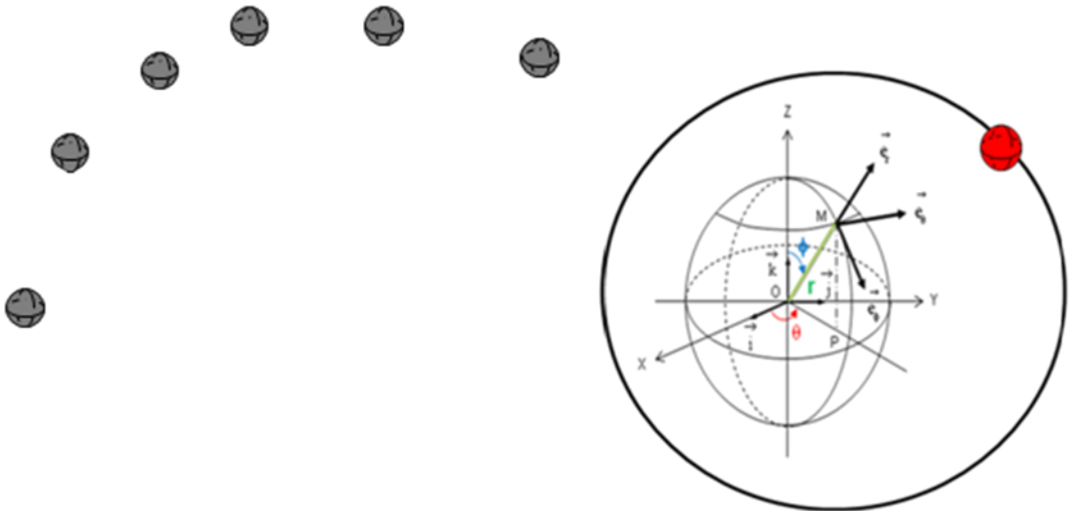
MINISTERE DE L'ENSEIGNEMENT SUPERIEUR ET DE LA RECHERCHE SCIENTIFIQUE

Université NANGUI ABROGOUA

UFR Sciences Fondamentales et Appliquées

Laboratoire de Physique Fondamentale et Appliquée

Cours de mécanique du point matériel



BOUO BELLA Djézia

Maître de Conférences

Edition 2019

AVANT-PROPOS …

… *aux apprenants*

La mécanique est l'étude des mouvements des corps soumis à des actions. L'étude des mouvements indépendamment des causes qui les provoquent, constitue la cinématique. La relation entre les actions et le mouvement est la dynamique. Le point matériel est un corps idéal qui a les dimensions, nulles, d'un point mathématique et une masse. La mécanique du point est donc l'étude du mouvement des points matériels. De nombreux savants (N. Copernic, T. Brahe, G. Galilée, R. Descartes, I. Newton, J.L. Lagrange, etc.) ont contribué au développement de cette science pendant plusieurs siècles.

La mécanique classique ou mécanique newtonienne constitue l'une des bases fondamentales de La Physique. Son enseignement est destiné aux étudiants de la première année de Licence (L1) des Universités et des Grandes Ecoles. L'apprentissage nécessite des prérequis tels que l'intégration et la dérivation des fonctions mathématiques usuelles, le calcul vectoriel, les notions sur les équations différentielles.

L'objectif général de cette discipline est de former les apprenants à acquérir les fondamentaux de la mécanique du point et à maîtriser les différentes méthodologies de résolution associées. Les objectifs spécifiques sont :

- connaître les hypothèses de la mécanique classique ;
- isoler un objet assimilable à un point matériel ;
- décrire le mouvement d'un point matériel dans différents systèmes de coordonnées ;
- comprendre et savoir calculer les accélérations d'un mobile pour une trajectoire quelconque ;
- écrire et analyser les actions extérieures s'exerçant sur un point matériel ;
- Comprendre et savoir utiliser le Principe Fondamental de la Dynamique (PFD) ;
- écrire et résoudre les équations de la dynamique régissant le mouvement d'un point matériel.

Dans un souci de clarté et désireux d'aider les apprenants à acquérir ces compétences, le présent fascicule est divisé en deux parties: un support du cours et un recueil d'exercices.

Le but visé est de soutenir les apprenants à progresser dans cette discipline par un travail personnel sérieux et efficace, complémentaire de l'enseignement dispensé par vos professeurs. A l'UFR-SFA de l'Université Nangui Abrogoua, la mécanique du point matériel est une Unité d'Enseignement (UE) qui comprend deux Eléments Constitutifs de l'Unité d'Enseignement (ECUE):
- ECUE 1: Cinématique du point matériel;
- ECUE 2: Dynamique du point matériel.

Le recueil d'exercices se rapporte aux chapitres du Cours, à savoir: Rappels et compléments de mathématiques, Dimension et analyse dimensionnelle, Cinématique du point matériel, Dynamique du point matériel, Travail et Energies, Gravitation et Oscillateurs harmoniques. Il contient des exercices d'application (Enoncés et corrigés) permettant d'acquérir les compétences telles que le choix d'un référentiel approprié pour l'étude d'un mouvement, la description de celui-ci par la détermination du vecteur-position, de la vitesse et de l'accélération, la détermination des rayons de courbure et de torsion de la trajectoire du mouvement, etc. Des anciens sujets d'examen sont également proposés pour préparer les examens.

Que cet ouvrage vous aide à progresser et contribue à votre réussite!
Bon courage et bon travail! Le succès est souvent à ce prix …

BOUO BELLA Djézia
Maître de Conférences

bouobella.sfa@univ-na.ci

SOMMAIRE

COURS DE MECANIQUE DU POINT MATERIEL

CHAPITRE 0 : RAPPELS ET COMPLEMENTS DE MATHEMATIQUES

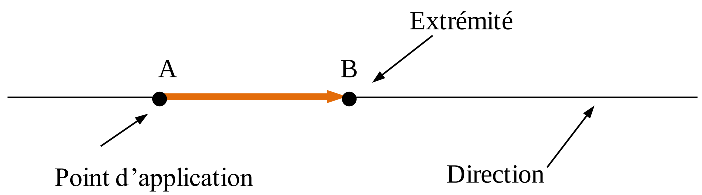
1. Opérations vectorielles

1.1 Définition d'un vecteur

Une grandeur vectorielle $\vec{AB}$ est définie par:

- son point d'application ou origine A ;
- sa direction : l'axe ou la droite (AB) qui porte le vecteur ;
- son sens : le sens de parcours de l'origine A à l'extrémité B ;
- son module ou norme: le nombre qui donne sa mesure.

$\vec{AB}$ peut être noté $\vec{V}$ ou $\vec{\gamma}$ etc.



1.2 Vecteurs équipollents

Deux vecteurs de supports parallèles, de même sens et de même norme sont des vecteurs **équipollents**.

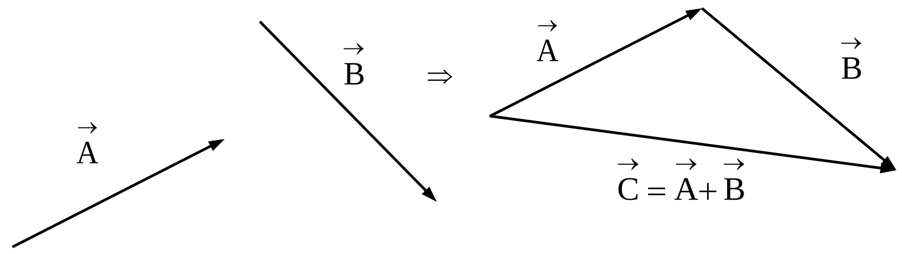
1.3 Vecteurs égaux, vecteurs opposés

Deux vecteurs $\vec{A}$ et $\vec{B}$ sont égaux si et seulement si ces deux vecteurs ont **même module**, **même direction** et **même sens**.

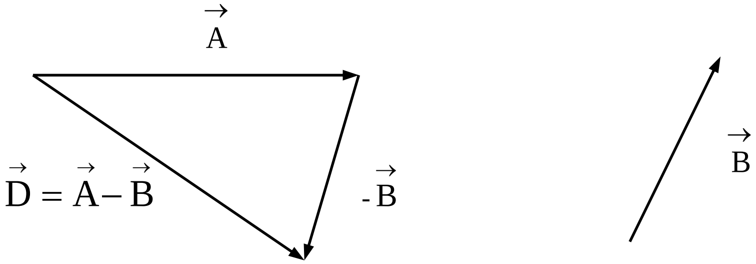
$\vec{A}$ et $\vec{B}$ sont opposés si et seulement si ces vecteurs ont **même module**, **même direction**, et de **sens opposé**: $\vec{A} = -\vec{B}$.

1.4 Somme et différence de vecteurs

La somme ou résultante de $\vec{A}$ et $\vec{B}$ est un vecteur $\vec{C}$ formé en plaçant l'origine de $\vec{B}$ à l'extrémité de $\vec{A}$ et en joignant l'origine de $\vec{A}$ à l'extrémité de $\vec{B}$.

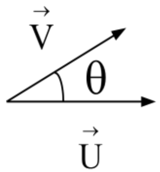


La différence de deux vecteurs $\vec{A}$ et $\vec{B}$ notée : $\vec{D} = \vec{A} - \vec{B}$ est telle que $\vec{D}$ ajouté à $\vec{B}$ donne $\vec{A}$: $\vec{D} + \vec{B} = \vec{A} - \vec{B} + \vec{B} = \vec{A}$.



1.5 Produit scalaire

1.5.1 Définition



On appelle produit scalaire de deux vecteurs $\vec{U}$ et $\vec{V}$, le nombre algébrique b=$||\vec{U}||\ ||\vec{V}||\cos\theta$, où θ est l'angle des deux vecteurs. On le note $\vec{U} \bullet \vec{V}$ (on lit $\vec{U}$ scalaire $\vec{V}$).

$$\boxed{b = \vec{U} \bullet \vec{V} = ||\vec{U}||\ ||\vec{V}||\ \cos\theta}$$

1.5.2 Propriétés

Soient $\vec{U}$, $\vec{V}$ et $\vec{W}$ des vecteurs et λ un réel, on a les propriétés suivantes :

$\vec{U} \bullet \vec{V} = \vec{V} \bullet \vec{U}$ (Commutativité).

$\vec{U} \bullet (\vec{V} + \vec{W}) = \vec{U} \bullet \vec{V} + \vec{U} \bullet \vec{W}$ (Loi de distributivité par rapport à l'addition).

$\lambda(\vec{U} \bullet \vec{V}) = (\lambda \vec{U}) \bullet \vec{V} = \vec{U} \bullet (\lambda \vec{V}) = (\vec{U} \bullet \vec{V})\lambda$

$||\vec{U}||\ \cos\theta$ = projection de $\vec{U}$ sur la direction de $\vec{V}$.

$||\vec{V}||\cos\theta$ = projection de $\vec{V}$ sur la direction de $\vec{U}$.

$\vec{U} \bullet \vec{V} = 0 \Rightarrow \vec{U} = \vec{0}$ ou $\vec{V} = \vec{0}$; si $\vec{U} \neq \vec{0}$ et $\vec{V} \neq \vec{0}$ alors $\vec{U} \perp \vec{V}$.

$\vec{U} \bullet \vec{U} = ||\vec{U}||\ ||\vec{U}|| = \|\vec{U}\|^2$.

$||\vec{U}|| = 1 \Rightarrow \vec{U}$ est un vecteur unitaire.

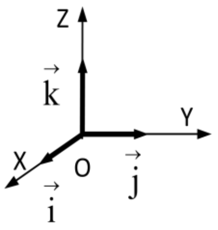
$\vec{U} \bullet \vec{V} > 0 \Rightarrow \cos\theta > 0 \Rightarrow \theta < \frac{\pi}{2}$.

$\vec{U} \bullet \vec{V} < 0 \Rightarrow \cos\theta < 0 \Rightarrow \frac{\pi}{2} < \theta < \pi$. (NB: θ est compris entre 0 et π)

1.5.3 Systèmes d'axes rectangulaires. Base orthonormée

(O, x, y, z) : systèmes d'axes perpendiculaires (axes deux à deux perpendiculaires).

$(\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$: base orthonormée (vecteurs unitaires deux à deux orthogonaux).



$\vec{i}$ est un vecteur unitaire de l'axe ox, $\vec{j}$ est un vecteur unitaire de l'axe oy et $\vec{k}$ est un vecteur unitaire de l'axe oz.

$$\vec{i} \bullet \vec{i} = \vec{j} \bullet \vec{j} = \vec{k} \bullet \vec{k} = 1; \quad \vec{i} \bullet \vec{j} = \vec{i} \bullet \vec{k} = \vec{k} \bullet \vec{j} = 0.$$

1.5.4 Expression analytique d'un produit scalaire

Soient $\vec{A} = A_1\vec{i} + A_2\vec{j} + A_3\vec{k}$ et $\vec{B} = B_1\vec{i} + B_2\vec{j} + B_3\vec{k}$ dans la base $(\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$.

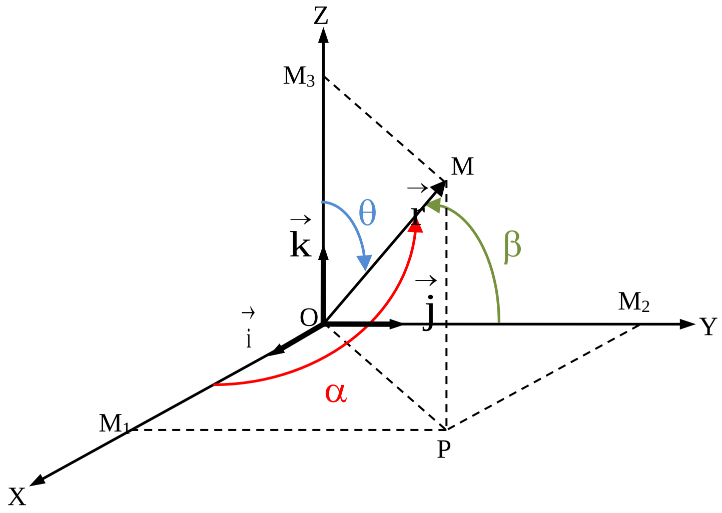
$$\|\vec{A}\| = \left[A_1^2 + A_2^2 + A_3^2\right]^{1/2} \quad \text{et} \quad \|\vec{B}\| = \left[B_1^2 + B_2^2 + B_3^2\right]^{1/2}$$

$$\vec{A} \bullet \vec{B} = (A_1\vec{i} + A_2\vec{j} + A_3\vec{k}) \bullet (B_1\vec{i} + B_2\vec{j} + B_3\vec{k})$$

$$\vec{A} \bullet \vec{B} = A_1B_1 + A_2B_2 + A_3B_3$$

$$\cos\theta = \frac{A_1B_1 + A_2B_2 + A_3B_3}{\left[A_1^2 + A_2^2 + A_3^2\right]^{1/2}\left[B_1^2 + B_2^2 + B_3^2\right]^{1/2}}$$

1.5.5 Cosinus directeurs d'un vecteur



Soient une base orthonormée $(\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ et un vecteur $\vec{r} = \vec{OM} = x\,\vec{i} + y\,\vec{j} + z\,\vec{k}$ où x, y et z sont les coordonnées du point M, et P la projection de M dans le plan (Oxy).

Les composantes $\vec{r}$ sont $\vec{OM_1} = x\,\vec{i}$, $\vec{OM_2} = y\,\vec{j}$ et $\vec{OM_3} = z\,\vec{k}$.

$$\alpha = (\vec{OM_1}, \vec{r}) = (\vec{i}, \vec{r}), \quad \beta = (\vec{OM_2}, \vec{r}) = (\vec{j}, \vec{r}),$$

$$\theta = (\vec{OM_3}, \vec{r}) = (\vec{k}, \vec{r}) \quad \text{et} \quad r = \|\vec{r}\|$$

$\vec{r} \bullet \vec{i} = x = \|\vec{r}\| \cos\alpha$ =projection de $\vec{r}$ sur la direction de $\vec{i}$

$\vec{r} \bullet \vec{j} = y = \left\|\vec{r}\right\| \cos\beta =$ projection de $\vec{r}$ sur la direction de $\vec{j}$.

$\vec{r} \bullet \vec{k} = z = \left\|\vec{r}\right\| \cos\theta =$ projection de $\vec{r}$ sur la direction de $\vec{k}$.

cos α, **cos β** et **cos θ** sont appelés cosinus directeurs de $\vec{r}$.

$$\cos\alpha = \frac{\vec{r} \bullet \vec{i}}{\left\|\vec{r}\right\|} \Rightarrow \cos\alpha = \frac{x}{\left(x^2 + y^2 + z^2\right)^{1/2}}$$

$$\cos\beta = \frac{\vec{r} \bullet \vec{j}}{\left\|\vec{r}\right\|} \Rightarrow \cos\beta = \frac{y}{\left(x^2 + y^2 + z^2\right)^{1/2}}$$

$$\cos\theta = \frac{\vec{r} \bullet \vec{k}}{\left\|\vec{r}\right\|} \Rightarrow \cos\theta = \frac{z}{\left(x^2 + y^2 + z^2\right)^{1/2}}$$

<u>Remarques</u>:

$$\cos^2\alpha + \cos^2\beta + \cos^2\theta = 1$$

$$\vec{r} = \left\|\vec{r}\right\| \left[(\cos\alpha)\,\vec{i} + (\cos\beta)\,\vec{j} + (\cos\theta)\,\vec{k}\right]$$

1.6 Produit vectoriel

1.6.1 Définition

Le produit vectoriel de deux vecteurs $\vec{U}$ et $\vec{V}$ est le vecteur $\vec{W} = \vec{U} \wedge \vec{V}$. On lit $\vec{U}$ vectoriel $\vec{V}$.

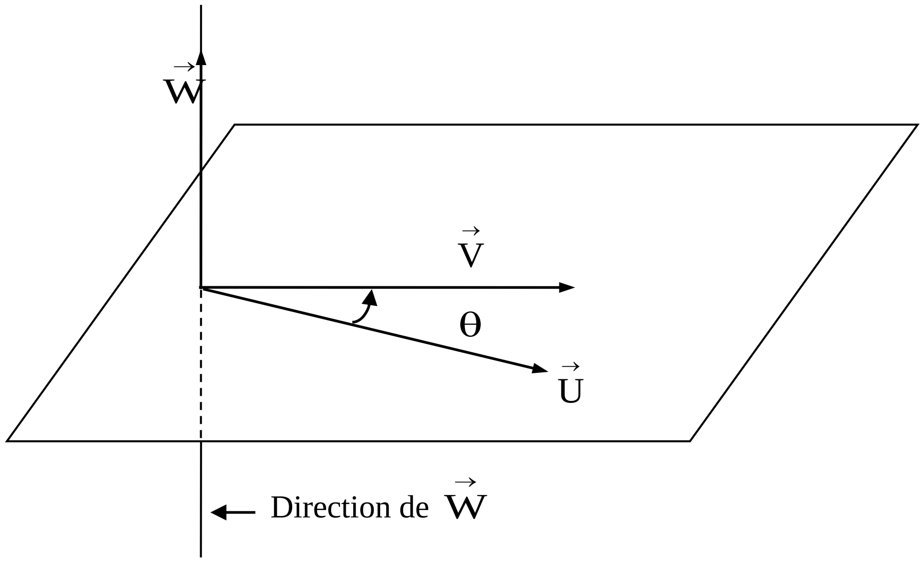
- Le module de $\vec{W}$ est défini comme le produit des modules de $\vec{U}$ et $\vec{V}$ par le sinus de l'angle des deux vecteurs:

$$||\vec{W}|| = ||\vec{U} \wedge \vec{V}|| = ||\vec{U}||\ ||\vec{V}||\ \left|\sin(\vec{U}, \vec{V})\right|;$$

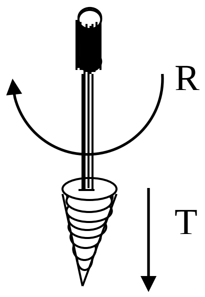
$$||\vec{W}|| = ||\vec{U} \wedge \vec{V}|| = ||\vec{U}||\ ||\vec{V}|| \sin\theta, \text{ car } 0 \leq \theta \leq \pi.$$

- La direction de $\vec{W}$ est $\perp$ au plan formé par $\vec{U}$ et $\vec{V}$.
- Le sens de $\vec{W}$ est donné par la règle du bonhomme d'Ampère ou règle du tire-bouchon ou encore règle des trois doigts.

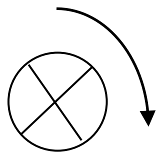
On dit que $\vec{U}$, $\vec{V}$ et $\vec{W}$, pris dans cet ordre, forment un trièdre direct.

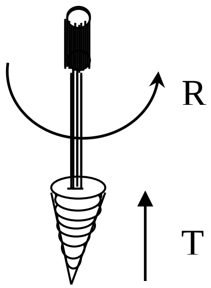


Règle du tire-bouchon (ou tourne-vis)

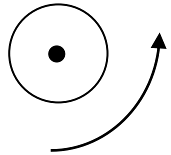


Pour une rotation du tournevis dans le sens de rotation des aiguilles d'une montre, on a une translation ou un déplacement de la vis vers le bas.





Pour une rotation contraire au sens de rotation des aiguilles d'une montre, on a une translation ou un déplacement de la vis vers le haut.



1.6.2 Propriétés

Soient $\vec{A}$, $\vec{B}$ et $\vec{C}$ des vecteurs et λ un scalaire, on a les propriétés suivantes :

$\vec{A}\wedge\vec{B} = -\vec{B}\wedge\vec{A}$ (anti commutativité)

$\vec{A}\wedge(\vec{B}+\vec{C}) = \vec{A}\wedge\vec{B}+\vec{A}\wedge\vec{C}$ (Loi de distributivité).

$\lambda(\vec{A}\wedge\vec{B}) = (\lambda\vec{A})\wedge\vec{B} = \vec{A}\wedge(\lambda\vec{B}) = (\vec{A}\wedge\vec{B})\lambda$

$||\vec{A}\wedge\vec{B}||$ =aire ou surface du parallélogramme de côtés $\vec{A}$ et $\vec{B}$

$\vec{A}\wedge\vec{B} = \vec{0} \Rightarrow \vec{A} = \vec{0}$ ou $\vec{B} = \vec{0}$

Si $\vec{A} \neq \vec{0}$ et $\vec{B} \neq \vec{0}$, $\vec{A}\wedge\vec{B} = \vec{0} \Rightarrow \vec{A}$ et $\vec{B}$ sont parallèles ou $\vec{A} = \vec{B}$.

1.6.3 Trièdre direct

Soit une base orthonormée $(\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ associée à un système d'axes (O, x, y, z) rectangulaires, $(\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ forment un trièdre direct alors :

$\vec{i} \wedge \vec{i} = \vec{j} \wedge \vec{j} = \vec{k} \wedge \vec{k} = \vec{0}; \vec{i} \wedge \vec{j} = \vec{k}; \vec{j} \wedge \vec{k} = \vec{i}; \vec{k} \wedge \vec{i} = \vec{j}$.

1.6.4 Expression analytique d'un produit vectoriel

$\vec{A} = A_1\,\vec{i} + A_2\,\vec{j} + A_3\,\vec{k}$, $\vec{B} = B_1\,\vec{i} + B_2\,\vec{j} + B_3\,\vec{k}$ dans la base $(\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$.

$$\vec{A} \wedge \vec{B} = (A_1\vec{i} + A_2\,\vec{j} + A_3\,\vec{k}) \wedge (B_1\,\vec{i} + B_2\,\vec{j} + B_3\,\vec{k})$$

$$\vec{A} \wedge \vec{B} = \vec{i}\,(A_2B_3 - A_3B_2) - \vec{j}\,(A_1B_3 - A_3B_1) + \vec{k}\,(A_1B_2 - A_2B_1)$$

Calcul pratique

$$\vec{A} \wedge \vec{B} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ A_1 & A_2 & A_3 \\ B_1 & B_2 & B_3 \end{vmatrix}$$

$$\vec{A} \wedge \vec{B} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ A_1 & A_2 & A_3 \\ B_1 & B_2 & B_3 \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ A_1 & A_2 & A_3 \\ B_1 & B_2 & B_3 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ A_1 & A_2 & A_3 \\ B_1 & B_2 & B_3 \end{vmatrix}$$

$$\vec{A} \wedge \vec{B} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ A_1 & A_2 & A_3 \\ B_1 & B_2 & B_3 \end{vmatrix} = \vec{i}\begin{vmatrix} A_2 & A_3 \\ B_2 & B_3 \end{vmatrix} - \vec{j}\begin{vmatrix} A_1 & A_3 \\ B_1 & B_3 \end{vmatrix} + \vec{k}\begin{vmatrix} A_1 & A_2 \\ B_1 & B_2 \end{vmatrix}$$

<u>Exemple</u>: $\vec{A} = \vec{i} + \vec{j} + 2\vec{k}$ et $\vec{B} = \vec{i} - \vec{j} + \vec{k}$

$$\vec{A} \wedge \vec{B} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 1 & 1 & 2 \\ 1 & -1 & 1 \end{vmatrix} = \vec{i}\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 1 \end{vmatrix} - \vec{j}\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} + \vec{k}\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{vmatrix}$$

$$= \vec{i}\,(1+2) - \vec{j}(1-2) + \vec{k}(-1-1)$$

$$= 3\vec{i} + \vec{j} - 2\vec{k}$$

1.7 Double produit vectoriel

Soient $\vec{A}$, $\vec{B}$ et $\vec{C}$ des vecteurs. Le double produit vectoriel est un vecteur $\vec{W} = (\vec{A} \wedge \vec{B}) \wedge \vec{C}$.

