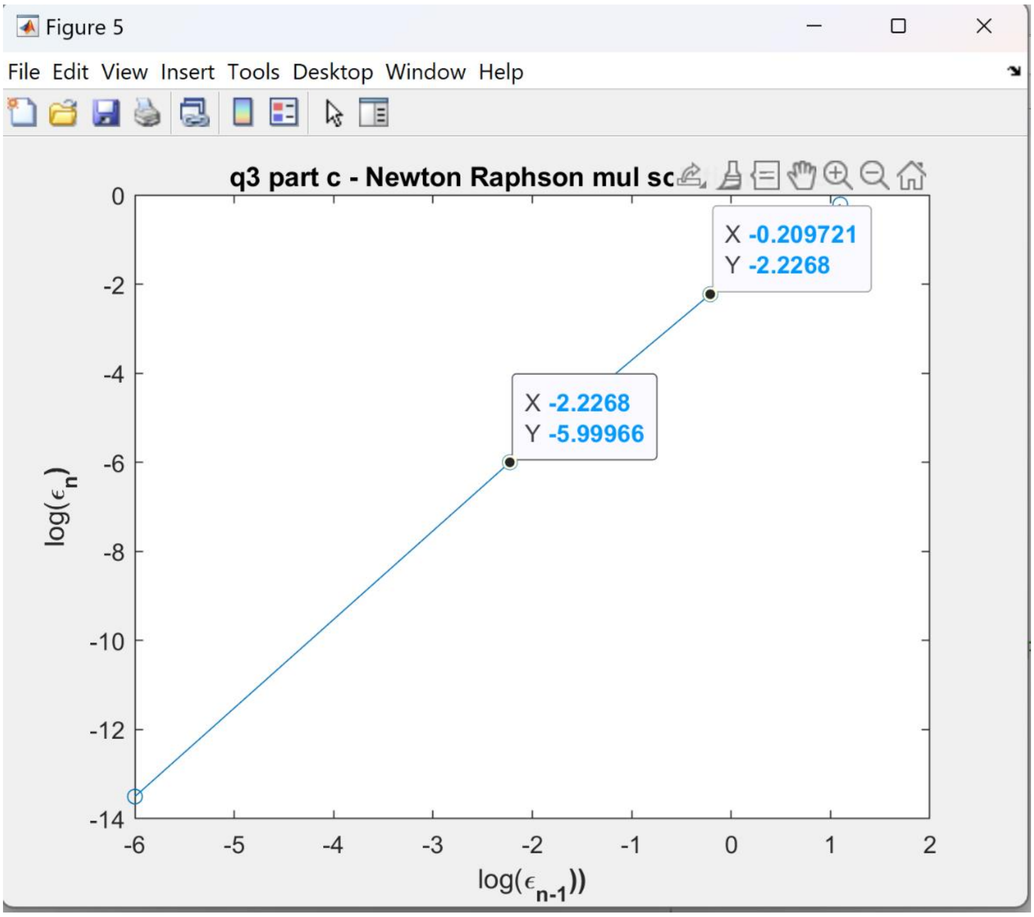
5x4 table

	1 n	2 X_n	3 difference	4 Error_n
1	1	5	2.1892	3
2	2	2.8108	0.7029	0.8108
3	3	2.1079	0.1054	0.1079
4	4	2.0025	0.0025	0.0025
5	5	2.0000	0.0013	1.3652e-06

להלן גרף הפונקציה $\log(\epsilon_n)$ כפונקציה של $\log(\epsilon_{n-1})$ (ϵ_n הוא השגיאה היחסית בין x באיטרציה ה-n-ית לבין השורש).



כמו בסעיפים הקודמים, נחלץ מהגרף את קבוע ההתכנסות ואת מקדם ההתכנסות.



$$\boldsymbol{\eta = m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \frac{-5.99966 + 2.2268}{-2.2268 + 0.209721} = 1.8704 \approx 2}$$

$$\boldsymbol{log(A) = y - mx = -5.99966 + 1.8704 \cdot 2.2268 = -1.834}$$

לכן נקבל את A:

$$\boldsymbol{A = 0.1596}$$

גם בסעיף זה ניתן לראות שקיבלנו שיפוע קרוב ל-2 כמצופה משיטת ניוטון-רפסון המוכללת. בנוסף, גם כאן ניתן לראות שקבוע ההתכנסות תואם את התיאוריה.

