

ALGEBRE LINEAIRE

Adolphe CODJIA

Version 2022

Table des matières

| | | |
|----------|---|-----------|
| 1 | MATRICES | 2 |
| 1.1 | Présentation des matrices de type (p, q) sur un corps \mathbb{K} commutatif | 2 |
| 1.2 | Quelques matrices de type (p, q) | 3 |
| 1.3 | OPERATIONS SUR LES MATRICES | 5 |
| 1.3.1 | Somme de deux matrices de même type | 5 |
| 1.3.2 | Egalité de deux matrices de même type | 5 |
| 1.3.3 | Multiplication par un scalaire d'une matrice | 6 |
| 1.3.4 | Produit de deux matrices | 7 |
| 1.4 | Trace d'une matrice carrée | 8 |
| 1.5 | Matrices inversibles | 9 |
| 1.6 | Matrices équivalentes et matrices semblables | 9 |
| 1.7 | Opérations élémentaires sur les matrices | 11 |
| 1.8 | Les opérations élémentaires sur les matrices avec les matrices élémentaires | 12 |
| 1.9 | Matrices échelonnées | 14 |
| 1.9.1 | Inversion d'une matrice par les opérations élémentaires sur les matrices | 17 |
| 1.10 | Rang d'une matrice | 18 |
| 2 | CALCUL DE DÉTERMINANTS | 26 |
| 2.1 | Déterminant d'une matrice carrée d'ordre 2 | 26 |
| 2.2 | Déterminant d'une matrice carrée d'ordre 3 | 26 |
| 2.2.1 | Calcul d'un déterminant d'ordre 3 par la méthode de Sarrus(Pierre Frédéric Sarrus(1798–1861)) | 26 |
| 2.2.2 | Calcul du déterminant par le développement suivant une ligne ou une colonne. | 27 |
| 2.3 | Calcul du déterminant d'une matrice carrée d'ordre n supérieur ou égal à 3 | 29 |
| 2.4 | Propriétés des déterminants | 30 |
| 2.5 | Calcul de déterminant avec échelonnage sur la matrice | 35 |
| 2.6 | Inverse d'une matrice carrée | 36 |
| 2.6.1 | Propriétés de la matrice inverse | 37 |
| 2.6.2 | Inversion d'une matrice par sa comatrice | 37 |
| 2.6.3 | Démonstration de la méthode d'inversion d'une matrice par sa comatrice | 38 |
| 2.7 | Rang d'une matrice | 40 |
| 3 | RÉSOLUTION D'UN SYSTEME D'EQUATIONS LINÉAIRES | 41 |
| 3.1 | Résolution du système (S) avec sa matrice augmentée | 43 |
| 3.2 | Méthode de résolution d'un système de Cramer(Gabriel Cramer(1704 -1752)) | 45 |

| | | |
|----------|---|-----------|
| 3.2.1 | Résolution d'un système de Cramer par l'inversion de la matrice associée au système | 45 |
| 3.2.2 | Résolution d'un système de Cramer par des déterminants | 46 |
| 3.3 | Résolution d'un système avec le rang de la matrice associée connu | 47 |
| 3.4 | Systèmes échelonnés ou Méthode du pivot | 47 |
| 3.5 | Calcul de l'inverse d'une matrice par la résolution de systèmes | 49 |
| 3.5.1 | Une première méthode(mais souvent fastidieuse) | 49 |
| 3.5.2 | Une deuxième méthode | 49 |
| 4 | ESPACES VECTORIELS | 52 |
| 4.1 | Introduction | 54 |
| 4.2 | Définition d'un espace vectoriel | 55 |
| 4.3 | Définition générale d'un espace vectoriel sur un corps commutatif $(\mathbb{K}, \heartsuit, \clubsuit)$ | 56 |
| 4.3.1 | Tableau de simularité | 57 |
| 4.3.2 | Exemples | 57 |
| 4.4 | Suite liée de vecteurs. Suite libre de vecteurs | 58 |
| 4.5 | Espaces vectoriels de dimension finie | 59 |
| 4.5.1 | Espace vectoriel ayant un nombre fini de générateurs | 59 |
| 4.5.2 | Base d'un espace vectoriel | 60 |
| 4.5.3 | Déterminant d'une suite de vecteurs d'un \mathbb{K} -espace vectoriel E de dimension finie | 62 |
| 4.6 | Sous-espaces vectoriels | 63 |
| 4.6.1 | Exemples de sous-espaces vectoriels | 63 |
| 4.7 | Sous-espaces vectoriels d'un espace vectoriel de dimension finie | 63 |
| 4.7.1 | Rang d'une suite finie de vecteurs | 64 |
| 4.8 | Sous-espaces supplémentaires | 67 |
| 4.9 | Somme de n sous-espaces vectoriels | 67 |
| 4.10 | Produit de deux espaces vectoriels sur un même corps commutatif \mathbb{K} . . . | 68 |
| 5 | APPLICATIONS LINÉAIRES | 69 |
| 5.1 | Image et Noyau | 70 |
| 5.1.1 | Le théorème noyau-image | 72 |
| 5.1.2 | Rang d'une application linéaire | 72 |
| 5.1.3 | Projections et symétries linéaires | 73 |
| 5.2 | Opérations sur les applications linéaires | 73 |
| 5.2.1 | L'espace vectoriel $\mathcal{L}_{\mathbb{K}}(E, F)$ | 73 |
| 5.2.2 | Composition des applications linéaires | 74 |
| 5.3 | Espace vectoriel quotient | 74 |
| 5.3.1 | Construction de l'espace vectoriel quotient de E par F | 74 |
| 5.3.2 | Problème | 75 |
| 5.4 | Matrice d'une application linéaire $f : E \rightarrow F$ | 75 |
| 5.4.1 | Utilisation du rang d'une matrice associée à une application linéaire pour trouver son noyau et son ensemble image. | 77 |
| 5.4.2 | Changement de bases | 79 |
| 5.4.3 | Déterminant et trace d'un endomorphisme sur un \mathbb{K} -espace vectoriel E de dimension finie | 81 |

| | | |
|-----------|--------------------------------|-----------|
| I | TRAVAUX DIRIGES | 84 |
| II | COMPLEMENTS d'EXERCICES | 91 |

INTRODUCTION

La Géométrie des Grecs(et l'Arithmétique) est(sont) l'origine arbitraire de notre repère temporel, puis vint René Descartes qui, avec son système de repère et de coordonnées, a fait émergé l'algèbre de la géométrie et la géométrie de l'algèbre, le tout sous le vocable de géométrie analytique ou d'algèbre linéaire quitte à se passer de l'intuition géométrique immédiate.

L'algèbre est la science des équations, et la théorie des modèles, cette science des équations consiste à :

1. *la recherche de l'ensemble des solutions d'équations*
(avec le constat qu'il y a stabilité de cet ensemble moyennant certaines lois de compositions internes ou externes, ce qui donnera le point 2.) ;
2. *Structuration de l'ensemble des solutions d'équations, c'est-à-dire munir cet ensemble de loi de composition interne ou de loi de composition externe (moyennant un ou des ensembles structurés) avec des propriétés avérées.*
3. *Etudier les applications entre des ensembles structurés de même type avec la propriété de la transparence des structures en présence, ces applications sont appelées homomorphismes ;*
4. *Structuration de l'ensemble des homomorphismes.*

Le nom de l'algèbre est lié au nom des équations auxquelles on a affaire.

Exemple : Les équations linéaires constituent les ingrédients de l'algèbre linéaire, les équations polynômiales constituent les ingrédients de l'algèbre des polynômes. Le rôle de **l'algèbre linéaire** est de traiter pêle-mêle des équations linéaires, la structuration naturelle de l'ensemble des solutions d'équations linéaires qui est une structure d'espace vectoriel et les calculs possibles avec les vecteurs ou les homomorphismes linéaires ou leurs représentations moyennant des bases sur les espaces vectoriels en question.

En ce qui concerne ce cours, c'est à la fois une invitation au voyage dans les contrées de l'algèbre linéaire, et un accompagnement à l'embarcadere d'où le voyage est solitaire. Bon voyage !

Chapitre 1

MATRICES

Objectifs

Savoir déterminer le type des matrices, effectuer les opérations légitimes sur les matrices et échelonner les matrices, à ligne ou à colonne canonique, voire réduite pour trouver rang, inversibilité et inverse de matrices.

1.1 Présentation des matrices de type (p, q) sur un corps \mathbb{K} commutatif

Soit $(\mathbb{K}, +, \times)$ un corps commutatif.

Comme exemples de corps commutatifs, vous avez : $(\mathbb{R}, +, \times)$ et $(\mathbb{C}, +, \times)$.

Définition p et q étant deux entiers naturels, $p \geq 1, q \geq 1$, une **matrice** $p \times q$ ou de type (p, q) est, par définition, un tableau rectangulaire de scalaires (ou nombres) appartenant à \mathbb{K} , rangés horizontalement ou verticalement, où une rangée horizontale est appelée **ligne** et une rangée verticale est appelée **colonne**. Les rangées figurent dans **deux parenthèses** ou deux **crochets** et la matrice est désignée par une lettre majuscule. Le nombre de rangées horizontales est le nombre de lignes p et le nombre de rangées verticales est le nombre de colonnes q .

Soit :

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1q} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2q} \\ \vdots & & & \vdots \\ a_{p1} & a_{p2} & \cdots & a_{pq} \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1q} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2q} \\ \vdots & & & \vdots \\ a_{p1} & a_{p2} & \cdots & a_{pq} \end{bmatrix}$$

une matrice à p lignes et q colonnes d'éléments $a_{ij} \in \mathbb{K}$; l'élément a_{ij} s'appelle **terme**, **coefficient** ou **composante** de la matrice A ; l'indice i correspond à la ligne de a_{ij} , l'indice j à la colonne de a_{ij} . On emploie aussi la notation

$$A = (a_{ij})_{\substack{1 \leq i \leq p \\ 1 \leq j \leq q}}$$

Ceci est la 2^{ème} ligne : $a_{21} \quad a_{22} \quad \cdots \quad a_{2q}$; la 4^{ème} colonne est : $\begin{matrix} a_{14} \\ a_{24} \\ \vdots \\ a_{p4} \end{matrix}$.

Pour $A = (a_{ij})_{\substack{1 \leq i \leq p, \\ 1 \leq j \leq q}}$,

on peut écrire une matrice suivant ses lignes : $A = \begin{bmatrix} L_1 \\ L_2 \\ L_3 \\ \vdots \\ L_i \\ \vdots \\ L_p \end{bmatrix}; 1 \leq i \leq p,$

ou suivant ses colonnes : $A = [C_1 \ C_2 \ C_3 \ \cdots \ C_j \ \cdots \ C_q]; 1 \leq j \leq q$

Exemple

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ -2 & \pi & \frac{1}{3} & -9 & -11 & 3 \\ -3 & -2 & 0 & 8 & 9 & 15 \\ -4 & 75 & -\frac{1}{3} & -7\pi & i & 5+i \end{bmatrix} \text{ c'est une matrice de type } (?, ?)$$

Ici l'élément $a_{14} = 4$, $a_{22} = \pi$, $a_{35} = 9$, $a_{33} = 0$, $a_{43} = -\frac{1}{3}$, $a_{46} = 5 + i$.

1.2 Quelques matrices de type (p, q)

a) Matrice uniligne(ou matrice ligne) : $p = 1$, q quelconque

$$M = [a_{11} \ a_{12} \ \cdots \ a_{1q}].$$

M est de type $(1, q)$.

Exemple

$$M = [-1 \ 5 \ 7 \ 78] \text{ de type } (1, 4)$$

b) Matrice unicolonne(ou matrice colonne) : $q = 1$, p quelconque

$$M = \begin{bmatrix} a_{11} \\ a_{21} \\ \vdots \\ a_{p1} \end{bmatrix}.$$

M est de type $(p, 1)$.

Exemple

$$M = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \\ 5 \\ 6 \end{bmatrix} \text{ est de type } (6, 1)$$

c) Matrice nulle de type (p, q)

C'est la matrice à p lignes et q colonnes dont les composantes sont toutes nulles.

Exemple : $A = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$, elle est de type $(3, 2)$.

d) Matrice carrée d'ordre $n = p = q$

C'est une matrice à n lignes et n colonnes, les termes a_{ii} sont les éléments **diagonaux** et forment **la diagonale principale**. L'autre diagonale du tableau carré s'appelle la *contre diagonale principale*.

Exemple

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 4 & \frac{8}{3} \\ -9 & \frac{4}{7} & -2 \\ 0 & 1 & 3 \end{bmatrix} \text{ c'est une matrice carrée d'ordre 3 et les}$$

éléments diagonaux sont : $a_{11} = 1$; $a_{22} = \frac{4}{7}$; $a_{33} = 3$. Les éléments de la
contre diagonale principale sont : $a_{31} = 0$; $a_{22} = \frac{4}{7}$; $a_{13} = \frac{8}{3}$.

e) Matrice diagonale

C'est une matrice carrée telle que tous les termes en dehors de la diagonale principale
sont nuls.

Exemples :

$$A_1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix} ; A_2 = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & -6 \end{bmatrix}.$$

f) Matrice unité(ou identité) d'ordre n

C'est la matrice diagonale d'ordre n telle que tous les termes de la diagonale
principale sont égaux à 1 (et les autres nuls). On la note I_n .

Exemples

$$I_2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad I_3 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad I_4 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

g) Matrice triangulaire supérieure :

C'est une matrice carrée telle que tous les termes en-dessous de la diagonale
principale sont nuls ($a_{ij} = 0$ si $i > j$).

Exemple : $A = \begin{bmatrix} 1 & 5 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -4 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & -3 \end{bmatrix}.$

h) Matrice triangulaire inférieure :

C'est une matrice carrée telle que tous les termes au-dessus de la diagonale
principale sont nuls ($a_{ij} = 0$ si $i < j$).

Exemple : $B = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 7 & 0 & 0 \\ 5 & -8 & -1 & 0 \\ -6 & 4 & -1 & -9 \end{bmatrix}.$

i) Matrice en bloc

C'est une matrice de type (m, n) dans laquelle on trouve des matrices
bien établies.

Soient $M \in M_r(\mathbb{K})$, $N \in M_{rs}(\mathbb{K})$, $P \in M_s(\mathbb{K})$ et $Q \in M_{sr}(\mathbb{K})$ alors

$$A = \begin{bmatrix} M & N \\ Q & P \end{bmatrix} \text{ est en bloc par exemple.}$$

Exemple :

$$A = \begin{bmatrix} 15 & 4 & 0 & 0 & 0 \\ 3 & 5 & 4 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 5 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 5 & 20 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 25 \end{bmatrix} \text{ où } M = \begin{pmatrix} 15 & 4 & 0 & 0 & 0 \\ 3 & 5 & 4 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 5 & 4 & 0 \end{pmatrix},$$

$$N = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, Q = \begin{pmatrix} 1 & 5 & 20 \\ 0 & 1 & 25 \end{pmatrix} \text{ et alors } A = \begin{bmatrix} M \\ N & Q \end{bmatrix}.$$

j) Transposée d'une matrice :

On appelle transposée de la matrice $A = (a_{ij})_{\substack{1 \leq i \leq p \\ 1 \leq j \leq q}}$ la matrice $A' = (a_{ji})_{\substack{1 \leq j \leq q \\ 1 \leq i \leq p}}$

La transposée de A est notée $({}^tA) = A'$; c'est la matrice dont les colonnes sont les lignes de A et vice versa.

Exemple : $A = \begin{bmatrix} -1 & 2 & 1+i \\ 4 & -6 & -8 \end{bmatrix}; \quad ({}^tA) = \begin{bmatrix} -1 & 4 \\ 2 & -6 \\ 1+i & -8 \end{bmatrix}.$

Remarque

Si A est de type (p, q) alors $({}^tA)$ est de type (q, p) .

k) Opposée d'une matrice :

C'est la matrice obtenue en prenant l'opposée de chaque terme :

$$\text{si } A = (a_{ij})_{\substack{1 \leq i \leq p \\ 1 \leq j \leq q}} \quad (-A) = (-a_{ij})_{\substack{1 \leq i \leq p \\ 1 \leq j \leq q}}.$$

Exemple : soit $A = \begin{bmatrix} -1 & 2 & 1+i \\ 4 & -6 & -8 \end{bmatrix}$; on a : $(-A) = \begin{bmatrix} -(-1) & -2 & -(1+i) \\ -4 & -(-6) & -(-8) \end{bmatrix}$

ainsi $(-A) = \begin{bmatrix} 1 & -2 & -(1+i) \\ -4 & 6 & 8 \end{bmatrix}.$

1.3 OPERATIONS SUR LES MATRICES

1.3.1 Somme de deux matrices de même type

On définit la matrice $C = A + B$, de type (p, q) , **somme** des deux matrices de type (p, q) , par ses coefficients : $c_{ij} = a_{ij} + b_{ij}$, $1 \leq i \leq p, 1 \leq j \leq q$.

Exemple : $A = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 1-i \\ -3 & -1+i & 2 \end{bmatrix}; B = \begin{bmatrix} 3 & 1 & -1+i \\ -3 & 1 & i \end{bmatrix},$

$$A + B = \begin{bmatrix} 2+3 & -1+1 & 1-i+(-1+i) \\ -3+(-3) & -1+i+1 & 2+i \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 & 0 & 0 \\ -6 & i & 2+i \end{bmatrix}$$

$$A + (-A) = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 1-i \\ -3 & -1+i & 2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -2 & -(-1) & -(1-i) \\ -(-3) & -(-1+i) & -2 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

1.3.2 Egalité de deux matrices de même type

Deux matrices $A = (a_{ij})_{\substack{1 \leq i \leq p \\ 1 \leq j \leq q}}$ et $B = (b_{ij})_{\substack{1 \leq i \leq p \\ 1 \leq j \leq q}}$, de type (p, q)

à coefficients dans \mathbb{K} sont **égales** si $A + (-B) = 0_{M_{pq}}(\mathbb{K}) = B + (-A)$.

Contre-exemple

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & -8 \\ -1 & 0 & 0 \\ 8 & 0 & 0 \end{bmatrix} \text{ et } B = \begin{bmatrix} 0 & 1 & -8 \\ -1 & 0 & 0 \\ 8 & -1 & 0 \end{bmatrix}, \text{ on a :}$$

$$A - B = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \neq \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \text{ donc } A \neq B.$$

Remarques

1) Soit $A \in M_{pq}(\mathbb{K})$, on a : $({}^t A) \in M_{qp}(\mathbb{K})$ et $({}^t({}^t A)) = A$.

2) Soit $A \in M_n(\mathbb{K})$, si on a : $({}^t A) = A$, on dit que A est une matrice **symétrique**.

$$\text{Exemple : } A = \begin{bmatrix} -2 & 1 & -8 \\ 1 & 3 & 0 \\ -8 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad ({}^t A) = \begin{bmatrix} -2 & 1 & -8 \\ 1 & 3 & 0 \\ -8 & 0 & 1 \end{bmatrix} = A.$$

3) Soit $A \in M_n(\mathbb{K})$, si on a : $({}^t A) = -A$, on dit que A est une matrice **antisymétrique**.

$$\text{Exemple : } A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & -8 \\ -1 & 0 & 0 \\ 8 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad ({}^t A) = \begin{bmatrix} 0 & -1 & 8 \\ 1 & 0 & 0 \\ -8 & 0 & 0 \end{bmatrix} = -A$$

On a ainsi une loi de composition interne : **l'addition**, qui fait de **l'ensemble** $M_{pq}(\mathbb{K})$ **des matrices** $p \times q$ **un groupe commutatif**. L'élément neutre est la matrice dont tous les coefficients a_{ij} sont nuls dite **matrice nulle** $0_{M_{pq}(\mathbb{K})}$.

La matrice opposée à $A = (a_{ij})$ est la matrice $(-A)$ de coefficients $(-a_{ij})$.

Remarque

Soient $A, B \in M_{pq}(\mathbb{K})$, on a : $({}^t(A + B)) = ({}^t B) + ({}^t A)$.

1.3.3 Multiplication par un scalaire d'une matrice

Soit $\lambda \in \mathbb{K}$, la matrice λA est par définition, la matrice de coefficient λa_{ij} , où $A = (a_{ij})$.

C'est le produit du scalaire λ par la matrice $A \in M_{pq}(\mathbb{K})$ noté λA .

Exemple

$$A = \begin{bmatrix} 2 & -1 + 2i & 1 - i \\ -3 & -1 + i & 0 \end{bmatrix};$$

$$2A = \begin{bmatrix} 2 \times 2 & 2 \times (-1 + 2i) & 2(1 - i) \\ 2 \times (-3) & 2(-1 + i) & 2 \times 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 & -2 + 4i & 2 - 2i \\ -6 & -2 + 2i & 0 \end{bmatrix}.$$

$$-3A = ?$$

Remarque

La multiplication "." d'un scalaire $\lambda \in \mathbb{K}$ par une matrice $A \in M_{pq}(\mathbb{K})$ est telle que $\lambda A \in M_{pq}(\mathbb{K})$, on dit que la multiplication "." est une loi de composition **externe** dans $M_{pq}(\mathbb{K})$ car l'opérande $\lambda \in \mathbb{K}$ mais pas à $M_{pq}(\mathbb{K})$.

Propriétés de la multiplication par un scalaire d'une matrice

(i) $1.A = A$, pour tout élément $A \in M_{pq}(\mathbb{K})$. 1 étant l'élément neutre de (\mathbb{K}^*, \times) .

(ii) $\alpha(\beta A) = (\alpha\beta)A$, pour tout élément $A \in M_{pq}(\mathbb{K})$, $\forall \alpha, \beta \in \mathbb{K}$.

(iii) $\alpha(A + B) = \alpha A + \alpha B$, $\forall \alpha \in \mathbb{K}$, $\forall A, B \in M_{pq}(\mathbb{K})$.

(iv) $(\alpha + \beta)A = \alpha A + \beta A$, $\forall \alpha, \beta \in \mathbb{K}$, pour tout élément $A \in M_{pq}(\mathbb{K})$.

Ainsi l'addition qui fait de l'ensemble $M_{pq}(\mathbb{K})$ des matrices de type (p, q) un groupe commutatif en association avec la loi de composition externe (qui est la multiplication d'un scalaire par une matrice) vérifiant les propriétés

sus-mentionnées fait de $M_{pq}(\mathbb{K})$ un \mathbb{K} -espace vectoriel.

Remarque

Soient $A \in M_{pq}(\mathbb{K})$, on a : $({}^t(\lambda A)) = \lambda({}^tA)$, $\lambda \in \mathbb{K}$.

1.3.4 Produit de deux matrices

Le produit de matrices est **sous condition** :

$A \times B$ est **possible** si le nombre de colonnes de A est **égal** au nombre de lignes de B .

Soient $A = (a_{ij})_{\substack{1 \leq i \leq m \\ 1 \leq j \leq n}} \in M_{m,n}(\mathbb{K})$, $B = (b_{ij})_{\substack{1 \leq i \leq n \\ 1 \leq j \leq p}} \in M_{n,p}(\mathbb{K})$,

on pose : $AB = C = (c_{ij})_{\substack{1 \leq i \leq m \\ 1 \leq j \leq p}} \in M_{m,p}(\mathbb{K})$, où $c_{ij} = \sum_{k=1}^n a_{ik} b_{kj}$

(on dit que l'on fait li-col, c'est-à-dire ligne par colonne) est le produit de la matrice A par B . En fait pour obtenir le terme c_{ij} de la matrice $A \times B = AB$, on multiplie les composantes de la $i^{\text{ème}}$ ligne de A par celles de la $j^{\text{ème}}$ colonne de B dans l'ordre et on fait la somme des différents produits.

On a symboliquement du point de vu des types de matrices

$$\begin{aligned} AB &= C \\ (m, n)(n, p) &= (m, p). \end{aligned}$$

Exemples

$$A = \begin{bmatrix} -1 & 3 \\ -4 & 1 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}; \quad B = \begin{bmatrix} 3 & -1 & 2 & 1 \\ 1 & -3 & 4 & 7 \end{bmatrix};$$

$$\begin{aligned} A \times B = AB &= \begin{bmatrix} -1 & 3 \\ -4 & 1 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 3 & -1 & 2 & 1 \\ 1 & -3 & 4 & 7 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} -1 \times 3 + 3 \times 1 & -1 \times (-1) + 3 \times (-3) & -1 \times 2 + 3 \times 4 & -1 \times 1 + 3 \times 7 \\ -4 \times 3 + 1 \times 1 & -4 \times (-1) + 1 \times (-3) & -4 \times 2 + 1 \times 4 & -4 \times 1 + 1 \times 7 \\ 0 \times 3 + 2 \times 1 & 0 \times (-1) + 2 \times (-3) & 0 \times 2 + 2 \times 4 & 0 \times 1 + 2 \times 7 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} 0 & -8 & 10 & 20 \\ -11 & 1 & -4 & 3 \\ 2 & -6 & 8 & 14 \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

$B \times A$ n'est pas un produit possible car le nombre de colonnes de B égalant 4 n'est pas égal au nombre de lignes de A qui est 3.

Remarque

$$\text{Soient } A = \begin{bmatrix} 1 & -4 \\ -3 & 2 \end{bmatrix} \text{ et } B = \begin{bmatrix} 3 & -4 \\ -3 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\text{on a : } AB = \begin{bmatrix} 15 & -4 \\ -15 & 12 \end{bmatrix} \neq \begin{bmatrix} 15 & -20 \\ -3 & 12 \end{bmatrix} = BA.$$

Ainsi

Proposition

le **produit** de matrices **n'est pas commutatif**.

Définition

Quand on a deux matrices carrées A et B telles que $A \times B = B \times A$ on dit que A et B commutent(ou permutent).

Exemple

$$\text{Soient } A = \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ 2 & 0 \end{bmatrix} \text{ et } B = \begin{bmatrix} 0 & \frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} & \frac{1}{4} \end{bmatrix}, \text{ on constate que}$$

$$AB = \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ 2 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & \frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} & \frac{1}{4} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & \frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} & \frac{1}{4} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ 2 & 0 \end{bmatrix} = BA$$

Ainsi A et B commutent mais le produit de matrices n'est pas commutatif.

Aussi A et B sont dites commutantes(permutantes).

Remarques

1. Formule du binôme de Newton

$\forall A, B \in M_n(\mathbb{K})$, commutant(permutant) e.i. $A \times B = B \times A$, on a :

$$(A + B)^n = \sum_{k=0}^n \mathfrak{C}_n^k A^{n-k} B^k = \sum_{k=0}^n \mathfrak{C}_n^k B^{n-k} A^k ;$$

$$n \geq 1, n \in \mathbb{N}, \mathfrak{C}_n^k = \frac{n!}{k!(n-k)!}.$$

2. $\forall A \in M_n(\mathbb{K})$ avec $A \neq 0_{M_n(\mathbb{K})}$, on a $A^0 = I_n$.

Propriétés

1. $A(B + C) = AB + AC$, $\forall A \in M_{mn}(\mathbb{K})$, $\forall B, C \in M_{np}(\mathbb{K})$; ceci est la distributivité à gauche de la multiplication par rapport à l'addition.

2. $(A + B)C = AC + BC$, $\forall A, B \in M_{mn}(\mathbb{K})$, $\forall C \in M_{np}(\mathbb{K})$; ceci est la distributivité à droite de la multiplication par rapport à l'addition.

Vu 1) et 2) la multiplication est distributive par rapport à l'addition.

3. $\forall \lambda \in \mathbb{K}$, $\forall A \in M_{mn}(\mathbb{K})$, $\forall B \in M_{np}(\mathbb{K})$,

$$(\lambda A)B = A(\lambda B) = \lambda(AB).$$

4. $\forall A \in M_{mn}(\mathbb{K})$, $\forall B \in M_{np}(\mathbb{K})$, $\forall C \in M_{pr}(\mathbb{K})$,

$(AB)C = A(BC) = ABC$; ceci est l'associativité de la multiplication des matrices.

5. $({}^t(AB)) = ({}^tB)({}^tA)$, $\forall A \in M_{pn}(\mathbb{K})$, $\forall B \in M_{nq}(\mathbb{K})$.

6. $I_p.A = A = A.I_n$, $\forall A \in M_{pn}(\mathbb{K})$, I_p, I_n sont unités d'ordre resp. p, n .

1.4 Trace d'une matrice carrée

Définition

Etant donné $A = (a_{ij}) \in M_n(\mathbb{K})$ une matrice carrée d'ordre n

(nombre de lignes = nombre de colonnes= n), on définit une application

$$tr \text{ de } M_n(\mathbb{K}) \text{ sur } \mathbb{K} \text{ nommée } \mathbf{trace} \text{ telle que } tr(A) = \sum_{i=1}^n a_{ii}.$$

$M_n(\mathbb{K})$ est l'ensemble des matrices de type (n, n) , dites aussi matrices carrée d'ordre n .

Exemple

$$\text{Soit } A = \begin{pmatrix} 7 & -1 & 0 & -2 \\ -4 & -5 & 11 & \frac{5}{2} \\ 1 & 2 & -3 & 4 \\ 74 & 9 & 0 & \frac{\pi}{2} \end{pmatrix},$$

$$\text{alors } tr(A) = 7 + (-5) + (-3) + \frac{\pi}{2} = \frac{\pi}{2} - 1 = \frac{\pi - 2}{2} = tr({}^tA).$$

Propriété

Etant données deux matrices $A, B \in M_n(\mathbb{K})$,

i) $tr(A + B) = tr(A) + tr(B)$

ii) $tr(\lambda A) = \lambda tr(A)$; $\lambda \in \mathbb{K}$.

iii) $tr(AB) = tr(BA)$.

iv) $tr(A) = tr({}^tA)$.

Je rappelle que \mathbb{K} est un corps commutatif.

Preuve

iii) $\forall A, B \in M_n(\mathbb{K})$,

$$\begin{aligned} tr(AB) &= \sum_{k=1}^n (AB)_{kk} = \sum_{k=1}^n \left(\sum_{i=1}^n A_{ki} B_{ik} \right) \\ &= \sum_{k=1}^n \left(\sum_{i=1}^n B_{ik} A_{ki} \right) = \sum_{i=1}^n \left(\sum_{k=1}^n B_{ik} A_{ki} \right) = \sum_{i=1}^n (BA)_{ii} \\ &= tr(BA). \end{aligned}$$

$$iv) tr({}^tA) = \sum_{k=1}^n ({}^tA)_{kk} = \sum_{k=1}^n A_{kk} = tr(A).$$

Remarques

1) $(M_n(\mathbb{K}), +, \times)$ est un anneau unitaire non commutatif.

L'élément unité se note I_n . Ainsi $\forall A \in M_n(\mathbb{K})$, $AI_n = I_nA = A$.

2) Avec $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 0 \end{bmatrix} \neq 0_{M_2(\mathbb{C})}$ et $B = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} \neq 0_{M_2(\mathbb{C})}$; on a :

$$AB = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \text{ donc}$$

$(M_n(\mathbb{K}), +, \times)$ est un anneau **non intègre**.

1.5 Matrices inversibles

Définition

$A \in M_n(\mathbb{K})$ est dite **inversible** s'il existe $B \in M_n(\mathbb{K})$ telle que $AB = BA = I_n$.

B est appelée **l'inverse** de A et se note $B = A^{-1} \neq \frac{1}{A}$ qui n'existe pas.

(B et A sont des matrices carrées **de même ordre**).

Exemple

Soient $A = \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ 2 & 0 \end{bmatrix}$ et $B = \begin{bmatrix} 0 & \frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} & \frac{1}{4} \end{bmatrix}$ on a : $AB = BA = I_2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$.

Ainsi A est inversible d'inverse B et inversement (i.e. B est inversible d'inverse A)
ou A et B sont inverses l'une de l'autre.

Proposition

le produit de matrices inversibles est inversible.

Proposition

L'ensemble $\mathbf{GL}_n(\mathbb{K})$ des matrices carrées d'ordre n inversibles est un groupe multiplicatif appelé le groupe linéaire.

1.6 Matrices équivalentes et matrices semblables

Définitions

i) Deux matrices $A, B \in M_{pq}(\mathbb{K})$ sont **équivalentes** s'ils existent $P \in M_p(\mathbb{K})$ inversible et $Q \in M_q(\mathbb{K})$ inversible telle que $A = PBQ \Leftrightarrow P^{-1}AQ^{-1} = B$.

ii) Deux matrices $A, B \in M_n(\mathbb{K})$ sont **semblables** s'il existe $P \in M_n(\mathbb{K})$ inversible telle que $A = P^{-1}BP \Leftrightarrow PA = BP \Leftrightarrow PAP^{-1} = B \Leftrightarrow AP^{-1} = P^{-1}B$
ce qui entraînera que $tr(A) = tr(B)$.

Exemples

i) Soient $A = \begin{bmatrix} 5 & 2 & 4 & 7 \\ 3 & 2 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 2 & 3 \end{bmatrix}$ et $R = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$

Soit $P = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ \frac{1}{2} & 0 & -\frac{5}{2} \\ -1 & 1 & 2 \end{bmatrix}$ avec $P' = \begin{bmatrix} 5 & 2 & 0 \\ 3 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$

On constate que $PP' = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ \frac{1}{2} & 0 & -\frac{5}{2} \\ -1 & 1 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 5 & 2 & 0 \\ 3 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$

Aussi $P'P = \begin{bmatrix} 5 & 2 & 0 \\ 3 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ \frac{1}{2} & 0 & -\frac{5}{2} \\ -1 & 1 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$

Donc P est inversible d'inverse $P^{-1} = P'$

Soit $Q = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -2 & -3 \\ 0 & 1 & 3 & 4 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ avec $Q' = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & -3 & -4 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$

On constate que $QQ' = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -2 & -3 \\ 0 & 1 & 3 & 4 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & -3 & -4 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$

et $Q'Q = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & -3 & -4 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & -2 & -3 \\ 0 & 1 & 3 & 4 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$

Ainsi Q est inversible d'inverse $Q^{-1} = Q'$

Aussi $PAQ = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ \frac{1}{2} & 0 & -\frac{5}{2} \\ -1 & 1 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 5 & 2 & 4 & 7 \\ 3 & 2 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 2 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & -2 & -3 \\ 0 & 1 & 3 & 4 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$

$PAQ = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & -3 & -4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & -2 & -3 \\ 0 & 1 & 3 & 4 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$

$PAQ = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} = R$

$PAQ = \tilde{R}$.

On a bien $PAQ = R$ avec $P \in M_3(\mathbb{R})$ inversible, $A \in M_{34}(\mathbb{R})$ et $Q \in M_4(\mathbb{R})$ inversible donc A et R sont équivalentes.

ii) Soient $M = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 2 & 3 & 2 \\ 1 & 1 & 2 \end{bmatrix}$ et $D = \begin{bmatrix} 1 & \frac{1}{2} & -\frac{3}{2} \\ 0 & \frac{1}{2} & \frac{3}{2} \\ 0 & -\frac{3}{2} & \frac{11}{2} \end{bmatrix}$

avec $P = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ -1 & -2 & 1 \end{bmatrix}$ et $P' = \begin{bmatrix} \frac{3}{4} & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{4} \\ -\frac{1}{4} & \frac{1}{2} & -\frac{1}{4} \\ \frac{1}{4} & \frac{1}{2} & \frac{1}{4} \end{bmatrix}$

$$\text{On a : } PP' = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ -1 & -2 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{3}{4} & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{4} \\ -\frac{1}{4} & \frac{1}{2} & -\frac{1}{4} \\ \frac{1}{4} & \frac{1}{2} & \frac{1}{4} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\text{Aussi } P'P = \begin{bmatrix} \frac{3}{4} & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{4} \\ -\frac{1}{4} & \frac{1}{2} & -\frac{1}{4} \\ \frac{1}{4} & \frac{1}{2} & \frac{1}{4} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ -1 & -2 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Ainsi P est inversible d'inverse $P^{-1} = P'$

On constate que :

$$P^{-1}MP = \begin{bmatrix} \frac{3}{4} & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{4} \\ -\frac{1}{4} & \frac{1}{2} & -\frac{1}{4} \\ \frac{1}{4} & \frac{1}{2} & \frac{1}{4} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 2 & 3 & 2 \\ 1 & 1 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ -1 & -2 & 1 \end{bmatrix}$$

$$P^{-1}MP = \begin{bmatrix} 1 & \frac{1}{2} & -\frac{3}{2} \\ 0 & \frac{1}{2} & \frac{3}{2} \\ 0 & -\frac{3}{2} & \frac{11}{2} \end{bmatrix} = D.$$

donc M et \bar{D} sont semblables.

Remarque

Deux matrices semblables **sont équivalentes**. Mais deux matrices équivalentes ne sont pas nécessairement semblables, il suffit qu'elles ne soient pas carrées.

1.7 Opérations élémentaires sur les matrices

Définition

Soit $A \in M_{pq}(\mathbb{K})$. On appelle *opérations élémentaires* sur A l'une des transformations suivantes :

1. Ajouter à une colonne (resp. ligne) de A le produit par un élément de \mathbb{K}^* d'une **autre** colonne (resp. ligne) : on parle de **transvection** sur les colonnes (resp. lignes) de A .

Exemple

soit $B = \begin{bmatrix} 3 & -1 & 2 & 1 \\ 1 & -3 & 4 & 7 \end{bmatrix}$ en faisant $C'_1 = C_1 + (-2)C_3$ on a :

$$B' = \begin{bmatrix} 3 + (-2) \times 2 & -1 & 2 & 1 \\ 1 + (-2) \times 4 & -3 & 4 & 7 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & -1 & 2 & 1 \\ -7 & -3 & 4 & 7 \end{bmatrix}.$$

Evidemment on a B équivalente à B' , ce qui se note : $B \sim B'$ qui se lit B équivalente à B' .

2. Permuter les colonnes (resp. lignes) de A .

Exemple

$$\text{soit } A = \begin{bmatrix} -1 & 3 \\ -4 & 1 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} \text{ permutons } L_1 \text{ et } L_3, \text{ on a :}$$

$$A' = \begin{bmatrix} 0 & 2 \\ -4 & 1 \\ -1 & 3 \end{bmatrix}.$$

Evidemment on a A équivalente à A' , ce qui se note : $A \sim A'$ qui se lit A équivalente à A' .

3. Multiplier une colonne (resp. ligne) de A par un élément de \mathbb{K}^* : on parle de **dilatation** ou d'**affinité** sur A .

Exemple

soit $A = \begin{bmatrix} -1 & 3 \\ -4 & 1 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}$ faisons $4L_2$, on a :

$$A' = \begin{bmatrix} -1 & 3 \\ -16 & 4 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}.$$

Evidemment on a A équivalente à A' , ce qui se note : $A \sim A'$
qui se lit A équivalente à A' .

Définition

Les matrices $E_{ij} \in M_{pq}(\mathbb{K})$ tels que $a_{ij} = 1$ et $a_{rs} = 0$,
si $r \neq i$ ou $s \neq j$, sont les matrices élémentaires de $M_{pq}(\mathbb{K})$.

Soit $A = (a_{ij})_{\substack{1 \leq i \leq p \\ 1 \leq j \leq q}} \in M_{pq}(\mathbb{K})$, on a $A = \sum_{\substack{1 \leq i \leq p \\ 1 \leq j \leq q}} a_{ij} E_{ij}$.

