קינמטיקה, דינמיקה ובקרה של רובוטים – מועד א'

- משך הבחינה: שלוש שעות.
- מותר שימוש בכל חומר עזר כתוב.
- אסור שימוש במחשבונים גרפים.

שאלה 1 (45%)

בציור 1 מתואר רובוט טורי מרחבי בעל שלוש דרגות חופש - θ_1, d_2, θ_3 הפועל בשדה כבידה בכיוון $-z_0$.

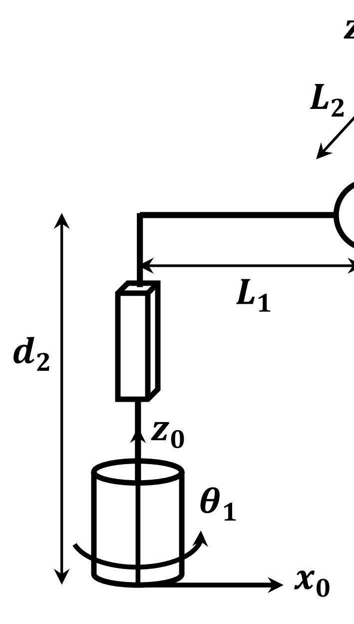
א. [20%] קינמטיקה:

- שרטטו מערכות צירים צמודות לחוליות הרובוט. ניתן לשרטט על דף הבחינה או במחברת הבחינה.
- מצאו את מטריצת הטרנספורמציה ההומוגנית ממערכת הכלי (x_t,y_t,z_t) למערכת העולם (x_o,y_o,z_o) לפי המערכות שהוגדרו בציור מס' 1.
- בהינתן מיקום התפסנית ביחס למערכת הבסיס מצאו את ערכי המפרקים θ_1, d_2, θ_3. ציירו עץ פתרונות.

ב. [25%] דינמיקה:

נתון כי מסות החוליות הן m_1, m_2, m_3 (המפרק הפריזמטי, L1, L2) מרכזי המסות נמצאים באמצע החוליות ומומנטי האינרציה ביחס למרכז המסה הם I_1, I_2, I_3 ניתן להניח כי מומנט האינרציה בכיוון ציר החוליות הארוכות זניח. ביחידת הקצה תפוסה מסה M.

מצאו את המטריצה $H, C\dot{q}$ של הרובוט.



איור 1

שאלה 2 (25%)

א. **לעיתים, החיישנים הזמינים לנו יספקו את מיקום הרובוט במערכת העולם, ונרצה לבקר ישירות את תנועת הרובוט במערכת העולם. ביישומים הדורשים דיוק רב, כגון ריתוך, ניתוח, הרכבה וכו', הדבר ידרוש בקרה במערכת העולם. בסעיף זה נראה כי הדבר אפשרי.**

נתונות משוואות התנועה של הרובוט: $H(\boldsymbol{q})\ddot{\boldsymbol{q}} + C(\boldsymbol{q},\dot{\boldsymbol{q}})\dot{\boldsymbol{q}} + G(\boldsymbol{q}) = \boldsymbol{\tau}$

כמו כן מתקיים: $\dot{\boldsymbol{x}} = J(\boldsymbol{q})\dot{\boldsymbol{q}}$.

הראו שהבקר במערכת העולם:

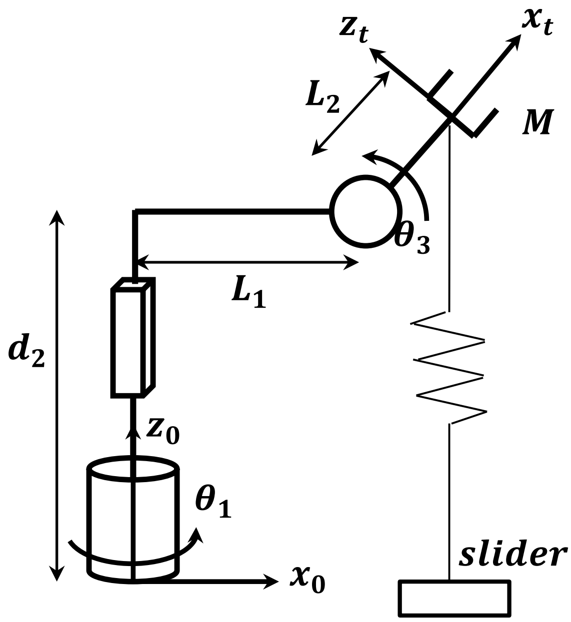
$$\boldsymbol{u} = J^T(\boldsymbol{q})\left(K_d(\dot{\boldsymbol{x}}_d - \dot{\boldsymbol{x}}) + K_p(\boldsymbol{x}_d - \boldsymbol{x})\right) + G(\boldsymbol{q})$$

