מחלקת HeapNode

נשארה כפי שהייתה בשלד, מלבד שדה Boolean isVirtual. שדה זה מאפיין צומת ריק (שכל שאר השדות שלו הם עם ערכים דיפולטיים) ונועד למימוש פנימי (לפונ' meld)

מחלקת HeapItem

נשארה כפי שהייתה בשלד.

מחלקת BinomialHeap

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
| שדה | ערך דיפולטי | תפקיד |
| Size | 0 | כמות הצמתים בערימה |
| Last | null | מצביע לעץ הבינומי בעל הדרגה המקסימלית בערימה |
| min | Null | מצביע לעץ הבינומי בעל השורש עם המפתח הקטן ביותר בערימה |
| numTrees | 0 | מספר העצים הבינומים בערימה |

פונקציות נדרשות –

|  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- |
| שם הפונקציה | תפקיד | ערך החזרה | תיאור הפעולה | סיבוכיות |
| Insert(key, info) | הכנסת צומת חדש בעל מפתח key וערך info לערימה | HeapItem | 1. יצירת HeapNode וHeapItem 2. אם הערימה ריקה – הכנס את הצומת החדש (הגדר אותו להיות min וlast והגדל את size וnumTrees ואפשר לסיים 3. אם אין בערמה עץ מסוג – הכנס את הצומת החדש לערמה (על ידי שינוי מצביעי next ובדיקה האם הוא המינימום החדש) ואפשר לסיים.   עבור המפתח והערך (שאר השדות דיפולטיים)   1. אחרת - יצירת ערימה חדשה שmin וlast שלה הם הheapNode החדש 2. Meld של הערימה החדשה לתוך הערמה הthis | אם הערימה ריקה או אין בה עץ מסוג – הסיבכויות היא כי סעיפים 1,2,3 דורשים זמן קבוע.  אחרת, הסיבוכיות היא -  סעיפים 1, 4 דורשים כי הבנאים של המחלקות דיפולטיים.  סעיף 5 בסיבוכיות  כפי שנוכיח בתיעוד הפונ' meld. |
| deleteMin | מחיקת הצומת בעל הערך המינימלי בערימה | אין | הצומת המינמילי הוא שורש של עץ בינומי (מכלל הערימה) ושמור במצביע min. כעת:   1. יצירת heap1 שתכיל את כל העצים הבינומים בערימה מלבד העץ ששורשו הוא המינימום (מתבצע בעזרת לולאה על כל העצים, שרשור העצים המתאימים ועדכון של min/last). 2. יצירת heap2 שתכיל את כל הילדים הישירים של השורש המינימלי (מתבצע בעזרת לולאה מmin.child על כל הילדים בעזרת next, שרשור הילדים לרשימה ועדכון min/last) 3. Heap1.meld(heap2) 4. עדכון הערימה (this) להיות heap1 | סעיף 1 דורש  *עבודה כי מספר העצים בערימה חסום ע"י log(n) כפי שראינו בהרצאה*.  סעיף 2 גם דורש  *עבודה כי המקרה הכי גרוע הוא שהעץ בעל השורש המינימלי הוא העץ בעל הדרגה הגבוה ביותר, במקרה זה כמות הבנים שלו חסומה על ידי הדרגה שלו שהיא* log(n) *כפי שראינו בהרצאה.*  סעיף 3 בסיבוכיות  כפי שנוכיח בתיעוד הפונ' meld.  סעיף 4 דורש O(1) עבודה כפי שמנומק בתיעוד פונ' עזר. |
| findMin() | החזרת מצביע לצומת המינימלי בערימה | HeapItem | החזרת המצביע ששמור בשדה min |  |
| decreaseKey  (HeapItem item, int diff) | הקטנת המפתח של item בdiff ושמירה על תקינות הערימה | void | 1. הקטנת המפתח של item בdiff 2. אם לitem אין parent – העץ של item עדיין תקין (לפי כלל הערימה הוא עדיין קטן מילדיו). בדיקה האם הוא צריך להיות המינמום החדש והחלפה במידת הצורך 3. אחרת, כל עוד לitem יש parent וגם המפתח של parent גדול יותר מהמפתח של item:    1. החלף את item וparent (כלומר החלף להם את הnodeItems ועדכן אותם להצביע על הHeapNode שמתאים להם)    2. קדם את item להיות הparent (כך שיחזור להצביע על הצומת עם המפתח והערך המקוריים שלו שעלה בעץ) 4. בדיקה האם item הוא המינימום החדש והחלפה במידת הצורך. | סעיפים 1 ו2 דורשים זמן קבוע.  