תרגול 7 – אביב 2019

דינמיקה של גוף קשיח – משוואות Lagrange

בתרגול הקודם עסקנו בכתיבת משוואות התנועה לפי מאזן הכוחות על גוף קשיח – **שיטת ניוטון-אוילר.**
בתרגול זה נעסוק בפיתוח משוואות התנועה דרך ניסוח האנרגיה הכוללת של המערכת – **שיטת לגראנז'.** הלגרנז'יאן של המערכת מוגדר לפי:

$$L \triangleq T - U$$

כאשר T הנה האנרגיה הקינטית של המערכת ו- U האנרגיה הפוטנציאלית. נניח כי למערכת N דרגות חופש ונסמן אותן ב $q_1,\dots,q_N$. משוואות התנועה של המערכת יהיו:

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}\right)+\frac{\partial D}{\partial \dot{q}_i}-\frac{\partial L}{\partial q_i}=Q_i;\; Q_i \triangleq \sum_{j=1}^{N} F_j \frac{\partial r_j}{\partial q_i}$$

Q_i - כוחות מוכללים

D - איבר דיסיפציה (Rayleigh's dissipation function)

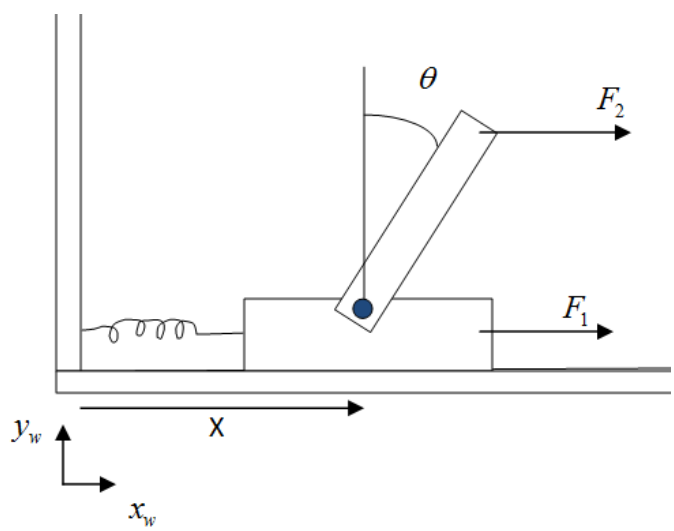
ניתן להציג את משוואות התנועה גם בצורה מטריצית:

$$linear\ model \rightarrow \begin{cases} M\ddot{\vec{q}}+C\dot{\vec{q}}+K\vec{q}=\vec{Q} \\ M_{ij}=\dfrac{\partial^2 T}{\partial \dot{q}_i \partial \dot{q}_j}, C_{ij}=\dfrac{\partial^2 D}{\partial \dot{q}_i \partial \dot{q}_j}, K_{ij}=\dfrac{\partial^2 U}{\partial q_i \partial q_j} \end{cases}$$

$$nonlinear \rightarrow H(q)\ddot{q}+C(q,\dot{q})\dot{q}+G(q)=\vec{Q}$$

תרגיל

דרוש לכתוב את משוואות התנועה של המערכת:



<u>נתונים:</u>

M - מסה של הגוף הגדול

m - מסת המוט

I_m - מומנט אינרציה של המוט

x_0 - אורך הקפיץ במצב רפוי

$2l$ - אורך המוט m

k - קבוע קפיץ

F_1, F_2 - כוחות חיצוניים

<u>פתרון:</u>

למערכת שתי דרגות חופש: x,θ. נעבור לחישוב הלגרנז'יאן:

$$L = T - U$$

$$T = T_M + T_m,\ \ T_M = \frac{1}{2}MV_M^2,\ \ T_m = \frac{1}{2}mV_m^2 + \frac{1}{2}I_m\omega^2$$

$$V_M = \dot{x}$$

$$\omega = \dot{\theta}$$

$$r_{cm} = \begin{bmatrix} x + l\sin(\theta) \\ l\cos(\theta) \end{bmatrix} \Rightarrow \dot{r}_{cm} = \begin{bmatrix} \dot{x} + l\cos(\theta)\dot{\theta} \\ -l\sin(\theta)\dot{\theta} \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow V_m^2 = \left(\dot{x} + l\cos(\theta)\dot{\theta}\right)^2 + \left(-l\sin(\theta)\dot{\theta}\right)^2 = \dot{x}^2 + 2\dot{x}\dot{\theta}l\cos(\theta) + l^2\dot{\theta}^2$$