$\vec{W} = (\vec{A}.\vec{C})\vec{B} - (\vec{B}.\vec{C})\vec{A}$ (formule de GIBBS).

Remarques

$(\vec{i} \wedge \vec{j}) \wedge \vec{k} = \vec{0}$

$(\vec{i} \wedge \vec{j}) \wedge \vec{i} = (\vec{i} \cdot \vec{i})\,\vec{j} - (\vec{j} \cdot \vec{i})\,\vec{i} = \vec{j}$

$(\vec{i} \wedge \vec{j}) \wedge \vec{j} = (\vec{i} \cdot \vec{j})\,\vec{j} - (\vec{j} \cdot \vec{j})\,\vec{i} = -\vec{i}$.

1.8 Produit mixte

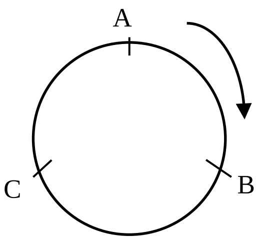
1.8.1 Définition

Soient $\vec{A}$, $\vec{B}$ et $\vec{C}$ des vecteurs, on appelle produit mixte, noté $(\vec{A},\vec{B},\vec{C})$, le nombre algébrique défini par $\vec{A} \bullet (\vec{B} \wedge \vec{C})$.

$$(\vec{A},\vec{B},\vec{C}) = \vec{A} \bullet (\vec{B} \wedge \vec{C})$$

1.8.2 Propriétés

Toute permutation circulaire laisse inchangé le résultat.



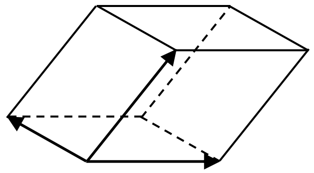
$$(\vec{A}, \vec{B}, \vec{C}) = (\vec{B}, \vec{C}, \vec{A}) = (\vec{C}, \vec{A}, \vec{B})$$

Toute permutation non circulaire change le signe.

$$(\vec{A}, \vec{B}, \vec{C}) = -(\vec{A}, \vec{C}, \vec{B}) = -(\vec{C}, \vec{B}, \vec{A}) = -(\vec{B}, \vec{A}, \vec{C})$$

$(\vec{A},\vec{B},\vec{C}) = \vec{A} \bullet (\vec{B} \wedge \vec{C}) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \vec{A}$, $\vec{B}$ et $\vec{C}$ coplanaires.

Le produit mixte correspond au volume algébrique du parallélépipède construit sur les 3 vecteurs.



1.8.3 Expression analytique du produit mixte

$\vec{A} = A_1\vec{i} + A_2\vec{j} + A_3\vec{k}$, $\quad \vec{B} = B_1\vec{i} + B_2\vec{j} + B_3\vec{k}$

et $\vec{C} = C_1\vec{i} + C_2\vec{j} + C_3\vec{k}$ dans la base $(\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$.

$$(\vec{A},\vec{B},\vec{C}) = \vec{A} \bullet (\vec{B} \wedge \vec{C})$$

$$\vec{A} \bullet (\vec{B} \wedge \vec{C}) = \begin{vmatrix} B_2 & B_3 \\ C_2 & C_3 \end{vmatrix} A_1 - \begin{vmatrix} B_1 & B_3 \\ C_1 & C_3 \end{vmatrix} A_2 + \begin{vmatrix} B_1 & B_2 \\ C_1 & C_2 \end{vmatrix} A_3$$

Ceci revient à calculer le déterminant d'ordre 3 ;

$$(\vec{A},\vec{B},\vec{C}) = \Delta = \begin{Vmatrix} A_1 & A_2 & A_3 \\ B_1 & B_2 & B_3 \\ C_1 & C_2 & C_3 \end{Vmatrix}$$

Ce déterminant se calcule par la règle de SARRUS.

2. Fonction vectorielle d'une variable scalaire t

2.1 Définition

La fonction vectorielle $\vec{A} = \vec{A}(t)$ est définie quand on se donne trois fonctions scalaires A_x (t), A_y (t) et A_z (t), ses projections sur les axes de coordonnées.

$$\vec{A} = A_x(t)\,\vec{i} + A_y(t)\,\vec{j} + A_z(t)\,\vec{k}$$

Exemple: $\vec{A} = 2t^2\,\vec{i} + t^3\,\vec{j} + (2t-1)\,\vec{k}$

2.2 Dérivée d'une fonction vectorielle d'une variable scalaire t

- La dérivée d'une fonction vectorielle $\vec{A} = \vec{A}(t)$ par rapport à la variable t est une nouvelle fonction vectorielle définie par :

$$\frac{d\vec{A}}{dt} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\vec{A}(t+\Delta t) - \vec{A}(t)}{\Delta t} = \frac{dA_x(t)}{dt}\vec{i} + \frac{dA_y(t)}{dt}\vec{j} + \frac{dA_z(t)}{dt}\vec{k}.$$

- Le module de la dérivée est:

$$\left\| \frac{d\vec{A}}{dt} \right\| = \left[\left(\frac{dA_x(t)}{dt} \right)^2 + \left(\frac{dA_y(t)}{dt} \right)^2 + \left(\frac{dA_z(t)}{dt} \right)^2 \right]^{1/2}.$$

Exemple: $\vec{A} = 2t^2\,\vec{i} + t^3\,\vec{j} + (2t-1)\,\vec{k}$

$$\frac{d\vec{A}}{dt} = 4t\,\vec{i} + 3t^2\,\vec{j} + 2\,\vec{k}$$

$$\Rightarrow \left\| \frac{d\vec{A}}{dt} \right\| = \left[(4t)^2 + (3t^2)^2 + (2)^2 \right]^{1/2} = (9t^4 + 16t^2 + 4)^{1/2}$$

2.3 Principales règles de dérivation des fonctions vectorielles d'une variable scalaire

Soient $\vec{A}$, $\vec{B}$, $\vec{C}$ des fonctions vectorielles, λ un scalaire et f(t) une fonction scalaire de t.

$$\frac{d(\vec{A} + \vec{B} - \vec{C})}{dt} = \frac{d\vec{A}}{dt} + \frac{d\vec{B}}{dt} - \frac{d\vec{C}}{dt}$$

$$\frac{d(\lambda\,\vec{A})}{dt} = \lambda\,\frac{d\vec{A}}{dt}$$

$$\frac{d}{dt}\left[f(t)\vec{A} \right] = \frac{df(t)}{dt}\vec{A} + f(t)\,\frac{d\vec{A}}{dt}$$

$$\frac{d}{dt}\left[\vec{A} \bullet \vec{B} \right] = \frac{d\vec{A}}{dt} \bullet \vec{B} + \vec{A} \bullet \frac{d\vec{B}}{dt}$$

$$\frac{d}{dt}\left[\vec{A}\wedge\vec{B}\right]=\frac{d\vec{A}}{dt}\wedge\vec{B}+\vec{A}\wedge\frac{d\vec{B}}{dt}$$

$$\frac{d}{dt}\left[\vec{A}(f(t))\right]=\left(\frac{d\vec{A}}{df}\right)\left(\frac{df}{dt}\right)$$

$$\vec{A}\bullet\frac{d\vec{A}}{dt}=0 \text{ si } \left\|\vec{A}\right\| = \text{constant.}$$

3. Eléments de la théorie des champs

3.1 Champs scalaires et champs vectoriels

3.1.1 Champs scalaires

- Un champ scalaire est défini par une fonction scalaire du point U=f(P)=f(x,y,z) où P(x,y,z) est un point de l'espace.

- La surface f(x, y, z) = Cte est appelée surface de niveau du champ scalaire.

3.1.2 Champs vectoriels

- Un champ vectoriel est défini par une fonction vectorielle de point $\vec{a}=\vec{a}(P)=\vec{a}(\vec{r})$, où P est un point de l'espace et $\vec{r}=x\,\vec{i}+y\,\vec{j}+z\,\vec{k}$ le rayon vecteur du point P.

En fonction des composantes, on a: $\vec{a}=a_x\,\vec{i}+a_y\,\vec{j}+a_z\,\vec{k}$, où $a_x=a_x(x,y,z)$, $a_y=a_y(x,y,z)$ et $a_z=a_z(x,y,z)$ sont les projections du vecteur $\vec{a}$ sur les axes de coordonnées.

- Les lignes vectorielles (lignes de forces, lignes de courant) d'un champ vectoriel sont déterminées par le système d'équations différentielles:

$$\frac{dx}{a_x}=\frac{dy}{a_y}=\frac{dz}{a_z}$$

3.1.3 Champs stationnaires (scalaires ou vectoriels)

Les champs scalaires ou vectoriels indépendants du temps t sont des champs stationnaires. Ceux qui dépendent du temps sont dits « non-stationnaires ».

3.2 Gradient

3.2.1 Définition

On appelle gradient du champ scalaire *U*=f(P) au point considéré P(x, y, z), le vecteur, noté,

$$\overrightarrow{\text{grad}}\,U(P)=\frac{\partial U}{\partial x}\vec{i}+\frac{\partial U}{\partial y}\vec{j}+\frac{\partial U}{\partial z}\vec{k}=\vec{\nabla}\,U,$$

où $\vec{\nabla}=\frac{\partial}{\partial x}\vec{i}+\frac{\partial}{\partial y}\vec{j}+\frac{\partial}{\partial z}\vec{k}$ est l'**opérateur de Hamilton** ou **Nabla**.

Soit U(P)=U(x, y, z) la valeur du champ scalaire au point P(x, y, z), en un point P' infiniment voisin de P, on a :

U(P') = U+dU et $dU = \frac{\partial U}{\partial x}dx + \frac{\partial U}{\partial y}dy + \frac{\partial U}{\partial z}dz$ ou

$$dU = \overrightarrow{grad}U \bullet d\vec{l} \quad \text{avec} \quad d\vec{l} = dx\,\vec{i} + dy\,\vec{j} + dz\,\vec{k}$$

<u>**Exemple**</u>: $U(P) = U(x,y,z) = x^2 + y^2 + z^2$

$$\frac{\partial U}{\partial x} = 2x\,, \quad \frac{\partial U}{\partial y} = 2y \quad \text{et} \quad \frac{\partial U}{\partial z} = 2z\,.$$

$$\overrightarrow{grad}\,U(P) = \frac{\partial U}{\partial x}\vec{i} + \frac{\partial U}{\partial y}\vec{j} + \frac{\partial U}{\partial z}\vec{k} \quad \Rightarrow$$

$$\overrightarrow{grad}\,U(P) = 2x\,\vec{i} + 2y\,\vec{j} + 2z\,\vec{k}$$

3.2.2 Propriétés

- Le gradient est dirigé suivant la normale $\vec{n}$ à la surface de niveau au point P dans le sens de croissance de la fonction U et a pour longueur:

$$\frac{\partial U}{\partial l} = \left[\left(\frac{\partial U}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial U}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial U}{\partial z}\right)^2\right]^{1/2}$$

- La dérivée de la fonction U dans la direction $\vec{l}$ (cos α, cos β, cos θ) s'écrit:

$$\frac{\partial U}{\partial n} = \left(\overrightarrow{grad}\;U\right) \bullet \vec{l} = \left(\frac{\partial U}{\partial x}\right)\cos\alpha + \left(\frac{\partial U}{\partial y}\right)\cos\beta + \left(\frac{\partial U}{\partial z}\right)\cos\theta$$

- Le gradient indique la direction de variation la plus rapide du champ U.
- Il est indépendant du repère choisi:

$$\int_A^B \left(\overrightarrow{grad}\;U\right) \bullet d\vec{l} = \int_A^B dU = U(B) - U(A)$$

3.3 Divergence et rotationnel champ vectoriel

3.3.1 Divergence

La divergence d'un champ vectoriel $\vec{a}$ = $\vec{a}(P) = a_x\,\vec{i} + a_y\,\vec{j} + a_z\,\vec{k}$ est le scalaire, noté :

$$\text{div}\,\vec{a} = \vec{\nabla} \bullet \vec{a} = \frac{\partial a_x}{\partial x} + \frac{\partial a_y}{\partial y} + \frac{\partial a_z}{\partial z}\,.$$

<u>**Exemple**</u>: $\vec{a} = (3x^2 + 6y)\vec{i} - 14yz\,\vec{j} + 20xz^2\,\vec{k}$

$$\frac{\partial a_x}{\partial x} = \frac{\partial(3x^2 + 6y)}{\partial x} = 6x\,, \quad \frac{\partial a_y}{\partial y} = \frac{\partial(-14yz)}{\partial y} = -14z \quad \text{et}$$

$$\frac{\partial a_z}{\partial z} = \frac{\partial(20xz^2)}{\partial z} = 40xz$$

$$\mathrm{div}\,\vec{a} = \frac{\partial a_x}{\partial x} + \frac{\partial a_y}{\partial y} + \frac{\partial a_z}{\partial z} = 6x - 14z + 40xz$$

3.3.2 Rotationnel

Le rotationnel d'un champ vectoriel $\vec{a} =$ $\vec{a}(P) = a_x\,\vec{i} + a_y\,\vec{j} + a_z\,\vec{k}$ est le vecteur, noté:

$$\vec{\mathrm{rot}}\,\vec{a} = \vec{\nabla} \wedge \vec{a} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ a_x & a_y & a_z \end{vmatrix}$$

$$\vec{\mathrm{rot}}\,\vec{a} = \left(\frac{\partial a_z}{\partial y} - \frac{\partial a_y}{\partial z}\right)\vec{i} - \left(\frac{\partial a_z}{\partial x} - \frac{\partial a_x}{\partial z}\right)\vec{j} + \left(\frac{\partial a_y}{\partial x} - \frac{\partial a_x}{\partial y}\right)\vec{k}$$

Exemple: $\boldsymbol{\vec{a} = (3x^2 + 6y)\vec{i} - 14yz\,\vec{j} + 20xz^2\,\vec{k}}$

$$\vec{\mathrm{rot}}\,\vec{a} = \vec{\nabla} \wedge \vec{a} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ 3x^2 + 6y & -14yz & 20xz^2 \end{vmatrix}$$

$$\frac{\partial a_z}{\partial y} = \frac{\partial(20xz^2)}{\partial y} = 0 \quad , \quad \frac{\partial a_y}{\partial z} = \frac{\partial(-14yz)}{\partial z} = -14y$$

$$\frac{\partial a_z}{\partial x} = \frac{\partial(20xz^2)}{\partial x} = 20z^2 \quad , \quad \frac{\partial a_x}{\partial z} = \frac{\partial(3x^2 + 6y)}{\partial z} = 0$$

$$\frac{\partial a_y}{\partial x} = \frac{\partial(-14yz)}{\partial x} = 0 \quad , \quad \frac{\partial a_x}{\partial y} = \frac{\partial(3x^2 + 6y)}{\partial y} = 6$$

$$\vec{\mathrm{rot}}\,\vec{a} = \left[0 - (-14y)\right]\vec{i} - (20z^2 - 0)\,\vec{j} + (0 - 6)\,\vec{k}$$

$$\vec{\mathrm{rot}}\,\vec{a} = 14y\,\vec{i} - 20z^2\,\vec{j} - 6\,\vec{k}$$

Remarques:

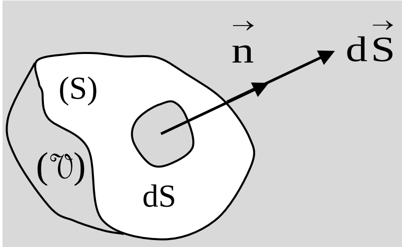
- Le rotationnel est indépendant du choix des coordonnées.
- L'existence du rotationnel signifie l'existence de lignes de champs fermées.

3.4 Flux d'un vecteur

Le flux d'un champ vectoriel $\vec{a}(P)$ à travers une surface S dans la direction définie par le vecteur unitaire de la normale $\vec{n}$ (cos α, cos β, cos θ) à la surface S est par définition l'intégrale:

$$\phi = \iint_{(S)} \vec{a} \bullet d\vec{S} = \iint_{(S)} \vec{a} \bullet \vec{n}\, dS$$

$$\phi = \iint_{(S)} (a_x \cos\alpha + a_y \cos\beta + a_z \cos\theta)\, dS$$



Si S est une surface fermée limitant un volume $\mathcal{V}$ et $\vec{n}$ le vecteur unitaire de la normale extérieure à la surface S, on a la formule d'Ostrogradsky - Gauss:

$$\phi = \iint_{(S)} \vec{a} \bullet d\vec{S} = \iiint_{(\mathcal{V})} \left(\operatorname{div} \vec{a} \right) d\mathcal{V}$$

3.5 Travail et Circulation d'un champ vectoriel

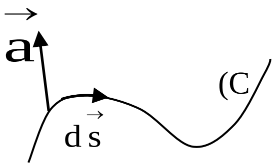
L'intégrale curviligne d'un vecteur $\vec{a}$ prise sur une courbe (C) est donnée par la formule:

$$W = \int_{(C)} \vec{a} \bullet d\vec{r} = \int_{(C)} a_s ds = \int_{(C)} a_x dx + a_y dy + a_z dz, \text{ où}$$

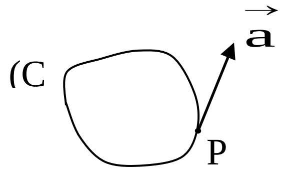
a_s est la projection du vecteur $\vec{a}$ sur la tangente à (C),

W représente le **travail** du champ $\vec{a}$ le long de la courbe (C),

$\vec{a} \bullet d\vec{r}$ représente le travail élémentaire.



Si la courbe (C) est fermée, l'intégrale s'appelle la **circulation** du champ vectoriel $\vec{a}$ le long de la courbe (C).



3.6 Champ potentiel et champ solénoïdal

Le champ vectoriel $\vec{A}$ est dit potentiel si $\vec{A} = \overrightarrow{\operatorname{grad}}\, U$ où U est une fonction scalaire : le potentiel du champ.

- Pour qu'un champ dérive d'un potentiel, il est nécessaire et suffisant qu'il soit irrotationnel, c'est-à-dire: $\overrightarrow{\operatorname{rot}}\, \vec{A} = \vec{0}$.
- Dans ce cas, il existe un potentiel U défini par: $dU = A_x dx + A_y dy + A_z dz$ alors le travail de $\vec{A}$ ne dépend pas du chemin suivi entre les deux points M et N de l'espace: $\int_{MN} \vec{A} \bullet d\vec{r} = U(M) - U(N)$.
- En particulier, la circulation du vecteur $\vec{A}$ est nulle:

$$\oint_{(C)} \delta W = \oint_{(C)} \vec{a} \bullet d\vec{r} = 0.$$

- Le champ vectoriel $\vec{A}$ est dit solénoïdal si en chaque point du champ, $\mathrm{div}\,\vec{A} = 0$; par conséquent, le flux de vecteur $\vec{A}$ à travers toute la surface fermée est nul.

- Si le champ est simultanément potentiel et solénoïdal, alors $\mathrm{div}(\overrightarrow{\mathrm{grad}}\,U) = 0$ et le potentiel U est une fonction harmonique, c'est-à-dire que U satisfait l'équation de Laplace $\frac{\partial^2 U}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 U}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 U}{\partial z^2} = 0$ ou $\Delta U=0$, où $\Delta = \nabla^2 = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}$ est l'opérateur de Laplace ou le Laplacien.

3.7 Propriétés des fonctions vectorielles

Soient p et q des fonctions scalaires, $\vec{A}$ et $\vec{B}$ des fonctions vectorielles, on a les propriétés suivantes :

$$\overrightarrow{\mathrm{grad}}(p+q) = \overrightarrow{\mathrm{grad}}\,p + \overrightarrow{\mathrm{grad}}\,q$$

$$\overrightarrow{\mathrm{grad}}(p\,q) = p\,\overrightarrow{\mathrm{grad}}\,q + q\,\overrightarrow{\mathrm{grad}}\,p$$

$$\overrightarrow{\mathrm{grad}}(\vec{A}\bullet\vec{B}) = \left[\vec{A}\wedge\overrightarrow{\mathrm{rot}}\,\vec{B}\right] + \left[\left(\vec{A}\bullet\vec{\nabla}\right)\vec{B}\right] + \left[\vec{B}\wedge\overrightarrow{\mathrm{rot}}\,\vec{A}\right] + \left[\left(\vec{B}\bullet\vec{\nabla}\right)\vec{A}\right]$$

$$\mathrm{div}\,(\overrightarrow{\mathrm{rot}}\,\vec{A}) = 0$$

$$\mathrm{div}\,(\vec{A}+\vec{B}) = \mathrm{div}\,\vec{A} + \mathrm{div}\,\vec{B}$$

$$\mathrm{div}\,(p\vec{A}) = p\,\mathrm{div}\,\vec{A} + \vec{A}\bullet\overrightarrow{\mathrm{grad}}\,p$$

$$\mathrm{div}(\vec{A}\wedge\vec{B}) = \vec{B}\bullet\overrightarrow{\mathrm{rot}}\,\vec{A} - \vec{A}\bullet\overrightarrow{\mathrm{rot}}\,\vec{B}$$

$$\overrightarrow{\mathrm{rot}}\,(\overrightarrow{\mathrm{grad}}\,p) = 0$$

$$\overrightarrow{\mathrm{rot}}(\vec{A}+\vec{B}) = \overrightarrow{\mathrm{rot}}\,\vec{A} + \overrightarrow{\mathrm{rot}}\,\vec{B}$$

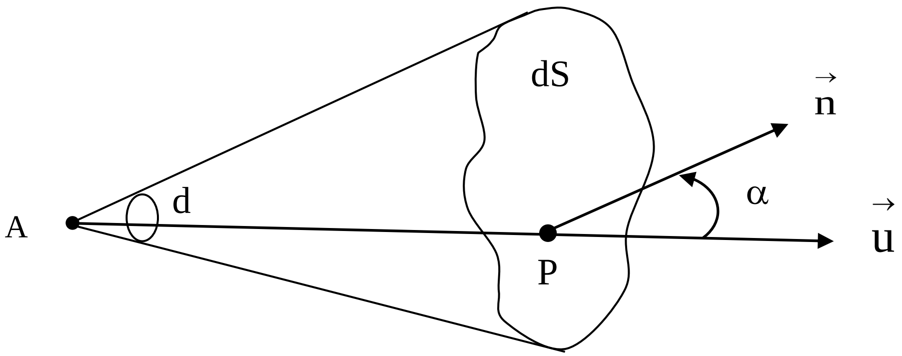
$$\overrightarrow{\mathrm{rot}}(p\vec{A}) = p\,\overrightarrow{\mathrm{rot}}\,\vec{A} + (\overrightarrow{\mathrm{grad}}\,p)\wedge\vec{A}$$

$$\overrightarrow{\mathrm{rot}}(\vec{A}\wedge\vec{B}) = \vec{A}\,\mathrm{div}\,\vec{B} - \left(\vec{A}\bullet\vec{\nabla}\right)\vec{B} + \left(\vec{B}\bullet\vec{\nabla}\right)\vec{A} - \vec{B}\,\mathrm{div}\,\vec{A}$$

$$\Delta p = \mathrm{div}\,(\overrightarrow{\mathrm{grad}}\,p)\,;\,\Delta(\overrightarrow{\mathrm{grad}}\,p) = \overrightarrow{\mathrm{grad}}\,(\Delta p)\,;\,\Delta(\overrightarrow{\mathrm{rot}}\,\vec{A}) = \overrightarrow{\mathrm{rot}}\,(\Delta\vec{A})$$

4. Angle solide

4.1 Angle solide élémentaire



A: point d'observation;

$\vec{dS} = dS\,\vec{n}$: surface orientée,

$\vec{n}$ = vecteur unitaire normale à dS;

$\vec{u}$: vecteur unitaire de (AP),

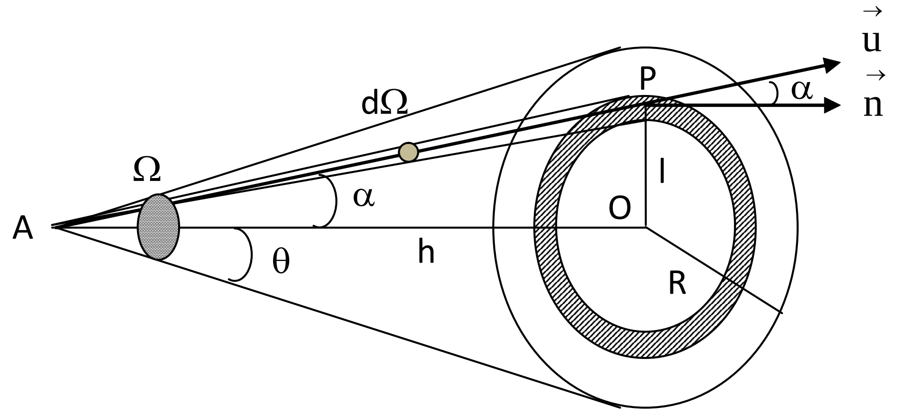
$\vec{AP} = \vec{r} = r\,\vec{u}$

dΩ: l'angle solide élémentaire sous lequel on voit du point A (situé à la distance r) l'élément de surface dS (à partir de sa face négative ; les surfaces étant orientées vers l'extérieur).

$$d\Omega = \frac{\vec{r} \bullet \vec{dS}}{r^3} \quad \Rightarrow \quad d\Omega = \frac{dS\ \cos\alpha}{r^2}$$

4.2 Exemple de calcul d'angle solide

4.2.1 Angle solide sous lequel on voit une surface circulaire



AP = r, AO = h, OP = l

dS : couronne de rayon l et d'épaisseur dl. dS = 2π l dl,

$r^2 = h^2 + l^2$, $\cos\alpha = \dfrac{h}{(h^2+l^2)^{1/2}}$ et $\cos\theta = \dfrac{h}{(h^2+R^2)^{1/2}}$

$$d\Omega = \frac{dS\ \cos\alpha}{r^2} \Rightarrow d\Omega = \frac{2\pi\,h\,l\,dl}{(h^2+l^2)^{3/2}}$$

$$\Rightarrow \Omega = \pi\,h \int_0^R \frac{2\,l\,dl}{(h^2+l^2)^{3/2}}$$

$$\Rightarrow \quad \Omega = -2\pi\,h \left[\frac{1}{(h^2+l^2)^{1/2}}\right]_0^R = 2\pi\left[1 - \frac{h}{(h^2+R^2)^{1/2}}\right]$$

$$\Omega = 2\pi\,(1 - \cos\theta)$$

4.2.2 Angle solide sous lequel on voit une surface plane

$$\theta = \frac{\pi}{2} \quad \Rightarrow \quad \Omega = 2\pi$$

4.2.3 Angle solide sous lequel on voit une surface sphérique

$$\theta = \pi \quad \Rightarrow \quad \Omega = 4\pi$$

CHAPITRE 1 : DIMENSION ET ANALYSE DIMENSIONNELLE

1. Dimension des grandeurs et unités

1.1 Grandeurs physiques

Une masse, une température, une vitesse, une force, etc. sont des grandeurs physiques. Les grandeurs physiques ont chacune leur nature propre. Nous entendons par là qu'une force, par exemple, est essentiellement différente d'un travail, d'une puissance, etc. Cependant, toutes les forces quelle que soit leur origine ont un « caractère» ou une dimension commune qui leur est propre.

