תרגול 10 – אביב 2019

יציבות מערכות דינמיות לא ליניאריות – משפט Lyapunov

נתונה מערכת דינאמית כללית בעלת מערכת משוואות מצב: $\dot{\bar{x}} = f\left(\bar{x}\right)$ $\dot{\bar{x}} = f\left(\bar{x}\right)$, כאשר $f\left(\bar{0}\right) = \bar{0}$ (כלומר $\bar{x} = \bar{0}$ הינה נקודת שיווי משקל). נבחר פונקציית ליאפונוב סקלרית $V\left(\bar{x}\right)$ חיובית לחלוטין:

$$V\left(\bar{0}\right) = \bar{0}$$
$$V\left(\bar{x}\right) > \bar{0}, \ \ \forall \bar{x} \neq \bar{0}$$

כלומר $\bar{x} = \bar{0}$ הינה נקודת מינימום גלובלי של $V\left(\bar{x}\right)$.

נחשב את נגזרת ליאפונוב – הנגזרת של $V\left(\bar{x}\right)$ לאורך מסלול $\bar{x}\left(t\right)$ המקיימים את המערכת הדינאמית.

$$W\left(x\right) = \frac{dV}{dt} = \frac{dV}{dx}\frac{dx}{dt} = \nabla_x V\left(x\right) \cdot f\left(x\right)$$

<u>משפט 1:</u>

אם $W\left(x\right)$ שלילית לחלוטין (N.D) כלומר, מתקיים $W\left(x\right) < 0$ עבור $\forall \bar{x} \neq \bar{0}$ בתחום $x \in U$, אזי $\bar{x} = \bar{0}$ הינה נקודת שיווי משקל יציבה אסימפטוטית.

<u>משפט 2:</u>

אם $W\left(x\right)$ שלילית (N.S.D.) כלומר, מתקיים $W\left(x\right) \leq 0$ עבור $\forall \bar{x} \neq \bar{0}$ בתחום $x \in U$ ובנוסף $W\left(x\right)$ אינה מתאפסת זהותית לאורך מסלולי הפתרון $\bar{x}\left(t\right)$ של המערכת הדינאמית (כלומר, נק' האיפוס אינה נק' ש"מ), אזי $\bar{x} = \bar{0}$ הינה נקודת שיווי משקל יציבה אסימפטוטית.

<u>משפט ליאפונוב למערכת ליניארית $\dot{x} = Ax$</u>:

בוחרים פונקציית ליאפונוב מועמדת $V\left(x\right) = x^T P x$ כאשר P סימטרית וחיובית לחלוטין.

נגזרת ליאפונוב: $W\left(x\right) = \dot{V}\left(x\right) = \dot{x}^T P x + x^T P \dot{x} = x^T\left(PA + A^T P\right)x = -x^T Q x$

כאשר $Q \triangleq -\left(PA + A^T P\right)$. אם Q חיובית לחלוטין (P.D.), אז $\bar{x} = \bar{0}$ הינה נקודה יציבה.

<u>במערכת לינארית קיים משפט גם בכיוון ההפוך:</u> המערכת $\dot{x} = Ax$ הינה יציבה אם ורק אם עבור Q כלשהי סימטרית וחיובית לחלוטין, הפתרון P של משוואת ליאפונוב $Q = -\left(PA + A^T P\right)$ היא מטריצה סימטרית וחיובית לחלוטין.

תרגיל 1

דרוש להוכיח יציבות אסימפטוטית בנקודה $\left(x_2 = x_1 = 0\right)$ עבור המערכת הדינאמית הבאה

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = -3x_1^3 \\ \dot{x}_2 = 2x_1^2 - x_2 \end{cases}$$

א. בעזרת לינאריזציה של המערכת.