$$A = \frac{1}{q}\left|\frac{G'(x_n)}{G(x_n)}\right|$$

שאלה 4

בשאלה זו עלינו להשתמש בשיטת נקודת השבת על מנת למצוא את השורש של הפונקציה:

$$\boldsymbol{f(x) = x - 2\sin(x)}$$

<u>סעיף א'</u>

לשימוש בשיטת נקודת השבת בסעיף זה נבחר את הפונקציה:

$$\boldsymbol{g(x) = 2\sin(x)}$$

ובנוסף נתון לנו תנאי ההתחלה:

$$\boldsymbol{x_0 = \frac{\pi}{2}}$$

הפונקציה עבור סעיף זה:

```
function [X_n_A,error_list_A,Xn_minus_xn_minus_one_list_A] = Fixed_Point_q4_part_A(x0,tollerence,s)%part a
    iter = 2;
    error_list_A = zeros;
    Xn_minus_xn_minus_one_list_A = zeros;
    X_n_A(1) = x0;
    X_n_A(2) = g_A(X_n_A(1));
    while abs(X_n_A(iter) - X_n_A(iter-1)) >= tollerence
        X_n_A(iter+1) = g_A(X_n_A(iter));
        error_list_A(iter) = abs(X_n_A(iter) - s);
        iter=iter+1;
        difference = abs(X_n_A(iter)-X_n_A(iter-1));
        Xn_minus_xn_minus_one_list_A(iter-1) = difference;
    end
end
```

שוב, נציג את הטבלה המתארת את:

- ערכי $\boldsymbol{x_n}$
- ההפרש בין זוג ניחושים עוקבים $\boldsymbol{|x_n - x_{n-1}|}$
- השגיאה ביחס לפתרון המדויק $\boldsymbol{|x_n - s|}$