מייצב אסימפטוטית את המערכת כאשר $\boldsymbol{x},\dot{\boldsymbol{x}}$ - מיקום ומהירות רגעיים ו$\boldsymbol{x}_d$ - מיקום רצוי במערכת העולם. הנח כי הרובוט צריך לסיים את תנועתו במנוחה.

ב. כעת משימת הרובוט היא לדחוק קפיץ בעל קבוע k החופשי לנוע במישור $x-y$ ללא חיכוך כפי שמתואר בציור מספר 2. אורך הקפיץ החופשי הוא l.

נתון כי מטריצה G לא תלויה במומנטי האינרציה. יש לתכנן בקר min-max כאשר I_3 וקבוע הקפיץ k לא ידועים בוודאות:

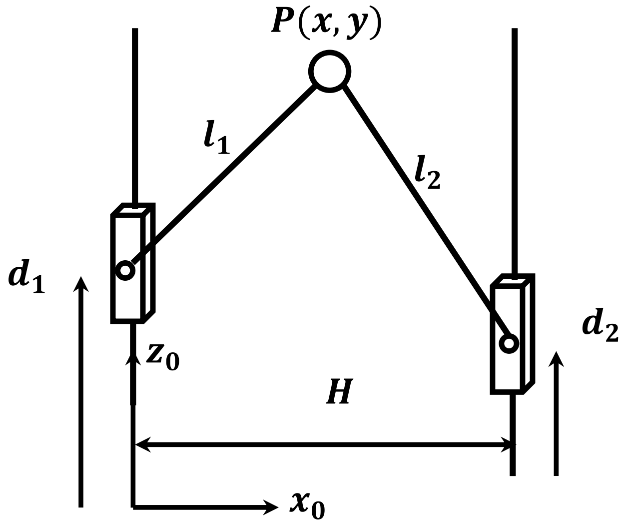
$k_{min} < k < k_{max}$, $0 < I_3 < I_{3max}$.



איור 2

<u>שאלה 3 (30%)</u>

נתון רובוט מקבילי מישורי בעל מפרקים אקטיביים d_1, d_2. משימת הרובוט היא $P(x, y)$.



איור 3

א. מצאו את הקינמטיקה ההפוכה של הרובוט.
ב. חשבו את מטריצות היעקוביאן של הרובוט.
ג. מהם המצבים הסינגולריים של הרובוט? הסבר את משמעותם.

בהצלחה!

פתרון

שאלה 1:

נתחיל מפתרון הקינמטיקה הישירה:

ביחס למצב האפס, נגדיר מט' טרנספורמציה:

$$
{}^{0}A_1=\left(\begin{array}{ccc|c} c_1 & -s_1 & 0 & 0\\ s_1 & c_1 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 1 & 0\\ \hline 0 & 0 & 0 & 1\end{array}\right),\ {}^{1}A_2=\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & L_1\\ 0 & 1 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 1 & d_2\\ \hline 0 & 0 & 0 & 1\end{array}\right),\ {}^{2}A_3=\left(\begin{array}{ccc|c} c_3 & 0 & -s_3 & 0\\ 0 & 1 & 0 & 0\\ s_3 & 0 & c_3 & 0\\ \hline 0 & 0 & 0 & 1\end{array}\right),
$$

$$
{}^{3}A_t=\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & L_2\\ 0 & 1 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 1 & 0\\ \hline 0 & 0 & 0 & 1\end{array}\right)
$$

