תרגול 2 – אביב 2019

מטריצת היעקוביאן של רובוט טורי

מטריצת היעקוביאן היא הטרנספורמציה הלינארית בין מרחב מהירויות המפרקים למרחב מהירויות העולם. היא נתונה על ידי:

$$\dot{x} = \begin{pmatrix} v \\ \omega \end{pmatrix} \Rightarrow \dot{x} = J_{6\times n}\dot{q} = \begin{bmatrix} J_L \\ J_A \end{bmatrix}_{6\times n} \dot{q}$$

כאשר $v,\ \omega$ וקטורי המהירות הקווית והזוויתית של יחידת הקצה (בהתאמה), $\dot{q}$ וקטור מהירויות המפרקים (מהירות סיבובית עבור מפרק סיבובי, מהירות קווית עבור מפרק קווי) ו-n מספר המפרקים.

מטריצה J נקראת מטריצת היעקוביאן, וניתן לחלק אותה ליעקוביאן לינארי $\left(J_L\right)_{3\times n}$ ויעקוביאן זוויתי $\left(J_A\right)_{3\times n}$.

חישוב מטריצת היעקוביאן

ישנן 2 שיטות מקובלות לחישוב מטריצת היעקוביאן.

1. גזירת הקינמטיקה הישירה:

המיקום של יחידת הקצה ידוע מפתרון הקינמטיקה הישירה, ומקיים:

$${}^{o}d_t = f\left(q\right) \triangleq \begin{pmatrix} f_1\left(q\right) \\ f_2\left(q\right) \\ f_3\left(q\right) \end{pmatrix}$$

ולכן המהירות הקווית של יחידת הקצה:

$$v = \frac{df}{dt} = \frac{\partial f}{\partial q}\frac{\partial q}{\partial t} = \frac{\partial f}{\partial q}\dot{q} = J_L\dot{q}$$

כלומר היעקוביאן הלינארי יהיה:

$$J_L = \left[\frac{\partial f}{\partial q_1} \;\middle|\; \frac{\partial f}{\partial q_1} \;\middle|\; \cdots \;\middle|\; \frac{\partial f}{\partial q_n} \right] \in \mathbb{R}^{3\times n};\ J_{L_{i,j}} = \frac{\partial f_i}{\partial q_j}$$

2. שיטת whitney:

שיטה כללית למציאת העמודה ה i של מטריצת היעקוביאן המלאה $J_i = \begin{pmatrix} J_{L_i} \\ J_{A_i} \end{pmatrix}$:

- עבור מפרק קווי - $J_i = \begin{pmatrix} \hat{u}_i \\ 0 \end{pmatrix}$
- עבור מפרק סיבובי - $J_i = \begin{pmatrix} \hat{u}_i \times \vec{r}_i \\ \hat{u}_i \end{pmatrix}$

כאשר $\hat{u}_i$ הנו וקטור יחידה בכיוון ציר מפרק i ו- $\vec{r}_i$ הנו וקטור מנקודה על ציר מפרק i אל יחידת הקצה.

יעקוביאן במערכת הכלי

$$\begin{pmatrix} v^0 \\ \omega^0 \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} J_L \\ J_A \end{bmatrix}_{6\times n} \dot{q} \Rightarrow \begin{pmatrix} v^t \\ \omega^t \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} J_L^t \\ J_L^t \end{bmatrix}_{6\times n} \dot{q} = J^t{}_{6\times n}\dot{q}$$

כאשר:

$$J^t = \begin{bmatrix} J_L^t \\ J_L^t \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} {}^tR_0 J_L \\ {}^tR_0 J_A \end{bmatrix}$$

סינגולריות ברובוט טורי

לסינגולריות ברובוט טורי יש מספר משמעויות:

1. במצב סינגולרי קיימת התמזגות של ענפי פתרונות שונים של הקינמטיקה ההפוכה
2. במצב סינגולרי ייתכן כי הכלי נמצא על מעטפת מרחב העבודה
3. אובדן דרגות חופש:

- קיימת קומבינציית מהירויות מפרקים שאינה מייצגת מהירות כלי: $J\dot{q}^* = \vec{0}$
- קיימת מהירות כלי שלא ניתן לייצג בעזרת מהירויות מפרקים: לא קיים $\dot{q}$ כך ש $J\dot{q} = \dot{x}^*$.

