תרגול 4 – אביב 2019

נוסחת Gruebler

נוסחת Gruebler הינה נוסחה לחישוב ה-Mobility של מכניזם:

$$M \geq D(n-p-1)+\sum_{i=1}^{p} f_i$$

כאשר:

p - מספר המפרקים

n - מספר החוליות

f_i - מספר דרגות החופש של מפרק i

D - מאפיין את מימד הבעיה: $D=6$ עבור מבנה מרחבי, $D=3$ עבור מבנה מישורי וכו'

כאשר $M \leq 0$ המבנה "תקוע".

רובוטים מקביליים

רובוט מקבילי הוא שרשרת קינמטית סגורה בעלת מפרקים אקטיביים ופסיביים. רובוטים אלו מתאפיינים בדיוק גבוה וביחס עומס/משקל עצמי גבוה, אך בעלי מרחב עבודה קטן יחסית.

הבדלים עיקריים בין רובוטים מקביליים לטוריים:

- בעיית הקינמטיקה ההפוכה פשוטה לפתרון
- בעיית הקינמטיקה הישירה מסובכת מאוד
- רובוטים מקביליים בעלי 2 מטריצות יעקוביאן ומספר סוגי סינגולריות (בניגוד לרובוט טורי שמאבד ד"ח)
- ברובוט מקבילי $F_{ext} = J^T n$

מטריצות יעקוביאן של רובוט מקבילי

ברובוט מקבילי הקשר בין מהירות במרחב העולם למהירות במרחב המפרקים נתון על ידי:

$$J_x \dot{x} = J_q \dot{q}$$

נגדיר פונקציה המקשרת בין המיקום במרחב העולם למיקום במרחב המפרקים: $F(\vec{x},\vec{q})=0$. מטריצות היעקוביאן נתונות על ידי:

$$J_x = \frac{\partial F}{\partial x},\ J_q = -\frac{\partial F}{\partial q}$$

ניתן להגדיר גם מטריצת יעקוביאן בודדת:

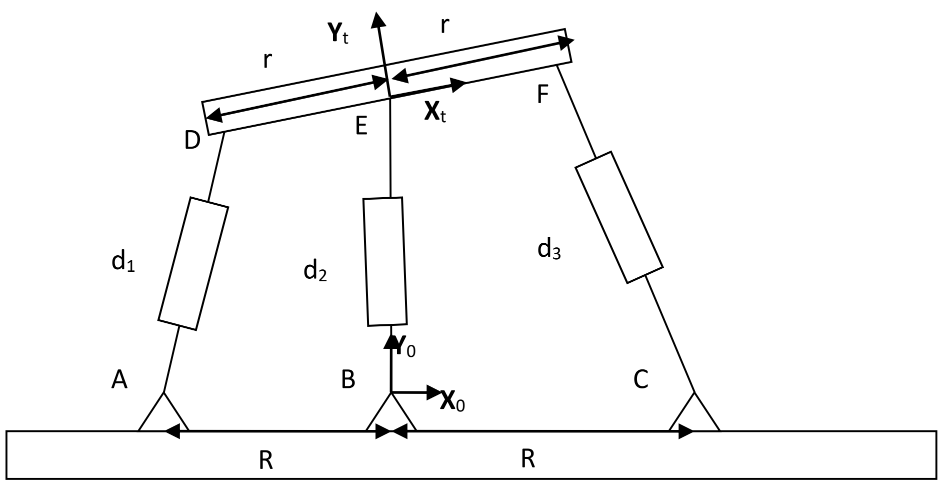
$$J\dot{x}=\dot{q}\Rightarrow J=J_q^{-1}J_x$$

<u>סינגולריות-</u> כאשר נחפש מצבים סינגולריים, נחשב אותם עבור כל יעקוביאן בנפרד:

- סינגולריות קינמטיקה הפוכה - $\det\left(J_q\right)=0,\ \det\left(J_x\right)\neq 0$
- סינגולריות קינמטיקה ישירה - $\det\left(J_q\right)\neq 0,\ \det\left(J_x\right)=0$

<u>תרגיל 1</u>

נתון רובוט מקבילי:



דרוש לחשב את המוביליות של הרובוט, לפתור את הקינמטיקה הישירה וההפוכה, לחשב יעקוביאנים ולמצוא מצבים סינגולריים.