נכפיל:

$$
{}^{0}A_2={}^{0}A_1\,{}^{1}A_2=\left(\begin{array}{ccc|c} c_1 & -s_1 & 0 & L_1c_1\\ s_1 & c_1 & 0 & L_1s_1\\ 0 & 0 & 1 & d_2\\ \hline 0 & 0 & 0 & 1\end{array}\right)
$$

$$
{}^{0}A_3={}^{0}A_2\,{}^{2}A_3=\left(\begin{array}{ccc|c} c_1 & -s_1 & 0 & L_1c_1\\ s_1 & c_1 & 0 & L_1s_1\\ 0 & 0 & 1 & d_2\\ \hline 0 & 0 & 0 & 1\end{array}\right)\left(\begin{array}{ccc|c} c_3 & 0 & -s_3 & 0\\ 0 & 1 & 0 & 0\\ s_3 & 0 & c_3 & 0\\ \hline 0 & 0 & 0 & 1\end{array}\right)=\left(\begin{array}{ccc|c} c_1c_3 & -s_1 & -c_1s_3 & L_1c_1\\ s_1c_3 & c_1 & -s_1s_3 & L_1s_1\\ s_3 & 0 & c_3 & d_2\\ \hline 0 & 0 & 0 & 1\end{array}\right)
$$

$$
{}^{0}A_t={}^{0}A_3\,{}^{3}A_t=\left(\begin{array}{ccc|c} c_1c_3 & -s_1 & -c_1s_3 & L_1c_1\\ s_1c_3 & c_1 & -s_1s_3 & L_1s_1\\ s_3 & 0 & c_3 & d_2\\ \hline 0 & 0 & 0 & 1\end{array}\right)\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & L_2\\ 0 & 1 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 1 & 0\\ \hline 0 & 0 & 0 & 1\end{array}\right)=\left(\begin{array}{ccc|c} c_1c_3 & -s_1 & -c_1s_3 & L_2c_1c_3+L_1c_1\\ s_1c_3 & c_1 & -s_1s_3 & L_2s_1c_3+L_1s_1\\ s_3 & 0 & c_3 & L_2s_3+d_2\\ \hline 0 & 0 & 0 & 1\end{array}\right)
$$

נוכל להמשיך לקינמטיקה ההפוכה:

$$
\vec{P}=\begin{pmatrix}P_x\\P_y\\P_z\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}L_2c_1c_3+L_1c_1\\L_2s_1c_3+L_1s_1\\L_2s_3+d_2\end{pmatrix}\Rightarrow\begin{cases}P_x=L_2c_1c_3+L_1c_1\\P_y=L_2s_1c_3+L_1s_1\\P_z=L_2s_3+d_2\end{cases}
$$

נשים לב שמתקיים:

$$
\begin{cases}P_x=\left(L_2c_3+L_1\right)c_1\\P_y=\left(L_2c_3+L_1\right)s_1\end{cases}\Rightarrow\boxed{\theta_1=a\tan2\left(\pm P_y,\pm P_x\right)}\rightarrow 2\,solutions
$$

נבצע מניפולציה על משוואות 1-3:

$$
\begin{cases}P_x=L_2c_1c_3+L_1c_1\\P_y=L_2s_1c_3+L_1s_1\\P_z=L_2s_3+d_2\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}P_x-L_1c_1=L_2c_1c_3\\P_y-L_1s_1=L_2s_1c_3\\P_z-d_2=L_2s_3\end{cases}
$$

$$
(1)^2+(2)^2+(3)^2\rightarrow
$$

$$
\left(P_x-L_1c_1\right)^2+\left(P_y-L_1s_1\right)^2+\left(P_z-d_2\right)^2=\left(L_2c_1c_3\right)^2+\left(L_2s_1c_3\right)^2+\left(L_2s_3\right)^2
$$

$$
\Rightarrow\left(P_z-d_2\right)^2=L_2^2-\left(P_y-L_1s_1\right)^2-\left(P_x-L_1c_1\right)^2
$$

$$
\Rightarrow\boxed{d_2=P_z\pm\sqrt{L_2^2-\left(P_y-L_1s_1\right)^2-\left(P_x-L_1c_1\right)^2}}\rightarrow 2\ solutions
$$

לבסוף נקבל:

$$\boxed{\theta_3 = a\tan 2\left(P_z - d_2, \frac{P_x - L_1 c_1}{c_1}\right)} \rightarrow 1\ solution$$

עץ הפתרונות יהיה:

$$\theta_1^U \begin{array}{l} \nearrow d_2^U \rightarrow \theta_3 \\ \searrow d_2^L \rightarrow \theta_3 \end{array}$$

$$\theta_1^L \begin{array}{l} \nearrow d_2^U \rightarrow \theta_3 \\ \searrow d_2^L \rightarrow \theta_3 \end{array}$$

