תרגול 1 – אביב 2019

קינמטיקה ישירה

- נתון רובוט, מוגדרת מערכת בסיס (קבועה) ומערכת הכלי (צמודה לקצה הרובוט).
- יש לחשב מטריצת הטרנספורמציה ההומוגנית ממערכת הכלי למערכת העולם, כפונקציה של משתני המפרקים.

הגדרות:

א. מטריצת סיבוב (רוטציה) – מעבר בין מערכת צירים בעלות ראשית משותפת.
סימון: $\underline{r}^j = {}^j\underline{\underline{R}}_i \underline{r}^i$ כאשר $ {}^j\underline{\underline{R}}_i = \left[{}^j\hat{x}_i \quad {}^j\hat{y}_i \quad {}^j\hat{z}_i \right]$, כלומר עמודות ${}^j\underline{\underline{R}}_i$ הן צירי המערכת i מבוטאים במערכת j. **מטריצת הסיבוב הנה מטריצה אורתונורמלית** ($R^{-1} = R^T$)

ב. ניתן לבטא כל מטריצת רוטציה כסיבוב סביב ציר $\hat{n}$ בזווית θ על פי כלל יד ימין:

$$Rot(\hat{n},\theta) = \begin{bmatrix} n_x^2 v(\theta)+c(\theta) & n_x n_y v(\theta)-n_z s(\theta) & n_x n_z v(\theta)+n_y s(\theta) \\ n_x n_y v(\theta)+n_z s(\theta) & n_y^2 v(\theta)+c(\theta) & n_y n_z v(\theta)-n_x s(\theta) \\ n_x n_z v(\theta)-n_y s(\theta) & n_y n_z v(\theta)+n_x s(\theta) & n_z^2 v(\theta)+c(\theta) \end{bmatrix}$$

כאשר $\hat{n} = \begin{bmatrix} n_x & n_y & n_z \end{bmatrix}^T$, $s(\theta)=\sin(\theta),\ c(\theta)=\cos(\theta),\ v(\theta)=1-\cos(\theta)$

ג. מטריצות סיבוב סביב הצירים הראשיים:

$$Rot(\hat{x},\theta) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & c_\theta & -s_\theta \\ 0 & s_\theta & c_\theta \end{bmatrix},\ \hat{n} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}^T$$

$$Rot(\hat{y},\theta) = \begin{bmatrix} c_\theta & 0 & s_\theta \\ 0 & 1 & 0 \\ -s_\theta & 0 & c_\theta \end{bmatrix},\ \hat{n} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}^T$$

$$Rot(\hat{z},\theta) = \begin{bmatrix} c_\theta & -s_\theta & 0 \\ s_\theta & c_\theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix},\ \hat{n} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}^T$$

ד. העתקת גוף קשיח – מעבר בין מערכות צירים ללא ראשית משותפת:
$\underline{r}^j = {}^j\underline{\underline{R}}_i \underline{r}^i + {}^j\underline{d}_i$, כאשר ${}^j\underline{d}_i$ - ראשית מערכת i מבוטאת במערכת j.
מטריצת טרנספורמציה הומוגנית:

