תרגול 12 – אביב 2019

חוק בקרה MIN-MAX

גרסה פשוטה – אי וודאות בכניסה (בעיית העקיבה):

נתונות משוואות התנועה של הרובוט:

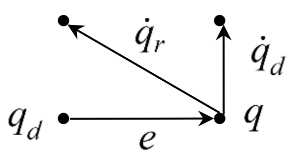
$$H(q)^{n\times n}\ddot{q}+C(q,\dot{q})^{n\times n}\dot{q}+G(q)^{n\times 1}=u+w(q,\dot{q},t)$$

כאשר $w(q,\dot{q},t)$ הפרעה חיצונית לא ידועה וחסומה. נרצה לעקוב אחרי מסלול $q_d(t)$.

נגדיר שגיאת עקיבה ווקטור מצב על מנת לממש את מערכת השגיאה:

$$e\triangleq q-q_d;\ x=\begin{bmatrix}x_1\\x_2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}e\\\dot{e}\end{bmatrix}$$

על מנת להפוך את מטריצת המימוש של המערכת למטריצה חיובית (הורוביצית), נגדיר שגיאה משוקללת: $s=\dot{e}+ke=x_2+kx_1;\ k=k^T\succ 0\in\mathbb{R}^{n\times n}$



נגדיר כעת תיקון דינאמי: $\dot{q}_r=\dot{q}_d-ke\Rightarrow s=\dot{q}-\dot{q}_r,\ \dot{s}=\ddot{q}-\ddot{q}_r$

נבחר מטריצה סימטרית $P=P^T\succ 0\in\mathbb{R}^{n\times n}$ ונגדיר פונ' ליאפונוב מועמדת: $V(x)=\frac{1}{2}\left(s^THs+e^TPe\right)$

נחשב את נגזרת ליאפונוב ונקבל:

$$W(x)=s^T(u+\eta)-e^Tk^TPe<0;\ \eta=w-G-H\ddot{q}_r-C\dot{q}_r+Pe$$

נרצה שהנגזרת תמיד תהיה שלילית על מנת להבטיח יציבות. המקרה הגרוע ביותר הוא כאשר s,η באותו כיוון ו η מקבל את גודלו המקסימלי ρ_η.

לכן, נדרוש שחוק הבקרה יהיה $u=-\rho_\eta\frac{s}{\|s\|+\delta}$, כאשר $\delta\ll 1$.

גרסה משופרת – אי וודאות בפרמטרים (בעיית העקיבה):

נניח כי $H=H_0+\tilde{H},\ C=C_0+\tilde{C},\ G=G_0+\tilde{G}$ וכן $\eta=\eta_0+\tilde{\eta}$ כאשר η_0 ידוע במדויק ו- $\tilde{\eta}$ לא ידוע אך חסום $\|\tilde{\eta}\|<\tilde{\rho}$.

<u>חוק בקרה:</u> $u=-\rho\frac{s}{\|s\|+\delta}$ כאשר $\rho=\max\left\{0,\ \frac{s^T\eta_0}{\|s\|}+\beta\cdot\tilde{\rho}(x,t)\right\}$, כאשר $\beta>1$.

<u>סיכום:</u>

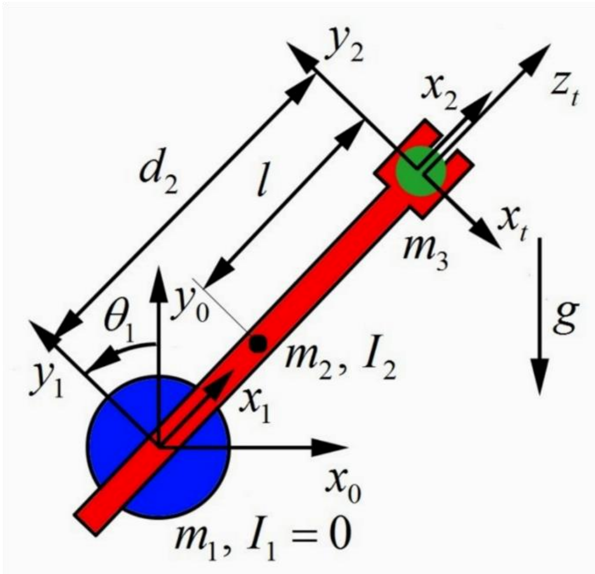
1. בחירת פרמטרי הבקרה:
   - מטריצות $k,P\left[n\times n\right]$ סימטריות + P.D כך שגם מטריצה $k^{T}P$ היא P.D.
   - סקלר $\beta>1$ ואיבר $\delta\ll 1$.
2. חישוב חסם אנליטי $\|\tilde{\eta}\|$.
3. בכל צעד חישוב של u:
   - מדידת $q,\dot{q}$
   - חישוב שגיאות $e,\dot{e}$
   - חישוב s,q_r
   - חישוב η_0
   - חישוב $\tilde{\rho}$ ו- ρ

<u>כללים לחישוב חסמים:</u>

- נורמה: $\|v\|=\sqrt{\sum_i v_i^2}<\sum_i |v_i|$.
- אי-שוויון המשולש: $\|u+v\|\le\|u\|+\|v\|$.
- מכפלה במטריצה חיובית A: $\|Av\|\le\lambda_{\max}\left(A\right)\|v\|\le trace\left(A\right)\|v\|$.

תרגיל

דרוש לכתוב חוק בקרה המייצב את הרובוט הבא:



נתון:

m_2, m_3 - ידועים במדוייק, וידוע כי $0 < F < F_{\max}$, $I_{2,\min} < I_2 < I_{2,\max}$.