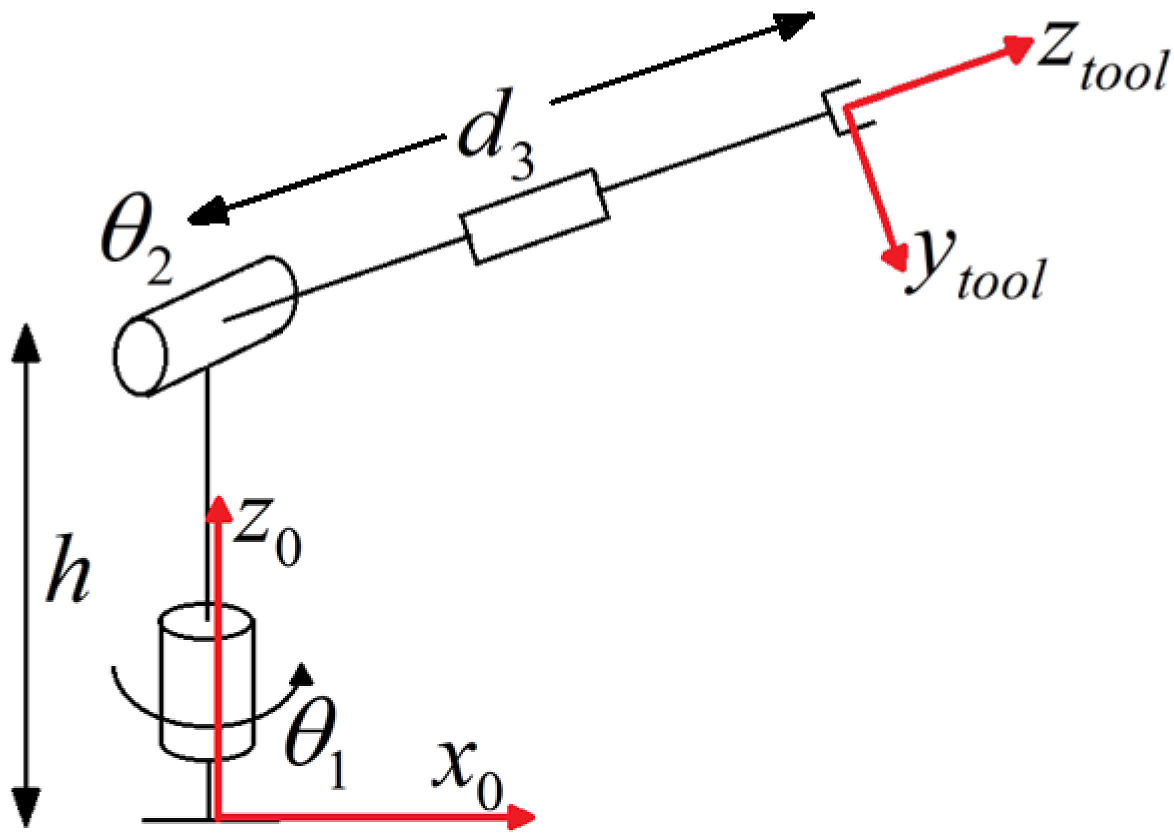
על מנת למצוא נקודות סינגולריות באופן אנליטי, נמצא את ערכי המפרקים שיתנו $\det(J) = 0$.

הערות:

1. במידה והיעקוביאן אינו ריבועי, נמצא סינגולריות מתוך הביטוי $\det(J^T J) = 0$.
2. אלא אם כן צויין אחרת, הכוונה בקורס היא לחשב סינגולריות **מתוך היעקוביאן הקווי.**
3. נקודות סינגולריות יהיו זהות עבור יעקוביאן **בכל מערכת צירים.**

<u>תרגיל 1</u>

נתון רובוט בעל 3 דרגות חופש.