סעיף 3 - במקרה הכי גרוע שבו כל הצמתים באותו העץ וitem הוא עלה שדורש תיקון עד לשורש, כמות העבודה תיהיה חסומה על ידי גובה העץ.  גובה העץ חסום על ידי דרגתו שחסומה *ע"י* log(n) *כפי שראינו בהרצאה.* |
| Delete  (HeapItem item) | מחיקת הצומת item ושמירה על ערימה תקינה | אין | 1. הקטן את המפתח של item במפתח הנוכחי שלו (כך שיקבל את הערך 0) בעזרת הפונ' decreaseKey 2. קרא לdeleteMin() שימחק את item כי הוא קיבל בסעיף 1 את המפתח 0 שהוא בהכרח הכי נמוך בערימה (כי הוגדר שהערמה לא תומכת בהכנסה של מפתח 0). | סעיפים 1 ו2 שניהם דורשים  *עבודה כפי שהוכחנו עבור שתי הפונקציות.* |
| meld(BinomialHeap heap2) | איחוד heap2 לתוך הערימה this | אין | 1. בדיקת תוכן –    1. אם שתי הערימות ריקות – אפשר לסיים    2. אם heap2 ריקה – אפשר לסיים    3. אם this ריקה – החלף את this להיות heap2 ואפשר לסיים 2. אתחל שני מערכים באורך (הדרגה המקסימלית של שתי הערמות + 2) 3. עבור מערך 1 – הכנס לכל תא i מצביע לשורש העץ בדרגה i אם קיים כזה בערימה this – אחרת הכנס צומת "וירטואלי" 4. אותו דבר כמו סעיף 3 עבור heap2 5. אתחל מערך "תוצאה" באותו האורך 6. אתחל מערך סכימה באורך 3 7. אתחל carry להיות צומת וירטואלי. 8. אתחל toInsert להיות צומת וירטואלי. 9. עבור בלולאה מ0 עד (הדרגה המקסימלית של שתי הערמות + 2)    1. אם יש צומת אמיתי במערך 1 במקום i – הכנס אותו למערך סכימה (בעזרת פונ' עזר ins2arr3)    2. אותו דבר עבור מערך 2    3. הכנס שארית    4. אם במערך הסכימה יש 3 צמתים אמיתיים - הכנס לtoInsert את הצומת האחרון במערך הסכימה    5. אם במערך הסכימה יש 2 צמתים אמיתים (יכול לקרות גם בנוסף לסעיף d) –   הכנס לcarry את האיחוד של שניהם (בעזרת פונ' העזר link)   * 1. toInsert הוא הצומת הראשון במערך   2. הכנס את toInsert למערך התוצאות בתא הi  1. עבור על מערך התוצאות וחבר את השדה next בין צמתים בדרגה עולה (שאינם וירטואלים), מצא את המינימום, חשב את size, numTrees וסמן את last בתור העץ האחרון במערך התוצאות. 2. עדכן את this לקבל את min, last, size, numTrees של הערימה החדשה | סעיף 1 דורש עבדוה קבוע  סעיפים 2,3,4,5 חסומים ע"י הדרגה המקסימלית + 2, שזה חסום ע"י log(n)  סעיפים 6,7,8 מבצעים כמות עבודה קבועה  בסעיף 9 מספר האיטרציות של הלולאה חסום ע"י log(n) ובכל ריצה מתבצעת כמות עבודה קבועה (כולל link שמנומק בטבלת פונ' עזר)  בסעיף 10 מספר האיטרציות של הלולאה גם חסום ע"י log(n) ובכל איטרציה יש כמות עבודה קבועה (תיקון מצביעים והעלאת counterים).  סעיף 11 מעדכן 4 מצביעים ולכן גם בסיבוכיות קבועה |
| size | מחזירה את מספר הצמתים בערימה | int | החזרת השדה this.size |  |
| empty | מחזירה האם הערימה ריקה | boolean | החזרת הערך הבוליאני של הביטוי size==0 |  |
| numTrees | מחזירה את מספר העצים הבינומים בערימה | int | החזרת השדה numTrees |  |

