תרגול 8 – אביב 2019

דינמיקה של רובוט טורי – שיטת Lagrange

משוואת התנועה:

$$H(q)^{n\times n}\ddot{q}+C(q,\dot{q})^{n\times n}\dot{q}+G(q)^{n\times 1}=\tau+J^{T}\cdot F_{ext}\quad(1)$$

כאשר:

$H(q)$ - מטריצת אינרציה (מטריצה סימטרית).

$C(q,\dot{q})$ - מטריצת מהירויות

$G(q)$ - מטריצת הגרביטציה

τ - כוחות פנימיים במפרקים

F_{ext} - כוחות חיצוניים

n - מספר המפרקים

$$H(q)=\sum_{i=1}^{n}m_i J_{L_i}^{T}J_{L_i}+J_{A_i}^{T}I_i J_{A_i}\quad(2)$$

כאשר:

m_i - מסה של חולייה i

I_i - מטריצת אינרציה של חוליה i

J_{L_i} - יעקוביאן קוי במע' מרכז הכובד של חוליה i

J_{A_i} - יעקוביאן סיבובי במע' מרכז הכובד של חוליה i

חשוב:

בחישוב מטריצת H משתמשים ביעקוביאן במערכת הכלי!!!

מציאת J_{L_i} במערכת מרכז המסה של חוליה i:

א. כל העמודות מימין לעמודה i מתאפסות.
ב. פרמטר אורך של החוליה מוחלף במיקום של מרכז הכובד של החוליה.
ג. מאפסים פרמטרים של המפרקים $i+1,\ i+2,\dots,n$.
ד. מאפסים גדלים גיאומטרים של חוליות $i+1,\ i+2,\dots,n$.

מציאת J_{A_i} במערכת מרכז המסה של חוליה i:

א. כל העמודות מימין לעמודה i מתאפסות.
ב. מאפסים פרמטרים של המפרקים $i+1,\ i+2,\dots,n$.
ג. יש לבדוק מהי האוריינטציה של מע' הצירים צמודת חוליה i שהתקבלה (בשיטת ZRP מע' i מקבילה למערכת הכלי.

$$C_{ij}=\sum_{k=1}^{n}c_{kji}\cdot\dot{q}_k \qquad (3)$$

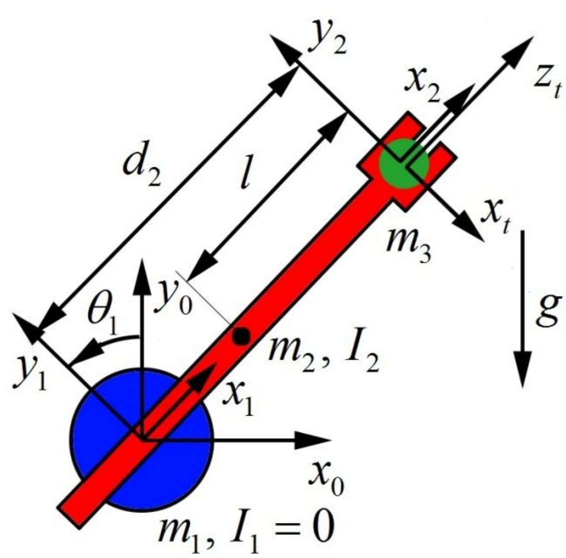
$$c_{kji}=\frac{1}{2}\left[\frac{\partial H_{ij}}{\partial q_k}+\frac{\partial H_{ik}}{\partial q_j}-\frac{\partial H_{jk}}{\partial q_i}\right], c_{kji}=c_{jki} \qquad (4)$$

$$G(q)=-\sum_{k=1}^{n}m_i J_{L_i}^T g_i \qquad (5)$$

כאשר במשוואה (5) g_i ו- J_{L_i} במערכת העולם.