ב. על ידי שימוש בפונקציות הליאפונוב $V_2 = \frac{x_1^2}{2} + \frac{x_2^2}{2}$ $\qquad V_1 = \frac{x_1^2}{6} + x_2^2;$

פתרון:

א. נבצע לינאריזציה של המערכת:

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = -3x_1^3 = f_1 \\ \dot{x}_2 = 2x_1^2 - x_2 = f_2 \end{cases} ;\ A_{ij} = \left.\frac{\partial f_i}{\partial x_j}\right|_{eq} \Rightarrow A = \begin{bmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1} & \frac{\partial f_1}{\partial x_2} \\ \frac{\partial f_2}{\partial x_1} & \frac{\partial f_2}{\partial x_2} \end{bmatrix} = \left.\begin{bmatrix} -9x_1^2 & 0 \\ 4x_1 & -1 \end{bmatrix}\right|_{x_1=0, x_2=0} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$$

למערכת ע"ע $\lambda = 0$, ולכן לא נוכל להוכיח יציבות עפ"י התורה הלינארית.

ב. נחשב נגזרות ליאפונוב:

$$W_1 = \frac{d}{dt}V_1 = \frac{2x_1}{6}\dot{x}_1 + 2x_2\dot{x}_2 = -\frac{2x_1}{6}3x_1^3 + 2x_2\left(2x_1^2 - x_2\right) = -x_1^4 - 2x_2^2 + 4x_1^2x_2 =$$
$$= -\left(x_1^4 - 4x_1^2x_2 + 4x_2^2\right) - 2x_2^2 + 4x_2^2 = -\left(x_1^2 - 2x_2\right)^2 + 2x_2^2$$
$$For: x_1 = x_2 = 2 \Rightarrow W_1 = 8 > 0$$

כלומר, לא הצלחנו להוכיח יציבות עם V_1. עבור V_2:

$$W_2 = \frac{d}{dt}V_2 = 2\frac{x_1}{2}\dot{x}_1 + 2\frac{x_2}{2}\dot{x}_2 = -3x_1x_1^3 + x_2\left(2x_1^2 - x_2\right) = -3x_1^4 + 2x_1^2x_2 - x_2^2 =$$
$$= -2x_1^4 - x_1^4 + 2x_1^2x_2 - x_2^2 = -2x_1^4 - \left(x_1^4 - 2x_1^2x_2 + x_2^2\right) = -2x_1^4 - \left(x_1^2 - x_2\right)^2 < 0$$

הוכחנו יציבות אסימפטוטית.

תרגיל 2

דרוש להוכיח יציבות אסימפטוטית בנקודה $\theta = 0$ עבור מטוטלת מרוסנת חופשית:

$$I\ddot{\theta} + C\dot{\theta} + mgl\sin\theta = 0$$

א. בעזרת לינאריזציה של המערכת.

ב. על ידי שימוש בפונקצית ליאפונוב.

פתרון:

א. נבצע לינאריזציה של המערכת בעזרת קירוב זוויות קטנות:

$$I\ddot{\theta} + C\dot{\theta} + mgl\theta = 0;\ I > 0, C > 0, mgl > 0 \Rightarrow stable$$

הוכחנו יציבות.

ב. נבחר בתור פונקצית ליאפונוב את האנרגיה כוללת של המערכת:

$$V = \frac{1}{2}I\dot{\theta}^2 + mgl\left(1 - \cos\theta\right)$$

$$x_1 = \theta,\ x_2 = \dot{x}_1 = \dot{\theta}, \dot{x}_2 = \ddot{\theta} = -\frac{mgl}{I}\sin x_1 - \frac{C}{I}x_2$$

$$V = \frac{1}{2}Ix_2^2 + mgl\left(1 - \cos x_1\right)$$

$$W = mgl\sin x_1 \cdot x_2 + Ix_2\left(-\frac{mgl}{I}\sin x_1 - \frac{C}{I}x_2\right) = mgl\sin x_1 \cdot x_2 - x_2 mgl\sin x_1 - Cx_2^2 = -Cx_2^2$$

אם $x = \begin{bmatrix} a \\ 0 \end{bmatrix}$, אז נקבל $W = 0$. נבדוק אם ניתן להשתמש במשפט 2:

$$x_1 = \theta,\ x_2 = \dot{x}_1 = \dot{\theta}, \dot{x}_2 = \ddot{\theta} = -\frac{mgl}{I}\sin x_1 - \frac{C}{I}x_2$$