Exemples

$$E_{23} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \in M_{34}(\mathbb{R}), \quad E_{42} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \in M_{42}(\mathbb{R})$$

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{11} & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & a_{12} \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ a_{21} & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & a_{22} \\ 0 & 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ a_{31} & 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & a_{32} \end{bmatrix}$$

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{bmatrix} = a_{11} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} + a_{12} \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} + a_{21} \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} + a_{22} \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} + a_{31} \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} + a_{32} \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{bmatrix} = a_{11} E_{11} + a_{12} E_{12} + a_{21} E_{21} + a_{22} E_{22} + a_{31} E_{31} + a_{32} E_{32}$$

$$A = \sum_{\substack{1 \leq i \leq 3 \\ 1 \leq j \leq 2}} a_{ij} E_{ij} \in M_{32}(\mathbb{R})$$

1.8 Les opérations élémentaires sur les matrices avec les matrices élémentaires

D'abord, il est nécessaire de savoir que $\forall E_{ij}, E_{kl} \in M_p(\mathbb{K})$, on a : $E_{ij} \cdot E_{kl} = \delta_{jk} E_{il}$, où

$$\delta_{jk} = \begin{cases} 1 & \text{si } j = k \\ 0 & \text{si } j \neq k \end{cases}.$$

Soit $A = (a_{ij})_{\substack{1 \leq i \leq p \\ 1 \leq j \leq q}} \in M_{pq}(\mathbb{K})$, alors $A = \sum_{\substack{1 \leq i \leq p \\ 1 \leq j \leq q}} a_{ij} E_{ij}$, et

$$\begin{aligned}
 \forall E_{kl} \in M_p(\mathbb{K}), E_{kl}.A &= \sum_{\substack{1 \leq i \leq p \\ 1 \leq j \leq q}} a_{ij} E_{kl} E_{ij} = \sum_{\substack{1 \leq i \leq p \\ 1 \leq j \leq q}} a_{ij} \delta_{li} E_{kj} \\
 &= \sum_{1 \leq j \leq q} a_{lj} E_{kj} = \begin{bmatrix} 0 \\ a_{l1} & a_{l2} & \cdots & a_{l(q-1)} & a_{lq} \\ 0 \end{bmatrix} \leftarrow \begin{matrix} k^{i\text{ème}} \text{ ligne de } A \text{ a récupéré} \\ \text{la } l^{i\text{ème}} \text{ ligne de } A \end{matrix} \\
 \text{Aussi } \forall E_{kl} \in M_q(\mathbb{K}), A E_{kl} &= \sum_{\substack{1 \leq i \leq p \\ 1 \leq j \leq q}} a_{ij} E_{ij} E_{kl} = \sum_{\substack{1 \leq i \leq p \\ 1 \leq j \leq q}} a_{ij} \delta_{jk} E_{il} \\
 &= \sum_{1 \leq i \leq p} a_{ik} E_{il} = \begin{bmatrix} a_{1k} \\ a_{2k} \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ a_{(p-1)k} \\ a_{pk} \end{bmatrix} \\
 &\quad \uparrow \\
 &\quad l^{i\text{ème}} \text{ colonne de } A \\
 &\quad \text{a récupéré la } k^{i\text{ème}} \text{ colonne de } A
 \end{aligned}$$

de là, on comprend ce qui suit :

Soit $A \in M_{pq}(\mathbb{K})$. On appelle *opérations élémentaires* sur A l'un des produits suivants :

- 1.a. Soit $r \neq s$, $A(I_q + \lambda E_{rs})$, $E_{rs} \in M_q(\mathbb{K})$, c'est ajouter à la colonne s de A le produit par un élément λ de \mathbb{K}^* de la colonne r , on parle de **transvection** sur les colonnes de A .
- b). Soit $r \neq s$, $(I_p + \lambda E_{rs}) A$, $E_{rs} \in M_p(\mathbb{K})$, c'est ajouter à la ligne r de A le produit par un élément λ de \mathbb{K}^* de la ligne s , on parle de **transvection** sur les lignes de A .
- 2.a. Soit $r \neq s$, $(I_p - E_{rr} - E_{ss} + E_{rs} + E_{sr}) A$, $E_{rr}, E_{ss}, E_{rs}, E_{sr} \in M_p(\mathbb{K})$, c'est permuter les lignes r et s de A .
- b) Soit $r \neq s$, $A(I_q - E_{rr} - E_{ss} + E_{rs} + E_{sr})$, $E_{rr}, E_{ss}, E_{rs}, E_{sr} \in M_q(\mathbb{K})$, c'est permuter les colonnes r et s de A .
- 3.a. $(I_p + (\lambda - 1) E_{rr}) A$, $E_{rr} \in M_p(\mathbb{K})$, c'est multiplier la ligne r de A par un élément λ de \mathbb{K}^* : on parle de **dilatation** ou d'**affinité** sur A .
- b. $A(I_q + (\lambda - 1) E_{rr})$, $E_{rr} \in M_q(\mathbb{K})$, c'est multiplier la colonne r de A par un élément λ de \mathbb{K}^* : on parle de **dilatation** ou d'**affinité** sur A .

Pratiquement, cela se fait aisément en augmentant la matrice A par la matrice identité de même nombre de lignes que A , à la suite de la dernière colonne de A , quand l'on effectue des opérations élémentaires sur les lignes, à la fin des opérations sur les lignes, on obtient à la place de la matrice identité, la matrice **L** par laquelle, il faudra multiplier par A , comme suit :

L.A pour avoir la transformation obtenue de A .

En ce qui concerne les opérations sur les colonnes, on augmente la matrice A par la matrice identité de même nombre de colonnes que A , à la suite de la dernière ligne de A , à la fin des opérations sur les colonnes, on obtient à la place de la matrice identité, la matrice **C** par laquelle, il faudra multiplier par A , comme suit :

AC pour avoir la transformation obtenue de A .

Remarque

Les matrices L et C supra, sont dites matrices produit de matrices d'opérations élémentaires sur A .

Définition

Les matrices :

1. $(I_q + (\lambda - 1) E_{rr}), E_{rr} \in M_q(\mathbb{K})$;
2. $(I_p + (\lambda - 1) E_{rr}), E_{rr} \in M_p(\mathbb{K})$;
3. $r \neq s, (I_q - E_{rr} - E_{ss} + E_{rs} + E_{sr}), E_{rr}, E_{ss}, E_{rs}, E_{sr} \in M_q(\mathbb{K})$;
4. $r \neq s, (I_p - E_{rr} - E_{ss} + E_{rs} + E_{sr}), E_{rr}, E_{ss}, E_{rs}, E_{sr} \in M_p(\mathbb{K})$;
5. $r \neq s, (I_p + \lambda E_{rs}), E_{rs} \in M_p(\mathbb{K})$;
6. $r \neq s, (I_q + \lambda E_{rs}), E_{rs} \in M_q(\mathbb{K})$

sont dites matrices d'opérations élémentaires. En somme,

Définition

Toute matrice par laquelle, on multiplie une matrice A pour obtenir une matrice semblable à A est une matrice produit de matrices d'opérations élémentaires sur A .

Proposition

Toute matrice d'opération élémentaire est inversible.

Preuve (preuve avec le chapitre II)

Effet :

1. $\det((I_q + \lambda E_{rs})) = \det((I_p + \lambda E_{rs})) = 1 \neq 0$, ceci est relatif au déterminant de la matrice triangulaire $I_q + \lambda E_{rs}$ ou $I_p + \lambda E_{rs}$ avec des éléments diagonaux égaux à 1.
2. $\det(I_p - E_{rr} - E_{ss} + E_{rs} + E_{sr}) = \det(I_q - E_{rr} - E_{ss} + E_{rs} + E_{sr}) = -1 \neq 0$, ceci est le déterminant de la matrice identité dans laquelle on a permuté deux lignes ou deux colonnes
3. $\det(I_p + (\lambda - 1) E_{rr}) = \det(I_q + (\lambda - 1) E_{rr}) = \lambda \neq 0$ car $\lambda \in K^*$, ceci est le déterminant de la matrice identité dans laquelle on a multiplié une ligne ou une colonne par λ .

Proposition

Toute matrice carrée inversible est le produit de matrices d'opérations élémentaires.

Preuve

il suffit de se souvenir que toute matrice A carrée inversible est équivalente à la matrice identité de même ordre que A , moyennant des opérations élémentaires.

1.9 Matrices échelonnées

Définitions

i) Une matrice est **échelonnée** si :

- le nombre de zéros commençant une ligne (resp. colonne) croît strictement ligne par ligne (resp. colonne par colonne) jusqu'à ce qu'il ne reste plus que des zéros ou qu'il n'ait plus de ligne (resp. colonne).

Exemples

$$\text{a) } A_1 = \begin{bmatrix} -4 & 0 & 5 & 8 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 2 & 3 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & -7 & 9 & 10 & 15 \\ 0 & 0 & 0 & -3 & 1 & 9 \end{bmatrix}; A_2 = \begin{bmatrix} -4 & 0 & 5 & 8 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 2 & 3 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & -7 & 9 & 10 & 15 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

sont des matrices échelonnées suivant les lignes.

$$\text{b) } B_1 = \begin{bmatrix} -4 & 0 & 0 & 0 \\ 11 & 7 & 0 & 0 \\ -5 & 0 & -9 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -3 \end{bmatrix}; B_2 = \begin{bmatrix} -4 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 11 & 7 & 0 & 0 & 0 \\ -5 & 0 & -9 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -3 & 0 \end{bmatrix}$$

sont des matrices échelonnées suivant les colonnes.

ii) Elle est **échelonnée réduite à ligne canonique** (**échelonnée à ligne canonique**) si en plus :

- le premier coefficient non nul d'une ligne (non nulle) vaut 1 ;
- et c'est le seul élément non nul de sa colonne.

Exemples

$$A_1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 10 & 15 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 9 \end{bmatrix}; A_2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 8 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 3 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & 9 & 10 & 15 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

iii) Elle est **échelonnée réduite à colonne canonique** (**échelonnée à colonne canonique**) si en plus :

- le premier coefficient non nul d'une colonne (non nulle) vaut 1 ;
- et c'est le seul élément non nul de sa ligne.

Exemples

$$B_1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -3 \end{bmatrix}; B_2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}.$$

iv) Elle est **échelonnée réduite** quand elle est à la fois échelonnée réduite à ligne et colonne canoniques.

Exemples

$$C_1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} = [I_4 | 0];$$
$$C_2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} I_3 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix};$$
$$I_5 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = [I_5]$$

ainsi toutes les matrices unités(ou identités) I_n , $n \in \mathbb{N}^*$.

sont des matrices échelonnées réduites.

Remarque

Dans la réduite d'une matrice non nulle échelonnée réduite, il y a dans la première moitié ou dans le premier quart du haut une matrice unité(ou identité), I_n pour un certain $n \in \mathbb{N}$, ou la réduite est carrément une matrice identité.

v) **Echelonner réduire une matrice** A c'est lui trouver une matrice échelonnée réduite A' qui lui soit équivalente.

Lemme

Les opérations élémentaires sur les matrices servent à échelonner des matrices et les éléments non nuls d'une ligne ou (resp.d'une colonne) qui permette d'avoir des zéros sur les lignes qui suivent ou (resp.les colonnes qui suivent)

sont appelés **pivots**.

Exemples

a) Échelonnage suivant les lignes d'une matrice

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 4 & 1 & 0 \\ -2 & 5 & 4 \end{bmatrix} \simeq \begin{bmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 0 & -11 & -8 \\ 0 & 11 & 8 \end{bmatrix} \begin{matrix} \\ L_2 - 4L_1 \\ L_3 + 2L_1 \end{matrix}$$

$$A \simeq \begin{bmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 0 & -11 & -8 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{matrix} \\ \\ L_3 + L_2 \end{matrix}.$$

Les pivots ici, ont été : 1 ; -11.

b) Échelonnage à ligne canonique d'une matrice

$$\begin{bmatrix} 0 & 3 & 2 & -1 \\ -2 & 5 & 1 & 6 \\ 1 & -3 & 4 & 2 \end{bmatrix} \simeq \begin{bmatrix} 1 & -3 & 4 & 2 \\ 0 & -1 & 9 & 10 \\ 0 & 3 & 2 & -1 \end{bmatrix} \begin{matrix} L_3 \\ L_2 + 2L_3 \\ L_1 \end{matrix}$$

$$\simeq \begin{bmatrix} 1 & 0 & -23 & -28 \\ 0 & 1 & -9 & -10 \\ 0 & 0 & 29 & 29 \end{bmatrix} \begin{matrix} L_1 - 3L_2 \\ -L_2 \\ L_3 + 3L_2 \end{matrix} \simeq \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & -5 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{matrix} L_1 + \frac{23}{29}L_3 \\ L_2 + \frac{9}{29}L_3 \\ \frac{1}{29}L_3 \end{matrix}.$$

Les pivots sont réduits à 1 à chaque fois.

c) Échelonnage suivant les colonnes d'une matrice

$$B = \begin{bmatrix} 4 & 2 & 1 \\ 6 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & -1 \\ 2 & 1 & 3 \end{bmatrix} \simeq \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 3 & -4 & -6 \\ -1 & 3 & 4 \\ 3 & -5 & -10 \end{bmatrix} \begin{matrix} C_3 & C_2 - 2C_3 & C_1 - 4C_3 \\ \\ 2C_3 - 3C_2 \end{matrix} \simeq$$

$$B \simeq \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 3 & -4 & 0 \\ -1 & 3 & -1 \\ 3 & -5 & -5 \end{bmatrix}.$$

Les pivots ici, ont été : 1 ; -4.

d) Échelonnage à colonne canonique d'une matrice

$$C = \begin{bmatrix} 4 & 3 & 1 & 2 \\ 0 & -9 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 8 & 9 \end{bmatrix} \simeq \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -9 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 8 & 9 \end{bmatrix} \begin{matrix} \frac{1}{4}C_1 & C_2 - \frac{3}{4}C_1 & C_3 - \frac{1}{4}C_1 & C_4 - \frac{2}{4}C_1 \\ \\ -\frac{1}{9}C_2 & C_3 - \frac{1}{9}C_2 \end{matrix}$$

$$C \simeq \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 8 & 9 \end{bmatrix} \begin{matrix} \\ \\ \frac{1}{8}C_3 & C_4 - \frac{9}{8}C_3 \end{matrix}$$

$$C \simeq \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

Les pivots sont réduits à 1 à chaque fois.

Proposition

Une matrice A est inversible si et seulement si, échelonnée réduite elle est équivalente à la matrice **identité** de même ordre que A .

1.9.1 Inversion d'une matrice par les opérations élémentaires sur les matrices

Exemples

I) Avec opérations élémentaires sur les lignes :

Soit $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \end{bmatrix} \simeq \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ donc A est inversible.

On augmente la matrice A de la matrice unité de même nombre de ligne que A à la suite de la dernière colonne de A comme suit :

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right] = M \text{ et l'on cherchera à échelonner réduire la matrice } A$$

Ceci étant, déroulons :

$$\begin{aligned} & \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right] \approx \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & -1 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & -2 & -1 & 0 & 1 \end{array} \right] \begin{array}{l} L_2 - L_1 \\ L_3 - L_1 \end{array} \\ & \approx \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{3}{2} & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & 1 \end{array} \right] \begin{array}{l} \\ -\frac{1}{2}L_2 \\ L_3 - \frac{1}{2}L_2 \end{array} \approx \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 1 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & -\frac{2}{3} \end{array} \right] \begin{array}{l} L_1 - L_2 \\ \\ -\frac{2}{3}L_3 \end{array} \\ & \approx \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \\ 0 & 1 & 0 & \frac{1}{3} & -\frac{2}{3} & \frac{1}{3} \\ 0 & 0 & 1 & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & -\frac{2}{3} \end{array} \right] \begin{array}{l} L_1 - \frac{1}{2}L_3 \\ L_2 - \frac{1}{2}L_3 \\ \end{array} \end{aligned}$$

Comme l'échelonnage de la matrice A sous la réduite à donner la matrice identité,

alors la matrice A est inversible d'inverse $A^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \\ \frac{1}{3} & -\frac{2}{3} & \frac{1}{3} \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & -\frac{2}{3} \end{bmatrix}$.

II) Avec opérations élémentaires sur les colonnes

On augmente la matrice A de la matrice unité de même nombre de colonne que A à la suite de la dernière ligne de A comme suit :

$$\left[\begin{array}{ccc} 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \end{array} \right] = N \text{ et l'on cherchera à échelonner la matrice } A \text{ sous}$$

la forme échelonné réduite

Ceci étant, déroulons :

$$\begin{aligned} & \left[\begin{array}{ccc} 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \end{array} \right] \approx \left[\begin{array}{ccc} & C_2-C_1 & C_3-C_1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & -2 & -1 \\ 1 & -1 & -2 \end{array} \right] \approx \left[\begin{array}{ccc} & C_1+\frac{1}{2}C_2 & -\frac{1}{2}C_2 & C_3-\frac{1}{2}C_2 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & -\frac{3}{2} \end{array} \right] \\ & \left[\begin{array}{ccc} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{array} \right] \approx \left[\begin{array}{ccc} & C_2-C_1 & C_3-C_1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & -2 & -1 \\ 1 & -1 & -2 \end{array} \right] \approx \left[\begin{array}{ccc} & C_1+\frac{1}{2}C_2 & -\frac{1}{2}C_2 & C_3-\frac{1}{2}C_2 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & -\frac{3}{2} \end{array} \right] \end{aligned}$$

$$\approx \begin{array}{ccc} C_1 + \frac{1}{3}C_3 & C_2 + \frac{1}{3}C_3 & -\frac{2}{3}C_3 \\ \left[\begin{array}{ccc} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ \hline \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \\ \frac{1}{3} & -\frac{2}{3} & \frac{1}{3} \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & -\frac{2}{3} \end{array} \right] & \Rightarrow A^{-1} = & \left[\begin{array}{ccc} \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \\ \frac{1}{3} & -\frac{2}{3} & \frac{1}{3} \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & -\frac{2}{3} \end{array} \right]. \end{array}$$

1.10 Rang d'une matrice

Proposition

Le rang d'une matrice échelonnée ou échelonnée réduite est égale au nombre de ses lignes non nulles (si l'échelonnage a été effectué avec les opérations élémentaires sur les lignes) ou au nombre de colonnes non nulles (si l'échelonnage a été effectué avec les opérations élémentaires sur les colonnes).

Remarque

Pour trouver le rang d'une matrice, il suffit de l'échelonner.

Exemples

$$A_1 = \begin{bmatrix} -4 & 0 & 5 & 8 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 2 & 3 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & -7 & 9 & 10 & 15 \\ 0 & 0 & 0 & -3 & 1 & 9 \end{bmatrix} \Rightarrow rg(A_1) = 4;$$

$$A_2 = \begin{bmatrix} -4 & 0 & 5 & 8 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 2 & 3 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & -7 & 9 & 10 & 15 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \Rightarrow rg(A_2) = 3;$$

$$B_1 = \begin{bmatrix} -4 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 11 & 7 & 0 & 0 & 0 \\ -5 & 0 & -9 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -3 & 0 \end{bmatrix} \Rightarrow rg(B_1) = 4;$$

$$B_2 = \begin{bmatrix} -4 & 0 & 0 & 0 \\ 11 & 7 & 0 & 0 \\ -5 & 0 & -9 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -3 \end{bmatrix} \Rightarrow rg(B_2) = 4.$$

Proposition

$rg(A) = rg({}^t A)$ pour tout type de matrice A .

Proposition

Deux matrices sont **équivalentes ssi** elles ont le même rang.

Preuve

Soient $A, B \in M_{pq}(\mathbb{K})$ de même rang, alors ils existent $P_1, P_2 \in GL_P(\mathbb{K})$

et $Q_1, Q_2 \in GL_q(\mathbb{K})$ telles que

$$P_1 A Q_1 = R = P_2 B Q_2 \iff P_2^{-1} P_1 A Q_1 Q_2^{-1} = B \text{ avec}$$

$P_2^{-1} P_1 \in GL_P(\mathbb{K})$ et $Q_1 Q_2^{-1} \in GL_q(\mathbb{K})$, ce qui veut dire que A et B sont

équivalentes. $GL_P(\mathbb{K})$ est l'ensemble des matrices carrées d'ordre p inversibles.

R est la matrice échelonnée réduite à la fois de A et de B , définissant le même rang pour A et B .

Remarque

Toute opération élémentaire sur une matrice A , produit une matrice A' qui est

équivalente à A . Donc $rg(A) = rg(A')$.

Remarque

Le rang de A est indépendante des opérations élémentaires ayant permis son échelonnage ou son échelonnage réduit.

Proposition

A une matrice est de rang r si et seulement si elle est équivalente à la matrice

$$R = \left[\begin{array}{c|c} I_r & 0 \\ \hline 0 & 0 \end{array} \right] \text{ où } I_r \text{ est la matrice identité d'ordre } r.$$

Exemple

$$\text{Soit } A = \left[\begin{array}{cccc} 5 & 2 & 4 & 7 \\ 3 & 2 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 2 & 3 \end{array} \right], \text{ trouvons } r \text{ le rang de } A \text{ et la matrice}$$

$$R = \left[\begin{array}{c|c} I_r & 0 \\ \hline 0 & 0 \end{array} \right] \text{ auxquelle } A \text{ est équivalente.}$$

Nous allons faire des opérations élémentaires sur les lignes de A en augmentant A de la matrice identité de même nombre de lignes que A , à la suite de la dernière colonne de A . Et on va échelonner **à ligne canonique** la matrice A avec les opérations élémentaires sur la matrice augmentée.

Ainsi d'entrée, on a :

$$\left[\begin{array}{cccc|ccc} 5 & 2 & 4 & 7 & 1 & 0 & 0 \\ 3 & 2 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 2 & 3 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right] \sim \left[\begin{array}{cccc|ccc} 1 & \frac{2}{5} & \frac{4}{5} & \frac{7}{5} & \frac{1}{5} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{4}{5} & -\frac{12}{5} & -\frac{16}{5} & -\frac{3}{5} & 1 & 0 \\ 0 & -\frac{2}{5} & \frac{6}{5} & \frac{8}{5} & -\frac{1}{5} & 0 & 1 \end{array} \right] \begin{array}{l} \frac{1}{5}L_1 \\ L_2 - \frac{3}{5}L_1 \\ L_3 - \frac{1}{5}L_1 \end{array} \sim$$

$$\left[\begin{array}{cccc|ccc} 1 & 0 & 2 & 3 & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 1 & -3 & -4 & -\frac{3}{4} & \frac{5}{4} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 1 \end{array} \right] \begin{array}{l} L_1 - \frac{1}{2}L_2 \\ \frac{5}{4}L_2 \\ L_3 + \frac{1}{2}L_2 \end{array}$$

Evaluons :

$$PA = \left[\begin{array}{ccc|c} \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & 0 & \\ -\frac{3}{4} & \frac{5}{4} & 0 & \\ -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 1 & \end{array} \right] \left[\begin{array}{cccc} 5 & 2 & 4 & 7 \\ 3 & 2 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 2 & 3 \end{array} \right] = \left[\begin{array}{cccc} 1 & 0 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & -3 & -4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right].$$

On a donc : $PA = R'$.

Remarque

R' est dite matrice échelonnée à lignes canoniques de A car le premier terme non nul d'une ligne non nulle est 1 et c'est le seul non nul de sa colonne.

On continue avec les opérations élémentaires sur les colonnes cette fois-ci, en augmentant R' à la suite de sa troisième ligne par la matrice identité de même nombre de colonnes que R' . Et on va échelonner **réduire** la matrice R' avec les opérations élémentaires sur les colonnes de la matrice augmentée. c'est-à-dire :

$$C_3 - 2C_1 \quad C_4 - 3C_1 \quad C_3 + 3C_2 \quad C_4 + 4C_2$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & -3 & -4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -3 & -4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 1 & 0 & -2 & -3 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 1 & 0 & -2 & -3 \\ 0 & 1 & 3 & 4 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Ici on a : $R = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$ et on pose $Q = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -2 & -3 \\ 0 & 1 & 3 & 4 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$.

Evaluons :

$$PAQ = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & 0 \\ -\frac{3}{4} & \frac{5}{4} & 0 \\ -\frac{1}{4} & \frac{1}{2} & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 5 & 2 & 4 & 7 \\ 3 & 2 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 2 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & -2 & -3 \\ 0 & 1 & 3 & 4 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$PAQ = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & -3 & -4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & -2 & -3 \\ 0 & 1 & 3 & 4 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Donc $PAQ = R$.

Ainsi ayant $Q = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -2 & -3 \\ 0 & 1 & 3 & 4 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$, avec $Q' = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & -3 & -4 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$

on a : $QQ' = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -2 & -3 \\ 0 & 1 & 3 & 4 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & -3 & -4 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$

de même $Q'Q = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & -3 & -4 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & -2 & -3 \\ 0 & 1 & 3 & 4 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$

Donc Q est inversible d'inverse $Q^{-1} = Q'$.

Ayant $P = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & 0 \\ -\frac{3}{4} & \frac{5}{4} & 0 \\ -\frac{1}{4} & \frac{1}{2} & 1 \end{bmatrix}$, avec $P' = \begin{bmatrix} 5 & 2 & 0 \\ 3 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$

on a :

$$PP' = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & 0 \\ -\frac{3}{4} & \frac{5}{4} & 0 \\ -\frac{1}{4} & \frac{1}{2} & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 5 & 2 & 0 \\ 3 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

de même $P'P = \begin{bmatrix} 5 & 2 & 0 \\ 3 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & 0 \\ -\frac{3}{4} & \frac{5}{4} & 0 \\ -\frac{1}{4} & \frac{1}{2} & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$

Donc P est inversible d'inverse $P^{-1} = P'$.

Comme on a : $PAQ = R$ et que P et Q sont des matrices carrées inversibles d'ordre respectif 3 et 4 on a bien A est équivalente à R et le rang de A est 2.

Remarques

1. Le meilleur choix pour opérations élémentaires sur lignes ou colonnes

d'une matrice de type (p, q) : il faut choisir de travailler sur les lignes si $p < q$ sinon sur les colonnes.

2. Quand on veut travailler avec deux éléments d'une même ligne, il faut opérer avec les colonnes.

3. Quand on veut travailler avec deux éléments d'une même colonne, il faut opérer avec les lignes.

4. On peut d'or et déjà compter le nombre de lignes non nulles de R'

(parce qu'on a travaillé sur les lignes), et ce nombre est égal au rang de A .

Il en serait de même si on avait travaillé sur les colonnes.

Proposition

Soit $A \in M_n(\mathbb{K})$, A est inversible si et seulement si le rang de A est égal à n .

Proposition

Deux matrices carrées **semblables**, ont nécessairement la même trace et le même rang.

Remarque

Voici deux matrices carrées $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ -\frac{1}{2} & -1 \end{bmatrix}$ et $B = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$,

Le rang de $A =$ le rang de $B = 1$, mais elles ne sont pas semblables car $tr(A) = 0 \neq 1 = tr(B)$, alors que si elles étaient semblables, elles devraient avoir nécessairement la même trace.

Exercice 1

A l'aide des opérations élémentaires sur les lignes ou colonnes, décrire l'ensemble

des triplets réels (a, b, c) rendant le rang de la matrice $M = \begin{bmatrix} 1 & 1 & a & b \\ -1 & 2 & b & c \\ 2 & -1 & c & a \end{bmatrix}$

égal à 2.

Correction de l'exo. 1

$$\begin{aligned} M &= \begin{bmatrix} 1 & 1 & a & b \\ -1 & 2 & b & c \\ 2 & -1 & c & a \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 1 & a & b \\ 0 & 3 & b+a & c+b \\ 0 & -3 & c-2a & a-2b \end{bmatrix} \begin{array}{l} \\ L_2 + L_1 \\ L_3 - 2L_1 \end{array} \\ &\sim \begin{bmatrix} 1 & 1 & a & b \\ 0 & 3 & b+a & c+b \\ 0 & 0 & b-a+c & a-b+c \end{bmatrix} \begin{array}{l} \\ \\ L_3 + L_2 \end{array} \end{aligned}$$

Alors M serait de rang 2 si $\begin{cases} b-a+c=0 \\ a-b+c=0 \end{cases} \Rightarrow 2c=0 \Leftrightarrow c=0 \Rightarrow a=b$

Dés lors pour tout triplet $(a, a, 0)$, $\forall a \in \mathbb{R}$ va entraîner que le rang de M est 2.

Exercice 2

1) Réduire à la forme échelonnée puis à la forme ligne canonique les matrices suivantes

$$A_1 = \begin{bmatrix} 2 & -3 & -4 \\ 3 & 1 & 5 \\ -1 & 0 & -1 \\ 0 & 2 & 4 \end{bmatrix} \quad A_2 = \begin{bmatrix} 0 & 3 & 2 & -1 \\ -2 & 5 & 1 & 6 \\ 1 & -3 & 4 & 2 \end{bmatrix}$$

Si pour $i = 1, 2$, B_i est la forme ligne canonique de A_i déterminer la matrice P_i telle que $B_i = P_i A_i$.

2) Réduire à la forme échelonnée puis à la forme colonne canonique les matrices précédentes.

Si pour $i = 1, 2$, C_i est la forme ligne canonique de A_i déterminer la matrice Q_i telle que $C_i = A_i Q_i$.

Correction de l'exo.2

1) On augmente la matrice A_1 à la suite de sa dernière colonne par la matrice I_4 car le nombre de lignes de A_1 est 4.

Aussi on échelonne réduire à ligne canonique la matrice A_1

avec les opérations élémentaires sur les lignes :

$$\left[\begin{array}{ccc|cccc} 2 & -3 & -4 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 3 & 1 & 5 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & -1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 4 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right] \simeq \left[\begin{array}{ccc|cccc} 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 0 & 1 & 3 & 0 \\ 0 & -3 & -6 & 1 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 2 & 4 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right] \begin{array}{l} -L_3 \\ L_2 + L_3 \\ L_1 + 2L_3 \end{array}$$

$$\simeq \left[\begin{array}{ccc|cccc} 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 0 & 1 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 3 & 11 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -2 & -6 & 1 \end{array} \right] \begin{array}{l} \\ L_3 + 3L_2 \\ L_4 - 2L_2 \end{array}.$$

Évaluons :

$$\left[\begin{array}{cccc} 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 3 & 0 \\ 1 & 3 & 11 & 0 \\ 0 & -2 & -6 & 1 \end{array} \right] \times A_1 = \left[\begin{array}{cccc} 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 3 & 0 \\ 1 & 3 & 11 & 0 \\ 0 & -2 & -6 & 1 \end{array} \right] \times \left[\begin{array}{ccc} 2 & -3 & -4 \\ 3 & 1 & 5 \\ -1 & 0 & -1 \\ 0 & 2 & 4 \end{array} \right] = \left[\begin{array}{ccc} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{array} \right]$$

$$\text{Ainsi } B_1 = \left[\begin{array}{ccc} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{array} \right] \text{ et } P_1 = \left[\begin{array}{cccc} 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 3 & 0 \\ 1 & 3 & 11 & 0 \\ 0 & -2 & -6 & 1 \end{array} \right]$$

On refait la même chose pour A_2 ; on aura donc :

$$\left[\begin{array}{cccc|cccc} 0 & 3 & 2 & -1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ -2 & 5 & 1 & 6 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & -3 & 4 & 2 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{array} \right] \simeq \left[\begin{array}{cccc|cccc} 1 & -3 & 4 & 2 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 9 & 10 & 0 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 3 & 2 & -1 & 1 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right] \begin{array}{l} L_3 \\ L_2 + 2L_3 \\ L_1 \end{array}$$

$$\simeq \left[\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 0 & -23 & -28 & 0 & -3 & -5 & 0 \\ 0 & 1 & -9 & -10 & 0 & -1 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 29 & 29 & 1 & 3 & 6 & 0 \end{array} \right] \begin{array}{l} L_1 - 3L_2 \\ -L_2 \\ L_3 + 3L_2 \end{array}$$

$$\simeq \left[\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 0 & 0 & -5 & \frac{23}{29} & -\frac{18}{29} & -\frac{7}{29} & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & \frac{9}{29} & -\frac{2}{29} & -\frac{4}{29} & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & \frac{1}{29} & \frac{3}{29} & \frac{6}{29} & 0 \end{array} \right] \begin{array}{l} L_1 + \frac{23}{29}L_3 \\ L_2 + \frac{9}{29}L_3 \\ \frac{1}{29}L_3 \end{array}.$$

Évaluons :

$$\left[\begin{array}{cccc} \frac{23}{29} & -\frac{18}{29} & -\frac{7}{29} & 0 \\ \frac{9}{29} & -\frac{2}{29} & -\frac{4}{29} & 0 \\ \frac{1}{29} & \frac{3}{29} & \frac{6}{29} & 0 \end{array} \right] \times A_2 = \left[\begin{array}{cccc} \frac{23}{29} & -\frac{18}{29} & -\frac{7}{29} & 0 \\ \frac{9}{29} & -\frac{2}{29} & -\frac{4}{29} & 0 \\ \frac{1}{29} & \frac{3}{29} & \frac{6}{29} & 0 \end{array} \right] \left[\begin{array}{cccc} 0 & 3 & 2 & -1 \\ -2 & 5 & 1 & 6 \\ 1 & -3 & 4 & 2 \end{array} \right]$$

$$= \left[\begin{array}{cccc} 1 & 0 & 0 & -5 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{array} \right]$$

$$\text{Ainsi } B_2 = \left[\begin{array}{cccc} 1 & 0 & 0 & -5 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{array} \right] \text{ et } P_2 = \left[\begin{array}{ccc} \frac{23}{29} & -\frac{18}{29} & -\frac{7}{29} \\ \frac{9}{29} & -\frac{2}{29} & -\frac{4}{29} \\ \frac{1}{29} & \frac{3}{29} & \frac{6}{29} \end{array} \right].$$

2) On augmente la matrice A_1 à la suite de sa dernière ligne par la matrice I_3 car le nombre de colonnes de A_1 est 3.

Aussi on échelonne réduire à colonne canonique la matrice A_1 avec

les opérations élémentaires sur les colonnes :

$$\frac{1}{2}C_1 \quad C_2 + \frac{3}{2}C_1 \quad C_2 + 2C_1$$

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc} 2 & -3 & -4 & & & \\ 3 & 1 & 5 & & & \\ -1 & 0 & -1 & & & \\ 0 & 2 & 4 & & & \\ \hline 1 & 0 & 0 & & & \\ 0 & 1 & 0 & & & \\ 0 & 0 & 1 & & & \end{array} \right] \approx \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & & & \\ \frac{3}{2} & \frac{11}{2} & 11 & & & \\ \frac{-1}{2} & \frac{-3}{2} & -3 & & & \\ 0 & 2 & 4 & & & \\ \hline \frac{1}{2} & \frac{3}{2} & 2 & & & \\ 0 & 1 & 0 & & & \\ 0 & 0 & 1 & & & \end{array} \right]$$

$$\begin{array}{c} C_1 - \frac{3}{11}C_2 \quad \frac{2}{11}C_2 \quad C_3 - 2C_2 \\ \approx \left[\begin{array}{ccc} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ \frac{-1}{11} & \frac{-3}{11} & 0 \\ \frac{-6}{11} & \frac{4}{11} & 0 \\ \hline \frac{1}{11} & \frac{3}{11} & -1 \\ \frac{-3}{11} & \frac{2}{11} & -2 \\ 0 & 0 & 1 \end{array} \right] \end{array}$$

Evaluons :

$$A_1 \times \left[\begin{array}{ccc} \frac{1}{11} & \frac{3}{11} & -1 \\ -\frac{3}{11} & \frac{2}{11} & -2 \\ 0 & 0 & 1 \end{array} \right] = \left[\begin{array}{ccc} 2 & -3 & -4 \\ 3 & 1 & 5 \\ -1 & 0 & -1 \\ 0 & 2 & 4 \end{array} \right] \left[\begin{array}{ccc} \frac{1}{11} & \frac{3}{11} & -1 \\ -\frac{3}{11} & \frac{2}{11} & -2 \\ 0 & 0 & 1 \end{array} \right] = \left[\begin{array}{ccc} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ -\frac{1}{11} & -\frac{3}{11} & 0 \\ -\frac{6}{11} & \frac{4}{11} & 0 \end{array} \right]$$

$$\text{Ainsi : } Q_1 = \left[\begin{array}{ccc} \frac{1}{11} & \frac{3}{11} & -1 \\ -\frac{3}{11} & \frac{2}{11} & -2 \\ 0 & 0 & 1 \end{array} \right] \text{ et } C_1 = \left[\begin{array}{ccc} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ -\frac{1}{11} & -\frac{3}{11} & 0 \\ -\frac{6}{11} & \frac{4}{11} & 0 \end{array} \right].$$

On refait la même chose pour A_2 ; on aura donc :

$$\begin{array}{c} \begin{array}{c} -C_4 \quad C_2 + 3C_4 \quad C_3 + 2C_4 \quad C_1 \\ \left[\begin{array}{cccc} 0 & 3 & 2 & -1 \\ -2 & 5 & 1 & 6 \\ 1 & -3 & 4 & 2 \\ \hline 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right] \end{array} \approx \begin{array}{c} \left[\begin{array}{cccc} 1 & 0 & 0 & 0 \\ -6 & 23 & 13 & -2 \\ -2 & 3 & 8 & 1 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & 3 & 2 & 0 \end{array} \right] \end{array} \end{array}$$

$$\begin{array}{c} C_1 - 3C_4 \quad -\frac{1}{2}C_4 \quad C_3 + \frac{13}{2}C_4 \quad C_2 + \frac{23}{2}C_4 \\ \approx \left[\begin{array}{cccc} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ -5 & -\frac{1}{2} & \frac{29}{2} & \frac{29}{2} \\ \hline -3 & -\frac{1}{2} & \frac{13}{2} & \frac{23}{2} \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 2 & 3 \end{array} \right] \end{array}$$

$$\begin{array}{c} C_1 + \frac{10}{29}C_3 \quad C_2 + \frac{1}{29}C_3 \quad \frac{2}{29}C_3 \quad C_4 - C_3 \\ \approx \left[\begin{array}{cccc} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ \hline -\frac{22}{29} & -\frac{8}{29} & \frac{13}{29} & 5 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ \frac{10}{29} & \frac{1}{29} & \frac{2}{29} & -1 \\ -\frac{9}{29} & \frac{2}{29} & \frac{4}{29} & 1 \end{array} \right] \end{array}$$

Evaluons :

$$A_2 \times \begin{bmatrix} -\frac{22}{29} & -\frac{8}{29} & \frac{13}{29} & 5 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ \frac{10}{29} & \frac{1}{29} & \frac{2}{29} & -1 \\ -\frac{9}{29} & \frac{2}{29} & \frac{4}{29} & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 3 & 2 & -1 \\ -2 & 5 & 1 & 6 \\ 1 & -3 & 4 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -\frac{22}{29} & -\frac{8}{29} & \frac{13}{29} & 5 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ \frac{10}{29} & \frac{1}{29} & \frac{2}{29} & -1 \\ -\frac{9}{29} & \frac{2}{29} & \frac{4}{29} & 1 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

Ainsi $Q_2 = \begin{bmatrix} -\frac{22}{29} & -\frac{8}{29} & \frac{13}{29} & 5 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ \frac{10}{29} & \frac{1}{29} & \frac{2}{29} & -1 \\ -\frac{9}{29} & \frac{2}{29} & \frac{4}{29} & 1 \end{bmatrix}$ et $C_2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$.

Chapitre 2

CALCUL DE DÉTERMINANTS

Le déterminant est un simple **scalaire**(nombre) calculé à partir des éléments d'une matrice **carrée**. Ce scalaire est nul si la matrice carrée en question est non inversible.

Objectifs

**Savoir calculer le déterminant d'une matrice en le développant suivant une ligne ou une colonne tout en usant des propriétés sur les déterminants.*

**Trouver la comatrice d'une matrice ainsi que son inverse si nécessaire.*

2.1 Déterminant d'une matrice carrée d'ordre 2

Soit $A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$. On appelle **déterminant de A** le nombre $ad - bc$.

On note **dét A** ou $\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix}$.

Exemple

$$A = \begin{bmatrix} -1 & 3 \\ 4 & 2 \end{bmatrix}; \det A = \begin{vmatrix} -1 & 3 \\ 4 & 2 \end{vmatrix} = 2 \times (-1) - 3 \times 4 = -14$$

2.2 Déterminant d'une matrice carrée d'ordre 3

Soit $A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix}$. On appelle déterminant de A le nombre

$$a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} - a_{31}a_{22}a_{13} - a_{32}a_{23}a_{11} - a_{33}a_{21}a_{12}.$$

On note $\det A$ ou $\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$.

2.2.1 Calcul d'un déterminant d'ordre 3 par la méthode de Sarrus(Pierre Frédéric Sarrus(1798–1861))

On complète par les deux premières colonnes la suite de la troisième colonne (ou par les deux premières lignes la suite de la troisième ligne) et on fait les produits 3 à 3 parallèlement à la **diagonale principale** et les produits 3 à 3 parallèlement à la **contre-diagonale principale** ensuite, on **somme** en comptant

les produits parallèles à la diagonale principale positivement et ceux de la contre-diagonale principale négativement.

$$\begin{array}{c}
 \begin{array}{ccc}
 \begin{array}{c} a_{11} \searrow \\ a_{21} \searrow \\ \swarrow a_{31} \end{array} & \begin{array}{c} a_{12} \searrow \\ \swarrow a_{22} \\ \swarrow a_{32} \end{array} & \begin{array}{c} \swarrow a_{13} \\ \swarrow a_{23} \\ \swarrow a_{33} \end{array} \\
 \begin{array}{c} \swarrow a_{11} \\ \swarrow a_{21} \\ \swarrow a_{31} \end{array} & \begin{array}{c} \swarrow a_{12} \\ a_{22} \\ \swarrow a_{32} \end{array} & \begin{array}{c} \swarrow a_{13} \\ \swarrow a_{23} \\ \swarrow a_{33} \end{array}
 \end{array} \\
 \downarrow \quad \downarrow \quad \downarrow \quad \downarrow \quad \downarrow \quad \downarrow \\
 - (a_{31}a_{22}a_{13} + a_{32}a_{23}a_{11} + a_{33}a_{21}a_{12}) + (a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32}) \\
 = \\
 \det A = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} .
 \end{array}$$

Ou

$$\begin{array}{c}
 \begin{array}{ccc}
 \begin{array}{c} a_{11} \searrow \\ a_{21} \searrow \\ \swarrow a_{31} \end{array} & \begin{array}{c} a_{12} \searrow \\ \swarrow a_{22} \\ \swarrow a_{32} \end{array} & \begin{array}{c} \swarrow a_{13} \\ \swarrow a_{23} \\ \swarrow a_{33} \end{array} \\
 \begin{array}{c} \swarrow a_{11} \\ \swarrow a_{21} \\ \swarrow a_{31} \end{array} & \begin{array}{c} \swarrow a_{12} \\ a_{22} \\ \swarrow a_{32} \end{array} & \begin{array}{c} \swarrow a_{13} \\ \swarrow a_{23} \\ \swarrow a_{33} \end{array}
 \end{array} \\
 \downarrow \quad \downarrow \quad \downarrow \quad \downarrow \quad \downarrow \quad \downarrow \\
 - (a_{31}a_{22}a_{13} + a_{32}a_{23}a_{11} + a_{33}a_{21}a_{12}) + (a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32}) \\
 = \det A = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} .
 \end{array}$$

Remarque : La méthode de Sarrus ne s'applique qu'au déterminant d'ordre 3.