המסלול הרצוי: $\theta_1(t) = \omega t,\ d_2(t) = vt$.

$$H = \begin{bmatrix} m_3 d_2^2 + m_2 (d_2 - l)^2 + I_2 & 0 \\ 0 & m_3 + m_2 \end{bmatrix}, C = \begin{bmatrix} Q\dot{d}_2 & Q\dot{\theta}_1 \\ -Q\dot{\theta}_1 & 0 \end{bmatrix},\quad Q = m_2(d_2 - l) + m_3 d_2$$

$$G = \begin{bmatrix} Qgc_1 \\ (m_2 + m_3) gs_1 \end{bmatrix},\quad J^T F_e = \begin{bmatrix} -d_2 s_1 \\ c_1 \end{bmatrix} F$$

פתרון:

א. מדידת $q, \dot{q}$ ע"י דינמיקה ישירה.

ב. שגיאות:

$$e = \begin{bmatrix} \theta_1 - \theta_{1,des} \\ d_2 - d_{2,des} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \theta_1 - \omega t \\ d_2 - vt \end{bmatrix}$$

ג. שגיאה משוקללת: $S = \dot{e} + ke$

נבחר $k = \begin{bmatrix} \tilde{k} & 0 \\ 0 & \tilde{k} \end{bmatrix}, \tilde{k} > 0$

$$\dot{q}_r = \dot{q}_d - ke$$

ד. אי-וודאות:

$$\eta = \eta_0 + \tilde{\eta}$$
$$\eta = J^T F - H\ddot{q}_r - C\dot{q} - G + Pe = J^T F - \tilde{H}\ddot{q}_r - H_0\ddot{q}_r - C\dot{q}_r - G + Pe$$

נבחר $P = \begin{bmatrix} \tilde{P} & 0 \\ 0 & \tilde{P} \end{bmatrix}, \ \tilde{P} > 0$

נגדיר: $I_2 = I_{2,\min} + \tilde{I}_2, \quad 0 < \tilde{I}_2 < I_{2,\max}$

$$\eta = \eta_0 + \tilde{\eta}$$
$$\eta_0 = -H_0\ddot{q}_r - C\dot{q}_r - G + Pe$$
$$\tilde{\eta} = J^T F - \tilde{H}\ddot{q}_r$$
$$H = \underbrace{\begin{bmatrix} \tilde{I}_2 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}}_{\tilde{H}} + \underbrace{\begin{bmatrix} m_3 d_2^2 + m_2\left(d_2 - l\right)^2 + I_{2,\min} & 0 \\ 0 & m_3 + m_2 \end{bmatrix}}_{H_0}$$
$$\eta_0 = -\begin{bmatrix} m_3 d_2^2 + m_2\left(d_2 - l\right)^2 + I_{2,\min} & 0 \\ 0 & m_3 + m_2 \end{bmatrix}\ddot{q}_r - \begin{bmatrix} Q\dot{d}_2 & Q\dot{\theta}_1 \\ -Q\dot{\theta}_1 & 0 \end{bmatrix}\dot{q} -$$
$$-\begin{bmatrix} Qgc_1 \\ \left(m_2 + m_3\right)gs_1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \tilde{P} & 0 \\ 0 & \tilde{P} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \theta_1 - \omega t \\ d_2 - vt \end{bmatrix} =$$
$$= -\begin{bmatrix} \left[m_3 d_2^2 + m_2\left(d_2 - l\right)^2 + I_{2,\min}\right]\ddot{q}_{r,1} \\ \left[m_2 + m_3\right]\ddot{q}_{r,2} \end{bmatrix} - Q\begin{bmatrix} \dot{d}_2\dot{q}_{r,1} + \dot{\theta}_1\dot{q}_{r,2} \\ -\dot{\theta}_1\dot{q}_{r,1} \end{bmatrix} + \tilde{P}\begin{bmatrix} \theta_1 - \omega t \\ d_2 - vt \end{bmatrix}$$
$$\tilde{\eta} = \begin{bmatrix} -d_2 s_1 \\ c_1 \end{bmatrix}F - \begin{bmatrix} \tilde{I}_2 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}\ddot{q}_r = -\begin{bmatrix} \tilde{I}_2\ddot{q}_{r,1} \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -d_2 s_1 \\ c_1 \end{bmatrix}F$$

עלינו לחסום את $\tilde{\eta}$:

$$\left\|\tilde{\eta}\right\| = \left\|\begin{bmatrix} -\tilde{I}_2\ddot{q}_{r,1} \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -d_2 s_1 \\ c_1 \end{bmatrix}F\right\| \le \left\|\begin{bmatrix} -\tilde{I}_2\ddot{q}_{r,1} \\ 0 \end{bmatrix}\right\| + \left\|\begin{bmatrix} -d_2 s_1 \\ c_1 \end{bmatrix}F\right\| = \left|\tilde{I}_2\right|\left|\ddot{q}_{r,1}\right| + \left|F\right|\sqrt{d_2^2 s_1^2 + c_1^2} \le$$
$$\le \left|\tilde{I}_2\right|\left|\ddot{q}_{r,1}\right| + \left|F\right|\sqrt{d_2^2 + 1} \le I_{2,\max}\left|\ddot{q}_{r,1}\right| + F_{\max}\sqrt{d_2^2 + 1} = \tilde{\rho}$$

חוק הבקרה:

$$u = -\rho\frac{s}{\left\|s\right\| + \delta}; \ \rho = \max\left\{0, \frac{s^T\eta_0}{\left\|s\right\|} + \beta\tilde{\rho}\right\}, \ \beta > 1$$