חשבון אינפיניטסימלי 1 - תרגיל 4

גיא תגר - קבוצה 2

1 שאלה 1.

1. נגיד ש-5 אינו הגבול של f כאשר $x\to-\infty$ אם קיים $\varepsilon>0$ כך שלכל $M<0$ קיים $x<M$ כך ש

$$\left|f\left(x\right)-5\right|\geq\varepsilon$$

2. נגיד שהגבול $\lim\limits_{x\to-\infty}f\left(x\right)$ לא קיים אם לכל $L\in\mathbb{R}$ קיים $\varepsilon>0$ כך שלכל $M<0$ קיים $x<M$ כך ש

$$\left|f\left(x\right)-L\right|\geq\varepsilon$$

2 שאלה 2.

הגדרה: אי שוויון המשולש הראשון והשני.
לכל $x,y\in\mathbb{R}$:

$$|x+y|\leq|x|+|y|$$

$$||x|-|y||\leq|x-y|$$

הוכחה: בכיתה.

1. לפי אי שוויון המשולש השני וחוקי ערך המוחלט:

$$\underbrace{||x+2|-|5-2x||}\underbrace{\overset{\Delta}{\leq}}|x+2-(5-2x)|=|3x-3|\underset{|-x|=|x|}{=}\underbrace{|3x+3|}$$

2. יהיו $x,y\in\mathbb{R}$. ניזכר ש:

$$min\left\{x,y\right\}=\begin{cases}x & x\leq y\\ y & x>y\end{cases}$$

נפצל למקרים. כאשר $x \leq y$, לפי ההגדרה באגף שמאל מתקיים $min\left\{x,y\right\}=x$
באגף ימין:

$$\frac{1}{2}\left(x+y-\underbrace{|x-y|}_{\leq 0}\right)=\frac{1}{2}\left(x+y-\left[-\left(x-y\right)\right]\right)=\frac{1}{2}\left(x+y+x-y\right)=\frac{2x}{2}=x$$

כאשר $x>y$, לפי ההגדרה באגף שמאל מתקיים $min\left\{x,y\right\}=y$
באגף ימין:

$$\frac{1}{2}\left(x+y-\underbrace{|x-y|}_{>0}\right)=\frac{1}{2}\left(x+y-\left(x-y\right)\right)=\frac{1}{2}\left(x+y-x+y\right)=\frac{2y}{2}=y$$

הראינו שבשני המקרים 2 האגפים שווים.

3. יהי $x\in\mathbb{R}$ המקיים::

$$|x-7|<\frac{1}{2}\Rightarrow$$

$$-\frac{1}{2}<x-7<\frac{1}{2}\underset{+10}{\Rightarrow}$$

$$-\frac{21}{2}<\frac{19}{2}<x+3<\frac{21}{2}\Rightarrow$$

$$|x+3|<\frac{21}{2} \tag{1}$$

כמו כן:

$$\underbrace{0<}\frac{1}{2}<\underbrace{x-6}<\frac{3}{2}\Rightarrow$$

$$\frac{1}{x-6}<2$$

הביטוי חיובי. ולכן ולפי הנתון:

$$\underbrace{\left|\frac{x-7}{x-6}\right|}\underbrace{<}\frac{1}{2\left(x-6\right)}<\frac{1}{2}\cdot 2=\underbrace{1} \tag{2}$$

$$\left|\frac{x^{2}-4x-21}{x-6}\right|=\left|\frac{\left(x-7\right)\left(x+3\right)}{x-6}\right|=\left|\frac{x-7}{x-6}\right||x+3|\underset{(2)}{<}|x+3|\underset{(1)}{<}\frac{21}{2}$$

4. $(\Rightarrow)$ ידוע ש

$$L-r\leq y\leq L+r$$

נחסר L מהאגפים ונקבל:

$$-r\leq y-L\leq r$$

לפי תכונת הערך המוחלט שהוכחנו בכיתה זה שקול ל:

$$|y-L|\leq r$$

$(\Leftarrow)$ ידוע ש:

$$|y-L|\leq r$$

נפצל למקרים. עבור $L\geq y$, נקבל $y-L>0$ ולכן:

$$|y-L|=y-L\leq r\underset{+L}{\Rightarrow}$$

$$L-r\underset{r\geq0}{\leq}L\underset{y\geq L}{\leq}y\leq L+r$$

עבור $y<L$, נקבל $y-L<0$ ולכן:

$$|y-L|=L-y\leq r\Rightarrow$$

$$y\geq L-r\Rightarrow$$

$$L-r\leq y\underset{y<L}{\leq}L\underset{r\geq0}{\leq}L+r$$

בשני המקרים, קיבלנו ש

$$L-r\leq y\leq L+r$$

כנדרש.