2.2.2 Calcul du déterminant par le développement suivant une ligne ou une colonne.

Définition

Soit $A = (a_{ij})_{1 \leq i, j \leq n}$ pour l'élément a_{ij} , X_{ij} le déterminant obtenu en éliminant la ligne et la colonne de a_{ij} est son **mineur** ; le nombre $C_{ij} = (-1)^{i+j} X_{ij}$ est son **cofacteur**.

Remarque

Pour tout a_{ij} élément de A matrice carrée,

Si $(i+j)$ est paire X_{ij} et C_{ij} sont égaux sinon ils sont opposés l'un à l'autre.

Exemple

$$\text{Soit } A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix}$$

Quand on élimine la ligne et la colonne de a_{11} , on obtient X_{11} son mineur

$$\text{qui est : } \begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} \text{ et son cofacteur est : }$$

$$C_{11} = (-1)^{1+1} \times \begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = X_{11} .$$

quand on élimine la ligne et la colonne de a_{12} , on obtient X_{12} son mineur

$$\text{qui est : } \begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix} \text{ et son cofacteur est : }$$

$$C_{12} = (-1)^{1+2} \times \begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix} = - \begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix} = -X_{12}$$

quand on élimine la ligne et la colonne de a_{13} , on obtient X_{13} son mineur

qui est : $\begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix}$ et son cofacteur est :

$$C_{13} = (-1)^{1+3} \times \begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix} = X_{13}.$$

Methode

Développement suivant la 1^{ère} ligne pour calculer $\det A$;

on a : $\det A = a_{11} \times C_{11} + a_{12} \times C_{12} + a_{13} \times C_{13}$.

Ainsi :

$$\begin{aligned} \det A &= a_{11} \times (-1)^{1+1} \times \begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} + a_{12} \times (-1)^{1+2} \times \begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix} \\ &\quad + a_{13} \times (-1)^{1+3} \times \begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix} \\ &= a_{11} (a_{22}a_{33} - a_{32}a_{23}) - a_{12} (a_{21}a_{33} - a_{31}a_{23}) \\ &\quad + a_{13} (a_{21}a_{32} - a_{31}a_{22}) \\ &= (a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32}) \\ &\quad - (a_{31}a_{22}a_{13} + a_{32}a_{23}a_{11} + a_{33}a_{21}a_{12}). \end{aligned}$$

$\det A$ s'obtient aussi par le développement suivant une colonne,

développons $\det A$ suivant la 2^{ème} colonne de A qui est : $\begin{pmatrix} a_{12} \\ a_{22} \\ a_{32} \end{pmatrix}$, on a :

$$\begin{aligned} \det A &= a_{12} \times (-1)^{1+2} \times \begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix} + a_{22} \times (-1)^{2+2} \times \begin{vmatrix} a_{11} & a_{13} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix} \\ &\quad + a_{32} \times (-1)^{3+2} \times \begin{vmatrix} a_{11} & a_{13} \\ a_{21} & a_{23} \end{vmatrix} \\ &= (a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32}) \\ &\quad - (a_{31}a_{22}a_{13} + a_{32}a_{23}a_{11} + a_{33}a_{21}a_{12}) \\ \det A &= a_{12} \times C_{12} + a_{22} \times C_{22} + a_{32} \times C_{32}. \end{aligned}$$

Exemples pratiques

$$A = \begin{bmatrix} -1 & -2 & 3 \\ 3 & 0 & 1 \\ -1 & 4 & 5 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} 0 & 0 & -5 \\ -4 & -1 & 2 \\ 2 & -2 & 0 \end{bmatrix}.$$

$$\det A = \begin{vmatrix} -1 & -2 & 3 \\ 3 & 0 & 1 \\ -1 & 4 & 5 \end{vmatrix} \text{ développons suivant la 2^{ème} ligne.}$$

$$\begin{aligned} \det A &= 3 \times (-1)^{1+2} \times \begin{vmatrix} -2 & 3 \\ 4 & 5 \end{vmatrix} + 1 \times (-1)^{2+3} \times \begin{vmatrix} -1 & -2 \\ -1 & 4 \end{vmatrix} \\ &= -3(-2 \times 5 - 4 \times 3) - 1 \times (-1 \times 4 - (-1) \times (-2)) \\ &= -3(-22) - (-6) = 72. \end{aligned}$$

En développant $\det A$ suivant la 1^{ère} ligne on a :

$$\begin{aligned} \det A &= (-1) \times (-1)^{1+1} \times \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 4 & 5 \end{vmatrix} + (-2) \times (-1)^{1+2} \times \begin{vmatrix} 3 & 1 \\ -1 & 5 \end{vmatrix} \\ &\quad + 3 \times (-1)^{1+3} \times \begin{vmatrix} 3 & 0 \\ -1 & 4 \end{vmatrix} = 72. \end{aligned}$$

C'est plus long à calculer.

Développons $\det B$ suivant la 1^{ère} ligne :

$$\det B = \begin{vmatrix} 0 & 0 & -5 \\ -4 & -1 & 2 \\ 2 & -2 & 0 \end{vmatrix} = (-5) \times (-1)^{1+3} \times \begin{vmatrix} -4 & -1 \\ 2 & -2 \end{vmatrix} \\ = -5 \times (-4 \times (-2) - (-1) \times 2) = -50.$$

Développons $\det B$ suivant la 1^{ère} colonne

$$\det B = \begin{vmatrix} 0 & 0 & -5 \\ -4 & -1 & 2 \\ 2 & -2 & 0 \end{vmatrix} \\ = (-4) \times (-1)^{1+2} \times \begin{vmatrix} 0 & -5 \\ -2 & 0 \end{vmatrix} + 2 \times (-1)^{1+3} \times \begin{vmatrix} 0 & -5 \\ -1 & 2 \end{vmatrix} \\ = -(-4) \times (0 \times 0 - (-2) \times (-5)) + 2(0 \times 2 - (-1) \times (-5)) \\ = -40 - 10 = -50.$$

Le calcul de $\det B$ avec le développement suivant la 2^{ième} ligne

$$\det B = \begin{vmatrix} 0 & 0 & -5 \\ -4 & -1 & 2 \\ 2 & -2 & 0 \end{vmatrix} \\ = (-4) \times (-1)^{1+2} \times \begin{vmatrix} 0 & -5 \\ -2 & 0 \end{vmatrix} + (-1) \times (-1)^{2+2} \times \begin{vmatrix} 0 & -5 \\ 2 & 0 \end{vmatrix} \\ + 2 \times (-1)^{2+3} \times \begin{vmatrix} 0 & 0 \\ 2 & -2 \end{vmatrix} = (-4)(10) - (10) + 0 = -50.$$

C'est plus long à effectuer que les précédents.

Remarques

- (i) Quand l'on a choisi une ligne ou une colonne suivant laquelle le calcul du déterminant d'une matrice sera développé, **le déterminant est égal à la somme des produits de chaque élément de ladite ligne ou colonne par son cofacteur.**
- (ii) En choisissant une colonne ou une ligne où il y a plus de **zéros**, on a moins de termes dans le développé.
- (iii) Par cette méthode du développement suivant une ligne ou une colonne, on constate que dans le développé l'**ordre** de la matrice dont on calcule le déterminant **s'abaisse**.

2.3 Calcul du déterminant d'une matrice carrée d'ordre n supérieur ou égal à 3

On se ramène à des calculs de déterminants d'ordre inférieur à n en développons suivant une ligne ou une colonne. Dès lors l'on s'apercevra que pour calculer un déterminant d'ordre n , il faut savoir calculer celui d'une matrice d'ordre $n - 1$, en suite celui d'ordre $n - 2$, jusqu'à celui d'ordre 2. On peut ainsi souligner que la méthode du développement suivant une colonne ou une ligne pour le calcul du déterminant d'une matrice est une méthode récursive (ce qui signifie ici que le calcul du déterminant d'ordre n a besoin du savoir du calcul d'un déterminant d'ordre $n - 1$, ainsi jusqu'à l'ordre 2).

Exemple

$$A = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 2 & 0 \\ 2 & 3 & -1 & 4 \\ -3 & 2 & -1 & 0 \\ 4 & 5 & -1 & 0 \end{bmatrix},$$

développons suivant la 4^{ème} colonne ; $\det A$:

$$\begin{aligned} \det A &= \begin{vmatrix} -1 & 0 & 2 & 0 \\ 2 & 3 & -1 & 4 \\ -3 & 2 & -1 & 0 \\ 4 & 5 & -1 & 0 \end{vmatrix} = 4 \times (-1)^{2+4} \times \begin{vmatrix} -1 & 0 & 2 \\ -3 & 2 & -1 \\ 4 & 5 & -1 \end{vmatrix} \\ &= 4 \left[2 \times \begin{vmatrix} -1 & 2 \\ 4 & -1 \end{vmatrix} - 5 \times \begin{vmatrix} -1 & 2 \\ -3 & -1 \end{vmatrix} \right] \\ &= 4 [2(1-8) - 5(1+6)] = 4(-14-35) \\ &= 4(-49) = -196. \end{aligned}$$

Aussi $\det A$ avec le développement suivant la deuxième ligne de A sera bien long à écrire en effet :

$$\begin{aligned} \det A &= \begin{vmatrix} -1 & 0 & 2 & 0 \\ 2 & 3 & -1 & 4 \\ -3 & 2 & -1 & 0 \\ 4 & 5 & -1 & 0 \end{vmatrix} \\ \det A &= 2 \times (-1)^{2+1} \times \begin{vmatrix} 0 & 2 & 0 \\ 2 & -1 & 0 \\ 5 & -1 & 0 \end{vmatrix} + 3 \times (-1)^{2+2} \times \begin{vmatrix} -1 & 2 & 0 \\ -3 & -1 & 0 \\ 4 & -1 & 0 \end{vmatrix} \\ &\quad + (-1) \times (-1)^{2+3} \times \begin{vmatrix} -1 & 0 & 0 \\ -3 & 2 & 0 \\ 4 & 5 & 0 \end{vmatrix} + 4 \times (-1)^{2+4} \times \begin{vmatrix} -1 & 0 & 2 \\ -3 & 2 & -1 \\ 4 & 5 & -1 \end{vmatrix}. \end{aligned}$$

Théorème

Soit $A = (a_{ij})_{1 \leq i, j \leq n}$.

Déterminant de A développé par rapport à la i -ième ligne :

$$\det(A) = a_{i1}C_{i1} + a_{i2}C_{i2} + \dots + a_{in}C_{in} = \sum_{k=1}^n a_{ik}C_{ik}.$$

Déterminant de A développé par rapport à la j -ième colonne :

$$\det(A) = a_{1j}C_{1j} + a_{2j}C_{2j} + \dots + a_{nj}C_{nj} = \sum_{k=1}^n a_{kj}C_{kj}.$$

Remarque

Pour développer suivant les lignes ou les colonnes, il vaut mieux choisir celles qui renferment le plus de zéros pour réduire le nombre de calculs.

2.4 Propriétés des déterminants

1) (i) Soient A et B deux matrices carrées d'ordre n sur un corps \mathbb{K} (commutatif).

Alors on a : $\det(AB) = \det A \times \det B$

($\det(AB) = \det A \times \det B = \det B \times \det A = \det(BA)$).

Exemple

$$\text{Soit } A = \begin{bmatrix} -1 & -2 & 3 \\ 3 & 0 & 1 \\ -1 & 4 & 5 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} 0 & 0 & -5 \\ -4 & -1 & 2 \\ 2 & -2 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\text{on a : } AB = \begin{bmatrix} -1 & -2 & 3 \\ 3 & 0 & 1 \\ -1 & 4 & 5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 0 & -5 \\ -4 & -1 & 2 \\ 2 & -2 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 14 & -4 & 1 \\ 2 & -2 & -15 \\ -6 & -14 & 13 \end{bmatrix}$$

$$\det(AB) = \begin{vmatrix} 14 & -4 & 1 \\ 2 & -2 & -15 \\ -6 & -14 & 13 \end{vmatrix} = -3600$$

on sait aussi que $\det A = 72$ et $\det B = -50$ et $\det A \times \det B = 72 \times (-50) = -3600$

on a bien $\det(AB) = \det A \times \det B$.

(ii) $\forall \lambda \in \mathbb{K}, \forall A \in M_n(\mathbb{K})$, alors $\det(\lambda A) = \lambda^{\text{ordre}(A)} \det A = \lambda^n \det A$.

Exemple

$$\det \left(2 \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 3 & -1 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix} \right) = 2^3 \det \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 3 & -1 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix}.$$

(iii) Soit $A \in M_n(\mathbb{K})$, $\det(A) = \det({}^t A)$.

2) Le déterminant d'une matrice triangulaire, en particulier celui d'une matrice diagonale, est égal au produit des éléments diagonaux

(c'est-à-dire des éléments de la diagonale principale).

Par conséquent le déterminant d'une matrice unité est égale à 1.

Exemples

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 3 & -1 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix};$$

$$\det A = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 3 & -1 \\ 0 & 0 & -2 \end{vmatrix} = 1 \times 3 \times (-2) = -6.$$

$$B = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -5 \end{bmatrix};$$

$$\det B = \begin{vmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -5 \end{vmatrix} = 2 \times 3 \times (-1) \times (-5) = 30.$$

$$I_4 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\det I_4 = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 1 \times 1 \times 1 \times 1 = 1$$

3) Le déterminant ne change pas quand on **ajoute** à une *ligne* une combinaison des **autres** *lignes*; en particulier, on peut remplacer une ligne par la somme de toutes les lignes ou encore ajouter à une ligne λ multiplié par une autre ligne où λ est un scalaire non nul.

(Dans la propriété **3**) en remplaçant ligne(s) par colonne(s), on a le même résultat).

Exemple

$$\det A = \begin{vmatrix} -1 & -2 & 3 \\ 3 & 0 & 1 \\ -1 & 4 & 5 \end{vmatrix}, \text{ en ajoutant à la 3}^{\text{ème}} \text{ ligne, deux fois la 1}^{\text{ère}} \text{ ligne, on a :}$$

$$\det A = \begin{vmatrix} -1 & -2 & 3 \\ 3 & 0 & 1 \\ -3 & 0 & 11 \end{vmatrix}, \text{ je développe par rapport à la 2}^{\text{ème}} \text{ colonne,}$$

$$\det A = -(-2) \times \begin{vmatrix} 3 & 1 \\ -3 & 11 \end{vmatrix} = 2(33 + 3) = 72.$$

Remarque

Il est plus intéressant de faire des manipulations (légitimes) qui font apparaître des zéros dans le déterminant afin d'en faciliter le calcul(voir supra).

- 4) Le déterminant d'une matrice dont une ligne ou une colonne est formée de zéros est un déterminant nul. Le déterminant d'une matrice dont une ligne(resp. une colonne) est une combinaison des autres lignes (resp. des autres colonnes) est un déterminant nul. Aussi si deux lignes(resp. deux colonnes) sont proportionnelles dans un déterminant, le déterminant est nul.

Exemple

$$\det A = \begin{vmatrix} -1 & -2 & 3 \\ 3 & 6 & 1 \\ -1 & -2 & 5 \end{vmatrix} = 0, \text{ car la 2}^{\text{ème}} \text{ colonne est égale à deux fois la 1}^{\text{ère}} \text{ colonne.}$$

- 5) Le déterminant est linéaire en ses lignes et colonnes respectivement.

(pour ne pas dire multilinéaire suivant les lignes ou les colonnes)

Cela signifie : étant donnée A une matrice carrée d'ordre n ; on a :

$$A = [C_1 \ C_2 \ C_3 \ \cdots \ C_i \ \cdots \ C_n] = \begin{bmatrix} L_1 \\ L_2 \\ L_3 \\ \vdots \\ L_i \\ \vdots \\ L_n \end{bmatrix} ; 1 \leq i \leq n.$$

$$(i) \det [C_1 \ C_2 \ C_3 \ \cdots \ C_i + C'_i \ \cdots \ C_n] = \det [C_1 \ C_2 \ C_3 \ \cdots \ C_i \ \cdots \ C_n] + \det [C_1 \ C_2 \ C_3 \ \cdots \ C'_i \ \cdots \ C_n]$$

$$\text{ou } (i') \det \begin{bmatrix} L_1 \\ L_2 \\ L_3 \\ \vdots \\ L_i + L'_i \\ \vdots \\ L_n \end{bmatrix} = \det \begin{bmatrix} L_1 \\ L_2 \\ L_3 \\ \vdots \\ L_i \\ \vdots \\ L_n \end{bmatrix} + \det \begin{bmatrix} L_1 \\ L_2 \\ L_3 \\ \vdots \\ L'_i \\ \vdots \\ L_n \end{bmatrix}.$$

Exemples

$$(i) \begin{vmatrix} 2 & a+b & b^2 \\ a & a-b^2 & b \\ a^2 & a^3+b & ab \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2 & a & b^2 \\ a & a & b \\ a^2 & a^3 & ab \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 2 & b & b^2 \\ a & -b^2 & b \\ a^2 & b & ab \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} 2 & b & b^2 \\ a & a & b \\ a^2 & b & ab \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 2 & a & b^2 \\ a & -b^2 & b \\ a^2 & a^3 & ab \end{vmatrix}$$

avec $a, b \in \mathbb{K}$ un corps.

$$(i') \begin{vmatrix} 2-b^2 & a+b & b^2+b \\ a & a & b \\ a^2 & a^3 & ab \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2 & a & b^2 \\ a & a & b \\ a^2 & a^3 & ab \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} -b^2 & b & b \\ a & a & b \\ a^2 & a^3 & ab \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} -b^2 & a & b \\ a & a & b \\ a^2 & a^3 & ab \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 2 & b & b^2 \\ a & a & b \\ a^2 & a^3 & ab \end{vmatrix}$$

avec $a, b \in \mathbb{K}$ un corps.

$$(ii) \det [C_1 \ C_2 \ C_3 \ \cdots \ \beta C_i \ \cdots \ C_n] = \beta \det [C_1 \ C_2 \ C_3 \ \cdots \ C_i \ \cdots \ C_n] ;$$

$\beta \in \mathbb{K}$ un corps.

$$\text{ou } ((ii)') \det \begin{bmatrix} L_1 \\ L_2 \\ L_3 \\ \vdots \\ \gamma L_i \\ \vdots \\ L_n \end{bmatrix} = \gamma \det \begin{bmatrix} L_1 \\ L_2 \\ L_3 \\ \vdots \\ L_i \\ \vdots \\ L_n \end{bmatrix} ;$$

$\gamma \in \mathbb{K}$ un corps.

Exemple

$$(ii) \det A = \begin{vmatrix} -1 & -2 & 17 \times 3 \\ 3 & 0 & 17 \times 1 \\ -3 & 0 & 17 \times 11 \end{vmatrix} = \det A = 17 \times \begin{vmatrix} -1 & -2 & 3 \\ 3 & 0 & 1 \\ -3 & 0 & 11 \end{vmatrix}$$

$$((ii)') \begin{vmatrix} -23 \times (-1) & -23 \times (-2) & -23 \times 3 \\ 3 & 0 & 1 \\ -3 & 0 & 11 \end{vmatrix} = (-23) \times \begin{vmatrix} -1 & -2 & 3 \\ 3 & 0 & 1 \\ -3 & 0 & 11 \end{vmatrix}$$

6) Le déterminant une forme **alternée** : cela signifie étant donnée A une matrice carrée d'ordre n à coefficients dans \mathbb{K} , $\det A \in \mathbb{K}$, et avec

$$A = \begin{bmatrix} L_1 \\ L_2 \\ L_3 \\ \vdots \\ L_i \\ \vdots \\ L_j \\ \vdots \\ L_n \end{bmatrix} = [C_1 \ C_2 \ C_3 \ \cdots \ C_i \ \cdots \ C_j \ \cdots \ C_n] ; 1 \leq i, j \leq n.$$

$$\det A = \det \begin{bmatrix} C_1 & C_2 & C_3 & \cdots & C_i & \cdots & C_j & \cdots & C_n \end{bmatrix} = \det \begin{bmatrix} L_1 \\ L_2 \\ L_3 \\ \vdots \\ L_i \\ \vdots \\ L_j \\ \vdots \\ L_n \end{bmatrix} = -\det \begin{bmatrix} L_1 \\ L_2 \\ L_3 \\ \vdots \\ L_j \\ \vdots \\ L_i \\ \vdots \\ L_n \end{bmatrix}$$

$$\Leftrightarrow \det \begin{bmatrix} L_1 \\ L_2 \\ L_3 \\ \vdots \\ L_j \\ \vdots \\ L_i \\ \vdots \\ L_n \end{bmatrix} = -\det \begin{bmatrix} L_1 \\ L_2 \\ L_3 \\ \vdots \\ L_i \\ \vdots \\ L_j \\ \vdots \\ L_n \end{bmatrix} = -\det A$$

$$\begin{aligned} \det A &= \det \begin{bmatrix} C_1 & C_2 & C_3 & \cdots & C_i & \cdots & C_j & \cdots & C_n \end{bmatrix} \\ \det A &= -\det \begin{bmatrix} C_1 & C_2 & C_3 & \cdots & C_j & \cdots & C_i & \cdots & C_n \end{bmatrix} \Leftrightarrow \\ \det \begin{bmatrix} C_1 & C_2 & C_3 & \cdots & C_j & \cdots & C_i & \cdots & C_n \end{bmatrix} &= -\det A; 1 \leq i, j \leq n. \end{aligned}$$

Tout ceci signifie que lorsqu'on permute deux lignes (ou deux colonnes) dans un déterminant le déterminant est changé en son opposé.

Exemple

$$\det A = \begin{vmatrix} -1 & -2 & 3 \\ 3 & 0 & 1 \\ -3 & 0 & 11 \end{vmatrix} = 72, \text{ mais } \begin{vmatrix} -1 & -2 & 3 \\ -3 & 0 & 11 \\ 3 & 0 & 1 \end{vmatrix} = -72 = -\det A$$

car j'ai permuté la 2^{ième} et la 3^{ième} lignes.

7) Soient $M \in M_r(\mathbb{K})$, $N \in M_{rs}(\mathbb{K})$ et $P \in M_s(\mathbb{K})$ alors $\begin{vmatrix} M & N \\ 0 & P \end{vmatrix} = |M| |P|$.

8) Soient $A_i \in M_{r_i}(\mathbb{K})$ où $1 \leq i \leq n$, alors $\begin{vmatrix} A_1 & * & * & * \\ 0 & A_2 & * & * \\ 0 & 0 & \ddots & * \\ 0 & 0 & 0 & A_n \end{vmatrix} = \prod_{i=1}^n |A_i|$.

9) Si deux matrices $A, B \in M_n(\mathbb{K})$ sont semblables, i.e. $A = P^{-1}BP$.

$\forall m \in \mathbb{K}, \forall k \in \mathbb{N}^*$, comme $(A + mI_n)^k = P^{-1}(B + mI_n)^k P$, alors

$$\text{rang}(A + mI_n)^k = \text{rang}(B + mI_n)^k,$$

$$\det(A + mI_n)^k = \det(B + mI_n)^k \text{ et}$$

$$\text{trace}(A + mI_n)^k = \text{trace}(B + mI_n)^k.$$

Remarques

1) Lorsque deux matrices carrées sont **semblables**, elles ont **nécessairement** les mêmes trace, rang et déterminant. Mais cela ne suffit pas pour être semblables.

2) Aussi est-il clair que deux matrices qui n'ont pas la même trace ou pas le même rang ou pas le même déterminant, ne peuvent être semblables.

Remarque

Voici deux matrices carrées $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ -\frac{1}{2} & -1 \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$,

On a le rang de $A =$ au rang de $B = 1$, $\det(A) = \det(B) = 0$,
 $\text{tr}(A) = \text{tr}(B) = 0$, mais A et B ne sont pas semblables car

$$\left(\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ \frac{1}{2} & 1 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ -\frac{1}{2} & -1 \end{bmatrix} \right) \times \begin{bmatrix} -2 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} =$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} -2 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Soit $P = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ \frac{1}{2} & 1 \end{bmatrix}$, $Q = \begin{bmatrix} -2 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$, ce sont deux matrices

inversibles et on a : $PAQ = B$, donc A et B sont équivalentes,
 mais seraient semblables si $P^{-1} = Q$, alors qu'avec

$$P \times \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -\frac{1}{2} & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -\frac{1}{2} & 1 \end{bmatrix} \times P = I_2, \text{ on a}$$

$$P^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -\frac{1}{2} & 1 \end{bmatrix} \neq Q = \begin{bmatrix} -2 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, \text{ donc on peut conclure}$$

que A et B ne sont pas semblables, alors qu'elles ont le même rang,
 le même déterminant, et la même trace.

En résumé : Avoir le même rang, le même déterminant, et la même trace,
 pour des matrices carrées de même ordre, sont des conditions **nécessaires**
 pour qu'elles soient semblables, mais pas **suffisantes**.

2.5 Calcul de déterminant avec échelonnage sur la matrice

Cela consistera à échelonner la matrice carrée dont on veut calculer
 le déterminant avec la précaution qui est que la ligne ou la colonne
 où l'on souhaite introduire un zéro d'échelonnage ne soit point
 multiplier par autrement chose que 1, et alors après échelonnage,
 le déterminant de la matrice est égal au produit des éléments
 diagonaux de la matrice triangulaire que l'on aura obtenu comme
 matrice échelonnée de la matrice carrée dont on cherchait le
 déterminant. Toutefois ne pas oublier que permuter deux lignes ou deux
 colonnes revient à multiplier le déterminant par (-1) à chaque fois.

Exemple

$$\text{On cherche le } \det A = \begin{vmatrix} 2 & 1 & 3 & 4 \\ 5 & 1 & 6 & 7 \\ 8 & 9 & 10 & 0 \\ 9 & 1 & -2 & -3 \end{vmatrix} = 642$$

Soit

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 3 & 4 \\ 5 & 1 & 6 & 7 \\ 8 & 9 & 10 & 0 \\ 9 & 1 & -2 & -3 \end{bmatrix} \simeq \begin{bmatrix} 2 & 1 & 3 & 4 \\ 0 & -\frac{3}{2} & -\frac{3}{2} & -3 \\ 0 & 5 & -2 & -16 \\ 0 & -\frac{7}{2} & -\frac{31}{2} & -21 \end{bmatrix} \begin{array}{l} L_2 - \frac{5}{2}L_1 \\ L_3 - \frac{8}{2}L_1 \\ L_4 - \frac{9}{2}L_1 \end{array}$$

$$\begin{aligned} & \approx \begin{bmatrix} 2 & 1 & 3 & 4 \\ 0 & -\frac{3}{2} & -\frac{3}{2} & -3 \\ 0 & 0 & -7 & -26 \\ 0 & 0 & -\frac{24}{2} & -14 \end{bmatrix} \begin{array}{l} L_3 + \frac{10}{2}L_2 \\ L_4 - \frac{7}{3}L_2 \end{array} \\ & \approx \begin{bmatrix} 2 & 1 & 3 & 4 \\ 0 & -\frac{3}{2} & -\frac{3}{2} & -3 \\ 0 & 0 & -7 & -26 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{214}{7} \end{bmatrix} \begin{array}{l} . \\ . \\ . \\ L_4 - \frac{12}{7}L_3 \end{array} \end{aligned}$$

Dès lors $\det A = 2 \times \left(-\frac{3}{2}\right) \times (-7) \times \left(\frac{214}{7}\right) = 642$.

Exercice : Utiliser l'échelonnage suivant les colonnes pour prouver

que le déterminant de la matrice $A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 5 & 1 & 6 \\ 8 & 9 & 10 \end{bmatrix}$, est : 21.

2.6 Inverse d'une matrice carrée

Définition

Une matrice **carrée** A d'ordre n est **inversible** s'il existe une matrice (carrée d'ordre n)

B telle que $A \times B = B \times A = I_n$.

B est alors appelée **inverse** de la matrice A .

Exemple

$A = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}$. On vérifie que pour $B = \begin{bmatrix} \frac{1}{5} & \frac{3}{5} \\ \frac{1}{5} & -\frac{2}{5} \end{bmatrix}$,
on a : $AB = BA = I_2$.

Donc A est inversible et B est inverse de la matrice A .

Définition

Etant données deux matrices A et B tel que $AB = BA$, on dit que A et B **commutent**.

Proposition

Deux matrices qui commutent sont **carrées de même ordre**.

Théorème

Une matrice **carrée** A est inversible si et seulement si son déterminant est non nul.

Si A est inversible, son inverse est unique et inversible.

On la note A^{-1} et on a : $\det(A^{-1}) = \frac{1}{\det A} = (\det A)^{-1}$.

Exemple

$A = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 2 & 2 \end{bmatrix}$, $\det A = -2 \neq 0$ donc A est inversible, avec $B = \begin{bmatrix} -1 & \frac{3}{2} \\ 1 & -1 \end{bmatrix}$,

on constate que : $AB = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 2 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 & \frac{3}{2} \\ 1 & -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$

donc $A^{-1} = B$ et $\det B = \det A^{-1} = -\frac{1}{2} = \frac{1}{(-2)} = \frac{1}{\det A}$.

Proposition

Deux matrices A et B carrées de même ordre n tel que $AB = I_n$ (ou $BA = I_n$) sont **inversibles** et d'inverse l'une de l'autre.

2.6.1 Propriétés de la matrice inverse

Si A et B sont inversibles de même ordre, on a :

1. $(A^{-1})^{-1} = A$
2. $(\lambda A)^{-1} = \lambda^{-1} \cdot A^{-1}$, où $\lambda \in \mathbb{K}^*$.
3. $({}^t(A^{-1})) = ({}^t(A))^{-1}$
4. $(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$.

Exercice

Montrer que :

1. $A(I_n + A)^{-1} = (I_n + A)^{-1}A$, Si $(I_n + A)$ est inversible avec $A \in M_n(\mathbb{K})$.
2. $A(I_n + A)^{-1} + (I_n + A)^{-1} = I_n$, Si $(I_n + A)$ est inversible avec $A \in M_n(\mathbb{K})$.
3. $A(I_n + BA)^{-1} = (I_m + AB)^{-1}A$, si $A \in M_{mn}(\mathbb{K})$ et $B \in M_{nm}(\mathbb{K})$ avec $(I_n + BA)$ et $(I_m + AB)$ sont inversibles.
4. En déduire que : $(I_m + AB)^{-1} + A(I_n + BA)^{-1}B = I_m$.

Proposition de réponse.

1. $(I_n + A)(I_n + A)^{-1} = I_n \Rightarrow A(I_n + A)(I_n + A)^{-1} = A.I_n = A \Rightarrow (A + A^2)(I_n + A)^{-1} = A \Leftrightarrow (I_n + A)A(I_n + A)^{-1} = A \Leftrightarrow (I_n + A)^{-1}(I_n + A)A(I_n + A)^{-1} = (I_n + A)^{-1}A \Leftrightarrow I_n.A(I_n + A)^{-1} = (I_n + A)^{-1}A \Leftrightarrow A(I_n + A)^{-1} = (I_n + A)^{-1}A$.
2. Evaluons : $(I_n + A)^{-1} + (I_n + A)^{-1}A = (I_n + A)^{-1}(I_n + A) = I_n$.
3. $(I_n + BA)(I_n + BA)^{-1} = I_n \Rightarrow A(I_n + BA)(I_n + BA)^{-1} = A.I_n = A \Leftrightarrow (A.I_n + A(BA))(I_n + BA)^{-1} = A \Leftrightarrow (I_m.A + (AB)A)(I_n + BA)^{-1} = A \Leftrightarrow (I_m + AB)A(I_n + BA)^{-1} = A \Leftrightarrow (I_m + AB)^{-1}(I_m + AB)A(I_n + BA)^{-1} = (I_m + AB)^{-1}A \Leftrightarrow (I_m A)(I_n + BA)^{-1} = (I_m + AB)^{-1}A \Leftrightarrow A(I_n + BA)^{-1} = (I_m + AB)^{-1}A$.
4. Evaluons $(I_m + AB)^{-1} + A(I_n + BA)^{-1}B = (I_m + AB)^{-1} + (I_m + AB)^{-1}AB$ d'après la question 3. De là, on a :

$$(I_m + AB)^{-1} + A(I_n + BA)^{-1}B = (I_m + AB)^{-1} + (I_m + AB)^{-1}AB = (I_m + AB)^{-1}(I_m + AB) = I_m.$$

2.6.2 Inversion d'une matrice par sa comatrice

Définition

Soit $A = (a_{ij})_{1 \leq i, j \leq n}$. On appelle **cofacteur** de l'élément a_{ij}

le nombre $C_{ij} = (-1)^{i+j} X_{ij}$

où X_{ij} est le déterminant obtenu en éliminant la $i^{\text{ème}}$ ligne et la $j^{\text{ème}}$ colonne de A .

La matrice des cofacteurs de A est la matrice notée

$$\text{com}(A) = \left((-1)^{i+j} X_{ij} \right)_{1 \leq i, j \leq n} = (C_{ij})_{1 \leq i, j \leq n}.$$

appelée la **comatrice** de A . le déterminant extrait X_{ij} est appelé le **mineur** de a_{ij} .

Exemple

$$\text{Avec } A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1(j-1)} & a_{1j} & a_{1(j+1)} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2(j-1)} & a_{2j} & a_{2(j+1)} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{(i-1)1} & a_{(i-1)2} & \cdots & a_{(i-1)(j-1)} & a_{(i-1)j} & a_{(i+1)(j+1)} & \cdots & a_{(i-1)n} \\ a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{i(j-1)} & a_{ij} & a_{i(j+1)} & \cdots & a_{in} \\ a_{(i+1)1} & a_{(i+1)2} & \cdots & a_{(i+1)(j-1)} & a_{(i+1)j} & a_{(i+1)(j+1)} & \cdots & a_{(i+1)n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{n(j-1)} & a_{nj} & a_{n(j+1)} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix},$$

$$X_{ij} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1(j-1)} & a_{1(j+1)} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2(j-1)} & a_{2(j+1)} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{(i-1)1} & a_{(i-1)2} & \cdots & a_{(i-1)(j-1)} & a_{(i-1)(j+1)} & \cdots & a_{(i-1)n} \\ a_{(i+1)1} & a_{(i+1)2} & \cdots & a_{(i+1)(j-1)} & a_{(i+1)(j+1)} & \cdots & a_{(i+1)n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{n(j-1)} & a_{n(j+1)} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}.$$

On constate que $\forall 1 \leq i, j \leq n$, $C_{ij} = X_{ij}$ si $(i+j)$ est pair et $C_{ij} = -X_{ij}$ si $(i+j)$ est impair.

Exemple pratique

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 3 & -2 \\ 0 & -1 & 3 \\ -1 & -5 & 6 \end{bmatrix}. \text{ Notons } A = (a_{ij})_{1 \leq i, j \leq 3}.$$

Le cofacteur de $a_{11} = 1$ est $C_{11} = (-1)^{1+1} \times \begin{vmatrix} -1 & 3 \\ -5 & 6 \end{vmatrix} = 9$, on a $X_{11} = \begin{vmatrix} -1 & 3 \\ -5 & 6 \end{vmatrix}$

Le cofacteur de $a_{32} = -5$ est $C_{32} = (-1)^{3+2} \times \begin{vmatrix} 1 & -2 \\ 0 & 3 \end{vmatrix} = -3$, on a $X_{32} = \begin{vmatrix} 1 & -2 \\ 0 & 3 \end{vmatrix}$.

Ainsi de suite.

$$\text{La comatrice de } A \text{ est donc } comA = \begin{bmatrix} 9 & -3 & -1 \\ -8 & 4 & 2 \\ 7 & -3 & -1 \end{bmatrix}.$$

2.6.3 Démonstration de la méthode d'inversion d'une matrice par sa comatrice

En reprenant la formule du déterminant de A développé par rapport

à la i -ième ligne : $\det(A) = a_{i1}C_{i1} + a_{i2}C_{i2} + \dots + a_{in}C_{in}$.

Remplaçons les a_{ij} , $\forall 1 \leq j \leq n$, par ceux d'une autre ligne,

disons la k -ième ligne, avec $k \neq i$, nous obtenons :

$\det(A') = a_{k1}C_{i1} + a_{k2}C_{i2} + \dots + a_{kn}C_{in} = 0$, car A' n'est rien d'autre que

la matrice A dans laquelle la i -ième ligne est remplacée par la k -ième ligne, avec $k \neq i$, donc A' a deux lignes identiques : la i -ième ligne et la k -ième ligne, avec $k \neq i$,

ainsi $\det(A')$ développé suivant la i -ième ligne est :

$\det(A') = a_{k1}C_{i1} + a_{k2}C_{i2} + \dots + a_{kn}C_{in}$ et est égal à 0, car dans $\det(A')$, il y a deux lignes identiques.

En résumé,

$$\text{on a : } a_{k1}C_{i1} + a_{k2}C_{i2} + \dots + a_{kn}C_{in} = \begin{cases} \det(A) & \text{si } i = k \\ 0 & \text{si } i \neq k \end{cases}.$$

$$\text{Considérons la matrice des cofacteurs } com(A) = C = \begin{bmatrix} C_{11} & C_{12} & \cdots & C_{1n} \\ C_{21} & C_{22} & \cdots & C_{2n} \\ \vdots & & \ddots & \\ C_{n1} & C_{n2} & \cdots & C_{nn} \end{bmatrix}.$$

$$\text{Evaluons } A \cdot ({}^tC) = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & & \ddots & \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} C_{11} & C_{21} & \cdots & C_{n1} \\ C_{12} & C_{22} & \cdots & C_{n2} \\ \vdots & & \ddots & \\ C_{1n} & C_{2n} & \cdots & C_{nn} \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} \det(A) & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \det(A) & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & \det(A) \end{bmatrix} = \det(A) I_n.$$

car dans le produit $A \cdot ({}^tC)$, l'élément de la i -ième ligne et de la j -ième colonne est :

$$a_{i1}C_{j1} + a_{i2}C_{j2} + \dots + a_{in}C_{jn} = \begin{cases} \det(A) & \text{si } i = j \\ 0 & \text{si } i \neq j \end{cases}.$$

On a $({}^tC) \cdot A = A \cdot ({}^tC) = \det(A) I_n$.

Théorème

Pour tout $A \in M_n(\mathbb{K})$, on a :

$$(\det A) \cdot I_n = A \cdot \text{com}({}^tA) = \text{com}({}^tA) \cdot A = A \cdot ({}^t\text{com}A) = ({}^t\text{com}A) \cdot A$$

car $({}^t\text{com}A) = \text{com}({}^tA)$.

Corollaire

Si A est une matrice inversible alors $A^{-1} = \frac{1}{\det A} \times \text{com}({}^tA) = \frac{1}{\det A} \times ({}^t\text{com}(A))$

où $({}^tA)$ désigne la transposée de A , $\text{com}({}^tA)$ désigne la comatrice de la transposée de A et $({}^t\text{com}(A))$ désigne la transposée de la comatrice de A .

Remarque

En somme, si A est inversible d'ordre n , $(A^{-1})_{ji} = \frac{\det(A^{ij})}{\det A}$, où $1 \leq i, j \leq n$ et A^{ij} est la matrice obtenue en supprimant la ligne i et la colonne j de A .

Aussi $(A^{-1})_{ji} = \frac{\det(A^{ij})}{\det A} \Leftrightarrow (A^{-1})_{ij} = \frac{\det(A^{ji})}{\det A}$ avec $1 \leq i, j \leq n$ et

A^{ji} est la matrice obtenue en supprimant la ligne j et la colonne i de A .

Définition

Pour tout $A \in M_n(\mathbb{K})$, la matrice $({}^t\text{com}A) = \text{com}({}^tA)$ s'appelle la matrice **adjointe** de A .

Remarque

Soit une matrice inversible A , son inverse est notée $A^{-1} \neq \frac{1}{A}$ qui n'existe pas.

Exemple

Soit $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 3 & -1 & -5 \\ -2 & 3 & 6 \end{bmatrix}$, A est-elle inversible ?

$$\det A = \begin{vmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 3 & -1 & -5 \\ -2 & 3 & 6 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & 0 & -1 \\ -2 & -1 & -5 \\ 4 & 3 & 6 \end{vmatrix} = 2, \text{ à la 1}^{\text{ère}} \text{ colonne, j'ai fait la}$$

1^{ère} colonne plus la 3^{ème} colonne afin d'avoir plus de zéro dans mon déterminant pour ne pas avoir beaucoup de termes à développer. Comme $\det A = 2 \neq 0$,

alors A est inversible.

$$A^{-1} = \frac{1}{\det A} \times \text{com}({}^tA) = \frac{1}{\det A} \times ({}^t\text{com}(A)).$$

$$({}^tA) = \begin{bmatrix} 1 & 3 & -2 \\ 0 & -1 & 3 \\ -1 & -5 & 6 \end{bmatrix},$$

$$\text{com}({}^tA) = \begin{bmatrix} 9 & -3 & -1 \\ -8 & 4 & 2 \\ 7 & -3 & -1 \end{bmatrix} = ({}^t\text{com}(A)).$$

$$A^{-1} = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 9 & -3 & -1 \\ -8 & 4 & 2 \\ 7 & -3 & -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{9}{2} & \frac{-3}{2} & \frac{-1}{2} \\ -4 & 2 & 1 \\ \frac{7}{2} & \frac{-3}{2} & \frac{-1}{2} \end{bmatrix}.$$

2.7 Rang d'une matrice

Proposition

1. Soit $A = (a_{ij})_{\substack{1 \leq i \leq n \\ 1 \leq j \leq m}}$, alors $rg A \leq \min(n, m)$.
2. $\forall A \in M_n(\mathbb{K})$, on a $rg A = n \iff \det A \neq 0$.