T4_A

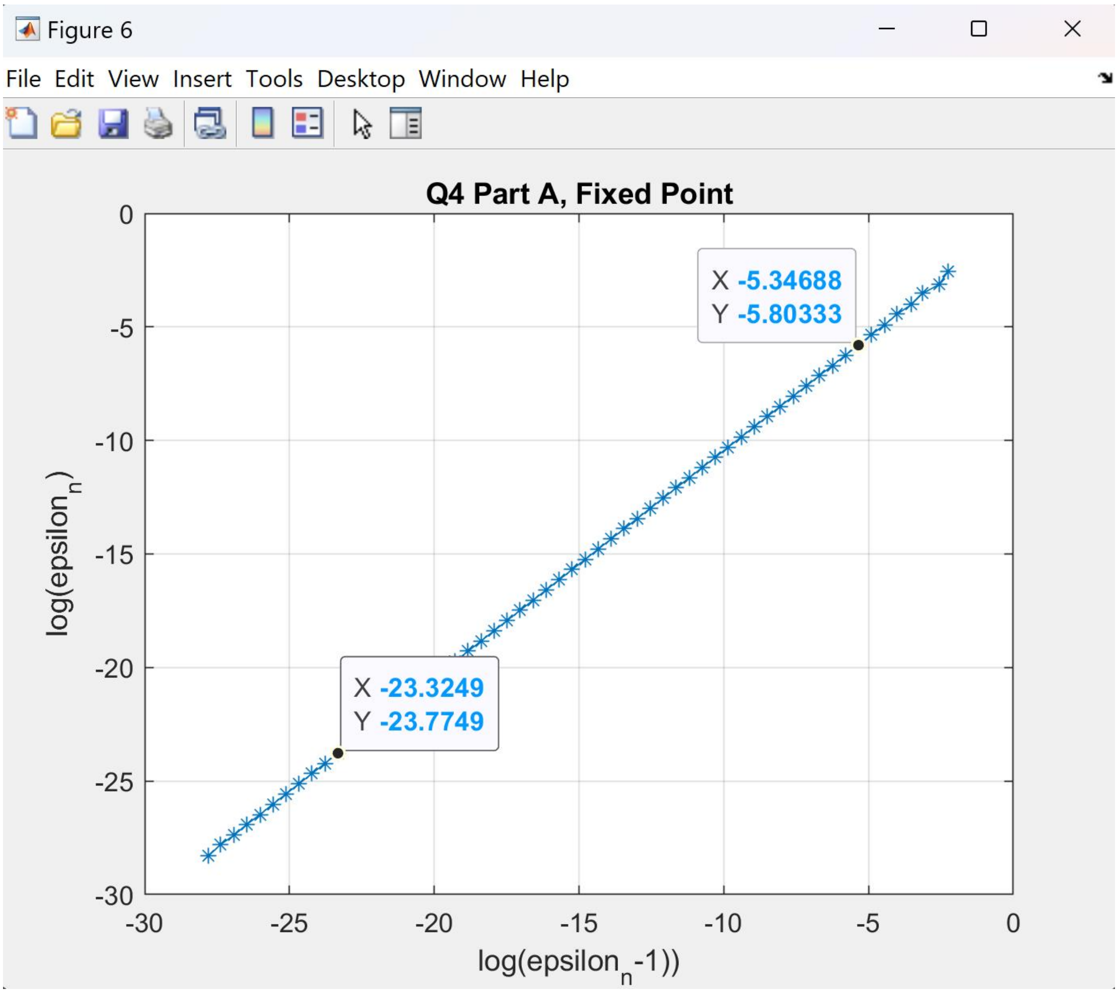
60x4 table

	1 n	2 X_n	3 difference	4 Err
1	1	1.5708	0	0
2	2	2	0.1814	0.1045
3	3	1.8186	0.1203	0.0769
4	4	1.9389	0.0729	0.0434
5	5	1.8660	0.0475	0.0295
6	6	1.9135	0.0298	0.0180
7	7	1.8837	0.0192	0.0118
8	8	1.9029	0.0121	0.0074
9	9	1.8907	0.0078	0.0048
10	10	1.8985	0.0050	0.0030
11	11	1.8936	0.0032	0.0019
12	12	1.8967	0.0020	0.0012
13	13	1.8947	0.0013	7.8647e-04
14	14	1.8960	8.2126e-04	5.0122e-04
15	15	1.8952	5.2414e-04	3.2004e-04
16	16	1.8957	3.3437e-04	2.0410e-04
17	17	1.8954	2.1337e-04	1.3027e-04
18	18	1.8956	1.3613e-04	8.3099e-05
19	19	1.8954	8.6859e-05	5.3028e-05
20	20	1.8955	5.5418e-05	3.3831e-05
21	21	1.8955	3.5360e-05	2.1587e-05
22	22	1.8955	2.2561e-05	1.3773e-05
23	23	1.8955	1.4395e-05	8.7880e-06
24	24	1.8955	9.1847e-06	5.6071e-06
25	25	1.8955	5.8603e-06	3.5776e-06
26	26	1.8955	3.7391e-06	2.2827e-06
27	27	1.8955	2.3857e-06	1.4564e-06
28	28	1.8955	1.5222e-06	9.2927e-07
29	29	1.8955	9.7123e-07	5.9292e-07
30	30	1.8955	6.1969e-07	3.7831e-07
31	31	1.8955	3.9539e-07	2.4138e-07
32	32	1.8955	2.5228e-07	1.5401e-07
33	33	1.8955	1.6096e-07	9.8266e-08
34	34	1.8955	1.0270e-07	6.2698e-08
35	35	1.8955	6.5528e-08	4.0004e-08
36	36	1.8955	4.1810e-08	2.5524e-08
37	37	1.8955	2.6677e-08	1.6286e-08
38	38	1.8955	1.7021e-08	1.0391e-08
39	39	1.8955	1.0860e-08	6.6300e-09
40	40	1.8955	6.9293e-09	4.2302e-09
41	41	1.8955	4.4212e-09	2.6991e-09
42	42	1.8955	2.8209e-09	1.7221e-09
43	43	1.8955	1.7999e-09	1.0988e-09
44	44	1.8955	1.1484e-09	7.0106e-10
45	45	1.8955	7.3273e-10	4.4734e-10

46	46	1.8955	4.6751e-10	2.8539e-10
47	47	1.8955	2.9830e-10	1.8212e-10
48	48	1.8955	1.9033e-10	1.1617e-10
49	49	1.8955	1.2144e-10	7.4154e-11
50	50	1.8955	7.7482e-11	4.7282e-11
51	51	1.8955	4.9437e-11	3.0200e-11
52	52	1.8955	3.1543e-11	1.9238e-11
53	53	1.8955	2.0126e-11	1.2306e-11
54	54	1.8955	1.2842e-11	7.8204e-12
55	55	1.8955	8.1934e-12	5.0211e-12
56	56	1.8955	5.2278e-12	3.1724e-12
57	57	1.8955	3.3358e-12	2.0555e-12
58	58	1.8955	2.1285e-12	1.2803e-12
59	59	1.8955	1.3582e-12	8.4821e-13
60	60	1.8955	8.6664e-13	5.1004e-13

נראה כי קיבלנו שהיה צריך 60 איטרציות על מנת להגיע להתכנסות לשורש.