נעבור לחישוב יעקוביאנים. היעקוביאן הקווי:

$$^{W}J_L = \frac{\partial \vec{P}}{\partial q} = \begin{pmatrix} -\left(L_2c_3+L_1\right)s_1 & 0 & -L_2c_1s_3 \\ \left(L_2c_3+L_1\right)c_1 & 0 & -L_2s_1s_3 \\ 0 & 1 & L_2c_3 \end{pmatrix} \Rightarrow$$

$$^{T}J_L = {}^{T}R_0\, {}^{W}J_L = \begin{pmatrix} c_1c_3 & s_1c_3 & s_3 \\ -s_1 & c_1 & 0 \\ -c_1s_3 & -s_1s_3 & c_3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -\left(L_2c_3+L_1\right)s_1 & 0 & -L_2c_1s_3 \\ \left(L_2c_3+L_1\right)c_1 & 0 & -L_2s_1s_3 \\ 0 & 1 & L_2c_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & s_3 & 0 \\ L_2c_3+L_1 & 0 & 0 \\ 0 & c_3 & L_2 \end{pmatrix}$$

נעבור לחישוב היעקוביאן הזוויתי. לפי שיטת Whitney:

$$J_{A,1} = \hat{z}_0 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix},\ J_{A,2} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix},\ J_{A,3} = {}^{0}R_2 \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} s_1 \\ -c_1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

ולכן:

$$^{W}J_A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & s_1 \\ 0 & 0 & -c_1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow {}^{T}J_A = {}^{T}R_0\, {}^{W}J_A = \begin{pmatrix} c_1c_3 & s_1c_3 & s_3 \\ -s_1 & c_1 & 0 \\ -c_1s_3 & -s_1s_3 & c_3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 0 & s_1 \\ 0 & 0 & -c_1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} s_3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ c_3 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

נעבור לדינמיקה. היעקוביאנים במערכת מרכז הכובד של כל חוליה:

$$^{T}J_{L,1} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},\ {}^{T}J_{L,2} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ \frac{1}{2}L_1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix},\ {}^{T}J_{L,3} = \begin{pmatrix} 0 & s_3 & 0 \\ \frac{1}{2}L_2c_3+L_1 & 0 & 0 \\ 0 & c_3 & \frac{1}{2}L_2 \end{pmatrix}$$

$$^{T}J_{L,4} = \begin{pmatrix} 0 & s_3 & 0 \\ L_2c_3+L_1 & 0 & 0 \\ 0 & c_3 & L_2 \end{pmatrix}$$

$$^{T}J_{A,1} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix},\ {}^{T}J_{A,2} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix},\ {}^{T}J_{A,3} = \begin{pmatrix} s_3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ c_3 & 0 & 0 \end{pmatrix},\ {}^{T}J_{A,4} = \begin{pmatrix} s_3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ c_3 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

לכן:

$$m_1 J_{L,1}^T J_{L,1} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},\ m_2 J_{L,2}^T J_{L,2} = \begin{pmatrix} \frac{1}{4} m_2 L_1^2 & 0 & 0 \\ 0 & m_2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$m_3 J_{L,3}^T J_{L,3} = \begin{pmatrix} m_3\left(\frac{1}{2} L_2 c_3 + L_1\right)^2 & 0 & 0 \\ 0 & m_3 & \frac{1}{2} m_3 L_2 c_3 \\ 0 & \frac{1}{2} m_3 L_2 c_3 & \frac{1}{4} m_3 L_2^2 \end{pmatrix}$$

$$M J_{L,4}^T J_{L,4} = \begin{pmatrix} M\left(L_2 c_3 + L_1\right)^2 & 0 & 0 \\ 0 & M & M L_2 c_3 \\ 0 & M L_2 c_3 & M L_2^2 \end{pmatrix}$$