Une grandeur physique se caractérise par sa nature ou son espèce qui est sa **dimension**.

En mécanique, on distingue trois grandeurs fondamentales qui sont la masse, la longueur et le temps, et des grandeurs dérivées (vitesse, accélération, force, énergie, puissance, …).

Remarquons qu'en électricité, la grandeur fondamentale est l'intensité du courant.

1.2 Dimensions des grandeurs fondamentales et grandeurs dérivées

La dimension est notée par un symbole ou [ ]. La dimension d'une masse (m) est notée par [m]=M ou [m]= [M], celle d'une longueur l par [l]=L ou [l]= [L].

Soit d une distance, on écrira [d] **=** L
(on lit dimension de d).

Exemples

Une surface étant le produit d'une longueur par une longueur possédera la dimension du carré d'une longueur : $\mathbf{L^2}$

Une vitesse : $v = \frac{d}{t}$ $\begin{matrix} \leftarrow \text{longueur} \\ \leftarrow \text{temps} \end{matrix}$ $\quad$ $\mathbf{[v] = LT^{-1}}$

	Nature	Dimension
Grandeurs fondamentales	Longueur	L ou [L]
	Masse	M ou [M]
	Temps	T ou [T]
Grandeurs dérivées	Surface	L^2 ou $[L^2]$ ou $[L]^2$
	Volume	L^3 ou $[L^3]$ ou $[L]^3$
	Vitesse	LT^{-1} ou $[LT^{-1}]$ ou $[L]\,[T]^{-1}$
	Accélération	LT^{-2} ou $[LT^{-2}]$ ou $[L]\,[T]^{-2}$
	Force	MLT^{-2} ou $[MLT^{-2}]$ ou $[M]\,[L]\,[T]^{-2}$
	Travail et énergie	ML^2T^{-2} ou $[ML^2T^{-2}]$ ou $[M]\,[L]^2\,[T]^{-2}$
	Puissance	ML^2T^{-3} ou $[ML^2T^{-3}]$ ou $[M]\,[L]^2\,[T]^{-3}$

1.3 Unités

La mesure d'une grandeur s'exprime par rapport à une autre grandeur qui sert d'étalon ou d'unité. Autrement dit, c'est la comparaison à une grandeur de même espèce prise comme unité, par convention.

Un système d'unités est composé d'un ensemble d'unités. Constituer un système d'unités revient à déterminer un nombre minimum de grandeurs dont les unités sont choisies arbitrairement (unités fondamentales) et d'en déduire, à partir des lois physiques théoriques ou expérimentales, les unités des autres grandeurs physiques (unités dérivées).

En mécanique, un système d'unités est constitué des trois grandeurs fondamentales (masse, longueur, temps) et des grandeurs dérivées (vitesse, accélération, …).

Dans le Système International (SI ou MKSA), le mètre (**m**) est l'unité de longueur, le kilogramme (**kg**) est l'unité de masse et la seconde (**s**) est l'unité de temps.

- - l'intensité du courant électrique (ampère **A**).
- -l'intensité lumineuse (candela **cd**)
- - la température (Kelvin **K**)
- - la quantité de la matière (la mole **mol**)
- - l'angle plan (radian **rad**)
- - l'angle solide (stéradian **sr**)

<u>**Exemples**</u>: la vitesse (**ms^{-1}**) ; l'accélération (**ms^{-2}**) ; la force (Newton **N**), l'énergie (Joule **J**).

Un autre système aussi utilisé est le système **CGS**, où la longueur, la masse et le temps s'expriment respectivement en centimètre (**cm)**, gramme (**g)** et seconde (**s**).

<u>**Remarque**</u>

Ces unités sont parfois exprimées en multiples ou sous-multiples de 10.

Multiples

Facteur	Préfixe	Symbole
10^{12}	Téra	T
10^{9}	giga	G
10^{6}	méga	M
10^{3}	kilo	k

Sous-multiples

Facteur	Préfixe	Symbole
10^{-3}	milli	m
10^{-6}	micro	m
10^{-9}	nano	n
10^{-12}	pico	p

2. Equations aux dimensions

2.1 Expression

Ecrire une équation aux dimensions, revient à exprimer symboliquement les relations entre diverses grandeurs qui très souvent sont des grandeurs fondamentales.

Exemple: pour une force, nous écrivons: $[F]=[m\,\Gamma]=MLT^{-2}$.

D'une manière générale, une grandeur physique X a pour équation aux dimensions:

$$\mathbf{[X]=M^a\,L^b\,T^c\,I^d}$$

où a, b, c et d sont des réels, I étant la dimension de l'intensité du courant, et M, L et T sont respectivement les dimensions d'une longueur, d'une masse et d'un temps.

Les équations aux dimensions permettent de trouver la dimension d'une grandeur nouvelle et son unité.

Exemple: Dans un fluide, la force de frottement est expérimentalement donnée par la relation suivante:

$$F = \eta S \frac{dv}{dy}$$

Avec : η: la viscosité du fluide, S: surface,
dv: variation de la vitesse, dy variation de position

Cherchons la dimension de la viscosité du fluide η et exprimons-la dans le Système International (SI) :

Equation aux dimensions :

$$[\eta] = [F]\,[S]^{-1}\left[\frac{dv}{dy}\right]^{-1} = M\,L\,T^{-2}L^{-2}\,(LT)^{-1}L = M\,L^{-1}\,T^{-1}$$

$\Rightarrow \eta$ a pour unité kg $m^{-1}\,s^{-1}$ (ou Poiseuille en S.I.)

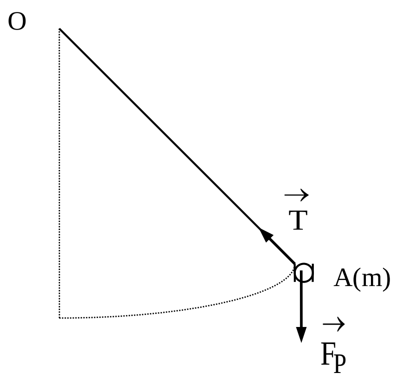
2.2 Homogénéité des formules

Les relations qui rendent compte des lois physiques doivent être homogènes, c'est-à-dire que les deux membres de la relation ont la même dimension ou la même unité. Une relation qui n'est pas homogène est **nécessairement fausse**.

Il est recommandé de toujours faire un **bilan d'homogénéité** d'un résultat littéral.

3. Analyse dimensionnelle

<u>Exemple</u>: Soit à trouver la formule du pendule simple.



Expérimentalement, on montre que la période T=f(l, m, g).

Posons la relation la plus simple possible, à savoir :

$$\boldsymbol{\tau = K\, l^a\, m^b\, g^c} \quad \text{avec } K=C^{te}.$$

L'analyse dimensionnelle de cette relation donne:

$$[\,\tau\,] = [K]\,[l]^a\,[m]^b\,[g]^c$$

$\Rightarrow T=L^a\,M^b\,(LT^{-2})^c$ car $[K]=1$ constante sans unité.

$$L^0\,M^0\,T^1 = L^{a+c}\,M^b\,T^{-2c}$$

Par identification, on a: $\begin{cases} a+c=0 \\ b=0 \\ -2c=1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} b=0 \\ a=\dfrac{1}{2} \\ c=-\dfrac{1}{2} \end{cases} \Rightarrow \tau = K\left(\dfrac{l}{g}\right)^{\frac{1}{2}}$

L'analyse dimensionnelle est très utile pour explorer des phénomènes dont les lois sont mal cernées.

CHAPITRE 2: CINEMATIQUE DU POINT MATERIEL

1. Définitions

1.1 Cinématique

La cinématique est l'étude des mouvements des corps indépendamment des causes qui les provoquent.

1.2 Point matériel

Un point matériel est un corps dont les dimensions sont négligeables par rapport à celles de sa trajectoire.

1.3 Repère d'espace

Pour repérer la position d'un point M de l'espace, on utilise un système d'axes de coordonnées appelé **repère**. Le plus souvent, on choisit par commodité un repère orthonormé. Divers repères d'espace sont utilisés (cartésien, polaire, cylindrique, etc.). En représentation cartésienne, le point M est repéré par ses coordonnées cartésiennes (x, y, z) dans le repère d'espace, d'origine O, de vecteurs de base ($\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$) orthonormés et noté $\mathscr{R}$(O, $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$).

On appelle **référentiel**, un système d'axes de coordonnées (**repère**) liés à un observateur (solide de référence attaché à un repère).

1.4 Notion de mouvement

Un point matériel (M) est fixe par rapport à un référentiel, si ses coordonnées sont constantes au cours du temps ; dans le cas contraire, il est en mouvement. Il décrit une trajectoire qui est le lieu géométrique des positions successives de M.

La notion de mouvement est essentiellement liée au référentiel par rapport auquel il est décrit. Deux observateurs dans deux référentiels en mouvement relatif décriront différemment le mouvement d'un même point d'espace.

1.5 Universalité du temps

Tout phénomène reproductible peut être utilisé comme horloge. Chaque événement définit un instant auquel on associe un réel **t** appelé date. L'origine est l'instant pour lequel on fixe t=0.

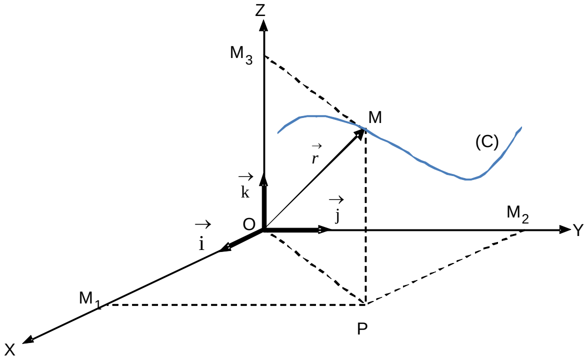
On suppose que le temps est une notion absolue indépendante du référentiel, c'est-à-dire que deux observateurs liés à des référentiels différents (éventuellement en mouvement relatif) peuvent attribuer les mêmes dates aux mêmes événements (universalité du temps).

La mécanique classique repose sur cette hypothèse développée par Newton; hypothèse rejetée par Albert Einstein en mécanique relativiste (relativité restreinte).

On admet donc que le **temps est universel**.

2. Systèmes d'axes de coordonnées : position du point matériel

2.1 Coordonnées cartésiennes



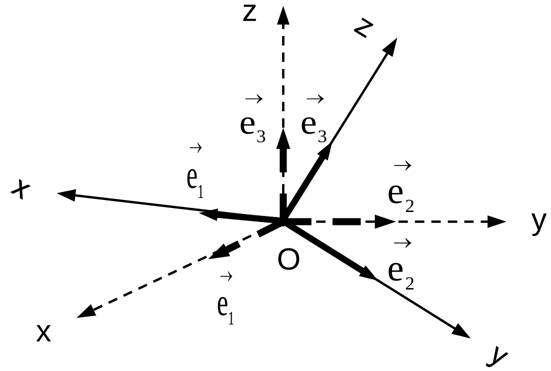
Dans un repère R **fixe**, la position d'un point matériel M à l'instant t est définie par la fonction vectorielle $\vec{r} = \vec{r}(t)$ de la grandeur scalaire t: $\vec{r}(t) = \overrightarrow{OM}$ (vecteur position).

Par projection dans la base ($\vec{i}$, $\vec{j}$, $\vec{k}$), on a:

$$\vec{r}(t) = x(t)\,\vec{i} + y(t)\,\vec{j} + z(t)\,\vec{k} \qquad (2.1)$$

x(t), y(t), z(t) sont les coordonnées cartésiennes de $\overrightarrow{OM}$ dans le repère R(O, $\vec{i}$, $\vec{j}$, $\vec{k}$). Elles constituent l'équation paramétrique de la trajectoire de M. L'équation de la courbe (C) trajectoire s'obtient en éliminant le temps t entre coordonnées.

2.1.1 Vecteur rotation : repère en rotation



Supposons que la position d'un système de coordonnées varie au cours du temps tout en gardant la même origine O. On dira que le système de coordonnées peut effectuer une rotation autour de l'origine.

Les vecteurs unitaires $\vec{e}_1$, $\vec{e}_2$, $\vec{e}_3$ vont alors avoir une direction variable en fonction du temps tandis que leur module restera constant et égale à 1.

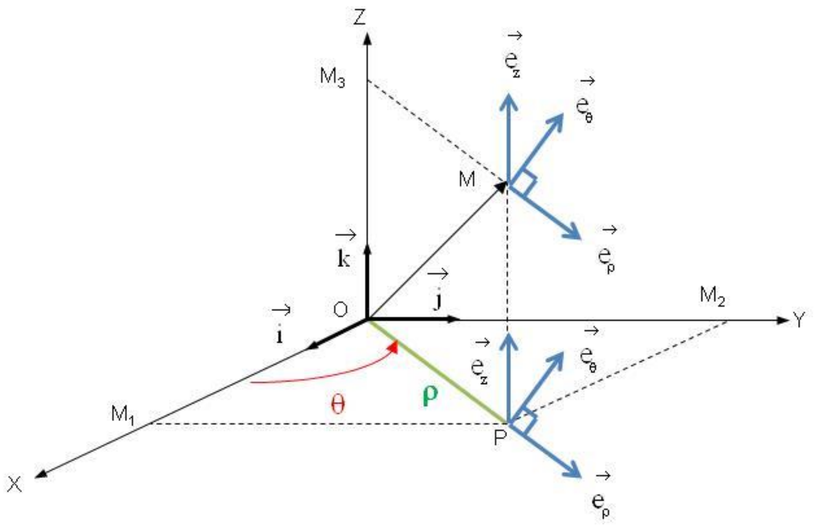
$$\left\| \vec{e}_1 \right\| = \left\| \vec{e}_2 \right\| = \left\| \vec{e}_3 \right\| = 1$$

Soit $\vec{\omega}$, le vecteur rotation: $\vec{\omega} = \omega_1\,\vec{e}_1 + \omega_2\,\vec{e}_2 + \omega_3\,\vec{e}_3$, on montre que:

$$\frac{d\vec{e}_1}{dt} = \vec{\omega} \wedge \vec{e}_1 \quad , \quad \frac{d\vec{e}_2}{dt} = \vec{\omega} \wedge \vec{e}_2 \quad \text{et} \quad \frac{d\vec{e}_3}{dt} = \vec{\omega} \wedge \vec{e}_3$$

2.2 Coordonnées cylindriques

2.2.1 Construction de la base locale de composantes cylindriques



Le point M est dans l'espace. Sa projection dans le plan (xOy) donne P. On définit $\vec{e}_\rho$ le premier vecteur unitaire de la base cylindrique tel que: $\vec{e}_\rho = \dfrac{\vec{OP}}{\|\vec{OP}\|}$. $\vec{OP} = \vec{\rho}$; $\|\vec{OP}\| = \rho$ et

$\vec{OP} = \rho\, \vec{e}_\rho$.

Le repérage de M est complété par $\theta = (\widehat{\vec{i}\,,\vec{e}_\rho})$ et z = $\overline{PM}$.

On définit $\vec{e}_\theta$ tel que $(\widehat{\vec{e}_\rho\,,\vec{e}_\theta}) = +\dfrac{\pi}{2}$ où $\vec{e}_\theta$ est aussi un vecteur unitaire.

$$\vec{e}_\rho \wedge \vec{e}_\theta = \vec{k} = \vec{e}_z \quad , \quad \vec{e}_\theta \wedge \vec{e}_z = \vec{e}_\rho \quad , \quad \vec{e}_z \wedge \vec{e}_\rho = \vec{e}_\theta \,.$$

On définit ainsi une base locale de coordonnées cylindriques $(\vec{e}_\rho, \vec{e}_\theta, \vec{e}_z)$ ou $(\vec{e}_\rho, \vec{e}_\theta, \vec{k})$ formant un trièdre direct.

(ρ, θ, z) sont les coordonnées cylindriques de M dans la base locale $(\vec{e}_\rho, \vec{e}_\theta, \vec{e}_z)$. On écrit M**(ρ, θ, z)**.

$$\vec{OM} = \vec{OP} + \vec{PM}$$

$$\boxed{\vec{OM} = \rho\, \vec{e}_\rho + z\, \vec{e}_z = \rho\, \vec{e}_\rho + z\, \vec{k}} \qquad (2.2)$$

2.2.2 Relation entre coordonnées cylindriques et cartésiennes

- $\vec{e}_\rho$ et $\vec{e}_\theta$ appartiennent au plan xOy

$$\boxed{\vec{e}_\rho = \cos\theta\, \vec{i} + \sin\theta\, \vec{j} \quad \text{et} \quad \vec{e}_\theta = -\sin\theta\, \vec{i} + \cos\theta\, \vec{j}} \qquad (2.3)$$

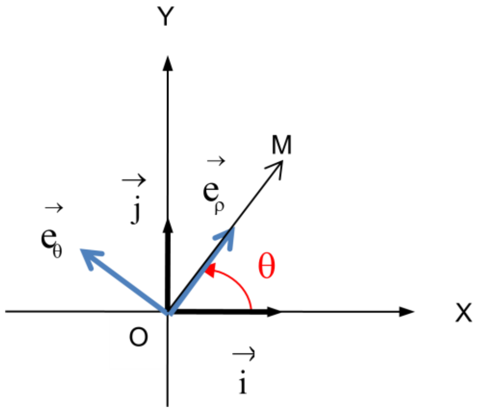
$$\boxed{x = \rho\cos\theta \quad , \quad y = \rho\sin\theta \quad \text{et} \quad z = z} \qquad (2.4)$$

$$\rho = (x^2 + y^2)^{1/2} \qquad \text{et} \qquad \text{tg}\,\theta = \frac{y}{x}$$

2.3 Coordonnées polaires

Pour z = 0, on passe ainsi de la représentation cylindrique à la représentation polaire dans le plan xOy.

2.3.1 Construction de la base locale $(\vec{e}_\rho, \vec{e}_\theta)$



La construction se fait comme précédemment et z=0.

$$\vec{e}_\rho = \frac{\vec{OM}}{\|\vec{OM}\|},$$

$$\vec{OM} = \vec{\rho} \quad \text{et} \quad \|\vec{OM}\| = \rho .$$

Le repérage de M est également complété par $\theta = (\vec{i}\,\widehat{,}\,\vec{e}_\rho)$.

Le vecteur unitaire $\vec{e}_\theta$ est tel que $(\vec{e}_\rho\,\widehat{,}\,\vec{e}_\theta) = +\frac{\pi}{2}$.

$(\vec{e}_\rho, \vec{e}_\theta)$ est la base locale de coordonnées polaires.

(**ρ**, **θ**) sont les coordonnées polaires de M dans cette base. On écrit M (**ρ**, **θ**).

$$\boxed{\vec{OM} = \rho\,\vec{e}_\rho} \qquad (2.5)$$

2.3.2 Relation entre coordonnées polaires et cartésiennes

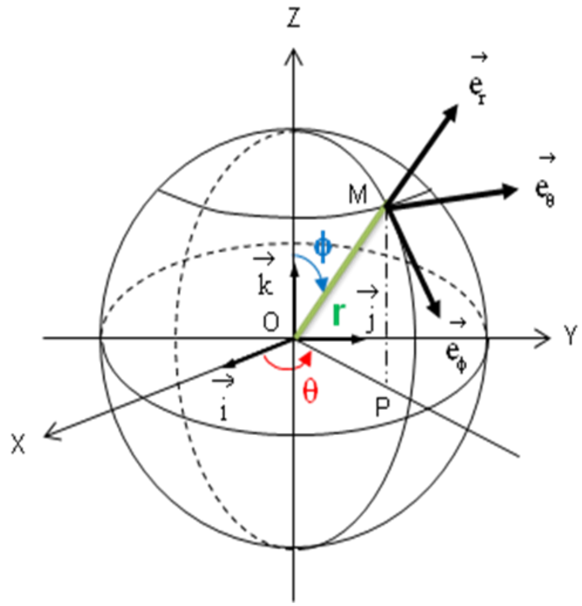
Comme précédemment, on a :

$$\boxed{\vec{e}_\rho = \cos\theta\;\vec{i} + \sin\theta\;\vec{j} \;\;\text{et}\;\; \vec{e}_\theta = -\sin\theta\;\vec{i} + \cos\theta\;\vec{j}} \qquad (2.3)$$

$$\boxed{x = \rho\cos\theta \quad \text{et} \quad y = \rho\sin\theta} \qquad (2.6)$$

2.4 Coordonnées sphériques

2.4.1 Construction de la base locale $(\vec{e}_r, \vec{e}_\phi, \vec{e}_\theta)$



En coordonnées sphériques, le point M est repéré par **r**, **ϕ** et **θ** qui sont définies de la façon suivante:

$r = \|\vec{r}\| = \|\vec{OM}\|$,

la colatitude $\phi = (\widehat{\vec{k}, \vec{r}})$ et l'azimut ou la longitude $\theta = (\widehat{\vec{i}, \vec{e}_\rho})$.

Les vecteurs unitaires de la base locale sont définis par:

$$\vec{e}_r = \frac{\vec{OM}}{\|\vec{OM}\|},\ \vec{e}_\theta = \vec{k} \wedge \vec{e}_\rho \ \text{ et } \ \vec{e}_\phi = \vec{e}_\theta \wedge \vec{e}_r \ \text{ avec } \ \vec{e}_\rho = \frac{\vec{OP}}{\|\vec{OP}\|}.$$

$(\vec{e}_r, \vec{e}_\phi, \vec{e}_\theta)$ forment un trièdre direct et on a : $\begin{cases} \vec{e}_r \wedge \vec{e}_\phi = \vec{e}_\theta \\ \vec{e}_\phi \wedge \vec{e}_\theta = \vec{e}_r \\ \vec{e}_\theta \wedge \vec{e}_r = \vec{e}_\phi \end{cases}$.