גרף הפונקציה $\log(\epsilon_n)$ כפונקציה של $\log(\epsilon_{n-1})$ $\boldsymbol{\epsilon}$_n) הוא השגיאה היחסית בין x באיטרציה ה-n-ית לבין השורש):



נחלץ מהגרף בדומה לסעיפים הקודמים את סדר ההתכנסות ואת קבוע ההתכנסות:

$$\eta = m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \frac{-23.7749 + 5.80333}{-23.3249 + 5.34688} = 0.9996 \approx 1$$

$$log(A) = y - mx = -23.7749 + 0.9996 \cdot 23.3249 = -0.45836$$

לכן נקבל את A:

$$A = 0.6323$$

השיפוע שקיבלנו הוא בקירוב 1, כלומר קיבלנו התכנסות לינארית, כמו שציפינו משיטת נקודת השבת אשר סדר ההתכנסות שלה תלוי בהתאפסות הנגזרות של הפונקציה.
סדר ההתכנסות בשיטת נקודת השבת הוא כסדר הנגזרת הראשונה שלא מתאפסת:

$$g'(x) = 2\cos(x) = 2\cos(1.895) \neq 0$$

כפי שניתן לראות הנגזרת הראשונה לא מתאפסת ולכן נצפה לקבל התכנסות לינארית (כמו שקיבלנו).
בנוסף קיבלנו קבוע ההתכנסות אשר תואם את החישוב התיאורטי שלו מהכיתה:

$$A = |g'(s)| = |2\cos(1.895)| = 0.637$$

הערה: הנקודה שהצבנו

$$S = 1.895$$

היא השורש של הפונקציה:

$$f(x) = x - 2\sin(x)$$

סעיף ב'

בסעיף זה נפתור את המשוואה בדומה לשאלה 1 בשיטת ניוטון-רפסון.

להלן הפונקציה שבה השתמשנו עבור סעיף זה:

```
function [X_n,error_list,Xn_minus_xn_minus_one_list] = Newton_Raphson_q4(x0,tollerence,s) %part b
    X_n = zeros;%initialization
    error_list = zeros; %initialization
    Xn_minus_xn_minus_one_list = zeros; %initialization
    X_n(1) = x0;
    X_n(2) = x0 - h_q4(x0);
    iter = 2;
    difference = abs(X_n(iter)-X_n(iter-1)); %|xn-xn-1|
    Xn_minus_xn_minus_one_list(1) = difference;
    error_list(1) = abs(X_n(1) - s); %|xn - s|
    while difference >= tollerence    %10^-12
        X_n(iter+1) = X_n(iter) - h_q4(X_n(iter)); %formula
        error_list(iter) = abs(X_n(iter) - s);
        iter=iter+1;
        difference = abs(X_n(iter)-X_n(iter-1));
        Xn_minus_xn_minus_one_list(iter-1) = difference;
    end
end
```

גם כאן, נציג את הטבלה המתארת את:

- ערכי x_n
- ההפרש בין זוג ניחושים עוקבים $|x_n - x_{n-1}|$
- השגיאה ביחס לפתרון המדויק $|x_n - s|$