עבור החלק הזוויתי:

$$I_1 = \begin{pmatrix} I_1 & 0 & 0 \\ 0 & I_1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},\ I_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & I_2 & 0 \\ 0 & 0 & I_2 \end{pmatrix},\ I_3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & I_3 & 0 \\ 0 & 0 & I_3 \end{pmatrix},\ I_4 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow J_{A,1}^T I_1 J_{A,1} = J_{A,4}^T I_4 J_{A,4} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},\ J_{A,2}^T I_2 J_{A,2} = \begin{pmatrix} I_2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},\ J_{A,3}^T I_3 J_{A,3} = \begin{pmatrix} I_3 c_3^2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & I_3 \end{pmatrix}$$

ולכן מטריצת האינרציה תהיה:

$$H = \sum_{i=1}^{4} m_i J_{L.i}^T J_{L.i} + J_{A.i}^T I_i J_{A.i} =$$

$$\boxed{\begin{pmatrix} \frac{1}{4} m_2 L_1^2 + m_3\left(\frac{1}{2} L_2 c_3 + L_1\right)^2 + M\left(L_2 c_3 + L_1\right)^2 + I_2 + I_3 c_3^2 & 0 & 0 \\ 0 & m_2 + m_3 + M & \frac{1}{2} m_3 L_2 c_3 + M L_2 c_3 \\ 0 & \frac{1}{2} m_3 L_2 c_3 + M L_2 c_3 & \frac{1}{4} m_3 L_2^2 + M L_2^2 + I_3 \end{pmatrix}}$$

נחשב נגזרות:

$$\frac{\partial H_{ij}}{\partial \theta_1} = 0,\ \frac{\partial H_{ij}}{\partial d_2} = 0,$$

$$\frac{\partial H_{ij}}{\partial d_3} = \begin{cases} -m_3 L_2\left(\frac{1}{2} L_2 c_3 + L_1\right) s_3 - 2 M L_2\left(L_2 c_3 + L_1\right) s_3 - 2 I_3 c_3 s_3 = \alpha & ,ij = 11 \\ -\left(\frac{1}{2} m_3 L_2 + M L_2\right) s_3 = \beta & ,ij = 32/23 \\ 0 & ,else \end{cases}$$

לכן:

$$\left\{\begin{array}{l} C_{11}=\sum_{k=1}^{3}c_{k11}\dot{q}_k;\ c_{111}=0,\ c_{211}=0,\ c_{311}=\frac{1}{2}\alpha\Rightarrow C_{11}=\frac{1}{2}\alpha\dot{\theta}_3 \\ C_{12}=\sum_{k=1}^{3}c_{k21}\dot{q}_k;\ c_{121}=0,\ c_{221}=0,\ c_{321}=0\Rightarrow C_{12}=0 \\ C_{13}=\sum_{k=1}^{3}c_{k31}\dot{q}_k;\ c_{131}=-\frac{1}{2}\alpha,\ c_{231}=0,\ c_{331}=0\Rightarrow C_{13}=\frac{1}{2}\alpha\dot{\theta}_1 \\ C_{21}=\sum_{k=1}^{3}c_{k12}\dot{q}_k;\ c_{112}=0,\ c_{212}=0,\ c_{312}=0\Rightarrow C_{21}=0 \\ C_{22}=\sum_{k=1}^{3}c_{k22}\dot{q}_k;\ c_{122}=0,\ c_{222}=0,\ c_{322}=0\Rightarrow C_{22}=0 \\ C_{23}=\sum_{k=1}^{3}c_{k32}\dot{q}_k;\ c_{132}=0,\ c_{232}=0,\ c_{332}=\beta\Rightarrow C_{23}=\beta\dot{\theta}_3 \\ C_{31}=\sum_{k=1}^{3}c_{k13}\dot{q}_k;\ c_{113}=-\frac{1}{2}\alpha,\ c_{213}=0,\ c_{313}=0\Rightarrow C_{31}=-\frac{1}{2}\alpha\dot{\theta}_1 \\ C_{32}=\sum_{k=1}^{3}c_{k23}\dot{q}_k;\ c_{123}=0,\ c_{223}=0,\ c_{323}=0\Rightarrow C_{32}=0 \\ C_{33}=\sum_{k=1}^{3}c_{k33}\dot{q}_k;\ c_{133}=0,\ c_{233}=0,\ c_{333}=0\Rightarrow C_{33}=0 \end{array}\right. \Rightarrow C=\begin{pmatrix} \frac{1}{2}\alpha\dot{\theta}_3 & 0 & \frac{1}{2}\alpha\dot{\theta}_1 \\ 0 & 0 & \beta\dot{\theta}_3 \\ -\frac{1}{2}\alpha\dot{\theta}_1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