נתונה גם מטריצת הטרנספורמציה:

$$
{}^{0}A_t = \left[\begin{array}{ccc|c} s_1 & c_1 s_2 & c_1 c_2 & c_1 c_2 d_3 \\ -c_1 & s_1 s_2 & s_1 c_2 & s_1 c_2 d_3 \\ 0 & -c_2 & s_2 & h + s_2 d_3 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right]
$$

דרוש:

א. לחשב את מטריצת היעקוביאן המערכת העולם ומערכת הכלי.
ב. לחשב את הנקודות הסינגולריות של הרובוט.

תרגיל 1 – פתרון:

א. עבור החלק הקווי נפתור בעזרת גזירה:

$$v=\frac{d}{dt}P=\frac{d}{dt}\begin{bmatrix}c_1c_2d_3\\ s_1c_2d_3\\ h+s_2d_3\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\frac{\partial P_x}{\partial\theta_1}&\frac{\partial P_x}{\partial\theta_2}&\frac{\partial P_x}{\partial d_3}\\ \frac{\partial P_y}{\partial\theta_1}&\frac{\partial P_y}{\partial\theta_2}&\frac{\partial P_y}{\partial d_3}\\ \frac{\partial P_z}{\partial\theta_1}&\frac{\partial P_z}{\partial\theta_2}&\frac{\partial P_z}{\partial d_3}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\dot\theta_1\\ \dot\theta_2\\ \dot d_3\end{bmatrix}$$

$$J_L=\begin{bmatrix}\frac{\partial P_x}{\partial\theta_1}&\frac{\partial P_x}{\partial\theta_2}&\frac{\partial P_x}{\partial d_3}\\ \frac{\partial P_y}{\partial\theta_1}&\frac{\partial P_y}{\partial\theta_2}&\frac{\partial P_y}{\partial d_3}\\ \frac{\partial P_z}{\partial\theta_1}&\frac{\partial P_z}{\partial\theta_2}&\frac{\partial P_z}{\partial d_3}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-s_1c_2d_3&-c_1s_2d_3&c_1c_2\\ c_1c_2d_3&-s_1s_2d_3&s_1c_2\\ 0&c_2d_3&s_2\end{bmatrix}$$

עבור החלק הסיבובי:

$$J_A=\begin{bmatrix}\hat u_1&\hat u_2&0\end{bmatrix}$$

$$\hat u_1=\hat z_0=\begin{bmatrix}0\\0\\1\end{bmatrix}$$

$$\hat u_2={}^0R_2\begin{bmatrix}0\\-1\\0\end{bmatrix}={}^0R_1\,{}^1R_2\begin{bmatrix}0\\-1\\0\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}c_1&-s_1&0\\ s_1&c_1&0\\ 0&0&1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}c_2&0&-s_2\\ 0&1&0\\ s_2&0&c_2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}0\\-1\\0\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}c_1c_2&-s_1&-c_1s_2\\ s_1c_2&c_1&-s_1s_2\\ s_2&0&c_2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}0\\-1\\0\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}s_1\\-c_1\\0\end{bmatrix}$$

$$J_A=\begin{bmatrix}0&s_1&0\\ 0&-c_1&0\\ 1&0&0\end{bmatrix}$$

היעקוביאן במערכת הכלי:

$$\boxed{\begin{aligned}J_L^{TOOL}&={}^{TOOl}R_0\cdot J_L^{WORLD}\\ J_A^{TOOL}&={}^{TOOL}R_0\cdot J_A^{WORLD}\end{aligned}}$$

$$J_L^{TOOL}=\begin{bmatrix}s_1&c_1s_2&c_1c_2\\ -c_1&s_1s_2&s_1c_2\\ 0&-c_2&s_2\end{bmatrix}^T\cdot\begin{bmatrix}-s_1c_2d_3&-c_1s_2d_3&c_1c_2\\ c_1c_2d_3&-s_1s_2d_3&s_1c_2\\ 0&c_2d_3&s_2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-c_2d_3&0&0\\ 0&-d_3&0\\ 0&0&1\end{bmatrix}$$

