תרגול 6 – אביב 2019

דינמיקה ברובוט טורי – שיטת ניוטון אוילר

דינמיקה הפוכה- מציאת ערכי כוחות ומומנטי המפרקים כתלות בזמן בהינתן עומס על יחידת הקצה $\tau(t)$ לאורך מסלול.

עבור גוף קשיח יחיד במערכת העולם, משוואות שיווי המשקל הדינמיות נתונות ע"י:

$$\sum_i F_i = \frac{d}{dt}(mv_c) = ma_c$$
$$\sum_i M_i^c = \frac{d}{dt}(I_c\omega)$$

ובמערכת צמודת גוף:

$$\sum_i F_i^b = m\left(\dot{v}^b + \omega^b \times v^b\right) = ma_c^b$$
$$\sum_i M_c^b = I^b\dot{\omega}_b + \omega^b \times \left(I^b\omega^b\right)$$

על מנת לפתור את הדינמיקה ההפוכה נבצע 2 תהליכים רקורסיביים – תחילה, נחשב את הפרמטרים הקינמטיים (מהירויות, תאוצות) החל מהחוליה הראשונה עד לסוף הרובוט ("רקורסיה קדמית"). לאחר מכן, בהינתן העומס על יחידת הקצה, נחשב את הכוח/מומנט שתורמת כל חוליה מהחוליה האחרונה אל הראשונה ("רקורסיה אחורית").

קינמטיקה – "רקורסיה קדמית"

חשוב: עובדים במערכת צמודת חוליה.

1. **מהירות זוויתית:** $\underline{\omega}_i = \left({}^{i-1}R_i\right)^T \underline{\omega}_{i-1} + \hat{u}_i\dot{q}_i$

   כאשר $\hat{u}_i$ הוא ציר מפרק i מבוטא במערכת i.

2. **תאוצה זוויתית:** $\underline{\alpha}_i = \left({}^{i-1}R_i\right)^T \underline{\alpha}_{i-1} + \hat{u}_i\ddot{q}_i + \underline{\omega}_i \times \hat{u}_i\dot{q}_i$

   עבור מפרק קווי $\dot{q}_i = \ddot{q}_i = 0$.

3. **תאוצת מרכז הכובד של חוליה** i:

   $$\underline{a}_{ci} = \left({}^{i-1}R_i\right)^T \underline{a}_{e,i-1} + \underline{\dot{\omega}}_i \times \underline{r}_{i,ci} + \underline{\omega}_i \times \left(\underline{\omega}_i \times \underline{r}_{i,ci}\right) + \hat{u}_i\ddot{d}_i + 2\left(\underline{\omega}_i \times \hat{u}_i\right)\dot{d}_i$$

   עבור מפרק סיבובי $\dot{d}_i = \ddot{d}_i = 0$.

   $\underline{a}_{e,i-1}$ - תאוצת קצה חוליה $i-1$.

4. **תאוצת קצה חוליה** i:

$$\underline{a}_{ei} = \left({}^{i-1}R_i\right)^T \underline{a}_{e,i-1} + \underline{\dot{\omega}}_i \times \underline{r}_{i,ei} + \underline{\omega}_i \times \left(\underline{\omega}_i \times \underline{r}_{i,ei}\right) + \hat{u}_i\ddot{d}_i + 2\left(\underline{\omega}_i \times \hat{u}_i\right)\dot{d}_i$$

עבור מפרק סיבובי $\dot{d}_i = \ddot{d}_i = 0$.

- **תנאי התחלה** לחישוב רקורסיה קדמית: $\underline{\omega}_0 = \underline{\alpha}_0 = \underline{a}_{c,0} = \underline{a}_{e,0} = \vec{0}$
- $\underline{r}_{i,ci}$ - וקטור מבסיס חוליה i אל מרכז הכובד שלה מבוטא במערכת i.
- $\underline{r}_{i,ei} = \underline{r}_{i,i+1}$ - וקטור מבסיס חוליה i אל קצה החוליה מבוטא במערכת i.