ולכן:

$$\boxed{C(q,\dot{q})}=\begin{pmatrix} \frac{1}{2}\alpha\dot{\theta}_3 & 0 & \frac{1}{2}\alpha\dot{\theta}_1 \\ 0 & 0 & \beta\dot{\theta}_3 \\ -\frac{1}{2}\alpha\dot{\theta}_1 & 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \dot{\theta}_1 \\ \dot{d}_2 \\ \dot{\theta}_3 \end{pmatrix}=\boxed{\begin{pmatrix} \alpha\dot{\theta}_1\dot{\theta}_3 \\ \beta\dot{\theta}_3^2 \\ -\frac{1}{2}\alpha\dot{\theta}_1^2 \end{pmatrix}}$$

שאלה 2:

א. נגדיר פונקציית ליאפונוב:

$$V\left(q,\dot{q}\right)=\frac{1}{2}\left(\dot{q}^{T}H\dot{q}+e_{x}^{T}K_{p}e_{x}\right);\ e_{x}=x-x_{d}$$

נגזרת ליאפונוב:

$$W\left(q,\dot{q}\right)=\dot{q}^{T}H\ddot{q}+\frac{1}{2}\dot{q}^{T}\dot{H}\dot{q}+e_{x}^{T}K_{p}\dot{e}_{x}=\dot{q}^{T}\left(u-G-C\dot{q}\right)+\frac{1}{2}\dot{q}^{T}\dot{H}\dot{q}+e_{x}^{T}K_{p}\dot{e}_{x}=$$

$$=\underbrace{\dot{q}^{T}\left[\frac{1}{2}\dot{H}-C\right]\dot{q}}_{=0\ \text{from class}}+\dot{q}^{T}J^{T}\left(-K_{d}\dot{e}_{x}-K_{p}e_{x}\right)+e_{x}^{T}K_{p}\dot{e}$$

אנו יודעים שמתקיים:

$$\dot{e}_{x}=\dot{x}-\dot{x}_{d}=\dot{x}=J\dot{q}\Rightarrow$$

$$W\left(q,\dot{q}\right)=-\dot{q}^{T}J^{T}\left(K_{d}J\dot{q}+K_{p}e_{x}\right)+e_{x}^{T}K_{p}\dot{e}=\underbrace{-\dot{q}^{T}J^{T}K_{d}J\dot{q}}_{\triangleq\beta<0}-\dot{q}^{T}J^{T}K_{p}e_{x}+e_{x}^{T}K_{p}J\dot{q}=$$

$$\gamma=e_{x}^{T}K_{p}J\dot{q}\in\mathbb{R}^{1}\Rightarrow\gamma^{T}=\dot{q}^{T}J^{T}K_{p}e_{x}=\gamma$$

$$\boxed{W\left(q,\dot{q}\right)}=\beta-\gamma^{T}+\gamma=\beta-\gamma+\gamma=\boxed{\beta<0}$$

ולכן הבקר יציב.

ב. אי-וודאות:

$$\eta=\eta_{0}+\tilde{\eta}$$

$$\eta=J^{T}F-H\ddot{q}_{r}-C\dot{q}-G+Pe=J^{T}F+J^{T}\tilde{F}-\tilde{H}\ddot{q}_{r}-H_{0}\ddot{q}_{r}-C\dot{q}_{r}-G+Pe$$

נבחר $\tilde{P}>0$, $P=\begin{bmatrix}\tilde{P}&0\\0&\tilde{P}\end{bmatrix}$. נגדיר: $k=k_{\min}+\tilde{k},\quad 0<\tilde{k}<k_{\max}-k_{\min}$

$$\eta=\eta_{0}+\tilde{\eta}$$

$$\eta_{0}=J^{T}F-H_{0}\ddot{q}_{r}-C\dot{q}_{r}-G+Pe$$

$$\tilde{\eta}=J^{T}\tilde{F}-\tilde{H}\ddot{q}_{r}-\tilde{C}\dot{q}_{r}$$

$$\tilde{\eta}=\begin{pmatrix}-\left(L_{2}c_{3}+L_{1}\right)s_{1}&0&-L_{2}c_{1}s_{3}\\\left(L_{2}c_{3}+L_{1}\right)c_{1}&0&-L_{2}s_{1}s_{3}\\0&1&L_{2}c_{3}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0\\0\\-\tilde{k}\left(L_{2}s_{3}+d_{2}-l\right)\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}I_{3}c_{3}^{2}&0&0\\0&0&0\\0&0&I_{3}\end{pmatrix}\ddot{q}_{r}-$$

