תרגול 11 – אביב 2019

חוק בקרה PD

נתונות משוואות התנועה של הרובוט:

$$H(q)^{n\times n}\ddot{q}+C(q,\dot{q})^{n\times n}\dot{q}+G(q)^{n\times 1}=u$$

נתונים פרמטרי נקודה רצויים עבור הרובוט: $q_d,\ \dot{q}_d,\ \ddot{q}_d$. נרצה לבחור וקטור אותות בקרה, $u(t)$, כך שהרובוט יגיע לנקודה בעלת הפרמטרים הרצויים. נגדיר שגיאה:

$$e\triangleq q-q_d\Rightarrow \dot{e}=\dot{q}-\dot{q}_d,\ \ddot{e}=\ddot{q}-\ddot{q}_d$$

אפשרות 1 – חוק בקרה PD + Inverse Dynamics:

בהנחה שמטריצות האינרציה, המהירויות והגרביטציה ידועות, נבחר את אותות הבקרה להיות:

$$u(t)=C(q,\dot{q})\dot{q}+G(q)+H\left(\ddot{q}_d-D(\dot{q}-\dot{q}_d)-K(q-q_d)\right)$$

הצבה למשוואות התנועה תיתן:

$$\ddot{e}+D\dot{e}+Ke=0$$

כאשר $D=diag(D_i),\ K=diag(K_i);\ D_i,K_i>0$ המערכת יציבה אסימפטוטית.

<u>חסרון בולט</u> – השיטה רגישה מאוד לטעויות מידול ושגיאות מדידה, שכן קשה לקבוע את H,C,G במקרים אלו.

אפשרות 2 – חוק בקרה PD + G:

בהנחה שמטריצת הגרביטציה ידועה, נבחר את אותות הבקרה להיות:

$$u(t)=G(q)-K_D(\dot{q}-\dot{q}_d)-K_P(q-q_d)$$

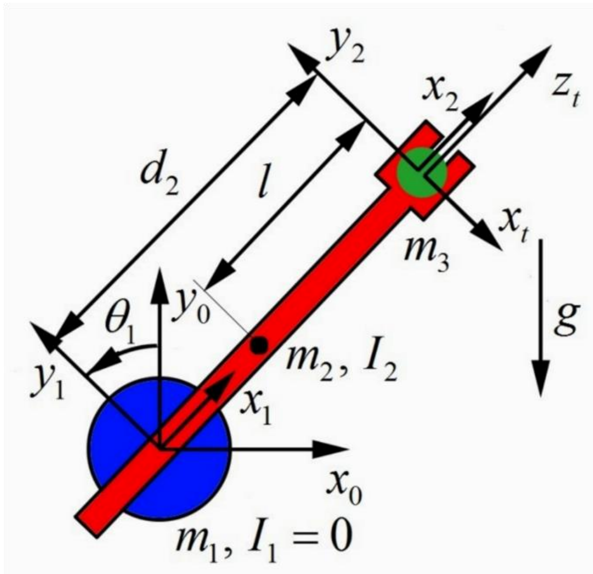
הצבה למשוואות התנועה תיתן:

$$H\ddot{e}+(C+K_D)\dot{e}+K_Pe=0$$

כאשר $K_P,\ K_D$ סימטריות ומוגדרות חיוביות, המערכת יציבה אסימפטוטית (q_d נקודת שיווי משקל לפי ליאפונוב).

<u>תרגיל</u>

דרוש לכתוב חוק בקרה המייצב את הרובוט הבא:



<u>פתרון:</u>

מתרגול 8, מטריצת האינרציה:

$$H = \begin{bmatrix} m_3 d_2^2 + m_2 (d_2 - l)^2 + \frac{m_2 d_2^2}{12} & 0 \\ 0 & m_2 + m_3 \end{bmatrix}$$

מטריצת המהירויות:

$$C(q, \dot{q}) = \begin{bmatrix} \alpha \dot{d}_2 & \alpha \dot{\theta}_1 \\ -\alpha \dot{\theta}_1 & 0 \end{bmatrix}, \ \alpha \triangleq m_3 d_2 + m_2 (d_2 - l) + \frac{m_2 d_2}{12}$$

ומטריצת הגרביטציה:

$$G(q) = \begin{bmatrix} m_2 (d_2 - l) c_1 g + m_3 d_2 c_1 g \\ (m_2 + m_3) s_1 g \end{bmatrix}$$

משוואות התנועה תהיינה:

$$\begin{bmatrix} m_3 d_2^2 + m_2 (d_2 - l)^2 + \frac{m_2 d_2^2}{12} & 0 \\ 0 & m_2 + m_3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \ddot{\theta}_1 \\ \ddot{d}_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \alpha \dot{d}_2 & \alpha \dot{\theta}_1 \\ -\alpha \dot{\theta}_1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{\theta}_1 \\ \dot{d}_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} m_2 (d_2 - l) c_1 g + m_3 d_2 c_1 g \\ (m_2 + m_3) s_1 g \end{bmatrix} = u$$

נבחר חוק בקרה PD+G. דרוש לבחור K_P, K_D סימטריות ומוגדרות חיוביות, ולכן נבחר מטריצות אלכסוניות:

$$K_P = \begin{bmatrix} p & 0 \\ 0 & p \end{bmatrix},\ K_D = \begin{bmatrix} d & 0 \\ 0 & d \end{bmatrix}$$

חוק הבקרה יהיה:

$$u = G(q) - K_D\dot{e} - K_P e = \begin{bmatrix} m_2(d_2 - l)c_1 g + m_3 d_2 c_1 g \\ (m_2 + m_3)s_1 g \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} d & 0 \\ 0 & d \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \dot{\theta}_1 - \dot{\theta}_d \\ \dot{d}_2 - \dot{d}_d \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} p & 0 \\ 0 & p \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \theta_1 - \theta_d \\ d_2 - d_d \end{bmatrix}$$

ברוב המקרים נרצה שהרובוט יגיע לנקודת המטרה במנוחה, ולכן נדרוש:

$$\dot{\theta}_d = \dot{d}_d = 0 \Rightarrow \dot{q}_d = 0$$

נציב למשוואות התנועה ונקבל:

$$\begin{bmatrix} m_3 d_2^2 + m_2(d_2 - l)^2 + \frac{m_2 d_2^2}{12} & 0 \\ 0 & m_2 + m_3 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \ddot{\theta}_1 \\ \ddot{d}_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \alpha\dot{d}_2 & \alpha\dot{\theta}_1 \\ -\alpha\dot{\theta}_1 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \dot{\theta}_1 \\ \dot{d}_2 \end{bmatrix} = -\begin{bmatrix} d & 0 \\ 0 & d \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \dot{\theta}_1 \\ \dot{d}_2 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} p & 0 \\ 0 & p \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \theta_1 - \theta_d \\ d_2 - d_d \end{bmatrix}$$

נעביר אגפים:

$$\begin{bmatrix} m_3 d_2^2 + m_2(d_2 - l)^2 + \frac{m_2 d_2^2}{12} & 0 \\ 0 & m_2 + m_3 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \ddot{\theta}_1 \\ \ddot{d}_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \alpha\dot{d}_2 + d & \alpha\dot{\theta}_1 \\ -\alpha\dot{\theta}_1 & d \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \dot{\theta}_1 \\ \dot{d}_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} p & 0 \\ 0 & p \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \theta_1 - \theta_d \\ d_2 - d_d \end{bmatrix} = 0$$