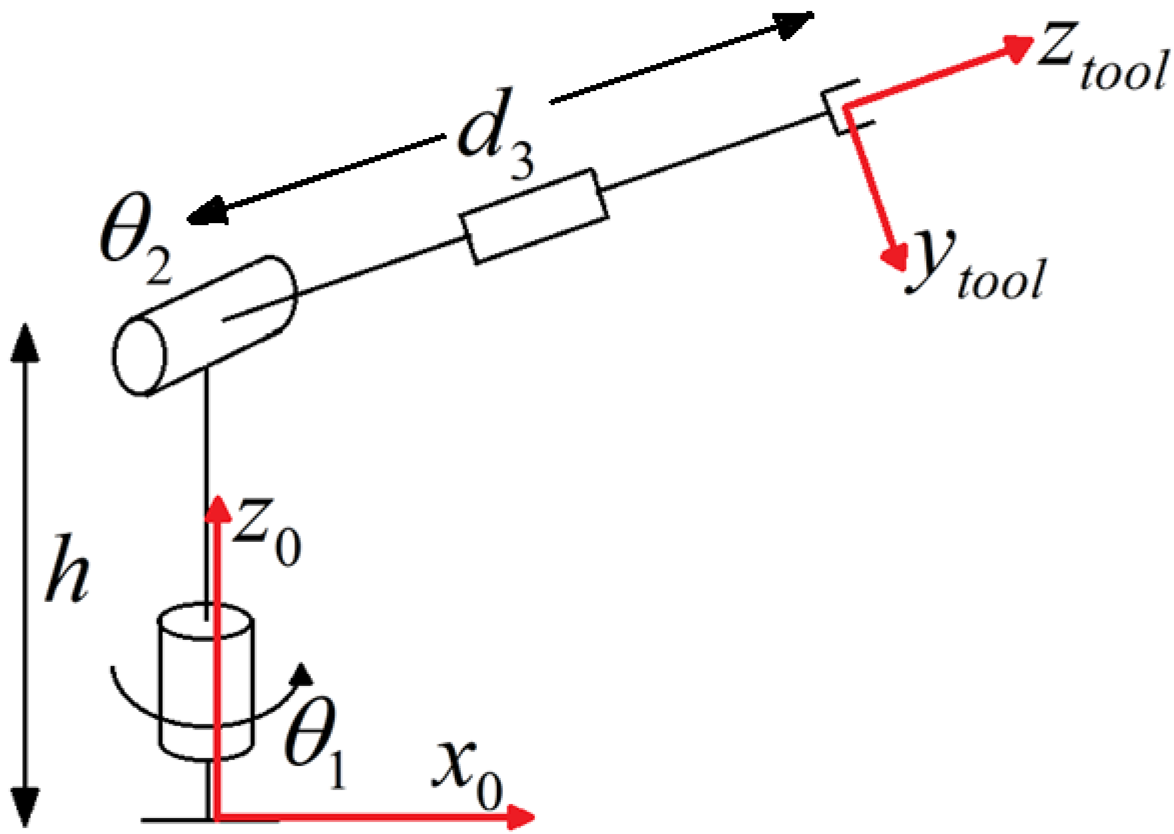
$$\begin{bmatrix} \underline{r}^j \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} {}^j\underline{\underline{R}}_i & {}^j\underline{d}_i \\ 0 \quad 0 \quad 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \underline{r}^i \\ 1 \end{bmatrix} \rightarrow \underline{p}^j = {}^j\underline{\underline{A}}_i \underline{p}^i$$

שיטת ZRP:

א. בחירת מצב ייחוס בו ערכי כל משתני המפרקים הינם אפס (מצב "אפס" – ZRP).
ב. הקצאת מערכות צירים כך שמערכת i צמודה לחוליה i ובמצב ZRP כל המערכות מקבילות זו לזו.
ג. חישוב מטריצת טרנספורמציה הומוגנית כללית: ${}^{0}\underline{\underline{A}}_{tool} \equiv {}^{0}\underline{\underline{A}}_{n}$ על ידי כפל מטריצות: ${}^{0}\underline{\underline{A}}_{tool} = {}^{0}\underline{\underline{A}}_{1} \cdot {}^{1}\underline{\underline{A}}_{2} \cdot \ldots \cdot {}^{n-1}\underline{\underline{A}}_{n}$.