<u>תרגיל</u>

דרוש לכתוב את משוואות התנועה של הרובוט:



<u>פתרון:</u>

יעקוביאן המערכת העולם:

$$J_L^W=\begin{bmatrix}-d_2s_1 & c_1\\ d_2c_1 & s_1\\ 0 & 0\end{bmatrix},\quad J_A^W=\begin{bmatrix}0&0\\0&0\\1&0\end{bmatrix}$$

יעקוביאן במערכת הכלי:

$$J_L^{tool}=\begin{bmatrix}-d_2 & 0\\ 0 & 0\\ 0 & 1\end{bmatrix},\quad J_A^{tool}=\begin{bmatrix}0&0\\-1&0\\0&0\end{bmatrix}$$

נמדל את המסה בקצה כחולייה שלישית פיקטיבית בעלת מומנט אינרציה וגודל 0. עבור חוליה 2:

$$J_L^2=\begin{bmatrix}-d_2+l & 0\\ 0 & 0\\ 0 & 1\end{bmatrix},\quad J_A^2=\begin{bmatrix}0 & 0\\ -1 & 0\\ 0 & 0\end{bmatrix}$$

עבור חוליה 1:

$$J_L^1=\begin{bmatrix}0 & 0\\ 0 & 0\\ 0 & 0\end{bmatrix},\quad J_A^1=\begin{bmatrix}0 & 0\\ -1 & 0\\ 0 & 0\end{bmatrix}$$

תרומה של המסות למטריצת האינרציה H:

$$m_3 J_{L_{tool}}^T J_{L_{tool}}=m_3\begin{bmatrix}-d_2 & 0\\ 0 & 0\\ 0 & 1\end{bmatrix}^T\begin{bmatrix}-d_2 & 0\\ 0 & 0\\ 0 & 1\end{bmatrix}=m_3\begin{bmatrix}d_2^2 & 0\\ 0 & 1\end{bmatrix}$$

$$m_2 J_{L_2}^T J_{L_2}=m_2\begin{bmatrix}-d_2+l & 0\\ 0 & 0\\ 0 & 1\end{bmatrix}^T\begin{bmatrix}-d_2+l & 0\\ 0 & 0\\ 0 & 1\end{bmatrix}=m_2\begin{bmatrix}\left(d_2-l\right)^2 & 0\\ 0 & 1\end{bmatrix}$$

$$m_1 J_{L_1}^T J_{L_1}=m_1\begin{bmatrix}0 & 0\\ 0 & 0\\ 0 & 0\end{bmatrix}^T\begin{bmatrix}0 & 0\\ 0 & 0\\ 0 & 0\end{bmatrix}=0$$

תרומה של מומנט האינרציה למטריצת האינרציה H:

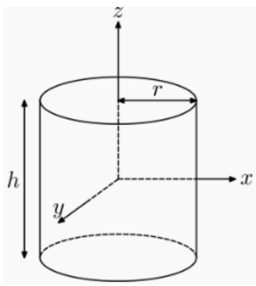
$$J_{A_3}^T I_3 J_{A_3}=\begin{bmatrix}0 & 0\\ -1 & 0\\ 0 & 0\end{bmatrix}^T\begin{bmatrix}0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}0 & 0\\ -1 & 0\\ 0 & 0\end{bmatrix}=0$$

$$J_{A_2}^T I_2 J_{A_2}=\begin{bmatrix}0 & 0\\ -1 & 0\\ 0 & 0\end{bmatrix}^T\begin{bmatrix}I_x & 0 & 0\\ 0 & I_y & 0\\ 0 & 0 & 0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}0 & 0\\ -1 & 0\\ 0 & 0\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0 & -I_y & 0\\ 0 & 0 & 0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}0 & 0\\ -1 & 0\\ 0 & 0\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}I_y & 0\\ 0 & 0\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\frac{m_2 d_2^2}{12} & 0\\ 0 & 0\end{bmatrix}$$

$$J_{A_1}^T I_1 J_{A_1}=\begin{bmatrix}0 & 0\\ -1 & 0\\ 0 & 0\end{bmatrix}^T\begin{bmatrix}0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}0 & 0\\ -1 & 0\\ 0 & 0\end{bmatrix}=0$$