Le rayon vecteur $\vec{OM}$ s'écrit: $\vec{OM} = r\,\vec{e}_r$ (2.7)

2.4.2 Relation entre coordonnées sphériques et cartésiennes

$$\boxed{\begin{aligned} x &= r \sin\phi \cos\theta \\ y &= r \sin\phi \sin\theta \\ z &= r \cos\phi \end{aligned}} \qquad (2.8)$$

$$\boxed{\begin{aligned} \vec{e}_r &= \sin\phi \cos\theta\ \vec{i} + \sin\phi \sin\theta\ \vec{j} + \cos\phi\ \vec{k} \\ \vec{e}_\phi &= \cos\phi \cos\theta\ \vec{i} + \cos\phi \sin\theta\ \vec{j} - \sin\phi\ \vec{k} \\ \vec{e}_\theta &= -\sin\theta\ \vec{i} + \cos\theta\ \vec{j} \end{aligned}} \qquad (2.9)$$

D'autre part $\vec{e}_r$ et $\vec{e}_\phi$ peuvent s'exprimer en fonction de $\vec{e}_\rho$ et de $\vec{k}$:

$$\vec{e}_r = \sin\phi\cos\theta\,\vec{i} + \sin\phi\,\sin\theta\,\vec{j} + \cos\phi\,\vec{k} = \sin\phi(\cos\theta\,\vec{i} + \sin\theta\,\vec{j}) + \cos\phi\,\vec{k}$$

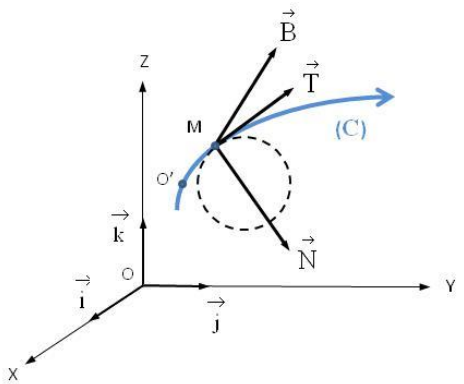
$$\vec{e}_r = \sin\phi\,\vec{e}_\rho + \cos\phi\,\vec{k}$$

$$\vec{e}_\phi = \cos\phi\cos\theta\,\vec{i} + \cos\phi\sin\theta\,\vec{j} - \sin\phi\,\vec{k} = \cos\phi(\cos\theta\,\vec{i} + \sin\theta\,\vec{j}) - \sin\phi\,\vec{k}$$

$$\vec{e}_\phi = \cos\phi\,\vec{e}_\rho - \sin\phi\,\vec{k}$$

2.5 Repère de Frenet: Composantes intrinsèques

2.5.1 Construction



C'est un repère construit à partir de la courbe trajectoire $(\mathcal{C})$ qu'on oriente.

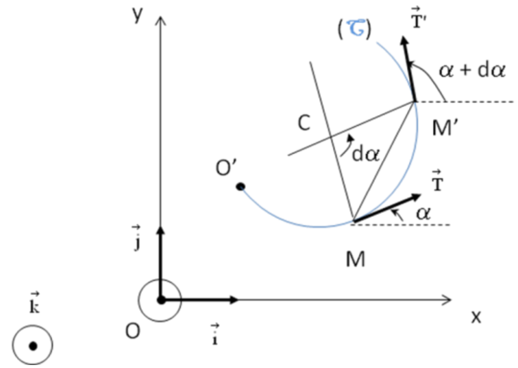
$\overset{\frown}{O'M} = s$ représente l'abscisse curviligne

O' étant l'origine des abscisses curvilignes.

$\vec{T}$ est un vecteur unitaire tangentiel de $(\mathcal{C})$ en M ; $\vec{N}$ est un vecteur unitaire normal à $(\mathcal{C})$ en M et $\vec{B}$ est un vecteur unitaire binormal à $(\mathcal{C})$ en M.

$(\vec{T}, \vec{N}, \vec{B})$ forment un trièdre direct.

Faisons une représentation plane de la courbe $(\mathcal{C})$ dans le plan $(O, \vec{i}, \vec{j})$.



dα > 0

Considérons deux points M et M' infiniment voisin sur la courbe $(\mathcal{C})$.

$$s = \overset{\frown}{O'M} \quad ; \quad s' = \overset{\frown}{O'M'}$$

Posons $\Delta s = \overset{\frown}{MM'}$

$$\lim_{\Delta s \to 0} \frac{\overrightarrow{MM'}}{\Delta s} = \frac{d\overrightarrow{OM}}{ds}$$

Le vecteur $\frac{d\overrightarrow{OM}}{ds}$ a une norme égale à l'unité. Il s'agit du vecteur unitaire $\vec{T}$ tangent à la trajectoire:

$$\boxed{\vec{T} = \frac{d\overrightarrow{OM}}{ds}} \qquad (2.10)$$

Evaluons $\frac{d\vec{T}}{ds}$:

Soit α l'angle que fait $\vec{i}$ et $\vec{T}$.

On pose $\frac{d\vec{T}}{d\alpha} = \vec{N}$ (Car $\frac{d\vec{T}}{d\alpha} \perp \vec{T}$ d'après $\frac{d\vec{A}}{d\theta} \perp \vec{A}$ si $\left\| \vec{A} \right\|$ = constant)

$\vec{N}$ se déduit de $\vec{T}$ par une rotation de $+\frac{\pi}{2}$.

$$\vec{T} \bullet \vec{T} = 1 \Rightarrow \frac{d\vec{T}}{ds} \bullet \vec{T} + \vec{T} \bullet \frac{d\vec{T}}{ds} = 0 \Rightarrow 2\frac{d\vec{T}}{ds} \bullet \vec{T} = 0$$

$$\Rightarrow \frac{d\vec{T}}{ds} \perp \vec{T}$$

Or $\vec{T} \perp \vec{N}$ donc $\frac{d\vec{T}}{ds} = \lambda \vec{N}$ (a),

d'autre part $\frac{d\vec{T}}{ds} = \frac{d\vec{T}}{d\alpha}\frac{d\alpha}{ds} = \frac{d\alpha}{ds}\vec{N}$ (b)

D'où (a) et (b) donnent $\frac{d\alpha}{ds} = \lambda$.

$\frac{d\alpha}{ds} = \lambda$ est homogène à l'inverse d'une distance.

$\frac{d\alpha}{ds} = \lambda$ est la courbure de ($\mathcal{C}$) en M.

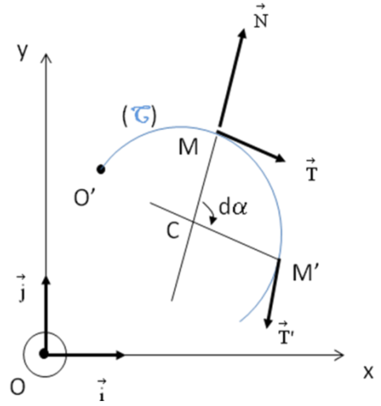
On pose $\frac{d\alpha}{ds} = \frac{1}{R}$ où R est le **rayon de courbure** de ($\mathcal{C}$) en M.

$$\boxed{\frac{d\vec{T}}{ds} = \frac{\vec{N}}{R}} \qquad (2.11)$$

Traçons en M et M' deux droites normales aux tangentes $\vec{T}$ et $\vec{T}'$. Elles se coupent au point C. L'angle $d\alpha$ formé par $\vec{T}$ et $\vec{T}'$ se retrouve en $(\overrightarrow{CM}, \overrightarrow{CM'})$.

Lorsque $d\alpha \to 0$, la position limite de C est le centre du cercle, unique, tangent en M à ($\mathcal{C}$).

Dans ce que précède, nous avons considéré $\mathbf{d\alpha > 0}$, nous pouvons également considérer $\mathbf{d\alpha < 0}$.



Pour $d\alpha > 0$ et $ds > 0 \Rightarrow R > 0$ et $\dfrac{\vec{N}}{R}$ dirigé vers C.

Pour $d\alpha < 0$ et $ds > 0 \Rightarrow R < 0$ et $\dfrac{\vec{N}}{R}$ dirigé vers C.

$\vec{N}$ n'est pas forcément dirigé vers l'intérieur de la concavité, toutefois $\dfrac{\vec{N}}{R}$ est toujours vers l'intérieur de la concavité.

Donc $\dfrac{d\vec{T}}{ds} = \dfrac{\vec{N}}{R}$ (équation 2.12), $\vec{N}$ est unitaire et R est algébrique.

Il est commode de prendre R >0 avec $R = \dfrac{ds}{|d\alpha|}$

Résumé :

$$\boxed{\vec{T} = \frac{d\overrightarrow{OM}}{ds}, \quad \frac{d\vec{T}}{ds} = \frac{d^2\overrightarrow{OM}}{ds^2} = \frac{\vec{N}}{R}, \quad \vec{B} = \vec{T} \wedge \vec{N}} \quad (2.12)$$

2.5.2 Formule de Frenet

$$\boxed{\frac{d\vec{T}}{ds} = \frac{\vec{N}}{R}, \quad \frac{d\vec{B}}{ds} = -\frac{\vec{N}}{\tau}, \quad \frac{d\vec{N}}{ds} = \frac{\vec{B}}{\tau} - \frac{\vec{T}}{R}} \quad (2.13)$$

τ est le **rayon de torsion** ou rayon de seconde courbure.

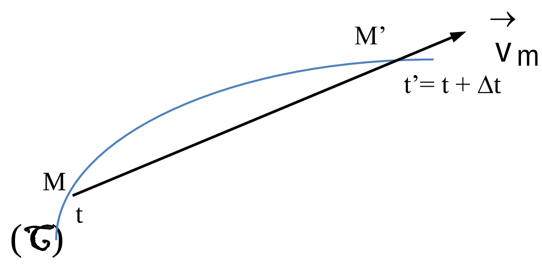
$\dfrac{1}{\tau}$ est la courbure de $(\mathcal{C})$.en M.

3. Vitesse du point matériel

La vitesse caractérise le déplacement plus ou moins rapide du point matériel sur sa trajectoire. Elle s'exprime en m.s^{-1} dans le Système International.

3.1 Vitesse moyenne

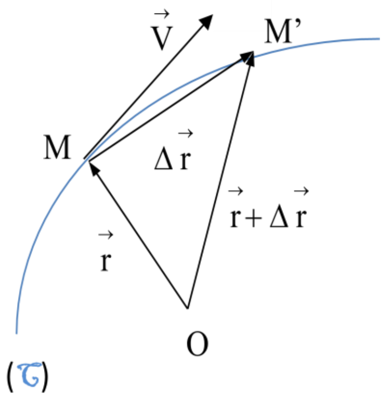
Soient M et M' sont deux positions du point matériel aux instants t et t' sur sa trajectoire $(\mathcal{C})$.



On appelle **vitesse moyenne** entre les points M et M', le vecteur $\vec{v}_m = \dfrac{\overrightarrow{MM'}}{\Delta t}$ avec $\Delta t = t' - t$.

La vitesse moyenne est insuffisante pour caractériser le mouvement du point matériel sur sa trajectoire ; car elle ne donne pas des indications sur le parcours régulier ou bien rapide à certains endroits et lent à d'autres. D'où la considération de la vitesse instantanée (vitesse à l'instant t).

3.2 Vitesse instantanée



Soit O un point fixe de l'espace, posons $\overrightarrow{OM} = \vec{r} = \vec{r}(t)$,

$\overrightarrow{OM'} = \vec{r}(t+\Delta t) = \vec{r} + \Delta\vec{r}$,

$$\vec{V}_m = \frac{\overrightarrow{MM'}}{\Delta t} = \frac{\overrightarrow{OM'} - \overrightarrow{OM}}{\Delta t} = \frac{\vec{r}(t+\Delta t) - \vec{r}(t)}{\Delta t} = \frac{\Delta\vec{r}}{\Delta t}.$$

La vitesse instantanée $\vec{V} = \vec{V}(t)$ du point matériel au point M à l'instant t, est la limite de $\vec{V}_m$ quand t et t' sont de plus en plus proche, c'est-à-dire, quand $\Delta t \to 0$.

$$\vec{V} = \vec{V}(t) = \lim_{\Delta t \to 0} \vec{V}_m = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta\vec{r}}{\Delta t} = \frac{d\overrightarrow{OM}}{dt}$$

$$\boxed{\vec{V} = \vec{V}(t) = \frac{d\overrightarrow{OM}}{dt} = \frac{d\vec{r}}{dt}} \qquad (2.13)$$

La vitesse instantanée $\vec{V} = \vec{V}(t)$ est tangente à la courbe (𝒞) au point M.

3.2.1 Composantes cartésiennes de $\vec{V}(t)$

Soit un référentiel $\mathscr{R}(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$

et $\overrightarrow{OM} = \vec{r}(t) = x(t)\,\vec{i} + y(t)\,\vec{j} + z(t)\,\vec{k}$.

$$\vec{V} = \vec{V}(t) = \frac{d\overrightarrow{OM}}{dt} = \frac{d\vec{r}}{dt} = \frac{dx(t)}{dt}\vec{i} + \frac{dy(t)}{dt}\vec{j} + \frac{dz(t)}{dt}\vec{k}$$

On utilise la notation suivante: $\dfrac{dx}{dt} = \dot{x}$, $\dfrac{dy}{dt} = \dot{y}$, $\dfrac{dz}{dt} = \dot{z}$, soit

$$\boxed{\vec{V} = \vec{V}(t) = \dot{x}\,\vec{i} + \dot{y}\,\vec{j} + \dot{z}\,\vec{k}} \qquad (2.14)$$

$$\left\|\vec{V}\right\| = \left\{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dz}{dt}\right)^2\right\}^{\frac{1}{2}} = \left\{\left(\dot{x}\right)^2 + \left(\dot{y}\right)^2 + \left(\dot{z}\right)^2\right\}^{\frac{1}{2}}$$

Exemple: Un point matériel se déplace le long d'une trajectoire:

$$\overrightarrow{OM} = \vec{r}(t) = (2t^2 + 2t)\,\vec{i} + (6t - 4)\,\vec{j} + (4t^3 - 8t^2)\,\vec{k}.$$

$$\vec{V} = \vec{V}(t) = \frac{d\overrightarrow{OM}}{dt} = \frac{d\vec{r}}{dt} = (4t + 2)\,\vec{i} + 6\,\vec{j} + (12t^2 - 16t)\,\vec{k}$$

$$\left\|\vec{V}\right\| = \left[(4t + 2)^2 + (6)^2 + (12t^2 - 16t)^2\right]^{\frac{1}{2}}$$

3.2.2 Composantes cylindriques de $\vec{V}(t)$

$$\vec{OM} = \vec{OP} + \vec{PM}$$

$$\vec{OM} = \rho\,\vec{e}_\rho + z\,\vec{e}_z = \rho\,\vec{e}_\rho + z\,\vec{k}$$

$$\vec{V} = \vec{V}(t) = \frac{d\overrightarrow{OM}}{dt} =$$

$$\frac{d}{dt}\left(\rho\,\vec{e}_\rho + z\,\vec{k}\right) = \frac{d\rho}{dt}\,\vec{e}_\rho + \rho\,\frac{d\vec{e}_\rho}{dt} + \frac{dz}{dt}\,\vec{k} + z\,\frac{d\vec{k}}{dt}$$

$$\frac{d\rho}{dt} = \dot{\rho},$$

$$\frac{d\vec{e}_\rho}{dt} = \frac{d\vec{e}_\rho}{d\theta}\,\frac{d\theta}{dt} = \dot{\theta}\,\vec{e}_\theta, \qquad \frac{d\vec{k}}{dt} = \vec{0}$$ car le vecteur $\vec{k}$ est fixe.

$$\boxed{\vec{V} = \dot{\rho}\,\vec{e}_\rho + \rho\,\dot{\theta}\vec{e}_\theta + \dot{z}\,\vec{k}} \qquad (2.15)$$

3.2.3 Composantes polaires de $\vec{V}(t)$

En coordonnées polaires z=0 et la vitesse s'écrit :

$$\boxed{\vec{V} = \dot{\rho}\,\vec{e}_\rho + \rho\,\dot{\theta}\vec{e}_\theta} \qquad (2.16)$$

3.2.4 Composantes sphériques de $\vec{V}(t)$

$$\vec{OM} = r\,\vec{e}_r \text{ et } \vec{e}_r = \sin\phi\,\vec{e}_\rho + \cos\phi\,\vec{k}$$

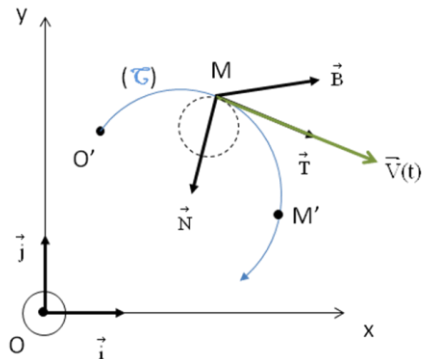
$$\vec{V} = \vec{V}(t) = \frac{d\overrightarrow{OM}}{dt} = \frac{d}{dt}\left(r\,\vec{e}_r\right) = \frac{dr}{dt}\,\vec{e}_r + r\,\frac{d\vec{e}_r}{dt}$$

$$\frac{d\vec{e}_r}{dt} = \frac{d}{dt}\left(\sin\phi\,\vec{e}_\rho + \cos\phi\,\vec{k}\right) = \dot{\phi}\,\vec{e}_\phi + \dot{\theta}\sin\phi\,\vec{e}_\theta$$

$$\boxed{\vec{V} = \dot{r}\vec{e}_r + r\dot{\phi}\,\vec{e}_\phi + r\dot{\theta}\sin\phi\,\vec{e}_\theta} \qquad (2.17)$$

3.2.5 Composantes intrinsèques de $\vec{V}(t)$

Les composantes intrinsèques de $\vec{V}(t)$ sont les composantes de $\vec{V}(t)$ dans le repère de Frenet ou repère de Serret-Frenet



Le vecteur vitesse est porté par la tangente à la trajectoire à l'instant t. Le sens de $\vec{V}(t)$ est celui du mouvement. Le module de $\vec{V}(t)$ est la dérivée de l'abscisse curviligne s.

$$\boxed{V = \left\|\vec{V}(t)\right\| = \frac{d}{dt}(MM') = \frac{ds}{dt}} \qquad (2.18)$$

Or $\vec{T} = \dfrac{d\overrightarrow{OM}}{ds}$ (d'après la relation 2.11)

$$\vec{T} = \frac{d\overrightarrow{OM}}{ds} = \frac{d\overrightarrow{OM}}{dt}\frac{dt}{ds} = \vec{V}\frac{dt}{ds} \quad \Rightarrow \quad \frac{ds}{dt}\vec{T} = \vec{V} \quad \text{d'où}$$

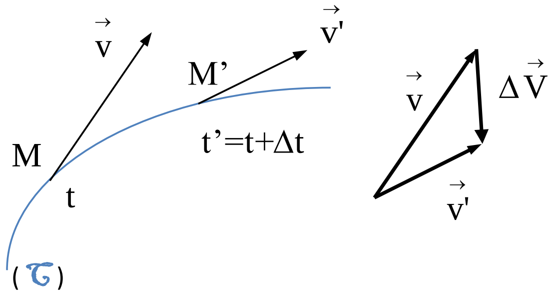
$$\boxed{\vec{V} = \frac{ds}{dt}\vec{T} = \left\|\vec{V}\right\|\vec{T}} \qquad (2.19)$$

4. Accélération du point matériel

L'accélération caractérise la variation de vitesse du point matériel. Elle s'exprime en m.s^{-2} dans le Système International.

4.1 Accélération moyenne

Soient $\vec{V}$ la vitesse à l'instant t au point M et $\vec{V}'$ la vitesse à l'instant t'=t+Δt au point M' sur la courbe (𝔊).



On appelle **accélération moyenne** entre les points M et M', le vecteur $\vec{a}_m = \dfrac{\vec{V}' - \vec{V}}{\Delta t} = \dfrac{\Delta\vec{V}}{\Delta t}$ avec Δt=t' – t.

4.2 Accélération instantanée

L'accélération instantanée $\vec{a}(t)$ du point matériel au point M à l'instant t, est la limite de $\vec{a}_m$ quand t et t' sont de plus en plus proche, c'est-à-dire, quand $\Delta t \to 0$.

$$\vec{a} = \vec{a}(t) = \lim_{\Delta t \to 0} \vec{a}_m = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta \vec{V}}{\Delta t} = \frac{d\vec{V}}{dt} = \frac{d^2\overrightarrow{OM}}{dt^2}$$

$$\boxed{\vec{a} = \vec{a}(t) = \frac{d\vec{V}}{dt} = \frac{d^2\overrightarrow{OM}}{dt^2}} \qquad (2.20)$$

4.2.1 Composantes cartésiennes de $\vec{a}(t)$

$$\vec{a} = \vec{a}(t) = \frac{d\vec{V}}{dt} = \frac{d^2\overrightarrow{OM}}{dt^2} == \frac{d}{dt}\left(\frac{dx}{dt}\vec{i} + \frac{dy}{dt}\vec{j} + \frac{dz}{dt}\vec{k}\right)$$

$$\vec{a} = \vec{a}(t) = \frac{d^2x}{dt^2}\vec{i} + \frac{d^2x}{dt^2}\vec{j} + \frac{d^2x}{dt^2}\vec{k}$$

On utilise la notation pointée comme précédemment:

$\frac{d^2x}{dt^2} = \ddot{x}$, $\frac{d^2y}{dt^2} = \ddot{y}$ et $\frac{d^2z}{dt^2} = \ddot{z}$.

$$\boxed{\vec{a} = \vec{a}(t) = \ddot{x}\,\vec{i} + \ddot{y}\,\vec{j} + \ddot{z}\,\vec{k}} \qquad (2.21)$$

4.2.2 Composantes cylindriques de $\vec{a}(t)$

$$\vec{a} = \vec{a}(t) = \frac{d\vec{V}}{dt} = \frac{d}{dt}(\dot{\rho}\,\vec{e}_\rho + \rho\,\dot{\theta}\vec{e}_\theta + \dot{z}\,\vec{k})$$

$$\vec{a}(t) = \ddot{\rho}\vec{e}_\rho + \dot{\rho}\frac{d\vec{e}_\rho}{dt} + \dot{\rho}\dot{\theta}\vec{e}_\theta + \rho\ddot{\theta}\vec{e}_\theta + \rho\dot{\theta}\frac{d\vec{e}_\theta}{dt} + \ddot{z}\vec{k}$$

$$\vec{a}(t) = \ddot{\rho}\vec{e}_\rho + \dot{\rho}\dot{\theta}\vec{e}_\theta + \dot{\rho}\dot{\theta}\vec{e}_\theta + \rho\ddot{\theta}\vec{e}_\theta - \rho\dot{\theta}^2\,\vec{e}_\rho + \ddot{z}\vec{k}$$

$$\boxed{\vec{a}(t) = \left(\ddot{\rho} - \rho\dot{\theta}^2\right)\vec{e}_\rho + \left(\rho\ddot{\theta} + 2\dot{\rho}\dot{\theta}\right)\vec{e}_\theta + \ddot{z}\,\vec{k}} \qquad (2.22)$$

$\ddot{\rho} - \rho\dot{\theta}^2$: **Composante radiale** de $\vec{a}(t)$

$\rho\ddot{\theta} + 2\dot{\rho}\dot{\theta} = \frac{1}{\rho}\frac{d}{dt}\left(\rho^2\,\dot{\theta}\right)$: **Composante orthoradiale** de $\vec{a}(t)$

4.2.3 Composantes polaires de $\vec{a}(t)$

En coordonnées polaires z=0, $\dot{z}=0$, $\ddot{z}=0$ et l'accélération s'écrit :

$$\boxed{\vec{a}(t) = \left(\ddot{\rho} - \rho\dot{\theta}^2\right)\vec{e}_\rho + \left(\rho\ddot{\theta} + 2\dot{\rho}\dot{\theta}\right)\vec{e}_\theta} \qquad (2.23)$$

4.2.4 Composantes sphériques de $\vec{a}(t)$

$$\vec{V} = \dot{r}\vec{e}_r + r\dot{\phi}\,\vec{e}_\phi + r\dot{\theta}\sin\phi\,\vec{e}_\theta$$

$$\vec{a} = \ddot{r}\vec{e}_r + \dot{r}\frac{d\vec{e}_r}{dt} + \dot{r}\dot{\phi}\,\vec{e}_\phi + r\ddot{\phi}\,\vec{e}_\phi + r\dot{\phi}\,\frac{d\vec{e}_\phi}{dt} + \dot{r}\dot{\theta}\sin\phi\,\vec{e}_\theta$$

$$+ r\ddot{\theta}\sin\phi\,\vec{e}_\theta + r\dot{\theta}\dot{\phi}\cos\phi\,\vec{e}_\theta + r\dot{\theta}\sin\phi\frac{d\vec{e}_\theta}{dt}$$

D'autre part : $\frac{d\vec{e}_r}{dt} = \dot{\phi}\,\vec{e}_\phi + \dot{\theta}\sin\phi\,\vec{e}_\theta$,

$$\frac{d\vec{e}_\phi}{dt} = -\dot{\phi}\vec{e}_r + \dot{\theta}\cos\phi\vec{e}_\theta$$

$$\frac{d\vec{e}_\theta}{dt} = -\dot{\theta}\vec{e}_\rho = -\dot{\theta}\left(\sin\phi\,\vec{e}_r + \cos\phi\,\vec{e}_\phi\right)$$

$$\boxed{\begin{aligned}\vec{a} = &\left(\ddot{r} - r\dot{\phi}^2 - r\dot{\theta}^2\sin^2\phi\right)\vec{e}_r + \left(2\dot{r}\dot{\phi} + r\ddot{\phi} - r\dot{\theta}^2\sin\phi\cos\phi\right)\vec{e}_\phi \\ &+ \left(2\dot{r}\dot{\theta}\sin\phi + 2r\dot{\phi}\dot{\theta}\cos\phi + r\ddot{\theta}\sin\phi\right)\vec{e}_\theta\end{aligned}} \tag{2.24}$$

4.2.5 Composantes intrinsèques de $\vec{a}(t)$

$\vec{V} = \left\|\vec{V}\right\|\vec{T}$ et $\vec{a} = \frac{d\vec{V}}{dt} = \frac{d}{dt}\left(\left\|\vec{V}\right\|\vec{T}\right) = \frac{d\left\|\vec{V}\right\|}{dt}\vec{T} + \left\|\vec{V}\right\|\frac{d\vec{T}}{dt}$

Or $\frac{d\vec{T}}{dt} = \frac{d\vec{T}}{ds}\frac{ds}{dt} = \frac{\vec{N}}{R}\left\|\vec{V}\right\|$

$$\boxed{\vec{a} = \frac{d\left\|\vec{V}\right\|}{dt}\vec{T} + \frac{\left\|\vec{V}\right\|^2}{R}\vec{N} = \vec{a}_T + \vec{a}_N} \tag{2.25}$$

$$\boxed{\vec{a}_T = \frac{d\left\|\vec{V}\right\|}{dt}\vec{T} \quad \text{et} \quad \vec{a}_N = \frac{\left\|\vec{V}\right\|^2}{R}\vec{N}} \tag{2.26}$$

$$\boxed{\frac{1}{R} = \left\|\frac{d\vec{T}}{ds}\right\|}$$

Autres relations :

$\vec{a}_T = a_T\vec{T}$ et $\vec{a}_N = a_N\vec{N}$

$$a_T = \frac{d\left\|\vec{V}\right\|}{dt} = \frac{\vec{V}\bullet\vec{a}}{\left\|\vec{V}\right\|} \tag{2.27}$$

$$a_N = \frac{\left\|\vec{V}\wedge\vec{a}\right\|}{\left\|\vec{V}\right\|} = \frac{\left\|\vec{V}\right\|^2}{R} \tag{2.28}$$

$$R = \frac{\left\|\vec{V}\right\|^3}{\left\|\vec{V}\wedge\vec{a}\right\|} \tag{2.29}$$

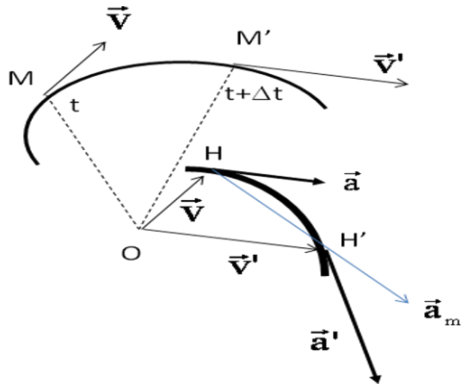
$$\frac{1}{R} = \left\|\frac{d\vec{T}}{ds}\right\| = \frac{\left\|\vec{V}\wedge\vec{a}\right\|}{\left\|\vec{V}\right\|^3} \tag{2.30}$$

4.3 Hodographe ou indicatrice des vitesses

Du point fixe O, on mène le vecteur $\overrightarrow{OH}$ équipollent à $\vec{V}$ ($\overrightarrow{OH'}$ équipollent à $\vec{V}'$) au point M (M'). L'accélération $\vec{a}$ n'est rien d'autre que la vitesse du point H.

