תרגול 9 – אביב 2019

דינמיקה של רובוט טורי – שיטת D'alembert

משוואת התנועה:

$$-\tau = \underline{\underline{J}}^T F + \sum_{i=1}^{N} \underline{\underline{J}}_i^T \left[\begin{bmatrix} \underline{\underline{M}}_i & \underline{\underline{0}} \\ \underline{\underline{0}} & \underline{\underline{I}}_i \end{bmatrix} \left[\begin{bmatrix} \underline{g}_i \\ 0 \end{bmatrix} - \underline{\underline{J}}_i \ddot{\underline{\theta}} - \dot{\underline{\underline{J}}}_i \dot{\underline{\theta}} \right] - \begin{bmatrix} [\omega_i \times] & 0 \\ 0 & [\omega_i \times] \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \underline{\underline{M}}_i & \underline{\underline{0}} \\ \underline{\underline{0}} & \underline{\underline{I}}_i \end{bmatrix} \underline{\underline{J}}_i \dot{\underline{\theta}} \right]$$

כאשר טנזורי האינרציה:

$$\underline{\underline{M}}_i = \begin{bmatrix} m_i & 0 & 0 \\ 0 & m_i & 0 \\ 0 & 0 & m_i \end{bmatrix}, \quad \underline{\underline{I}}_i = \begin{bmatrix} I_{ix} & 0 & 0 \\ 0 & I_{iy} & 0 \\ 0 & 0 & I_{iz} \end{bmatrix}$$

ומטריצת המכפלה הווקטורית (Skew-symmetric):

$$[\omega_i \times] = \begin{bmatrix} 0 & -\omega_{iz} & \omega_{iy} \\ \omega_{iz} & 0 & -\omega_{ix} \\ -\omega_{iy} & \omega_{ix} & 0 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} \omega_{ix} \\ \omega_{iy} \\ \omega_{iz} \end{bmatrix} = \underline{\underline{J}}_{iA} \dot{\underline{\theta}}$$

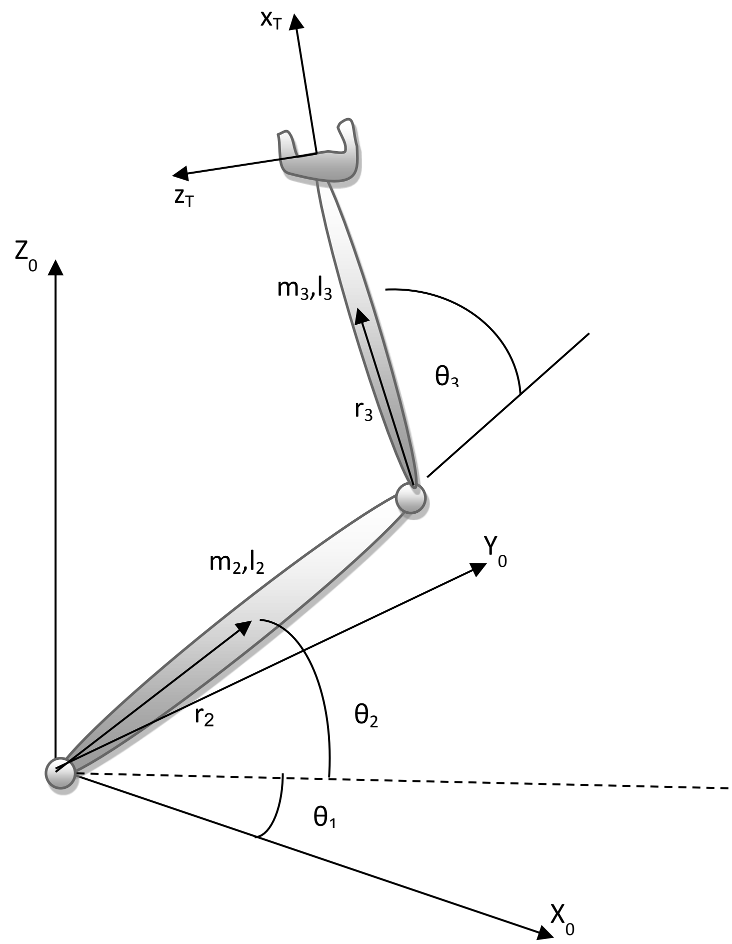
והיעקוביאן במערכת i (בדומה לשיטת Lagrange):

$$\underline{\underline{J}}_{i-1} = \underline{\underline{J}}_i \left(\theta_i = \dot{\theta}_i = 0,\ l_i = 0, l_{i-1} = r_{i-1} \right)$$

