חשבון אינפיניטסימלי 1 - תרגיל 8

גיא תגר 206260762 - קבוצה 2

1 שאלה 1.

1. נשים לב ש $\lim_{x\to0^+}\lfloor\tan x\rfloor=\lim_{x\to0^+}0=0$
ו- $\lim_{x\to0^-}\lfloor\tan x\rfloor=\lim_{x\to0^-}-1=-1$ נפריד לגבולות חד צדדיים:

$$\lim_{x\to0^+}\lfloor\tan x\rfloor\cdot\cos x=\lim_{x\to0^+}0\cdot\cos x\underset{AOL}{=}\lim_{x\to0^+}0\cdot1=0$$

$$\lim_{x\to0^-}\lfloor\tan x\rfloor\cdot\cos x=\lim_{x\to0^-}-1\cdot\cos x\underset{AOL}{=}-1$$

הגבולות החד צדדיים שונים, ולכן הגבול לא קיים.

2. הראינו בכיתה ש $\lim_{x\to0}\frac{\cos(x)-1}{x^2}=-\frac{1}{2}$

$$\lim_{x\to2}\frac{4-x^2\cdot\cos(x-2)}{x-2}\underset{y=x-2}{=}\lim_{y\to0}\frac{4-(y+2)^2\cdot\cos y}{y}=\lim_{y\to0}\frac{4y-y(y+2)^2\cdot\cos y}{y^2}=$$

$$\frac{4y-y\left(y^2+4y+4\right)\cdot\cos y}{y^2}=\frac{4y-y\left(y^2+4y\right)\cdot\cos y-4y\cos y}{y^2}=$$

$$\frac{-4y(\cos y-1)-y^2(y+4)\cdot\cos y}{y^2}=-4y\cdot\frac{(\cos y-1)}{y^2}-\cos y\,(y+4)\underset{AOL}{=}0\cdot\left(-\frac{1}{2}\right)-1\cdot4=\underbrace{-4}$$

3. :

$$\lim_{x\to0^+}\frac{\sin(6x)}{\sqrt{\sin(2x)}}=\lim_{x\to0^+}\frac{\frac{\sin(6x)}{x}}{\frac{\sqrt{\sin(2x)}}{x}}=\lim_{x\to0^+}\frac{\frac{6\sin(6x)}{6x}}{\sqrt{\frac{2\sin(2x)}{2x}\cdot\frac{1}{x}}}\underset{AOL}{=}\frac{6}{\sqrt{2\cdot\infty}}=0$$

4. :

$$\lim_{x\to0}\frac{\cos(3x)-\cos(2x)}{x^2}=\lim_{x\to0}\frac{\cos(2x)\cos(x)-\sin(2x)\sin(x)-\cos(2x)}{x^2}=$$

$$\lim_{x\to0}\frac{\cos(2x)\left[\cos(x)-\frac{\sin(2x)\sin(x)}{\cos(2x)}-1\right]}{x^2}=\lim_{x\to0}\left[\cos(2x)\left(\frac{\cos(x)}{x^2}-\frac{\sin(2x)\sin(x)}{x^2\cos(2x)}-\frac{1}{x^2}\right)\right]=$$

$$= \lim_{x\to 0}\left[\cos(2x)\left(\frac{\cos(x)-1}{x^2}-\frac{\sin(2x)\sin(x)}{x^2\cos(2x)}\right)\right] =$$

$$\lim_{x\to 0}\left[\left(1-2\sin^2(x)\right)\left(\frac{\cos(x)-1}{x^2}-\frac{2\sin(2x)}{2x}\cdot\frac{\sin x}{x}\cdot\frac{1}{1-2\sin^2(x)}\right)\right]$$

$$\underset{AOL}{=} 1\left(-\frac{1}{2}-2\cdot 1\cdot 1\right) = -2.5$$

5. ראשית נראה ש:

$$\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos(1-\cos(x))}{(\cos(x)-1)^2} = \lim_{x\to 0}(-1)\cdot\frac{\cos(\cos(x)-1)-1}{(\cos(x)-1)^2} \underset{y=\cos(x)-1}{=}$$

$$\lim_{y\to 0}(-1)\cdot\frac{\cos(y)-1}{y^2} \underset{AOL}{=} \frac{1}{2}$$

כעת נפתור:

$$\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos(1-\cos x)}{x^4} = \lim_{x\to 0}\frac{1-\cos(1-\cos x)}{(\cos(x)-1)^2}\cdot\left(\frac{(\cos(x)-1)}{x^2}\right)^2 \underset{AOL}{=} \frac{1}{2}\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^2 = \frac{1}{8}$$

2 שאלה 2.