Le lieu du point H, extrémité d'un vecteur d'origine fixe O, et équipollent à $\vec{V}$, s'appelle « **indicatrice des vitesses** » ou « **hodographe** ».

$$\overrightarrow{OH} \equiv \vec{V} \quad ; \quad \overrightarrow{OH'} \equiv \vec{V'} \quad ; \quad \vec{a}_m = \frac{\overrightarrow{HH'}}{\Delta t}$$



5. Courbure et torsion

5.1 Rayon de courbure ou rayon de 1ere courbure

Si le rayon vecteur $\vec{r}$ s'exprime en fonction de l'abscisse curviligne s :

$$\vec{r} = \vec{r}(s) \qquad \text{alors} \qquad \frac{1}{R} = \left\| \frac{d^2\vec{r}}{ds^2} \right\| \quad ; \quad \frac{1}{R} = \left\| \frac{d\vec{T}}{ds} \right\|.$$

Si par contre le rayon vecteur $\overrightarrow{OM} = \vec{r}$ s'exprime en fonction du temps t :

$$\vec{r} = \vec{r}(t) \qquad \text{alors} \qquad \frac{1}{R} = \frac{\left\| \frac{d\vec{r}}{dt} \wedge \frac{d^2\vec{r}}{dt^2} \right\|}{\left\| \frac{d\vec{r}}{dt} \right\|^3}.$$

5.2 Rayon de torsion ou rayon de seconde courbure

Si le rayon vecteur $\vec{r}$ s'exprime en fonction de l'abscisse curviligne s :

$$\vec{r} = \vec{r}(s) \qquad \text{alors} \qquad \frac{1}{\tau} = \frac{\left(\frac{d\vec{r}}{ds}, \frac{d^2\vec{r}}{ds^2}, \frac{d^3\vec{r}}{ds^3} \right)}{\left(\frac{d^2\vec{r}}{ds^2} \right)^2}. \qquad (2.31)$$

Si par contre le rayon vecteur $\overrightarrow{OM} = \vec{r}$ s'exprime en fonction du temps t :

$$\vec{r} = \vec{r}(t) \qquad \text{alors} \qquad \frac{1}{\tau} = \frac{\left(\frac{d\vec{r}}{dt}, \frac{d^2\vec{r}}{dt^2}, \frac{d^3\vec{r}}{dt^3} \right)}{\left(\frac{d\vec{r}}{dt} \wedge \frac{d^2\vec{r}}{dt^2} \right)^2}. \qquad (2.32)$$

6. Exemples de mouvement

6.1 Mouvement rectiligne

Le mouvement rectiligne est un mouvement dans lequel la trajectoire est une droite, donc le rayon de courbure $R \to \infty$ et $\frac{1}{R} = 0$.

$$\vec{a} = \vec{a}_T = \frac{d\|\vec{V}\|}{dt}\vec{T} = \frac{d^2s}{dt^2}\vec{T}$$

L'accélération est tangentielle, elle est portée par la trajectoire (Ox) : $a = \dfrac{d^2x}{dt^2}$

6.1.1 Mouvement rectiligne uniforme

Si a = 0 alors le mouvement rectiligne est uniforme.

$$a = \frac{d^2x}{dt^2} = 0 \Rightarrow \frac{dx}{dt} = \text{constant} = v_0 \quad \text{et} \quad x = v_0t + x_0.$$

6.1.2 Mouvement rectiligne uniformément varié

Si a = constant = a_0 alors le mouvement rectiligne est uniformément varié.

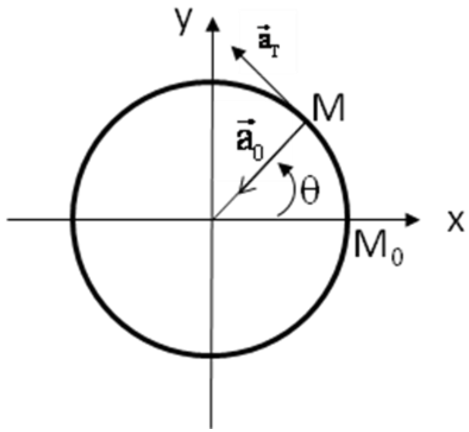
$$a = \frac{d^2x}{dt^2} = a_0 \Rightarrow \frac{dx}{dt} = a_0t + v0 \quad \text{et} \quad x = \frac{1}{2}a_0t^2 + v_0t + x_0.$$

Lorsque $a_0 > 0$, le mouvement est uniformément accéléré.
Lorsque $a_0 < 0$, le mouvement est uniformément retardé.

6.2 Mouvement circulaire

La trajectoire est un cercle de rayon R constant et égale au rayon de courbure, l'abscisse curviligne est alors définie avec l'angle θ.

L'abscisse curviligne $s = R\theta$ et $ds = Rd\theta$



La vitesse $\vec{v} = \dfrac{ds}{dt}\vec{T} = \dfrac{ds}{d\theta}\dfrac{d\theta}{dt}\vec{T} = R\dfrac{d\theta}{dt}\vec{T} = R\dot{\theta}\vec{T}$

Posons $\omega = \dfrac{d\theta}{dt} = \dot{\theta}$ et $\ddot{\theta} = \dot{\omega}$

$\vec{v} = R\omega\vec{T}$ et $\vec{a} = R\dot{\omega}\vec{T} + R\omega^2\vec{N}$

En coordonnées polaires : $\vec{v} = R\omega\vec{e}_\theta$ et $\vec{a} = R\dot{\omega}\vec{e}_\theta - R\omega^2\vec{e}_r$

$$\vec{T} = \vec{e}_\theta \quad \text{et} \quad \vec{N} = -\vec{e}_r$$

$\omega = \dot{\theta}$ est la vitesse angulaire et s'exprime en rad s^{-1}
$\ddot{\theta} = \dot{\omega}$ est l'accélération angulaire et s'exprime en rad s^{-2}

6.2.1 Mouvement circulaire uniforme

$\omega = \dot{\theta}$=cste $=\omega_0 \Rightarrow$ le mouvement circulaire est uniforme et $\ddot{\theta} = \dot{\omega} = 0$.

$\vec{v} = R\omega_0 \vec{T}$ et $\vec{a} = \vec{a}_N = R\omega_0^2 \vec{N}$, $\vec{a}_T = \vec{0}$

$$\dot{\theta} = \frac{d\theta}{dt} = \omega_0 \quad \Rightarrow \quad \theta = \omega_0 t + \theta_0$$

6.2.2 Mouvement circulaire uniformément varié

$\ddot{\theta} = \dot{\omega}$ = constant = $\beta \Rightarrow$ le mouvement circulaire est uniformément varié.

$$\omega = \beta t + \omega_0 \quad ; \quad \theta = \frac{1}{2}\beta t^2 + \omega_0 t + \theta_0 \quad \text{et} \quad \omega^2 - \omega_0^2 = 2\beta(\theta - \theta_0)$$

6.3 Mouvement rectiligne sinusoïdal

Le mouvement rectiligne sinusoïdal correspond à tout mouvement dont l'équation horaire est de la forme :

$$X = X_m \cos(\omega t+\phi)$$

ou sous la forme différentielle : $\ddot{x} + Kx = 0$;

avec

$\alpha = \sqrt{K}$: Pulsation.

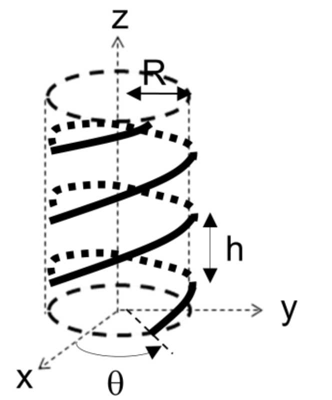
X_m : amplitude maximale du mouvement.

$T = \frac{2\pi}{\sqrt{K}}$: Période du mouvement (temps au bout duquel le mouvement est prêt à recommencer).

$f = \frac{1}{T}$: Fréquence du mouvement ; elle correspond au nombre d'évènements par unité de temps, ici évènement=oscillation.

ϕ : Déphasage à l'origine.

6.4 Mouvement hélicoïdal



Le mouvement hélicoïdal est défini par :

$$\begin{cases} x = R\cos\theta \\ y = R\sin\theta \\ z = h\theta \end{cases} \quad \text{avec } R \text{ et } h \text{ constants.}$$

En coordonnées cylindriques, on a :

$$\begin{cases} \rho = R \quad \text{et} \quad \dot{\rho} = 0 \\ \dot{\theta} = \omega \\ \dot{z} = h\dot{\theta} = h\omega \end{cases}$$

Ainsi, $\vec{V} = \dot{\rho}\,\vec{e}_\rho + \rho\,\dot{\theta}\,\vec{e}_\theta + \dot{z}\,\vec{k}$ devient

$$\vec{V} = R\omega\,\vec{e}_\theta + h\omega\,\vec{k} = \omega\left(R\,\vec{e}_\theta + h\,\vec{k}\right),$$

$$V^2 = \left\|\vec{V}\right\|^2 = \omega^2\left(R^2 + h^2\right) \text{ et}$$

$$\vec{a} = -R\omega^2 \vec{e}_\rho + R\,\dot{\omega}\vec{e}_\theta + h\,\dot{\omega}\,\vec{k}\ ,$$

$$a^2 = \left\|\vec{a}\right\|^2 = \dot{\omega}^2\left(R^2 + h^2\right) + R^2\omega^4$$

Exemple

$$\begin{cases} x = a\cos t \\ y = a\sin t \\ z = b\,t \end{cases}$$ a et b sont des constantes positives.

Calculer la vitesse, l'accélération, la courbure, la torsion, les vecteurs unitaires de la base de Frenet en coordonnées cartésiennes, puis en coordonnées cylindriques. Quel est le repère approprié ?

Réponse

a) En coordonnées cartésiennes

La vitesse $\vec{V}\begin{cases} \dot{x} = -a\sin t \\ \dot{y} = a\cos t \\ \dot{z} = b \end{cases}$ et $\left\|\vec{V}\right\| = \left(a^2 + b^2\right)^{\frac{1}{2}}$;

L'accélération $\vec{a}\begin{cases} \ddot{x} = -a\cos t \\ \ddot{y} = -a\sin t \\ \ddot{z} = 0 \end{cases}$ et $\left\|\vec{a}\right\| = a$;

La Courbure $$\frac{1}{R} = \frac{\left\|\vec{V}\wedge\vec{a}\right\|}{\left\|\vec{V}\right\|^3} = \frac{a\left(a^2+b^2\right)^{\frac{1}{2}}}{\left(a^2+b^2\right)^{\frac{3}{2}}} = \frac{a}{a^2+b^2}$$

La torsion $$\frac{1}{\tau} = \frac{\left(\vec{V}, \vec{a}, \dfrac{d\vec{a}}{dt}\right)}{\left\|\vec{V}\wedge\vec{a}\right\|^2} = \frac{a^2 b}{a^2\left(a^2+b^2\right)} = \frac{b}{a^2+b^2}$$

Les vecteurs de la base de Frenet :

$$\vec{T} = \frac{\vec{V}}{\left\|\vec{V}\right\|},\quad \vec{N} = \frac{R}{\left\|\vec{V}\right\|}\frac{d\vec{T}}{dt} \quad \text{et} \quad \vec{B} = \vec{T}\wedge\vec{N}$$

soient : $$\vec{T}\begin{cases} \dfrac{-a\sin t}{\left(a^2+b^2\right)^{\frac{1}{2}}} \\ \dfrac{a\cos t}{\left(a^2+b^2\right)^{\frac{1}{2}}} \\ \dfrac{b}{\left(a^2+b^2\right)^{\frac{1}{2}}} \end{cases},\quad \vec{N}\begin{cases} -\cos t \\ -\sin t \\ 0 \end{cases},\quad \vec{B}\begin{cases} \dfrac{b\sin t}{\left(a^2+b^2\right)^{\frac{1}{2}}} \\ \dfrac{-b\cos t}{\left(a^2+b^2\right)^{\frac{1}{2}}} \\ \dfrac{a}{\left(a^2+b^2\right)^{\frac{1}{2}}} \end{cases}$$

b) En coordonnées cylindriques

La vitesse $\vec{V}\begin{cases}0\\ a\\ b\end{cases}$ et $\|\vec{V}\| = \left(a^2+b^2\right)^{\frac{1}{2}}$;

L'accélération $\vec{a}\begin{cases}-a\\ 0\\ 0\end{cases}$ et $\|\vec{a}\| = a$;

La Courbure $\dfrac{1}{R} = \dfrac{\|\vec{V}\wedge\vec{a}\|}{\|\vec{V}\|^3} = \dfrac{a\left(a^2+b^2\right)^{\frac{1}{2}}}{\left(a^2+b^2\right)^{\frac{3}{2}}} = \dfrac{a}{a^2+b^2}$

La torsion $\dfrac{1}{\tau} = \dfrac{\left(\vec{V},\vec{a},\dfrac{d\vec{a}}{dt}\right)}{\|\vec{V}\wedge\vec{a}\|^2} = \dfrac{a^2 b}{a^2\left(a^2+b^2\right)} = \dfrac{b}{a^2+b^2}$

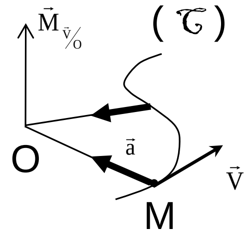
Les vecteurs de la base de Frenet:

$$\vec{T}\begin{cases}0\\ \dfrac{a}{\left(a^2+b^2\right)^{\frac{1}{2}}}\\ \dfrac{b}{\left(a^2+b^2\right)^{\frac{1}{2}}}\end{cases} \quad , \quad \vec{N}\begin{cases}-1\\ 0\\ 0\end{cases} \quad \text{et} \quad \vec{B}\begin{cases}0\\ \dfrac{-b}{\left(a^2+b^2\right)^{\frac{1}{2}}}\\ \dfrac{a}{\left(a^2+b^2\right)^{\frac{1}{2}}}\end{cases}$$

Le repère cylindrique est approprié pour le mouvement hélicoïdal.

6.5 Mouvement à accélération centrale

Définition : lorsque le support d'une **accélération** $\vec{a}$ passe par un point fixe O, on dit qu'elle est **centrale**.



Le moment de la vitesse par rapport au point O est $\vec{M}_{\vec{V}/O} = \overrightarrow{OM}\wedge\vec{V}$.

Si $\vec{V}$ ne passe pas par O $\Rightarrow$ $\vec{M}_{\vec{V}/O} \neq \vec{0}$ et la trajectoire d'un mouvement à accélération centrale est plane.

En effet,

$$\frac{d\vec{M}_{\vec{V}/O}}{dt} = \frac{d\overrightarrow{OM}}{dt}\wedge\vec{V} + \overrightarrow{OM}\wedge\frac{d\vec{V}}{dt}$$

soit $\dfrac{d\vec{M}_{\vec{V}/O}}{dt} = \vec{V}\wedge\vec{V} + \overrightarrow{OM}\wedge\vec{a} = \vec{0} \;\Rightarrow\; \vec{M}_{\vec{V}/O} = \text{Cste} \;\Rightarrow$ le moment de la vitesse par rapport au point O, est fixe.

$\vec{M}_{\vec{V}/O}$ est orthogonal au plan formé par $\overrightarrow{OM}$ et $\vec{V}$.

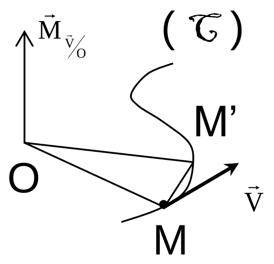
Cela veut dire que le plan contenant la trajectoire et la vitesse est un plan fixe, donc la **trajectoire** est **plane**.
On se place dans le plan (Oxy) et en coordonnées polaires.
On a: $\vec{a}$ passe par $\overrightarrow{OM}$

$$\Rightarrow \ \vec{a} = \left(\ddot{r} - r\dot{\theta}^2\right)\vec{e}_r \ \text{ et } \ r\ddot{\theta} + 2\dot{r}\dot{\theta} = \frac{1}{r}\frac{d}{dt}\left(r^2\dot{\theta}\right) = 0$$

$$\text{Soit} \qquad \boxed{r^2\dot{\theta} = C} \qquad (2.33)$$

6.5.1 Loi des aires

Soient M et M' deux points infiniment voisins sur la courbe ($\mathcal{C}$). Calculons l'aire balayée par unité de temps par le rayon vecteur.



$$dS = \frac{1}{2}(r\,d\theta)r = \frac{1}{2}r^2\,d\theta \quad \Rightarrow \quad \frac{dS}{dt} = \frac{1}{2}r^2\frac{d\theta}{dt} = \frac{1}{2}r^2\dot{\theta} = \frac{1}{2}C$$

$$\Rightarrow \qquad S = \frac{1}{2}C\,t + S_0$$

Dans un mouvement à accélération centrale l'aire balayée par le rayon vecteur est proportionnelle au temps. C'est la loi des aires.

6.5.2 Formules de Binet

Le carré du module de la vitesse donne :

$$V^2 = \dot{r}^2 + r^2\dot{\theta}^2 \quad \text{or} \quad \dot{r} = \frac{dr}{dt} = \frac{dr}{d\theta}\frac{d\theta}{dt} = \frac{dr}{d\theta}\dot{\theta} = -C\frac{d\left(\frac{1}{r}\right)}{d\theta}$$

$$\text{car} \quad d\left(\frac{1}{r}\right) = -\frac{1}{r^2}dr \quad \text{et} \quad \dot{\theta} = \frac{C}{r^2}$$

$$V^2 = C^2\left(\frac{d\left(\frac{1}{r}\right)}{d\theta}\right)^2 + r^2\left(\frac{C}{r^2}\right)^2 = C^2\left(\frac{d\left(\frac{1}{r}\right)}{d\theta}\right)^2 + \frac{C^2}{r^2}$$

1ere formule de Binet $\quad V^2 = C^2\left[\frac{1}{r^2} + \left(\frac{d\left(\frac{1}{r}\right)}{d\theta}\right)^2\right]$

$$\text{Posons} \quad u = \frac{1}{r} \quad \text{et} \quad \text{devient} \quad V^2 = C^2\left[u^2 + \left(\frac{du}{d\theta}\right)^2\right] \qquad (2.34)$$

L'accélération $\vec{a} = \left(\ddot{r} - r\dot{\theta}^2\right)\vec{e}_r = a\,\vec{e}_r$, $\quad \dot{\theta} = \frac{C}{r^2}$ et $r\dot{\theta}^2 = \frac{C^2}{r^3}$

$$\ddot{r} = \frac{d\dot{r}}{dt} = \frac{d\dot{r}}{d\theta}\frac{d\theta}{dt} = \frac{d\dot{r}}{d\theta}\dot{\theta} = -C\frac{d^2\left(\frac{1}{r}\right)}{d\theta^2}\dot{\theta} = -\frac{C^2}{r^2}\frac{d^2\left(\frac{1}{r}\right)}{d\theta^2}$$

$$a = \ddot{r} - r\dot{\theta}^2 \qquad \Rightarrow \qquad a = -\frac{C^2}{r^2}\left[\frac{1}{r} + \frac{d^2\left(\frac{1}{r}\right)}{d\theta^2}\right]$$

2eme formule de Binet : $\boldsymbol{a = -C^2u^2\left[u + \frac{d^2u}{d\theta^2}\right]}$ avec $u = \frac{1}{r}$

(2.35)

7. Composition de mouvement

Jusqu'à présent, le mouvement du point matériel était décrit dans un repère fixe (immobile). En fait, on peut définir un mouvement dans un repère quelconque, lui-même en mouvement par rapport à un autre repère.

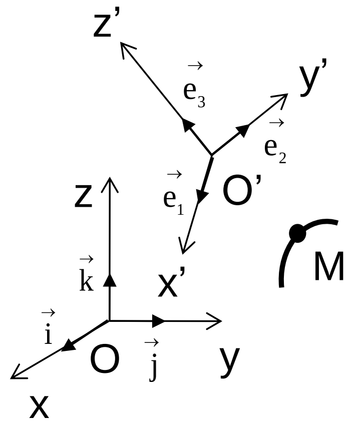
<u>Exemple</u> : Le mouvement d'un passager dans un train en marche. On peut considérer le mouvement du passager par rapport au train, puis le mouvement du train par rapport à la terre, ensuite le mouvement de la terre par rapport au soleil ...

A notre échelle, on peut considérer la terre comme repère fixe. En réalité, les phénomènes que nous observons sont des mouvements relatifs.

7.1 Définitions

Soient R(O, x, y, z) ou R(O, $\vec{i}$, $\vec{j}$, $\vec{k}$) un repère fixe,

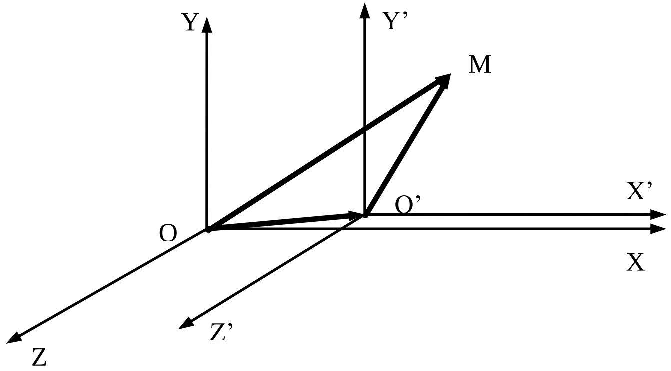
R'(O', x', y', z') ou R'(O', $\vec{e}_1$, $\vec{e}_2$, $\vec{e}_3$) un repère mobile par rapport à R(O, x, y, z) ,
un point matériel M mobile par rapport à R'(O', x', y', z') et donc mobile par rapport à R(O, x, y, z).



