חשבון אינפיניטסימלי 1 - תרגיל 10

גיא תגר 206260762 - קבוצה 2

1 שאלה 1.

1. נאמר ש x_0 היא לא נקודת קיצון של f ב $[a,b]$ אם קיימים $x_1,x_2 \in [a,b]$ כך ש:

$$f(x_1) < f(x_0) < f(x_2)$$

2. נאמר ש f אינה גזירה ב x_0 אם לכל $L \in \mathbb{R}$ קיים $\varepsilon > 0$ כך שלכל $\delta > 0$ קיים $0 < |x - x_0| < \delta$ כך ש:

$$\left|\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} - L\right| \geq \varepsilon$$

2 שאלה 2.

1. :

$$\lim_{x\to 4}\frac{f(x)-f(4)}{x-4} = \lim_{x\to 4}\frac{\left|x^2-3x-4\right|}{x-4} = \lim_{x\to 4}\frac{|x+1|\,|x-4|}{x-4} = \lim_{x\to 4}\frac{(x+1)\,|x-4|}{x-4}$$

נפצל לגבולות חד צדדיים:

$$\lim_{x\to 4^+}\frac{(x+1)\cancel{(x-4)}}{\cancel{x-4}} = \lim_{x\to 4^+}(x+1) \underset{AOL}{=} 5$$

$$\lim_{x\to 4^-}\frac{-(x+1)\cancel{(x-4)}}{\cancel{x-4}} = \lim_{x\to 4^-} -(x+1) \underset{AOL}{=} -5$$

הגבולות החד צדדיים שונים, לכן f אינה גזירה ב $x_0 = 4$

2. :

$$\lim_{x\to 0}\frac{f(x)-f(0)}{x} = \lim_{x\to 0}\frac{\sqrt[3]{x^2-|x|}}{x}$$

נפריד לגבולות חד צדדיים:

$$\lim_{x\to 0^+}\frac{\sqrt[3]{x^2-x}}{x} = \lim_{x\to 0^+}\frac{\sqrt[3]{x}\sqrt[3]{x-1}}{x} = \lim_{x\to 0^+}\frac{\sqrt[3]{x-1}}{\sqrt[3]{x^2}} \underset{AOL}{=} \frac{-1}{\infty} = -\infty$$

אחד הגבולות החד צדדיים לא קיים, לכן הגבול לא קיים ו f אינה גזירה ב $x_0 = 0$.

.3 :

$$\lim_{x\to 0}\frac{f(x)-f(0)}{x}=\lim_{x\to 0}\frac{\sin\left(x^2\right)}{x^2}\underset{t=x^2}{=}\lim_{t\to 0}\frac{\sin t}{t}\underset{AOL}{=}1$$

לכן f גזירה ב $x_0=0$ ו־ $f'(0)=1$

3 שאלה 3.

תהי f פונקציה רציפה בקטע $[a,b]$ ל $a<b\in\mathbb{R}$. נניח ש $f(a)=f(b)=0$ ויהי $M=\sup\{f(x):x\in[a,b]\}$.

1. f רציפה ב $[a,b]$, אזי לפי משפט ויירשטראס הראשון, f חסומה מלעיל. f לא ריקה (כי למשל $f(a)=0$) ולכן לפי משפט החסם העליון, M מוגדר היטב.

2. נניח ש $M>0$ ויהי $0\le r<M$. צ"ל שהקבוצה $\{x\in[a,b]:f(x)=r\}$ מכילה לפחות שתי נקודות שונות.
ממשפט ויירשטראס השני, קיים $x_1\in[a,b]$ כך ש $f(x_1)\ge f(x)$ לכל $x\in[a,b]$.
לכן:

$$\underbrace{f(a)}=0\le\underbrace{r}<M\le\underbrace{f(x_1)}$$

הפונקציה רציפה בפרט בתחום זה, לכן ממשפט ערך הביניים המורחב,
קיים $c_1\in[a,x_1]$ כך ש:

$$f(c_1)=r$$

נשים לב גם ש:

$$\underbrace{f(b)}=0\le\underbrace{r}<M\le\underbrace{f(x_1)}$$

הפונקציה רציפה בפרט בתחום זה, לכן ממשפט ערך הביניים המורחב,
קיים $c_2\in[x_1,b]$ כך ש:

$$f(c_2)=r$$

כעת נראה ש $c_1\neq c_2$ ושהן שייכות לקבוצה ונסיים. מתקיים:

$$a\le c_1\le x_1\le c_2\le b$$

לכן $c_1,c_2\in[a,b]$. נניח בשלילה ש $c_1=c_2$. אזי $c_1=c_2=x_1$. ולכן:

$$\underbrace{M>}r=f(c_1)=f(c_2)=\underbrace{f(x_1)}$$

סתירה למקסימליות של $f(x_1)$.

לכן $c_1<c_2\in[a,b]$ והקבוצה $\{x\in[a,b]:f(x)=r\}$ מכילה לפחות שני איברים.
☺

4 שאלה 4.

1. **טענה**: תהי f פונקציה רציפה בקטע $[0,1]$. נניח ש $f(x) > 0$ לכל $x \in [0,1]$, אזי קיים $\varepsilon > 0$ כך ש $f(x) > \varepsilon$ לכל $x \in [0,1]$.
הטענה נכונה.

הפונקציה רציפה בקטע $[0,1]$, אזי לפי משפט ויירשטראס השני, קיים $x_1 \in [0,1]$ כך ש:

$$0 < f(x_1) \le f(x), \quad \forall x \in [0,1]$$

ניקח $\varepsilon = \frac{f(x_1)}{2}$ ונקבל:

$$0 < \underbrace{\varepsilon} \underbrace{<} f(x_1) \le \underbrace{f(x)}, \quad \forall x \in [0,1]$$

כנדרש
☺

2. **טענה**: תהי f פונקציה המוגדרת בסביבה של 1 ונניח ש f גזירה בנקודה $x_0 = 1$. אם $f(1) = 2$ וגם $f'(1) = 3$, אזי $\lim\limits_{x\to 1} \frac{f^2(x) - 2f(x)}{x-1} = 6$.
הטענה נכונה.

מהיות f גזירה בנקודה $x_0 = 1$, קיים הגבול:

$$\lim_{x\to 1} \frac{f(x) - f(1)}{x-1}$$

ושווה ל $f'(1)$. נקבל:

$$f'(1) = \lim_{x\to 1} \frac{f(x) - f(1)}{x-1} = \lim_{x\to 1} \frac{f(x) - 2}{x-1} = 3$$

כמו כן מהיות f גזירה בנקודה $x_0 = 1$, היא בוודאי רציפה ב $x_0 = 1$ ולכן:

$$\lim_{x\to 1} f(x) = f(1) = 2$$

נקבל ש:

$$\lim_{x\to 1} \frac{f^2(x) - 2f(x)}{x-1} = \lim_{x\to 1} f(x) \cdot \frac{f(x) - 2}{x-1} \underset{AOL}{=} 2 \cdot 3 = 6$$

☺

3. **טענה**: תהיינה f, g שתי פונקציות המוגדרות בסביבה של 0, כך ש $f(x) = x \cdot g(x)$ לכל x בסביבה זו. אזי f גזירה ב $x_0 = 0$ אם ורק אם $\lim\limits_{x\to 0} g(x)$ קיים.
הטענה נכונה

($\Leftarrow$) נניח ש f גזירה בנקודה 0. לכן:

$$\underbrace{f'(0)}=\lim_{x\to 0}\frac{f(x)-f(0)}{x-0}=\lim_{x\to 0}\frac{x\cdot g(x)-0\cdot g(0)}{x}=\underbrace{\lim_{x\to 0}g(x)}$$

כלומר $\lim\limits_{x\to 0}g(x)$ קיים ושווה $f'(0)$.