<u>תרגיל 1 – פתרון:</u>

א. מוביליות:

$$D=3,\ n=8,\ p=9,\ f_i=1\Rightarrow M\geq 3\left(8-9-1\right)+9=3$$

נשים לב שיש 3 דרגות חופש: $x_t,\ y_t,\ \theta$

ב. קינמטיקה הפוכה: בהינתן $x_t,\ y_t,\ \theta$ ידועים, עלינו לחשב את ערכי $d_1,\ d_2,\ d_3$.

מגיאומטריה, נחשב את מיקומי הנקודות A-F:

$$A = \begin{bmatrix} -R & 0 \end{bmatrix}^T,\quad B = \begin{bmatrix} 0 & 0 \end{bmatrix}^T,\ C = \begin{bmatrix} R & 0 \end{bmatrix}^T$$

$$D = \begin{bmatrix} c\theta & -s\theta & x_t \\ s\theta & c\theta & y_t \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} -r \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}, E = \begin{bmatrix} x_t & y_t \end{bmatrix}, F = \begin{bmatrix} c\theta & -s\theta & x_t \\ s\theta & c\theta & y_t \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} r \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

ולכן נוכל לחשב את ערכי המפרקים לפי אורכי וקטורים:

$$\|d_1\|^2 = \left(D_x - A_x\right)^2 + \left(D_y - A_y\right)^2 = \left(x_t - r\cos\theta + R\right)^2 + \left(y_t - r\sin\theta\right)^2$$
$$\|d_2\|^2 = \left(E_x - B_x\right)^2 + \left(E_y - B_y\right)^2 = x_t^2 + y_t^2$$
$$\|d_3\|^2 = \left(F_x - C_x\right)^2 + \left(F_y - C_y\right)^2 = \left(x_t + r\cos\theta - R\right)^2 + \left(y_t + r\sin\theta\right)^2$$

ג. קינמטיקה ישירה: בהינתן $d_1,\ d_2,\ d_3$ ידועים, עלינו לחשב את ערכי $x_t,\ y_t,\ \theta$. נשתמש במשוואות שמצאנו:

$$\|d_1\|^2 + \|d_3\|^2 = \left(x_t - r\cos\theta + R\right)^2 + \left(y_t - r\sin\theta\right)^2 + \left(x_t + r\cos\theta - R\right)^2 + \left(y_t + r\sin\theta\right)^2 =$$
$$= x_t^2 + R^2 + r^2c^2\theta \cancel{+2x_tR} - 2rRc\theta \cancel{-2rx_tc\theta} + y_t^2 \cancel{-2ry_ts\theta} + r^2s^2\theta +$$
$$+ x_t^2 + R^2 + r^2c^2\theta \cancel{-2x_tR} - 2rRc\theta \cancel{+2rx_tc\theta} + y_t^2 \cancel{+2ry_ts\theta} + r^2s^2\theta =$$
$$= 2x_t^2 + 2y_t^2 + 2R^2 + 2r^2 - 4rRc\theta = 2\left(\|d_2\|^2 + R^2 + r^2\right) - 4rRc\theta$$

ולכן:

$$\cos\theta = \frac{2\left(\|d_2\|^2 + R^2 + r^2\right) - \|d_1\|^2 - \|d_3\|^2}{4rR},\ \sin\theta = \pm\sqrt{1-\cos^2\theta}$$
$$\theta = \arctan 2\left(\pm\sqrt{1-\cos^2\theta},\ \frac{2\left(\|d_2\|^2 + R^2 + r^2\right) - \|d_1\|^2 - \|d_3\|^2}{4rR}\right) \Rightarrow 2\ sol$$

באופן דומה:

$$\|d_1\|^2 - \|d_3\|^2 = \left(x_t - r\cos\theta + R\right)^2 + \left(y_t - r\sin\theta\right)^2 - \left(x_t + r\cos\theta - R\right)^2 - \left(y_t + r\sin\theta\right)^2 =$$
$$= x_t^2 + R^2 + r^2c^2\theta + 2x_tR - 2rRc\theta - 2rx_tc\theta + y_t^2 - 2ry_ts\theta + r^2s^2\theta +$$
$$-x_t^2 - R^2 - r^2c^2\theta + 2x_tR + 2rRc\theta - 2rx_tc\theta - y_t^2 - 2ry_ts\theta - r^2s^2\theta =$$
$$= 4x_tR - 4rx_tc\theta - 4ry_ts\theta$$

