תרגול 5 – אביב 2019

חזרה לקראת בוחן האמצע

הבוחן יתקיים ב-7.5 על הנושאים הבאים:

<u>רובוטים טוריים –</u> קינמטיקה ישירה, קינמטיקה הפוכה, יעקוביאן במערכות צירים שונות, מציאת והבנת נקודות סינגולריות, סטטיקה.

<u>רובוטים מקביליים –</u> קינמטיקה ישירה והפוכה, יעקוביאנים וסינגולריות.

בוחן אמצע 2015

<u>שאלה 1 (50%)</u>

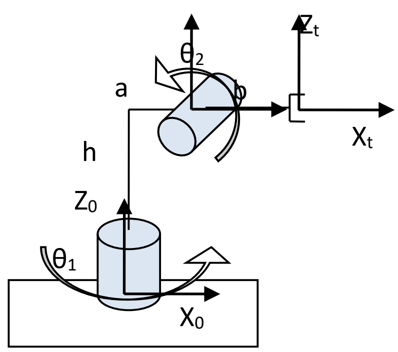
בציור 1 מתואר רובוט מרחבי בעל שתי דרגות חופש - θ_1, θ_2 הפועל בשדה כבידה.

א. [10%] קינמטיקה ישירה:

מצאו את מטריצת הטרנספורמציה ההומוגנית ממערכת הכלי (x_t,y_t,z_t) למערכת העולם (x_o,y_o,z_o). <u>יש להשתמש בהגדרת משתני המפרקים ומערכות הצירים כפי שהוגדרו בציור.</u>

פתרון:

הגדרת מערכות צירים:



$$
{}^{0}A_1=\begin{bmatrix} c_1 & -s_1 & 0 & ac_1\\ s_1 & c_1 & 0 & as_1\\ 0 & 0 & 1 & h\\ 0 & 0 & 0 & 1\end{bmatrix},\ {}^{1}A_2=\begin{bmatrix} c_2 & 0 & -s_2 & bc_2\\ 0 & 1 & 0 & 0\\ s_2 & 0 & c_2 & bs_2\\ 0 & 0 & 0 & 1\end{bmatrix}
$$

$$
{}^{0}A_2=\begin{bmatrix} c_1 & -s_1 & 0 & ac_1\\ s_1 & c_1 & 0 & as_1\\ 0 & 0 & 1 & h\\ 0 & 0 & 0 & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix} c_2 & 0 & -s_2 & bc_2\\ 0 & 1 & 0 & 0\\ s_2 & 0 & c_2 & bs_2\\ 0 & 0 & 0 & 1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix} c_1c_2 & -s_1 & -c_1s_2 & ac_1+bc_1c_2\\ s_1c_2 & c_1 & -s_1s_2 & as_1+bs_1c_2\\ s_2 & 0 & c_2 & h+bs_2\\ 0 & 0 & 0 & 1\end{bmatrix}
$$

ב. [10%] קינמטיקה הפוכה:
בהינתן מיקום הכלי (x,y,z) מצאו את ערכי המפרקים θ_1, θ_2.
פתרון:

$$\left.\begin{aligned} x = ac_1 + bc_1c_2 \Rightarrow c_1 = \frac{x}{a+bc_2} \\ y = as_1 + bs_1c_2 \Rightarrow s_1 = \frac{y}{a+bc_2} \end{aligned}\right\} \Rightarrow \theta_1 = \operatorname{atan2}(s_1, c_1) = \operatorname{atan2}\left(\frac{y}{a+bc_2}, \frac{x}{a+bc_2}\right) = \operatorname{atan2}(\pm y, \pm x)$$

$$z = h + bs_2 \Rightarrow s_2 = \frac{z-h}{b}, c_2 = \frac{x-ac_1}{bc_1} = \frac{y-as_1}{bs_1} \Rightarrow \theta_2 = \operatorname{atan2}(s_2, c_2) = \operatorname{atan2}\left(\frac{z-h}{b}, \frac{x-ac_1}{bc_1}\right)$$

$$\left.\begin{aligned} \theta_1^+ \rightarrow \theta_2 \\ \theta_1^- \rightarrow \theta_2 \end{aligned}\right\} 2\,solutions$$

ג. [20%] חשבו את מטריצת היעקוביאן המלאה (6×2) במערכת הבסיס ובמערכת הכלי.
פתרון:

$$J_L = \begin{bmatrix} -(a+bc_2)s_1 & -bc_1s_2 \\ (a+bc_2)c_1 & -bs_1s_2 \\ 0 & bc_2 \end{bmatrix}, \; J_A = \begin{bmatrix} 0 & s_1 \\ 0 & -c_1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$$

$$J_L^{tool} = \begin{bmatrix} c_1c_2 & s_1c_2 & s_2 \\ -s_1 & c_1 & 0 \\ -c_1s_2 & -s_1s_2 & c_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -(a+bc_2)s_1 & -bc_1s_2 \\ (a+bc_2)c_1 & -bs_1s_2 \\ 0 & bc_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ a+bc_2 & 0 \\ 0 & b \end{bmatrix}$$

$$J_A^{tool} = \begin{bmatrix} c_1c_2 & s_1c_2 & s_2 \\ -s_1 & c_1 & 0 \\ -c_1s_2 & -s_1s_2 & c_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & s_1 \\ 0 & -c_1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} s_2 & 0 \\ 0 & -1 \\ c_2 & 0 \end{bmatrix}$$