דינמיקה – "רקורסיה אחורית"

1. **כוח שמפעילה חוליה $i+1$ על חוליה i:**

$$\underline{f}_i = {}^iR_{i+1}\underline{f}_{i+1} + m_i\underline{a}_{ci} - m_i\underline{g}_i$$

כאשר $\underline{g}_i = \left({}^0R_i\right)^T \underline{g}^{(0)}$.

2. **מומנטים שמפעילה חוליה $i+1$ על חוליה i:**

$$\underline{M}_i = {}^iR_{i+1}\underline{M}_{i+1} - \underline{f}_i \times \underline{r}_{i,ci} + \left({}^iR_{i+1}\underline{f}_{i+1}\right) \times \underline{r}_{i+1,ci} + I_i\underline{\alpha}_i + \underline{\omega}_i \times \left(I_i\underline{\omega}_i\right)$$

כאשר $\underline{r}_{i+1,ci} = \underline{r}_{i,ei} - \underline{r}_{i,ci}$ - וקטור מקצה חוליה i אל מרכז הכובד של חוליה i.

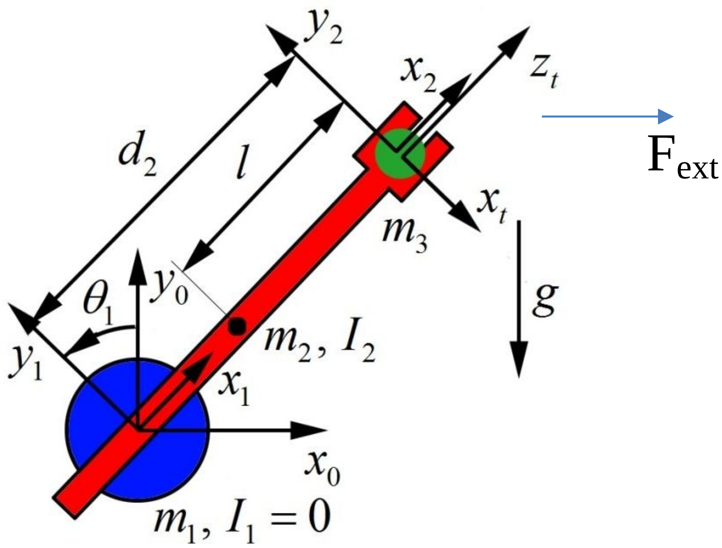
- **תנאי קצה:**

$${}^nR_{n+1}\underline{f}_{n+1} = -\underline{F}_{ext}^{(n)}$$

$${}^nR_{n+1}\underline{M}_{n+1} = -\underline{M}_{ext}^{(n)}$$

תרגיל

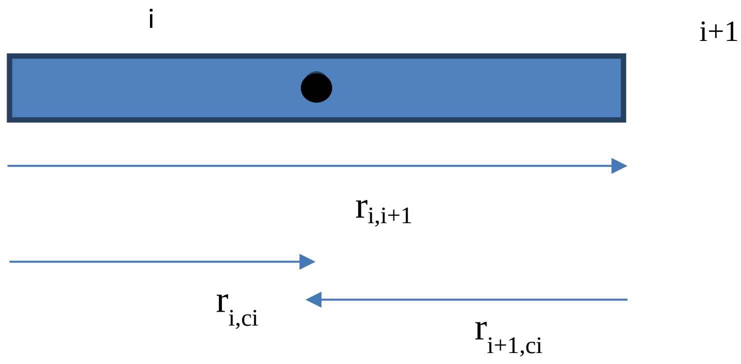
נתון רובוט:



תחת ההנחה: $r_{1,c_1} = r_{2,c_1} = r_{1,2} = 0$. דרוש לחשב את הדינמיקה ההפוכה של הרובוט.