Exemples

$$1) \text{ Soit } A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 4 & 9 & 15 & -1 & -8 & -7 \\ \pi & \frac{1}{2} & -71 & -45 & 0 & -17 \end{bmatrix};$$

$$\text{alors } rg(A) \leq 3 = \min(3, 6).$$

$$2) \text{ Soit } A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ \pi & -1 & 5 & 7 \\ 17 & 1 & 3 & 11 \\ \frac{1}{2} & 8 & 9 & 10 \end{pmatrix} \Rightarrow \det(A) = -36\pi - 99 \neq 0$$

$$\Rightarrow rg(A) = 4.$$

Proposition

Soit $A = (a_{ij})_{\substack{1 \leq i \leq n \\ 1 \leq j \leq m}}$ alors $rg A$ est le plus grand entier naturel s

qui est tel qu'on puisse extraire de A une matrice d'ordre s de déterminant $\neq 0$
(avec permutation des colonnes(resp. lignes) de A si nécessaire).

Exemple

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 5 & -1 \\ 1 & 2 & 3 & 1 \end{pmatrix}, \text{ on a } \begin{vmatrix} 2 & 0 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = 4 \neq 0, \text{ alors } rg A \geq 2$$

comme $2 = \min(2, 4) \geq rg A$, donc $rg A = 2$.

Remarque

$rg(A) = 0 \iff$ toutes les composantes de la matrice A sont nulles.

Chapitre 3

RÉSOLUTION D'UN SYSTEME D'EQUATIONS LINÉAIRES

Objectifs

* Résolution avec la matrice augmentée associée au système.

* Comprendre le fonctionnement de l'algorithme du pivot de Gauss pour la résolution de systèmes et l'inversion de matrices.

Définitions

(i) De manière générale, on appelle équation linéaire d'inconnues $x_1; \dots; x_n$ (une combinaison linéaire des $x_1; \dots; x_n$ égalant b)

toute égalité de la forme : $a_1x_1 + \dots + a_nx_n = b \Leftrightarrow (E)$

où $a_1; \dots; a_n$ et b sont des nombres (réels ou complexes)

Il importe d'insister ici que ces équations linéaires sont implicites, c'est-à-dire qu'elles décrivent des relations entre les inconnues, mais ne donnent pas directement les valeurs que peuvent prendre ces inconnues.

(ii) Résoudre une équation signifie donc la rendre explicite, c'est-à-dire rendre plus apparentes les valeurs que les inconnues peuvent prendre.

(iii) Une solution de l'équation linéaire (E) est un n -uplet $(s_1; \dots; s_n)$ de valeurs respectives des inconnues $x_1; \dots; x_n$ qui satisfont l'équation (E) .

Autrement dit : $a_1s_1 + \dots + a_ns_n = b$.

Exemple

$-2x_1 + 4x_2 - 3x_3 = 9$ est une équation linéaire d'inconnues x_1, x_2, x_3 .

Définition

Un ensemble **fini** d'équations linéaires d'inconnues $x_1; \dots; x_n$ s'appelle un système d'équations linéaires d'inconnues $x_1; \dots; x_n$.

Exemples

(i) $(S_1) \Leftrightarrow \begin{cases} x_1 - 3x_2 + x_3 = 1 \\ -2x_1 + 4x_2 - 3x_3 = 9 \end{cases}$ (S_1) est un système de deux équations à trois inconnues : x_1, x_2, x_3 .

(ii) $(S_2) \Leftrightarrow \begin{cases} x_1 - 3x_2 = 1 \\ x_2 - 3x_3 = 9 \\ x_4 - 3x_5 = -8 \end{cases}$ (S_2) est un système de trois équations à cinq inconnues : x_1, x_2, x_3, x_4, x_5 .

(iii) Le système

$(S_1) \Leftrightarrow \begin{cases} x_1 - 3x_2 + x_3 = 1 \\ -2x_1 + 4x_2 - 3x_3 = 9 \end{cases}$

Une solution de (S_1) est :

$$x_1 = -18; x_2 = -6; x_3 = 1.$$

Par contre

$$x_1 = 7; x_2 = 2; x_3 = 0$$

ne satisfait que la première équation. Ce n'est donc pas une solution du système.

Définition

Un système d'équations est dit incompatible ou inconsistant s'il n'admet pas de solutions, c'est-à-dire que l'ensemble solution c'est l'ensemble vide.

Exemple

Le système linéaire

$$\begin{cases} x_1 + x_2 = 1 \\ 2x_1 + 2x_2 = 1 \end{cases}$$

est clairement incompatible donc $S_{\mathbb{R}^2} = \{\} = \emptyset$.

Définitions

Soient $n, m \geq 1$.

On appelle système de m équations à n inconnues tout système (S) de la forme :

$$(S) \Leftrightarrow \begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n & = & b_1(E_1) \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2n}x_n & = & b_2(E_2) \\ \vdots & & \vdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \dots + a_{mn}x_n & = & b_m(E_m) \end{cases},$$

où a_{ij}, b_i sont des scalaires donnés ; x_1, x_2, \dots, x_n sont des inconnues et (E_i) la i -ième équation de (S) ; $\forall 1 \leq i \leq m$.

(i) La matrice $A = (a_{ij})_{\substack{1 \leq i \leq m \\ 1 \leq j \leq n}}$ est la matrice associée à (S)
(dite aussi la matrice de (S)).

Il est à noter que la j -ième colonne de A est composée des coefficients de l'inconnue x_j dans les différentes équations du système de la première équation (E_1) à la dernière équation (E_m) ; $\forall 1 \leq j \leq n$.

(ii) Les $(b_i)_{1 \leq i \leq m}$ sont les seconds membres de (S) , et (S) est dit *homogène* si $b_i = 0$ $\forall 1 \leq i \leq m$.

Ecriture matricielle de (S) .

$$\text{Soit } X = \begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}; B = \begin{bmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_m \end{bmatrix}.$$

Alors $(S) \Leftrightarrow AX = B$; où A est la matrice associée à (S) .

Exemples

1) Considérons le système linéaire

$$(S) \Leftrightarrow \begin{cases} x_1 + 7x_3 = -1 \\ 2x_1 - x_2 + 5x_3 = -5 \\ -x_1 - 3x_2 - 9x_3 = 7 \end{cases}$$

Sa matrice associée est

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 7 \\ 2 & -1 & 5 \\ -1 & -3 & -9 \end{bmatrix};$$

$$X = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}; B = \begin{bmatrix} -1 \\ -5 \\ 7 \end{bmatrix}. \text{ Alors } (S) \Leftrightarrow AX = B$$

2) Considérons le système linéaire homogène

$$(S) \Leftrightarrow \begin{cases} x_1 + 7x_3 = 0 \\ 2x_1 - x_2 + 5x_3 = 0 \\ -x_1 - 3x_2 - 9x_3 = 0 \end{cases}$$

Sa matrice associée est

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 7 \\ 2 & -1 & 5 \\ -1 & -3 & -9 \end{bmatrix};$$

$$X = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}; B = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}. \text{ Alors } (S) \Leftrightarrow AX = B = 0_{M_{31}(\mathbb{R})}.$$

3.1 Résolution du système (S) avec sa matrice augmentée

Je rappelle le système

$$(S) \Leftrightarrow \begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \vdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \dots + a_{mn}x_n = b_m \end{cases}.$$

Définition

Nous obtenons la matrice augmentée associée au système (S) en adjoignant à la dernière colonne de la matrice du système A une colonne constituée des b_i , les seconds membres des équations de (S) .

De là :

La matrice augmentée associée au système (S) est alors :

$$\left[\begin{array}{cccc|c} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} & b_2 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} & b_m \end{array} \right] = [A \mid B];$$

$$\text{où } A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix} \text{ la matrice associée à } (S)$$

$$\text{et } B = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{bmatrix} \text{ la matrice colonne des seconds membres de } (S).$$

Exemple

Considérons le système linéaire

$$\begin{cases} x_1 + 7x_3 = -1 \\ 2x_1 - x_2 + 5x_3 = -5 \\ -x_1 - 3x_2 - 9x_3 = -5 \end{cases}$$

Sa matrice augmentée est

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 7 & -1 \\ 2 & -1 & 5 & -5 \\ -1 & -3 & -9 & -5 \end{array} \right] = [A \mid B];$$

où $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 7 \\ 2 & -1 & 5 \\ -1 & -3 & -9 \end{bmatrix}$ la matrice associée à (S)

et $B = \begin{bmatrix} -1 \\ -5 \\ -5 \end{bmatrix}$ la matrice colonne des seconds membres de (S) .

La méthode de base pour résoudre un système d'équations linéaires est de remplacer le système par un autre, plus simple, ayant le même ensemble de solutions.

Ceci se fait par une succession d'opérations, appelées opérations élémentaires : qui consiste à :

- (1) multiplier une équation par une constante non nulle ;
- (2) permuter deux équations ;
- (3) ajouter un multiple d'une équation à une autre équation.

Les opérations (1), (2) et (3) ne changent pas l'ensemble des solutions. Elles correspondent à des opérations élémentaires sur les **lignes** de la matrice augmentée.

Ces opérations sont les suivantes :

- (1) multiplier une ligne par une constante non nulle ;
- (2) permuter deux lignes ;
- (3) ajouter un multiple d'une ligne à une autre ligne.

Proposition

Soit $(S) \Leftrightarrow AX = B$, si $[A \mid B] \simeq [A' \mid B']$ alors $(S) \Leftrightarrow A'X = B'$.

Exemple

Utilisons ces opérations élémentaires pour résoudre le système suivant.

$$(S) \Leftrightarrow \begin{cases} x_1 + x_2 + 7x_3 = -1 \\ 2x_1 - x_2 + 5x_3 = -5 \\ -x_1 - 3x_2 - 9x_3 = -5 \end{cases}$$

La matrice augmentée associée au système est :

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 7 & -1 \\ 2 & -1 & 5 & -5 \\ -1 & -3 & -9 & -5 \end{array} \right], \text{ on va chercher à échelonner réduire à ligne}$$

canonique la matrice du système en faisant des opérations élémentaires sur les **lignes** (que sur les lignes qui représentent les équations) de la matrice augmentée ; on a :

$$\begin{aligned} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 7 & -1 \\ 2 & -1 & 5 & -5 \\ -1 & -3 & -9 & -5 \end{array} \right] &\approx \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 7 & -1 \\ 0 & -3 & -9 & -3 \\ 0 & -2 & -2 & -6 \end{array} \right] \begin{array}{l} L_2 - 2L_1 \\ L_3 + L_1 \end{array} \\ &\approx \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 7 & -1 \\ 0 & 1 & 3 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 3 \end{array} \right] \begin{array}{l} -\frac{1}{3}L_2 \\ -\frac{1}{2}L_3 \end{array} \approx \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 7 & -1 \\ 0 & 1 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & -2 & 2 \end{array} \right] \begin{array}{l} L_3 - L_2 \\ L_1 - 4L_3 \end{array} \\ &\approx \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 4 & -2 \\ 0 & 1 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \end{array} \right] \begin{array}{l} L_1 - L_2 \\ -\frac{1}{2}L_3 \end{array} \approx \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \end{array} \right] \begin{array}{l} L_2 - 3L_3 \end{array} . \end{aligned}$$

ce qui donne matriciellement : $(S) \Leftrightarrow \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 4 \\ -1 \end{bmatrix} \Leftrightarrow$

$$\begin{cases} x_1 = 2 \\ x_2 = 4 \\ x_3 = -1 \end{cases}$$

D'où $S_{\mathbb{R}^3} = \{(2, 4, -1)\}$.

Nous remarquons que les opérations élémentaires peuvent être faites uniquement sur la matrice augmentée pour revenir à la fin au système d'équations. C'est ce que nous avons fait.

On obtient ainsi l'unique solution du système : $x_1 = 2$, $x_2 = 4$ et $x_3 = -1$.

Donc $S_{\mathbb{R}^3} = \{(2; 4; -1)\}$.

Remarques très importantes

1. La résolution d'un système avec sa matrice augmentée est synonyme de résolution d'un système avec les opérations élémentaires.
2. Quand on finit de résoudre une équation ou un système d'équations, il faut toujours donné l'ensemble solution clairement.

Proposition

Etant donné un système (S) de matrice A et de matrice **augmentée** M ,

le système est compatible

(c'est-à-dire n'admet pas l'ensemble vide comme solution) ssi

le rang de A est égal au rang de M i.e. $rg(A) = rg(M)$.

3.2 Méthode de résolution d'un système de Cramer (Gabriel Cramer (1704 -1752))

Définition

Le système (S) est dit de Cramer, si dans le système (S) le nombre d'équations est égal au nombre d'inconnues et $\det A \neq 0 (\Leftrightarrow A \text{ est inversible})$.

où A est la matrice associée au système (S) .

3.2.1 Résolution d'un système de Cramer par l'inversion de la matrice associée au système

Théorème

Tout système de Cramer (S) admet une solution unique $X = A^{-1}B$.

Exemple

$$(\Sigma) \Leftrightarrow \begin{cases} x - 2y + z = 3 \\ 2x - y + z = 1 \\ -x - y + z = 0 \end{cases}$$

La matrice associée à (Σ) est $A = \begin{bmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 2 & -1 & 1 \\ -1 & -1 & 1 \end{bmatrix}$

et $\det(A) = 3 \neq 0$; c'est donc un système de Cramer.

$$A^{-1} = \begin{bmatrix} 0 & \frac{1}{3} & \frac{-1}{3} \\ -1 & \frac{2}{3} & \frac{1}{3} \\ -1 & 1 & 1 \end{bmatrix},$$

on a alors
$$\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = A^{-1} \begin{bmatrix} 3 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & \frac{1}{3} & \frac{-1}{3} \\ -1 & \frac{2}{3} & \frac{1}{3} \\ -1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{3} \\ \frac{-7}{3} \\ -2 \end{bmatrix}.$$

Donc $S_{\mathbb{R}^3} = \left\{ \left(\frac{1}{3}; \frac{-7}{3}; -2 \right) \right\}.$

3.2.2 Résolution d'un système de Cramer par des déterminants

Soit $(\Sigma) \Leftrightarrow \begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \vdots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \dots + a_{nn}x_n = b_n \end{cases},$

un système de n équations à n inconnues de Cramer.

On appelle déterminant du système (Σ) le nombre $\Delta = \det A$, où A est la matrice associée à (Σ) .

On appelle déterminant de x_i le nombre Δ_{x_i} égal au déterminant de la matrice obtenue en remplaçant dans A la $i^{\text{ème}}$ colonne par les éléments respectifs des seconds membres c'est-à-dire b_1, b_2, \dots, b_n .

Théorème

(Σ) étant de Cramer, $S_{\mathbb{K}^n} = \left\{ \left(\frac{\Delta_{x_1}}{\Delta}; \frac{\Delta_{x_2}}{\Delta}; \dots; \frac{\Delta_{x_n}}{\Delta} \right) \right\}$ c'est-à-dire que (Σ) admet une solution unique.

Exercice

$(\Sigma) \Leftrightarrow \begin{cases} x - 2y + z = 3 \\ 2x - y + z = 1 \\ -x - y + z = 0 \end{cases}.$

Réponse

La matrice associée à (Σ) est $A = \begin{bmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 2 & -1 & 1 \\ -1 & -1 & 1 \end{bmatrix},$

$$\Delta = \det A = \begin{vmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 2 & -1 & 1 \\ -1 & -1 & 1 \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} 1 & -2 & -1 \\ 2 & -1 & 0 \\ -1 & -1 & 0 \end{vmatrix} = 3 \text{ (je rappelle que j'ai fait } \text{col}_3 + \text{col}_2)$$

$$\Delta_x = \begin{vmatrix} 3 & -2 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 0 & -1 & 1 \end{vmatrix} = 1; \quad \Delta_y = \begin{vmatrix} 1 & 3 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \end{vmatrix} = -7;$$

$$\Delta_z = \begin{vmatrix} 1 & -2 & 3 \\ 2 & -1 & 1 \\ -1 & -1 & 0 \end{vmatrix} = -6;$$

$$x = \frac{\Delta_x}{\Delta} = \frac{1}{3}; \quad y = \frac{\Delta_y}{\Delta} = \frac{-7}{3}; \quad z = \frac{\Delta_z}{\Delta} = \frac{-6}{3} = -2$$

Donc $S_{\mathbb{R}^3} = \left\{ \left(\frac{1}{3}; \frac{-7}{3}; -2 \right) \right\}.$

3.3 Résolution d'un système avec le rang de la matrice associée connu

Soit $A = (a_{ij})_{\substack{1 \leq i \leq m \\ 1 \leq j \leq n}}$, la matrice de (S) , et soit $r = \text{rg} A$.

1^{er} cas : $m = r < n$,

$(S) \Leftrightarrow (S') \Leftrightarrow$

$$\left\{ \begin{array}{lcl} a_{11} x_1 + a_{12} x_2 + \dots + a_{1r} x_r & = & \underbrace{b_1 - (a_{1r+1} x_{r+1} + a_{1r+2} x_{r+2} + \dots + a_{1n} x_n)}_{c_1(x_{r+1}, x_{r+2}, \dots, x_n)} \\ a_{21} x_1 + a_{22} x_2 + \dots + a_{2r} x_r & = & \underbrace{b_2 - (a_{2r+1} x_{r+1} + a_{2r+2} x_{r+2} + \dots + a_{2n} x_n)}_{c_2(x_{r+1}, x_{r+2}, \dots, x_n)} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{m1} x_1 + a_{m2} x_2 + \dots + a_{mr} x_r & = & \underbrace{b_m - (a_{mr+1} x_{r+1} + a_{mr+2} x_{r+2} + \dots + a_{mn} x_n)}_{c_m(x_{r+1}, x_{r+2}, \dots, x_n)} \end{array} \right.$$

Soit $A' = (a_{ij})_{1 \leq i, j \leq r}$ avec $r = \text{rg} A'$ donc $\det A' \neq 0$

(S') est un système de Cramer qu'on doit résoudre avec les $(x_{r+i})_{1 \leq i \leq (n-r)}$ comme inconnues secondaires (c'est-à-dire des paramètres).

2^{ème} cas : $r < m$ (voir système échelonné à la suite).

Définition(rappel)

On appelle opérations élémentaires dans un système ;

les opérations de l'une des formes suivantes :

- Echanger deux lignes du système.
- Multiplier une ligne par une constante non nulle.
- Rajouter à une ligne du système un multiple d'une autre ligne du système. (une ligne ici est une équation du système)

Remarque

Les opérations élémentaires transforment un système en un système équivalent. On peut donc transformer un système linéaire par une succession d'opérations élémentaires en un système échelonné.

3.4 Systèmes échelonnés ou Méthode du pivot

On dit qu'un système est échelonné si et seulement si tous les coefficients figurant en-dessous de la diagonale sont nuls.

Cela revient à dire que $\forall i > j, a_{ij} = 0$.

Autant dire qu'un système échelonné se présente sous l'une des trois formes suivantes :

(a) Si $m = n$

(un tel système est dit carré et l'on dit d'un système carré échelonné qu'il est trigonal).

$$\left\{ \begin{array}{llll} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{22}x_2 + \dots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \vdots \\ a_{nn}x_n = b_n \end{array} \right.$$

Dans ce premier cas il est facile de résoudre le système lorsque tous les termes diagonaux sont non nuls. on utilise

l'algorithme de la remontée :

la dernière équation donne en effet la valeur $x_n = \frac{b_n}{a_{nn}}$,

puis l'avant-dernière ligne donne la valeur

$$x_{n-1} = \frac{1}{a_{(n-1)(n-1)}} (b_{n-1} - a_{(n-1)n} x_n) \text{ et, plus généralement,}$$

$$\text{on obtient : } x_k = \frac{1}{a_{kk}} \left(b_k - \sum_{j=k+1}^n a_{kj} x_j \right),$$

ce qui permet de calculer les x_k successifs par ordre décroissant de l'indice k . Le système admet une unique solution, et cela quel que puisse être le second membre.

Un système ayant cette propriété s'appelle un *système de Cramer*.

Si, au cours de cet algorithme, on trouve un coefficient diagonal nul dans une ligne, par exemple la ligne k , alors on ne peut pas trouver la valeur de x_k .

La ligne correspondante introduit une *condition de compatibilité*.

Si cette condition n'est pas vérifiée, le système n'admet pas de solutions ; si au contraire cette condition est vérifiée, toute solution de x_k convient et l'on peut poursuivre l'algorithme. Il y a alors une infinité de solutions, paramétrées par la valeur de x_k .

Cette situation peut d'ailleurs se rencontrer plusieurs fois au cours de la remontée, induisant une discussion plus approfondie.

On voit par là l'intérêt des systèmes triangulaires dont les coefficients diagonaux sont non nuls.

(b) Si $m < n$: on a :

$$\left\{ \begin{array}{llll} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n & = & b_1 \\ a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n & = & b_2 \\ & \ddots & \vdots \\ & & a_{mm}x_m & = & b_m \end{array} \right.$$

Dans ce cas, on fixe arbitrairement les valeurs des variables x_{m+1} à x_n .

On est alors ramené au cas précédent, simple à résoudre lorsque tous les coefficients diagonaux sont non nuls, nécessitant une discussion sinon.

(c) Si $m > n$:

$$\left\{ \begin{array}{llll} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n & = & b_1 \\ a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n & = & b_2 \\ & \ddots & \vdots \\ & & a_{nn}x_n & = & b_n \\ & & 0 & = & b_{n+1} \\ & & \vdots & \\ & & 0 & = & b_m \end{array} \right.$$

Dans ce cas les dernières lignes donnent directement des conditions de compatibilité.

Lorsqu'elles sont vérifiées, on se ramène au cas ci-dessus. D'où, là encore, l'intérêt de l'obtention de coefficients diagonaux non nuls.

Exemple

$$\begin{aligned}
 \text{Soit } (S) &\Leftrightarrow \begin{cases} 2x - y - z = 1 & (E_1) \\ 3x + 4y - 2z = 0 & (E_2) \\ 3x - 2y + 4z = -1 & (E_3) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2x - y - z = 1 & (E_1) \\ 6y - 6z = 1 & (E_2 - E_3) \\ y - 11z = 5 & (3E_1 - 2E_3) \end{cases} \\
 &\Leftrightarrow \begin{cases} 2x - y - z = 1 & (E_1) \\ 6y - 6z = 1 & (E_2) \\ -60z = 29 & (6E_3 - E_2) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = \frac{1}{10} \\ y = -\frac{19}{60} \\ z = -\frac{29}{60} \end{cases} . \\
 \text{Donc } S_{\mathbb{R}^3} &= \left\{ \left(\frac{1}{10}; -\frac{19}{60}; -\frac{29}{60} \right) \right\}.
 \end{aligned}$$

3.5 Calcul de l'inverse d'une matrice par la résolution de systèmes

3.5.1 Une première méthode(mais souvent fastidieuse)

Soit $A = (a_{ij})_{1 \leq i, j \leq n}$ une matrice inversible, $B = (x_{ij})_{1 \leq i, j \leq n}$ son inverse, alors $AB = I_n$.

Pour trouver la 1^{ère} colonne de B , on résoud le système :

$$A \begin{bmatrix} x_{11} \\ x_{21} \\ \vdots \\ x_{n1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}.$$

Pour trouver la $j^{\text{ème}}$ colonne de B , on résoud le système :

$$A \begin{bmatrix} x_{1j} \\ x_{2j} \\ \vdots \\ x_{jj} \\ x_{(j+1)j} \\ \vdots \\ x_{nj} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix} \longrightarrow \text{seule la } j^{\text{ème}} \text{ coordonnée est égale à 1.}$$

3.5.2 Une deuxième méthode

Exercice :

Soit $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \end{bmatrix}$, montrer que A est inversible et déterminer A^{-1} .

Réponse

$\det A = 3 \neq 0 \Rightarrow A$ est inversible ; soit $X = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}$; $Y = \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{bmatrix}$,

puisque que si A est inversible on a : $(S) \Leftrightarrow AX = Y \Leftrightarrow X = A^{-1}Y \Leftrightarrow (S')$.

$$(S) \Leftrightarrow AX = Y \Leftrightarrow \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{bmatrix} \Leftrightarrow$$

$$(S) \Leftrightarrow \begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 = y_1 \\ x_1 - x_2 = y_2 \\ x_1 - x_3 = y_3 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$(S') \Leftrightarrow \begin{cases} x_1 &= \frac{1}{3}y_1 + \frac{1}{3}y_2 + \frac{1}{3}y_3 \\ x_2 &= \frac{1}{3}y_1 - \frac{2}{3}y_2 + \frac{1}{3}y_3 \\ x_3 &= \frac{1}{3}y_1 + \frac{1}{3}y_2 - \frac{2}{3}y_3 \end{cases} \Leftrightarrow X = A^{-1}Y$$

La matrice associée à (S') est l'inverse de A donc :

$$A^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \\ \frac{1}{3} & -\frac{2}{3} & \frac{1}{3} \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & -\frac{2}{3} \end{bmatrix}.$$

Remarques

Le système (S) a pour matrice associée A la matrice dont on cherche l'inverse A^{-1} , et on constitue deux matrices colonnes d'inconnues X et Y en posant $(S) \Leftrightarrow AX = Y$ dès lors les composantes de X sont appelées les anciennes inconnues et celles de Y , les nouvelles. Comme A est inversible, on a : $(S) \Leftrightarrow AX = Y \Leftrightarrow X = A^{-1}Y \Leftrightarrow (S')$. Dans le système (S') on a exprimé les anciennes inconnues en fonction des nouvelles et alors la matrice associée à (S') est visiblement l'inverse de A c'est-à-dire A^{-1} .

Exercice

Montrer que la matrice $A = \begin{bmatrix} -1 & 2 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ 0 & 5 & -1 \end{bmatrix}$ est inversible et calculer son inverse par trois méthodes différentes.

Proposition de correction

Inversion de A si possible à l'aide de trois méthodes :

1^{ère} Méthode d'inversion par la comatrice de A

Calculons le déterminant de A :

$$\det A = \begin{vmatrix} -1 & 2 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ 0 & 5 & -1 \end{vmatrix} = 5 \neq 0 \Rightarrow A \text{ est inversible et}$$

$$A^{-1} = \frac{1}{\det A} \times \text{com}({}^t A) = \frac{1}{\det A} \times ({}^t \text{com} A)$$

$$A = \begin{bmatrix} -1 & 2 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ 0 & 5 & -1 \end{bmatrix} \Rightarrow$$

$$({}^t A) = \begin{bmatrix} -1 & 2 & 0 \\ 2 & 1 & 5 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix} \Rightarrow \text{com}({}^t A) = \begin{bmatrix} -1 & 2 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ 10 & 5 & -5 \end{bmatrix}$$

$$\begin{aligned} \text{et } A^{-1} &= \frac{1}{\det A} \times \text{com}({}^t A) = \frac{1}{5} \begin{bmatrix} -1 & 2 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ 10 & 5 & -5 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} -\frac{1}{5} & \frac{2}{5} & 0 \\ \frac{2}{5} & \frac{1}{5} & 0 \\ 2 & 1 & -1 \end{bmatrix} = A^{-1}. \end{aligned}$$

2^{ème} Méthode par les opérations élémentaires sur $[A \mid I_3]$:

J'ai choisi de faire les opérations élémentaires sur les lignes de $[A \mid I_3]$.

Mais on aurait pu faire les opérations élémentaires sur les colonnes de $\begin{bmatrix} A \\ I_3 \end{bmatrix}$

je vous y invite.

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc} -1 & 2 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 5 & -1 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right] \simeq \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & -2 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 5 & 0 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 5 & -1 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right] \begin{matrix} -L_1 \\ L_2 + 2L_1 \end{matrix}$$

$$\begin{aligned} &\simeq \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & -\frac{1}{5} & \frac{2}{5} & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \frac{2}{5} & \frac{1}{5} & 0 \\ 0 & 0 & -1 & -2 & -1 & 1 \end{array} \right] \begin{array}{l} L_1 + \frac{2}{5}L_2 \\ \frac{1}{5}L_2 \\ L_3 - L_2 \end{array} \\ &\simeq \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & -\frac{1}{5} & \frac{2}{5} & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \frac{2}{5} & \frac{1}{5} & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & 1 & -1 \end{array} \right] \begin{array}{l} \\ \\ -L_3 \end{array} \Rightarrow A^{-1} = \begin{bmatrix} -\frac{1}{5} & \frac{2}{5} & 0 \\ \frac{2}{5} & \frac{1}{5} & 0 \\ 2 & 1 & -1 \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

3^{ème} Méthode l'établissement de $(S) \Leftrightarrow AX = Y$ en $(S) \Leftrightarrow X = A^{-1}Y$:

$$\text{Soit le système : } AX = Y \Leftrightarrow A \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{bmatrix} = Y$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} -x + 2y = x' \\ 2x + y = y' \\ 5y - z = z' \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = -\frac{1}{5}x' + \frac{2}{5}y' \\ y = \frac{2}{5}x' + \frac{1}{5}y' \\ z = 2x' + y' - z' \end{cases} \Leftrightarrow (S')$$

La matrice associée à (S') est $\begin{bmatrix} -\frac{1}{5} & \frac{2}{5} & 0 \\ \frac{2}{5} & \frac{1}{5} & 0 \\ 2 & 1 & -1 \end{bmatrix}$ c'est l'inverse de A

c'est-à-dire A^{-1} . Car avec A inversible ; on a :

$$AX = Y \Leftrightarrow X = A^{-1}Y.$$

Chapitre 4

ESPACES VECTORIELS

4.0 Quelques rappels sur les structures algébriques

1. Une loi de composition interne sur un ensemble E , est une loi " $*$ " qui permettrait de composer deux éléments a, b de E pour avoir comme résultat $a * b \in E$; un élément de E , dans la composition $a * b$; a et b sont les opérandes et le résultat est : $a * b$.

2. Une loi de composition externe sur un ensemble E au moyen d'un autre ensemble \mathbb{K} est une loi " T " qui permettrait de composer un élément $\alpha \in \mathbb{K}$, $b \in E$ pour avoir comme résultat $\alpha T b \in E$; un élément de E , dans la composition $\alpha T b$; α et b sont les opérandes et le résultat est : $\alpha T b$.

Ainsi avec une loi ou des lois de compositions internes ou externes vérifiant certaines propriétés, on a des structures algébriques.

3. En ce qui nous concerne, nous avons vu, les unes après les autres les structures suivantes :

Magmas \implies Semi-groupes \implies Monoïdes \implies Groupes \implies Anneaux \implies Corps \implies Espaces Vectoriels.

NB : \implies signifie : de ce qui précède découle ce qui suit

4. Toutes structures algébriques s'accompagnent d'une sous-structure et de morphisme de même structures.

| Structures | Sous-structures | Morphismes de mêmes structures |
|--|---------------------------------------|--|
| Magmas | Parties stables | $f : (E, *) \rightarrow (F, T),$ $\forall x, y \in E, f(x * y) = f(x) T f(y)$ |
| Semi-groupes | Parties stables | $f : (E, *) \rightarrow (F, T),$ $\forall x, y \in E, f(x * y) = f(x) T f(y)$ |
| Monoïdes avec un élément neutre e | Parties stables auquel e appartient | $f : (E, *) \rightarrow (F, T),$ $\forall x, y \in E, f(x * y) = f(x) T f(y),$ $f(e_*) = e_T$ avec e_* élément neutre de $(E, *)$ et e_T elt neutre de (F, T) |
| Groupes $\text{symt}_*(x) = \text{symétrie par rapport à } "*" \text{ de } x$ | Sous-groupes | $f : (E, *) \rightarrow (F, T), \forall x, y \in E,$ $f(x * y) = f(x) T f(y),$ avec $f(e_*) = e_T$ $f(\text{symt}_*(x)) = \text{symt}_T f(x)$ |
| Anneaux | Sous-anneaux | $f : (E, *, \perp) \rightarrow (F, T, +), \forall x, y \in E,$ $f(x * y) = f(x) T f(y),$ avec $f(e_*) = e_T$ $f(\text{symt}_*(x)) = \text{symt}_T f(x)$ $f(x \perp y) = f(x) + f(y)$ |
| Corps | Sous-corps | $f : (E, *, \perp) \rightarrow (F, T, +), \forall x, y \in E,$ $f(x * y) = f(x) T f(y),$ avec $f(e_*) = e_T$ $f(\text{symt}_*(x)) = \text{symt}_T f(x)$ $f(x \perp y) = f(x) + f(y),$ avec $f(e_\perp) = e_+$ $f(\text{symt}_\perp(x)) = \text{symt}_+ f(x), x \in E \setminus \{e_*\}$ |
| \mathbb{K} -Espaces Vectoriels ; où \mathbb{K} un corps commutatif | Sous-espaces vectoriels | $f : (E, *, \cdot)_{\mathbb{K}} \rightarrow (F, T, +)_{\mathbb{K}'}, \mathbb{K} \subseteq \mathbb{K}'$ $\forall x, y \in E, \forall \alpha \in \mathbb{K},$ $f(x * y) = f(x) T f(y),$ avec $f(e_*) = e_T ; f(\text{symt}_*(x)) = \text{symt}_T f(x)$ $f(\alpha \cdot y) = \alpha + f(y)$ f s'appelle application linéaire de E dans F |

5. Soit f un morphisme de mêmes structures algébriques : $f : E \rightarrow F$;

on a :

(i). A sous-structure de $E \Rightarrow f(A)$ est une sous-structure de F

(ii). B sous-structure de $F \Rightarrow f^{-1}(B)$ est une sous-structure de E

(iii). Il est lié à tout morphisme de mêmes structures algébriques : $f : E \rightarrow F$ deux sous-structures ; l'une de E , et l'autre de F à partir des monoïdes.

Celle de E , s'appelle *noyau* de f et notée $\ker f = \{x \in E ; f(x) = e_F\}$

où e_F élément neutre de la première loi de composition interne de F

et l'autre de F , s'appelle *image* de f et notée $\text{Im } f = f(E) = \{f(x) ; x \in E\}$

c'est l'ensemble image de f avec les propriétés suivantes :

1. $\ker f = \{e_E\} \Leftrightarrow f$ est injective, avec e_E élément neutre de la première loi de composition interne de E .
2. $\text{Im } f = f(E) = F \Leftrightarrow f$ est surjective

Objectifs

- * Connaître les définitions d'un \mathbb{K} -espace vectoriel, d'un vecteur nul, d'une combinaison linéaire de vecteurs, de famille de vecteurs libre, liée, génératrice, d'un sous-espace vectoriel d'un \mathbb{K} -espace vectoriel, d'une base d'un \mathbb{K} -espace vectoriel, de la dimension d'un \mathbb{K} -espace vectoriel, des coordonnées d'un vecteur dans une base donnée sur un \mathbb{K} -espace vectoriel, avoir un sous-espace vectoriel d'un \mathbb{K} -espace vectoriel E , comme un sous-ensemble de E engendré par des vecteurs de E .
Aussi bien que savoir les déterminer comme tels.
- * Savoir déterminer le rang d'une famille finie de vecteurs d'un \mathbb{K} -espace vectoriel.
- * Savoir déterminer une base des solutions d'un système d'équations linéaires homogènes

4.1 Introduction

Dans $\vec{\mathcal{P}}$ l'ensemble des vecteurs du plan, on a :

(i) $\forall \vec{u}, \vec{v} \in \vec{\mathcal{P}}, \vec{u} + \vec{v} \in \vec{\mathcal{P}}$ on dit que "+" est une loi de composition interne sur $\vec{\mathcal{P}}$ avec les propriétés suivantes :

(1) $\vec{u} + (\vec{v} + \vec{w}) = (\vec{u} + \vec{v}) + \vec{w}, \forall \vec{u}, \vec{v}, \vec{w} \in \vec{\mathcal{P}}$.

On dit que la loi "+" est associative dans $\vec{\mathcal{P}}$

(2) Le vecteur $\vec{0} \in \vec{\mathcal{P}}$ vérifie : $\forall \vec{u} \in \vec{\mathcal{P}}, \vec{u} + \vec{0} = \vec{0} + \vec{u} = \vec{u}$.

On dit que la loi "+" admet un élément neutre dans $\vec{\mathcal{P}}$ qui est ici $\vec{0} \in \vec{\mathcal{P}}$ dit vecteur nul de $\vec{\mathcal{P}}$.

(3) $\forall \vec{u} \in \vec{\mathcal{P}},$ on a : $(-\vec{u}) \in \vec{\mathcal{P}}$ et $\vec{u} + (-\vec{u}) = (-\vec{u}) + \vec{u} = \vec{0}$.

On dit que tout élément $\vec{u} \in \vec{\mathcal{P}}$ admet un symétrique unique qui est $(-\vec{u}) \in \vec{\mathcal{P}}$.

(4) $\vec{u} + \vec{v} = \vec{v} + \vec{u}, \forall \vec{u}, \vec{v} \in \vec{\mathcal{P}}$.

On dit que la loi "+" est commutative dans $\vec{\mathcal{P}}$

Dès lors, on dit que $(\vec{\mathcal{P}}, +)$ est un groupe commutatif ou abélien

(ii) $\forall \alpha \in (\mathbb{R}, +, \times), \forall \vec{u} \in \vec{\mathcal{P}}, \alpha \cdot \vec{u} = \alpha \vec{u} \in \vec{\mathcal{P}}$ on dit que "." est une loi de composition externe sur $\vec{\mathcal{P}}$ au moyen du corps $(\mathbb{R}, +, \times)$ avec les propriétés suivantes :

(5) $1 \vec{u} = \vec{u}, \forall \vec{u} \in \vec{\mathcal{P}}$. (1 est l'élément neutre de (\mathbb{R}, \times))

(6) $\alpha (\beta \vec{u}) = (\alpha \times \beta) \vec{u}, \forall \vec{u} \in \vec{\mathcal{P}}, \forall \alpha, \beta \in \mathbb{R}$.

(7) $\alpha (\vec{u} + \vec{v}) = \alpha \vec{u} + \alpha \vec{v}, \forall \alpha \in \mathbb{R}, \forall \vec{u}, \vec{v} \in \vec{\mathcal{P}}$.

(8) $(\alpha + \beta) \vec{u} = \alpha \vec{u} + \beta \vec{u}, \forall \alpha, \beta \in \mathbb{R}, \forall \vec{u} \in \vec{\mathcal{P}}$.

On a ainsi une structure d'espace vectoriel sur $\vec{\mathcal{P}}$ et

on dit que $(\vec{\mathcal{P}}, +, \cdot)$ est un \mathbb{R} -espace vectoriel.

Dans la suite on va généraliser la situation ci-dessus dans le sens :

1. Remplacer $\vec{\mathcal{P}}$ par un ensemble non vide E , qui muni de "+" loi de composition interne sur E et "." loi de composition externe sur E au moyen d'un corps $(\mathbb{K}, +, \times)$ (notée aussi ".") quelconque. Ici $\mathbb{K} = (\mathbb{R} \text{ ou } \mathbb{C})$.
Tel que conformément aux éléments de E on a les propriétés (1) à (8).
et ainsi avoir encore une structure d'espace vectoriel sur E et dire

alors $(E, +, \cdot)$ est un \mathbb{K} -espace vectoriel.

2. On pourrait aussi changer diversement les symboles des lois qui sont en jeu dans **1.** par exemple : $(E, +, \cdot)$ qui devient (E, \oplus, \otimes) et $(\mathbb{K}, +, \times)$ (notée aussi ".") devant $(\mathbb{K}, \heartsuit, \clubsuit)$ avec les propriétés (1) à (8) assurées, et ainsi avoir encore une structure de \mathbb{K} -espace vectoriel sur E .

4.2 Définition d'un espace vectoriel

Définition(courante)

Un groupe commutatif $(E, +)$ est un ensemble $E \neq \emptyset$ muni d'une loi de composition interne $(x + y) \in E$, définie pour tous éléments x et y de E , ayant les propriétés suivantes :

- (1) Associativité : $x + (y + z) = (x + y) + z, \forall x, y, z \in E$
- (2) Il existe un élément neutre $0 \in E$ qui vérifie : $\forall x \in E, x + 0 = 0 + x = x$.
- (3) Tout élément x de E possède un symétrique, noté $-x \in E$ tel que $x + (-x) = (-x) + x = 0$.
- (4) Commutativité : $x + y = y + x, \forall x, y \in E$.