תרגיל

דרוש לכתוב את משוואות התנועה של הרובוט (רובוט מרחבי בעל 3 דרגות חופש), בהינתן היעקוביאן המלא שלו:

$$J_t = \begin{bmatrix} 0 & l_2 s_3 & 0 \\ l_2 c_2 + l_3 c_{23} & 0 & 0 \\ 0 & -l_2 c_3 - l_3 & -l_3 \\ -s_{23} & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ c_{23} & 0 & 0 \end{bmatrix}$$



<u>פתרון:</u>

תחילה נחשב את נגזרת היעקוביאן של הרובוט:

$$J_t=\begin{bmatrix} 0 & l_2 s_3 & 0 \\ l_2 c_2 + l_3 c_{23} & 0 & 0 \\ 0 & -l_2 c_3 - l_3 & -l_3 \\ -s_{23} & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ c_{23} & 0 & 0 \end{bmatrix},\quad \dot{J}_t=\begin{bmatrix} 0 & l_2 c_3 \dot{\theta}_3 & 0 \\ -l_2 s_2 \dot{\theta}_2 - l_3 s_{23}\left(\dot{\theta}_2+\dot{\theta}_3\right) & 0 & 0 \\ 0 & l_2 s_3 \dot{\theta}_3 & 0 \\ -c_{23}\left(\dot{\theta}_2+\dot{\theta}_3\right) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ -s_{23}\left(\dot{\theta}_2+\dot{\theta}_3\right) & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

במערכת מרכז המסה של החוליות:

$$J_3 = \begin{bmatrix} 0 & l_2 s_3 & 0 \\ l_2 c_2 + r_3 c_{23} & 0 & 0 \\ 0 & -l_2 c_3 - r_3 & -r_3 \\ -s_{23} & 0 & 0 \\ 0 & -1 & -1 \\ c_{23} & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad \dot{J}_3 = \begin{bmatrix} 0 & l_2 c_3 \dot{\theta}_3 & 0 \\ -l_2 s_2 \dot{\theta}_2 - r_3 s_{23}\left(\dot{\theta}_2 + \dot{\theta}_3\right) & 0 & 0 \\ 0 & l_2 s_3 \dot{\theta}_3 & 0 \\ -c_{23}\left(\dot{\theta}_2 + \dot{\theta}_3\right) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ -s_{23}\left(\dot{\theta}_2 + \dot{\theta}_3\right) & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$J_2 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ r_2 c_2 & 0 & 0 \\ 0 & -r_2 & 0 \\ -s_2 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ c_2 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad \dot{J}_2 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ -r_2 s_2 \dot{\theta}_2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ -c_2 \dot{\theta}_2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ -s_2 \dot{\theta}_2 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad J_1 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad \dot{J}_1 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

על מנת לחשב את וקטור הגרביטציה מבוטא במערכת מרכז המסה של כל חוליה נשתמש ביעקוביאן הזויתי הנתון בצורה הבאה:

$$J_A^3 = \left[{}^0R_3\right]^T J_A^W = \left[{}^0R_3\right]^T \left[\hat{z} \quad -{}^0R_2\hat{y} \quad -{}^0R_3\hat{y}\right] =$$
$$= \left[\left[{}^0R_3\right]^T \hat{z} \quad -\left[{}^0R_3\right]^T {}^0R_2\hat{y} \quad -\left[{}^0R_3\right]^T {}^0R_3\hat{y}\right]$$

וקטור הגרביטציה של החוליה שלישית במערכת מרכז המסה:

$$\underline{g}_3 = \left[{}^0R_3\right]^T \underline{g} = \left[{}^0R_3\right]^T\left(-g\hat{z}\right) = -g\left[{}^0R_3\right]^T \hat{z}$$

ניתן לראות כי קיבלנו בדיוק את העמודה הראשונה של J_A^3 מוכפל ב- $-g$. לכן ניתן לרשום:

$$\underline{g}_3 = -g\left[{}^0R_3\right]^T \hat{z} = -gJ_A^3\left[\mathit{first\ column}\right] = -gJ_3\left[4:6,1\right] = g\left[s_{23} \quad 0 \quad -c_{23}\right]^T$$

בדיוק באותה צורה ניתן לחשב את וקטור הגרביטציה לחוליות אחרות:

$$\underline{g}_2 = \left[{}^0R_2\right]^T \underline{g} = \left[{}^0R_2\right]^T\left(-g\hat{z}\right) = -gJ_A^2\left[\mathit{first\ column}\right] = -gJ_2\left[4:6,1\right] = g\left[s_2 \quad 0 \quad -c_2\right]^T$$
$$\underline{g}_1 = \left[{}^0R_1\right]^T \underline{g} = \left[{}^0R_1\right]^T\left(-g\hat{z}\right) = -gJ_A^1\left[\mathit{first\ column}\right] = -gJ_1\left[4:6,1\right] = g\left[0 \quad 0 \quad -1\right]^T$$