ד. [10%] מצאו את הנקודות הסינגולריות של הרובוט.
(1) קשיחות אינסופית בכיוון x במערכת הכלי

$$J_L^{tool} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ a+bc_2 & 0 \\ 0 & b \end{bmatrix} \Rightarrow a + bc_2 = 0 \Rightarrow c_2 = -\frac{a}{b} \quad (2)$$

התופסנית נמצאת מעל ציר Z - לא ניתן לייצר תנועה בכיוון Y של מערכת הכלי.

<u>שאלה 2 (50%)</u>

בציור 2 מתואר רובוט מקבילי מישורי בעל שלוש דרגות חופש: d_1, θ_1, θ_2. מעוניינים לתאר את המיקום והאוריינטציה של הפלטה באורך a, כאשר מערכת הצירים של הכלי צמודה למרכז הפלטה. המפרקים האקטיביים מסומנים בכחול ומפרקים הפאסיביים בלבן.

א. [15%] קינמטיקה הפוכה:

בהינתן מיקום ואוריינטציה של הפלטה $\left(x, y, \phi\right)$ מצאו את ערכי המפרקים של הרובוט $\left(d_1, \theta_1, \theta_2\right)$.

פתרון:

$$(1)\, y = h + bs_2 - \frac{1}{2}as_\phi \Rightarrow \begin{cases} s_2 = \dfrac{y-h}{b} + \dfrac{1}{2}\dfrac{a}{b}s_\phi \\ c_2 = \pm\sqrt{1-s_1^2} = \pm\sqrt{1-\left(\dfrac{y-h}{b} + \dfrac{1}{2}\dfrac{a}{b}s_\phi\right)^2} \end{cases}$$

$$\Rightarrow \theta_2 = \operatorname{atan2}\left(\frac{y-h}{b} + \frac{1}{2}\frac{a}{b}s_\phi, \pm\sqrt{1-\left(\frac{y-h}{b} + \frac{1}{2}\frac{a}{b}s_\phi\right)^2}\right)$$

$$(2)\, y = h + bs_1 + \frac{1}{2}as_\phi \Rightarrow \begin{cases} s_1 = \dfrac{y-h}{b} - \dfrac{1}{2}\dfrac{a}{b}s_\phi \\ c_2 = \pm\sqrt{1-s_1^2} = \pm\sqrt{1-\left(\dfrac{y-h}{b} - \dfrac{1}{2}\dfrac{a}{b}s_\phi\right)^2} \end{cases}$$

$$\Rightarrow \theta_2 = \operatorname{atan2}\left(\frac{y-h}{b} - \frac{1}{2}\frac{a}{b}s_\phi, \pm\sqrt{1-\left(\frac{y-h}{b} - \frac{1}{2}\frac{a}{b}s_\phi\right)^2}\right)$$

$$(3)\, x = d_1 + bc_1 + \frac{1}{2}ac_\phi \Rightarrow d_1 = x - bc_1 - \frac{1}{2}ac_\phi$$

$$\begin{tikzcd} & \theta_1^+ \arrow[r] & d_1 \\ \theta_2^+ \arrow[ur] \arrow[dr] & & \\ & \theta_1^- \arrow[r] & d_1 \end{tikzcd}$$

$$\begin{tikzcd} & \theta_1^+ \arrow[r] & d_1 \\ \theta_2^- \arrow[ur] \arrow[dr] & & \\ & \theta_1^- \arrow[r] & d_1 \end{tikzcd}$$

ב. [15%] קינמטיקה ישירה:

בהינתן מיקום המפרקים $\left(d_1,\theta_1,\theta_2\right)$ מצאו את המיקום ואוריינטציה של הפלטה $\left(x,y,\phi\right)$.

פתרון:

$$(1)\, y = h + bs_2 - \frac{1}{2}as_\phi$$

$$(2)\, y = h + bs_1 + \frac{1}{2}as_\phi$$

$$(3)\, x = d_1 + bc_1 + \frac{1}{2}ac_\phi$$

$$(1)+(2):$$

$$2y = 2h + b\left(s_1+s_2\right) \Rightarrow \boxed{y = h + \frac{1}{2}b\left(s_1+s_2\right)}$$

$$(1):\, s_\phi = \frac{2h+2bs_2-2y}{a} = \frac{2h+2bs_2-2\left(h+\frac{1}{2}b\left(s_1+s_2\right)\right)}{a} = \frac{bs_2-bs_1}{a} = \frac{b}{a}\left(s_2-s_1\right)$$