Soit $(E, +)$ un groupe commutatif et $(\mathbb{K} = \mathbb{R} \text{ ou } \mathbb{C}, +, \times)$ un corps commutatif. Nous dirons que $(E, +)$ est un **espace vectoriel sur \mathbb{K}**

(qui est appelé le corps de base de l'espace vectoriel)

s'il existe une loi de composition **externe** "." associant à tout élément $\alpha \in \mathbb{K}$ et tout élément $x \in E$, un élément de E , noté $\alpha.x = \alpha x$, avec les propriétés suivantes :

- (5) $1x = x$, tout élément $x \in E$. (1 est l'élément neutre (\mathbb{K}, \times))
- (6) $\alpha(\beta x) = (\alpha \times \beta)x$, tout élément $x \in E, \forall \alpha, \beta \in \mathbb{K}$.
- (7) $\alpha(x + y) = \alpha x + \alpha y, \forall \alpha \in \mathbb{K}, \forall x, y \in E$.
- (8) $(\alpha + \beta)x = \alpha x + \beta x, \forall \alpha, \beta \in \mathbb{K}$, tout élément $x \in E$.

Aussi on dit que $(E, +, \cdot)$ est un \mathbb{K} -espace vectoriel.

Définitions

1. Un élément x de $(E, +, \cdot)$ un \mathbb{K} -espace vectoriel (qu'on pourrait écrire \vec{x}) est dit **vecteur** et ceux de \mathbb{K} **scalaires**.

2. Deux vecteurs x et y de E sont dit **colinéaires** s'il existe $\lambda \in \mathbb{K}$ tel que

$$y = \lambda x.$$

Remarque

Nous laissons au lecteur le soin de distinguer l'élément neutre de $(E, +)$.

(qu'on pourrait écrire $\vec{0}$ ou 0_E ou simplement 0 s'il n'y pas de confusion possible), qui est un vecteur, appelé **vecteur nul** de E , de l'élément nul 0 de \mathbb{K}

(qu'on pourrait écrire $0_{\mathbb{K}}$), qui est un scalaire.

Ces éléments vérifient les règles de calcul suivantes :

Tout élément $x \in E$ $0_{\mathbb{K}}.x = 0_E$, d'après (8) si $\beta = -\alpha$.

Tout élément $x \in E, \forall \alpha \in \mathbb{K}, \alpha.x = 0_E \iff \alpha = 0_{\mathbb{K}} \text{ ou } x = 0_E$.

On a en outre : $\alpha(-x) = (-\alpha)x = -\alpha x$, tout élément $x \in E, \forall \alpha \in \mathbb{K}$.

Et, en particulier $(-1)x = -(1.x) = -x$.

Remarque

Tout ensemble non vide (E, \top, \perp) muni de deux lois de composition : " \top " la première, une loi de composition interne tel que (E, \top) soit un groupe commutatif car vérifiant les propriétés (1) jusqu'à (4) et " \perp " la deuxième loi étant une loi de composition externe sur E moyennant un ensemble de

scalaires $\alpha \in \mathbb{K}$ un corps commutatif et vérifiant relativement les propriétés (5) jusqu'à (8) est dit un \mathbb{K} -espace vectoriel. En effet :

4.3 Définition générale d'un espace vectoriel sur un corps commutatif $(\mathbb{K}, \heartsuit, \clubsuit)$

Ici $(\mathbb{K}, \heartsuit, \clubsuit)$ est un corps commutatif dont l'élément neutre de la deuxième loi est noté e_{\clubsuit} et l'élément neutre de la première loi est e_{\heartsuit} .

Soit E un ensemble non vide muni d'une loi de composition **interne** notée " \oplus ", de sorte que (E, \oplus) soit un **groupe commutatif** d'élément neutre e_{\oplus} .

Aussi, on munit E d'une loi de composition **externe** " \otimes " sur \mathbb{K} , c'est-à-dire $\otimes : E \times \mathbb{K} \longrightarrow E$, $(x, \lambda) \longmapsto \lambda \otimes x$,

Si on a :

(1) $e_{\clubsuit} \otimes x = x$, tout élément $x \in E$.

(2) $\alpha \otimes (\beta \otimes x) = (\alpha \clubsuit \beta) \otimes x$, tout élément $x \in E$, $\forall \alpha, \beta \in \mathbb{K}$.

*(Ceci **semble** être l'associativité de la loi " \otimes ", mais comme $\alpha, \beta \in \mathbb{K}$, $\alpha \otimes \beta$ n'a pas de sens dans \mathbb{K} , au vu du calcul vectoriel dans le plan, il conviendrait de poser $(\alpha \clubsuit \beta)$ au lieu de $\alpha \otimes \beta$).*

(3) $\alpha \otimes (x \oplus y) = (\alpha \otimes x) \oplus (\alpha \otimes y)$, $\forall \alpha \in \mathbb{K}$, $\forall x, y \in E$.

(la loi de composition externe sur E est distributive à gauche

(car la loi de composition externe " \otimes " sur E a le scalaire à gauche :

$(x, \lambda) \longmapsto \lambda \otimes x$ par rapport à la loi de composition interne sur E)

(4) $(\alpha \heartsuit \beta) \otimes x = (\alpha \otimes x) \oplus (\beta \otimes x)$, $\forall \alpha, \beta \in \mathbb{K}$, tout élément $x \in E$.

*(la loi de composition externe sur E **semble** distributive de " \otimes " par*

rapport à la loi " \heartsuit " 1^{ère} loi de composition interne sur \mathbb{K} , où dans le développé pour une question de définition " \heartsuit " est remplacée par " \oplus "

la loi de composition interne sur E , car $(\alpha \otimes x); (\beta \otimes x) \in E$ et

$(\alpha \otimes x) \heartsuit (\beta \otimes x)$ n'a pas de sens dans E , d'où le remplacement).

En plus d'avoir (E, \oplus) comme un **groupe commutatif**, nous dirons que

(E, \oplus, \otimes) a une **structure d'espace vectoriel sur le corps commutatif** $(\mathbb{K}, \heartsuit, \clubsuit)$.

4.3.1 Tableau de similarité

| | |
|--|---|
| $(\vec{\mathcal{P}}, +, \cdot); \forall \vec{u}, \vec{v} \in \vec{\mathcal{P}}, \vec{u} + \vec{v} \in \vec{\mathcal{P}},$ $\forall \alpha \in (\mathbb{R}, +, \times), \alpha \cdot \vec{u} = \alpha \vec{u} \in \vec{\mathcal{P}}$ | $(E, \oplus, \otimes); \forall x, y \in E, x \oplus y \in E,$ $\forall \alpha \in (\mathbb{K}, \heartsuit, \clubsuit), \alpha \otimes \vec{u} \in E$ |
| $(1) \vec{u} + (\vec{v} + \vec{w}) = (\vec{u} + \vec{v}) + \vec{w},$ $\forall \vec{u}, \vec{v}, \vec{w} \in \vec{\mathcal{P}}$ | $(1) x \oplus (y \oplus z) = (x \oplus y) \oplus z,$ $\forall x, y, z \in E$ |
| $(2) \vec{0} \in \vec{\mathcal{P}}; \forall \vec{u} \in \vec{\mathcal{P}}, \vec{u} + \vec{0} = \vec{0} + \vec{u} = \vec{u}.$ | $(2) e_{\oplus} \in E; \forall x \in E,$ $x \oplus e_{\oplus} = e_{\oplus} \oplus x = x.$ |
| $(3) \forall \vec{u} \in \vec{\mathcal{P}}, (-\vec{u}) \in \vec{\mathcal{P}} \text{ et }$ $\vec{u} + (-\vec{u}) = (-\vec{u}) + \vec{u} = \vec{0}.$ | $(3) \forall x \in E, \text{symét}_{\oplus}(x) \in E,$ $x \oplus \text{symét}_{\oplus}(x) = \text{symét}_{\oplus}(x) \oplus x = e_{\oplus}.$ |
| $(4) \vec{u} + \vec{v} = \vec{v} + \vec{u}, \forall \vec{u}, \vec{v} \in \vec{\mathcal{P}}.$ | $(4) x \oplus y = y \oplus x, \forall x, y \in E.$ |
| $(5) 1 \vec{u} = \vec{u}, \forall \vec{u} \in \vec{\mathcal{P}}. (1 \text{ est l'élnt neutre de } (\mathbb{R}, \times))$ | $(5) e_{\clubsuit} \otimes x = x, \forall x \in E.$ |
| $(6) \alpha(\beta \vec{u}) = (\alpha \times \beta) \vec{u}, \forall \vec{u} \in \vec{\mathcal{P}}, \forall \alpha, \beta \in \mathbb{R}.$ | $(6) \alpha \otimes (\beta \otimes x) = (\alpha \clubsuit \beta) \otimes x, \forall x \in E,$ $\forall \alpha, \beta \in K.$ |
| $(7) \alpha(\vec{u} + \vec{v}) = \alpha \vec{u} + \alpha \vec{v}, \forall \alpha \in K, \forall \vec{u}, \vec{v} \in \vec{\mathcal{P}}.$ | $(7) \alpha \otimes (x \oplus y) = (\alpha \otimes x) \oplus (\alpha \otimes y),$ $\forall \alpha \in K, \forall x, y \in E.$ |
| $(8) (\alpha + \beta) \vec{u} = \alpha \vec{u} + \beta \vec{u}, \forall \alpha, \beta \in \mathbb{R}, \forall \vec{u} \in \vec{\mathcal{P}}.$ | $(8) (\alpha \heartsuit \beta) \otimes x = (\alpha \otimes x) \oplus (\beta \otimes x),$ $\forall \alpha, \beta \in K, \forall x \in E.$ |

Définitions

1. Un élément x de (E, \oplus, \otimes) un \mathbb{K} -espace vectoriel (qu'on pourrait écrire \vec{x}) est dit **vecteur** et ceux de \mathbb{K} **scalaires**.

2. Deux vecteurs x et y de E sont dit colinéaires s'il existe $\lambda \in \mathbb{K}$ tel que

$$y = \lambda \otimes x.$$

Remarques

Le vecteur nul de (E, \oplus, \otimes) est l'élément neutre e_{\oplus} .

Ici e_{\heartsuit} et e_{\clubsuit} sont des scalaires éléments neutres respectifs de \heartsuit, \clubsuit .

Ces éléments vérifient les règles de calcul suivantes :

□ Tout élément $x \in E$ $e_{\heartsuit} \otimes x = e_{\oplus}$, d'après (4) si $\beta = \text{symét}_{\heartsuit}(\alpha)$.

(Soulignons que $\text{symét}_{\heartsuit}(\alpha)$ est le symétrique de α par rapport à la loi \heartsuit .

Et que $\text{symét}_{\heartsuit}(\alpha) \heartsuit \alpha = \alpha \heartsuit \text{symét}_{\heartsuit}(\alpha) = e_{\heartsuit}$.)

□ Tout élément $x \in E, \forall \alpha \in \mathbb{K}, \alpha \otimes x = e_{\oplus} \iff \alpha = e_{\heartsuit} \text{ ou } x = e_{\oplus}.$

□ On a en outre : $\alpha \otimes \text{symét}_{\oplus}(x) = (\text{symét}_{\heartsuit}(\alpha)) \otimes x = \text{symét}_{\oplus}(\alpha \otimes x),$
 tout élément $x \in E, \forall \alpha \in \mathbb{K}.$

□ Et, en particulier $(\text{symét}_{\heartsuit}(e_{\clubsuit})) \otimes x = \text{symét}_{\oplus}(e_{\clubsuit} \otimes x) = \text{symét}_{\oplus}(x).$

4.3.2 Exemples

a) Soit $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou \mathbb{C} et n un entier naturel non nul.

On munit l'ensemble \mathbb{K}^n des lois définies par les formules ci-dessous :

$$\forall (u_1, u_2, \dots, u_n), (v_1, v_2, \dots, v_n) \in \mathbb{K}^n,$$

$$(u_1, u_2, \dots, u_n) + (v_1, v_2, \dots, v_n) = (u_1 + v_1, u_2 + v_2, \dots, u_n + v_n).$$

$$\forall (u_1, u_2, \dots, u_n) \in \mathbb{K}^n, \forall \alpha \in \mathbb{K},$$

$$\alpha (u_1, u_2, \dots, u_n) = (\alpha u_1, \alpha u_2, \dots, \alpha u_n).$$

Ces lois font de \mathbb{K}^n un \mathbb{K} -espace vectoriel.

b) L'ensemble $\mathbb{C}[x]$ des polynômes à une variable x et à coefficients dans \mathbb{C}

est un espace vectoriel sur le corps des nombre complexes, l'addition étant celle des polynômes et la multiplication par un nombre complexe c le produit

de c par un polynôme .

Ce même ensemble est aussi un espace vectoriel sur le corps \mathbb{R} des nombres réels avec une loi externe de multiplication par un nombre réel. On dit que $\mathbb{C}[x]$ est un espace vectoriel complexe si son corps de base est \mathbb{C} . Si le corps de base est \mathbb{R} , on dit qu'on a un espace vectoriel réel.

c) L'ensemble $M_{pq}(\mathbb{K})$ des matrices de type (p, q) muni de l'addition est un groupe commutatif en association avec la loi de composition externe (qui est la multiplication par un scalaire complexe ou réel, d'une matrice) fait de $M_{pq}(\mathbb{K})$ un \mathbb{K} -espace vectoriel avec $\mathbb{K} = \mathbb{C}$ ou \mathbb{R} .

Définition

Soit une suite (x_1, x_2, \dots, x_n) de n vecteurs d'un $(\mathbb{K}, +, \times)$ -espace vectoriel $(E, +, \cdot)$; une **combinaison linéaire** de cette suite est un élément de E de la forme :

$$y = \sum_{i=1}^n \alpha_i x_i = \alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2 + \dots + \alpha_n x_n$$

où $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$ sont des scalaires de \mathbb{K} ce sont les coefficients de la combinaison linéaire; aussi dit-on que y est combinaison linéaire des vecteurs x_1, x_2, \dots, x_n .

Aussi une suite (x_1, x_2, \dots, x_n) de n vecteurs d'un $(\mathbb{K}, \heartsuit, \clubsuit)$ -espace vectoriel (E, \oplus, \otimes) ; une **combinaison linéaire** de cette suite est un élément de E de la forme :

$$y = (\alpha_1 \otimes x_1) \oplus (\alpha_2 \otimes x_2) \oplus \dots \oplus (\alpha_n \otimes x_n)$$

où $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$ sont des scalaires de \mathbb{K} ce sont les coefficients de la combinaison linéaire.

Exemple

Dans \mathbb{R}^2 , $x = -2(1, 4) + 7(-4, 5) - 3(6, 9)$ est une combinaison de la suite de vecteurs $((1, 4); (-4, 5), (6, 9))$.

4.4 Suite liée de vecteurs. Suite libre de vecteurs

Définition 3. Soit $(E, +, \cdot)$ un \mathbb{K} -espace vectoriel, on dit que la suite de vecteurs (x_1, x_2, \dots, x_n) est **liée** si l'on peut trouver des scalaires $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n \in \mathbb{K}$, **non tous nuls**, tels que :

$$(9) : \sum_{i=1}^n \alpha_i x_i = \alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2 + \dots + \alpha_n x_n = 0_E$$

On dit également, par abus de langage, que les vecteurs de la suite sont **liés**, ou encore **linéairement dépendants**.

Si la suite (x_1, x_2, \dots, x_n) n'est pas liée, on dit qu'elle est **libre**, ou encore que x_1, x_2, \dots, x_n sont libres ou **linéairement indépendants**; ceci signifie que l'égalité (9) entraîne $\alpha_1 = \alpha_2 = \dots = \alpha_n = 0$.

Si la suite (x_1, x_2, \dots, x_n) est libre, il en est de même de toute suite partielle et, en particulier, tous les éléments x_i de la suite sont distincts.

Exemples

1. Soit $x(1, 4) + y(-4, 5) + z(6, 9) = (x - 4y + 6z, 4x + 5y + 9z) = (0, 0)$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x - 4y + 6z = 0 \\ 4x + 5y + 9z = 0 \end{cases}$$

$$\Rightarrow x = -\frac{22}{7}z; y = \frac{5}{7}z$$

avec z réel quelconque, ainsi $((1, 4); (-4, 5), (6, 9))$ est une suite liée.

2. Soit $x(1, 4) + y(-4, 5) = (x - 4y, 4x + 5y) = (0, 0)$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x - 4y = 0 \\ 4x + 5y = 0 \end{cases} \Rightarrow x = y = 0.$$

Ainsi $((1, 4); (-4, 5))$ est une suite libre.

EXERCICE 1

Montrer que les vecteurs suivants de \mathbb{R}^3 sont linéairement dépendants et préciser leur relation de dépendance :

1. $u = (1, 2, -1)$; $v = (1, 0, 1)$; $w = (-1, 2, -3)$

2. $u = (-1, 2, 5)$; $v = (2, 3, 4)$; $w = (7, 0, -7)$.

Proposition de correction

$$1. \text{ Soit } A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 1 & 0 & 1 \\ -1 & 2 & -3 \end{bmatrix} \begin{matrix} u \\ v \\ w \end{matrix} \approx \begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 0 & -2 & 2 \\ 0 & 4 & -4 \end{bmatrix} \begin{matrix} u \\ v - u \\ w + u \end{matrix}$$

$$A \approx \begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 0 & -2 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{matrix} u \\ v - u \\ w + u + 2(v - u) \end{matrix} \Rightarrow w + u + 2(v - u) = \vec{0}$$

$w + u + 2(v - u) = \vec{0} \Leftrightarrow w + u + 2(v - u) = 2v - u + w = \vec{0}$; donc la famille $\{u, v, w\}$ est une famille liée et la relation de dépendance liant les vecteurs : u, v, w est : $2v - u + w = \vec{0}$.

2. $u = (-1, 2, 5)$; $v = (2, 3, 4)$; $w = (7, 0, -7)$.

$$\text{Soit } B = \begin{bmatrix} -1 & 2 & 5 \\ 2 & 3 & 4 \\ 7 & 0 & -7 \end{bmatrix} \begin{matrix} u \\ v \\ w \end{matrix} \approx \begin{bmatrix} -1 & 2 & 5 \\ 0 & 7 & 14 \\ 0 & 14 & 28 \end{bmatrix} \begin{matrix} u \\ v + 2u \\ w + 7u \end{matrix}$$

$$B \approx \begin{bmatrix} -1 & 2 & 5 \\ 0 & 7 & 14 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{matrix} u \\ v + 2u \\ w + 7u - 2(v + 2u) \end{matrix} \Rightarrow w + 7u - 2(v + 2u) = \vec{0}$$

$w + 7u - 2(v + 2u) = \vec{0} \Leftrightarrow w + 7u - 2(v + 2u) = 3u - 2v + w = \vec{0}$; donc la famille $\{u, v, w\}$ est une famille liée et la relation de dépendance liant les vecteurs : u, v, w est :

$$3u - 2v + w = \vec{0} \Leftrightarrow u = \frac{1}{3}(2v - w) \Leftrightarrow v = \frac{1}{2}(3u + w) \Leftrightarrow w = 2v - 3u.$$

Propriété 1

Pour qu'une suite de vecteurs x_1, x_2, \dots, x_n soit liée, il faut et il suffit que l'un d'eux soit une combinaison linéaire des autres.

Théorème 1

Soit (x_1, x_2, \dots, x_n) une suite de n vecteurs d'un espace vectoriel E .

Soit $(y_1, y_2, \dots, y_{n+1})$ une suite de $(n + 1)$ combinaisons linéaires des vecteurs x_1, x_2, \dots, x_n . Alors la $(y_1, y_2, \dots, y_{n+1})$ est liée.

4.5 Espaces vectoriels de dimension finie

4.5.1 Espace vectoriel ayant un nombre fini de générateurs

Définition 4. On dit qu'un \mathbb{K} -espace vectoriel E possède n **générateurs**

x_1, x_2, \dots, x_n , si x_1, x_2, \dots, x_n sont des vecteurs de E et si tout vecteur de E est une combinaison linéaire de (x_1, x_2, \dots, x_n) . Il en résulte que E coïncide avec l'ensemble des combinaisons linéaires de (x_1, x_2, \dots, x_n) et est donc l'espace engendré par cette suite.

Exemple

$\forall (x, y, z) \in \mathbb{R}^3$, on a $(x, y, z) = x(1, 0, 0) + y(0, 1, 0) + z(0, 0, 1)$
 donc $\mathbb{R}^3 = \{x(1, 0, 0) + y(0, 1, 0) + z(0, 0, 1) ; x, y, z \in \mathbb{R}\}$
 ainsi la famille $\{(1, 0, 0), (0, 1, 0), (0, 0, 1)\}$ est génératrice de \mathbb{R}^3 .

Le **théorème 1** entraîne immédiatement :

Propriété 2

Soit E un \mathbb{K} -espace vectoriel ayant n générateurs. Alors toute suite de $(n + 1)$ vecteurs de E est liée.

4.5.2 Base d'un espace vectoriel

Définition 5. Soit E un \mathbb{K} -espace vectoriel. On dit que la suite (x_1, x_2, \dots, x_n) est une **base** de E , si l'on a les deux propriétés suivantes :

- 1°) x_1, x_2, \dots, x_n sont des générateurs de E .
- 2°) La suite (x_1, x_2, \dots, x_n) est libre.

Propriété 3

*Soit x_1, x_2, \dots, x_n des vecteurs de E un \mathbb{K} -espace vectoriel. Pour que la suite (x_1, x_2, \dots, x_n) soit une base de E , il faut et il suffit que tout vecteur $y \in E$ s'exprime de façon **unique** sous la forme :*

$y = \alpha_1 x_1 + \dots + \alpha_n x_n \quad \alpha_i \in \mathbb{K}; \quad i \in \{1, 2, \dots, n\}.$
 α_i s'appelle la $i^{\text{ème}}$ coordonnée du vecteur y par rapport à la base (x_1, x_2, \dots, x_n) .

et alors la matrice colonne $Y = \begin{bmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \vdots \\ \alpha_n \end{bmatrix}$ est la matrice colonne des coordonnées du vecteur y dans la base (x_1, x_2, \dots, x_n) .

Remarques très importantes

1. Dans un espace vectoriel, aucun vecteur n'admet des coordonnées si ledit espace n'est pas muni d'une base. Ainsi toutes coordonnées d'un vecteur sont fonction d'une base donnée.
2. Le choix d'une base β d'un \mathbb{K} -espace vectoriel E permet d'identifier cet espace vectoriel à \mathbb{K}^n où $n = \text{card}\beta$.
3. Si un \mathbb{K} -espace vectoriel $E \neq \{0_E\}$; alors il admet une **infinité** de bases.

Théorème 2

Soit E un \mathbb{K} -espace vectoriel ayant une base (x_1, x_2, \dots, x_n) . Toute autre base de E est formée de n éléments. Toute suite libre (y_1, y_2, \dots, y_n) est une base de E . Aussi toute suite génératrice (z_1, z_2, \dots, z_n) est une base de E .

Définition 6. Soit E un \mathbb{K} -espace vectoriel non réduit à $\{0_E\}$.

La dimension de E est le cardinal d'une de ses bases qui sont en nombre infini. Aini, s'il existe un entier naturel n et une base de E composée de n éléments. Alors, d'après le théorème 2, toute base de E est formée de n éléments; cet entier naturel n s'appelle la **dimension** de E et se note **dim** $E = n$ ou $(\dim_{\mathbb{K}} E = n)$.

Remarques et Exemples

- a) Si $E = \{0_E\}$, il n'y a pas de base; on dit encore que E est de dimension nulle et on pose $\dim E = 0$.
- b) $\forall \lambda \in \mathbb{R}^*$, $((\lambda, 0); (0, \lambda))$ est une base du \mathbb{R} -espace vectoriel \mathbb{R}^2 .
- c) Dans un \mathbb{K} -espace vectoriel de dimension finie n , toute famille de vecteurs

de E , de cardinal strictement inférieur à n , ne peut être génératrice, avec possibilité d'indépendance linéaire.

d) Dans un \mathbb{K} -espace vectoriel de dimension finie n , toute famille de vecteurs de E , de cardinal strictement supérieur à n , ne peut être libre, avec possibilité d'être génératrice.

e) Dans un \mathbb{K} -espace vectoriel de dimension finie n , seule une famille de vecteurs de E , de cardinal égal à n , peut être une base de E . C'est dire qu'une famille de vecteurs libres de E a pour cardinal maximal n et une famille de vecteurs générateurs de E a pour cardinal minimal n .

Exemples de bases de quelques espaces vectoriels

a°) Soit $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou \mathbb{C} et n un entier naturel non nul. Le \mathbb{K} -espace vectoriel \mathbb{K}^n a une base dite **base canonique** (e_1, e_2, \dots, e_n) où le vecteur e_k est le vecteur $(0, 0, \dots, 0, 1, 0, \dots, 0)$, le 1 étant la $k^{\text{ième}}$ coordonnée, toutes les autres coordonnées sont nulles.

b°) Soit $\mathbb{C}_n[X]$ le \mathbb{C} -espace vectoriel des polynômes à une variable complexes de degré inférieur ou égal à n , avec le polynôme nul. La suite de polynômes $(1, x, x^2, \dots, x^n)$ forme une base de E .

Donc $\dim E = n + 1$.

Plus généralement $\forall a \in \mathbb{C}$, on vérifie que

$(1, x - a, (x - a)^2, \dots, (x - a)^n)$ est aussi une base de E .

Ainsi il y a bien une infinité de bases de $\mathbb{C}_n[X]$.

c°) Il ne faut pas croire que tout espace vectoriel soit de dimension finie.

Le \mathbb{C} -espace vectoriel $\mathbb{C}[x]$ de tous les polynômes complexes n'est pas de dimension finie; s'il était de dimension n , $n + 1$ polynômes quelconques seraient liés; or la suite $(1, x, x^2, \dots, x^n)$ est une suite libre de $n + 1$ vecteurs.

Un espace vectoriel qui n'est pas de dimension finie est dit de **dimension infinie**.

Proposition

L'ensemble $(M_{pq}(\mathbb{K}), +, \cdot)$ des matrices $p \times q$ est un espace vectoriel sur \mathbb{K} ,

une de ses bases est constituée par les matrices E_{ij} tels que $a_{ij} = 1$ et $a_{rs} = 0$,

si $r \neq i$ ou $s \neq j$. Ceux sont les matrices élémentaires de $M_{pq}(\mathbb{K})$.

Soit $A = (a_{ij})_{\substack{1 \leq i \leq p \\ 1 \leq j \leq q}} \in M_{pq}(\mathbb{K})$, alors $A = \sum_{\substack{1 \leq i \leq p \\ 1 \leq j \leq q}} a_{ij} E_{ij}$ ce qui entrainera que

la dimension de $M_{pq}(\mathbb{K})$ sur \mathbb{K} est pq .

Exemples

a°) Une base de l'espace vectoriel $M_{23}(\mathbb{R})$ est constitué par les matrices :

$$\begin{aligned} E_{11} &= \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}; & E_{12} &= \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}; & E_{13} &= \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \\ E_{21} &= \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}; & E_{22} &= \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}; & E_{23} &= \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

Donc la dimension de $M_{23}(\mathbb{R})$ est 6.

Ainsi la matrice $A = \begin{pmatrix} 2 & 5 & -7 \\ 9 & 8 & 4 \end{pmatrix}$ appartenant à $M_{23}(\mathbb{R})$ s'écrit :

$$A = 2E_{11} + 5E_{12} - 7E_{13} + 9E_{21} + 8E_{22} + 4E_{23}.$$

b°) Une matrice $1 \times q$ a la forme $A = (a_{11} \ a_{12} \ \dots \ a_{1q})$.

on l'appelle **matrice ligne ou uniligne** appartenant à l'espace $M_{1q}(\mathbb{K})$

qui est isomorphe à \mathbb{K}^q , donc de dimension q .

c°) Une matrice $p \times 1$ a la forme $B = \begin{pmatrix} a_{11} \\ a_{21} \\ \vdots \\ a_{p1} \end{pmatrix}$.

On l'appelle **matrice colonne ou unicolonne** appartenant à l'espace $M_{p1}(\mathbb{K})$ qui est isomorphe à \mathbb{K}^p , donc de dimension p .

d°) Une matrice $n \times n$ est dite **matrice carrée d'ordre n** appartenant à l'espace vectoriel des matrices notée $M_n(\mathbb{K})$. Il est de dimension n^2 sur \mathbb{K} .

Remarques(sous forme d'un petit résumé)

1. La combinaison linéaire permet de montrer une : $\begin{cases} \text{famille liée} \\ \text{famille libre} \\ \text{famille génératrice} \end{cases}$;
2. Famille libre et génératrice donne base ;
3. Base d'un \mathbb{K} -espace vectoriel E de dimension finie, permet d'identifier E à $\mathbb{K}^{\dim E}$ qui produit alors les coordonnées de vecteur dans la base considérée ;
4. Et les coordonnées de vecteurs qui rend possible le calcul matriciel dans les \mathbb{K} -espaces vectoriels.

4.5.3 Déterminant d'une suite de vecteurs d'un \mathbb{K} -espace vectoriel E de dimension finie

Définition

Soit $S = (V_1, V_2, \dots, V_n)$ une suite de n vecteurs d'un \mathbb{K} -espace vectoriel E de dimension n . Soit une base β , de E , le déterminant de la suite S dans la base β , est noté

$\det_{\beta}(S) = \begin{vmatrix} V_1^{\beta} & V_2^{\beta} & \dots & V_n^{\beta} \end{vmatrix}$, où V_j^{β} constituent la $j^{\text{ième}}$ colonne avec les coordonnées de V_j dans la base β . $\forall 1 \leq j \leq n$.

Exemple

Soient $V_1 = (1, -6, 8)$, $V_2 = (0, -3, 11)$, $V_3 = (0, 0, -5)$ trois vecteurs du \mathbb{R} -espace vectoriel \mathbb{R}^3 , et $S = (V_1, V_2, V_3)$.

Comme cardinal de (S) noté $\text{Card}(S) = 3 = \dim \mathbb{R}^3$ alors on peut évaluer le déterminant de S :

$$\det(S) = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -6 & -3 & 0 \\ 8 & 11 & -5 \end{vmatrix} = 15. \text{ Soit } A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -6 & -3 & 0 \\ 8 & 11 & -5 \end{bmatrix},$$

on a $\det(S) = \det A = \det({}^t A)$.

On peut donc saisir les coordonnées des V_j en **colonne** ou en **ligne**.

Proposition

Soit $S = (V_1, V_2, \dots, V_n)$ une suite de n vecteurs d'un \mathbb{K} -espace vectoriel E de dimension n . Soit une base β , de E ,

- a) Si $\det_{\beta}(S) \neq 0$, alors la suite S est libre ou linéairement indépendante et comme $\text{Card}(S) = \dim E$, donc S est **une base** de E .
- b) Si $\det_{\beta}(S) = 0$, alors la suite S est liée ou linéairement dépendante.

4.6 Sous-espaces vectoriels

Définition 2 : Une partie non vide F d'un $(\mathbb{K}, +, \times)$ -espace vectoriel $(E, +, \cdot)$ est un sous-espace vectoriel de E si elle vérifie les deux propriétés suivantes :

1°) $(F, +)$ est un sous-groupe de $(E, +)$

2°) $\forall \alpha \in \mathbb{K}, \forall x \in F, \alpha \cdot x \in F$.

(i.e. la loi de composition externe sur E est stable dans F .)

Les opérations définies dans E sont donc également définies dans F et lui confère une structure d'espace vectoriel sur \mathbb{K} .

Aussi un sous-espace vectoriel d'un \mathbb{K} -espace vectoriel E est un sous-ensemble F de E **caractérisé** par les deux propriétés suivantes :

$$\left\{ \begin{array}{l} 0_E \in F \\ \forall x, y \in F : x + y \in F \\ \forall \alpha \in \mathbb{K}, \forall x \in F, \alpha \cdot x \in F. \end{array} \right\} \iff 0_E \in F \text{ et } \forall \alpha, \beta \in \mathbb{K}, \forall x, y \in F, \alpha x + \beta y \in F.$$

De même :

$$\left\{ \begin{array}{l} 0_E \in F \\ \forall x, y \in F : x + y \in F \\ \forall \alpha \in \mathbb{K}, \forall x \in F, \alpha \cdot x \in F. \end{array} \right\} \iff 0_E \in F \text{ et } \forall \alpha \in \mathbb{K}, \forall x, y \in F, \alpha x + y \in F.$$

Remarque

Tout sous-ensemble non vide F d'un \mathbb{K} -espace vectoriel E qui est tel que toute combinaison linéaire de ses éléments lui appartiennent est un sous-espace vectoriel de E .

4.6.1 Exemples de sous-espaces vectoriels

a) L'ensemble F des combinaisons linéaires de la suite (x_1, x_2, \dots, x_n) est un sous-espace vectoriel de E .

Nous appellerons ce sous-espace vectoriel F le **sous-espace engendré** par la suite (x_1, x_2, \dots, x_n) .

b) Soit E un \mathbb{K} -espace vectoriel, l'ensemble réduit au singleton vecteur nul $\{0_E\}$ est un sous-espace vectoriel de E , ainsi que E lui-même.

Le sous-espace vectoriel nul $\{0_E\}$ et E sont dit **sous-espaces vectoriels triviaux** de E .

Tout autre sous-espace vectoriel F de E est dit **sous-espace vectoriel propre** de E , et vérifie : $\{0_E\} \subset F \subset E$.

c) L'ensemble $\mathbb{C}_n[x]$ des polynômes complexes de degré inférieur ou égal à $n \in \mathbb{N}^*$, forme un sous-espace vectoriel de $\mathbb{C}[x]$.

4.7 Sous-espaces vectoriels d'un espace vectoriel de dimension finie

Proposition

Tout sous ensemble non vide d'un espace vectoriel E engendré par une famille de vecteurs de E , est un sous-espace vectoriel de E , aussi tout sous-espace vectoriel de E , est un sous ensemble de E engendré par une famille de vecteurs de E .

La propriété suivante nous sera utile dans cette étude.

Propriété 4

Soit E un \mathbb{K} -espace vectoriel et $n \geq 0$ un entier naturel. Supposons que toutes

les suites de $(n + 1)$ vecteurs de E soient liées. Alors E est un espace vectoriel de dimension finie et $\dim E \leq n$.

Corollaire 1

Soit E un \mathbb{K} -espace vectoriel de dimension finie et $F \subset E$ un sous-espace vectoriel de E . Alors F est de dimension finie et $\dim F \leq \dim E$. De plus, si $\dim F = \dim E$, alors $F = E$.

Une autre conséquence de la propriété 4 est la suivante :

Corollaire 2

Soit E un espace vectoriel ayant n générateurs x_1, x_2, \dots, x_n , alors E est un espace vectoriel de dimension finie et $\dim E \leq n$.

4.7.1 Rang d'une suite finie de vecteurs

Considérons une suite (x_1, x_2, \dots, x_n) de n vecteurs d'un \mathbb{K} -espace vectoriel E , de dimension finie ou non. Le sous-espace F engendré par cette suite admet n générateurs x_1, x_2, \dots, x_n ; c'est donc, d'après le corollaire 2, un espace vectoriel de dimension finie $r \leq n$.

Définition 6.

1. On appelle **rang** r d'une suite(famille) finie de n **vecteurs** d'un \mathbb{K} -espace vectoriel, la **dimension** r de l'espace vectoriel F **engendré** par ces vecteurs. Ou l'on dira que F est de codimension $(n - r)$. On note $r \leq n$.
2. Aussi le **rang** r d'une suite(famille) finie de n **vecteurs** d'un \mathbb{K} -espace vectoriel, est le nombre maximum de vecteurs de la suite(famille) finie de n vecteurs, qui soient libres dans la suite en question.

Remarques

Sur un \mathbb{K} -espace vectoriel E , de dimension finie, muni d'une base. Considérons une famille finie S de vecteurs de E . Le rang de S est le rang de la A matrice constituée en lignes ou en colonnes des coordonnées des vecteurs de S .

A est dite une matrice associée à la suite S . Ainsi $\text{rang}(S) = \text{rang}(A)$

1. S est génératrice de E ssi le rang de $S = \dim E = \text{rang}(A)$
2. S est libre ssi le rang de $S = \text{Cardinal de } S(\text{Card } S) = \text{rang}(A)$
3. S est liée ssi le rang de S est **strictement inférieur** au Cardinal de $S(\text{Card } S)$
4. S est une base de E ssi $\dim E = \text{rang de } S = \text{Cardinal de } S(\text{Card } S)$
5. Soit $F = \langle S \rangle$, alors $\dim F = \text{rang}(S) = \text{rang}(A)$

Proposition

- 1) Soient F et G deux sous-espaces vectoriels d'un \mathbb{K} -espace vectoriel E de dimension finie, $F \cup G$ est un sous-espace vectoriel ssi $F \subset G$ ou $G \subset F$.
- 2) $F \cap G$ est un sous-espace vectoriel de E . Comme quoi l'intersection de sous-espaces vectoriels est un sous-espace vectoriel.
- 3) Si $F \subset G$ et $\dim F = \dim G$ alors $F = G$.

Remarque

La réunion de deux sous-espaces vectoriels d'un \mathbb{K} -espace vectoriel E de dimension finie n'est pas nécessairement un sous-espace vectoriel de E .

Définition

Soit un sous-ensemble non vide A inclus dans un \mathbb{K} -espace vectoriel E , $\text{vect}(A) = \langle A \rangle$ est appelé le sous-espace vectoriel engendré par A et c'est le **plus petit** sous-espace vectoriel de E contenant A .

Aussi $\text{vect}(A) = \langle A \rangle$ est l'intersection des tous les sous-espaces vectoriels

de E contenant A .

Remarque

Si $v_1, v_2, v_3 \in E$,

$$\text{vect}(v_1, v_2, v_3) = \{\alpha v_1 + \beta v_2 + \gamma v_3; \alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{K}\} = \langle v_1, v_2, v_3 \rangle$$

c'est l'ensemble des combinaisons linéaires des vecteurs v_1, v_2, v_3 .

Proposition

Soient A et B des parties d'un \mathbb{K} -espace vectoriel E ;

$$1. \text{vect}(\text{vect}(A)) = \text{vect}(A)$$

$$2. \text{Si } A \subset B \Rightarrow \text{vect}(A) \subset \text{vect}(B)$$

$$3. \text{vect}(A \cup B) = \text{vect}(A) + \text{vect}(B).$$

$$4. \text{si } A \text{ est un sous-espace vectoriel de } E, \text{ alors } \text{vect}(A) = A.$$

Proposition

Soient F et G deux sous-espaces vectoriels d'un \mathbb{K} -espace vectoriel E de dimension finie, on a :

$$1) F + G = \langle F \cup G \rangle = \text{l'espace engendré par } F \cup G.$$

$$2) \dim(\langle F \cup G \rangle) = \dim(F + G) = \dim F + \dim G - \dim(F \cap G).$$

Remarque

Si $\dim E = n$, n générateurs de E forment une base de E .

EXERCICE 1

\mathbb{R}^4 est muni de sa base canonique (t_1, t_2, t_3, t_4) . On considère les vecteurs :

$$e_1 = (1, 2, 3, 4); e_2 = (1, 1, 1, 3); e_3 = (2, 1, 1, 1); e_4 = (-1, 0, -1, 2); e_5 = (2, 3, 0, 1).$$

Soient E l'espace vectoriel engendré par e_1, e_2, e_3 et F par e_4 et e_5 .

Calculer les dimensions respectives de E , F , $E \cap F$ et $E + F$.

Proposition de correction de l'exo.1

$$\text{Soit } S_1 = \{e_1, e_2, e_3\}; S_2 = \{e_4, e_5\}$$

$$E = \langle e_1, e_2, e_3 \rangle = \text{vect}(S_1) \text{ et } F = \langle e_4, e_5 \rangle = \text{vect}(S_2)$$

$$\text{Soit } M_E = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 1 & 1 & 3 \\ 2 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & 0 & 9 \\ 0 & 0 & 1 & -4 \end{bmatrix};$$

M_E est une matrice associée à la suite ou à la famille S_1 .

$$\text{Le rang de } M_E \text{ est la dimension de } E, \text{ vu } \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & 0 & 9 \\ 0 & 0 & 1 & -4 \end{bmatrix}$$

le rang de M_E est 3, donc $\dim E = 3$.

$$\text{Soit } M_F = \begin{bmatrix} -1 & 2 \\ 0 & 3 \\ -1 & 0 \\ 2 & 1 \end{bmatrix} \simeq \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

M_F est une matrice associée à la suite ou à la famille S_2 .

$$\text{Le rang de } M_F \text{ est la dimension de } F, \text{ vu } \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

le rang de M_F est 2, donc $\dim F = 2$.

$$\text{Soit } S_3 = \{e_1, e_2, e_3, e_4, e_5\}$$

$$E + F = \langle e_1, e_2, e_3, e_4, e_5 \rangle = \text{vect}(S_3)$$

$$\text{Soit } M_{E+F} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 1 & 1 & 3 \\ 2 & 1 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & -1 & 2 \\ 2 & 3 & 0 & 1 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

M_{E+F} est une matrice associée à la suite ou à la famille S_3 .

$$\text{Le rang de } M_{E+F} \text{ est la dimension de } E + F, \text{ vu } \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

le rang de M_{E+F} est 4, donc $\dim(E + F) = 4$.