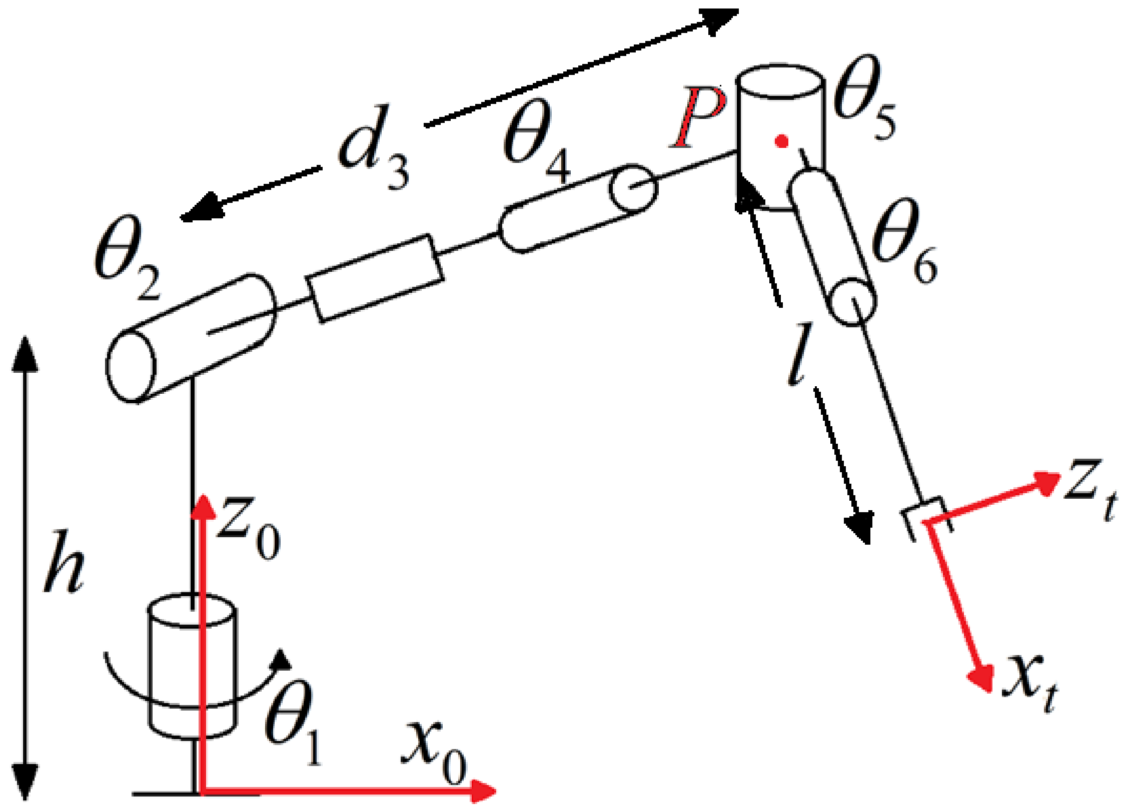
תרגיל 1 (קינמטיקה ישירה)

נתון רובוט בעל 3 דרגות חופש. יש לחשב את הקינמטיקה הישירה לפי השיטה ZRP.



תרגיל 2 (קינמטיקה הפוכה)

נתון רובוט מסוג Stanford Arm בעל 6 דרגות חופש:



נדרש לחשב קינמטיקה הפוכה, בהינתן מיקום ואוריינטציה של יחידת הקצה:

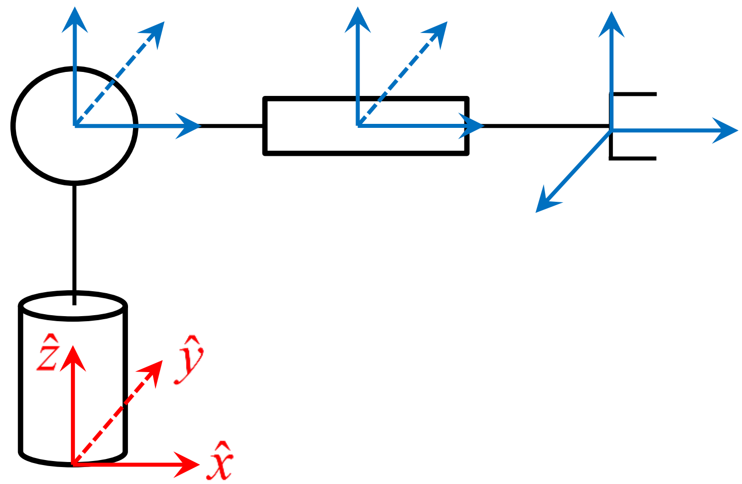
$$ {}^{0}\underline{\underline{A}}_{t} = \begin{bmatrix} & {}^{0}\underline{\underline{R}}_{t} & & {}^{0}d_{t} \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} $$

יש לחשב את ערכי המפרקים (6 משוואות, 6 נעלמים) מתוך הקינמטיקה הישירה.

פתרונות:

תרגיל 1 – פתרון:

תחילה, נשרטט את מצב האפס:



נכתוב את מטריצת הטרנספורמציה של כל מפרק:

$$ {}^{0}A_1:\ Rot(\hat{z},\theta_1),\ \ {}^{0}d_1=\begin{bmatrix}0\\0\\h\end{bmatrix}\Rightarrow {}^{0}A_1=\begin{bmatrix}c_1 & -s_1 & 0 & 0\\ s_1 & c_1 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 1 & h\\ 0 & 0 & 0 & 1\end{bmatrix} $$

$$ {}^{1}A_2:\ Rot(\hat{y},-\theta_2)=Rot(-\hat{y},\theta_2),\ \ {}^{1}d_2=\begin{bmatrix}0\\0\\0\end{bmatrix}\Rightarrow {}^{1}A_2=\begin{bmatrix}c_2 & 0 & -s_2 & 0\\ 0 & 1 & 0 & 0\\ s_2 & 0 & c_2 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 1\end{bmatrix} $$