ב. נקודות סינגולריות מתוך היעקוביאן במערכת הכלי: $\det\left[J_L^{TOOL}\right]=0$

$$d_3=0$$
$$\Rightarrow \vec{v}=\begin{bmatrix}0&0&0\\0&0&0\\0&0&1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\dot\theta_1\\\dot\theta_2\\\dot d_3\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0\\0\\\dot d_3\end{bmatrix}$$

$\theta_1,\ \theta_2$ לא משפיעים על מהירות הכלי.

לא ניתן ליצור מהירות הכלי בכיוונים $\hat{x},\ \hat{y}$ במערכת הכלי.

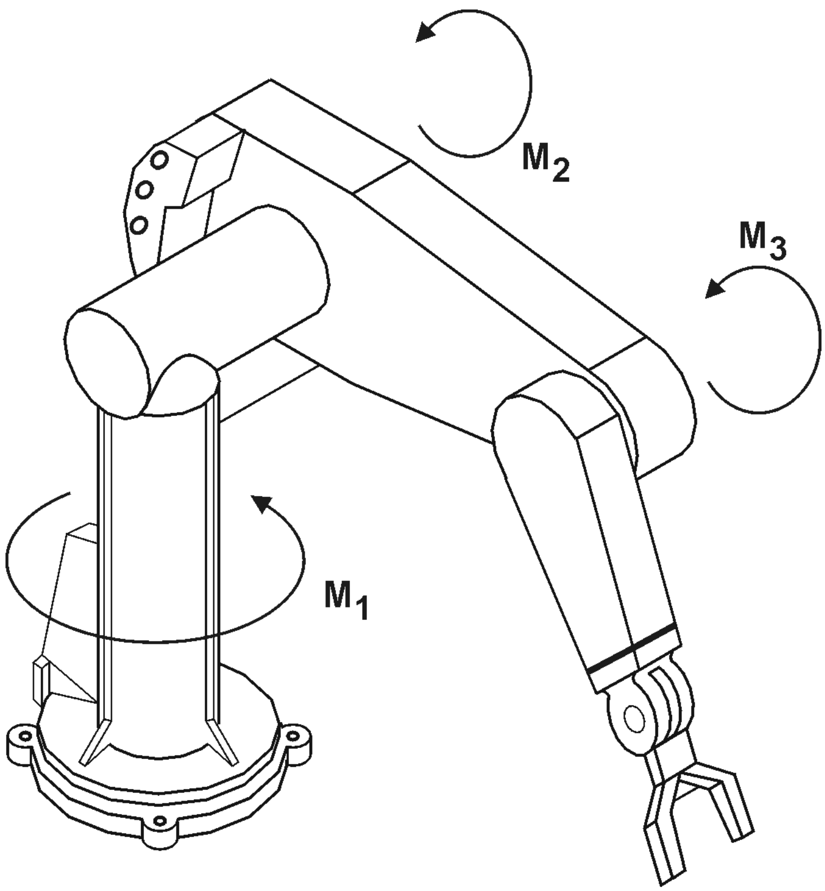
$$c_2=0\Rightarrow\theta_2=\pm\frac{\pi}{2}$$
$$v=\begin{bmatrix}0&0&0\\0&-d_3&0\\0&0&1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\dot\theta_1\\\dot\theta_2\\\dot d_3\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0\\-d_3\dot\theta_2\\\dot d_3\end{bmatrix}$$

θ_1 לא משפיע על מהירות הכלי.

לא ניתן ליצור מהירות הכלי בכיוונים $\hat{x}$ במערכת הכלי.