- La **trajectoire**, la **vitesse** et l'**accélération** du point matériel M dans le **repère fixe** R(O, x, y, z) sont dites **absolues**. Le mouvement de M, dans ce repère fixe, est un **mouvement absolu**.
- La **trajectoire**, la **vitesse** et l'**accélération** de M dans le **repère mobile** R'(O', x', y', z') sont dites **relatives**. Le mouvement de M, dans ce repère mobile, est un **mouvement relatif**.

- Le mouvement du repère mobile R'(O', $\vec{e}_1$, $\vec{e}_2$, $\vec{e}_3$) par rapport au repère fixe R(O, x, y, z) est un **mouvement d'entrainement**. Ce mouvement est, en général, composé d'une translation de O' par rapport à O et d'une rotation des axes de $\vec{e}_1$, $\vec{e}_2$, $\vec{e}_3$. Pour observer le mouvement d'entrainement, il suffit d'immobiliser le mouvement relatif. Le mouvement d'entrainement est donc le mouvement d'un point matériel M immobile dans un repère R' mobile par rapport à R.

7.2 Transformation de Galilée



On a :

- R(O, x, y, z) muni d'une horloge qui donne un temps t.
- R'(O',x',y',z') muni d'une horloge qui donne un temps t'.
- L'axe O'x' est en mouvement de translation rectiligne uniforme de vitesse $\vec{V}$
- L'axe O'z' est parallèle à Oz et l'axe O'y' à Oy
- A l'origine des temps O et O' coïncident et t = t'.

En cinématique classique, dite **galiléenne**, le temps est indépendant du repère: il est invariant $\Rightarrow$ t = t' à tout instant.

$$\vec{OM} = \vec{OO'} + \vec{O'M} \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} x = Vt + x' \\ y = y' \\ z = z' \\ t = t' \end{cases}$$

qui est appelée « **transformation de Galilée** ».

7.3 Loi de composition du vecteur position

La relation de Charles donne : $\vec{OM} = \vec{OO'} + \vec{O'M}$

$\vec{OM} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}$ dans R

$\vec{O'M} = x'\vec{e}_1 + y'\vec{e}_2 + z'\vec{e}_3$ dans R'

7.4 Loi de composition des vitesses

Dérivons la relation $\vec{OM} = \vec{OO'} + \vec{O'M}$ dans R:

$$\left.\frac{d\vec{OM}}{dt}\right)_{(R)} = \left.\frac{d\vec{OO'}}{dt}\right)_{(R)} + \left.\frac{d\vec{O'M}}{dt}\right)_{(R)} \tag{2.36}$$

Notons :

$$\left.\frac{d\vec{OM}}{dt}\right)_{(R)} = \dot{x}\,\vec{i} + \dot{y}\,\vec{j} + \dot{z}\,\vec{k} = \vec{V}(M)\Big]_{(R)} = \vec{V}_a \quad \text{dans R}$$

$$\left.\frac{d\vec{O'M}}{dt}\right)_{(R')} = \dot{x}'\vec{e}_1 + \dot{y}'\vec{e}_2 + \dot{z}'\vec{e}_3 = \vec{V}(M)\Big]_{(R')} = \vec{V}_r \quad \text{dans R'}$$

Calculons :

$$\left.\frac{d\vec{O'M}}{dt}\right)_{(R)} = \frac{d}{dt}\left(x'\vec{e}_1 + y'\vec{e}_2 + z'\vec{e}_3\right)\Big]_{(R)} = \dot{x}'\vec{e}_1 + \dot{y}'\vec{e}_2 + \dot{z}'\vec{e}_3 +$$

$$x'\frac{d\vec{e}_1}{dt} + y'\frac{d\vec{e}_2}{dt} + z'\frac{d\vec{e}_3}{dt}$$

$$\left.\frac{d\vec{O'M}}{dt}\right)_{(R)} = \left.\frac{d\vec{O'M}}{dt}\right)_{(R')} + x'\frac{d\vec{e}_1}{dt} + y'\frac{d\vec{e}_2}{dt} + z'\frac{d\vec{e}_3}{dt}$$

$$\left.\frac{d\vec{O'M}}{dt}\right)_{(R)} = \left.\frac{d\vec{O'M}}{dt}\right)_{(R')} + x'(\vec{\omega}\wedge\vec{e}_1) + y'(\vec{\omega}\wedge\vec{e}_2) + z'(\vec{\omega}\wedge\vec{e}_3)$$

$$\left.\frac{d\vec{O'M}}{dt}\right)_{(R)} = \left.\frac{d\vec{O'M}}{dt}\right)_{(R')} + (\vec{\omega}\wedge x'\vec{e}_1) + (\vec{\omega}\wedge y'\vec{e}_2) + (\vec{\omega}\wedge z'\vec{e}_3)$$

$$\left.\frac{d\vec{O'M}}{dt}\right)_{(R)} = \left.\frac{d\vec{O'M}}{dt}\right)_{(R')} + \vec{\omega}\wedge(x'\vec{e}_1 + y'\vec{e}_2 + z'\vec{e}_3)$$

$$\left.\frac{d\vec{O'M}}{dt}\right)_{(R)} = \left.\frac{d\vec{O'M}}{dt}\right)_{(R')} + \vec{\omega}\wedge\vec{O'M} \quad \text{ou} \quad \left.\frac{d\vec{O'M}}{dt}\right)_{(R)} = \vec{V}_r + \vec{\omega}\wedge\vec{O'M} \qquad (2.37)$$

Finalement (2.36) s'écrit

$$\left.\frac{d\vec{OM}}{dt}\right)_{(R)} = \left.\frac{d\vec{OO'}}{dt}\right)_{(R)} + \vec{\omega}\wedge\vec{O'M} + \left.\frac{d\vec{O'M}}{dt}\right)_{(R')} \Leftrightarrow \boxed{\vec{V}_a = \vec{V}_e + \vec{V}_r} \qquad (2.38)$$

avec $\vec{V}_e = \left.\frac{d\vec{OO'}}{dt}\right)_{(R)} + \vec{\omega}\wedge\vec{O'M}$: vitesse d'entrainement

$\vec{V}(O')\Big]_R = \left.\frac{d\vec{OO'}}{dt}\right)_{(R)}$: vitesse d'entrainement de translation

$\vec{\omega}\wedge\vec{O'M}$: vitesse d'entrainement de rotation

$\vec{\omega} = \vec{\omega}_{R'/R}$: vecteur rotation de R' par rapport à R

$\left.\frac{d\vec{OM}}{dt}\right)_{(R)} = \vec{V}(M)\Big]_{(R)} = \vec{V}_a$: vitesse absolue

$\left.\frac{d\vec{O'M}}{dt}\right)_{(R')} = \vec{V}(M)\Big]_{(R')} = \vec{V}_r$: vitesse relative

7.5 Loi de composition des accélérations

La dérivation de (2.38) donne $\left.\frac{d\vec{V}_a}{dt}\right)_R = \left.\frac{d\vec{V}_e}{dt}\right)_R + \left.\frac{d\vec{V}_r}{dt}\right)_R$

Calculons $\left.\frac{d\vec{V}_e}{dt}\right)_R$

$$\left.\frac{d\vec{V}_e}{dt}\right)_R = \left.\frac{d^2\vec{OO'}}{dt^2}\right)_{(R)} + \left.\frac{d(\vec{\omega}\wedge\vec{O'M})}{dt}\right)_R$$

$$\left.\frac{d\vec{V}_e}{dt}\right)_R = \left.\frac{d^2\vec{OO'}}{dt^2}\right)_{(R)} + \left.\frac{d\vec{\omega}}{dt}\right)_R \wedge\vec{O'M} + \vec{\omega}\wedge\left.\frac{d\vec{O'M}}{dt}\right)_R$$

$$\left.\frac{d\vec{V}_e}{dt}\right)_R = \left.\frac{d^2\vec{OO'}}{dt^2}\right)_{(R)} + \left.\frac{d\vec{\omega}}{dt}\right)_R \wedge\vec{O'M} + \vec{\omega}\wedge\left(\vec{V}_r + \vec{\omega}\wedge\vec{O'M}\right)$$

$$\left.\frac{d\vec{V}_e}{dt}\right)_R = \left.\frac{d^2\vec{OO'}}{dt^2}\right)_{(R)} + \left.\frac{d\vec{\omega}}{dt}\right)_R \wedge\vec{O'M} + \vec{\omega}\wedge\vec{V}_r + \vec{\omega}\wedge\left(\vec{\omega}\wedge\vec{O'M}\right)$$

Ensuite exprimons $\left.\frac{d\vec{V}_r}{dt}\right)_R$

$$\left.\frac{d\vec{V}_r}{dt}\right)_R = \left.\frac{d\vec{V}_r}{dt}\right)_{R'} + \vec{\omega}\wedge\vec{V}_r$$

Finalement

$$\left.\frac{d\vec{V}_a}{dt}\right)_R = \left.\frac{d^2\vec{OO'}}{dt^2}\right)_{(R)} + \left.\frac{d\vec{\omega}}{dt}\right)_R \wedge\vec{O'M} + \vec{\omega}\wedge\left(\vec{\omega}\wedge\vec{O'M}\right) + \left.\frac{d\vec{V}_r}{dt}\right)_{R'} + 2\vec{\omega}\wedge\vec{V}_r$$

$$\boxed{\vec{a}_a = \vec{a}_e + \vec{a}_r + \vec{a}_c} \qquad (2.39)$$

Avec

$\vec{a}_a = \left.\frac{d\vec{V}_a}{dt}\right)_R = \left.\frac{d^2\vec{OM}}{dt^2}\right)_{(R)} = \left.\vec{a}(M)\right]_R$: accélération absolue

$\vec{a}_e = \left.\frac{d^2\vec{OO'}}{dt^2}\right)_{(R)} + \left.\frac{d\vec{\omega}}{dt}\right)_R \wedge\vec{O'M} + \vec{\omega}\wedge\left(\vec{\omega}\wedge\vec{O'M}\right)$: accélération d'entrainement

$\vec{a}_r = \left.\frac{d\vec{V}_r}{dt}\right)_{R'} = \left.\frac{d^2\vec{O'M}}{dt^2}\right)_{(R')} = \left.\vec{a}(M)\right]_{R'}$: accélération relative

$\vec{a}_c = 2\vec{\omega}\wedge\vec{V}_r$: accélération de Coriolis

7.6 Mouvement de translation uniquement de R' par rapport à R

$\vec{\omega} = \vec{0}$

$\Rightarrow \left.\frac{d\vec{O'M}}{dt}\right)_{(R)} = \left.\frac{d\vec{O'M}}{dt}\right)_{(R')} = \left.\vec{V}(M)\right]_{(R')} = \vec{V}_r$ et $\vec{V}_e = \left.\frac{d\vec{OO'}}{dt}\right)_{(R)} = \left.\vec{V}(O')\right]_R$

$$\boxed{\vec{V}a = \vec{V}(O')\big]_R + \vec{V}(M)\big]_{R'}}$$

$$\vec{a}_e = \left.\frac{d^2\,\vec{OO'}}{dt^2}\right)_{(R)} = \vec{a}(O')\big]_R \quad \text{et} \quad \vec{a}_c = \vec{0}$$

$$\boxed{\vec{a}(M)\big]_R = \vec{a}(O')\big]_R + \vec{a}(M)\big]_{R'}}$$

Remarque

Si le mouvement de translation est uniforme alors :

$$\vec{V}_e = \left.\frac{d\,\vec{OO'}}{dt}\right)_{(R)} = \vec{V}(O')\big]_R = cte \text{ et } \vec{a}_e = \left.\frac{d^2\,\vec{OO'}}{dt^2}\right)_{(R)} = \vec{a}(O')\big]_R = \vec{0}$$

$\boxed{\vec{a}(M)\big]_R = \vec{a}(M)\big]_{R'}}$ $\Rightarrow$ invariance de $\vec{a}$ par changement de repère.

7.7 Mouvement de rotation uniquement de R’ par rapport à R autour d’un axe fixe

Etudions le cas d’une rotation uniforme autour de l’axe Oz :

$$\vec{\omega} = \vec{\omega}_{R'/R} = \vec{cte} \quad , \quad \vec{\omega} = \vec{\omega}_{R'/R} = \omega\vec{k} \quad \text{et} \quad \vec{OO'} = \vec{cte}$$

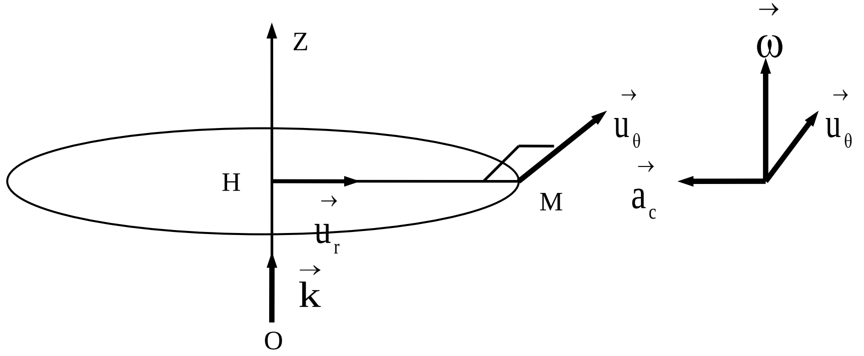
L’expression de la composition des vitesses devient :

$$\left.\frac{d\,\vec{OM}}{dt}\right)_{(R)} = \vec{\omega}\wedge\vec{O'M} + \left.\frac{d\,\vec{O'M}}{dt}\right)_{(R')}$$

La composition des accélérations s’écrit :

$$\left.\frac{d\vec{V}_a}{dt}\right)_R = \vec{\omega}\wedge\left(\vec{\omega}\wedge\vec{O'M}\right) + \left.\frac{d\vec{V}_r}{dt}\right)_{R'} + 2\,\vec{\omega}\wedge\vec{V}_r$$

Si de plus O’=O alors $\vec{\omega} = \vec{\omega}_{R'/R} = \omega\vec{k} = \omega\vec{e}_3$ et on a :



$$\vec{a}_e = \vec{\omega}\wedge(\vec{\omega}\wedge\vec{OM}) = \vec{\omega}\wedge(\vec{\omega}\wedge(\vec{OH}+\vec{HM})) = \vec{\omega}\wedge(\vec{\omega}\wedge\vec{HM})$$

$$\vec{\omega}\wedge\vec{HM} = \omega r\,\vec{U}_\theta \Rightarrow$$

$$\vec{a}_e = \vec{\omega}\wedge\,\omega r\,\vec{U}_\theta = -\omega^2 r\,\vec{U}_r \text{ (on a une accélération centripète)}$$

$$\vec{a}_a = \vec{a}_r + \vec{a}_c - \omega^2\,\vec{HM} \quad \text{avec} \quad \vec{HM} = r\,\vec{U}_r$$

$$\vec{a}_a = \vec{a}_r + 2\,\vec{\omega}\wedge\vec{V}_r - \omega^2\,\vec{HM}$$

$\vec{a}_a = -\omega^2\,\vec{HM}$ si $\vec{V}_r = \vec{0}$ (l’objet est immobile dans le repère tournant)

CHAPITRE 3: DYNAMIQUE DU POINT MATERIEL

La dynamique est l'étude des mouvements des corps soumis à des actions. La relation entre les actions et le mouvement constitue la dynamique du point matériel. Le point matériel est un corps idéal d'un point mathématique et une masse.

1. Masse et quantité de mouvement

1.1 Masse du point matériel

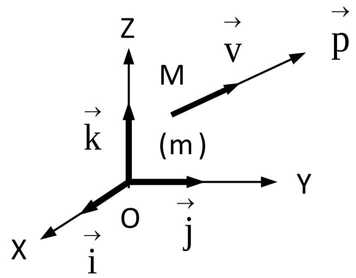
- Définition d'un point matériel: on appelle point matériel tout solide dont les ***dimensions sont très petites par rapport à l'échelle à laquelle on se place*** et dont le mouvement ne peut être qu'un ***mouvement de translation***. Ces deux conditions sont impératives.

- Définition de la masse d'un point matériel: La masse d'un point matériel caractérise la quantité de matière contenue dans le volume de celui-ci. C'est un scalaire positif, noté m.

1.2 Quantité de mouvement

Soit un point matériel M, de masse m animé d'une vitesse $\vec{v}$ dans un repère R, la quantité de mouvement $\vec{p}$ de M dans R est:

$$\vec{p} = m\vec{v}.$$



La quantité de mouvement s'exprime en $kg.m.s^{-1}$ dans le Système International.

2. Notion de force

2.1 Point matériel mécaniquement isolé

Un point matériel qui ne subit aucune **action de la part du milieu extérieur**, constitue une particule libre.

Remarque: Si les actions extérieures se compensent alors tout se passe comme si on n'avait aucune action agissante.

2.2 Point matériel soumis à des actions

On appelle **force**, toute action physique susceptible de modifier la quantité de mouvement d'un point matériel.

La **force** est une **grandeur vectorielle** et **additive**. La résultante des forces en un point M est la somme vectorielle des diverses appliquées.

2.3 Type de forces

On distingue deux grandes catégories de force :
- les forces de contact;
- les forces à distances.

2.3.1 Forces de contact

Les forces de contact nécessitent que deux corps soient en contact pour apparaître. On distingue :
- les **forces de pression** ;
- les **forces de frottement** [***solide sur solide*** (coefficient de frottement statique, coefficient de frottement cinétique), ***solide sur fluide*** (coefficient de viscosité)].

2.3.2 Forces à distances

Il n'est pas nécessaire que les corps soient en contact. Citons quelques-unes :
- les **forces électrostatiques**

$$\vec{F} = K\frac{q_1 q_2}{r^2}\vec{e}_r \quad \text{avec} \quad \vec{r} = \overrightarrow{O_1O_2} \quad \text{et} \quad \vec{e}_r = \frac{\vec{r}}{r});$$

- les **forces de gravitation**

$$\vec{F}_{21} = -G\frac{m_1 m_2}{r^2}\vec{e}_r \quad \text{avec} \quad r = O_1O_2\,;$$

- les **forces de pesanteur** (force de gravitation au voisinage de la terre);
- les **forces électromagnétiques**

la force de Lorentz $\vec{F} = q\,(\vec{E} + \vec{V} \wedge \vec{B})$ avec

q : charge au repos ou en mouvement dans un référentiel galiléen, de vitesse $\vec{V}$;

$\vec{E}$ et $\vec{B}$: champs électrique et magnétique respectivement.

3. Lois fondamentales de la dynamique

Il s'agit de trois lois de Newton (1687).

3.1 Première loi de Newton ou Principe d'inertie

Il existe au moins un référentiel privilégié R par rapport auquel tout point matériel, éloigné de tout autre corps, a un mouvement rectiligne uniforme, ce qui se traduit par :

$$\vec{v} = \text{cte ou } \vec{p} = \text{cte}$$

Ce principe a été établi par Galilée à partir des expériences terrestres dans lesquelles, le poids d'un corps, dû principalement à l'attraction terrestre, était compensé par une force occasionnelle telle que la réaction verticale d'un support.

Des expériences en mécanique ont montré que le référentiel terrestre réalise une moins bonne approximation d'un référentiel privilégié. Cependant, ce référentiel est largement suffisant pour la plupart des besoins en mécanique.

On peut définir un référentiel galiléen.

3.1.1 Définition d'un référentiel galiléen

On postule en mécanique classique, qu'il existe un référentiel dans lequel, la quantité de mouvement d'un point matériel M mécaniquement isolé (éloigné de tout autre corps), est constante. Ce référentiel est dit galiléen (Rg).

3.1.2 Inertie d'un corps

L'**inertie d'un corps** est la résistance qu'il oppose à tout changement de sa vitesse. Plus le mouvement initial est lent, plus l'inertie est grande.

3.1.3 Résumé du Principe d'inertie

La définition d'un référentiel galiléen conduit au principe d'inertie :

Un point matériel M, mécaniquement isolé, au repos ou en mouvement, dans un référentiel galiléen, se maintient dans l'état de repos s'il est au repos ; il est animé d'un mouvement rectiligne uniforme s'il est en mouvement.

3.2 Deuxième loi de Newton ou Loi fondamentale de la dynamique

3.2.1 Enoncé

Dans tout référentiel galiléen (Rg), le mouvement d'un point matériel M, de masse m, soumis à plusieurs forces (ou actions extérieures), dont la somme ou la résultante est $\vec{F}$, satisfait à la relation :

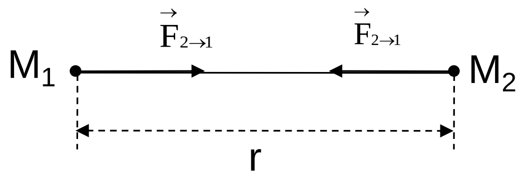
$$\vec{F} = \left.\frac{d\vec{p}}{dt}\right]_{Rg} = \left.\frac{d\left(m\vec{v}\right)}{dt}\right]_{Rg} = m\left.\frac{d\vec{v}}{dt}\right]_{Rg} = m\,\vec{a}_{M/Rg}$$

3.2.2 Conséquence : inertie de la masse

La propriété de la masse dans son intervention au niveau de la loi fondamentale de la dynamique s'appelle l'inertie, car pour deux points matériels, initialement repos dans Rg, soumis à la même force $\vec{F}$, celui dont la masse est plus grande acquiert l'accélération la plus faible. Son aptitude à s'opposer à l'effet de $\vec{F}$ est donc plus grande ; on dit que son inertie est la plus grande.

3.3 Troisième loi de Newton ou Principe des actions réciproques

Cette loi est aussi appelée Principe de l'action et de la réaction.

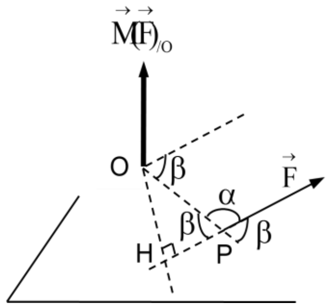


Si un point matériel M_1 exerce sur un autre point matériel M_2 une force $\vec{F}_{1\to 2}$, M_2 exerce sur M_1 une force $\vec{F}_{2\to 1}$ opposée et égale en module:

$$\vec{F}_{2\to 1} = -\vec{F}_{1\to 2}$$

4. Moment d'une force

4.1 Moment d'une force par rapport à un point fixe



Soit $\vec{F}$ une force appliquée en P. Le moment de $\vec{F}$ par rapport à un point O de l'espace est par définition :

$$\vec{M}(\vec{F})_{/O} = \overrightarrow{OP} \wedge \vec{F}$$

$$\left\|\vec{M}(\vec{F})_{/O}\right\| = \left\|\overrightarrow{OP}\right\| \left\|\vec{F}\right\| \left|\sin(\overrightarrow{OP},\vec{F})\right| \quad \text{soit} \quad \left\|\vec{M}(\vec{F})_{/O}\right\| = OH \left\|\vec{F}\right\|$$

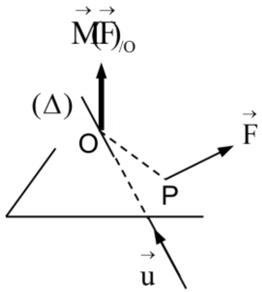
$$\text{car } OH = \left\|\overrightarrow{OP}\right\| \left|\sin(\overrightarrow{OP},\vec{F})\right| = \left\|\overrightarrow{OP}\right\| \left|\sin\beta\right|$$

4.2 Moment d'une force par rapport à un point fixe: changement d'origine

$$\vec{M}(\vec{F})_{/O'} = \overrightarrow{O'P} \wedge \vec{F} = (\overrightarrow{O'O} + \overrightarrow{OP}) \wedge \vec{F} = \overrightarrow{O'O} \wedge \vec{F} + \overrightarrow{OP} \wedge \vec{F}$$

$$\vec{M}(\vec{F})_{/O'} = \overrightarrow{O'O} \wedge \vec{F} + \vec{M}(\vec{F})_{/O}$$

4.3 Moment d'une force par rapport à un axe (Δ)



Soient $\vec{u}$ un vecteur unitaire de l'axe (Δ), et $\vec{M}(\vec{F})_{/O} = \overrightarrow{OP} \wedge \vec{F}$ le moment de $\vec{F}$ par rapport à un point O appartenant à (Δ).

$$\vec{M}(\vec{F})_{/\Delta} = \vec{M}(\vec{F})_{/O} \bullet \vec{u}$$

Le moment de $\vec{F}$ par rapport à un axe (Δ) est un scalaire. Il représente le produit mixte ($\overrightarrow{OP}$, $\vec{F}$, $\vec{u}$):

$$\vec{M}(\vec{F})_{/\Delta} = \left(\overrightarrow{OP} \wedge \vec{F}\right) \bullet \vec{u} \qquad (4.2)$$

Le moment de $\vec{F}$ par rapport à un axe (Δ) est la mesure algébrique de la projection de $\vec{M}(\vec{F})_{/O}$ sur l'axe orienté (Δ).