($\Rightarrow$) נניח ש $\lim\limits_{x\to 0}g(x)$ קיים ושווה ל-L. אזי:

$$\underbrace{\lim_{x\to 0}\frac{f(x)-f(0)}{x-0}}=\lim_{x\to 0}\frac{x\cdot g(x)-0\cdot g(0)}{x}=\lim_{x\to 0}g(x)\underset{AOL}{=}\underbrace{L}$$

הגבול קיים, לכן f גזירה בנקודה $x_0=0$
☺

4. **טענה**: תהי f פונקציה רציפה בקטע (a,b) ל $a<b\in\mathbb{R}$. נניח ש a,b הן נקודות אי רציפות סליקות של f, אזי f חסומה בקטע (a,b).
<u>הטענה נכונה</u>.

מהיות a,b נקודות אי רציפות סליקות, קיימים הגבולות:

$$\lim_{x\to a^+}f(x)=L_1$$

$$\lim_{x\to b^-}f(x)=L_2$$

נגדיר פונקציה חדשה g:

$$g(x)=\begin{cases}L_1 & x=a\\ f(x) & a<x<b\\ L_2 & x=b\end{cases}$$

נראה ש g רציפה בקטע $[a,b]$. עבור $x_0\in(a,b)$:

$$\lim_{x\to x_0}g(x)=\lim_{x\to x_0}f(x)=f(x_0)=g(x_0)$$

בנוסף:

$$\lim_{x\to a^+}g(x)\underset{x>a}{=}\lim_{x\to a^+}f(x)=L_1=g(a)$$

$$\lim_{x\to b^-}g(x)\underset{x<b}{=}\lim_{x\to b^-}f(x)=L_2=g(b)$$

לכן g רציפה בקטע $[a,b]$. לפי משפט ויירשטראס הראשון, g חסומה, כלומר קיים $M>0$ כך ש:

$$|g(x)|\le M$$

נשים לב ש: $M \geq \max\{|L_1|, |L_2|\}$, כלומר $M \geq \max\{|g(a)|, |g(b)|\}$ ולכן:

$$|g(x)| \leq M, \quad \forall x \in (a,b)$$

g חסומה בקטע (a,b) ולכן לפי הגדרת הפונקציה g:

$$|f(x)| \leq M, \quad \forall x \in (a,b)$$

ולכן f חסומה.
☺

5. **טענה**: תהי f פונקציה המוגדרת בסביבה של 0. נניח ש $\lim\limits_{x\to 0} \frac{f(x)}{|x|} = 1$. אזי f לא גזירה ב־0.
<u>הטענה נכונה.</u>

נניח בשלילה ש־f גזירה ב־0, לכן קיים הגבול:

$$\lim_{x\to 0} \frac{f(x) - f(0)}{x} = f'(0)$$

מהיות הגבול קיים, הגבולות החד צדדיים קיימים ושווים לו:

$$f'(0) = \lim_{x\to 0^+} \frac{f(x) - f(0)}{x} = \underbrace{\lim_{x\to 0^+} \left[\frac{f(x)}{|x|} - \frac{f(0)}{|x|}\right]}$$

$$f'(0) = \lim_{x\to 0^-} \frac{f(x) - f(0)}{x} = \lim_{x\to 0^-} \left[\frac{f(x)}{-|x|} - \frac{f(0)}{-|x|}\right] = \underbrace{\lim_{x\to 0^-} -\left[\frac{f(x)}{|x|} - \frac{f(0)}{|x|}\right]}$$

הגבולות המסומנים חייבים להיות שווים אחד לשני. מהיותם הופכיים, הם יהיו שווים רק אם הם 0. נתון ש: $\lim\limits_{x\to 0} \frac{f(x)}{|x|} = 1$ ולכן בהכרח $\lim\limits_{x\to 0} \frac{f(0)}{|x|} = 1$
אם $f(0) = 0$, אזי:

$$1 = \lim_{x\to 0} \frac{f(0)}{|x|} = 0$$

אם $f(0) \neq 0$ אזי:

$$1 = \lim_{x\to 0} \frac{f(0)}{|x|} = \pm\infty$$

בשני המקרים קיבלנו סתירה!