$$ {}^{2}A_3:\ Rot(eye(3)),\ \ {}^{2}d_3=\begin{bmatrix}d_3\\0\\0\end{bmatrix}\Rightarrow {}^{2}A_3=\begin{bmatrix}1 & 0 & 0 & d_3\\ 0 & 1 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 1\end{bmatrix} $$

$$ {}^{3}A_t=\begin{bmatrix}0 & 0 & 1 & 0\\ -1 & 0 & 0 & 0\\ 0 & -1 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 1\end{bmatrix} $$

ולכן פתרון הקינמטיקה הישירה יהיה $\ldots=\boxed{{}^{0}A_t={}^{0}A_1\,{}^{1}A_2\,{}^{2}A_3\,{}^{3}A_t}$

תרגיל 2 – פתרון:

נבין תחילה את הבעיה. בהינתן: $^0d_t = \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}$, $^0\underline{\underline{R}}_t = \begin{bmatrix} ^0\hat{x}_t & ^0\hat{y}_t & ^0\hat{z}_t \end{bmatrix}$; $^0\underline{\underline{A}}_t = \begin{bmatrix} ^0\underline{\underline{R}}_t & & & ^0d_t \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$, כלומר מיקום ואוריינטציית יחידת הקצה, דרוש למצוא את ערכי המפרקים של הרובוט.

תחילה, נחשב את הקואורדינטות של נקודה P (מסומנת באיור):

$$P = \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} - {}^0\hat{x}_t \cdot l$$

כאשר $^0\hat{x}_t$ הוא ציר ה $\hat{x}$ של מערכת יחידת הקצה ביחס לצירי המעבדה. נשים לב כי עד נקודה P הרובוט הוא כמו הרובוט משאלה 1 בהוספת מפרק סיבובי נוסף, θ_4. מפרק זה ישפיע אך ורק על האוריינטציה, ולכן נוכל להשתמש בביטויים מהתרגיל הקודם עבור מיקום נקודה P:

$$P = \begin{bmatrix} c_1c_2d_3 \\ s_1c_2d_3 \\ h+s_2d_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} P_x \\ P_y \\ P_z \end{bmatrix}$$

נפתור עבור כל אחד מהמפרקים:

$$c_1 = \frac{P_x}{c_2d_3},\ s_1 = \frac{P_y}{c_2d_3} \Rightarrow \theta_1 = \operatorname{atan}2\left[\pm P_y, \pm P_x\right] \Rightarrow 2\,solutions$$

$$s_2 = \frac{P_z - h}{d_3},\ c_2 = \frac{P_y}{s_1d_3} = \frac{P_x}{c_1d_3} \Rightarrow \theta_2 = \operatorname{atan}2\left[\pm\left(P_z - h\right), \pm\frac{P_x}{c_1}\right]$$

$$d_3 = \frac{P_z - h}{s_2}$$

סיכום הפתרונות בעץ פתרונות:

$$\theta_1^U \begin{cases} \nearrow \theta_2^U \to d_3 \\ \searrow \theta_2^L \to d_3 \end{cases}$$

$$\theta_1^L \begin{cases} \nearrow \theta_2^U \to d_3 \\ \searrow \theta_2^L \to d_3 \end{cases}$$

על מנת לחשב את ערכי $\theta_4, \theta_5, \theta_6$, נשתמש באוריינטציה של התפסנית. ניתן לרשום:

$$ {}^{0}R_t = {}^{0}R_p\left(\theta_1,\theta_2,\theta_3\right)\,{}^{p}R_t\left(\theta_4,\theta_5,\theta_6\right) $$

נעביר אגפים ונקבל:

$$ {}^{p}R_t\left(\theta_4,\theta_5,\theta_6\right) = {}^{0}R_p\left(\theta_1,\theta_2,\theta_3\right)^T\,{}^{0}R_t $$

כעת כל אגף ימין ידוע. מהשוואת שני האגפים איבר-איבר נקבל סט משוואות אשר פתרונותיו יהיו ערכי המפרקים הנותרים.

תרגיל נחמד לבית (בזמנכם החופשי) - פתרו את סט המשוואות הזה, וציירו את עץ הפתרונות המתקבל. כמה אפשרויות קיבלתם?