5. Moment cinétique

5.1 Définition

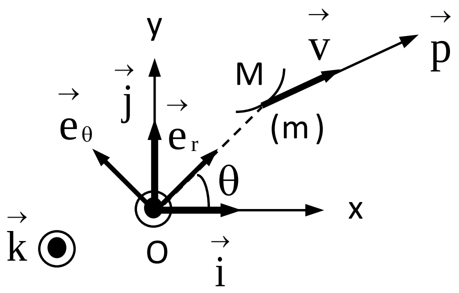
On appelle moment cinétique d'un point matériel M, en un point O d'un référence Rg, le moment de la quantité de mouvement.

$$\vec{L}_O(M)\Big]_{(Rg)} = \overrightarrow{OM} \wedge \vec{p}(M)\Big]_{(Rg)} = \overrightarrow{OM} \wedge m\,\vec{v}_{M/Rg}$$

Remarque:

- $\vec{L}_{O'}(M) = \vec{O'M} \wedge \vec{p} = \vec{L}_O(M) + \vec{O'O} \wedge \vec{p}$
- $L_\Delta(M) = \vec{L}_O(M) \bullet \vec{u}$

Exemple: mouvement plan – Repère polaire



$\vec{OM} = r\,\vec{e}_r \quad , \quad \vec{V} = \dot{r}\,\vec{e}_r + r\,\dot{\theta}\,\vec{e}_\theta$

Calculons le moment cinétique $\vec{L}_O(M) = \overrightarrow{OM} \wedge m\vec{V}$:

$\vec{L}_o(M) = r\vec{e}_r \wedge m\left(\dot{r}\,\vec{e}_r + r\dot{\theta}\,\vec{e}_\theta\right) = mr^2\dot{\theta}\,(\vec{e}_r \wedge \vec{e}_\theta)$, soit

$$\vec{L}_O(M) = m r^2\,\dot{\theta}\,\vec{k}$$

Le moment cinétique par rapport à l'axe Oz:

$$L_{Oz}(M) = \vec{L}_O(M) \bullet \vec{k} = m r^2\,\dot{\theta}$$

Le moment cinétique par rapport à l'axe Ox:

$$L_{Ox}(M) = \vec{L}_O(M) \bullet \vec{i} = 0$$

Le moment cinétique par rapport à l'axe Oy:

$$L_{Oy}(M) = \vec{L}_O(M) \bullet \vec{j} = 0$$

5.2 Théorème du moment cinétique

Enoncé : Soit un point fixe O dans le référentiel (Rg), la dérivée par rapport au temps du moment cinétique par rapport O dans (Rg) d'un point matériel M de masse m est égale au moment par rapport O de la force résultante des forces appliquées en M.

$$\left.\frac{d\vec{L}_o}{dt}\right]_{(Rg)} = \vec{M}_{/O}(\vec{F})$$

En effet:

$$\left.\frac{d\vec{L}_o}{dt}\right]_{(Rg)} = \left.\frac{d(\vec{OM} \wedge m\vec{V})}{dt}\right]_{(Rg)} = \left.\frac{d\vec{OM}}{dt} \wedge m\vec{V}\right]_{(Rg)} + \vec{OM} \wedge m\left.\frac{d\vec{V}}{dt}\right]_{(Rg)}$$

$$= \vec{OM} \wedge \vec{F} = \vec{M}_{/O}(\vec{F})$$

Remarque:

La quantité de mouvement se conserve si la résultante des forces appliquées est nulle.

$$\vec{F} = \vec{0} \quad \text{alors} \quad \frac{d\vec{p}}{dt} = \vec{0} \quad \Rightarrow \quad \vec{p} = cte$$

5.3 Conservation du moment cinétique

Si le moment de la résultante des forces appliquées est nul alors le moment cinétique se conserve.

$$\vec{M}_{/O}(\vec{F}) = \vec{0} \quad \text{alors} \quad \frac{d\vec{L}_o}{dt} = \vec{0} \quad \Rightarrow \quad \vec{L}_o = cte$$

Remarque

$\vec{M}_{/O}(\vec{F}) = \vec{0}$ soit $\vec{F} = \vec{0}$, soit $\vec{F}$ passe par O (cas des forces centrales)

5.4 Mouvement à forces centrales - Loi des aires

5.4.1 Définition d'une force centrale

Une force $\vec{F}$ appliquée à un point M, est centrale quand son support passe constamment par un point fixe O et le module de cette force ne dépend que de la distance r de M à O.

Exemples:

$\vec{F} = \frac{K}{r^2}\vec{e}_r$ force de gravitation ou électrique;

$\vec{F} = -K\, r\, \vec{e}_r$ force élastiquement liée.

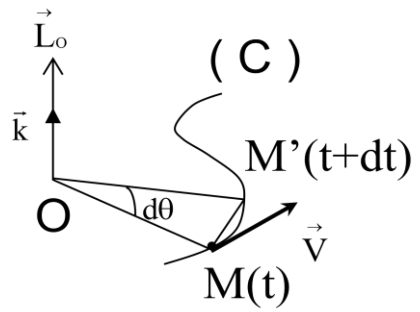
5.4.2 Conservation du moment cinétique

Le moment par rapport à O de $\vec{F}$ est alors nul : $\vec{M}_{/O}(\vec{F}) = \vec{0}$,

ce qui donne $\frac{d\vec{L}_o}{dt} = \vec{0}$ et $\vec{L}_o = cte$.

$\vec{L}_o$ est toujours perpendiculaire au plan $(\vec{OM}, \vec{V})$ par définition. Ce plan est fixe et la trajectoire du point matériel est une courbe plane contenue dans ce plan.

5.4.3 Loi des aires



L'aire balayée par le rayon vecteur par unité de temps $\frac{dS}{dt} = \frac{1}{2}r^2\dot{\theta}$ et la constante des aires $C = r^2\dot{\theta}$.

D'autre part $\vec{L}_O = m r^2 \dot{\theta}\, \vec{k} \quad \Rightarrow \quad L_O = \left\| \vec{L}_O \right\| = m r^2 \dot{\theta}$;

d'où $L_O = mC \quad \Rightarrow \quad C = \frac{L_O}{m}$ par conséquent $\frac{dS}{dt} = \frac{L_O}{2m}$.

$\frac{dS}{dt}$ est la **vitesse aréolaire**

La vitesse aréolaire est constante, c'est-à-dire le rayon vecteur balaie des aires égales pendant des temps égaux.

C'est ce qui se passe avec le mouvement des planètes. La force d'attraction (force de Newton) est toujours dirigée vers Soleil. C'est donc une force centrale. La trajectoire des planètes est plane. Le mouvement des planètes s'effectue suivant la loi des aires.

5.5 Aspect pratique du moment cinétique

Il est conseillé d'utiliser le théorème du moment cinétique quand dans le bilan des forces appliquées, une force de liaison (tension ou réaction) passe par un point fixe O d'un référentiel Rg. Cela permet la non-intervention des forces de liaison et l'obtention directe de l'équation différentielle du mouvement.

6. Méthode d'application de la Loi Fondamentale de la Dynamique

Pour appliquer la loi fondamentale de la dynamique sans erreur, il convient de procéder comme suit :

1. Définition du système
2. Nature du référentiel R par rapport auquel on étudie le mouvement
3. Bilan des forces
4. Expression vectorielle de la loi fondamentale de la dynamique
5. Projection dans une base
6. Résolution des équations différentielles avec prise en compte des conditions initiales sur la position et sur la vitesse
7. Analyse physique des résultats.

En conclusion : La loi fondamentale de la dynamique permet d'étudier tout problème de mécanique du point matériel connaissant les forces qui s'exercent sur lui. Son application fournit en général trois équations différentielles du second ordre qu'il faudra résoudre pour connaître le type de mouvement. La difficulté se présente alors sous la forme uniquement mathématique. Les constantes obtenues par cette dernière résolution sont déterminées de manière non ambiguë par les conditions particulières du mouvement, le plus souvent, qui portent sur la position et la vitesse.

Tout l'intérêt de cette loi vient de son très large domaine d'application. Rappelons que les limitations de ce domaine sont définies par:

- l'échelle atomique (10^{-9} m) ;
- les vitesses non négligeables devant la vitesse de la lumière dans le vide $c \approx 300\,000$ km s^{-1}.

7. Dynamique du point matériel dans un référentiel R' non galiléen. Forces d'inertie.

Soit R' un référentiel en mouvement quelconque par rapport à un référentiel galiléen (Rg).

D'après la composition des accélérations $\vec{a} = \vec{a}_e + \vec{a}_r + \vec{a}_c$, nous avons:

$$\vec{F} = m\vec{a} = m\vec{a}_e + m\vec{a}_r + m\vec{a}_c \quad \text{dans (Rg) ..}$$

$\Rightarrow \quad m\vec{a}_r = \vec{F} - m\vec{a}_e - m\vec{a}_c$ dans le référentiel (R') non galiléen.

La loi fondamentale de la dynamique dans R', s'écrit donc:

$$\left.\frac{d\vec{p}}{dt}\right]_{R'} = m\vec{a}_r = \vec{F} + \vec{F}_{ie} + \vec{F}_{ic}$$

Avec $\vec{F}_{ie} = -m\vec{a}_e$: force d'inertie d'entraînement;

$\vec{F}_{ic} = -m\vec{a}_c$: force d'inertie de Coriolis.

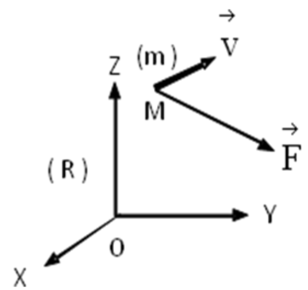
La loi fondamentale de la dynamique peut être appliquée dans un référentiel quelconque (R') non galiléen, pourvu que l'on ajoute aux forces précédentes, les forces d'inertie. Les forces d'inertie sont dues uniquement au caractère non privilégié du référentiel R' ; pour cette raison, on les appelle aussi **forces de repère**.

CHAPITRE 4: TRAVAIL D'UNE FORCE. ENERGIE CINETIQUE. ENERGIE POTENTIELLE. ENERGIE MECANIQUE

Nous allons déduire de la loi fondamentale de la dynamique du point matériel un théorème faisant intervenir des grandeurs scalaires, telles la puissance d'une force, le travail, l'énergie cinétique, l'énergie potentielle et l'énergie mécanique.

1. Puissance et travail d'une force

Considérons, dans un référentiel R, un point matériel M de vitesse $\vec{v}$ soumis à une force $\vec{F}$.



1.1 Puissance d'une force

La puissance de $\vec{F}$ s'exerçant sur M ou puissance reçue par M est:

$$P = \vec{F} \bullet \vec{V}.$$

Dans un repère cartésien, $\vec{F} = F_x \vec{i} + F_y \vec{j} + F_z \vec{k}$ et $\vec{V} = \dot{x}\vec{i} + \dot{y}\vec{j} + \dot{z}\vec{k}$ alors la puissance est:

$$P = F_x \dot{x} + F_y \dot{y} + F_z \dot{z}.$$

Comme la vitesse, la puissance de force $\vec{F}$ dépend du référentiel dans lequel elle est calculée. Aussi, on la note $P_{/(R)}$.

La **puissance** d'une force s'exprime en **Watt** (**W**) dans le Système International.

Certaines forces ont une puissance nulle:

- la force magnétique $\vec{F} = q(\vec{V} \wedge \vec{B})$ puisque $P = q(\vec{V} \wedge \vec{B}) \bullet \vec{V} = 0$
- la force de Coriolis $\left.\vec{F}_C\right]_{R'} = -2m(\vec{\omega} \wedge \vec{V})$ qui s'exerce lorsque le référentiel n'est pas galiléen est $\left.P\right]_{R'} = -2m(\vec{\omega} \wedge \vec{V}) \bullet \vec{V} = 0$

Remarques

- $P=0 \Rightarrow \vec{F} \perp \vec{V}$
- $P > 0$, la puissance est motrice ; $P < 0$, la puissance est résistante
- 1 cheval vapeur = 736 Watts
- P peut être calculée dans n'importe quelle base vectorielle à l'aide des composantes de $\vec{F}$ et de $\vec{v}$.
- La puissance totale de la résultante de plusieurs forces appliquées à un même point M est égale à la somme des puissances de toutes les forces $P = \left(\vec{F}_1 + \vec{F}_2 + \ldots\right) \bullet \vec{V} = \vec{F}_1 \bullet \vec{V} + \vec{F}_2 \bullet \vec{V} + \ldots = P_1 + P_2 + \ldots$

1.2 Travail d'une force

1.2.1 Travail élémentaire d'une force

Par définition, le travail élémentaire d'une force $\vec{F}$ qui s'exerce sur le point matériel M est:

$$\delta w = P dt = \vec{F} \bullet \vec{V} dt = \vec{F} \bullet d\vec{OM}$$

$d\vec{OM}$ étant un déplacement élémentaire d'une force $\vec{F}$ de M dans (Rg).

La notation δ indique que δw est une forme différentielle non intégrable à priori et donc n'est pas la différentielle totale exacte d'une fonction.

Dans un repère cartésien,

$\vec{F} = F_x \vec{i} + F_y \vec{j} + F_z \vec{k}$ et $d\vec{OM} = dx\,\vec{i} + dy\,\vec{j} + dz\,\vec{k}$ alors

$$\delta w = F_x dx + F_y dy + F_z dz$$

Remarques

- $P = \dfrac{\delta w}{dt}$ la puissance est le travail par unité de temps
- $\delta w = 0 \Rightarrow \vec{F} \perp d\vec{OM}$
- $\delta w > 0$, le travail est moteur ; $\delta w < 0$, la travail est résistant

1.2.2 Travail d'une force le long d'une courbe

Soit $d\vec{OM}$ le déplacement élémentaire du point M sous l'action de la force $\vec{F}$.

Le travail de la force $\vec{F}$ le long d'une courbe, entre les points M_1 et M_2 ou entre t_1 et t_2 , est :

$$w\Big]_{M_1}^{M_2} = \int_{t_1}^{t_2} \vec{F} \bullet \vec{V} dt = \int_{t_1}^{t_2} P\,dt = \int_{M_1}^{M_2} \vec{F} \bullet d\vec{OM}$$

Exemple

Soit un point matériel M sousmis à une force $\vec{F} = 2x\,\vec{i} - 5y\,\vec{j} + 10x\,\vec{k}$.

L'équation paramétrique de la trajectoire est définie par:

$$\begin{cases} x = t^2 + 1 \\ y = 2t^2 \\ z = t^2 \end{cases}$$

Calculons le travail de la force $\vec{F}$ entre t_1=0 et t_2=1 s.

$\vec{F} = 2x\,\vec{i} - 5y\,\vec{j} + 10x\,\vec{k} = 2(t^2 + 1)\,\vec{i} - 5(2t^2)\,\vec{j} + 10(t^2 + 1)\,\vec{k}$

Soit $\vec{F} = (2t^2 + 2)\vec{i} - 10t^2\,\vec{j} + (10t^2 + 10)\vec{k}$.

La vitesse $\vec{V} = \dot{x}\,\vec{i} + \dot{y}\,\vec{j} + \dot{z}\,\vec{k} = 2t\,\vec{i} + 4t\,\vec{j} + 2t\,\vec{k}$

Le travail élémentaire est :

$\delta w = \vec{F} \bullet \vec{V} dt = [(2t^2 + 2)(2t) + (-10t^2)(4t) + (10t^2 + 10)(2t)]dt$

$\delta w = (-16t^3 + 24t)dt$

$w\Big]_{t_1}^{t_2} = \int_0^1 (-16t^3 + 24t)dt =$ 8 Joules

2. Energie cinétique

2.1 Définition

$$\vec{F} \bullet \vec{V} = m\frac{d\vec{V}}{dt} \bullet \vec{V} = \frac{d}{dt}\left(\frac{1}{2}mV^2 + C\right)$$

Par convention, la constante C=0 et la quantité $\frac{1}{2}mV^2$ est appelée **énergie cinétique** E_C.

$$E_C = \frac{1}{2}mV^2$$

2.2 Théorème de l'énergie cinétique

$$\vec{F} \bullet \vec{V} = P = \frac{dE_C}{dt} = \frac{\delta w}{dt}$$

Enoncés

- La dérivée par rapport au temps de l'énergie cinétique d'un point matériel est égale à la puissance de toutes les forces qui s'exercent sur ce point.

$$\frac{dE_C}{dt} = P$$

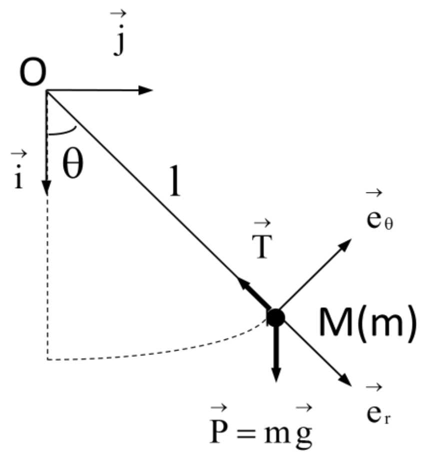
- La variation de l'énergie cinétique d'un point matériel est égale au travail de toutes les forces appliquées.

$$dE_C = \delta w \quad \text{et} \quad \Delta E_c = w$$

Remarques

- Si le référentiel n'est pas galiléen, il faut ajouter à la puissance des forces appliquées celle des forces d'inertie.
- Si le référentiel n'est pas galiléen, il faut ajouter au travail des forces appliquées ceux des forces d'inertie.
- Le théorème de l'énergie cinétique est particulièrement adapté aux systèmes dont la position est définie par un seul paramètre.

Exemple: Pendule simple de longueur l, sans frottement visqueux de l'air.



$$\vec{P} = mg\,\vec{i} \quad , \quad \vec{T} = -\left\|\vec{T}\right\|\vec{e}_r \quad \text{et} \quad \vec{V} = l\dot{\theta}\vec{e}_\theta \quad \text{et} \quad E_C = \frac{m}{2}\left(l\dot{\theta}\right)^2$$

La puissance des forces appliquée est:

$$P = \vec{F} \bullet \vec{V} = \left(m\vec{g} + \vec{T}\right) \bullet \vec{V} = \left(mg\,\vec{i} - \left\|\vec{T}\right\|\vec{e}_r\right) \bullet l\dot{\theta}\vec{e}_\theta$$

$$P = mgl\dot{\theta}\underbrace{\left(\vec{i} \bullet \vec{e}_\theta\right)}_{-\sin\theta} - l\dot{\theta}\left\|\vec{T}\right\|\underbrace{\left(\vec{e}_r \bullet \vec{e}_\theta\right)}_{=0} = -mgl\dot{\theta}\sin\theta$$

Le théorème de l'énergie cinétique donne :

$$\frac{dE_C}{dt} = P \Leftrightarrow \frac{d\left(\frac{m}{2}l^2\dot{\theta}^2\right)}{dt} = -mgl\dot{\theta}\sin\theta$$

soit $ml^2\dot{\theta}\ddot{\theta} = -mgl\dot{\theta}\sin\theta$ finalement $ml^2\ddot{\theta} + mgl\sin\theta = 0$

3. Energie potentielle

Considérons la situation très importante et fréquente où le travail d'une force $\vec{F}$ qui s'exerce sur un point matériel ne dépend pas du chemin suivi entre des positions initiale (M_i) et finale (M_f) fixées, ce qui se traduit par:

$$w\Big]_{M_i}^{M_f} = \int_{M_i}^{M_f} \vec{F} \bullet d\vec{OM} = E_p(M_i) - E_p(M_f) = \left[-E_p\right]_{M_i}^{M_f} = -\int_{M_i}^{M_f} dE_p$$

3.1 Définition

Dans certaines conditions ($\vec{rot}\,\vec{F} = \vec{0}$), le travail élémentaire de cette force $\vec{F}$ se met sous la forme différentielle d'une fonction:

$$\boxed{\delta w = \vec{F} \bullet d\vec{OM} = -dE_p}$$

La fonction $E_p(M)$ est appelée énergie potentielle de M associée à $\vec{F}$. La force $\vec{F}$ s'écrit sous la forme:

$$\boxed{\vec{F} = -\vec{grad}\,E_p.}$$

Cette relation peut s'exprimer dans divers types de coordonnées :

Coordonnées cartésiennes	Coordonnées cylindriques	Coordonnées sphériques
$F_x = -\dfrac{\partial E_p}{\partial x}$	$F_\rho = -\dfrac{\partial E_p}{\partial \rho}$	$F_r = -\dfrac{\partial E_p}{\partial r}$
$F_y = -\dfrac{\partial E_p}{\partial y}$	$F_\theta = -\dfrac{1}{\rho}\dfrac{\partial E_p}{\partial \theta}$	$F_\phi = -\dfrac{1}{r}\dfrac{\partial E_p}{\partial \phi}$
$F_z = -\dfrac{\partial E_p}{\partial z}$	$F_z = -\dfrac{\partial E_p}{\partial z}$	$F_\theta = -\dfrac{1}{r\sin\phi}\dfrac{\partial E_p}{\partial \theta}$

<u>Remarques</u>

- L'énergie potentielle $E_p(M)$ est définie à une constante additive près
- L'énergie potentielle $E_p(M)$ peut être positive, négative ou nulle
- Lorsque **l'énergie potentielle** $E_p(M)$ est **minimale**, on a un **équilibre stable**.

3.2 Exemples

3.2.1 Energie potentielle newtonienne (ou coulombienne)

La force $\vec{F}=\frac{K}{r^2}\vec{e}_r$ où K est la constante d'interaction et

$$\vec{e}_r=\frac{\vec{OM}}{\left\|\vec{OM}\right\|}.$$

Si K > 0, on a une interaction répulsive (force entre charges électrique de mêmes signes).
Si K < 0, on a une interaction attractive (force entre charges électrique de signes opposées, force de gravitation).

$$\delta w=\vec{F}\bullet d\vec{OM}=\frac{K}{r^2}\vec{e}_r\bullet d(r\vec{e}_r)=\frac{K}{r^2}\vec{e}_r\bullet(dr\vec{e}_r+rd\vec{e}_r)$$

$$\delta w=\frac{K}{r^2}dr\underbrace{\left(\vec{e}_r\bullet\vec{e}_r\right)}_{1}+\frac{K}{r^2}r\underbrace{\left(\vec{e}_r\bullet d\vec{e}_r\right)}_{0}=\frac{K}{r^2}dr$$

$$\delta w=\frac{K}{r^2}dr=d\left(-\frac{K}{r}\right)=-dE_P\quad\Rightarrow\quad E_P(r)=\frac{K}{r}+cte$$

Par convention, on pose $E_P(\infty)=0$ alors cte =0 ;

$$E_P(r)=\frac{K}{r}$$

3.2.2 Energie potentielle de pesanteur

La force de pesanteur $\vec{P}=-mg\vec{k}$ et le travail

$$\delta w=-mg\vec{k}\bullet d\vec{r}=-mg\vec{k}\bullet(dx\vec{i}+dy\vec{j}+dz\vec{k})=-mgdz$$

$\delta w=-mgdz=-dE_P \;\Rightarrow\; E_P(z)=mgz+cte$

$E_P(0)=0 \Rightarrow$ cte=0 et $E_P(z)=mgz$

3.3 Stabilité des équilibres

Un équilibre est stable si l'énergie potentielle est minimale.

Exemple: $\vec{F}=(x-2x^3)\vec{i}-y\vec{j}-z\vec{k}$

$\vec{F}$ dérive-t-elle d'une énergie potentielle ? Quelles sont les positions d'équilibre ? Etudier la stabilité de ces positions.