מטריצת האינרציה:

$$H = m_3\begin{bmatrix} d_2^2 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} + 0 + m_2\begin{bmatrix} \left(d_2 - l\right)^2 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \frac{m_2 d_2^2}{12} & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} + 0 + 0 = \begin{bmatrix} m_3 d_2^2 + m_2\left(d_2 - l\right)^2 + \frac{m_2 d_2^2}{12} & 0 \\ 0 & m_3 + m_2 \end{bmatrix}$$



$$I = \begin{bmatrix} \frac{1}{12}m(3r^2 + h^2) & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{12}m(3r^2 + h^2) & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{2}mr^2 \end{bmatrix}$$

מטריצת המהירויות $C\left(q,\dot{q}\right)$:

$$C_{ij} = \sum_{k=1}^{n} c_{kji}\cdot\dot{q}_k, c_{kji} = \frac{1}{2}\left[\frac{\partial H_{ij}}{\partial q_k} + \frac{\partial H_{ik}}{\partial q_j} - \frac{\partial H_{jk}}{\partial q_i}\right],\ c_{kji} = c_{jki}$$

$$C_{11} = \sum_{k=1}^{n} c_{k11}\cdot\dot{q}_k = c_{111}\dot{q}_1 + c_{211}\dot{q}_2$$

$$c_{111} = \frac{1}{2}\left[\frac{\partial H_{11}}{\partial q_1} + \frac{\partial H_{11}}{\partial q_1} - \frac{\partial H_{11}}{\partial q_1}\right] = \frac{1}{2}\frac{\partial H_{11}}{\partial q_1} = \frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial\theta_1}\left(m_3 d_2^2 + m_2\left(d_2 - l\right)^2 + \frac{m_2 d_2^2}{12}\right) = 0$$

$$c_{211} = \frac{1}{2}\left[\frac{\partial H_{11}}{\partial q_2} + \frac{\partial H_{12}}{\partial q_1} - \frac{\partial H_{12}}{\partial q_1}\right] = \frac{1}{2}\frac{\partial H_{11}}{\partial q_2} = \frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial d_2}\left(m_3 d_2^2 + m_2\left(d_2 - l\right)^2 + \frac{m_2 d_2^2}{12}\right) = m_3 d_2 + m_2\left(d_2 - l\right) + \frac{m_2 d_2}{12}$$

$$C_{11} = \left(m_3 d_2 + m_2\left(d_2 - l\right) + \frac{m_2 d_2}{12}\right)\dot{d}_2$$

$$C_{12} = \sum_{k=1}^{n} c_{k21}\cdot\dot{q}_k = c_{121}\dot{q}_1 + c_{221}\dot{q}_2$$

$$c_{121} = \frac{1}{2}\left[\frac{\partial H_{12}}{\partial q_1} + \frac{\partial H_{11}}{\partial q_2} - \frac{\partial H_{21}}{\partial q_1}\right] = \frac{1}{2}\frac{\partial H_{11}}{\partial q_1} = \frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial d_2}\left(m_3 d_2^2 + m_2\left(d_2 - l\right)^2 + \frac{m_2 d_2^2}{12}\right) = m_3 d_2 + m_2\left(d_2 - l\right) + \frac{m_2 d_2}{12}$$

$$c_{221} = \frac{1}{2}\left[\frac{\partial H_{12}}{\partial q_2} + \frac{\partial H_{12}}{\partial q_2} - \frac{\partial H_{22}}{\partial q_1}\right] = -\frac{1}{2}\frac{\partial H_{22}}{\partial q_1} = \frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial\theta_1}\left(m_3 + m_2\right) = 0$$

$$C_{12} = \left(m_3 d_2 + m_2\left(d_2 - l\right) + \frac{m_2 d_2}{12}\right)\dot{\theta}_1$$