תרגיל 2

נתון רובוט בעל 3 דרגות חופש:



נתונה מטריצת הטרנספורמציה:

$$
{}^{0}A_1 = \begin{bmatrix} c\theta_1 & -s\theta_1 & 0 & 0 \\ s\theta_1 & c\theta_1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & l_1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix},\quad {}^{1}A_2 = \begin{bmatrix} c\theta_2 & 0 & -s\theta_2 & l_2 c\theta_2 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ s\theta_2 & 0 & c\theta_2 & l_2 s\theta_2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix},\quad {}^{2}A_3 = \begin{bmatrix} c\theta_3 & 0 & -s\theta_3 & l_3 c\theta_3 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ s\theta_3 & 0 & c\theta_3 & l_3 s\theta_3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}
$$

$$
{}^{0}A_t = \left[\begin{array}{ccc:c} c_1 c_{23} & -s_1 & -c_1 s_{23} & c_1\left(l_2 c_2 + l_3 c_{23}\right) \\ s_1 c_{23} & c_1 & -s_1 s_{23} & s_1\left(l_2 c_2 + l_3 c_{23}\right) \\ s_{23} & 0 & c_{23} & l_1 + s_2 l_2 + l_3 s_{23} \\ \hdashline 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right]
$$

דרוש לחשב את מטריצת היעקוביאן של הרובוט במערכת העולם ובמערכת הכלי ולמצוא נק' סינגולריות.

תרגיל 2 – פתרון:

עבור החלק הקווי נפתור בעזרת גזירה:

$$v = \frac{d}{dt}P = \frac{d}{dt}\begin{bmatrix} c_1\left(l_2c_2 + l_3c_{23}\right) \\ s_1\left(l_2c_2 + l_3c_{23}\right) \\ l_1 + s_2l_2 + l_3s_{23} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\partial P_x}{\partial\theta_1} & \frac{\partial P_x}{\partial\theta_2} & \frac{\partial P_x}{\partial\theta_3} \\ \frac{\partial P_y}{\partial\theta_1} & \frac{\partial P_y}{\partial\theta_2} & \frac{\partial P_y}{\partial\theta_3} \\ \frac{\partial P_z}{\partial\theta_1} & \frac{\partial P_z}{\partial\theta_2} & \frac{\partial P_z}{\partial\theta_3} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \dot\theta_1 \\ \dot\theta_2 \\ \dot\theta_3 \end{bmatrix}$$

$$J_L = \begin{bmatrix} \frac{\partial P_x}{\partial\theta_1} & \frac{\partial P_x}{\partial\theta_2} & \frac{\partial P_x}{\partial\theta_3} \\ \frac{\partial P_y}{\partial\theta_1} & \frac{\partial P_y}{\partial\theta_2} & \frac{\partial P_y}{\partial\theta_3} \\ \frac{\partial P_z}{\partial\theta_1} & \frac{\partial P_z}{\partial\theta_2} & \frac{\partial P_z}{\partial\theta_3} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -s_1\left(l_2c_2 + l_3c_{23}\right) & -l_2c_1s_2 - l_2c_1s_{23} & -l_3c_1s_{23} \\ c_1\left(l_2c_2 + l_3c_{23}\right) & -l_2s_1s_2 - l_2s_1s_{23} & -l_3s_1s_{23} \\ 0 & l_2c_2 + l_2c_{23} & l_3c_{23} \end{bmatrix}$$

עבור החלק הסיבובי:

$$J_A = \begin{bmatrix} \hat u_1 & \hat u_2 & \hat u_3 \end{bmatrix}$$

$$\hat u_1 = \hat z_0 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \hat u_2 = {}^0R_2\begin{bmatrix} 0 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix}, \hat u_3 = {}^0R_3\begin{bmatrix} 0 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\left[\begin{array}{ccc:c} c_1c_{23} & -s_1 & -c_1s_{23} & c_1\left(l_2c_2 + l_3c_{23}\right) \\ s_1c_{23} & c_1 & -s_1s_{23} & s_1\left(l_2c_2 + l_3c_{23}\right) \\ s_{23} & 0 & c_{23} & l_1 + s_2l_2 + l_3s_{23} \\ \hdashline 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right]$$