$$-\begin{pmatrix}-I_{3}c_{3}s_{3}\dot{\theta}_{3}&0&-I_{3}c_{3}s_{3}\dot{\theta}_{1}\\0&0&0\\I_{3}c_{3}s_{3}\dot{\theta}_{1}&0&0\end{pmatrix}\dot{q}_{r}=$$

$$=\begin{pmatrix}\tilde{k}L_{2}c_{1}s_{3}\left(L_{2}s_{3}+d_{2}-l\right)\\-\tilde{k}L_{2}s_{1}s_{3}\left(L_{2}s_{3}+d_{2}-l\right)\\-\tilde{k}L_{2}c_{3}\left(L_{2}s_{3}+d_{2}-l\right)\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}I_{3}c_{3}^{2}\ddot{q}_{r,1}\\0\\I_{3}\ddot{q}_{r,3}\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}-I_{3}c_{3}s_{3}\left(\dot{\theta}_{3}\dot{q}_{r,1}-\dot{\theta}_{1}\dot{q}_{r,3}\right)\\0\\I_{3}c_{3}s_{3}\dot{\theta}_{1}\dot{q}_{r,1}\end{pmatrix}$$

עלינו לחסום את $\tilde{\eta}$:

$$\left\|\tilde{\eta}\right\| = \left\| \begin{pmatrix} \tilde{k}L_2c_1s_3\left(L_2s_3+d_2-l\right) \\ -\tilde{k}L_2s_1s_3\left(L_2s_3+d_2-l\right) \\ -\tilde{k}L_2c_3\left(L_2s_3+d_2-l\right) \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} I_3c_3^2\ddot{q}_{r,1} \\ 0 \\ I_3\ddot{q}_{r,3} \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} -I_3c_3s_3\left(\dot{\theta}_3\dot{q}_{r,1}-\dot{\theta}_1\dot{q}_{r,3}\right) \\ 0 \\ I_3c_3s_3\dot{\theta}_1\dot{q}_{r,1} \end{pmatrix} \right\| \le$$

$$\le \left\| \tilde{k}L_2 \begin{pmatrix} -c_1s_3\left(L_2s_3+d_2-l\right) \\ s_1s_3\left(L_2s_3+d_2-l\right) \\ c_3\left(L_2s_3+d_2-l\right) \end{pmatrix} \right\| + \left\| I_3 \begin{pmatrix} c_3^2\ddot{q}_{r,1} \\ 0 \\ \ddot{q}_{r,3} \end{pmatrix} \right\| + \left\| I_3 \begin{pmatrix} c_3s_3\left(\dot{\theta}_3\dot{q}_{r,1}-\dot{\theta}_1\dot{q}_{r,3}\right) \\ 0 \\ -c_3s_3\dot{\theta}_1\dot{q}_{r,1} \end{pmatrix} \right\| =$$

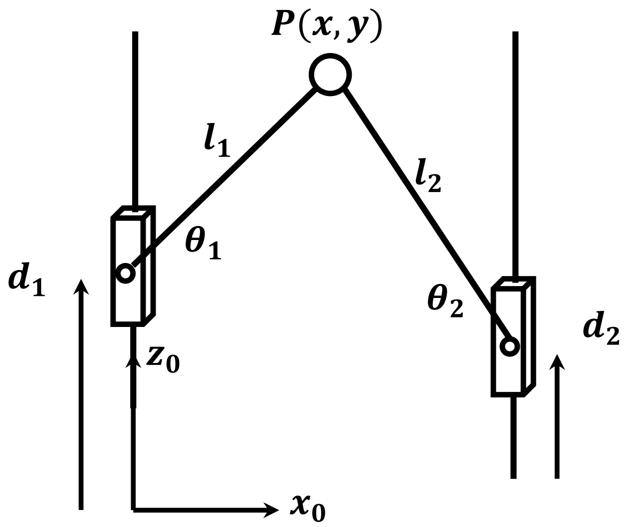
$$= \left|\tilde{k}L_2\right|\left|L_2s_3+d_2-l\right| + \left|I_3\right|\left(\sqrt{c_3^4\ddot{q}_{r,1}^2+\ddot{q}_{r,3}^2} + \left|c_3s_3\right|\sqrt{\left(\dot{\theta}_3\dot{q}_{r,1}-\dot{\theta}_1\dot{q}_{r,3}\right)^2+\left(\dot{\theta}_1\dot{q}_{r,1}\right)^2}\right) \le$$