5. נשים לב ש:

$$|x|\leq max\left\{|a|\,|b|\right\}\Rightarrow -max\left\{|a|\,|b|\right\}\leq x\leq max\left\{|a|\,|b|\right\}$$

נפצל למקרים שונים.
עבור $0\leq a\leq x\leq b$, מתקיים $|a|=a,|b|=b$. לכן במקרה זה מתקיים

$$max\left\{|a|\,|b|\right\}=max\left\{a,b\right\}=b=|b|\Rightarrow$$

$$-|b|\leq x\leq |b|$$

ועבור המשוואה השנייה

$$b \geq a \geq 0 \Rightarrow -b \leq -a \leq 0 \Rightarrow$$

$$\underbrace{-|b|}=-b \leq -a \leq 0 \leq a \leq \underbrace{x} \leq b=\underbrace{|b|}$$

עבור $a \leq x \leq b \leq 0$ מתקיים $|a|=-a,|b|=-b$. נשים לב ש:

$$a \leq b \leq 0 \Rightarrow -a \geq -b \geq 0$$

לכן במקרה זה מתקיים:

$$max\{|a|\,|b|\}=max\{-a,-b\}=-a=|a| \Rightarrow$$

$$-|a| \leq x \leq |a|$$

ועבור המשוואה השנייה:

$$\underbrace{-|a|}=a \leq \underbrace{x} \leq b \leq 0 \leq -b \leq -a=\underbrace{|a|}$$

עבור $a \leq x \leq 0 \leq b$ או $a \leq 0 \leq x \leq b$ מתקיים בפרט:

$$a \leq 0 \leq b \Rightarrow -a \geq 0,\ b \geq 0 \Rightarrow$$

$$|a|=-a,\ |b|=b$$

נפצל ל־2 מקרים:

(א) אם $-a \geq b$:

$$-a \geq b \Rightarrow |a| \geq |b| \Rightarrow max\{|a|,|b|\}=|a|=-a$$

לכן:

$$|x| \leq max\{|a|\,|b|\} \Rightarrow$$

$$-|a| \leq x \leq |a|$$

ועבור המשוואה השנייה:

$$\underbrace{-|a|}=a \leq \underbrace{x} \leq b \leq -a=\underbrace{|a|}$$

(ב) אם $-a \le b$:

$$-a \le b \Rightarrow |a| \le |b| \Rightarrow max\left\{|a|,|b|\right\} = |b| = b$$

לכן:

$$|x| \le max\left\{|a|\,|b|\right\} \Rightarrow$$

$$-|b| \le x \le |b|$$

ועבור המשוואה השנייה:

$$\underbrace{-|b|} = -b \underset{b\ge -a}{\le} a \le \underbrace{x} \le b = \underbrace{|b|}$$

הראינו שעבור כל המקרים, הביטויים שווים.

3 שאלה 3.

תהי $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ פונקציה ונניח ש $\lim\limits_{x\to\infty} f(x) = 4$. נראה שקיים $M>0$ כך שלכל $x>M$ מתקיים:

$$15.5 < \left[f(x)\right]^2 < 16.5$$

הגבול קיים ולכן לכל $\varepsilon>0$ קיים $M>0$ כך שלכל $x>M$ מתקיים:

$$|f(x)-4| < \varepsilon$$

ניקח $\varepsilon = 0.05$, קיים $M>0$ כך שלכל $x>M$ מתקיים (ולפי ד.3):

$$|f(x)-4| < 0.05 \iff 4-0.05 < f(x) < 4+0.05$$

האגפים חיוביים ולכן נוכל לעלות בריבוע ולקבל

$$\underbrace{15.5} < 15.6025 \underbrace{< \left[f(x)\right]^2 <} 16.4025 < \underbrace{16.5}$$

כנדרש.

4 שאלה 4.

1. יהי $\varepsilon>0$. ניקח $\boxed{M = \frac{9}{\varepsilon}+2}$ כך שלכל $x>M$ מתקיים:

$$\underbrace{\left|\frac{2x+5}{-x+2}+2\right|} = \left|\frac{2x+5-2x+4}{2-x}\right| = \left|\frac{9}{2-x}\right| = \left|\frac{9}{x-2}\right| \underset{x>2}{=} \frac{9}{x-2} \underbrace{<}_{x>M} \frac{9}{M-2} = \underbrace{\varepsilon}$$

עבור $\varepsilon = \frac{1}{100}$, נבחר

$$M = \frac{9}{\frac{1}{100}}+2 = 902$$

2. יהי $\varepsilon > 0$. ניקח $\boxed{M = -\frac{9}{\varepsilon}}$ כך שלכל $x < M$ מתקיים:

$$\underbrace{\left|\frac{2x+5}{-x+2}+2\right|}\underset{as\,above}{=}\left|\frac{9}{x-2}\right|\underset{x<2}{=}\frac{9}{2-x}\le -\frac{9}{x}\underbrace{<}_{x<M}-\frac{9}{M}=\underbrace{\varepsilon}$$

עבור $\varepsilon = \frac{1}{100}$, נבחר

$$M = -\frac{9}{\frac{1}{100}} = -900$$

3. ראשית נבדוק שהביטוי מוגדר. נשים לב ש

$$x^2 - 4x + 3 = (x-3)(x-1)$$

ניתן לראות שעבור $x \le 1$, הביטוי אי שלילי ולכן בפרט עבור $x < 0$, השורש מוגדר.