$${}^0R_2 = \begin{bmatrix} c_1c_2 & -s_1 & -c_1s_2 \\ s_1c_2 & c_1 & -s_1s_2 \\ s_2 & 0 & c_2 \end{bmatrix}, \quad {}^0R_3 = \begin{bmatrix} c_1c_{23} & -s_1 & -c_1s_{23} \\ s_1c_{23} & c_1 & -s_1s_{23} \\ s_{23} & 0 & c_{23} \end{bmatrix}$$

$$J_A = \begin{bmatrix} 0 & s_1 & s_1 \\ 0 & -c_1 & -c_1 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

היעקוביאן במערכת הכלי:

$$\boxed{\begin{aligned} J_L^{TOOL} &= {}^{TOOL}R_0 \cdot J_L^{WORLD} \\ J_A^{TOOL} &= {}^{TOOL}R_0 \cdot J_A^{WORLD} \end{aligned}}$$

$$J_L^{TOOL} = \begin{bmatrix} c_1c_{23} & -s_1 & -c_1s_{23} \\ s_1c_{23} & c_1 & -s_1s_{23} \\ s_{23} & 0 & c_{23} \end{bmatrix}^T \cdot \begin{bmatrix} -s_1\left(l_2c_2+l_3c_{23}\right) & -c_1\left(l_2s_2+l_3s_{23}\right) & -l_3c_1s_{23} \\ c_1\left(l_2c_2+l_3c_{23}\right) & -s_1\left(l_2s_2+l_3s_{23}\right) & -l_3s_1s_{23} \\ 0 & l_2c_2+l_3c_{23} & l_3c_{23} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & l_2s_3 & 0 \\ l_2c_2+l_3c_{23} & 0 & 0 \\ 0 & l_2c_3+l_3 & l_3 \end{bmatrix}$$

$$J_A^{TOOL} = \begin{bmatrix} c_1c_{23} & -s_1 & -c_1s_{23} \\ s_1c_{23} & c_1 & -s_1s_{23} \\ s_{23} & 0 & c_{23} \end{bmatrix}^T \cdot \begin{bmatrix} 0 & s_1 & s_1 \\ 0 & -c_1 & -c_1 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} s_{23} & 0 & 0 \\ 0 & -1 & -1 \\ c_{23} & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

נקודות סינגולריות מתוך היעקוביאן במערכת הכלי: $\det\left[J_L^{TOOL}\right]=0$

$$\det\begin{bmatrix} 0 & l_2s_3 & 0 \\ l_2c_2+l_3c_{23} & 0 & 0 \\ 0 & l_2c_3+l_3 & l_3 \end{bmatrix} = -l_2s_3\left(l_2c_2+l_3c_{23}\right)l_3 = 0 \Rightarrow s_3=0,\ \ l_2c_2+l_3c_{23}=0$$

$$s_3 = 0$$

$$\Rightarrow v = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ l_2c_2+l_3c_{23} & 0 & 0 \\ 0 & l_2c_3+l_3 & l_3 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \dot\theta_1 \\ \dot\theta_2 \\ \dot\theta_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ \dot\theta_1\left(l_2c_2+l_3c_{23}\right) \\ \left(l_2c_3+l_3\right)\dot\theta_2+l_3\dot\theta_3 \end{bmatrix}$$

לא ניתן ליצור מהירות הכלי בכיוון $\hat{x}$ במערכת הכלי.

$$l_2c_2+l_3c_{23}=0$$

$$v = \begin{bmatrix} 0 & l_2s_3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & l_2c_3+l_3 & l_3 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \dot\theta_1 \\ \dot\theta_2 \\ \dot\theta_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \dot\theta_2 l_2 s_3 \\ 0 \\ \left(l_2c_3+l_3\right)\dot\theta_2+l_3\dot\theta_3 \end{bmatrix}$$

θ_1 לא משפיע על מהירות הכלי.

לא ניתן ליצור מהירות הכלי בכיוון $\hat{y}$ במערכת הכלי.