Pour finir on sait que : $E + F = \text{vect}(E \cup F) = \langle E \cup F \rangle$

$$\dim(E + F) = \dim E + \dim F - \dim(E \cap F) \Leftrightarrow$$

$$\dim(E \cap F) = \dim E + \dim F - \dim(E + F) = 3 + 2 - 4 = 1.$$

EXERCICE 2

Préciser si les familles constituées des vecteurs suivants sont liés ou libres.

$$1. u = (7, 12); v = (18, -13); w = (-4, 17)$$

$$2. u = (-1, 0, 2); v = (1, 3, 1); w = (0, 1, -1)$$

$$3. u = (15, -27, -6, 12); v = \left(-\frac{5}{2}, \frac{9}{2}, 1, -2\right).$$

Proposition de correction de l'exo.2

$$1. u = (7, 12); v = (18, -13); w = (-4, 17)$$

La famille $\mathcal{F} = \{u, v, w\} \subset \mathbb{R}^2$ et le $\text{Card}\mathcal{F} = 3 > \dim \mathbb{R}^2 = 2$

donc la famille \mathcal{F} est liée dans \mathbb{R}^2 .

$$2. u = (-1, 0, 2); v = (1, 3, 1); w = (0, 1, -1)$$

$$\text{Soit } A = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 2 \\ 1 & 3 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \end{bmatrix} \begin{matrix} u \\ v \\ w \end{matrix} \approx \begin{bmatrix} -1 & 0 & 2 \\ 0 & 3 & 3 \\ 0 & 1 & -1 \end{bmatrix} \begin{matrix} u \\ v + u \\ w \end{matrix}$$

$$A \approx \begin{bmatrix} -1 & 0 & 2 \\ 0 & 3 & 3 \\ 0 & 0 & 6 \end{bmatrix} \begin{matrix} u \\ v + u \\ -3w + (v + u) \end{matrix} \quad \text{délà on a bien :}$$

$$A \approx \begin{bmatrix} -1 & 0 & 2 \\ 0 & 3 & 3 \\ 0 & 0 & 6 \end{bmatrix} \Rightarrow \text{le rang de } A : \text{rg}(A) = 3$$

aussi la famille $\mathcal{G} = \{u, v, w\} \subset \mathbb{R}^3$ et le sous-espace vectoriel engendré

par $\mathcal{G} = \{u, v, w\}$ c'est-à-dire $\langle u, v, w \rangle$ est de

dimension $\text{rg}(A) = 3 = \text{Card}\mathcal{G}$ donc la famille \mathcal{G} est libre dans \mathbb{R}^3 .

Remarque

En formant une matrice A constituée en ligne ou en colonne des coordonnées des vecteurs d'une famille donnée \mathcal{F} ; lorsque le rang de A est égal au cardinal de \mathcal{F} , la famille \mathcal{F} est libre sinon elle est liée.

$$3. u = (15, -27, -6, 12); v = \left(-\frac{5}{2}, \frac{9}{2}, 1, -2\right).$$

La famille $\mathcal{H} = \{u, v\} \subset \mathbb{R}^4$

aussi soit

$$A = \begin{bmatrix} 15 & -27 & -6 & 12 \\ 5 & 9 & 1 & -2 \\ -\frac{5}{2} & \frac{9}{2} & 1 & -2 \end{bmatrix} \begin{matrix} u \\ v \end{matrix}$$

$$\approx \begin{bmatrix} 15 & -27 & -6 & 12 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad u$$

La famille $\mathcal{H} = \{u, v\} \subset \mathbb{R}^4$ est donc liée car il y a une relation de dépendance entre les vecteurs : u, v qui est : $6v + u = \vec{0}$.

4.8 Sous-espaces supplémentaires

Définition 8

Soit E un \mathbb{K} -espace vectoriel. Deux sous-espaces vectoriels F et G de E sont appelés **supplémentaires** si tout élément $x \in E$ s'écrit d'une façon et d'une seule sous la forme : $x = y + z$, $y \in F$, $z \in G$.

On dit encore que E est la **somme directe** de F et G et on écrit :

$$E = F \oplus G \Leftrightarrow E = F + G \text{ et } F \cap G = \{0_E\}.$$

Théorème 3

Soit E un \mathbb{K} -espace vectoriel de dimension finie, F et G deux sous-espaces vectoriels de E de bases respectives β et γ . Les trois propriétés ci-dessous sont équivalentes :

- (a) F et G sont supplémentaires
- (b) $F \cap G = \{0_E\}$ et $\dim E = \dim F + \dim G$.
- (c) $\text{rang}(\beta \cup \gamma) = \dim F + \dim G = \dim E$, alors $\beta \cup \gamma$ est une base de E .

Théorème 4. (De la base incomplète).

Soit E un \mathbb{K} -espace vectoriel de dimension finie n .

1. Pour toute suite libre (y_1, y_2, \dots, y_p) de E ($p \leq n$), on peut trouver $q = n - p$ vecteurs z_1, z_2, \dots, z_q de E tels que $(y_1, y_2, \dots, y_p, z_1, z_2, \dots, z_q)$ soit une base de E .
2. Tout sous-espace vectoriel $F = \langle y_1, y_2, \dots, y_p \rangle$ de E admet un supplémentaire $G = \langle z_1, z_2, \dots, z_q \rangle$.

Remarque : On peut utiliser le **rang** d'une suite de vecteurs pour la compléter en base (voir au cours).

4.9 Somme de n sous-espaces vectoriels

Définition

On appelle somme de F_1, F_2, \dots, F_n , n sous-espaces vectoriels de E

et on note $\sum_{i=1}^n F_i$ l'ensemble $\{x_1 + x_2 + \dots + x_n; x_i \in F_i \text{ pour } 1 \leq i \leq n\}$.

C'est dire que $\sum_{i=1}^n F_i = \{x_1 + x_2 + \dots + x_n; x_i \in F_i \text{ pour } 1 \leq i \leq n\}$.

Proposition

La somme de F_1, F_2, \dots, F_n , n sous-espaces vectoriels de E ,

$\sum_{i=1}^n F_i = \{x_1 + x_2 + \dots + x_n; x_i \in F_i \text{ pour } 1 \leq i \leq n\}$ est un sous-espace vectoriel de E .

Proposition

Si les F_i sont de dimension finie, alors

$\sum_{i=1}^n F_i$ est de dimension finie et $\dim \left(\sum_{i=1}^n F_i \right) \leq \sum_{i=1}^n \dim (F_i)$.

Définition

On dit que la somme $\sum_{i=1}^n F_i$ est directe si

$$\forall (x_1, x_2, \dots, x_n) \in F_1 \times F_2 \times \dots \times F_n; x_1 + x_2 + \dots + x_n = 0_E \Rightarrow x_1 = x_2 = \dots = x_n = 0_E.$$

Dans ce cas, on note $F_1 \oplus F_2 \oplus \dots \oplus F_n = \bigoplus_{i=1}^n F_i$

Aussi tout élément de $F_1 \oplus F_2 \oplus \dots \oplus F_n = \bigoplus_{i=1}^n F_i$ s'écrit de manière unique comme somme d'éléments des F_i .

Proposition

Si les F_i sont de dimension finie, alors

$\bigoplus_{i=1}^n F_i$ est de dimension finie et $\dim \left(\bigoplus_{i=1}^n F_i \right) = \sum_{i=1}^n \dim (F_i)$.

Aussi $\left(\dim \left(\sum_{i=1}^n F_i \right) = \sum_{i=1}^n \dim (F_i) \right) \Leftrightarrow \sum_{i=1}^n F_i = \bigoplus_{i=1}^n F_i$.

$\sum_{i=1}^n F_i = \bigoplus_{i=1}^n F_i$ veut dire que l'on a une somme directe des F_i .

4.10 Produit de deux espaces vectoriels sur un même corps commutatif \mathbb{K}

Soit E_1 et E_2 deux \mathbb{K} -espaces vectoriels. On peut munir l'ensemble produit $E = E_1 \times E_2$ d'une structure de \mathbb{K} -espace vectoriel en définissant :

l'addition comme le produit de deux groupes additifs :

$$(x_1, x_2) + (y_1, y_2) = (x_1 + y_1, x_2 + y_2)$$

et la multiplication de (x_1, x_2) par $\alpha \in \mathbb{K}$:

$$\alpha (x_1, x_2) = (\alpha x_1, \alpha x_2).$$

Définition 9. L'espace vectoriel E ainsi construit s'appelle le **produit** des espaces vectoriels E_1 et E_2 et se note : $E = E_1 \times E_2$. Le vecteur nul de E est $0_E = (0_{E_1}, 0_{E_2})$ où 0_{E_1} est le vecteur nul de E_1 et 0_{E_2} le vecteur nul de E_2 . Les deux sous-espaces vectoriels de E : $F_1 = \{(x_1, 0), x_1 \in E_1\}$; $F_2 = \{(0, x_2), x_2 \in E_2\}$ vérifient :

Propriété 5. F_1 et F_2 sont deux sous-espaces supplémentaires de E ,
et on a donc : $E = F_1 \oplus F_2$.

Propriété 6. Si E_1 et E_2 sont de dimension finie, alors E est de dimension finie et on a : $\dim E = \dim (E_1 \times E_2) = \dim E_1 + \dim E_2$

Dans la définition d'un produit, on peut avoir $E_1 = E_2$; on définit ainsi $E_1 \times E_1$ que l'on note aussi E_1^2 .

La définition du produit de deux espaces vectoriels se généralise au produit $E_1 \times E_2 \times \dots \times E_n$ d'un nombre fini de \mathbb{K} -espaces vectoriels E_1, E_2, \dots, E_n et, en particulier on peut avoir $\underbrace{E_1 \times E_1 \times \dots \times E_1}_{n \text{ fois}} = E_1^n$.

Chapitre 5

APPLICATIONS LINÉAIRES

Objectifs

- * Connaître les définitions d'une application linéaire h d'un \mathbb{K} -espace vectoriel E dans un \mathbb{L} -espace vectoriel F avec $\mathbb{K} \subset \mathbb{L}$, (généralement on prend $\mathbb{K} = \mathbb{L}$) le noyau ($\ker h$) et l'ensemble-image de h ($\text{Im } h$).
pour finir savoir les déterminer comme tels.
- * Connaître les caractérisations de l'injectivité et de la surjectivité d'une application linéaire h à travers $\ker h$ et $\text{Im } h$.
- * Savoir déterminer la matrice d'une application linéaire h d'un \mathbb{K} -espace vectoriel E muni d'une base β dans un \mathbb{L} -espace vectoriel F muni d'une base γ avec $\mathbb{K} \subset \mathbb{L}$ que je noterai $\text{Mat}(h, \gamma, \beta) = M_{\gamma\beta}(f)$.
- * Comprendre les liens entre matrices et applications linéaires.
- * Savoir déterminer la matrice de passage d'une base à une autre d'un \mathbb{K} -espace vectoriel, puisse qu'un \mathbb{K} -espace vectoriel non réduit au vecteur nul admet une infinité de bases. Dès lors le choix d'une base d'un \mathbb{K} -espace vectoriel est infini.
- * Savoir déterminer la matrice B d'une application linéaire dans de nouvelles bases en fonction de sa matrice A dans d'anciennes bases avec $B = QAP$: Q et P sont des matrices de passage d'une ancienne base à une nouvelle base. Aussi déterminer les coordonnées d'un vecteur au biais d'une nouvelle base en fonction des coordonnées du même vecteur au moyen d'une ancienne base. L'usage de la matrice de passage d'une ancienne base à une nouvelle base est de rigueur.

Définition 0 (d'une application linéaire)

Soient (E, \top, \perp) et $(F, *, \heartsuit)$ deux \mathbb{K} -espaces vectoriels et $f : E \rightarrow F$ une application de E dans F .

On dit que f est une **application linéaire** si elle possède les deux propriétés suivantes :

- (i) $\forall x \in E, \forall y \in E, f(x \top y) = f(x) * f(y)$.
- (ii) $\forall x \in E, \forall \alpha \in \mathbb{K}, f(\alpha \perp x) = \alpha \heartsuit f(x)$.

Remarques

- (i) et (ii) $\iff \forall x, y \in E, \forall \alpha, \beta \in \mathbb{K}, f((\alpha \perp x) \top (\beta \perp y)) = f(\alpha \perp x) * f(\beta \perp y) = (\alpha \heartsuit f(x)) * (\beta \heartsuit f(y))$
- (i) et (ii) $\iff \forall x, y \in E, \forall \alpha \in \mathbb{K}, f((\alpha \perp x) \top y) = f(\alpha \perp x) * f(y) = (\alpha \heartsuit f(x)) * f(y)$.

Définition 1 (d'une application linéaire)

Soient $(E, +, \cdot)$ et $(F, +, \cdot)$ deux \mathbb{K} -espaces vectoriels et $f : E \rightarrow F$ une application de E dans F .

On dit que f est une **application linéaire** si elle possède les deux propriétés suivantes :

- (1) $\forall x \in E, \forall y \in E, f(x+y) = f(x) + f(y).$
 (2) $\forall x \in E, \forall \alpha \in \mathbb{K}, f(\alpha x) = \alpha f(x).$

Propriétés

a°) On déduit de (1) en posant $y = x = 0_E \in E, f(0_E) = 0_F \in F.$

On a également $f(-x) = -f(x).$

b°) (1) et (2) $\iff \forall x, y \in E, \forall \alpha, \beta \in \mathbb{K}, f(\alpha x + \beta y) = \alpha f(x) + \beta f(y)$

(1) et (2) $\iff \forall x, y \in E, \forall \alpha \in \mathbb{K}, f(\alpha x + y) = \alpha f(x) + f(y)$

c°) Soit E munit d'une base $\beta = (e_1, e_2, \dots, e_n),$

pour tout $y \in E, \exists! \alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n \in K; y = \sum_{i=1}^n \alpha_i e_i$; où $Y = \begin{bmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \vdots \\ \alpha_n \end{bmatrix}$

est la matrice colonne des coordonnées de $y \in E$ dans de la base

$\beta = (e_1, e_2, \dots, e_n),$ d'où $f(y) = f\left(\sum_{i=1}^n \alpha_i e_i\right) = \sum_{i=1}^n \alpha_i f(e_i)$; donc étant donnée

$\beta = (e_1, e_2, \dots, e_n)$ et $f(\beta) = (f(e_1), f(e_2), \dots, f(e_n))$ qui est l'action de f sur une base de E , on peut déterminer $f(y), \forall y \in E$, dès qu'on connaît

$Y = \begin{bmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \vdots \\ \alpha_n \end{bmatrix}$ qui est la matrice colonne des coordonnées de $y \in E$ dans

de la base $\beta = (e_1, e_2, \dots, e_n).$ On peut dire que f est complètement déterminée par son action sur une base de $E.$

Remarques

1) Une application linéaire f est une application d'un \mathbb{K} -espace vectoriel E dans un \mathbb{K} -espace vectoriel F , telle que l'image d'une combinaison linéaire de vecteurs de E est égale à une combinaison linéaire de l'image des vecteurs de E , avec les mêmes coefficients de combinaison par rapport à un vecteur x de E et son image $f(x).$

2) Une application f entre deux \mathbb{K} -espaces vectoriels E et F est linéaire ssi les expressions images de $f(x)$, pour $x \in E$, sont combinaison linéaire des coordonnées de $x \in E$, moyennant une base de $E.$

Exemple

Cette expression : $a_1 x_1 + \dots + a_n x_n$ est linéaire en x_1, x_2, \dots, x_n , car combinaison linéaire des $x_1; \dots; x_n$; mais pas celle-ci : $a_1 x_1 + \dots + a_n x_n + b.$

Exemples

a) Soit $f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2, (x, y) \longmapsto (2x + y, 0)$ est une application linéaire de \mathbb{R}^2 dans $\mathbb{R}^2.$

b) Soit $g : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2, (x, y) \longmapsto (4, x - 9y)$ n'est pas une application linéaire de \mathbb{R}^2 dans \mathbb{R}^2 , car $g(0, 0) = (4, 0) \neq (0, 0)$ vecteur nul de $\mathbb{R}^2.$

5.1 Image et Noyau

Définition 2 (du noyau d'une application linéaire)

Le **noyau** d'une application linéaire $f : E \rightarrow F$ est l'ensemble des vecteurs $x \in E$ tels que $f(x) = 0_F.$ Il est noté $\text{Ker } f.$ D'où $\text{Ker } f = \{x \in E; f(x) = 0_F\}.$

Exemple

Soit $f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$, $(x, y) \longmapsto (2x + y, 0)$ une application linéaire de \mathbb{R}^2 dans \mathbb{R}^2 .

$$\ker f = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 ; f(x, y) = (0, 0)\}$$

$$f(x, y) = (0, 0) \Rightarrow \begin{cases} 2x + y = 0 \\ 0 = 0 \end{cases} \Rightarrow 2x + y = 0 \Rightarrow y = -2x \Leftrightarrow x = -\frac{1}{2}y$$

$$\ker f = \{(x, -2x) ; x \in \mathbb{R}\} = \langle (1, -2) \rangle \Rightarrow \dim \ker f = 1.$$

Lemme 1. Le noyau de f est un sous-espace vectoriel de E .

Proposition 1. Une application linéaire $f : E \rightarrow F$ est

injective si et seulement si $\text{Ker } f = \{0_E\}$.

Définition 3 (de l'image d'une application linéaire)

L'**image** d'une application linéaire $f : E \rightarrow F$ est l'ensemble image de E par l'application f , c'est-à-dire l'ensemble des vecteurs appartenant à F tels qu'il existe au moins un vecteur $x \in E$ avec $f(x) = y$. On la note $f(E)$ ou encore $\text{Im } f$.

$$\text{Im } f = \{y \in F, \exists x \in E ; f(x) = y\} = \{f(x) ; x \in E\} = f(E).$$

Exemples

1. Soit $f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$, $(x, y) \longmapsto (2x + y, 0)$ une application linéaire de \mathbb{R}^2 dans \mathbb{R}^2 .

$$\begin{aligned} \text{Im } f &= f(\mathbb{R}^2) = \{f(x, y) ; (x, y) \in \mathbb{R}^2\} = \{(2x + y, 0) ; x, y \in \mathbb{R}\} \\ &= \{x(2, 0) + y(1, 0) ; x, y \in \mathbb{R}\} = \langle (2, 0) ; (1, 0) \rangle = \langle (1, 0) \rangle. \end{aligned}$$

2. Soit $g : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$; $(x, y) \mapsto (x - y, x + y, x + 2y)$ une application linéaire de \mathbb{R}^2 dans \mathbb{R}^3 .

$$\text{Im } g = g(\mathbb{R}^2) = \{g(x, y) ; (x, y) \in \mathbb{R}^2\} = \{(x - y, x + y, x + 2y) ; x, y \in \mathbb{R}^2\}$$

$$\text{Im } g = \{x(1, 1, 1) + y(-1, 1, 2) ; x, y \in \mathbb{R}\} = \langle (1, 1, 1) ; (-1, 1, 2) \rangle.$$

Lemme 2 L'image de f est un sous-espace vectoriel de F .

Remarques

1) L'image par une application linéaire $f : E \rightarrow F$ d'un sous-espace vectoriel de E est un sous-espace vectoriel de F .

2) Aussi l'image réciproque de f d'un sous-espace vectoriel de F est un sous-espace vectoriel de E .

Proposition 2

Une application linéaire $f : E \rightarrow F$ est surjective si et seulement si $\text{Im } f = F$.

Définition 4 (d'un isomorphisme)

1) Une application linéaire $f : E \rightarrow F$ est un **isomorphisme** si elle est injective et surjective. On dit alors que E et F sont **isomorphes** par f .

2) Une application linéaire $f : E \rightarrow E$ est un **endomorphisme**. Un endomorphisme qui est bijectif est un **automorphisme**.

3) Deux espaces E et F sont **isomorphes** noté $(E \simeq F)$, s'il existe au moins un isomorphisme f de E sur F .

4) Si $f : E \rightarrow F$ est un isomorphisme, il existe une application inverse f^{-1} ; et f^{-1} est un isomorphisme de F sur E .

5) $f : E \rightarrow F$ est un isomorphisme $\iff \text{Ker } f = \{0_E\}$ et $f(E) = F$.

Théorème 1

Soient E et F deux \mathbb{K} -espaces vectoriels de dimension finie

et une application linéaire $f : E \rightarrow F$. Alors :

(a) f est un isomorphisme entre E et F .

$$\Updownarrow$$

(b) $\dim E = \dim F$ et $\text{Ker } f = \{0_E\}$.

$$\Updownarrow$$

(c) $\dim E = \dim F$ et $\text{Im } f = F$

Lemme 3 Soit (x_1, x_2, \dots, x_n) une suite libre de vecteurs de E et une

application linéaire $f : E \rightarrow F$ injective. Alors $(f(x_1), f(x_2), \dots, f(x_n))$ est une suite libre dans F .

5.1.1 Le théorème noyau-image

Théorème 2

Soient E et F deux \mathbb{K} -espaces vectoriels et une application linéaire $f : E \rightarrow F$. Si la dimension de E est finie, il en est de même des dimensions de $\text{Ker } f$ et de $f(E) = \text{Im } f$ et l'on a : $\dim E = \dim f(E) + \dim \text{Ker } f$.

Lemme 4

Soient E de dimension finie et une application linéaire $f : E \rightarrow F$. Alors $f(E) = \text{Im } f$ est de dimension finie.

Corollaire. Avec les hypothèses du théorème 2 :

$$\text{Ker } f = \{0_E\} \Leftrightarrow \dim \text{Im } f = \dim f(E) = \dim E.$$

5.1.2 Rang d'une application linéaire

Définition 5. Le **rang** d'une application linéaire $f : E \rightarrow F$.

Avec E de dimension finie est par définition la dimension de l'image $f(E) = \text{Im } f$.

Exemples

a°) L'application $f : E \rightarrow F$ qui, à tout vecteur $x \in E$ associe le vecteur nul 0_F de F est linéaire. On a $\text{Im } f = \{0_F\}$ et le rang de f est nul. Le noyau $\text{ker } f = E$.

b°) L'application f de E dans E qui, à tout vecteur $x \in E$, associe le vecteur x est linéaire. $\text{Ker } f = \{0\}$, $f(E) = E$. On l'appelle l'**identité** Id_E .

C'est un isomorphisme de E sur E , ou **automorphisme** de E .

c°) Si E est un espace vectoriel sur le corps \mathbb{K} et $a \neq 0$ un élément de \mathbb{K} , l'application $f : x \mapsto ax$ est une application linéaire de E sur E et c'est un automorphisme (homothétie vectorielle).

d°) Soit F et G deux sous-espaces supplémentaires dans E . A tout vecteur $x \in E$, on peut faire correspondre sa composante $y \in F$ définie par :

$$x = y + z, y \in F, z \in G.$$

L'application $f : x \mapsto y$ est une application linéaire de E dans F qu'on appelle **projection** sur F parallèlement à G . Le noyau de f est G et l'image $f(E)$ est F . Si E est de dimension finie, on vérifie directement le théorème noyau-image sur les dimensions.

e°) Soit $E = \mathbb{C}_n[X]$ le \mathbb{C} -espace vectoriel des polynômes complexes de degré inférieur ou égal à n , avec le polynôme nul. L'application $f : P \mapsto P + P'$, où P' est le polynôme dérivé de P , est une application linéaire de E dans E , on dit encore que c'est un \mathbb{C} -endomorphisme de E .

On vérifie directement que $\text{Ker } f = \{0\}$; il résulte alors du théorème 1 que f est un automorphisme de E donc est surjective.

f°) Une application linéaire de E un \mathbb{K} -espace vectoriel dans \mathbb{K} s'appelle une **forme linéaire** sur E (\mathbb{K} est un espace vectoriel sur lui-même). Soit f une forme linéaire non nulle sur un \mathbb{K} -espace vectoriel E de dimension n . On a $\text{Im } f \neq \{0\}$ et $\text{Im } f \subset \mathbb{K}$; donc l'image de f , espace de dimension 1 appelé **droite vectorielle** (à cause de sa dimension qui est 1) et le noyau de f est de dimension $n - 1$

et on dit que c'est un **hyperplan** de E .

Un \mathbb{K} -espace vectoriel de dimension 2 est appelé **plan vectoriel**.

L'ensemble des formes linéaires de E se note E^* ou $\mathcal{L}_{\mathbb{K}}(E, \mathbb{K})$
c'est un -espace vectoriel appelé le **dual** de E .

5.1.3 Projections et symétries linéaires

Introduction

Soit E est un \mathbb{K} -espace vectoriel et F et G deux sous-espaces vectoriels de E tel que $E = F \oplus G$ alors

$\forall x \in E, x = x_F + x_G$ avec $x_F \in F$ et $x_G \in G$ de façon unique.

La projection P_F sur F parallèlement à G est telle que

$\forall x \in E, P_F(x) = x_F$ et $P_F \circ P_F = P_F$ (on dit que P_F est un projecteur).

Aussi $\forall x \in E, P_F(x) = x_F = x_F + x_G - x_G = (Id_E - P_G)(x)$

La projection P_G sur G parallèlement à F est telle que

$\forall x \in E, P_G(x) = x_G$ et $P_G \circ P_G = P_G$.

Aussi $\forall x \in E, P_G(x) = x_G = x_G + x_F - x_F = (Id_E - P_F)(x)$

La symétrie S_F par rapport à F parallèlement à G est telle que

$\forall x \in E, S_F(x) = x_F - x_G = 2x_F - (x_F + x_G) = (2P_F - Id_E)(x)$

$\forall x \in E, S_F(x) = x_F - x_G = (x_F + x_G) - 2x_G = (Id_E - 2P_G)(x)$.

et $S_F \circ S_F = Id_E$ (on dit que S_F est une involution).

La symétrie S_G par rapport à G parallèlement à F est telle que

$\forall x \in E, S_G(x) = x_G - x_F = (2P_G - Id_E)(x) = (Id_E - 2P_F)(x)$.

et $S_G \circ S_G = Id_E$.

Aussi $S_G = -S_F = 2P_G - Id_E = Id_E - 2P_F$.

Définition

Les P_F et P_G définies supra, sont appelées projections vectorielles

Aussi les S_F et S_G définies supra, sont appelées symétries vectorielles

c'est clair que projection et symétrie vectorielles sont des applications linéaires.

5.2 Opérations sur les applications linéaires

5.2.1 L'espace vectoriel $\mathcal{L}_{\mathbb{K}}(E, F)$

Soit E et F deux \mathbb{K} -espaces vectoriels. Appelons $\mathcal{L}_{\mathbb{K}}(E, F)$ l'ensemble des applications linéaires de E dans F .

Somme de deux applications linéaires

Soit f et g deux applications linéaires de E dans F .

On définit $f + g : E \rightarrow F$ par : $\forall x \in E, (f + g)(x) = f(x) + g(x)$.

On vérifie que $f + g$ est bien une application linéaire de E dans F .

On l'appelle **somme** de f et g .

Produit de $\alpha \in \mathbb{K}$ par $f \in \mathcal{L}_{\mathbb{K}}(E, F)$. Il est défini par : $\forall x \in E, (\alpha f)(x) = \alpha f(x)$.

On vérifie que αf est bien une application linéaire de E dans F .

Proposition 3

Les deux opérations précédentes confèrent à l'ensemble $\mathcal{L}_{\mathbb{K}}(E, F)$ une structure d'espace vectoriel sur \mathbb{K} .

5.2.2 Composition des applications linéaires

Soit E, F et G trois \mathbb{K} -espaces vectoriels. Etant donné une application linéaire $f : E \rightarrow F$ et une application linéaire $g : F \rightarrow G$, on vérifie immédiatement que $g \circ f : E \rightarrow G$ est une application linéaire de E dans G . En particulier, si $E = F = G$, nous définissons une loi de composition interne dans

$\mathcal{L}_{\mathbb{K}}(E, E) = \mathcal{L}_{\mathbb{K}}(E) = \text{End}_{\mathbb{K}}(E)$ avec la loi " \circ " des compositions des applications qu'on appelle la **multiplication**.

Proposition 4. *L'addition et la multiplication " \circ " définies dans $\mathcal{L}_{\mathbb{K}}(E)$ en font un anneau non commutatif.*

Remarque. Le composé de deux isomorphismes est un isomorphisme et donc, en particulier, le composé de deux automorphismes de E est un automorphisme. Si E est de dimension finie, l'ensemble des automorphismes de E constitue le groupe des unités (l'ensemble des éléments inversibles) de l'anneau $\mathcal{L}_{\mathbb{K}}(E)$.

5.3 Espace vectoriel quotient

5.3.1 Construction de l'espace vectoriel quotient de E par F

Soit E un \mathbb{K} -espace vectoriel et F un sous-espace vectoriel de E .

Soit \mathcal{R} une relation définie dans E par : $x, y \in E, x\mathcal{R}y \iff x - y \in F$;

on montre que \mathcal{R} est une relation d'équivalence et compatible avec l'addition dans E , c'est-à-dire : $x\mathcal{R}y$ et $z\mathcal{R}t \Rightarrow (x + z)\mathcal{R}(y + t)$. Ce qui permet de définir une opération sur l'ensemble $E/F = E/\mathcal{R}$ par : $\bar{x} + \bar{y} = \overline{x + y}$.

où \bar{x} est la classe de x modulo F . cette opération donne à E/F une structure de groupe abélien et l'application $\varphi : E \rightarrow E/F$, telle que $\varphi(x) = \bar{x}$ est un morphisme de groupe, qu'on appelle le morphisme canonique de E sur E/F . Outre leur structure de groupe, E et F ont maintenant une structure d'espace vectoriel et nous allons compléter ces résultats en définissant sur E/F une structure d'espace vectoriel.

Proposition 5. *La relation \mathcal{R} est compatible avec la multiplication par un scalaire, c'est-à-dire : $\forall \alpha \in \mathbb{K}, x\mathcal{R}y \Rightarrow \alpha x \mathcal{R} \alpha y$.*

De là on définit pour $\alpha \in \mathbb{K}$ et $\bar{x} \in E/F$, $\alpha \bar{x} = \overline{\alpha x}$, (*)
ce qui est une opération externe dans E/F .

Proposition 6. *Le groupe quotient E/F muni de l'opération externe (*) devient un espace vectoriel sur \mathbb{K} et l'application $\varphi : E \rightarrow E/F$ est linéaire et surjective.*

Remarque

Le noyau et l'image de φ en tant qu'application linéaire sont le noyau et l'image de φ en tant que morphisme de groupe abélien. En particulier, on a $\text{Ker } \varphi = F$.

Définition 6. L'espace vectoriel obtenu à partir de E et de son sous-espace F par la construction précédente s'appelle l'**espace vectoriel quotient** de E par F et se note E/F . L'application linéaire surjective $\varphi : E \rightarrow E/F$ s'appelle l'application linéaire **canonique** de E sur l'espace vectoriel quotient E/F .

En particulier si $F = \{0\}$, $E/F = E$ et si $F = E$, $E/F = \{\bar{0}\}$.

La construction de l'espace vectoriel quotient de E par F est valable en dimension finie ou non. Si E est de dimension finie, E/F est aussi de dimension finie.

5.3.2 Problème

La construction de l'espace vectoriel quotient de E par F donne une solution au problème suivant : étant donné un \mathbb{K} -espace vectoriel E et un sous-espace vectoriel F , trouver un espace vectoriel E' sur \mathbb{K} et une application linéaire surjective $f : E \rightarrow E'$ dont le noyau est F . Lorsque E est de dimension finie, on obtient aisément une solution du problème de la façon suivante : prenant un sous-espace supplémentaire G de F dans E ; la projection $p : E \rightarrow G$ de E sur G parallèlement à F est une application linéaire surjective de noyau F .

Théorème 3

Soit $f : E \rightarrow E'$ une application linéaire surjective de l'espace vectoriel E sur l'espace vectoriel E' et F son noyau. L'espace E' est isomorphe à l'espace quotient E/F par un isomorphisme σ tel que $f = \sigma \circ \varphi$; où φ est l'application linéaire canonique de E sur E/F . Suivant le diagramme suivant

$$\begin{array}{ccc} E & \xrightarrow{\varphi} & E/F \\ & \searrow f & \downarrow \sigma \\ & & E' \end{array}$$

Corollaire 1 du théorème 3

Toutes les solutions du problème sont des espaces vectoriels isomorphes entre eux.

Corollaire 2 du théorème 3

Si E est de dimension finie et F un sous-espace vectoriel de E , on a : $\dim E/F = \dim E - \dim F$, et $\dim E/F$ s'appelle la **codimension** de F dans E , et se note $\text{co dim } F$, ainsi $\text{co dim } F = \dim E/F$.

Définition

Soit f une application linéaire de $E \rightarrow F$ deux \mathbb{K} -espaces vectoriels de dimension finie chacun. On appelle conoyau de f , et on le note $\text{Co ker } f$ l'espace quotient $F/\text{Im } f$. De là si f est surjective alors $\text{Co ker } f = \{\bar{0}_F\}$.

5.4 Matrice d'une application linéaire $f : E \rightarrow F$

Relativement à des bases données de E et de F .

Soit E et F deux espaces vectoriels de dimensions respectives p et q sur \mathbb{K} , $\beta = (e_1, \dots, e_p)$ une base de E , $\beta' = (t_1, \dots, t_q)$ une base de F et $f : E \rightarrow F$ une application linéaire de E dans F ; f est complètement déterminée par son action sur la base β , c'est-à-dire que f est entièrement définie par les

$$f(e_j) = \sum_{i=1}^q a_{ij} t_i, \quad a_{ij} \in \mathbb{K}, \quad j = 1, 2, \dots, p. \text{ Ainsi les coordonnées de } f(e_j)$$

dans la base $\beta' = (t_1, \dots, t_q)$ constitue la matrice colonne suivante :

$$\begin{bmatrix} a_{1j} \\ a_{2j} \\ \vdots \\ a_{qj} \end{bmatrix}.$$

Proposition

Etant donné $f : E \rightarrow F$ une application linéaire de E dans F des \mathbb{K} -espaces vectoriels avec E de dimension finie, muni d'une base $\beta = (e_1, \dots, e_p)$, alors $\text{Im } f = \langle f(e_i), 1 \leq i \leq p \rangle$.

Définition On appelle **matrice de l'application linéaire $f : E \rightarrow F$** ,

relativement aux bases β et β' , avec $\beta = (e_1, \dots, e_p)$ et $\beta' = (t_1, \dots, t_q)$
 (on sait que f est entièrement définie par les $f(e_j) \in F$, pour tout $j \in [1, p]$),
 est la matrice de type (q, p) :

$$M_{\beta'\beta}(f) = \begin{pmatrix} f(e_1) & f(e_2) & \dots & f(e_p) \\ a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1p} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2p} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{q1} & a_{q2} & \dots & a_{qp} \end{pmatrix} \begin{matrix} t_1 \\ t_2 \\ \vdots \\ t_q \end{matrix}$$

dont la $j^{\text{ème}}$ colonne ($j = 1, 2, \dots, p$) est constituée par les coordonnées $\begin{bmatrix} a_{1j} \\ a_{2j} \\ \vdots \\ a_{qj} \end{bmatrix}$

du vecteur $f(e_j)$ par rapport à la base β' . C'est pourquoi nous avons écrit $f(e_1)$ au dessus de la première colonne, ..., $f(e_p)$ au-dessus de la $p^{\text{ème}}$ colonne.

Lorsque $E = F$, l'application linéaire f est un endomorphisme de E et nous pouvons choisir $\beta = \beta'$. La matrice $M_{\beta\beta}(f)$ s'appelle la matrice de l'endomorphisme relativement à la base β de E .

Remarque

De façon symbolique, on peut écrire :

$$(f(e_1), f(e_2), \dots, f(e_p)) = (t_1, \dots, t_q) M_{\beta'\beta}(f)$$

soit $f(\beta) = \beta' M_{\beta'\beta}(f)$, tout ceci est **symbolique**.

Exemple : Soit f un endomorphisme de \mathbb{R}^3 défini par :

$$(x, y, z) \mapsto (2x - y - z; x - z; \lambda x - y - 2z), \text{ où } \lambda \in \mathbb{R}.$$

Soit $\beta = (e_1 = (1, 0, 0); e_2 = (0, 1, 0); e_3 = (0, 0, 1))$ la base canonique de \mathbb{R}^3 .

Pour trouver la matrice de f relativement à la base β associé à l'ensemble de départ et à l'ensemble d'arrivée, il faut calculer :

$$f(e_1) = (2; 1; \lambda); f(e_2) = (-1; 0; -1); f(e_3) = (-1; -1; -2).$$

$$\text{Et la matrice en question est } M = \begin{bmatrix} 2 & -1 & -1 \\ 1 & 0 & -1 \\ \lambda & -1 & -2 \end{bmatrix}.$$

Proposition

Soient E, F, G trois \mathbb{K} -espaces vectoriels de dimension finie munis de bases respectives β, β', γ et $f \in \mathcal{L}_{\mathbb{K}}(E, F)$ et $g \in \mathcal{L}_{\mathbb{K}}(F, G)$ alors $g \circ f \in \mathcal{L}_{\mathbb{K}}(E, G)$
 $M_{\gamma\beta}(g \circ f) = M_{\gamma\beta'}(g) \times M_{\beta'\beta}(f)$.

Proposition

Soient E et F deux \mathbb{K} -espaces vectoriels de dimensions respectives p et q ,

Munis respectivement des bases $\beta = (e_1, \dots, e_p)$ et $\beta' = (t_1, \dots, t_q)$

L'application de $\mathcal{L}_{\mathbb{K}}(E, F)$ dans $M_{qp}(\mathbb{K})$ définie par $f \mapsto M_{\beta'\beta}(f)$ est un isomorphisme de l'espace vectoriel des applications linéaires de E dans F sur l'espace vectoriel des matrices de type (q, p) sur \mathbb{K} .

Dem :

Moyennant $\beta = (e_1, \dots, e_p)$ et $\beta' = (t_1, \dots, t_q)$ respectivement sur E et F deux \mathbb{K} -espaces vectoriels de dimensions respectives p et q , il y a isomorphisme entre E et \mathbb{K}^p et isomorphisme entre F et \mathbb{K}^q .

$$\text{Ainsi } \forall x \in E, \exists ! x^\beta = \begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_p \end{bmatrix} \in \mathbb{K}^p \text{ matrice colonne qui représente}$$

les coordonnées du vecteur $x \in E$ dans la base β de sorte que

$$\text{symboliquement : } x = \beta \times x^\beta = \sum_{i=1}^p x_i e_i.$$

Il sera de même de F c'est-à-dire :

$$\forall y \in F, \exists ! y^{\beta'} = \begin{bmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_q \end{bmatrix} \in \mathbb{K}^q \text{ matrice colonne qui représente}$$

les coordonnées du vecteur $y \in F$ dans la base β' de sorte que

$$\text{symboliquement : } y = \beta' \times y^{\beta'} = \sum_{i=1}^q y_i t_i.$$

De là l'application linéaire $f : (E, \beta) \longrightarrow (F, \beta')$ peut être définie comme suit :

a) $f(x) = y$ on n'a pas utilisé les bases en présence.

b) $f(x^\beta) = y^{\beta'}$ on a utilisé les bases en présence, ce qui permettra de déterminer f à la donnée de $M_{\beta'\beta}(f)$ en posant : $f(x^\beta) = M_{\beta'\beta}(f) \times x^\beta = (f(x))^{\beta'} = y^{\beta'}$.

Avec les données de f , β et β' on a naturellement $M_{\beta'\beta}(f)$.

Corollaire *L'espace vectoriel $\mathcal{L}_{\mathbb{K}}(E, F)$ est de dimension finie $n = pq$.*

Remarques

1°) Les espaces vectoriels $\mathcal{L}_{\mathbb{K}}(E, F)$ et $M_{qp}(\mathbb{K})$ sont isomorphes mais cet isomorphisme dépend des bases β et β' choisies dans E et F .

On devrait le noter : $M_{\beta'\beta} : \mathcal{L}_{\mathbb{K}}(E, F) \rightarrow M_{qp}(\mathbb{K})$.

Il est déterminé par le choix de ces bases.

2°) Il résulte de la proposition 1 qu'une matrice $q \times p$ quelconque dont les coefficients appartiennent à un corps \mathbb{K} peut toujours être considérée comme la matrice d'une application linéaire d'un espace vectoriel E de dimension p sur \mathbb{K} dans un espace vectoriel F de dimension q sur \mathbb{K} ,

par exemple de $E = \mathbb{K}^p$ dans $F = \mathbb{K}^q$.

5.4.1 Utilisation du rang d'une matrice associée à une application linéaire pour trouver son noyau et son ensemble image.

Soit la matrice $A = \begin{bmatrix} 0 & 3 & 2 & -1 \\ -2 & 5 & 1 & 6 \\ 1 & -3 & 4 & 2 \end{bmatrix}$ la matrice associée à une application

linéaire f au moyen d'une base de l'espace de départ et une autre base de l'espace d'arrivée.