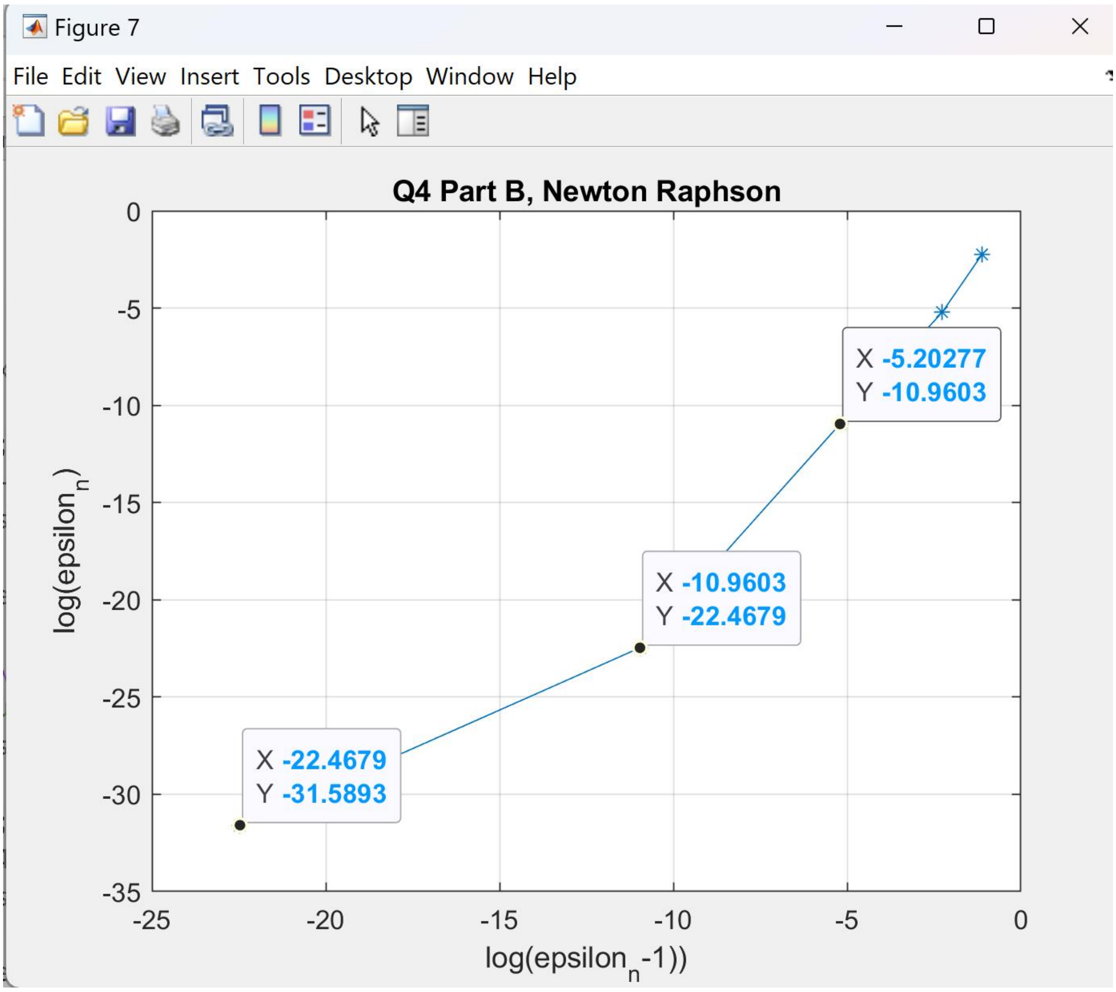
T4_B

6x4 table

	1 n	2 X_n	3 difference	4 Err
1	1	1.5708	0.4292	0.3247
2	2	2	0.0990	0.1045
3	3	1.9010	0.0055	0.0055
4	4	1.8955	1.7378e-05	1.7378e-05
5	5	1.8955	1.7473e-10	1.7471e-10
6	6	1.8955	0	1.9096e-14

אנו רואים כי קיבלנו התכנסות מהירה יחסית (6 איטרציות בלבד). זה צפוי מהסיבה שהפעלנו את ניוטון רפסון על שורש מריבוי 1 (נצפה להתכנסות ריבועית).

הגרף שקיבלנו בסעיף זה:



נחלץ מהגרף את קבוע ההתכנסות ואת סדר ההתכנסות:

$$\eta = m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \frac{-22.4679 + 10.9603}{-10.9603 + 5.20277} = 1.984 \approx 2$$

$$log(A) = y - mx = -22.4679 + 1.984 \cdot 10.9603 = -0.723$$

לכן נקבל את A:

$$A = 0.485$$

אכן קיבלנו התכנסות ריבועית כצפוי. בנוסף תוצאותינו אכן מתאימות לחישובים התיאורטיים. עבור קבוע ההתכנסות:

$$\boldsymbol{A = \frac{1}{2}\left|\frac{f''(s)}{f'(s)}\right| = 0.579}$$

מסעיפים א' ו-ב' קיבלנו כי ההתכנסות בשיטת ניוטון-רפסון מהירה משמעותית יותר משיטת נקודת השבת (60 איטרציות לעומת 6 איטרציות בלבד!).

<u>סעיף ג'</u>

בשאלה זו נשאלנו האם ניתן להשתמש ב-*g(x)* מסעיף א' על מנת למצוא שורשים נוספים של *f(x)*.

נשים לב כי הפונקציות *f* ו-*g* הן אי-זוגיות ולכן אם יש שורש חיובי כלשהו אז גם המינוס שלו הוא שורש באופן סימטרי. נשים לב כי אם קיבלנו ש-*s1=1.895494* הוא השורש של הפונקציה בסעיף הקודם, אזי גם *s2=-1.895494* הוא שורש של הפונקציה. יתר על כן, קל לראות כי *s3=0* מאפס את *f* ו-*g* ולכן הוא שורש שלישי.