יהי $\varepsilon > 0$. ניקח $\boxed{M = -\frac{1}{\varepsilon}}$ כך שלכל $x < M$ מתקיים:

$$\underbrace{\left|\sqrt{x^2-4x+3}+x-2\right|}=\left|\sqrt{x^2-4x+3}+(x-2)\cdot\frac{\sqrt{x^2-4x+3}-(x-2)}{\sqrt{x^2-4x+3}-(x-2)}\right|=$$

$$\left|\frac{x^2-4x+3-(x-2)^2}{\sqrt{x^2-4x+3}-x+2}\right|=\left|\frac{\cancel{x^2}-\cancel{4x}+3-\cancel{x^2}+\cancel{4x}-4}{\sqrt{x^2-4x+3}-x+2}\right|=\frac{1}{\left|\sqrt{x^2-4x+3}+(-x)+2\right|}\underset{-x>0}{=}$$

$$\frac{1}{\sqrt{x^2-4x+3}-x+2}\le -\frac{1}{x}\underbrace{<}_{x<M}-\frac{1}{M}=\underbrace{\varepsilon}$$

4. ישירות מהגדרת הערך השלם, מתקיים ש $\lfloor x\rfloor \le x$.

יהי $\varepsilon > 0$. ניקח $\boxed{M = -\frac{5}{\varepsilon}}$ כך שלכל $x < M$ (ולפי הרמז) מתקיים:

$$\underbrace{\left|\frac{5}{\lfloor x\rfloor}-0\right|}\underset{\lfloor x\rfloor<0}{=}-\frac{5}{\lfloor x\rfloor}\underset{\lfloor x\rfloor\le x}{\le}-\frac{5}{x}\underbrace{<}_{x<m}-\frac{5}{m}=\underbrace{\varepsilon}$$

5 שאלה 5.

תהי f פונקציה המוגדרת בקרן $[a,\infty)$ כאשר $a\in\mathbb{R}$ ויהי $L\in\mathbb{R}$.

1. **טענה:** $\lim\limits_{x\to\infty}f(x)=L$ אם ורק אם קיים $M>0$ כך שלכל $\varepsilon>0$ ולכל $x>M$ מתקיים $|f(x)-L|<\varepsilon$.
<u>הטענה לא נכונה.</u>

דוגמה נגדית - הראינו בכיתה ש $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{1}{x}=0$.
ניקח את $f(x)=\frac{1}{x}$ בתחום $[1,\infty)$. הגבול קיים ושווה ל0. נניח בשלילה שקיים $M>0$ כך שלכל $\varepsilon>0$ ולכל $x>M$ מתקיים $\left|\frac{1}{x}\right|<\varepsilon$.

יהי $x_1>M$. ברור ש $\frac{1}{x_1}>0$ לכן לפי הטענה ניקח $\varepsilon=\frac{1}{x_1}$. אבל:

$$|f(x_1)-0|=\left|\frac{1}{x_1}\right|\underset{x_1>0}{=}\frac{1}{x_1}<\frac{1}{x_1}=\varepsilon$$

וזו סתירה.
☺

2. **טענה:** $\lim\limits_{x\to\infty}f(x)=L$ קיים אם ורק אם לכל $0<\varepsilon\le 0.04$ קיים $M\ge 70$ כך שלכל $x>M$ מתקיים $|f(x)-L|<\varepsilon$
<u>הטענה נכונה.</u>

$(\Leftarrow)$ נניח שהגבול קיים. לכן לפי הגדרת הגבול, לכל $\varepsilon>0$ קיים $M>0$ כך שלכל $x>M$ מתקיים $|f(x)-L|<\varepsilon$.
נניח בשלילה שקיים $\underbrace{0<\varepsilon}\le 0.04$ כך שלכל $\underbrace{M}\ge 70\underbrace{>0}$ קיים $x>M$ כך ש
$|f(x)-L|\ge\varepsilon$
סתירה לכך שהגבול קיים.

$(\Rightarrow)$ נניח שלכל $0<\varepsilon\le 0.04$ קיים $M\ge 70>0$ כך שלכל $x>M$ מתקיים $|f(x)-L|<\varepsilon$ ונראה שהגבול קיים.
כלומר נראה שגם לכל $\varepsilon>0.04$ קיים $M>0$ כך שלכל $x>M$ מתקיים $|f(x)-L|<\varepsilon$ ונסיים.

לפי הנתון, לכל $0<\varepsilon\le 0.04$ קיים $M\ge 70>0$ כך שלכל $x>M$ מתקיים

$$|f(x)-L|<0.04$$

יהי $\varepsilon>0.04$. לפי הנתון קיים $M\ge 70>0$ כך שלכל $x>M$ מתקיים:

$$\underbrace{|f(x)-L|}<0.04\underbrace{<\varepsilon}$$

☺