פונקציות עזר -

|  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- |
| שם הפונקציה | תפקיד | ערך החזרה | תיאור הלוגיקה | סיבוכיות |
| switchHeaps(BinomialHeap heap2) | מעדכנת את הערימה this להיות heap2 | אין | החלפת ארבעת השדות של המחלקה |  |
| ins2arr3(HeapNode[] arr, HeapNode n) | מקבלת מערך (בסיסי של ג'אווה) באורך 3 וheapNode ומכניסה אותו לתא הראשון הפנוי (הראשון שנמצא ללא צומת) | אין | ריצה בלולאה על המערך ובדיקה האם התא הנוכחי פנוי להכנסה) | באופן כללי הפונקציה לינארית באורך המערך, אבל זו פונקצית עזר פרטית שנקראת בפרוייקט שלנו רק עבור מערך באורך 3 |
| static HeapNode Link (HeapNode tree1, HeapNode tree2) | מאחדת שני heapNode מאותה דרגה לעץ בינומי | heapNode מצביע לשורש העץ המאוחר | 1. בדיקה למי יש שורש בעל ערך נמוך יותר 2. חיבור העץ בעל השורש הגבוה יותר כילד חדש של השורש הקטן יותר 3. תיקון יתר המצבעים והשדות הרלוונטים | כפי שראינו בהרצאה, בסעיף 1 יש בדיקה אחת של שדה אחד ובסעיפים 2 ו3 יש כמות עבודה קבועה |

חלק תיאורטי

1.

ניסוי ראשון –

|  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- |
| מספר סידורי i | זמן ריצה (מילישניות) | מספר החיבורים הכולל | מספר העצים בסיום | סכום דרגות הצמתים שנמחקו |
| 1 | 7 | 723 | 5 |  |
| 2 | 6 | 2182 | 4 |  |
| 3 | 15 | 6555 | 5 |  |
| 4 | 44 | 19675 | 7 |  |
| 5 | 87 | 59040 | 8 |  |

ניסוי שני –

|  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- |
| מספר סידורי i | זמן ריצה (מילישניות) | מספר החיבורים הכולל | מספר העצים בסיום | סכום דרגות הצמתים שנמחקו |
| 1 | 2 | 3253 | 5 | 2894 |
| 2 | 6 | 11517 | 4 | 10428 |
| 3 | 22 | 39868 | 5 | 36539 |
| 4 | 46 | 135109 | 7 | 125275 |
| 5 | 105 | 451149 | 8 | 421633 |

ניסוי שלישי –

|  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- |
| מספר סידורי | זמן ריצה (מילישניות) | מספר החיבורים הכולל | מספר העצים בסיום | סכום דרגות הצמתים שנמחקו |
| 1 | 2 | 723 | 5 | 697 |
| 2 | 5 | 2182 | 5 | 2156 |
| 3 | 22 | 6555 | 5 | 6529 |
| 4 | 42 | 19675 | 5 | 19649 |
| 5 | 94 | 59040 | 5 | 59014 |

2.

ניסוי ראשון -

סיבוכיות הכי גרוע – ראינו בהרצאה שהכנסה היא לכן במקרה הכי גרוע סדרה של n הכנסות תיקח

חסם אמורטייזד – נוכיח שהחסם אמורטייזד לסדרה של n הכנסות בסדר עולה הוא .

נדרוש מכל איבר אי זוגי להביא 2 מטבעות (1 להכנסה של עצמו כשורש של עץ בינומי חדש ועוד 1 לבנק) ומכל איבר זוגי להביא רק מטבע 1 (לעצמו). אם הכנסת האיבר הזוגי גוררת לינק, הוא ימומן על ידי הבנק (כלומר על ידי כל האיברים האי זוגיים שצריכים להתחבר). נשים לב שהבנק אף פעם לא שלילי כי כל איבר אי זוגי צריך להתחבר עם מישהו שקטן ממנו רק פעם אחת)

סהכ הראנו בצורה זו שכל איבר יכול להיכנס בסיבוכית ולכן הסדרה חסומה בזמן לינארי כנדרש.

מספר העצים - נשים לב שידענו לצפות את כמות העצים בסוף הניסוי כי זאת כמות ה"אחדים" בייצוג הבינארי של המספר.

חיבורים ודרגות - נסמן את כמות החיבורים שנדרשת ליצירת עץ בדרגה i בLi ונשים לב שמתקיים (כלומר חיבור אחד כדי לחבר שני עצים מדרגה i-1 + כמות החיבורים שהיה צריך כדי לייצר שני עצים מדרגה i-1) את הנוסחה הזאת אנחנו מכירים מקורס בדידה (מגדלי האנוי) ומשם נסיק שכמות החיבורים הדרושה ליצירת עץ בדרגה i היא ולכן מספר החיבורים הכולל הוא לכל r שהוא דרגה של עץ בערימה וזה אכן תואם את התוצאות.