כעת נשים לב למספר הבחנות:

- כפי שראינו בסעיף הקודם, היה נתון תנאי התחלה $\boldsymbol{x_0 = \frac{\pi}{2}}$, והתכנסנו לשורש *s1*
- משיקולי סימטריה, נסיק כי עבור תנאי התחלה נגדי $\boldsymbol{x_o = -\frac{\pi}{2}}$, נתכנס לערך הנגדי של שורש *s1*, כלומר ל-*s2*.
- התנאי ההכרחי להתכנסות בנקודת השבת לפתרונות *s2,s3* מתקיים:

$$\boldsymbol{|g'(x_0)| = |2\cos(x_0)| = |2\cos(\pm\frac{\pi}{2})| = 0 < 1}$$

$$\boldsymbol{\left|g'\left(x_0 \pm s_{2,3}\right)\right| = |2\cos(\pm s_{2,3})| = |2\cos(\pm 1.895)| = 0.638 < 1}$$

- עבור *s3=0* נראה כי התנאי לא מתקיים ולכן לא ניתן להשתמש ב-*g(x)*:

$$\boldsymbol{|g'(s = 0)| = |2cos(0)| = 2 > 1}$$

כלומר, לא נתכנס לשורש *s3* מכל תנאי התחלה שהוא.

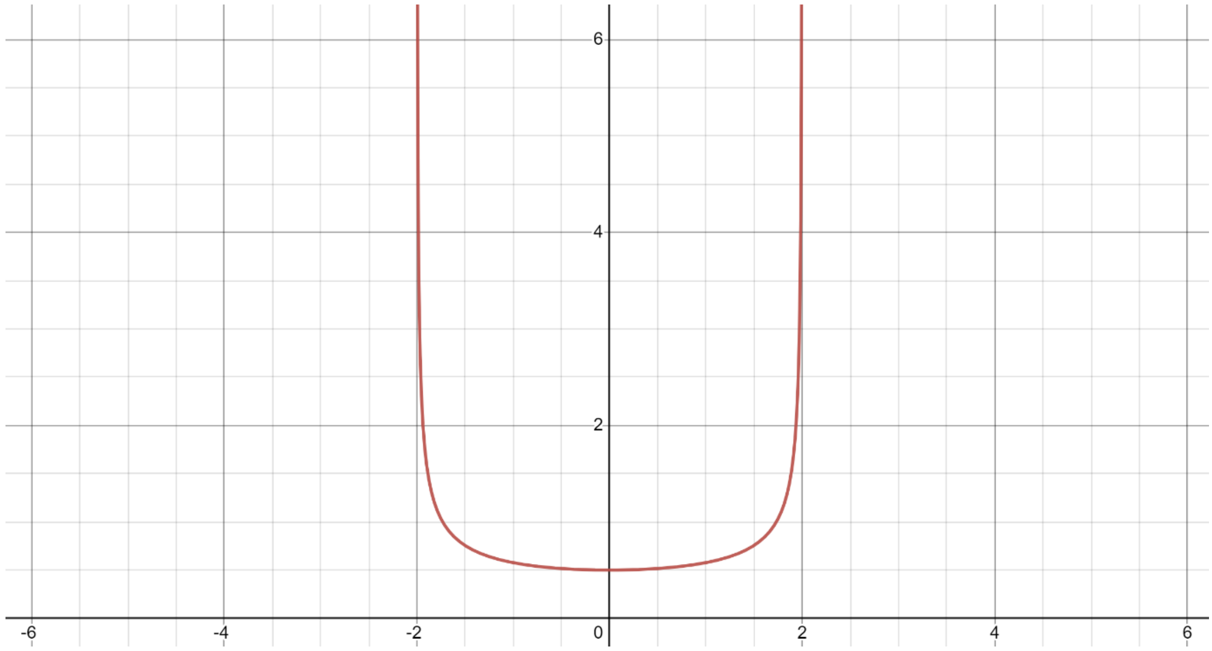
סעיף ד'

סעיף זה התבקשנו להתכנס לשורש *s=0* כאשר $g(x) = \sin^{-1}\frac{x}{2}$. כעת נבדוק מהו טווח הערכים שבו x_0 יכול להימצא. לאחר מכן נחזור על סעיף א'.