כעת נחשב את $\left[\omega_i \times\right]$:

$$\begin{bmatrix}\omega_{3x}\\ \omega_{3y}\\ \omega_{3z}\end{bmatrix}=J_A^3\underline{\dot{\theta}}=\begin{bmatrix}-s_{23} & 0 & 0\\ 0 & -1 & -1\\ c_{23} & 0 & 0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\dot{\theta}_1\\ \dot{\theta}_2\\ \dot{\theta}_3\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-s_{23}\dot{\theta}_1\\ -\dot{\theta}_2-\dot{\theta}_3\\ c_{23}\dot{\theta}_1\end{bmatrix}$$

$$\left[\omega_3\times\right]=\begin{bmatrix}0 & -\omega_{3z} & \omega_{3y}\\ \omega_{3z} & 0 & -\omega_{3x}\\ -\omega_{3y} & \omega_{3x} & 0\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0 & -c_{23}\dot{\theta}_1 & -\dot{\theta}_2-\dot{\theta}_3\\ c_{23}\dot{\theta}_1 & 0 & s_{23}\dot{\theta}_1\\ \dot{\theta}_2+\dot{\theta}_3 & -s_{23}\dot{\theta}_1 & 0\end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix}\omega_{2x}\\ \omega_{2y}\\ \omega_{2z}\end{bmatrix}=J_A^2\underline{\dot{\theta}}=\begin{bmatrix}-s_2\dot{\theta}_1\\ -\dot{\theta}_2\\ c_2\dot{\theta}_1\end{bmatrix}\Rightarrow\left[\omega_2\times\right]=\begin{bmatrix}0 & -\omega_{2z} & \omega_{2y}\\ \omega_{2z} & 0 & -\omega_{2x}\\ -\omega_{2y} & \omega_{2x} & 0\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0 & -c_2\dot{\theta}_1 & -\dot{\theta}_2\\ c_2\dot{\theta}_1 & 0 & s_2\dot{\theta}_1\\ \dot{\theta}_2 & -s_2\dot{\theta}_1 & 0\end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix}\omega_{1x}\\ \omega_{1y}\\ \omega_{1z}\end{bmatrix}=J_A^1\underline{\dot{\theta}}=\begin{bmatrix}0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0\\ 1 & 0 & 0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\dot{\theta}_1\\ \dot{\theta}_2\\ \dot{\theta}_3\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0\\ 0\\ \dot{\theta}_1\end{bmatrix}\Rightarrow\left[\omega_1\times\right]=\begin{bmatrix}0 & -\omega_{1z} & \omega_{1y}\\ \omega_{1z} & 0 & -\omega_{1x}\\ -\omega_{1y} & \omega_{1x} & 0\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0 & -\dot{\theta}_1 & 0\\ \dot{\theta}_1 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0\end{bmatrix}$$

המומנטים הדרושים כתוצאה מהתנועה של חוליה 3 וגרביטציה בהיעדר כוח חיצוני:

$$\tau_3=-\underline{\underline{J}}_3^T\left[\begin{bmatrix}\underline{\underline{M}}_3 & \underline{\underline{0}}\\ \underline{\underline{0}} & \underline{\underline{I}}_3\end{bmatrix}\left[\begin{bmatrix}\underline{g}_3\\ 0\end{bmatrix}-\underline{\underline{J}}_3\underline{\ddot{\theta}}-\underline{\underline{\dot{J}}}_3\underline{\dot{\theta}}\right]-\begin{bmatrix}\underline{\underline{\omega_3 x}} & 0\\ 0 & \underline{\underline{\omega_3 x}}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\underline{\underline{M}}_3 & \underline{\underline{0}}\\ \underline{\underline{0}} & \underline{\underline{I}}_3\end{bmatrix}\underline{\underline{J}}_3\underline{\dot{\theta}}\right]$$

$$\tau_2=\tau_3\begin{pmatrix}\theta_3=\dot{\theta}_3=\ddot{\theta}_3=0\\ r_3=0,\ l_2=r_2\\ m_3=m_2, I_3=I_2, \tau_3\left[3\right]=0\end{pmatrix}$$

$$\tau_1=\tau_2\begin{pmatrix}\theta_2=\dot{\theta}_2=\ddot{\theta}_2=0\\ r_2=0,\\ m_2=m_1=0, I_2=I_1=0\\ \tau_2\left[2:3\right]=0\end{pmatrix}=\begin{bmatrix}0\\ --\\ 0\\ --\\ 0\end{bmatrix}$$

$$\tau=\tau_3+\tau_2+\tau_1$$