פתרון:

חוליה i:



עבור חוליה מספר 1 (דיסקה):

$$r_{1,c_1} = r_{2,c_1} = r_{1,2} = 0$$

עבור חוליה מספר 2, נגדיר שמערכת הצירים זהה למערכת הכלי ונקבל:

$$r_{2,c_2} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ d_2 - l \end{bmatrix}, r_{3,c_2} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ -l \end{bmatrix}, r_{2,3} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ d_2 \end{bmatrix}$$

מטריצות רוטציה:

$${}^{0}R_1 = \begin{bmatrix} c_1 & -s_1 & 0 \\ s_1 & c_1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, {}^{1}R_2 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \end{bmatrix}, {}^{0}R_2 = \begin{bmatrix} s_1 & 0 & c_1 \\ -c_1 & 0 & s_1 \\ 0 & -1 & 0 \end{bmatrix}$$

מפרק 1 הנו סיבובי, ולכן: $\ddot{d}_1 = \dot{d}_1 = 0$. נקבל:

$$\omega_1 = \underbrace{{}^{0}R_1^{T}\omega_0}_{=0,\,\omega_0=0} + \hat{u}_1\dot{q}_1 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}\dot{\theta}_1$$

$$\alpha_1 = \underbrace{{}^0R_1^T\alpha_0}_{=0,\alpha_0=0} + \hat{u}_1\ddot{q}_1 + \omega_1\times\hat{u}_1\dot{q}_1 = \begin{bmatrix}0\\0\\1\end{bmatrix}\ddot{\theta}_1 + \underbrace{\begin{bmatrix}0\\0\\1\end{bmatrix}\dot{\theta}_1\times\begin{bmatrix}0\\0\\1\end{bmatrix}\dot{\theta}_1}_{=0} = \begin{bmatrix}0\\0\\1\end{bmatrix}\ddot{\theta}_1$$

$$a_{c,1} = \underbrace{{}^0R_1^T a_{e,0}}_{=0,a_{e,0}=0} + \underbrace{\dot{\omega}_1\times r_{1,c_1}}_{=0} + \omega_1\times\left(\underbrace{\omega_1\times r_{1,c_1}}_{=0}\right) + \hat{u}_1\ddot{d}_1 + 2\left(\omega_1\times\hat{u}_1\right)\dot{d}_1 = 0$$

$$\underline{a}_{e,1} = \underbrace{{}^0R_1^T a_{e,0}}_{=0,a_{e,0}=0} + \underline{\dot{\omega}}_1\times\underline{r}_{1,e1} + \underline{\omega}_1\times\left(\underline{\omega}_1\times\underline{r}_{1,e1}\right) + \hat{u}_1\ddot{d}_1 + 2\left(\omega_1\times\hat{u}_1\right)\dot{d}_1 = 0$$

מפרק 2 הנו קווי, ולכן: $\ddot{q}_2 = \dot{q}_2 = 0$

$$\omega_2 = {}^1R_2^T\omega_1 + \hat{u}_2\dot{q}_2 = \begin{bmatrix}0&-1&0\\0&0&-1\\1&0&0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}0\\0\\1\end{bmatrix}\dot{\theta}_1 = \begin{bmatrix}0\\-1\\0\end{bmatrix}\dot{\theta}_1$$

$$\alpha_2 = {}^1R_2^T\alpha_1 + \hat{u}_2\ddot{q}_2 + \omega_2\times\hat{u}_2\dot{q}_2 = \begin{bmatrix}0&-1&0\\0&0&-1\\1&0&0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}0\\0\\1\end{bmatrix}\ddot{\theta}_1 = \begin{bmatrix}0\\-1\\0\end{bmatrix}\ddot{\theta}_1$$

$$a_{c,2} = {}^1R_2^T\underbrace{a_{e,1}}_{=0} + \dot{\omega}_2\times r_{2,c_2} + \omega_2\times\left(\omega_2\times r_{2,c_2}\right) + \hat{u}_2\ddot{d}_2 + 2\left(\omega_2\times\hat{u}_2\right)\dot{d}_2 =$$