1. הראינו בתרגול ש $\lim_{x\to 0}(1+x)^{\frac{1}{x}} = e$

$$\lim_{x\to 5}(6-x)^{\frac{1}{x-5}} \underset{y=5-x}{=} \lim_{y\to 0}(6-(5-y))^{\frac{1}{-y}} = \lim_{y\to 0}\left((1+y)^{\frac{1}{y}}\right)^{-1} =$$

$$\lim_{y\to 0}\frac{1}{(1+y)^{\frac{1}{y}}} \underset{AOL}{=} \frac{1}{e}$$

2. :

$$\lim_{x\to 0^+}(1+3x)^{\frac{-2}{3x^3}} \underset{y=3x}{=} \lim_{y\to 0+}\left((1+y)^{\frac{1}{y}}\right)^{-\frac{2}{y^2}}$$

מהיות $\lim_{y\to 0+}(1+y)^{\frac{1}{y}} = e$, קיים $\delta > 0$ כך שלכל $0 < y < \delta$ מתקיים:

$$\left|(1+y)^{\frac{1}{y}} - e\right| < e-2 \iff 2 < (1+y)^{\frac{1}{y}} < 2e-2$$

ובפרט $2 < (1+y)^{\frac{1}{y}}$. נעלה את 2 האגפים בחזקת $-\frac{2}{y^2}$. זו היא חזקה שלילית בהכרח ולכן אי השוויון יתהפך ונקבל:

$$0 \underset{y+1>0}{\leq} \left((1+y)^{\frac{1}{y}}\right)^{-\frac{2}{y^2}} \leq 2^{-\frac{2}{y^2}}$$

הגבול הימני:

$$\lim_{y\to 0+} 2^{-\frac{2}{y^2}} = \lim_{y\to 0+} \frac{1}{2^{\frac{2}{y^2}}} \underset{AOL}{=} \frac{1}{2^{\infty}} = 0$$

הגבול השמאלי:

$$\lim_{y\to 0+} 0 = 0$$

לכן לפי סנדוויץ':

$$\lim_{x\to 0^+} (1+3x)^{\frac{-2}{3x^3}} = 0$$

3 שאלה 3.

1. **טענה**: קיימת פונקציה $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ כך ש

$$f(\cos x) = \sin x + sign(x)$$

<u>הטענה לא נכונה.</u>
נניח בשלילה שקיימת פונקציה כזו. אזי עבור $x=0$ מתקיים:

$$f(\cos 0) = \sin 0 + sign(0) \Rightarrow$$

$$\underbrace{f(1)=0}$$

אבל עבור $x=2\pi$ מתקיים:

$$f(\cos 2\pi) = \sin 2\pi + sign(2\pi) \Rightarrow$$

$$\underbrace{f(1)=1}$$

קיבלנו 2 ערכי y עבור ערך אחד של x בסתירה לכך ש־ f היא פונקציה.

2. טענה: תהי $f(x) = \ln\left(\sqrt{1+x^2}-x\right)$ לכל $x\in\mathbb{R}$. אזי f מוגדרת היטב ו־אי זוגית.
<u>הטענה נכונה.</u>

ראשית נראה שהפונקציה מוגדרת היטב. כלומר הביטוי בתוך הלוגריתם חייב להיות גדול מ0. נשים לב ש:

$$1+x^2 > x^2 \Rightarrow$$

$$\sqrt{1+x^2} > \sqrt{x^2}$$

היה אפשר להפעיל את פונקציית השורש מכיוון ששני האגפים אי שליליים. בנוסף שורש ריבועי היא פונקציה עולה ולכן אי השוויון נשמר. מתקיים:

$$\underbrace{\sqrt{1+x^2}-x}\underbrace{>}\sqrt{x^2}-x=|x|-x\geq x-x=\underbrace{0}$$

כעת נראה שהיא אי־זוגית:

$$\underbrace{f(-x)}=\ln\left(\sqrt{1+(-x)^2}-(-x)\right)\underbrace{=}\ln\left(\sqrt{1+x^2}+x\right)\underset{(*)}{=}$$

$$\ln\left(\frac{1}{\sqrt{1+x^2}-x}\right)=\ln 1-\ln\left(\sqrt{1+x^2}-x\right)=-\ln\left(\sqrt{1+x^2}-x\right)=\underbrace{-f(x)}$$

$(*)$ כפל בצמוד.