$$\le \boxed{\left(k_{\max}-k_{\min}\right)L_2\left|L_2+d_2-l\right| + I_{3,\max}\left(\sqrt{\ddot{q}_{r,1}^2+\ddot{q}_{r,3}^2} + \sqrt{\left(\dot{\theta}_3\dot{q}_{r,1}-\dot{\theta}_1\dot{q}_{r,3}\right)^2+\left(\dot{\theta}_1\dot{q}_{r,1}\right)^2}\right) = \tilde{\rho}}$$

חוק הבקרה יהיה: $u = -\rho\frac{s}{\|s\|+\delta};\ \rho = \max\left\{0, \frac{s^T\eta_0}{\|s\|} + \beta\tilde{\rho}\right\},\ \beta > 1$

<u>שאלה 3:</u>

א. נגדיר משתני עזר:



נקבל:

$$\begin{cases} d_1 + l_1s_1 = y = d_2 + l_2s_2 \\ l_1c_1 = x = H - l_2c_2 \end{cases}$$

נסכום ונעלה בריבוע:

$$\left(l_1s_1\right)^2 + \left(l_1c_1\right)^2 = \left(y-d_1\right)^2 + x^2$$

$$\Rightarrow \boxed{d_1 = y \pm \sqrt{l_1^2 - x^2}}$$

$$\left(l_2s_2\right)^2 + \left(l_2c_2\right)^2 = \left(y-d_2\right)^2 + \left(H-x\right)^2$$

$$\Rightarrow \boxed{d_2 = y \pm \sqrt{l_2^2 - \left(H-x\right)^2}}$$

ב. נגדיר:

$$F = \begin{pmatrix} \left(y-d_1\right)^2 + x^2 - l_1^2 \\ \left(y-d_2\right)^2 + \left(H-x\right)^2 - l_2^2 \end{pmatrix} = \vec{0}$$

נגזור :

$$J_x=\frac{\partial F}{\partial x}=\begin{pmatrix}2x & 2\left(y-d_1\right)\\ -2\left(H-x\right) & 2\left(y-d_2\right)\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2x & \pm2\sqrt{l_1^2-x^2}\\ -2\left(H-x\right) & \pm2\sqrt{l_2^2-\left(H-x\right)^2}\end{pmatrix}$$

$$J_q=-\frac{\partial F}{\partial q}=\begin{pmatrix}-2\left(y-d_1\right) & 0\\ 0 & -2\left(y-d_2\right)^2\end{pmatrix}$$

ג. נחשב:

$$\det\left(J_q\right)=0 \Rightarrow \boxed{d_1, d_2 = y}$$

$$\det\left(J_x\right)=x^2\left(l_2^2-\left(H-x\right)^2\right)=\left(H-x\right)^2\left(l_1^2-x^2\right)=0$$

$$x^2 l_2^2 - H^2x^2 + 2Hx^3 - x^4 = l_1^2H^2 - 2l_1^2Hx + l_1^2x^2 - H^2x^2 + 2Hx^3 - x^4$$

$$\left(l_2^2-l_1^2\right)x^2 + 2l_1^2Hx - l_1^2H^2 = 0$$

$$\boxed{x_{1,2}} = \frac{-2l_1^2H \pm \sqrt{4l_1^4H^2 + 4l_1^2H^2\left(l_2^2-l_1^2\right)}}{2\left(l_2^2-l_1^2\right)} = \frac{-Hl_1\left(l_1 \pm l_2\right)}{\left(l_2^2-l_1^2\right)} \Rightarrow \boxed{x_1 = \frac{Hl_1}{l_1-l_2},\; x_2 = \frac{Hl_1}{l_1+l_2}}$$