$$= \begin{bmatrix}-\ddot{\theta}_1\left(d_2-l\right)\\0\\0\end{bmatrix} + \begin{bmatrix}0\\0\\\dot{\theta}_1^2\left(l-d_2\right)\end{bmatrix} + \begin{bmatrix}0\\0\\1\end{bmatrix}\ddot{d}_2 + \begin{bmatrix}-2\dot{\theta}_1\dot{d}_2\\0\\0\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}-\ddot{\theta}_1\left(d_2-l\right)-2\dot{\theta}_1\dot{d}_2\\0\\\dot{\theta}_1^2\left(l-d_2\right)+\ddot{d}_2\end{bmatrix}$$

סיימנו לחשב את הפרמטרים הקינמטיים של הרובוט. נעבור לרקורסיה אחורית לחישוב כוחות:

$$f_2 = \underbrace{{}^2R_3 f_3}_{-F_{ext}^{(2)}} + m_2 a_{c,2} - m_2 g_2 = -F_{ext}^{(2)} + m_2 a_{c,2} - m_2 g_2 = -{}^0R_2^{\,T} F_{ext}^{(0)} + m_2 a_{c,2} - m_2\, {}^0R_2^{\,T} g_0$$

$$= -\begin{bmatrix} s_1 & -c_1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ c_1 & s_1 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} F \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + m_2\begin{bmatrix} -\ddot{\theta}_1(d_2-l)-2\dot{\theta}_1\dot{d}_2 \\ 0 \\ \dot{\theta}_1^2(d_2-l)+\ddot{d}_2 \end{bmatrix} - m_2\begin{bmatrix} s_1 & -c_1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ c_1 & s_1 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 0 \\ -g \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$f_2 = \begin{bmatrix} -Fs_1 - m_2\ddot{\theta}_1(d_2-l) - 2m_2\dot{\theta}_1\dot{d}_2 - m_2 g c_1 \\ 0 \\ -Fc_1 - m_2\dot{\theta}_1^2(d_2-l) + m_2\ddot{d}_2 + m_2 g s_1 \end{bmatrix}$$

$$\underline{M}_2 = \underbrace{{}^2R_3\underline{M}_3}_{=0} - \underline{f}_2 \times \underline{r}_{2,c2} + \underbrace{\left({}^2R_3\underline{f}_3\right)}_{-F_{ext}^{(2)}} \times \underline{r}_{3,c2} + I_2\underline{\alpha}_2 + \underline{\omega}_2 \times \left(I_2\underline{\omega}_2\right)$$

I_2 במערכת מרכז המסה: $I_2 = \begin{bmatrix} I_{2x} & 0 & 0 \\ 0 & I_{2y} & 0 \\ 0 & 0 & I_{2z} \end{bmatrix}$

$$\underline{M}_2 = -\begin{bmatrix} -Fs_1 - m_2\ddot{\theta}_1(d_2-l) - 2m_2\dot{\theta}_1\dot{d}_2 - m_2 g c_1 \\ 0 \\ -Fc_1 - m_2\dot{\theta}_1^2(d_2-l) + m_2\ddot{d}_2 + m_2 g s_1 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ d_2-l \end{bmatrix} -$$

$$-\begin{bmatrix} s_1 & -c_1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ c_1 & s_1 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} F \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ -l \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} I_{2x} & 0 & 0 \\ 0 & I_{2y} & 0 \\ 0 & 0 & I_{2z} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 0 \\ -\ddot{\theta}_1 \\ 0 \end{bmatrix} +$$

$$+\begin{bmatrix} 0 \\ -\dot{\theta}_1 \\ 0 \end{bmatrix} \times \left(\begin{bmatrix} I_{2x} & 0 & 0 \\ 0 & I_{2y} & 0 \\ 0 & 0 & I_{2z} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 0 \\ -\dot{\theta}_1 \\ 0 \end{bmatrix}\right)$$