Dans ce qui suit, nous allons échelonner suivant les colonnes la matrice A .

$$\begin{array}{cccc} -C_4 & C_2+3C_4 & C_3+2C_4 & C_1 \\ \left[\begin{array}{cccc} 0 & 3 & 2 & -1 \\ -2 & 5 & 1 & 6 \\ 1 & -3 & 4 & 2 \\ \hline 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right] & \approx & \left[\begin{array}{cccc} 1 & 0 & 0 & 0 \\ -6 & 23 & 13 & -2 \\ -2 & 3 & 8 & 1 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & 3 & 2 & 0 \end{array} \right] \\ C_1-3C_4 & -\frac{1}{2}C_4 & C_3+\frac{13}{2}C_4 & C_2+\frac{23}{2}C_4 \end{array}$$

$$\begin{array}{c}
 \approx \\
 \left[\begin{array}{cccc}
 1 & 0 & 0 & 0 \\
 0 & 1 & 0 & 0 \\
 -5 & -\frac{1}{2} & \frac{29}{2} & \frac{29}{2} \\
 \hline
 -3 & -\frac{1}{2} & \frac{13}{2} & \frac{23}{2} \\
 0 & 0 & 0 & 1 \\
 0 & 0 & 1 & 0 \\
 -1 & 0 & 2 & 3
 \end{array} \right] \\
 \text{C}_4\text{-C}_3 \\
 \approx \\
 \left[\begin{array}{cccc}
 1 & 0 & 0 & 0 \\
 0 & 1 & 0 & 0 \\
 -5 & -\frac{1}{2} & \frac{29}{2} & 0 \\
 \hline
 -3 & -\frac{1}{2} & \frac{13}{2} & 5 \\
 0 & 0 & 0 & 1 \\
 0 & 0 & 1 & -1 \\
 -1 & 0 & 2 & 1
 \end{array} \right]
 \end{array}$$

Evaluons :

$$A_2 \times \begin{bmatrix} -3 & -\frac{1}{2} & \frac{13}{2} & 5 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \\ -1 & 0 & 2 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 3 & 2 & -1 \\ -2 & 5 & 1 & 6 \\ 1 & -3 & 4 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -3 & -\frac{1}{2} & \frac{13}{2} & 5 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \\ -1 & 0 & 2 & 1 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ -5 & -\frac{1}{2} & \frac{29}{2} & 0 \end{bmatrix}$$

Ainsi nous pouvons conclure que $\text{rang}(A) = \text{rang}(f) = 3 = \dim \text{Im } f$

Et $\text{Im } f = \langle (1, 0, -5); (0, 1, -\frac{1}{2}); (0, 0, \frac{29}{2}) \rangle$ et $\ker f = \langle (5, 1, -1, 1) \rangle$.

Ce qui est normal puisque la matrice A étant de type $(3, 4)$ alors

$\dim E = 4$ et $\dim F = 3$ avec $f : E \rightarrow F$ application linéaire.

5.4.2 Changement de bases

Matrice de passage

Soient $\beta = (e_1, \dots, e_n)$, $\beta' = (e'_1, \dots, e'_n)$ deux bases de E .

On voudrait avoir la matrice de : $\text{Id}_E : (E, \beta') \rightarrow (E, \beta)$ telle que $x \mapsto x$.

(E, β) signifie que le \mathbb{K} -espace vectoriel de dimension finie E , est muni de la base β .

On sait que $\forall 1 \leq j \leq n, \exists! (\alpha_{1j}, \alpha_{2j}, \dots, \alpha_{nj}) \in \mathbb{K}^n; e'_j = \sum_{i=1}^n \alpha_{ij} e_i$.

Ainsi d'après ce qui précède en matière de la matrice d'une

application linéaire relativement à des bases sur les espaces

de départ et d'arrivée, on a :

$$M_{\beta\beta'}(\text{Id}_E) = \begin{pmatrix} e'_1 & e'_2 & \dots & e'_n \\ \alpha_{11} & \alpha_{12} & \dots & \alpha_{1n} \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} & \dots & \alpha_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \alpha_{n1} & \alpha_{n2} & \dots & \alpha_{nn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} e_1 \\ e_2 \\ \vdots \\ e_n \end{pmatrix}$$

On appelle matrice de **passage** de la base β à la base β' ,

la matrice : $\text{Mat}_{\beta\beta'}(\text{Id}_E) = P = (\alpha_{ij})_{1 \leq i, j \leq n} = P_{\beta\beta'}$.

Comme l'application Id_E est bijective, alors $P = P_{\beta\beta'}$ est **inversible**.

En pratique donc,

la matrice $P = (\alpha_{ij})_{1 \leq i, j \leq n} = P_{\beta\beta'}$ est telle que la j -ième colonne

est formée par les coordonnées du vecteur e'_j dans la base $\beta = (e_1, \dots, e_n)$.

Et $P^{-1} = P_{\beta'\beta}$ est la matrice de passage de la base β' à la base β .

Formule de changement de bases

Soit $f \in \mathcal{L}_{\mathbb{K}}(E, F)$ et $(E, \beta), (F, \gamma)$

Soit $(E, \beta') \xrightarrow{\text{Id}_E} (E, \beta) \xrightarrow{f} (F, \gamma) \xrightarrow{\text{Id}_F} (F, \gamma')$

On a bien $f = \text{Id}_F \circ f \circ \text{Id}_E \Rightarrow$

$\text{Mat}_{\gamma'\beta'}(f) = \text{Mat}_{\gamma'\beta'}(\text{Id}_F \circ f \circ \text{Id}_E) = \text{Mat}_{\gamma'\gamma}(\text{Id}_F) \times \text{Mat}_{\gamma\beta}(f) \times \text{Mat}_{\beta\beta'}(\text{Id}_E)$.

Soit maintenant $u \in \mathcal{L}_{\mathbb{K}}(E, E) \Leftrightarrow u \in \text{End}_{\mathbb{K}}(E)$, on a

$(E, \beta') \xrightarrow{\text{Id}_E} (E, \beta) \xrightarrow{u} (E, \beta) \xrightarrow{\text{Id}_E} (E, \beta')$, et $u = \text{Id}_E \circ u \circ \text{Id}_E \Rightarrow$

$\text{Mat}_{\beta'\beta'}(u) = \text{Mat}_{\beta'\beta'}(\text{Id}_E \circ u \circ \text{Id}_E) = \text{Mat}_{\beta'\beta}(\text{Id}_E) \times \text{Mat}_{\beta\beta}(u) \times \text{Mat}_{\beta\beta'}(\text{Id}_E)$.

Comme (Id_E) est une bijection de E dans E , alors $\text{Mat}_{\beta'\beta}(\text{Id}_E)$ est inversible et

$Mat_{\beta'\beta}(Id_E) = (Mat_{\beta\beta'}(Id_E))^{-1}$. De là on a la proposition suivante :

Proposition

Soient $\beta = (e_1, \dots, e_n)$, $\beta' = (e'_1, \dots, e'_n)$ deux bases de E , $u \in \mathcal{L}_{\mathbb{K}}(E)$,

$P = P_{\beta\beta'} = Mat_{\beta\beta'}(Id_E)$, $A = Mat(u, \beta) = Mat_{\beta\beta}(u)$,

$A' = Mat(u, \beta') = Mat_{\beta'\beta'}(u)$

$= Mat_{\beta'\beta'}(Id_E \circ u \circ Id_E) = Mat_{\beta'\beta}(Id_E) \times Mat_{\beta\beta}(u) \times Mat_{\beta\beta'}(Id_E)$.,

or $Mat_{\beta'\beta}(Id_E) = (Mat_{\beta\beta'}(Id_E))^{-1}$, donc :

$A' = P^{-1}AP \Leftrightarrow A = PA'P^{-1}$.

Proposition

Soit u un endomorphisme d'un \mathbb{K} -espace vectoriel de dimension finie E ,

muni d'une base β et $A = Mat(u, \beta) = Mat_{\beta\beta}(u)$.

u est un automorphisme de E ssi $\det A \neq 0$ et $A^{-1} = Mat(u^{-1}, \beta) = Mat_{\beta\beta}(u^{-1})$.

Exercice

Montrer que les matrices $A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$ et $B = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$ sont semblables.

Proposition de solution

La solution revient à trouver quatre vecteurs $v_1, v_2, v_3, v_4 \in \mathbb{R}^4$ tel que :

$Av_1 = 0$, $Av_2 = 0$, $Av_3 = v_2$, $Av_4 = v_2 + v_3$ et $\det(v_1, v_2, v_3, v_4) \neq 0$.

Dès lors ;

$Av_1 = 0$, je propose dans β la base canonique de \mathbb{R}^4 , $v_1 = (0, 0, 0, 1)$

$Av_2 = 0$, je propose dans β la base canonique de \mathbb{R}^4 , $v_2 = (1, 0, 0, 0)$

$Av_3 = v_2$, je propose dans β la base canonique de \mathbb{R}^4 , $v_3 = (0, 1, 0, 0)$

$Av_4 = v_2 + v_3$, je propose dans β la base canonique de \mathbb{R}^4 , $v_4 = (0, 0, 1, 0)$.

Soit $\gamma = \{v_1, v_2, v_3, v_4\}$, on a $\det \gamma = \begin{vmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{vmatrix} = -1 \neq 0$.

De là soit $P = P_{pass(\beta \text{ à } \gamma)} = P_{\beta\gamma} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$, alors on a :

$B = P^{-1}AP \Leftrightarrow A$ et B sont semblables.

Remarque :

Soit $x \in E$, soient $\beta = (e_1, \dots, e_n)$, $\beta' = (e'_1, \dots, e'_n)$ deux bases de E ,

symboliquement on notera :

$x = \beta \times x^\beta$ et $\beta' = \beta P_{\beta\beta'}$ ici β est considérée comme une matrice uniligne :

$\begin{pmatrix} e_1 & e_2 & \cdots & e_n \end{pmatrix}$ et β' est considérée comme une matrice uniligne :
 $\begin{pmatrix} e'_1 & e'_2 & \cdots & e'_n \end{pmatrix}$.

Aussi on a : $(e'_i)_\beta = P_{\beta\beta'}(e_i)_\beta$, $\forall i \in \{1, 2, \dots, n\}$, $(e'_i)_\beta$ et $(e_i)_\beta$ sont les coordonnées de e'_i et e_i dans la base $\beta = (e_1, \dots, e_n)$.

Proposition

Soient $\beta = (e_1, \dots, e_n)$, $\beta' = (e'_1, \dots, e'_n)$ deux bases de E .

Soit $x \in E$, et $x^\beta = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$ = les coordonnées de x dans la base β .

et $x^{\beta'} = \begin{pmatrix} x'_1 \\ x'_2 \\ \vdots \\ x'_n \end{pmatrix}$ = les coordonnées de x dans la base β'

alors $x^\beta = (P_{\beta\beta'} = P) \times x^{\beta'} \Leftrightarrow x^{\beta'} = (P_{\beta'\beta} = P^{-1}) \times x^\beta$.

Remarque

Soient deux bases $\beta = (e_1, e_2, \dots, e_n)$ et $\beta' = (t_1, t_2, \dots, t_n)$ d'un \mathbb{K} -espace vectoriel E de dimension n .

$P_{\beta\beta'} = \begin{pmatrix} t_1^\beta & t_2^\beta & \dots & t_n^\beta \end{pmatrix}$ où t_j^β constituent la $j^{\text{ième}}$ colonne avec les coordonnées de t_j dans la base β . $\forall 1 \leq j \leq n$,

et $\det(P_{\beta\beta'}) = \det_\beta(\beta') = \begin{vmatrix} t_1^\beta & t_2^\beta & \dots & t_n^\beta \end{vmatrix}$. Je rappelle que $P_{\beta\beta'}$ est la matrice de passage de la base β à la base β' .

Proposition

Soit $S = (V_1, V_2, \dots, V_n)$ une suite de n vecteurs d'un \mathbb{K} -espace vectoriel E de dimension n . Soit deux bases β, β' de E , alors :

$$\begin{aligned} \det_\beta(S) &= \begin{vmatrix} V_1^\beta & V_2^\beta & \dots & V_n^\beta \end{vmatrix} = \det_\beta(\beta') \times \det_{\beta'}(S) \\ &= \begin{vmatrix} t_1^\beta & t_2^\beta & \dots & t_n^\beta \end{vmatrix} \times \begin{vmatrix} V_1^{\beta'} & V_2^{\beta'} & \dots & V_n^{\beta'} \end{vmatrix} \end{aligned}$$

$$\det_\beta(S) = \det(P_{\beta\beta'}) \times \det_{\beta'}(S).$$

5.4.3 Déterminant et trace d'un endomorphisme sur un \mathbb{K} -espace vectoriel E de dimension finie

Proposition

Soit un endomorphisme f d'un \mathbb{K} -espace vectoriel E de dimension finie,

Moyennant une base β sur E qui existe en pareille situation, on peut définir :

$$\det(f) = \det(M_{\beta\beta}(f)) = \det(M_{\beta'\beta'}(f)) \text{ et}$$

$$\text{Trace}(f) = \text{Trace}(M_{\beta\beta}(f)) = \text{Trace}(M_{\beta'\beta'}(f)).$$

Pour Toute autre base β' de E .

Dem :

On sait que $M_{\beta'\beta'}(f) = P_{\beta\beta'}^{-1} \times M_{\beta\beta}(f) \times P_{\beta\beta'}$ et que :

$$\begin{aligned} \det(M_{\beta'\beta'}(f)) &= \det(P_{\beta\beta'}^{-1} \times M_{\beta\beta}(f) \times P_{\beta\beta'}) \\ &= \det(P_{\beta\beta'}^{-1}) \times \det(M_{\beta\beta}(f)) \times \det(P_{\beta\beta'}) \\ &= (\det(P_{\beta\beta'}))^{-1} \times \det(M_{\beta\beta}(f)) \times \det(P_{\beta\beta'}) \\ &= (\det(P_{\beta\beta'}))^{-1} \times \det(P_{\beta\beta'}) \times \det(M_{\beta\beta}(f)) \text{ (car } \mathbb{K} \text{ est un corps commutatif)} \\ &= \det(M_{\beta\beta}(f)). \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{Aussi } \text{Trace}(M_{\beta'\beta'}(f)) &= \text{Trace}(P_{\beta\beta'}^{-1} \times M_{\beta\beta}(f) \times P_{\beta\beta'}) \\ &= \text{Trace}(P_{\beta\beta'}^{-1} \times P_{\beta\beta'} \times M_{\beta\beta}(f)) = \text{Trace}(M_{\beta\beta}(f)). \end{aligned}$$

Exercice

Soit f un endomorphisme de \mathbb{R}^3 de matrice A dans la base canonique $\beta_0 = (e_1, e_2, e_3)$

définie par : $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & -3 \\ 1 & 4 & -5 \\ 0 & 2 & -2 \end{bmatrix}$.

Soit $X_{\beta_0} = \begin{bmatrix} 2 \\ -3 \\ -4 \end{bmatrix}$ les coordonnées d'un vecteur x_1 dans la base β_0 .

1. Calculer $f(x_1)$ dans la base β_0 .
2. Soient $u_1 = e_1 + e_2 + e_3$, $u_2 = e_1 + 3e_2 + 2e_3$, $u_3 = e_1 + 2e_2 + e_3$.
 - a) Montrer que $\beta = (u_1, u_2, u_3)$ est une base de \mathbb{R}^3 .
 - b) Déterminer la matrice de passage P de la base β_0 à la base β .
 - c) Déterminer la matrice de passage P' de la base β à la base β_0 .
 - d) Donner les coordonnées X_β du vecteur x_1 dans la base β de deux façons.
 - e) Déterminer la matrice D de f dans la base β de deux façons.
 - f) Calculer $f(x_1)$ dans la base β , de deux façons.
 - g) Donner l'expression de A à partir de celle de D ci-dessus.
Donner A^2 , A^3 , A^4 en fonction de P , D et P^{-1} .
Déterminer explicitement A^n avec $n \in \mathbb{N}$.

Proposé de solution

1. $(f(x_1))_{\beta_0} = \text{Mat}(f, \beta_0, \beta_0) X_{\beta_0} = A \begin{bmatrix} 2 \\ -3 \\ -4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 8 \\ 10 \\ 2 \end{bmatrix}$.

2.

a) Avec $\beta = (u_1, u_2, u_3) \subset \mathbb{R}^3$ et $\text{Card}(\beta) = 3 = \dim \mathbb{R}^3$,

on va calculer $\det(\beta) = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & 2 \\ 1 & 2 & 1 \end{vmatrix} = -1 \neq 0$, donc β est une base de \mathbb{R}^3 .

b) La matrice de passage P de la base β_0 à la base β est :

$$P = P_{\beta_0\beta} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & 2 \\ 1 & 2 & 1 \end{bmatrix}$$

c) La matrice de passage P' de la base β à la base β_0 est :

$$P' = P_{\beta\beta_0} = (P_{\beta_0\beta})^{-1} = P^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & -2 \end{pmatrix}.$$

d) On a $X_\beta = P_{\beta\beta_0} \times X_{\beta_0} = \begin{bmatrix} 1 \\ -6 \\ 7 \end{bmatrix}$ d'une façon

l'autre façon serait par exemple de noter que

$$X_{\beta_0} = \begin{bmatrix} 2 \\ -3 \\ -4 \end{bmatrix} = au_1 + bu_2 + cu_3$$

$$X_{\beta_0} = a \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} + b \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \\ 2 \end{bmatrix} + c \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix} \text{ et en résolvant le}$$

système on trouve bien $a = 1$, $b = -6$, $c = 7$.

e) On a : $D = P^{-1}AP = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$ d'une façon

l'autre façon est de calculer et résoudre successivement :

$$(S_1) \Leftrightarrow (f(u_1))_{\beta_0} = au_1 + bu_2 + cu_3 = a \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} + b \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \\ 2 \end{bmatrix} + c \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix},$$

$$(S_2) \Leftrightarrow (f(u_2))_{\beta_0} = a'u_1 + b'u_2 + c'u_3 = a \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} + b \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \\ 2 \end{bmatrix} + c \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix},$$

$$(S_3) \Leftrightarrow (f(u_3))_{\beta_0} = a''u_1 + b''u_2 + c''u_3 = a \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} + b \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \\ 2 \end{bmatrix} + c \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix},$$

je rappelle que les (S_i) pour $i = 1, 2, 3$, sont des systèmes à résoudre.

$$\text{Et alors } D = \begin{pmatrix} a & a' & a'' \\ b & b' & b'' \\ c & c' & c'' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

$$\text{f) } (f(x_1))_{\beta} = \text{Mat}(f, \beta, \beta) X_{\beta} = DX_{\beta} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ -6 \\ 7 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ -6 \\ 14 \end{bmatrix}.$$

Pour la deuxième façon, on rappelle qu'à la question 1. on a calculer

$f(x_1)$ dans la base β_0 , de là on fait la mise en équation suivante :

$$(f(x_1))_{\beta_0} = \begin{bmatrix} 8 \\ 10 \\ 2 \end{bmatrix} = au_1 + bu_2 + cu_3 = a \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} + b \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \\ 2 \end{bmatrix} + c \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix}$$

en résolvant le système ci-dessus, on trouve bien $a = 0, b = -6, c = 14$.

$$\text{g) On a } D = P^{-1}AP \Leftrightarrow A = PDP^{-1} \Rightarrow \begin{cases} A^2 = PD^2P^{-1} \\ A^3 = PD^3P^{-1} \\ A^4 = PD^4P^{-1} \\ A^n = PD^nP^{-1}, n \in \mathbb{N} \end{cases}.$$

Il faut savoir que

$$D = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \Rightarrow D^n = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1^n & 0 \\ 0 & 0 & 2^n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2^n \end{pmatrix}, n \in \mathbb{N}.$$

$$\text{Ainsi : } n \in \mathbb{N}, A^n = PD^nP^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & 2 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2^n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & -2 \end{pmatrix}$$

$$A^n = \begin{pmatrix} 2^n - 1 & 2^n & 1 - 2^{n+1} \\ 2^{n+1} - 3 & 2^{n+1} & 3 - 2^{n+2} \\ 2^n - 2 & 2^n & 2 - 2^{n+1} \end{pmatrix}.$$

Première partie
TRAVAUX DIRIGES

2021-2022
T.D.1
Calcul matriciel

Exercice 0

Vous répondrez par Vrai ou faux avec justification

- a) Si le produit matriciel $AB = 0$, alors $A = 0$ ou $B = 0$.
b) Si A et B sont deux matrices carrées de même ordre inversibles,
alors leur somme est inversible, avec

$$(A + B)^{-1} = A^{-1} + B^{-1}.$$

- c) Si A est une matrice inversible, sa transposée admet comme
inverse la transposée de A^{-1} .
d) Si $AB = I$, alors A et B sont deux matrices inverses l'une de l'autre.
e) Deux matrices distinctes ont deux déterminants distincts.
f) Pour tout entier n et toute matrice carrée A : $\det A^n = (\det A)^n$.

Exercice 1

Soient $A = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 4 & 1 & 0 \\ -2 & 5 & 4 \end{bmatrix}$; $B = \begin{bmatrix} 4 & 2 & 1 \\ 6 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & -1 \\ 2 & 1 & 3 \end{bmatrix}$; $C = \begin{bmatrix} 4 & 3 & 1 & 2 \\ 6 & 0 & 2 & 3 \\ 4 & -21 & 5 & 3 \end{bmatrix}$.

1°) Calculer si cela est possible $A - B$; $3C$; A^2 ; AB ; BC ; BA .

2°) Échelonner les matrices A , B , C , déterminer le rang de chacune, ensuite les échelonner à ligne canonique ou à colonne canonique, et enfin les échelonner réduire.

Exercice 2

Montrer que les matrices suivantes : $A = \begin{bmatrix} 5 & 3 & 1 \\ 2 & 2 & 0 \\ 4 & 0 & 2 \\ 7 & 1 & 3 \end{bmatrix}$ et $R = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$

sont équivalentes en déterminant une matrice P carrée d'ordre 4 inversible et une matrice Q carrée d'ordre 3 inversible telles que : $PAQ = R$

(Indication : On pourra s'aider de ce qui a été fait au cours pour déterminer le rang d'une certaine matrice donnée).

Il faudra prouver l'inversibilité de P et Q à l'aide des opérations élémentaires sur les lignes ou les colonnes des matrices mises en jeu.

Exercice 3

Les matrices : $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 \\ -2 & -2 & 2 \\ -3 & -3 & 3 \end{bmatrix}$

et $B = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$ sont-elles semblables ?

Exercice 4

Montrer que la matrice

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 5 & 3 \\ -1 & 1 & 3 \\ 3 & -2 & -8 \end{bmatrix}$$

est un diviseur de zéro sur $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ et
trouver une matrice B non nulle telle que $AB = 0$.

Exercice 5

Soit $M \in \mathcal{M}_4(\mathbb{R})$:

$$M = \begin{bmatrix} a & -b & -c & -d \\ b & a & d & -c \\ c & -d & a & b \\ d & c & -b & a \end{bmatrix}.$$

- 1) Donner la transposée $({}^tM)$, de la matrice M .
- 2) Calculer $M \cdot ({}^tM)$ et $({}^tM) \cdot M$, ces deux matrices commutent-elles ?
- 3) Déterminer le déterminant de M en sachant qu'il est positif.
- 4) A quelle condition M est-elle inversible ? Donner sa matrice inverse.

Exercice 6

On considère la matrice

$$A = \begin{bmatrix} -1 & 1 & 1 \\ -1 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \end{bmatrix}$$

1. Calculer $(A + I)^3$ où I désigne la matrice unité de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$.
2. En déduire :
 - a) L'expression de A^n où $n \in \mathbb{N}^*$.
 - b) Que A est inversible. Donner son inverse.
 - c) Une extension de A^n où $n \in \mathbb{Z}^*$.

Exercice 7

- I) Les nombres 204, 527 et 255 étant divisibles par 17,
démontrer que le déterminant suivant l'est aussi sans calculer Δ .

$$\Delta = \begin{vmatrix} 2 & 0 & 4 \\ 5 & 2 & 7 \\ 2 & 5 & 5 \end{vmatrix}$$

- II) Calculer les déterminants suivants :

$$\Delta_0 = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \\ -1 & -1 & 0 \end{vmatrix} \quad \Delta_1 = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ b+c & c+a & a+b \\ bc & ca & ab \end{vmatrix} \quad \Delta_2 = \begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{vmatrix}$$

- III) Soient $(a, b, c, d) \in \mathbb{R}^4$.

- 1) Calculer le déterminant de Vandermonde suivant :

$$V_{(a,b,c,d)} = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ a & b & c & d \\ a^2 & b^2 & c^2 & d^2 \\ a^3 & b^3 & c^3 & d^3 \end{vmatrix}$$

IV)

Dire pourquoi les déterminants suivants sont nuls sans calcul formel :

$$\Delta_1 = \begin{vmatrix} 1 & 2 & -3 \\ 4 & 5 & 6 \\ -2 & -4 & 6 \end{vmatrix}, \quad \Delta_2 = \begin{vmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{vmatrix}, \quad \Delta_3 = \begin{vmatrix} 3 & 4 & 5 \\ 1 & 0 & 2 \\ 2 & 4 & 3 \end{vmatrix},$$

$$\Delta_4 = \begin{vmatrix} -2 & 1 & 3 & 3 \\ 0 & 2 & 1 & 6 \\ 5 & 1 & 0 & 3 \\ 10 & -3 & 7 & -9 \end{vmatrix}, \quad \Delta_5 = \begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ -2 & 3 & -4 & 6 \\ 5 & 3 & 8 & 7 \\ 2 & -2 & 5 & -5 \end{vmatrix},$$

$$\Delta_{(a+b+c)} = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ a & b & c \\ b+c & a+c & a+b \end{vmatrix}.$$

Exercice 8

Inverser celles qui sont inversibles

(suivant les valeurs du paramètre réel a).

$$A_1 = \begin{bmatrix} 1 & a \\ -a & 2 \end{bmatrix}, \quad A_2 = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \\ 3 & 2 & 2 \end{bmatrix}, \quad A_a = \begin{bmatrix} 2-a & -1 & 3 \\ -1 & 1-a & -2 \\ 2 & 3 & 2-a \end{bmatrix},$$

$$A_4 = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 3 & -1 \\ 3 & -1 & 2 & 0 \\ 1 & 3 & 4 & -2 \\ 4 & -3 & 1 & 1 \end{bmatrix}, \quad A_5 = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 2 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

Exercice 9

I) Résoudre les systèmes d'équations linéaires suivants, à l'aide de leur matrice augmentée :

$$\text{a) } \begin{cases} 2x - y - z = 4 \\ 3x + 4y - 2z = 11 \\ 3x - 2y + 4z = 11 \end{cases}, \quad \text{b) } \begin{cases} 3x + y + z = 1 \\ x - y + 2z = 2 \\ x + 3y - 3z = -3 \end{cases},$$

$$\text{c) } \begin{cases} x + y - 3z = 1 \\ 2x + y - 2z = 1 \\ x + y + z = 3 \\ x + 2y - 3z = 1 \end{cases}$$

II)

1°) Inverser suivant le paramètre $m \in \mathbb{R}$, la matrice $A_m = \begin{pmatrix} 3 & 1 & -1 \\ 3 & 1 & -m \\ m-4 & -2 & -1 \end{pmatrix}$.

2°) Résoudre dans \mathbb{R}^3 en discutant éventuellement suivant les valeurs de $m \in \mathbb{R}$ le système :

$$(\sum_m) \Leftrightarrow \begin{cases} 3x + y - z = -m \\ 3x + y - mz = -3 \\ (m-4)x - 2y - z = -1 \end{cases} \quad \text{et}$$

$$(\sum) \Leftrightarrow \begin{cases} 3x + y - z = 1 \\ 3x + y + z = -3 \\ -5x - 2y - z = -1 \end{cases} \quad \text{avec les formules de Cramer } (\sum).$$

T.D.2

Espaces vectoriels & Applications linéaires

Rappels

Sur un \mathbb{K} -espace vectoriel E , de dimension n , muni d'une base considérons une famille S de vecteurs de E . Le rang de S est le rang de la A matrice constituée en lignes ou en colonnes des coordonnées des vecteurs de S .

On notera que A est une matrice associée à la suite S .

1. S est génératrice de E ssi le rang de $S = n = \text{rang}(A)$
2. S est libre ssi le rang de $S = \text{Cardinal de } S(\text{Card}S) = \text{rang}(A)$
3. S est liée ssi le rang de S est **strictement inférieur** au Cardinal de $S(\text{Card}S)$
4. S est une base de E ssi le rang de $S = n = \text{Cardinal de } S(\text{Card}S) = \text{rang}(A)$
5. Soit $F = \langle S \rangle$, alors $\dim F = \text{rang}(S) = \text{rang}(A)$

EXERCICE 1

Préciser si les familles constituées des vecteurs suivants sont liés ou libres.

1. $u = (7, 12)$; $v = (18, -13)$; $w = (-4, 17)$
2. $u = (-1, 0, 2)$; $v = (1, 3, 1)$; $w = (0, 1, -1)$
3. $u = (15, -27, -6, 12)$; $v = (-\frac{5}{2}, \frac{9}{2}, 1, -2)$.

EXERCICE 2

On se place dans \mathbb{R}^3 est muni de sa base canonique (e_1, e_2, e_3) et on définit les vecteurs $w_1 = (1, 1, 1)$; $w_2 = (1, 0, 0)$; $w_3 = (1, 1, 0)$; $w_4 = (0, 0, 1)$; $w_5 = (2, 2, 0)$.

Pour chacune des familles suivantes dire si elle est génératrice :

$S_1 = \{w_1, w_2\}$; $S_2 = \{w_2, w_5\}$; $S_3 = \{w_3, w_5\}$; $S_4 = \{w_4, w_5\}$; $S_5 = \{w_1, w_2, w_3\}$;
 $S_6 = \{w_1, w_3, w_4\}$; $S_7 = \{w_5, w_3, w_1\}$; $S_8 = \{w_1, w_2, w_3, w_4\}$.

EXERCICE 3

On se place dans \mathbb{R}^3 est muni de sa base canonique (e_1, e_2, e_3) et on définit les vecteurs $w_1 = (1, 1, 1)$; $w_2 = (1, 0, 0)$; $w_3 = (1, 1, 0)$; $w_4 = (0, 0, 1)$; $w_5 = (2, 2, 0)$.

Les familles suivantes sont-elles des bases de \mathbb{R}^3 :

$S_1 = \{w_1, w_2\}$; $S_2 = \{w_2, w_5\}$; $S_3 = \{w_3, w_5\}$; $S_4 = \{w_4, w_5\}$; $S_5 = \{w_1, w_2, w_3\}$;
 $S_6 = \{w_1, w_3, w_4\}$; $S_7 = \{w_5, w_3, w_1\}$; $S_8 = \{w_1, w_2, w_3, w_4\}$.

EXERCICE 4

\mathbb{R}^3 est muni de sa base canonique (e_1, e_2, e_3) .

Soient les vecteurs $u_1 = (1, 1, 1)$; $u_2 = (-1, 1, 0)$; $u_3 = (1, 0, -1)$.

1. Montrer que $B_1 = \{u_1, u_2, u_3\}$ est une base de \mathbb{R}^3 .
2. Donner les coordonnées respectives des vecteurs $(1, 0, 0)$; $(1, 0, 1)$ et $(0, 0, 1)$ dans B_1 .
3. Soit $B_2 = \{v_1 = (0, 1, 1), v_2 = (1, 0, 1), v_3 = (1, 1, 0)\}$.
(a) Montrer que B_2 est une base de \mathbb{R}^3 .
(b) Trouver dans B_1 et B_2 les composantes du vecteur $(1, 2, 1)$.

EXERCICE 5

\mathbb{R}^4 est muni de sa base canonique (t_1, t_2, t_3, t_4) . On considère les vecteurs :

$e_1 = (1, 2, 3, 4)$; $e_2 = (1, 1, 1, 3)$; $e_3 = (2, 1, 1, 1)$; $e_4 = (-1, 0, -1, 2)$; $e_5 = (2, 3, 0, 1)$.

Soient E l'espace vectoriel engendré par e_1, e_2, e_3 et F par e_4 et e_5 .

Calculer les dimensions respectives de E , F , $E \cap F$ et $E + F$.

EXERCICE 6

Soit $E = \{(x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4; x + y - z + 2t = 0 \text{ et } x + y + z = 0\}$

- a) Montrer que E est un sous-espace vectoriel de \mathbb{R}^4 .
- b) Donner une base et la dimension de E .

EXERCICE 7

Soient $F = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3; x + y + z = 0\}$ et $G = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3; x - y = 0 \text{ et } z = 0\}$.
Montrer que F et G sont deux sous-espaces vectoriels supplémentaires de \mathbb{R}^3 .

EXERCICE 8

Soient $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3; (x, y, z) \mapsto (x, y, 0)$; $g : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3; (x, y) \mapsto (x - y, x + y, x + 2y)$
et $h : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}; (x, y, z) \mapsto x - 3y + 2z$.

1. Montrer que f, g et h sont linéaires.
2. Déterminer noyau et image dans chaque cas.

EXERCICE 9

Vous répondrez par Vrai ou faux avec justification

- a) A un homomorphisme donné f correspond une infinité de matrices qui lui sont associées.
- b) L'application identique d'un espace vectoriel E de dimension finie se traduit par la même matrice dans toutes les bases de E .

EXERCICE 10

Soit $\beta = (e_1, e_2, e_3, e_4)$ la base canonique de \mathbb{R}^4 et f l'endomorphisme de \mathbb{R}^4 défini par :

$$f(e_1) = 3e_1 + e_2 + e_3 + e_4; f(e_2) = e_1 + e_2 - e_3 + e_4; f(e_3) = e_1 - e_2 + e_3 - e_4 \\ f(e_4) = e_1 + e_2 - e_3 + e_4.$$

1. Donner la matrice de f relativement à la base β . f est-il un automorphisme?
2. Calculer $f(x, y, z, t)$ pour $(x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4$ de deux façons.
3. Déterminer $\ker f$ et $\text{Im } f$.
4. Soit $F = \text{vect}(e_3, e_4)$. F et $\ker f$ sont-ils supplémentaires?

EXERCICE 11

On considère \mathbb{R}^3 muni de la base canonique $\beta = \{e_1, e_2, e_3\}$.

Soient $\vec{u} = e_1 + 2e_2 + e_3$, $\vec{v} = -2e_1 + e_2 - e_3$, $\vec{w}_m = me_2 - e_3; m \in \mathbb{R}$

- 1) Pour quelles valeurs de m , $S_m = \{\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}_m\}$ est-il une base de \mathbb{R}^3 ?

En déduire que S_1 est une base de \mathbb{R}^3 .

- 2) Déterminer la matrice de passage de la base β à la base S_1 .
- 3) Déterminer la matrice de passage de la base S_1 à la base β .
- 4) Soit $\vec{H} = (-5; 1; 2)$. Quelles sont les coordonnées de \vec{H} dans la base S_1 ?
- 5) On considère l'application linéaire

$$f_m : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3 : (x; y; z) \mapsto (x + 2y + z; -2x + y - z; my - z).$$

- a) Quelle est la matrice de f_m dans la base β ?
- b) Dans quels cas f_m est-elle un automorphisme de \mathbb{R}^3 ?

En déduire que f_0 et f_1 sont des automorphismes de \mathbb{R}^3 .

- c) Trouver $(x; y; z)$ tel que $f_1(x; y; z) = (0; 1; 7)$ et calculer $(f_1)^{-1}(2; 5; 0)$.

EXERCICE 12

$$\text{On considère } A = \begin{bmatrix} 1 & 3 & -2 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 1 \end{bmatrix}$$

On appelle φ l'endomorphisme de \mathbb{R}^3 dont la matrice dans la base canonique est A

- 1) Soit $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$. Déterminer $\varphi \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$.

- 2) Montrer que φ est un automorphisme de \mathbb{R}^3 .

- 3) On note $B = \{u_1 = (1, 0, 0); u_2 = (5, -2, 2); u_3 = (-1, 1, 2)\}$

-
- a) Montrer que B est une base de \mathbb{R}^3 .
 - b) Trouver P la matrice de passage de la base canonique de \mathbb{R}^3 à la base B .
 - c) Calculer P^{-1} .
 - 4) Quelle est la matrice N de φ dans la base B .
 - 5) Calculer A^n pour tout $n \in \mathbb{N}$.

EXERCICE 13

Soit $E = \mathbb{R}_2[X]$ l'espace vectoriel des polynômes à une indéterminée X , à coefficients réels et de degré inférieur ou égal à 2. On donne :

$$B_1 = X^2, B_2 = (X - 1)^2, B_3 = (X + 1)^2, C_1 = 1, C_2 = X, C_3 = X^2.$$

1. Montrer que $\mathcal{B} = (B_1; B_2; B_3)$ et $\mathcal{C} = (C_1; C_2; C_3)$ sont des bases de E .
2. Donner les coordonnées des polynômes suivants dans la base \mathcal{B} .
 $R = 2X - 1$, $S = 12$, $T = 3X^2 - 10X + 1$.

3. On considère l'application $P \mapsto f(P)$ définie dans E par :

$$f(P)(X) = P(X - 1) + (X + 1)P'(X) :$$

Montrer que f est un endomorphisme de E . Donner les matrices :

- (i) $\text{Mat}_{\mathcal{B}}(f)$ de f en tant qu'endomorphisme de E muni de la base \mathcal{B} .
- (ii) $\text{Mat}_{\mathcal{C}, \mathcal{B}}(f)$ de f en tant qu'application linéaire de E muni de la base \mathcal{C} dans E muni de la base \mathcal{B} .

Deuxième partie

COMPLEMENTS d'EXERCICES

Série A

Exercice 1

Déterminer $\lambda \in \frac{\mathbb{Z}}{5\mathbb{Z}}$ de façon que le système homogène :

$$\begin{cases} (\bar{3} - \lambda)x + \bar{4}y + \bar{3}z = \bar{0} \\ \bar{3}x + (\bar{3} - \lambda)y = \bar{0} \\ \bar{3}x + \bar{3}y - \lambda z = \bar{0} \end{cases}$$

admette des solutions non nulles, et résoudre.

Exercice 2

Discuter et résoudre le système sur \mathbb{R}^3 :

$$\begin{cases} ax + by + cz = 1 \\ cx + ay + bz = 1 \\ bx + cy + az = 1 \end{cases} ; (a, b, c) \in \mathbb{R}^3.$$

Exercice 3

Discuter et résoudre le système sur \mathbb{C}^3 :

$$\begin{cases} x + \alpha y + \alpha^2 z = 0 \\ \bar{\alpha}x + y + \alpha z = 0 \\ \bar{\alpha}^2 x + \alpha y + z = 0 \end{cases} \text{ où } \alpha \in \mathbb{C}.$$

EXERCICE 4

Soit \mathbb{R}_+^* muni de la loi de composition interne \oplus définie par $a \oplus b = ab$,

$\forall a, b \in \mathbb{R}_+^*$ et de la loi de composition externe \otimes telle que

$$\lambda \otimes a = a^\lambda ; \forall a \in \mathbb{R}_+^*, \forall \lambda \in \mathbb{R}.$$

Montrer que $(\mathbb{R}_+^*, \oplus, \otimes)$ est un \mathbb{R} -espace vectoriel.

EXERCICE 5

Considérons les opérations suivantes : $\oplus : \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ et $\otimes : \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^2$.

Dans quels cas la structure $(\mathbb{R}^2, \oplus, \otimes)$ est-elle un espace vectoriel sur \mathbb{R} ?

$\forall (x_1, y_1) ; (x_2, y_2) \in \mathbb{R}^2, \forall \lambda \in \mathbb{R}.$

1. $(x_1, y_1) \oplus (x_2, y_2) = \left((\sqrt[3]{x_1} + \sqrt[3]{x_2})^3 ; (\sqrt[5]{y_1} + \sqrt[5]{y_2})^5 \right) ; (x_1, y_1) \otimes \lambda = (x_1 \lambda^3, x_1 \lambda^3) ;$
2. $(x_1, y_1) \oplus (x_2, y_2) = (x_1 + y_1, 0) ; (x_1, y_1) \otimes \lambda = (x_1 \lambda, 0) ;$
3. $(x_1, y_1) \oplus (x_2, y_2) = (y_1 + y_2, x_1 + x_2) ; (x_1, y_1) \otimes \lambda = (y_1 \lambda, x_1 \lambda).$

Série B

Exercice 1

Dans \mathbb{R}^2 , on pose : $(x, y) + (x', y') = (x + x', y + y')$ et $\alpha(x, y) = (\alpha x, 0)$, $\alpha \in \mathbb{R}$. Ces deux lois de composition définissent-elles sur \mathbb{R}^2 une structure d'espace vectoriel sur \mathbb{R} ?

Exercice 2

I) Montrer que les vecteurs suivants de \mathbb{R}^3 sont linéairement dépendants et préciser leur relation de dépendance :

a) $u = (1, 2, -1)$; $v = (1, 0, 1)$; $w = (-1, 2, -3)$

b) $u = (-1, 2, 5)$; $v = (2, 3, 4)$; $w = (7, 0, -7)$.

II) Préciser si les familles constituées des vecteurs suivants sont liés ou libres.

a) $u = (7, 12)$; $v = (18, -13)$; $w = (-4, 17)$

b) $u = (-1, 0, 2)$; $v = (1, 3, 1)$; $w = (0, 1, -1)$

c) $u = (15, -27, -6, 12)$; $v = (-\frac{5}{2}, \frac{9}{2}, 1, -2)$.

III) Déterminer tous les vecteurs (x, y, z) de \mathbb{R}^3 tels que le système suivant soit libre :

$$\{(1, 0, 0); (0, 1, 1); (x, y, z)\}$$

Exercice 3

On considère les sous-ensembles suivants définis par des conditions sur les composantes d'un vecteur $a = (x_1, x_2, x_3, x_4)$ de \mathbb{R}^4 .