כעת נבדוק את תנאי ההתכנסות:

נבדוק מתי $|g'(x)| < 1$. ניעזר בשרטוט של *g'(x)*:

$$g'(x) = \frac{1}{\sqrt{4-x^2}}$$



נבחר תנאי התחלה $x_0 = 1$ (בנקודה זו השיפוע קטן מ-1 ולכן נתכנס לערך הרצוי).

הערה – עבור *x* טווח הערכים הוא: $(-\sqrt{3},\sqrt{3})$ התנאי יתקיים ולכן נקבל התכנסות בתנאי ההתחלה שבחרנו.

$$|g'(x)| = \left|\frac{1}{2\sqrt{1-\frac{x^2}{4}}}\right| = \frac{1}{2\sqrt{1-\frac{x^2}{4}}} = 1$$

$$x = \sqrt{3} = 1.732$$

לסיום, נחזור על סעיף א' עבור *s3=0* עם תנאי ההתחלה שבחנו ועם הפונקציה הנתונה בסעיף זה.

$$x_{n+1} = g(x_n) = \sin^{-1}\left(\frac{x_n}{2}\right)$$

הפונקציה בה השתמשנו בסעיף זה:

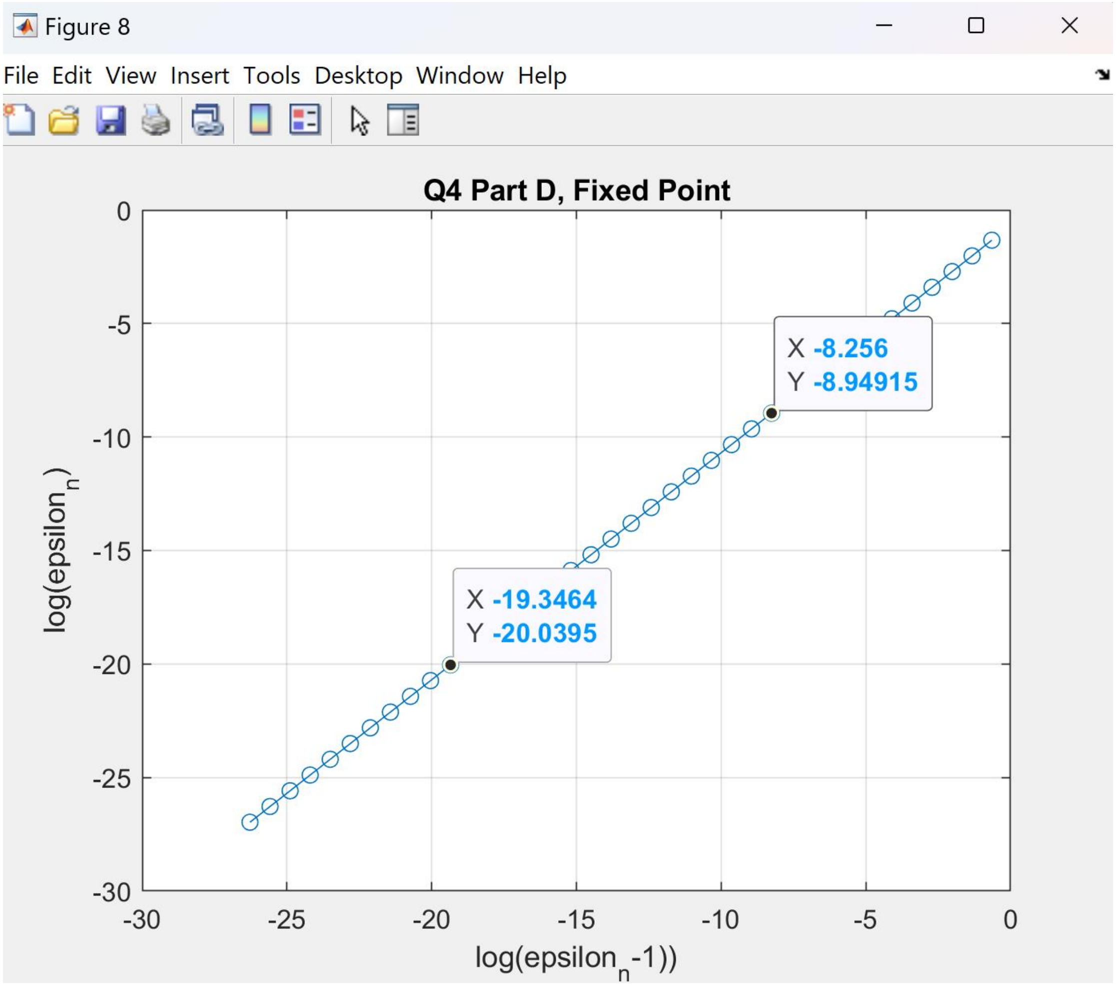
```
function [X_n_D,error_list_D,Xn_minus_xn_minus_one_list_D] = Fixed_Point_q4_part_D(x0,tollerence,s) %part d
    iter = 2;
    error_list_D = zeros;
    Xn_minus_xn_minus_one_list_D = zeros;
    X_n_D(1) = x0;
    X_n_D(2) = g_D(X_n_D(1));
    while abs(X_n_D(iter) - X_n_D(iter-1)) >= tollerence
        X_n_D(iter+1) = g_D(X_n_D(iter));
        error_list_D(iter) = abs(X_n_D(iter) - s);
        iter=iter+1;
        Xn_Diff = abs(X_n_D(iter)-X_n_D(iter-1));
        Xn_minus_xn_minus_one_list_D(iter-1) = Xn_Diff;
    end
end
```