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{bmatrix}\left(x = \begin{bmatrix} a \\ 0 \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} x_2 \\ -\frac{mgl}{I}\sin x_1 - \frac{C}{I}x_2 \end{bmatrix}_{x=\begin{bmatrix} a \\ 0 \end{bmatrix}} = \begin{bmatrix} 0 \\ -\frac{mgl}{I}\sin a \neq 0 \end{bmatrix}$$

לכן x_2 לא מתאפס זהותית לאורך כל המסלול ולכן גם W. ← **יציב אסימפטוטית.**

מקרה מיוחד 1

נרצה להוכיח יציבות של המערכת $\dot{x}=-g(x),\quad xg(x)>0$. נבחר:

$$V(x)=\int_0^x g(\tau)d\tau \Rightarrow W(x)=g(x)\cdot\dot{x}=g(x)\left(-g(x)\right)=-g^2(x)<0$$

מקרה מיוחד 2

נרצה להוכיח יציבות של המערכת $m\ddot{y}=-f(\dot{y})-g(y);\quad \dot{y}f(\dot{y}),yg(y)>0$. נבחר:

$$V(y,\dot{y})=\frac{1}{2}m\dot{y}^2+\int_0^y g(\tau)d\tau$$

$$\begin{pmatrix}\dot{x}_1\\ \dot{x}_2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}x_2\\ -\frac{f(x_2)}{m}-\frac{g(x_1)}{m}\end{pmatrix}\Rightarrow V(x)=\frac{1}{2}m{x_2}^2+\int_0^{x_1} g(\tau)d\tau$$

$$\frac{dV}{dx}=\begin{pmatrix}g(x_1) & mx_2\end{pmatrix},\ \dot{x}=\begin{pmatrix}x_2\\ -\frac{f(x_2)}{m}-\frac{g(x_1)}{m}\end{pmatrix}\Rightarrow$$

$$W(x)=\begin{pmatrix}g(x_1) & mx_2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_2\\ -\frac{f(x_2)}{m}-\frac{g(x_1)}{m}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}g(y) & m\dot{y}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\dot{y}\\ -\frac{f(\dot{y})}{m}-\frac{g(y)}{m}\end{pmatrix}=$$

$$=\dot{y}g(y)-\dot{y}f(\dot{y})-\dot{y}g(\dot{y})=-\dot{y}f(\dot{y})<0$$

מקרה מיוחד 3

נרצה להוכיח יציבות של המערכת:

$$.\begin{cases}\dot{x}_1=x_2\\ \dot{x}_2=-h(x_1)-ax_2\end{cases};\ a>0,\ yh(y)>0,\ y\neq 0,\ h(0)=0$$

נבחר:

$$V(x)=\frac{\delta}{2}x^T\begin{pmatrix}ka^2 & ka\\ ka & 1\end{pmatrix}x+\delta\int_0^{x_1}h(y)dy,\quad 0<k<1,\ \delta>0$$

$$P=\begin{pmatrix}ka^2 & ka\\ ka & 1\end{pmatrix}>0$$

$$V(x)=\frac{\delta}{2}\left(ka^2x_1^2+2kax_1x_2+x_2^2\right)+\delta\int_0^{x_1}h(y)dy$$

$$W\left(x\right)=\frac{\partial V}{\partial x_1}\dot{x}_1+\frac{\partial V}{\partial x_2}\dot{x}_2=\left(\delta ka^2x_1+\delta kax_2+\delta h\left(x_1\right)\right)x_2+\left(\delta kax_1+\delta x_2\right)\left(-h\left(x_1\right)-ax_2\right)=$$

$$=\underline{\delta ka^2x_1x_2}+\delta kax_2^2+\underline{\underline{\delta h\left(x_1\right)x_2}}-\delta kax_1h\left(x_1\right)-\underline{\underline{\delta x_2h\left(x_1\right)}}-\underline{\delta ka^2x_1x_2}-\delta ax_2^2=$$

$$=\delta kax_2^2-\delta kax_1h\left(x_1\right)-\delta ax_2^2=\delta\left[k-1\right]ax_2^2-\delta kax_1h\left(x_1\right)=-\delta\left[1-k\right]ax_2^2-\delta kax_1h\left(x_1\right)<0$$