ניסוי שני –

סיבוכיות – במקרה הכי גרוע סדרה של n הכנסות תיקח עבודה. חסם האמורטייזד להכנסה בלבד יהיה מאותו נימוק כמו בניסוי הקודם.

סדרת המחיקות תיקח עבודה ולכן סך כל התהליך במקרה הכי גרוע יקח עבודה. נשים לב שלא נצליח לתת חסם אמורטייזד טוב יותר, כי בכל מחיקה בהכרח נבצע לולאה מלאה על כל שורשי העצים למצוא את המינימום החדש.

מספר העצים – נשים לב שהוא נשאר אותו דבר כמו בסעיף הקודם, בסך הכל נמחק חצי מהצמתים בערימה ולכן מספר העצים יהיה מספר ה"אחדים" בייצוג הבינארי החדש, אבל חלוקה ב2 שקולה לשיפט ימינה ולכן נשארה אותה כמות "אחדים" (בכל שלב עסקנו בכמות זוגית של איברים לכן לא היה 1 בביט הכי ימני שנעלם).

חיבורים ודרגות –

נשים לב שכמות הלינקים שנבצע בכל מחיקת מינימום היא לכל היותר הדרגה של העץ שבו נמצא המינימום (כי זה מספר העצים עצים שהוא יחשוף).

על מנת להבין את העבודה המתבצעת בכל מחיקה, עלינו להבין מה ההסתברות שהמינימום יהיה בעץ בדרגה כלשהיא. נשים לב, כי ככל שעץ גדול יותר, כך הסיכוי שהמינימום יהיה בו גדל. זאת מכיוון, שהסיכוי שהמינימום יהיה בעץ פרופורציונאלי למספר האיברים בעץ. ניתן לקרב ולהגיד שהדרגה הממוצעת של העץ בו נמצא המינימום היא log(n).

ולכן, סה"כ נצפה שכמות החיבורים החדשים שיווצרו בעקבות תהליך המחיקה יהיה (מספר הצמתים שנמחקו) \* (כמה חיבורים חדשים גוררת כל מחיקה) שזה בקירוב: log(n)\*(n/2)

ניסוי שלישי –

סיבוכיות – במקרה הכי גרוע סדרה של n הכנסות תיקח עבודה. חסם האמורטייזד להכנסה בלבד יהיה מאותו נימוק כמו בניסוי הקודם.

סדרת המחיקות תיקח עבודה ולכן סך כל התהליך במקרה הכי גרוע יקח עבודה. נשים לב שלא נצליח לתת חסם אמורטייזד טוב יותר, כי בכל מחיקה בהכרח נבצע לולאה מלאה על כל שורשי העצים למצוא את המינימום החדש. זאת מכיוון שהמימוש שלנו לא מודע לכך שההכנסה והמחיקה הם בעצם בסדר מאוד "נוח" ולכן זה החסם גם למקרה הממוצע.

מספר העצים – נשים לב שבכל מקרה השארנו בסוף 31 צמתים בדיוק, והם מתחלקים ל5 עצים (בדרגות 0,1,2,3,4) ולכן זה מספר העצים בסוף התהליך תמיד

חיבורים ודרגות – נשים לב שהמינימום הוא תמיד השורש בעל הדרגה הנמוכה ביותר, ולכן הוא חושף ילדים בדרגות נמוכות יותר משאר הערימה, ולכן הmeld שנקרא בעקבות המחיקה לא נדרש בשום שלב לאחד עצים באותה הדרגה, ולכן המחיקה לא גוררת חיבורים חדשים בכלל.

כעת, נטען שסכום הדרגות בעץ בינומי מדרגה i היא באינדוקציה על i:

בסיס -

צעד – נניח נכונות עבור i-1 ונוכיח עבור i, אכן מתקיים:

+1

כאשר המעבר הראשון הוא כי סכום הדרגות של עץ בדרגה i הוא i + סכום דרגות כל הילדים שלו.

את הנוסחה הזאת אנחנו שוב מזהים ממגדלי האנוי מבדידה והאיבר הכללי הוא

כעת נשים לב שסכום הדרגות שמחקנו הוא בעצם: (סכום הדרגות של כל העצים שהיו בערימה במקור) - (סכום הדרגות של העצים שנשארו). זה תואם בדיוק את התוצאות. למשל עבור n=728, לפני המחיקות היו בערימה העצים מסוג שסכום הדרגות שלהם הוא 723. נחסיר מזה את דרגות העצים שנשארו בסוף התהליך, כלומר סכום דרגות העצים שהוא 26 ואכן נקבל בדיוק 697 כמו שראינו בתוצאות.