$$T = \frac{1}{2}(M+m)\dot{x}^2 + m\dot{x}\dot{\theta}l\cos(\theta) + \frac{1}{2}\left(ml^2 + I_m\right)\dot{\theta}^2$$

$$U = U_k + U_g,\ U_k = \frac{1}{2}k\left(x - x_0\right)^2,\ U_g = mgl\cos(\theta)$$

$$U = \frac{1}{2}k\left(x - x_0\right)^2 + mgl\cos(\theta)$$

$$L = \frac{1}{2}(M+m)\dot{x}^2 + m\dot{x}\dot{\theta}l\cos(\theta) + \frac{1}{2}\left(ml^2 + I_m\right)\dot{\theta}^2 - \frac{1}{2}k\left(x - x_0\right)^2 - mgl\cos(\theta)$$

משוואת לגרנז':

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}\right)-\frac{\partial L}{\partial q_i}=Q_i$$

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{x}}\right)=\frac{d}{dt}\frac{\partial}{\partial \dot{x}}\left(\frac{1}{2}(M+m)\dot{x}^2+m\dot{x}\dot{\theta}l\cos(\theta)+\frac{1}{2}\left(ml^2+I_m\right)\dot{\theta}^2-\frac{1}{2}k\left(x-x_0\right)^2-mgl\cos(\theta)\right)=$$

$$=\frac{d}{dt}\left((M+m)\dot{x}+m\dot{\theta}l\cos(\theta)\right)=(M+m)\ddot{x}+m\ddot{\theta}l\cos(\theta)-m\dot{\theta}^2l\sin(\theta)$$

$$\frac{\partial L}{\partial x}=\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{1}{2}(M+m)\dot{x}^2+m\dot{x}\dot{\theta}l\cos(\theta)+\frac{1}{2}\left(ml^2+I_m\right)\dot{\theta}^2-\frac{1}{2}k\left(x-x_0\right)^2-mgl\cos(\theta)\right)=-k\left(x-x_0\right)$$

$$Q_i=\sum_{j=1}^{2}F_j\frac{\partial r_j}{\partial q_i}$$

$$\frac{\partial r_1}{\partial x}=\frac{\partial}{\partial x}\begin{bmatrix}x\\0\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1\\0\end{bmatrix},\quad \frac{\partial r_2}{\partial x}=\frac{\partial}{\partial x}\begin{bmatrix}x+2l\sin(\theta)\\2l\cos(\theta)\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1\\0\end{bmatrix}$$

$$Q_x=\sum_{j=1}^{2}F_j\frac{\partial r_j}{\partial x}=F_1\frac{\partial r_1}{\partial x}+F_2\frac{\partial r_2}{\partial x}=\begin{bmatrix}F_1 & 0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1\\0\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}F_2 & 0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1\\0\end{bmatrix}=F_1+F_2$$

$$(M+m)\ddot{x}+m\ddot{\theta}l\cos(\theta)-m\dot{\theta}^2l\sin(\theta)+k\left(x-x_0\right)=F_1+F_2$$

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}}\right)=\frac{d}{dt}\frac{\partial}{\partial \dot{\theta}}\left(\frac{1}{2}(M+m)\dot{x}^2+m\dot{x}\dot{\theta}l\cos(\theta)+\frac{1}{2}\left(ml^2+I_m\right)\dot{\theta}^2-\frac{1}{2}k\left(x-x_0\right)^2-mgl\cos(\theta)\right)=$$

$$=\frac{d}{dt}\left(m\dot{x}l\cos(\theta)+\left(ml^2+I_m\right)\dot{\theta}\right)=m\ddot{x}l\cos(\theta)-m\dot{x}\dot{\theta}l\sin(\theta)+\left(ml^2+I_m\right)\ddot{\theta}$$

$$\frac{\partial L}{\partial \theta}=\frac{\partial}{\partial \theta}\left(\frac{1}{2}(M+m)\dot{x}^2+m\dot{x}\dot{\theta}l\cos(\theta)+\frac{1}{2}\left(ml^2+I_m\right)\dot{\theta}^2-\frac{1}{2}k\left(x-x_0\right)^2-mgl\cos(\theta)\right)=$$