$$M_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ -Fs_1 d_2 - m_2\ddot{\theta}_1(d_2-l)^2 - 2m_2\dot{\theta}_1\dot{d}_2(d_2-l) - m_2 g c_1(d_2-l) - I_{2y}\ddot{\theta}_1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$f_1 = {}^1R_2 f_2 + m_1 a_{c,1} - m_1 g_1 = {}^1R_2 f_2 + m_1 a_{c,1} - m_1 {}^0R_1^T g_0$$

$$= \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -Fs_1 - m_2\ddot{\theta}_1\left(d_2 - l\right) - 2m_2\dot{\theta}_1\dot{d}_2 - m_2 gc_1 \\ 0 \\ -Fc_1 - m_2\dot{\theta}_1^2\left(d_2 - l\right) + m_2\ddot{d}_2 + m_2 gs_1 \end{bmatrix} -$$

$$-m_1 \begin{bmatrix} c_1 & s_1 & 0 \\ -s_1 & c_1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ -g \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -Fc_1 - m_2\dot{\theta}_1^2\left(d_2 - l\right) + m_2\ddot{d}_2 + \left(m_1 + m_2\right) gs_1 \\ Fs_1 + m_2\ddot{\theta}_1\left(d_2 - l\right) + 2m_2\dot{\theta}_1\dot{d}_2 + \left(m_1 + m_2\right) gc_1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\underline{M}_1 = {}^1R_2\underline{M}_2 - \underline{f}_1 \times \underline{r}_{1,c1} + \left({}^1R_2\,\underline{f}_3\right) \times \underline{r}_{2,c1} + I_1\underline{\alpha}_1 + \underline{\omega}_1 \times \left(I_1\underline{\omega}_1\right) = {}^1R_2\underline{M}_2 + I_1\underline{\alpha}_1$$

$$M_1 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ -Fs_1 d_2 - m_2\ddot{\theta}_1\left(d_2 - l\right)^2 - 2m_2\dot{\theta}_1\dot{d}_2\left(d_2 - l\right) - m_2 gc_1\left(d_2 - l\right) - I_{2y}\ddot{\theta}_1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$+ \begin{bmatrix} I_{1x} & 0 & 0 \\ 0 & I_{1y} & 0 \\ 0 & 0 & I_{1z} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \ddot{\theta}_1$$

$$M_1 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ Fs_1 d_2 + m_2\ddot{\theta}_1\left(d_2 - l\right)^2 + 2m_2\dot{\theta}_1\dot{d}_2\left(d_2 - l\right) + m_2 gc_1\left(d_2 - l\right) + \left(I_{2y} + I_{1z}\right)\ddot{\theta}_1 \end{bmatrix}$$

על מנת לחשב את הכוחות ומומנטים הדרושים במפרקים ניקח את הרכיבים המתאימים מחישוב הכוח והמומנט למפרקים:

עבור מפרק ראשון: מפרק סיבובי. החישוב המעניין אותנו הוא M_1 וכיוון הסיבוב הוא סביב ציר z_1, לכן:

$$\tau_1 = M_1\left(3\right) = Fs_1 d_2 + m_2\ddot{\theta}_1\left(d_2 - l\right)^2 + 2m_2\dot{\theta}_1\dot{d}_2\left(d_2 - l\right) + m_2 gc_1\left(d_2 - l\right) + \left(I_{2y} + I_{2z}\right)\ddot{\theta}_1$$

עבור מפרק שני: מפרק קוי. החישוב המעניין אותנו הוא f_2 וכיוון התזוזה הוא לאורך ציר z_2, לכן:

$$\tau_2 = f_2\left(3\right) = -Fc_1 - m_2\dot{\theta}_1^2\left(d_2 - l\right) + m_2\ddot{d}_2 + m_2 gs_1$$