$$C_{21}=\sum_{k=1}^{n}c_{k12}\cdot\dot{q}_k=c_{112}\dot{q}_1+c_{212}\dot{q}_2$$

$$c_{112}=\frac{1}{2}\left[\frac{\partial H_{21}}{\partial q_1}+\frac{\partial H_{21}}{\partial q_1}-\frac{\partial H_{11}}{\partial q_2}\right]=-\frac{1}{2}\frac{\partial H_{11}}{\partial q_2}=-\left(m_3d_2+m_2\left(d_2-l\right)+\frac{m_2d_2}{12}\right)$$

$$c_{212}=\frac{1}{2}\left[\frac{\partial H_{21}}{\partial q_2}+\frac{\partial H_{22}}{\partial q_1}-\frac{\partial H_{12}}{\partial q_2}\right]=0$$

$$C_{21}=-\left(m_3d_2+m_2\left(d_2-l\right)+\frac{m_2d_2}{12}\right)\dot{\theta}_1$$

$$C_{ij}=\sum_{k=1}^{n}c_{kji}\cdot\dot{q}_k,c_{kji}=\frac{1}{2}\left[\frac{\partial H_{ij}}{\partial q_k}+\frac{\partial H_{ik}}{\partial q_j}-\frac{\partial H_{jk}}{\partial q_i}\right],\ c_{kji}=c_{jki}$$

$$C_{22}=\sum_{k=1}^{n}c_{k22}\cdot\dot{q}_k=c_{122}\dot{q}_1+c_{222}\dot{q}_2$$

$$c_{122}=c_{212}=0$$

$$c_{222}=\frac{1}{2}\left[\frac{\partial H_{22}}{\partial q_2}+\frac{\partial H_{22}}{\partial q_2}-\frac{\partial H_{22}}{\partial q_2}\right]=0$$

$$C_{22}=0$$

$$C\left(q,\dot{q}\right)\dot{q}=\begin{bmatrix}\left(m_3d_2+m_2\left(d_2-l\right)+\frac{m_2d_2}{12}\right)\dot{d}_2 & \left(m_3d_2+m_2\left(d_2-l\right)+\frac{m_2d_2}{12}\right)\dot{\theta}_1\\ -\left(m_3d_2+m_2\left(d_2-l\right)+\frac{m_2d_2}{12}\right)\dot{\theta}_1 & 0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\dot{\theta}_1\\ \dot{d}_2\end{bmatrix}$$

$$G\left(q\right)=-\sum_{k=1}^{n}m_iJ_{L_i}^Tg_i=-m_2\begin{bmatrix}-\left(d_2-l\right)s_1 & c_1\\ \left(d_2-l\right)c_1 & s_1\\ 0 & 0\end{bmatrix}^T\begin{bmatrix}0\\ -g\\ 0\end{bmatrix}-m_3\begin{bmatrix}-d_2s_1 & c_1\\ d_2c_1 & s_1\\ 0 & 0\end{bmatrix}^T\begin{bmatrix}0\\ -g\\ 0\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}m_2\left(d_2-l\right)c_1g+m_3d_2c_1g\\ \left(m_2+m_3\right)s_1g\end{bmatrix}$$

משוואות התנועה:

$$\begin{bmatrix}m_3d_2^2+m_2\left(d_2-l\right)^2+\frac{m_2d_2^2}{12} & 0\\ 0 & m_3+m_2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\ddot{\theta}_1\\ \ddot{d}_2\end{bmatrix}+\left(m_3d_2+m_2\left(d_2-l\right)+\frac{m_2d_2}{12}\right)\begin{bmatrix}\dot{d}_2 & \dot{\theta}_1\\ -\dot{\theta}_1 & 0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\dot{\theta}_1\\ \dot{d}_2\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}\left(m_2\left(d_2-l\right)+m_3d_2\right)c_1g\\ \left(m_2+m_3\right)s_1g\end{bmatrix}=\tau$$