$$c_\phi = \pm\sqrt{1-s_\phi^2} = \pm\sqrt{1-\frac{b^2}{a^2}\left(s_2-s_1\right)^2}$$

$$\Rightarrow \phi = \operatorname{atan2}\left(\frac{b}{a}\left(s_2-s_1\right), \pm\sqrt{1-\frac{b^2}{a^2}\left(s_2-s_1\right)^2}\right)$$

$$(3)\, x = d_1 + bc_1 + \frac{1}{2}ac_\phi = d_1 + bc_1 \pm \frac{1}{2}a\sqrt{1-\frac{b^2}{a^2}\left(s_2-s_1\right)^2} = d_1 + bc_1 \pm \frac{1}{2}\sqrt{a^2-b^2\left(s_2-s_1\right)^2}$$

$$y \nearrow \phi^+ \to x$$
$$y \searrow \phi^- \to x$$

ג. [10%] יעקוביאן:

מצאו את מטריצות היעקוביאן של הרובוט J_q, J_x המקיימות את המשוואה: $J_q\dot{q} = J_x\dot{x}$

פתרון:

$$(1)\; y = h + bs_2 - \frac{1}{2}as_\phi \Rightarrow F_1 = h + bs_2 - \frac{1}{2}as_\phi - y$$

$$(2)\; y = h + bs_1 + \frac{1}{2}as_\phi \Rightarrow F_2 = h + bs_1 + \frac{1}{2}as_\phi - y$$

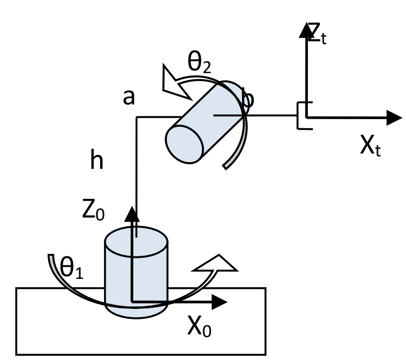
$$(3)\; x = d_1 + bc_1 + \frac{1}{2}ac_\phi \Rightarrow F_3 = d_1 + bc_1 + \frac{1}{2}ac_\phi - x$$

$$J_x = \begin{bmatrix} \frac{\partial F_1}{\partial x} & \frac{\partial F_1}{\partial y} & \frac{\partial F_1}{\partial \phi} \\ \frac{\partial F_2}{\partial x} & \frac{\partial F_2}{\partial y} & \frac{\partial F_2}{\partial \phi} \\ \frac{\partial F_3}{\partial x} & \frac{\partial F_3}{\partial y} & \frac{\partial F_3}{\partial \phi} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & -1 & -\frac{1}{2}ac_\phi \\ 0 & -1 & \frac{1}{2}ac_\phi \\ -1 & 0 & -\frac{1}{2}as_\phi \end{bmatrix}, J_q = -\begin{bmatrix} \frac{\partial F_1}{\partial d_1} & \frac{\partial F_1}{\partial \theta_1} & \frac{\partial F_1}{\partial \theta_2} \\ \frac{\partial F_2}{\partial d_1} & \frac{\partial F_2}{\partial \theta_1} & \frac{\partial F_2}{\partial \theta_2} \\ \frac{\partial F_3}{\partial d_1} & \frac{\partial F_3}{\partial \theta_1} & \frac{\partial F_3}{\partial \theta_2} \end{bmatrix} = -\begin{bmatrix} 0 & 0 & bc_2 \\ 0 & bc_1 & 0 \\ 1 & -bs_1 & 0 \end{bmatrix}$$

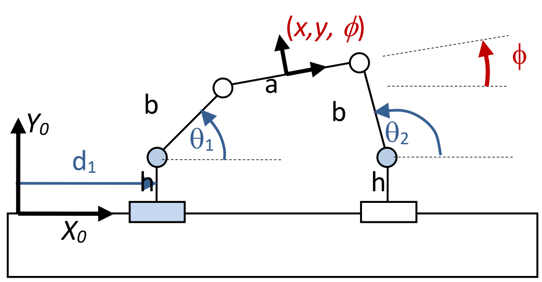
ד. [10%] מצאו את הנקודות הסינגולריות של הרובוט.

$$J_x = \begin{bmatrix} 0 & -1 & -\frac{1}{2}ac_\phi \\ 0 & -1 & \frac{1}{2}ac_\phi \\ -1 & 0 & -\frac{1}{2}as_\phi \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{cases} (1): s_\phi = 0 \Rightarrow \phi = 0 + n\pi \\ (2): c_\phi = 0 \Rightarrow \phi = \frac{\pi}{2} + n\pi \end{cases}$$

$$J_q = -\begin{bmatrix} 0 & 0 & bc_2 \\ 0 & bc_1 & 0 \\ 1 & -bs_1 & 0 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{cases} (1): c_2 = 0 \Rightarrow \theta_2 = \frac{\pi}{2} + n\pi \\ (2): c_1 = 0 \Rightarrow \theta_1 = \frac{\pi}{2} + n\pi \end{cases}$$



ציור 1



ציור 2