$$=-m\dot{x}\dot{\theta}l\sin(\theta)+mgl\sin(\theta)$$

$$Q_i=\sum_{j=1}^{2}F_j\frac{\partial r_j}{\partial q_i}$$

$$\frac{\partial r_1}{\partial \theta}=\frac{\partial}{\partial \theta}\begin{bmatrix}x\\0\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0\\0\end{bmatrix},\quad \frac{\partial r_2}{\partial \theta}=\frac{\partial}{\partial \theta}\begin{bmatrix}x+2l\sin(\theta)\\2l\cos(\theta)\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}2l\cos(\theta)\\-2l\sin(\theta)\end{bmatrix}$$

$$Q_\theta=\sum_{j=1}^{2}F_j\frac{\partial r_j}{\partial \theta}=F_1\frac{\partial r_1}{\partial \theta}+F_2\frac{\partial r_2}{\partial \theta}=\begin{bmatrix}F_1 & 0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}0\\0\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}F_2 & 0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}2l\cos(\theta)\\-2l\sin(\theta)\end{bmatrix}=2F_2l\cos(\theta)$$

$$m\ddot{x}l\cos(\theta)-m\dot{x}\dot{\theta}l\sin(\theta)+\left(ml^2+I_m\right)\ddot{\theta}+m\dot{x}\dot{\theta}l\sin(\theta)-mgl\sin(\theta)=2F_2l\cos(\theta)$$

$$\begin{bmatrix}M+m & ml\cos(\theta)\\ ml\cos(\theta) & ml^2+I_m\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\ddot{x}\\ \ddot{\theta}\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}0 & -m\dot{\theta}l\sin(\theta)\\ 0 & 0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\dot{x}\\ \dot{\theta}\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}k\left(x-x_0\right)\\ -mgl\sin(\theta)\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}F_1+F_2\\ 2F_2l\cos(\theta)\end{bmatrix}$$

דינמיקה של רובוט טורי – שיטת Lagrange

משוואת התנועה:

$$H(q)^{n\times n}\ddot{q}+C(q,\dot{q})^{n\times n}\dot{q}+G(q)^{n\times 1}=\tau+J^T\cdot F_{ext}\quad(1)$$

כאשר:

$H(q)$ - מטריצת אינרציה (מטריצה סימטרית).

$C(q,\dot{q})$ - מטריצת מהירויות

$G(q)$ - מטריצת הגרביטציה

τ - כוחות פנימיים במפרקים

F_{ext} - כוחות חיצוניים

n - מספר המפרקים

$$H(q)=\sum_{i=1}^{n}m_iJ_{L_i}^TJ_{L_i}+J_{A_i}^TI_iJ_{A_i}\quad(2)$$

כאשר:

m_i - מסה של חולייה i

I_i - מטריצת אינרציה של חוליה i

J_{L_i} - יעקוביאן קוי במע' מרכז הכובד של חוליה i

J_{A_i} - יעקוביאן סיבובי במע' מרכז הכובד של חוליה i

חשוב:

בחישוב מטריצת H משתמשים ביעקוביאן במערכת הכלי!!!

מציאת J_{L_i} במערכת מרכז המסה של חוליה i:

א. כל העמודות מימין לעמודה i מתאפסות.
ב. פרמטר אורך של החוליה מוחלף במיקום של מרכז הכובד של החוליה.
ג. מאפסים פרמטרים של המפרקים $i+1,\ i+2,\dots,n$.
ד. מאפסים גדלים גיאומטרים של חוליות $i+1,\ i+2,\dots,n$.

מציאת J_{A_i} במערכת מרכז המסה של חוליה i:

א. כל העמודות מימין לעמודה i מתאפסות.
ב. מאפסים פרמטרים של המפרקים $i+1,\ i+2,\dots,n$.
ג. יש לבדוק מהי האוריינטציה של מע' הצירים צמודת חוליה i שהתקבלה (בשיטת ZRP מע' i מקבילה למערכת הכלי.

$$C_{ij}=\sum_{k=1}^{n}c_{kji}\cdot\dot{q}_k \qquad (3)$$

$$c_{kji}=\frac{1}{2}\left[\frac{\partial H_{ij}}{\partial q_k}+\frac{\partial H_{ik}}{\partial q_j}-\frac{\partial H_{jk}}{\partial q_i}\right],c_{kji}=c_{jki} \qquad (4)$$

$$G(q)=-\sum_{k=1}^{n}m_i J_{L_i}^{T}g_i \qquad (5)$$

כאשר במשוואה (5) g_i ו- J_{L_i} במערכת העולם.