Indiquer ceux qui sont des sous-espaces vectoriels et préciser alors leur dimension.

$$E_1 = \{x \in \mathbb{R}^4 \mid x_2 = 0\}; E_2 = \{x \in \mathbb{R}^4 \mid x_2 \geq 0\}; E_3 = \{x \in \mathbb{R}^4 \mid x_1 = x_2 + x_3\};$$
$$E_4 = \{x \in \mathbb{R}^4 \mid x_3 x_4 = 0\}; E_5 = \{x \in \mathbb{R}^4 \mid x_1 \in \mathbb{Q}\}; E_6 = \{x \in \mathbb{R}^4 \mid x_2 = x_1^2\}.$$

Exercice 4

On considère $E = \mathbb{R}_2[X]$, l'espace vectoriel des polynômes de degré inférieur ou égal à 2 à coefficients réels muni de sa base canonique $\mathfrak{B} = (1; x; x^2)$.

1. Montrer que $\mathfrak{B}_1 = (1; 1 + x; 1 + x + x^2)$ est une base de E .

2. Ecrire $f(x) = 2x^2 + 3x + 4$ dans la base \mathfrak{B}_1 .

3. Soit $P = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 5 \end{pmatrix}$ dans la base \mathfrak{B}_1 ; quelles sont ses composantes dans la base \mathfrak{B} ?

4. Le système $S = (3 + 2x + 2x^2; 1 + 3x + 2x^2; 3 - 5x - 2x^2)$ est-il une base de E ? Si non, indiquer une relation qui lie les trois polynômes. Déterminer la dimension du sous espace vectoriel de E engendré par ce système

Exercice 5

Soit F le sous-espace vectoriel de \mathbb{R}^3 engendré par les vecteurs :

$$u = (2, 1, 0); v = (-1, 0, 1); w = (4, 1, -2)$$

a) Déterminer la dimension et une base de F et écrire la forme générale d'un élément de F .

-
- b) Montrer que $G = \{(0, \alpha + \beta, -\beta) \mid \alpha \in \mathbb{R}, \beta \in \mathbb{R}\}$ est un sous-espace vectoriel de \mathbb{R}^3 dont

on déterminera la dimension et une base.

- c) Déterminer la dimension et une base de la somme et de l'intersection des sous-espaces vectoriels F et G .
- d) Déterminer les coordonnées des vecteurs de la base canonique de \mathbb{R}^3 dans la nouvelle base de $F + G$.

Exercice 6

Dans le \mathbb{R} -espace vectoriel $E = \mathbb{R}^3$, on considère les ensembles

F et G définis comme suit :

$$F = \{(a - 3b, 2a + 3b, a) ; (a, b) \in \mathbb{R}^2\} ; G = \{(x, y, z) \in E ; x + 2y = 0\}.$$

1. Prouver que les ensembles F et G sont des sous-espaces vectoriels de E pour lesquels on donnera une base et la dimension.
2. Déterminer le sous-espace vectoriel $F \cap G$.

Exercice 7

Préciser si les applications $f : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ et $g : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ définies ci-après sont linéaires ou non :

$$\begin{aligned} f(x, y, z) &= (x + y, y + z, z - 1) ; \\ g(x, y) &= (x, y, m) \text{ où } m \text{ est un paramètre réel.} \end{aligned}$$

Exercice 8

Trouver un endomorphisme de \mathbb{R}^3 dont le noyau soit le sous-espace vectoriel engendré par les vecteurs $u = (1, 0, 0)$ et $v = (1, 1, 1)$. Est-il unique ?

Exercice 9

Soit f l'application linéaire de \mathbb{R}^4 dans \mathbb{R}^3 définie par :

$$f(x, y, z, t) = (6x - y + az - 2t, -15x + y + 3z + 5t, 3x - y + 5z - t).$$

1. Montrer que cette application n'est pas injective et déterminer les valeurs du réel a pour lesquelles elle est surjective.
2. Donner une base du noyau de f .

Exercice 10

Soient \mathbb{R}^3 , l'espace vectoriel de base canonique $\mathfrak{B} = (e_1 ; e_2 ; e_3)$

et f l'endomorphisme de \mathbb{R}^3 défini par :

$$\begin{aligned} f(e_1) &= e_1 + 3e_2 ; f(e_2) = -2e_1 + e_3 ; \\ f(e_3) &= -e_1 + 2e_2 + e_3 . \end{aligned}$$

1. Déterminer la matrice A associée à f .
2. Déterminer une base de $\text{Ker}(f)$ et de $\text{Im}(f)$.
3. Soit $u = e_1 + e_2 - e_3$, montrer que $(u, f(u), f^2(u))$ est une base de \mathbb{R}^3 et déterminer la matrice de f dans cette base.
4. Montrer que le système (u, e_1, e_2) est une base de \mathbb{R}^3 et déterminer la matrice de f dans cette base.

Exercice 11

Soit f un endomorphisme de \mathbb{R}^3 de matrice A dans la base canonique $\beta_0 = (e_1, e_2, e_3)$

$$\text{définie par : } A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & -3 \\ 1 & 4 & -5 \\ 0 & 2 & -2 \end{bmatrix}.$$

1. Déterminer la matrice définie par : $(A - \lambda I_3)$ où I_3 est la matrice d'ordre 3 et $\lambda \in \mathbb{R}$.
2. Calculer le polynôme $P(\lambda) = \det(A - \lambda I_3)$. En déduire les solutions de l'équation $P(\lambda) = 0$.
3. Déterminer une base de chacun des sous-espaces vectoriels de \mathbb{R}^3 définis par $E_{\lambda_i} = \ker(f - \lambda_i \text{Id}_{\mathbb{R}^3})$, où λ_i couvre les solutions de $P(\lambda) = 0$ et $\text{Id}_{\mathbb{R}^3}$ est l'application identité de \mathbb{R}^3 .
4. Soient $u_1 = e_1 + e_2 + e_3$, $u_2 = e_1 + 3e_2 + 2e_3$, $u_3 = e_1 + 2e_2 + e_3$.
 - a) Montrer que $\beta = (u_1, u_2, u_3)$ est une base de \mathbb{R}^3 .
 - b) Déterminer la matrice de passage P de la base β_0 à la base β .
 - c) Déterminer la matrice D de f dans la base β par la formule $D = P^{-1}AP$.
 - d) Donner l'expression de A à partir de celle de D ci-dessus.
Donner A^2 , A^3 , A^4 en fonction de P , D et P^{-1} .
Déterminer explicitement A^n avec $n \in \mathbb{N}$.

Série C

Exercice 1

Soit $E = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid y = 2x\}$. Montrer que E est un sous-espace vectoriel de \mathbb{R}^2 et déterminer une base de E .

Exercice 2

On considère \mathbb{R}^3 muni de la base canonique $\beta = \{e_1, e_2, e_3\}$.

Soient $\vec{u} = e_1 + 2e_2 + e_3$, $\vec{v} = -2e_1 + e_2 - e_3$, $\vec{w}_m = me_2 - e_3$; $m \in \mathbb{R}$

1) Pour quelles valeurs de m , $S_m = \{\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}_m\}$ est-il une base de \mathbb{R}^3 ?

En déduire que S_1 est une base de \mathbb{R}^3 .

2) Déterminer la matrice de passage de la base β à la base S_1 .

3) Déterminer la matrice de passage de la base S_1 à la base β .

4) Soit $\vec{H} = (-5; 1; 2)$. Quelles sont les coordonnées de \vec{H} dans la base S_1 ?

5) On considère l'application linéaire

$$f_m : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3 : (x; y; z) \mapsto (x + 2y + z; -2x + y - z; my - z).$$

a) Quelle est la matrice de f_m dans la base β ?

b) Dans quels cas f_m est-elle un automorphisme de \mathbb{R}^3 ?

En déduire que f_0 et f_1 sont des automorphismes de \mathbb{R}^3 .

c) Trouver $(x; y; z)$ tel que $f_1(x; y; z) = (0; 1; 7)$ et calculer $(f_1)^{-1}(2; 5; 0)$.

Exercice 3

Soient les matrices : $A = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 2 \\ 4 & 2 & 0 \\ 1 & i & 1 \end{pmatrix}$; $B = \begin{pmatrix} 2 & -3 & 1 \\ 2 & -i & 2 \\ -i & 2 & 0 \end{pmatrix}$;

$$C = \begin{pmatrix} 0 & -2 & 2 \\ -3 & -1 & 1 \\ -3 & 1 & -1 \end{pmatrix} \text{ et } D = \begin{pmatrix} 2 & -4 & 3 \\ -5 & 11 & -2 \end{pmatrix}.$$

1°) Calculer si possible les matrices suivantes : $E = AB$ et $E' = BA$

que peut-on conclure?

2°) Calculer si possible les matrices : $F = AD$ et $F' = DA$.

3°) Calculer C^3 . En déduire que C n'est pas inversible.

Exercice 4

On considère les matrices $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 5 \\ 3 & 2 & 3 \\ -2 & -6 & 0 \end{pmatrix}$; $B = \begin{pmatrix} 2 & 0 & -2 \\ 1 & 4 & -2 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}$

$$\text{et } T = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}.$$

1°) Montrer que A et B sont inversibles et déterminer leur inverse.

Mêmes questions pour $C=AB$.

2°) Résoudre dans \mathbb{R}^3 l'équation matricielle $CT = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ m \end{pmatrix}$.

Exercice 5

On considère la matrice $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \in M_2(\mathbb{R})$.

a) Montrer que $A^2 = A - I_2$.

b) Calculer A^3

c) Montrer que, si p est un entier positif, on a :

$$A^{3p} = (-1)^p I_2, \quad A^{3p+1} = (-1)^p A, \quad A^{3p+2} = (-1)^p (A - I_2).$$

d) Les suites réelles (u_n) et (v_n) sont définies par les relations de récurrence :

$$u_{n+1} = u_n + v_n, \quad v_{n+1} = -u_n \quad \text{et par la donnée de } u_1 \text{ et } v_1.$$

Calculer u_n et v_n en fonction de u_1, v_1 et n , en particulier

$$\text{pour } n = 3p; n = 3p + 1; n = 3p + 2, p \in \mathbb{N}.$$

Exercice 6

Soit E un \mathbb{R} - espace vectoriel de dimension 3 et $\beta = (e_1, e_2, e_3)$ une base de E .

On considère l'application \mathbb{R} - linéaire $u : E \rightarrow E$ définie par :

$$u(e_1) = e_1 + e_2 + 2e_3, \quad u(e_2) = -u(e_1), \quad u(e_3) = e_1 - e_2.$$

Soit M la matrice de u dans la base β . On pose :

$$f_1 = e_2 + e_3, \quad f_2 = e_1 + e_3, \quad f_3 = e_1 + e_2 \quad \text{et} \quad \varsigma = (f_1, f_2, f_3).$$

1) Écrire la matrice M .

2) Calculer la dimension de $\text{Ker}(u)$, le rang de u et le rang de M .

3) Montrer que ς est une base de E .

4) Soit P la matrice de passage de la base β à la base ς et

N la matrice de u dans la base ς .

4-a) Déterminer les matrices P, P^{-1} et N .

4-b) Pour tout entier $k \geq 1$, calculer N^k et en déduire M^k .

Série D

Exercice 1

Sur l'ensemble \mathcal{P}'_n des polynômes à une indéterminée X de coefficients réels, de degré égal à l'entier positif n , on définit l'addition de deux polynômes P et Q par :

$$(P + Q)(X) = P(X) + Q(X)$$

et la multiplication par un scalaire réel λ par :

$$(\lambda P)(X) = \lambda P(X).$$

- a) Examiner si l'ensemble \mathcal{P}'_n muni de ces deux lois est un espace vectoriel.
b) Même question pour l'ensemble \mathcal{P}_n des polynômes à une indéterminée X , de degré inférieur ou égal à l'entier n . Montrer que l'ensemble \mathcal{I}_n des polynômes P de \mathcal{P}_n tels que :

$$P(X) + P(-X) = 0$$

est un espace vectoriel dont on déterminera la dimension et une base.

Exercice 2

Sur l'ensemble \mathcal{S} des suites numériques $u = (u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ on définit l'addition de deux suites u et v par $u + v = (u_n + v_n)_{n \in \mathbb{N}}$ et la multiplication par un scalaire réel λ par :

$$\lambda u = (\lambda u_n)_{n \in \mathbb{N}}$$

1. Montrer que \mathcal{S} est un espace vectoriel.
2. Montrer que l'ensemble \mathcal{F} des suites de Fibonacci qui vérifient la relation de récurrence $u_{n+2} = u_{n+1} + u_n$ est un espace vectoriel dont on déterminera la dimension.

Exercice 3

1. On considère les sous-ensembles suivants définis par des conditions sur les composantes d'un vecteur $a = (x_1, x_2, x_3, x_4)$ de \mathbb{R}^4 .
Indiquer ceux qui sont des sous-espaces vectoriels et préciser alors leur dimension.
 $E_1 = \{x \in \mathbb{R}^4 \mid x_2 = 0\}$; $E_2 = \{x \in \mathbb{R}^4 \mid x_2 \geq 0\}$;
 $E_3 = \{x \in \mathbb{R}^4 \mid x_1 = x_2 + x_3\}$; $E_4 = \{x \in \mathbb{R}^4 \mid x_3 x_4 = 0\}$;
 $E_5 = \{x \in \mathbb{R}^4 \mid x_1 \in \mathbb{Q}\}$; $E_6 = \{x \in \mathbb{R}^4 \mid x_2 = x_1^2\}$.

Exercice 4

Déterminer si les ensembles suivants sont des sous-espaces vectoriels de l'espace vectoriel E des fonctions dérivables sur \mathbb{R} :

$$E_1 = \{f \in E \mid f^2 = f'\}; E_2 = \{f \in E \mid f(x) = x f'(x), \forall x \in \mathbb{R}\}.$$

Exercice 5

-
- I) A partir du système libre $\{e_1, \dots, e_n\}$ d'un espace vectoriel E ,
on construit les vecteurs :

$\epsilon_j = e_1 + e_2 + \dots + e_j$ pour $j = 1, 2, \dots, n$. Montrer que $\{\epsilon_1, \epsilon_2, \dots, \epsilon_n\}$ est aussi un système libre.

- II) Si $b_1 = (1, 1, 1, 1)$; $b_2 = (1, 1, -1, -1)$; $b_3 = (1, -1, 1, -1)$; $b_4 = (1, -1, -1, 1)$ constituent une base de \mathbb{R}^4 ,

déterminer les coordonnées du vecteur $x = (1, 2, 1, 1)$ dans cette base.

- III) Montrer que le sous-ensemble E , ci-après est un sous-espace vectoriel de \mathbb{R}^4
dont on déterminera la dimension et une base.

$$E = \{(\alpha - \beta, 2\alpha, \alpha + 2\beta, -\beta) \mid \alpha \in \mathbb{R}, \beta \in \mathbb{R}\}$$

- IV) Montrer que les polynômes P_1, P_2, P_3 définis ci-après forment une base
de l'espace vectoriel des polynômes
à une indéterminée X , de degré inférieur ou égal à deux :

$$P_1(X) = X^2; \quad P_2(X) = (X - 1)^2; \quad P_3(X) = (X + 1)^2.$$

Exprimer les polynômes Q et R suivants dans cette base :

$$Q(X) = 12; \quad R(X) = 3X^2 - 10X + 1.$$

- V) Soit E l'espace vectoriel des fonctions réelles continues et dérivables sur \mathbb{R} et
 F l'ensemble des fonctions numériques f définies par :

$$f(x) = \begin{cases} \alpha x + \beta & \text{si } x < 0 \\ ax^2 + bx + c & \text{si } 0 \leq x \leq 1 \\ \gamma x + \delta & \text{si } 1 < x \end{cases}.$$

Exprimer les constantes réelles $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ en fonction des trois réels a, b, c pour que
 F soit un sous-espace vectoriel de E . Déterminer alors la dimension et
une base de F .

- VI) Soit F le sous-espace vectoriel de \mathbb{R}^3 engendré par les vecteurs :

$$u = (2, 1, 0); \quad v = (-1, 0, 1); \quad w = (4, 1, -2)$$

- a) Déterminer la dimension et une base de F et écrire la forme générale d'un
élément de F .
- b) Montrer que $G = \{(0, \alpha + \beta, -\beta) \mid \alpha \in \mathbb{R}, \beta \in \mathbb{R}\}$ est
un sous-espace vectoriel de \mathbb{R}^3 dont on déterminera la dimension et une base.
- c) Déterminer la dimension et une base de la somme et de l'intersection
des sous-espaces vectoriels F et G .
- d) Déterminer les coordonnées des vecteurs de la base canonique de \mathbb{R}^3
dans la nouvelle base de $F + G$.

X) Dans l'espace vectoriel $\mathbb{R}_3[X]$ des polynômes de degré inférieur ou égal à 3, on considère les polynômes suivants de l'indéterminée X :

$$P_1(X) = 5 + X + X^2 + X^3; \quad P_2(X) = -1 + 6X + 3X^2 + X^3; \quad P_3(X) = -16 + 3X - 2X^3;$$

$$P_4(X) = 3 + 4X + 4X^2 + X^3; \quad P_5(X) = 6 + 3X + X^2; \quad P_6(X) = -3 + 6X + 10X^2 + 3X^3;$$

$$P_7(X) = 3 - X - 3X^2 - X^3.$$

Déterminer la dimension et une base des espaces vectoriels F et G engendré respectivement par les familles $\{P_1, P_2, P_3, P_4\}$ et $\{P_5, P_6, P_7\}$, puis des espaces vectoriels $F \cap G$ et $F + G$.

VII) Soit F et G les sous-espaces vectoriels de \mathbb{R}^4 engendrés par les familles respectives $\{u_1, u_2, u_3\}$ et $\{v_1, v_2\}$, où :

$$u_1 = (1, 0, 4, 2); \quad u_2 = (1, 2, 3, 1); \quad u_3 = (1, -2, 5, 3); \quad v_1 = (4, 2, 0, 1); \quad v_2 = (1, 4, 2, 1).$$

- a) Déterminer la dimension et une base des espaces vectoriels F et G .
b) Montrer que les sous-espaces F et G sont supplémentaires.

Exercice 6

Préciser si les applications $f : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ et $g : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ définies ci-après sont linéaires ou non :

$$f(x, y, z) = (x + y, y + z, z - 1); \quad g(x, y) = (x, y, m) \text{ où } m \text{ est un paramètre réel.}$$

Exercice 7

Trouver un endomorphisme de \mathbb{R}^3 dont le noyau soit le sous-espace vectoriel engendré par les vecteurs $u = (1, 0, 0)$ et $v = (1, 1, 1)$. Est-il unique ?

Exercice 8

Soit f l'application linéaire de \mathbb{R}^4 dans \mathbb{R}^3 définie par :

$$f(x, y, z, t) = (6x - y + az - 2t, -15x + y + 3z + 5t, 3x - y + 5z - t).$$

Montrer que cette application n'est pas injective et déterminer les valeurs du réel a pour lesquelles elle est surjective. Donner une base du noyau de f .

Exercice 9

On considère les matrices : $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$ $B = \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$.

Calculer $A^2 + 2AB + B^2$ et comparer avec $(A + B)^2$. Commenter.

Exercice 10

Si M et N sont deux matrices de types respectifs (m, n) et (n, m) telles que $MN = I$, montrer que la matrice $P = NM$ est idempotente, c'est-à-dire que $P^2 = P$.

En déduire que P est diviseur à droite et à gauche de zéro.

Exercice 11

On considère les matrices suivantes :

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 2 \\ 3 & -1 & 1 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 5 & 2 \\ 3 & -1 \end{bmatrix}, \quad C = \begin{bmatrix} 0 & -1 & 0 \\ -2 & 0 & 3 \end{bmatrix}.$$

Calculer, parmi les produits matriciels suivants, ceux qui ont un sens :

$$AB, \quad BA, \quad A^2, \quad AC, \quad CA, \quad C^2, \quad BC, \quad CB, \quad B^2.$$

Exercice 12

Montrer que les vecteurs suivants forment une base de \mathbb{R}^3 :

$$\epsilon_1 = (1, 0, 1) ; \quad \epsilon_2 = (-1, 1, 0) ; \quad \epsilon_3 = (2, 1, 1).$$

On définit alors l'application f de \mathbb{R}^3 dans \mathbb{R}^4 par les images, exprimées dans la base canonique de \mathbb{R}^4 :

$$f(\epsilon_1) = (1, 1, 1, 0) ; \quad f(\epsilon_2) = (-1, -1, -1, 0) ; \quad f(\epsilon_3) = (0, 1, -1, -1).$$

Déterminer la matrice A qui représente f lorsque \mathbb{R}^3 est muni de la base $\{\epsilon_1, \epsilon_2, \epsilon_3\}$ et la matrice B lorsque \mathbb{R}^3 est muni de la base canonique.

A-t-on une relation matricielle entre A et B ?

Exercice 13

On considère l'homomorphisme f de \mathbb{R}^4 dans \mathbb{R}^3 défini par :

$$f(x, y, z, t) = (x + t, x + y + t, y + z + t).$$

Déterminer la matrice de cette application linéaire lorsque \mathbb{R}^4 est muni de la base formée des vecteurs :

$$u_1 = (1, 1, 1, 1) ; \quad u_2 = (1, 1, 1, 0) ; \quad u_3 = (1, 1, 0, 0) ; \quad u_4 = (1, 0, 0, 0)$$

et \mathbb{R}^3 de la base :

$$v_1 = (0, 0, 1) ; \quad v_2 = (0, 1, 1) ; \quad v_3 = (1, 1, 1).$$

Déterminer le noyau et l'image ($Im f$) de f .

Exercice 14

I) Calculer les déterminants suivants :

$$\Delta_1 = \begin{vmatrix} 3 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 3 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 3 \end{vmatrix} \quad \Delta_2 = \begin{vmatrix} 0 & a & b & c \\ a & 0 & c & b \\ b & c & 0 & a \\ c & b & a & 0 \end{vmatrix} \quad \text{où } a, b, c \in \mathbb{R}$$

II) Exprimer le déterminant d'ordre n suivant en fonction de Δ_{n-1} et Δ_{n-2} :

$$\Delta_n = \begin{vmatrix} 2 & 1 & 0 & \cdots & \cdots & 0 \\ 1 & 2 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & & \ddots & \ddots & \ddots & 1 \\ 0 & \cdots & \cdots & 0 & 1 & 2 \end{vmatrix}.$$

On en déduira ensuite $\Delta_n - \Delta_{n-1}$, puis Δ_n .

Exercice 15

I) Résoudre les systèmes d'équations linéaires suivants :

$$\text{a) } \begin{cases} 2x - y - z &= 4 \\ 3x + 4y - 2z &= 11 \\ 3x - 2y + 4z &= 11 \end{cases}, \quad \text{b) } \begin{cases} 3x + y + z &= 1 \\ x - y + 2z &= 2 \\ x + 3y - 3z &= -3 \end{cases},$$

$$\text{c) } \begin{cases} x + y - 3z &= 1 \\ 2x + y - 2z &= 1 \\ x + y + z &= 3 \\ x + 2y - 3z &= 1 \end{cases}, \quad \text{d) } \begin{cases} x + y + z + t + u &= 7 \\ 3x + 2y + z + t - 3u &= -2 \\ y + 2z + 2t + 6u &= 23 \\ 5x + 4y + 3z + 3t - u &= 12 \end{cases}$$

II) Résoudre et discuter suivant les valeurs du paramètre réel m

les système suivants :

$$\text{a) } \begin{cases} 2x + (m-1)y - 3mz &= 2 \\ x - 2(m-1)y + mz &= 1 \\ x + (m-1)y - 2mz &= 2m \end{cases}, \quad \text{b) } \begin{cases} mx + y + t &= m+1 \\ x + my + z &= m-1 \\ y + mz + t &= m+1 \\ x + z + mt &= m-1 \end{cases}$$

Série E

TRAVAUX DIRIGES EN CBG1 Bioscience & STRM

Calculs Matriciels

Exercice 1

1. Déterminer les réels x et y tels que les matrices A et B suivantes soient égales :

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 3 & 0 \\ -3 & 2x + 3y & 4 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad B = \begin{pmatrix} -1 & 3 & -x - 1 + 2y \\ -3 & -7 & 4 \end{pmatrix}$$

2. Soit la matrice $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & a \\ 1 & 1 & b \\ \frac{-1}{2} & \frac{-1}{2} & c \end{pmatrix}$. Déterminer a , b et c pour que la matrice A^2 soit la matrice nulle.

3. Soient $P = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 4 \\ 1 & 1 & 4 \\ \frac{-1}{2} & \frac{-1}{2} & -2 \end{pmatrix}$; $I_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ et $M = P + I_3$.

- Montrer que P^2 est une matrice nulle.
- Exprimer M^2 et M^3 en fonction des matrices P et I .
- Montrer que $\forall n \in \mathbb{N}^*$; $M^n = nP + I_3$.
- On pose $S_n = M + M^2 + \dots + M^n$, avec $n \geq 2$. Exprimer S_n en fonction de P , I_3 et n .

Exercice 2

- I- On donne la matrice $A = \begin{pmatrix} 5 & -6 & -6 \\ 0 & -1 & 0 \\ 3 & -3 & -4 \end{pmatrix}$.

- Calculer : $A^3 - 3A - 2I$.
- En déduire que A est inversible et que son inverse est $A^{-1} = \frac{1}{2}(A^2 - 3I)$.

- II- On considère les matrices suivantes : $B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ et $I = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

- Calculer B^2 et B^3 .
- On pose $D = -B^2 + 4B + I$ et $C = -B^3 + 4B^2 + B - 4I$.
 - Calculer D et C .
 - Montrer que $C = BD - 4I$.
 - En déduire que la matrice B est inversible et trouver sa matrice inverse B^{-1} .

Exercice 3

- I- Soit $A = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 3 & 5 & 3 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix}$ et $I_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

- 1- a. Calculer $A^3 + 3A^2 + 16A + 12I$.

b. En déduire l'existence d'une matrice P telle que $AP = I$.

c. Donner une écriture de P sous forme de matrice.

II- On donne les matrices $M = \begin{pmatrix} a & b & c \\ 0 & a & b \\ 0 & 0 & a \end{pmatrix}$ et $I = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ où $a, b, c \in \mathbb{R}$.

1- Supposons que $a = 3$, $b = 2$, $c = 1$. Montrer que M est inversible et calculer son inverse.

2- On pose : $a = b = 1$ et $c = 0$.

a. Déterminer la matrice $B = A - I$; calculer B^2 et B^3 . En déduire B^n pour tout $n \geq 3$.

b. Exprimer A en fonction de B et I et calculer A^n en fonction de I , n et B (se servir du binôme de Newton). En déduire alors A^{20} (donner l'expression et la forme matricielle).

Calculs de Déterminant

Exercice 1

Soit les matrices suivantes :

$$M = \begin{pmatrix} 3 & -2 & 4 \\ 2 & -4 & 5 \\ 1 & 8 & 2 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 4 \\ 5 & 2 & 3 \\ 8 & 7 & 3 \end{pmatrix}$$

A- 1. i. Déterminer les cofacteurs de tous les éléments de M .

ii. En déduire le déterminant de M . Dire si $\det(M) \neq 0$.

iii. Si oui, Calculer la matrice $P = \frac{1}{\det(M)} \text{Com}(M)^t$, où $\text{Com}(M)$ désigne la comatrice de la matrice M .

iv. Que représente la matrice P pour la matrice M ?

v. Déterminer $B = 50M$. Montrer que $\det(B) = 50^3 \det(M)$.

2. Soit la matrice $N = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -5 & 2 & 3 & 5 & 1 \\ 8 & 15 & -10 & 20 & 0 \\ 9 & 5 & 40 & 10 & 0 \\ -1 & 10 & -20 & 25 & 0 \end{pmatrix}$ Montrer que $\det(N) = 5^3 \det(M)$.

B- Reprendre la question 1) pour la matrice A . (*A ne pas traiter au TD*)

Exercice 2

Calculer les déterminants suivants à l'aide de la méthode de développement :

$$D_1 = \begin{vmatrix} 2 & -1 \\ -3 & 4 \end{vmatrix}, \quad D_2 = \begin{vmatrix} 5 & 10 \\ 1 & 2 \end{vmatrix}, \quad D_3 = \begin{vmatrix} 3 & 3 \\ 2 & 1 \end{vmatrix},$$
$$D_4 = \begin{vmatrix} 2 & 0 & 3 \\ -2 & 3 & 1 \\ 5 & 1 & 0 \end{vmatrix}, \quad D_5 = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 1 & 2 & -3 \end{vmatrix}, \quad D_7 = \begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{vmatrix},$$

$$D_8 = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \end{vmatrix}, \quad D_9 = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{vmatrix}.$$

Exercice 3

Calculer à l'aide de la méthode de Sarrus les déterminants suivants :

$$\begin{vmatrix} 8 & 5 & -21 \\ 4 & 6 & -1 \\ 1 & 12 & 7 \end{vmatrix} = -595, \quad \begin{vmatrix} 4 & 5 & -3 \\ 3 & 2 & 1 \\ 1 & 7 & 4 \end{vmatrix} = -108, \quad \begin{vmatrix} 5 & -4 & 2 \\ 3 & 5 & -1 \\ 6 & 2 & -5 \end{vmatrix} = -199$$

Exercice 4

Dire pourquoi les déterminants suivants sont nuls sans calcul formel :

$$\Delta_1 = \begin{vmatrix} 1 & 2 & -3 \\ 4 & 5 & 6 \\ -2 & -4 & 6 \end{vmatrix}, \quad \Delta_2 = \begin{vmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{vmatrix}, \quad \Delta_3 = \begin{vmatrix} 3 & 4 & 5 \\ 1 & 0 & 2 \\ 2 & 4 & 3 \end{vmatrix},$$

$$\Delta_4 = \begin{vmatrix} -2 & 1 & 3 & 3 \\ 0 & 2 & 1 & 6 \\ 5 & 1 & 0 & 3 \\ 10 & -3 & 7 & -9 \end{vmatrix}, \quad \Delta_5 = \begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ -2 & 3 & -4 & 6 \\ 5 & 3 & 8 & 7 \\ 2 & -2 & 5 & -5 \end{vmatrix}.$$

Systeme d'équations linéaires

Exercice 1

Soit les matrices $A = \begin{pmatrix} -2 & 1 & -1 \\ 1 & -3 & 1 \\ \frac{1}{2} & -1 & 1 \end{pmatrix}$, $X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}$.

Résoudre l'équation matricielle $AX = B$.

Exercice 2

On considère le système d'équations

$$(S) \quad \begin{cases} -x - 3y = a \\ x - y = b \\ x + 3y + 2z = c. \end{cases}$$

- 1- Montrer que résoudre (S) , équivaut à résoudre une équation de la forme : $MX = B$ où M , X et B sont des matrices à déterminer.
- 2- a. Calculer M^2 et M^3 .
b. Exprimer M^3 en fonction de I_3 .
- 3- a. Montrer que $MX = B \Leftrightarrow X = \frac{1}{8}M^2B$.
b. En déduire la résolution de (S) .
c. Donner les solutions de (S) lorsque : $a = 3$, $b = -5$ et $c = 4$.

Exercice 3

Soit $A = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 3 & 5 & 3 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix}$ et $I_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

- 1- a. La matrice A est-elle inversible ? Si oui, justifier puis déterminer son inverse.

b. En déduire la résolution du système suivant :

$$\begin{cases} -x + y + z = 2 \\ 3x + 5y + 3z = 1 \\ x + y - z = -3 \end{cases}$$

2- Résoudre, à partir des résultats précédent uniquement, le système suivant :

$$\begin{cases} \frac{y^2 z^2}{x^2} = e^4 \\ x^6 y^{10} z^6 = e^2 \\ \frac{x^2 y^2}{z^2} = e^{-6}. \end{cases}$$

Exercice 4

I- On donne les vecteurs suivants : $a_1 = (2 \ 1 \ 4)$, $a_2 = (3 \ 5 \ 1)$,
 $a_3 = (1 \ 2 \ 3)$ et $B = (1100 \ 880 \ 1980)^t$.

Soit A la matrice dans laquelle la première, la deuxième et la troisième colonne sont respectivement constituées des coordonnées de a_1 , a_2 et a_3 .

- 1) Montrer que $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 4 \\ 3 & 5 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}^t$.
- 2) Montrer que la matrice A est inversible et déterminer A^{-1} .

II-

- 1) Résoudre le système d'équations :

$$\begin{cases} 2x + 3y + z = 1100 \\ x + 5y + 2z = 880 \\ 4x + y + 3z = 1980 \end{cases}$$

On pourra remarquer que dans ce système, tous les éléments du second membre sont multiples de 22.

- 2) L'entreprise CBG-Technologie fabrique trois types d'articles X , Y , Z . Chaque article passe successivement dans trois ateliers : atelier 1 ; atelier 2 et atelier 3. Le temps de passage dans les ateliers sont donnés dans le tableau suivant :

| | X | Y | Z |
|-----------|-----|-----|-----|
| Atelier 1 | 20 | 30 | 10 |
| Atelier 2 | 10 | 50 | 20 |
| Atelier 3 | 40 | 10 | 30 |

Au cours d'un programme de fonctionnement annuel, les charges horaires des ateliers ont été de 110000 heures pour l'atelier 1, de 88000 heures pour l'atelier 2 et de 198000 heures pour l'atelier 3.

Déduire de la question **II-1**, déterminer le nombre de chaque type d'articles qui a été fabriqué.

Espaces Vectoriels-Applications Linéaires

Exercice 1

- On pose $E = \mathbb{R}^2$. Doté des lois suivantes, E est-il un espace vectoriel ?
 - L'addition : $E \times E \longrightarrow E$; $((x_1, y_1), (x_2, y_2)) \longrightarrow (x_1 + x_2, y_1 + y_2)$
et la multiplication $\mathbb{R} \times E \longrightarrow E$; $(\lambda, (x, y)) \longrightarrow (\lambda x, 0)$.
 - L'addition : $E \times E \longrightarrow E$; $((x_1, y_1), (x_2, y_2)) \longrightarrow (x_1 - 3x_2, y_1 + x_1 y_2)$
et la multiplication $\mathbb{R} \times E \longrightarrow E$; $(\lambda, (x, y)) \longrightarrow (-2x, \lambda y)$.
- Soit L l'ensemble des suites réelles qui tendent vers 0.
Montrer que $(L; +; \cdot)$ est un \mathbb{R} -espace vectoriel.
- Est-ce que les ensembles suivants sont des espaces vectoriels ?
 - A = ensemble des fonctions polynômes.
 - B = ensemble des fonctions polynômes de degré supérieur ou égal à 2.
 - C = ensemble des fonctions polynômes de degré strictement inférieur à 2.

Exercice 2

Parmi les ensembles suivants reconnaître ceux qui sont des sev de \mathbb{R}^2 ou \mathbb{R}^3 :

$$\begin{aligned} E_1 &= \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 / x + 2y - 3z = 0\} \\ E'_1 &= \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 / xy = 0\} \\ E_2 &= \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 / 2x - 3y > 0\} \\ E'_2 &= \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 / x^2 + xy + y^2 \leq 0\} \\ E_3 &= \{f \in \mathcal{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R}) / f(0) = 1\} \\ E'_3 &= \{f \in \mathcal{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R}) / f(1) = 0\} \end{aligned}$$

EXERCICE 3

- Dans \mathbb{R}^3 déterminer les sous espaces vectoriels engendrés par $A = \{(1, 1, 1) ; (1, 0, 1)\}$.
- Soit $F = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 / x + 2y - z = 0\}$ Montrer qu'il existe deux vecteurs qui engendrent F .
- Dans \mathbb{R}^3 , on considère, $F = \{(x, 0, 0) ; x \in \mathbb{R}\}$ et $G = \{(x, x, 0) ; x \in \mathbb{R}\}$
 - Montrer F et G sont des sous espaces vectoriels de \mathbb{R}^3 .
 - Déterminer $F + G$.

EXERCICE 4

- Dans \mathbb{R}^2 , montrer que $(1, 2) ; (2, 3) ; (2, 2)$ forme un système générateur.
- Montrer que $\mathbb{R}^2 = Vect \{(1, 1) ; (2, 3)\}$
 - Les familles de vecteurs suivantes sont-elles libres ? : $\mathcal{A}_1 = \{(1; 2; 3), (4; 5; 6), (-1; 2; 3)\}$;
 $\mathcal{A}_2 = \{1; \cos(x); \cos(2x)\}$; $\mathcal{A}_3 = \{1; 1 + x; x^2\}$; $\mathcal{A}_4 = \{(1; 0; 3), (2; 1; -1), (3; 1; 2)\}$.

EXERCICE 5

- Parmi les applications suivantes quelles sont celles qui sont linéaires ? Si oui quelles sont celles qui sont injectives, surjectives, bijectives ?
 - $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2, \quad (x, y) \mapsto (2x + y; 3x - 2y)$
 - $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2, \quad (x, y) \mapsto (x + y; xy)$

- c) $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2, \quad (x, y) \mapsto (x + 1; y)$
d) $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3, \quad (x, y) \mapsto (x + y; x; 0)$

II. Soit E l'espace vectoriel des fonctions de \mathbb{R} dans \mathbb{R} , deux fois dérivables et φ l'application :

$$\begin{aligned} f & : E \longrightarrow E \\ y & \longmapsto y'' + y' - 2y. \end{aligned}$$

Montrer que φ est une application linéaire.

EXERCICE 6

- I. Soit les systèmes $\mathcal{B}_1 = \{v_1; v_2; v_3\}$ et $\mathcal{B} = \{e_1; e_2; e_3\}$ où on a : $v_1 = (1, 0, 1)$; $v_2 = (1, 1, 1)$ et $v_3 = (0, 1, 1)$ puis $e_1 = (1, 2, 0)$; $e_2 = (0, 1, 0)$ et $e_3 = (0, 0, 1)$
- 1) Montrer que \mathcal{B}_1 et \mathcal{B} sont des bases de \mathbb{R}^3 .
 - 2) Écrire les vecteurs $(3, 4, 5)$ puis $(a; b; c)$ en fonction des vecteurs la base \mathcal{B}_1 .
- II. Soit $f : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ une application linéaire définie par :

$$\begin{aligned} f(v_1) &= (0, 5, 1) = u_1 \\ f(v_2) &= (3, 1, 2) = u_2 \\ f(v_3) &= (1, 6, 0) = u_3. \end{aligned}$$

- 1) Exprimer en fonction de u_1 ; u_2 et u_3 les vecteurs $f(3, 4, 5)$ et $f(a, b, c)$.
 - 2) En déduire l'expression de f sur \mathbb{R}^3 .
 - 3) Déterminer $\text{Ker}(f)$ et $\text{Im}(f)$.
 - 3) l'application est - elle bijective ? Justifier
- III. On désire écrire la matrice de f dans la base \mathcal{B} .
- 1) Exprimer chacun des vecteurs u_1 ; u_2 ; u_3 dans la base \mathcal{B}_1 .
 - 2) En déduire $f(v_1)$; $f(v_2)$ et $f(v_3)$ dans la base \mathcal{B}_1 .
 - 3) Réécrire $f(v_1)$; $f(v_2)$ et $f(v_3)$. dans la base \mathcal{B} .

4) Écrire les matrices $A_{\mathcal{B}_1} = \begin{pmatrix} \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot \end{pmatrix}$;

$$A_{\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot \end{pmatrix} \text{ et } P = \begin{pmatrix} \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot \end{pmatrix}.$$

NB : P est la matrice de passage de la base \mathcal{B}_1 à la base \mathcal{B} . Les matrices $A_{\mathcal{B}}$ et $A_{\mathcal{B}_1}$ sont les matrices de f dans les bases \mathcal{B} et \mathcal{B}_1 respectivement.

- 4) Montrer que P est inversible et calculer P^{-1}
- 4) Montrer que $A_{\mathcal{B}} = P^{-1}A_{\mathcal{B}_1}P$.

EXERCICE 7

1. Soit k un réel.

- (a) Déterminer les valeurs de k pour lesquelles les vecteurs u et v sont orthogonaux dans \mathbb{R}^4 , où $u = (k, 1, k, 3)^t$ et $v = (k, 3, 2, -6)^t$.

-
- (b) Déterminer les valeurs de k pour lesquelles $\|w\| = \sqrt{39}$ où $w = (1, k, -2, 5)^t \in \mathbb{R}^4$.
- (c) Déterminer les valeurs de k pour lesquelles $d(x, y) = 6$ où $x = (2, k, 1, -4)^t$ et $y = (3, -1, 6, -3)^t$.
2. Soit L la droite passant par le point $A = (2, 3, 1)$ et parallèle au vecteur $\vec{u} = (1; -4; 1)^t$. Déterminer l'équation du plan qui contient la droite L et le point $B = (1, 2, -1)$.

Bibliographie

- [1] Jean-Marie Monier, Algèbre MPSI, Cours et 700 Exercices Corrigés, 3^{ème} édition, DUNOD
- [2] J.-P.Lecoutre, P. Pilibossian, Travaux Dirigés, Algèbre, 2^{ème} édition, DUNOD
- [3] J.Lelong-Ferrand, J.M. Arnaudiès, Cours de Mathématiques, Tome 1, Algèbre, 3^{ème} édition, DUNOD.
- [4] Claude Boy, Alain Nizard, Prépas TD Algèbre, Exercices et corrigés, Armand Colin.
- [5] Algèbre linéaire de Prof. Eva Bayer Fluckiger ; Dr. Philippe Chabloz