נריץ את האלגוריתם עבור תנאי ההתחלה $x_0 = 1$ ונציג את התוצאות בטבלה הבאה:

T4_D

39x4 table

	1 n	2 X_n	3 X_n_Diff	4 Error_n
1	1	0.5000	0	0
2	2	0.2527	0.1260	0.2527
3	3	0.1267	0.0633	0.1267
4	4	0.0634	0.0317	0.0634
5	5	0.0317	0.0158	0.0317
6	6	0.0158	0.0079	0.0158
7	7	0.0079	0.0040	0.0079
8	8	0.0040	0.0020	0.0040
9	9	0.0020	9.9056e-04	0.0020
10	10	9.9056e-04	4.9528e-04	9.9056e-04
11	11	4.9528e-04	2.4764e-04	4.9528e-04
12	12	2.4764e-04	1.2382e-04	2.4764e-04
13	13	1.2382e-04	6.1910e-05	1.2382e-04
14	14	6.1910e-05	3.0955e-05	6.1910e-05
15	15	3.0955e-05	1.5478e-05	3.0955e-05
16	16	1.5478e-05	7.7388e-06	1.5478e-05
17	17	7.7388e-06	3.8694e-06	7.7388e-06
18	18	3.8694e-06	1.9347e-06	3.8694e-06
19	19	1.9347e-06	9.6734e-07	1.9347e-06
20	20	9.6734e-07	4.8367e-07	9.6734e-07
21	21	4.8367e-07	2.4184e-07	4.8367e-07
22	22	2.4184e-07	1.2092e-07	2.4184e-07
23	23	1.2092e-07	6.0459e-08	1.2092e-07
24	24	6.0459e-08	3.0230e-08	6.0459e-08
25	25	3.0230e-08	1.5115e-08	3.0230e-08
26	26	1.5115e-08	7.5574e-09	1.5115e-08
27	27	7.5574e-09	3.7787e-09	7.5574e-09
28	28	3.7787e-09	1.8893e-09	3.7787e-09
29	29	1.8893e-09	9.4467e-10	1.8893e-09
30	30	9.4467e-10	4.7234e-10	9.4467e-10
31	31	4.7234e-10	2.3617e-10	4.7234e-10
32	32	2.3617e-10	1.1808e-10	2.3617e-10
33	33	1.1808e-10	5.9042e-11	1.1808e-10
34	34	5.9042e-11	2.9521e-11	5.9042e-11
35	35	2.9521e-11	1.4761e-11	2.9521e-11
36	36	1.4761e-11	7.3803e-12	1.4761e-11
37	37	7.3803e-12	3.6901e-12	7.3803e-12
38	38	3.6901e-12	1.8451e-12	3.6901e-12
39	39	1.8451e-12	9.2253e-13	1.8451e-12



$$\eta = m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \frac{-20.0395 + 8.94915}{-19.3464 + 8.256} = 0.99999 \approx 1$$

$$log(A) = y - mx = -20.0395 + 0.99999 \cdot 8.94915 = -0.6931$$

לכן נקבל את A:

$$A = 0.4999$$

נשים לב כי התוצאות שקיבלנו תואמות באופן כמעט מדויק את התאוריה שלמדנו בכיתה: $g'(0) = \frac{1}{2}$.

השיפוע שקיבלנו הוא בקירוב 1 כמו שציפינו, ניתן לראות זאת כאשר נחשב את הנגזרת הראשונה של g בשורש ונשים לב שהיא לא מתאפסת ולכן ההתכנסות היא לינארית.