נסמן:

$$y_t = \frac{4x_tR - 4rx_tc\theta - \|d_1\|^2 + \|d_3\|^2}{4rs\theta} = \underbrace{\frac{R - rc\theta}{rs\theta}}_{a} x_t + \underbrace{\frac{\|d_3\|^2 - \|d_1\|^2}{4rs\theta}}_{b}$$

קיבלנו 2 משוואות:

$$\begin{cases} y = ax + b \\ x^2 + y^2 = d_2^2 \end{cases} \Rightarrow x^2 + \left(ax + b\right)^2 = x^2 + a^2x^2 + 2abx + b^2 = d_2^2$$

$$\left(1 + a^2\right)x^2 + 2abx + b^2 - d_2^2 = 0$$

$$x = \frac{-2ab \pm \sqrt{4a^2b^2 - 4\left(1 + a^2\right)\left(b^2 - d_2^2\right)}}{2\left(1 + a^2\right)} = \frac{-ab \pm \sqrt{a^2d_2^2 + d_2^2 - b^2}}{1 + a^2} \Rightarrow 2\,sol$$

$$y = ax + b$$

$$\theta \begin{array}{l} \nearrow x \to\to y \\ \searrow x \to\to y \end{array}$$

$$\theta \begin{array}{l} \nearrow x \to\to y \\ \searrow x \to\to y \end{array}$$

כלומר, בסה"כ יש 4 פתרונות לקינמטיקה הישירה.

ד. מטריצות יעקוביאן: נתונים לנו 3 אילוצים סקלריים:

$$\begin{cases} \|d_1\|^2 = \left(x_t - r\cos\theta + R\right)^2 + \left(y_t - r\sin\theta\right)^2 \\ \|d_2\|^2 = x_t^2 + y_t^2 \\ \|d_3\|^2 = \left(x_t + r\cos\theta - R\right)^2 + \left(y_t + r\sin\theta\right)^2 \end{cases}$$

נוכל להגדיר פונקציית אילוצים:

$$F = \begin{pmatrix} \left(x_t - r\cos\theta + R\right)^2 + \left(y_t - r\sin\theta\right)^2 - d_1^2 \\ x_t^2 + y_t^2 - d_2^2 \\ \left(x_t + r\cos\theta - R\right)^2 + \left(y_t + r\sin\theta\right)^2 - d_3^2 \end{pmatrix} = \vec{0}$$

נגזור:

$$J_x = \frac{\partial F}{\partial x} = \begin{bmatrix} \frac{\partial F}{\partial x_t} & \frac{\partial F}{\partial y_t} & \frac{\partial F}{\partial \theta} \end{bmatrix} =$$

$$= \begin{bmatrix} 2\left(x_t - r\cos\theta + R\right) & \left(y_t - r\sin\theta\right) & 2r\sin\theta\left(x_t - r\cos\theta + R\right) - 2r\cos\theta\left(y_t - r\sin\theta\right) \\ 2x_t & 2y_t & 0 \\ \left(x_t + r\cos\theta - R\right) & \left(y_t + r\sin\theta\right) & -2r\sin\theta\left(x_t + r\cos\theta - R\right) + 2r\cos\theta\left(y_t + r\sin\theta\right) \end{bmatrix}$$

$$J_q = -\frac{\partial F}{\partial q} = \begin{bmatrix} \frac{\partial F}{\partial d_1} & \frac{\partial F}{\partial d_2} & \frac{\partial F}{\partial d_3} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2d_1 & 0 & 0 \\ 0 & -2d_2 & 0 \\ 0 & 0 & -2d_3 \end{bmatrix}$$

ה. סינגולריות: עבור סינגולריות קינמטיקה הפוכה:

$$\det\left(J_q\right) = 8d_1d_2d_3 = 0 \Rightarrow d_1 = 0;\ d_2 = 0;\ d_3 = 0$$

עבור סינגולריות קינמטיקה ישירה:

$$\det\left(J_x\right) = 2y_tR^2r\sin\theta + 2x_tRr^2\sin^2\theta - 2y_tRr^2\cos\theta\sin\theta =$$

$$= 2Rr\sin\theta\left(y_tR + x_tr\sin\theta - y_tr\cos\theta\right) = 0$$

$$\Rightarrow \sin\theta = 0 \Rightarrow \theta = 0, \pi$$

$$\Rightarrow y_tR + x_tr\sin\theta - y_tr\cos\theta = 0 \Rightarrow x_t = \frac{r\cos\theta - R}{r\sin\theta} y_t$$