- Calculons $\vec{rot}\,\vec{F}$

$$\vec{rot}\,\vec{F}=\begin{vmatrix}\vec{i} & \vec{j} & \vec{k}\\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z}\\ x-2x^3 & -y & -z\end{vmatrix}=\vec{0}\quad\Rightarrow\quad\vec{F}=-\vec{grad}\,E_P.$$

$$\frac{\partial E_P}{\partial x}=-x+2x^3\quad(1),\qquad\frac{\partial E_P}{\partial y}=y\qquad(2)$$

$$\frac{\partial E_P}{\partial z}=z\qquad(3)$$

L'intégration de (1) $\Rightarrow$ $E_P = -\frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{2} + f(y,z)$

Vérifions (2):

$$\frac{\partial}{\partial y}\left(-\frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{2} + f(y,z)\right) = y \quad \text{soit} \quad \frac{\partial f(y,z)}{\partial y} = y$$

d'où $f(y,z) = \frac{y^2}{2} + g(z)$

et $E_P = -\frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{2} + \frac{y^2}{2} + g(z)$

Vérifions (3):

$$\frac{\partial}{\partial z}\left(-\frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{2} + \frac{y^2}{2} + g(z)\right) = z \quad \text{soit} \quad \frac{\partial g(z)}{\partial z} = z$$

d'où $g(z) = \frac{z^2}{2} + C$ et $E_P = -\frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{2} + \frac{y^2}{2} + \frac{z^2}{2} + C$

- Déterminons les positions d'équilibre

Les positions d'équilibre sont telles que $\vec{F} = \vec{0} \Rightarrow$

$$\begin{cases} x - 2x^3 = 0 \\ y = 0 \\ z = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 0 \quad \text{ou} \quad x = \frac{\sqrt{2}}{2} \quad \text{ou} \quad x = -\frac{\sqrt{2}}{2} \\ y = 0 \\ z = 0 \end{cases}$$

Il y a trois positions d'équilibre:

$$O(0,0,0),\ A(-\frac{\sqrt{2}}{2},0,0) \text{ et } B(\frac{\sqrt{2}}{2},0,0).$$

- Etudions la stabilité de ces points :

Tableau de variation de E_P en fonction de x :

$$\frac{\partial E_P}{\partial x} = -x + 2x^3 = x\left(\sqrt{2}\,x - 1\right)\left(\sqrt{2}\,x + 1\right)$$

x	$-\infty$ $\quad -\frac{\sqrt{2}}{2}$	0	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$+\infty$
x	-	-	+	+
$\sqrt{2}\,x - 1$	-	-	-	+
$\sqrt{2}\,x + 1$	-	+	+	+
$\frac{\partial E_P}{\partial x}$	-	+	-	+
E_P	↘	↗	↘	↗

E_P est minimale pour $x = -\frac{\sqrt{2}}{2}$ et pour $x = \frac{\sqrt{2}}{2}$

Tableau de variation de E_P en fonction de y : $\dfrac{\partial E_P}{\partial y} = y$

y	$-\infty$	0	$+\infty$
$\dfrac{\partial E_P}{\partial y}$	-		+
E_P	↘		↗

E_P est minimale pour y = 0

Tableau de variation de E_P en fonction de z : $\dfrac{\partial E_P}{\partial z} = z$

z	$-\infty$	0	$+\infty$
$\dfrac{\partial E_P}{\partial z}$	-		+
E_P	↘		↗

E_P est minimale pour z = 0

Conclusion: E_P est minimale en A et B pour les trois coordonnées et donc les positions d'équilibre A et B sont stables.

4. Energie mécanique

4.1 Définition

On appelle énergie mécanique E_m d'un point matériel la somme de son énergie cinétique E_C et de l'énergie potentielle E_P.

$$\boxed{E_m = E_C + E_P}$$

4.2 Théorème de l'énergie mécanique

On distingue deux types de forces dans les forces qui s'exercent sur un point matériel : les **forces conservatives** $\vec{F}_c$ et les **forces dissipatives** $\vec{F}_d$.

Les forces conservatives ($\vec{F}_c$) dérivent d'une énergie potentielle, tandis que les forces dissipatives ($\vec{F}_d$) n'en dérivent pas.

La résultante $\vec{F}$ des forces appliquées peut se mettre sous la forme:

$$\vec{F} = \vec{F}_c + \vec{F}_d.$$

Le travail élémentaire de $\vec{F}$ est:

$$\delta w = \vec{F}_c \bullet d\vec{OM} + \vec{F}_d \bullet d\vec{OM}.$$

soit $\delta w = -dE_P + \delta w'$

$\delta w'$ étant le travail élémentaire des forces dissipatives.

D'après le théorème de l'énergie cinétique

$$dE_C = \delta w \quad \text{donc} \quad dE_C = -dE_P + \delta w'$$

$$\Rightarrow \quad dE_C + dE_P = \delta w' \ ,$$

$$\text{soit} \quad d(E_C + E_P) = \delta w'$$

$$dE_m = \delta w'$$

$$\frac{dE_m}{dt} = \frac{\delta w'}{dt} = P'$$

<u>Enoncés</u>

- La variation de l'énergie mécanique d'un point matériel est égale au travail des forces dissipatives.

$$dE_m = \delta w' \quad \text{et} \quad \Delta E_m = w'$$

- La dérivée par rapport au temps de l'énergie mécanique d'un point matériel est égale à la puissance des forces dissipatives.

$$\frac{dE_m}{dt} = P'$$

<u>Remarque</u>

Il y a une différence entre énergie et travail : le concept d'énergie est une **fonction d'état**, caractéristique donc de l'état d'un système, contrairement au travail : la **fonction travail n'existe pas**.

4.3 Conservation de l'énergie mécanique

Lorsque les seules forces qui travaillent dérivent d'une énergie potentielle, c'est-à-dire $\vec{F}_d = \vec{0}$ et P'=0, alors l'énergie mécanique se conserve.

$$E_m = E_C + E_P = cte$$

L'énergie mécanique E_m est alors déterminée par les conditions initiales du mouvement.

<u>Remarque</u>

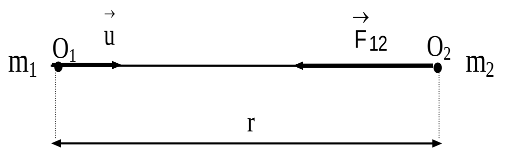
Pour $P' \neq 0$ et $E_m \neq cte$, on dit que E_m n'est pas une grandeur conservative. L'énergie mécanique n'est qu'un aspect d'un concept plus large, L'énergie totale (E_m, énergie électromagnétique, énergie interne, etc.) qui est une grandeur conservative (1er principe de la thermodynamique).

CHAPITRE 5: GRAVITATION

1. Force de gravitation

La force de gravitation est la force d'attraction que toute masse exerce sur une autre selon la loi de Newton. $\vec{F}_{12} = -\frac{Gm_1m_2}{r^2}\vec{u}$ est la **force de gravitation**, et

G = 6,670 x10^{-11} N $m^2\,kg^{-2}$ (constante de gravitation).



m_1 exerce sur m_2 une force $\vec{F}_{12} = -\frac{Gm_1m_2}{r^2}\vec{u}$

Selon la loi d'action et de réaction m_2 exercice aussi une force $\vec{F}_{21}$. Le principe de l'action et de la réaction $\Rightarrow$

$$\vec{F}_{12} = -\vec{F}_{21}$$

2. Champ de gravitation

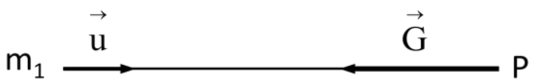
Le champ créé par la masse m_1 est:

$$\frac{\vec{F}_{12}}{m_2} = -\frac{Gm_1}{r^2}\vec{u} = \vec{G} \quad \text{(Champ de gravitation).}$$

Ce champ est centripète car dirigé vers la masse O_1.

Autrement dit, tout corps de masse m_1 crée en un point P dans l'espace un champ de gravitation :

$$\vec{G} = -\frac{Gm_1}{r^2}\vec{u}$$



Lorsque le corps est la terre de masse M (m_1=M), alors le champ de gravitation $\vec{G}$ est appelé **champ de pesanteu**r $\vec{g}$:

$$\vec{g} = -\frac{GM}{r^2}\vec{u}$$

3. Potentiel de gravitation - Energie potentielle

Le champ de gravitation $\vec{G}$ dérive d'un potentiel V ($\vec{rot}\,\vec{G} = \vec{0}$).

$$\vec{G} = -\vec{grad}\,V \quad \Rightarrow \quad dV = -\vec{G}\bullet\vec{dr} = Gm_1\frac{dr}{r^2}$$

$$\Rightarrow \quad V = -\frac{Gm_1}{r} + cste$$

Posons pour r $\to\infty$, V = 0 $\Rightarrow$ cte = 0 et donc

$$V = -\frac{Gm_1}{r}$$

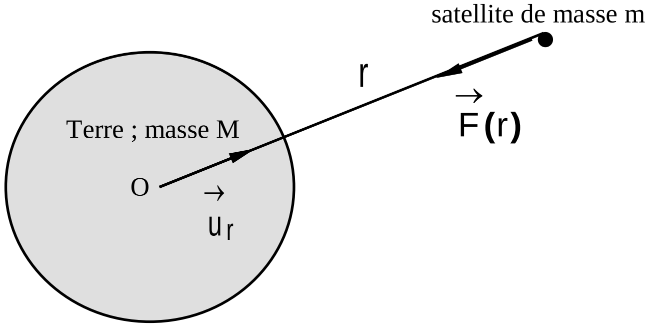
La force de gravitation est conservative ($\vec{rot}\,\vec{F} = \vec{0}$) et donc dérive d'une énergie potentielle Ep:

$$\vec{F} = -\vec{grad}\,E_P \quad \Rightarrow \quad E_p = -\frac{Gm_1m_2}{r}$$

L'énergie potentielle Ep et le potentiel V sont liés:

$$E_p = m_2 V \ .$$

4. Satellite en mouvement circulaire et uniforme



Ce satellite est soumis à une force gravitationnelle $\vec{F}(r) = -\frac{GMm}{r^2}\vec{u}_r$ qui est égale à son poids.

$\vec{F} = m\vec{g} \quad \Rightarrow \quad \vec{g} = -\frac{GM}{r^2}\vec{u}_r$ (accélération de pesanteur).

Soit g_0 sa valeur à la surface de la terre.

$$\vec{g}_0 = -\frac{GM}{R^2}\vec{u}_r$$

$\vec{g} = \vec{g}_0\left(\frac{R}{r}\right)^2$ (r=R+h) R est le rayon de la terre.

4.1 Vitesse de révolution du satellite

Le mouvement étant circulaire et uniforme, l'accélération est normale (centripète) : $\vec{a} = \vec{a}_N = \vec{g}$

$$-m\frac{V^2}{r}\vec{u}_r = -m\frac{GM}{r^2}\vec{u}_r \quad \Rightarrow \quad V^2 = \frac{GM}{r}$$

car $||\vec{V}||$ est une constante et dans ce cas $\vec{a} = -\frac{V^2}{r}\vec{u}_r$

ce qui donne finalement

$$V = \left(\frac{GM}{r}\right)^{\frac{1}{2}}$$

4.2 Période de révolution

Soit T la période de révolution du satellite, nous avons la relation TV=2πr $\quad \Rightarrow T^2 = \frac{4\pi^2 r^2}{V^2} = \frac{4\pi^2 r^3}{GM}$

$$\Rightarrow \frac{T^2}{r^3} = \frac{4\pi^2}{GM} \qquad \text{(loi de KEPLER)}$$

4.3 Energie mécanique (E_m) du satellite

$E_m = E_c + E_p \qquad E_m = \frac{1}{2}mV^2 - \frac{GMm}{r}$

$$E_m = \frac{1}{2}\frac{GMm}{r} - \frac{GMm}{r} = -\frac{1}{2}\frac{GMm}{r}$$

$$\Rightarrow \quad E_m = +\frac{E_p}{2} = -E_c$$

4.4 Vitesse de libération

V_ℓ est la vitesse qu'il faut communiquer au satellite pour le « déposer » à l'infini où sa vitesse est supposée nulle.

Les forces qui interviennent sont uniquement des forces **conservatives**. On a alors l'énergie mécanique du satellite à l'altitude z est égale à son énergie à l'infini.

$$\Rightarrow -\frac{GMm}{R+z}+\frac{1}{2}mV_l^2=-\frac{GMm}{r\to\infty}+0\approx 0\Rightarrow V_l=\left(\frac{2GM}{R+z}\right)^{\frac{1}{2}}$$

A la surface de la terre z=0 $\quad GM=g_oR^2$

$$v_\ell=(2g_oR)^{\frac{1}{2}}$$

4.5 Satellite géostationnaire

C'est un satellite qui a la même vitesse angulaire que la Terre. Ce satellite placé sur dans le plan équatorial semble immobile par rapport à la Terre.

Ici $T=T_0$ qui est la période de rotation de la Terre = jour sidéral = 23h 56 min 4s et la loi de Kepler nous permet d'écrire :

$$\frac{T^2}{r^3}=\frac{4\pi^2}{GM}$$

soit

$$r=\left(\frac{T_0^2GM}{4\pi^2}\right)^{\frac{1}{3}}$$

qui est l'altitude à laquelle le satellite est stationnaire.

On trouve : r = 42.000 km soit 36 000 km d'altitude.

CHAPITRE 6: OSCILLATEURS HARMONIQUES. OSCILLATEURS AMORTIS

1. Oscillateurs harmoniques

1.1 Définition

On appelle oscillateur harmonique tout système dont le paramètre ou degré de liberté x(t) qui caractérise son état varie au cours du temps suivant une loi sinusoïdale $\mathbf{x(t)=x_m\cos(\omega t+\phi)}$ où $\mathbf{x_m}$, $\boldsymbol{\omega}$ et $\boldsymbol{\phi}$ sont des constantes appelées amplitude, pulsation et phase à l'origine.

1.2 Equations différentielles caractéristiques à une dimension ou un degré de liberté

Les équations différentielles du mouvement sont :

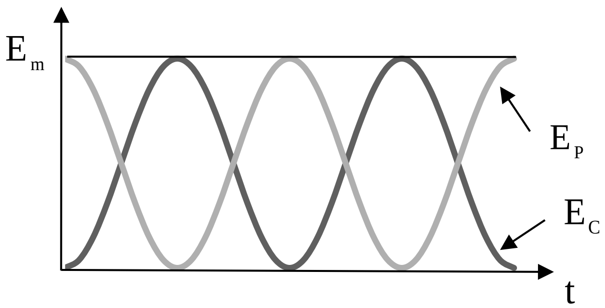
$$\ddot{x}+\omega^2x=0 \quad \text{et} \quad \frac{\dot{x}^2}{2}+\frac{\omega^2x^2}{2}=cte$$

1.3 Aspect énergétique

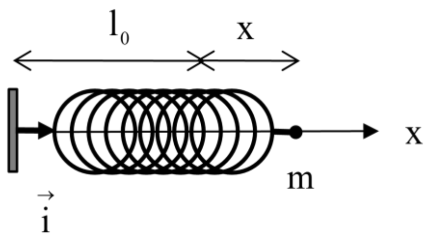
L'équation différentielle $\ddot{X} + \omega_0^2 X = 0 \;\Rightarrow$

$X = X_m \cos(\omega_0 t + \phi)$ et $\dot{X} = -\omega_0 X_m \sin(\omega_0 t + \phi)$

L'énergie mécanique $E_m = \dfrac{m\omega_0^2 X_m^2}{2}$ à une constante additive près. E_m est donc une constante qui est proportionnelle à ω_0^2 et à X_m^2.



Exemple : Pendule élastique



l_o : longueur à vide , k : constante de raideur

$\vec{F} = -k(x - l_0)\vec{i} \;\Rightarrow\; m\ddot{x} = -k(x - l_0)$

Posons $X = x - l_o$ et $\omega_0^2 = \dfrac{k}{m}$

L'équation différentielle du mouvement donne $\ddot{X} + \omega_0^2 X = 0$.

1.4 Oscillateur harmonique bidimensionnel

C'est un oscillateur à deux degrés de liberté, dont les deux équations du mouvement sont celles d'oscillateurs harmoniques **isochrones**, c'est-à-dire de **même fréquence**.

Un point matériel M dont les positions suivant les axes (Ox) et (Oy) d'un référentiel (Rg) satisfont aux équations différentielles $\ddot{x} + \omega^2 x = 0$ et $\ddot{y} + \omega^2 y = 0$ est un harmonique bidimensionnel.

$x = A_1 \cos(\omega_0 t + \phi_x)$ et $y = A_2 \cos(\omega_0 t + \phi_y)$

ce qui s'écrit aussi :

$$x = A_1 \cos(\omega_0 t) \quad \text{et} \quad y = A_2 \cos(\omega_0 t - \phi)$$

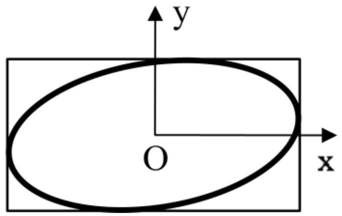
en posant $\phi = \phi_x - \phi_y$.

L'équation de la trajectoire s'obtient en éliminant le temps t dans les équations paramétriques:

$$\frac{y}{A_2} = \frac{x}{A_1}\cos\phi + \left(1 - \frac{x^2}{A_1^2}\right)^{\frac{1}{2}} \sin\phi \quad ,$$

soit: $$\frac{x^2}{A_1^2} + \frac{y^2}{A_2^2} - \frac{2xy}{A_1 A_2}\cos\phi = \sin^2\phi$$

La projection de la trajectoire de M dans le plan (xoy) est donc une ellipse.



2. Oscillateur amorti

Au cours du mouvement de l'oscillateur, on observe généralement que l'amplitude des oscillations n'est constante, mais décroit constamment. Les forces de frottement amortissent le mouvement.

Prenons un exemple pour le mettre en évidence en considérant un pendule élastique en présence de frottement visqueux de la forme $-\alpha \vec{V}$ où $\alpha > 0$.

2.1 Equation différentielle du mouvement

L'équation différentielle est:

$$m\ddot{x} = -kx - \alpha\dot{x}$$

où x est la position de M à partir de l'équilibre.

Soit : $$\ddot{x} + \frac{\alpha}{m}\dot{x} + \frac{k}{m}x = 0.$$

Posons $\frac{\alpha}{m} = \frac{1}{\tau_e}$ et $\omega_0^2 = \frac{k}{m}$

On a donc l'équation canonique suivante:

$$\ddot{x} + \frac{1}{\tau_e}\dot{x} + \omega_0^2 x = 0.$$

$\frac{1}{\tau_e}$ caractérise la **durée de vie des oscillations amorties** et l'appelle la **durée relaxation en énergie**.

2.2 Nature du mouvement. Différents régimes

L'équation caractéristique du second degré s'écrit:

$$r^2 + \frac{1}{\tau_e}r + \omega_0^2 = 0$$

La résolution de l'équation canonique donne:

$$x = C_1 e^{r_1 t} + C_2 e^{r_2 t}$$

où r_1 et r_2 sont les solutions de l'équation caractéristique du second degré :

$$r_1 = -\frac{1}{2\tau_e} + \omega_0\left(\frac{1}{4\omega_0^2\tau_e^2} - 1\right)^{\frac{1}{2}} \quad \text{et} \quad r_2 = -\frac{1}{2\tau_e} - \omega_0\left(\frac{1}{4\omega_0^2\tau_e^2} - 1\right)^{\frac{1}{2}}$$

Suivant les valeurs de $2\omega_0\tau_e$, on distingue trois types de mouvement ou de régime.

2.2.1 Oscillateur faiblement amorti : $2\omega_0\tau_e > 1$

Si $2\omega_0\tau_e > 1$, alors

$$r = -\frac{1}{2\tau_e} \pm j\omega_0\left(1 - \frac{1}{4\omega_0^2\tau_e^2}\right)^{\frac{1}{2}} = -\frac{1}{2\tau_e} \pm j\omega$$

avec $j = \sqrt{-1} \quad (j^2 = -1)$,

$\omega = \omega_0\left(1 - \frac{1}{4\,\omega_0^2\,\tau_e^2}\right)^{\frac{1}{2}}$ la **pseudo-pulsation**.

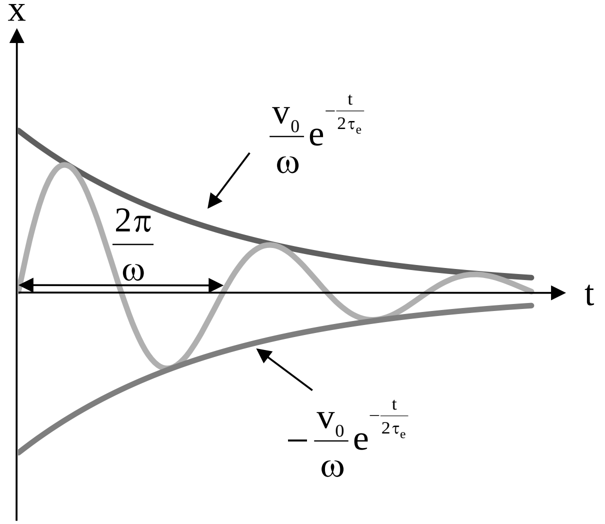
On a : $x = Ce^{-\frac{t}{2\tau_e}}\cos(\omega t + \phi_x)$

Les constantes C et ϕ_x sont déterminées par les conditions initiales du mouvement.

Supposons qu'on ait à t=0, x=0 et $\dot{x} = v_0$.

$$x(0) = 0 = C\cos\phi_x \quad \text{et} \quad \dot{x}(0) = v_0 = C\left(-\omega\sin\phi_x - \frac{1}{2\tau_e}\cos\phi_x\right)$$

$$\Rightarrow \phi_x = \frac{\pi}{2} \quad , \quad C = -\frac{v_0}{2\omega} \quad \text{et} \quad x = \frac{v_0}{\omega}e^{-\frac{t}{2\tau_e}}\sin\omega t$$



On caractérise aussi le décroissance de l'amplitude d'un oscillateur amorti par le décrément logarithmique λ :

$$\lambda = \frac{1}{n}\mathrm{Ln}\left[\frac{x(t)}{x(t+nT)}\right]$$

$x(t)$ et $x(t+nT)$ étant les élongations à des instants séparés par un nombre entier de période.

$$\lambda = \frac{T}{2\tau_e}$$

Evaluons l'énergie de l'oscillateur peu amorti avec les conditions initiales précédentes.

$$E_m = \frac{1}{2} m \dot{x}^2 + \frac{1}{2} k x^2 \quad \Rightarrow \quad E_m \approx \frac{1}{2} m v_0^2 e^{-\frac{t}{2\tau_e}}$$

La perte d'énergie relative par unité de temps $\Rightarrow$

$$-\frac{dE_m}{E_m dt} \approx \frac{1}{\tau_e} \quad \Rightarrow \quad \text{pour une période, on a :} \quad -\frac{\Delta E_m}{E_m} \approx \frac{T}{\tau_e}.$$

On caractérise cette perte d'énergie par un coefficient Q, appelé **facteur de qualité** de l'oscillateur.

$$Q = 2\pi \frac{E_m}{-\Delta E_m} \approx 2\pi \frac{\tau_e}{T} = \frac{\pi}{\lambda} \quad \text{d'où} \quad Q = \omega_0 \tau_e$$

2.2.2 Oscillateur très amorti : $2\omega_0\tau_e < 1$

Si $2\omega_0\tau_e < 1$,

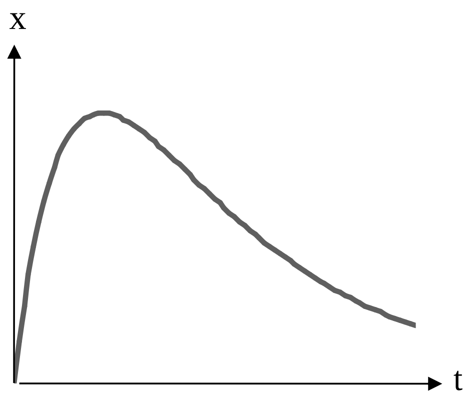
alors $$r = -\frac{1}{2\tau_e} \pm \beta$$

avec $$\beta = \omega_0 \left(\frac{1}{4\omega_0^2 \tau_e^2} - 1 \right)^{\frac{1}{2}}$$

La solution générale est :

$$x = e^{-\frac{t}{2\tau_e}} \left(C_1 e^{\beta t} + C_2 e^{-\beta t} \right)$$

En utilisant les conditions initiales précédentes (t=0, x=0 et $\dot{x} = v_0$), on obtient : $x = \dfrac{v_0}{\beta} e^{-\frac{t}{2\tau_e}} \operatorname{sh}\beta t$



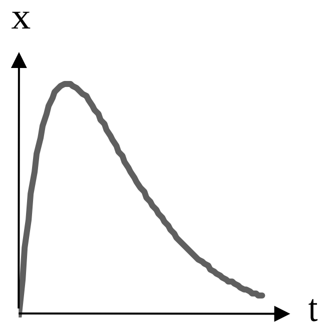
2.2.3 Amortissement critique : $2\omega_0\tau_e = 1$

L'équation caractéristique admet une racine double :

$$r = -\frac{1}{2\tau_e}$$

La solution générale est : $x = (C_1 + C_2 t) e^{-\frac{t}{2\tau_e}}$

Avec les mêmes conditions initiales, on a : $x = v_0 t\, e^{-\frac{t}{2\tau_e}}$



3. Analogie électrique : circuit oscillant RLC série

Les équations différentielles sont de la forme :

$$L\frac{di}{dt}+Ri+\frac{q}{C}=0 \qquad \text{ou} \qquad L\frac{d^2q}{dt^2}+R\frac{dq}{dt}+\frac{q}{C}=0$$

soit $$\ddot{q}+\frac{1}{\tau_e}\dot{q}+\omega_0^2 q=0 \qquad \text{avec} \qquad \tau_e=\frac{L}{R} \qquad \text{et} \qquad \omega_0^2=\frac{1}{LC}$$

$$Q=\omega_0\tau_e=\frac{L\omega_0}{R}$$

Mécanique	Elongation x	Vitesse v	Coefficient de frottement α	Masse m	Raideur k
Electricité	Charge q	Courant i	Résistance R	Inductance L	Capacité C^{-1}

BIBLIOGRAPHIE

Gibaud A., M. Henry, Mécanique du point Cours et exercices corrigés, Collection Sciences Sup, Dunod, 2ème édition, 2007.

Thionnet A., Mécanique du point L1/L2, Broché.