5 שאלה 5.

יהיו $L_1, L_2 \in \mathbb{R}$ ותהי $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ פונקציה רציפה, כך ש:
$\lim\limits_{x\to\infty} f(x) = L_1$ וגם $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = L_2$

1. ניקח את הפונקציה $f\left(x\right)=\frac{e^{x}}{1+e^{x}}$.
הוכחנו בכיתה ש e^{x} רציפה, בנוסף המכנה לא מתאפס ולכן f רציפה מאש"ר ומוגדרת לכל $x\in\mathbb{R}$.
נסתכל על הגבולות:

$$\lim_{x\to\infty}\frac{e^{x}}{1+e^{x}}=\lim_{x\to\infty}\frac{1}{\frac{1}{e^{x}}+1}\underset{AOL}{=}\frac{1}{0+1}=1$$

$$\lim_{x\to-\infty}\frac{e^{x}}{1+e^{x}}\underset{AOL}{=}\frac{0}{1+0}=0$$

נניח בשלילה שיש ל־f נקודת מקסימום, כלומר נניח בשלילה שקיים $x_{1}\in\mathbb{R}$ כך ש $f\left(x_{1}\right)\geq f\left(x\right)$ לכל $x\in\mathbb{R}$.
ניקח $M=x_{1}+1$ ונקבל:

$$\underbrace{f\left(M\right)}=\frac{e^{x_{1}+1}}{1+e^{x_{1}+1}}=\frac{e\cdot e^{x_{1}}}{1+e\cdot e^{x_{1}}}=\frac{e^{x_{1}}}{\frac{1}{e}+e^{x_{1}}}\underbrace{>}_{\frac{1}{e}<1}\frac{e^{x_{1}}}{1+e^{x_{1}}}=\underbrace{f\left(x_{1}\right)}$$

בסתירה למקסימליות של $f\left(x_{1}\right)$

כעת נניח בשלילה שיש ל־f נקודת מינימום, כלומר נניח בשלילה שקיים $x_{2}\in\mathbb{R}$ כך ש $f\left(x_{2}\right)\leq f\left(x\right)$ לכל $x\in\mathbb{R}$.
ניקח $m=x_{1}-1$ ונקבל:

$$\underbrace{f\left(m\right)}=\frac{e^{x_{2}-1}}{1+e^{x_{2}-1}}=\frac{\frac{e^{x_{2}}}{e}}{1+\frac{e^{x_{2}}}{e}}=\frac{e^{x_{2}}}{e+e^{x_{2}}}\underbrace{<}_{e>1}\frac{e^{x_{2}}}{1+e^{x_{2}}}=\underbrace{f\left(x_{2}\right)}$$

בסתירה למינימליות של $f\left(x_{2}\right)$

קיבלנו ש־f רציפה ב־$\mathbb{R}$, קיימים הגבולות כאשר $x\to\pm\infty$ ואין לה נקודות קיצון, כנדרש.

2. כעת נניח ש $L_{1}=L_{2}$ ונראה שיש ל־f נקודת קיצון.
יהי $L\in\mathbb{R}$. נשים לב ש:

$$\lim_{x\to\infty}f\left(x\right)=\lim_{x\to-\infty}f\left(x\right)=L$$

אם $f\left(x\right)=L$ לכל $x\in\mathbb{R}$, אזי f היא קבועה וכל נקודה היא נקודת קיצון.
אחרת, קיים $x_{1}\in\mathbb{R}$ כך ש $f\left(x_{1}\right)\neq L$ ולכן $f\left(x_{1}\right)>L$ או $f\left(x_{1}\right)<L$.

נניח ש $f\left(x_{1}\right)>L$:
מהיות $\lim_{x\to-\infty}f\left(x\right)=L$, קיים $M_{1}<0$ כך שלכל $x<M_{1}$ מתקיים:

$$\left|f\left(x\right)-L\right|<\boxed{f\left(x_{1}\right)-L}\Rightarrow f\left(x\right)<f\left(x_{1}\right)$$

מהיות $\lim_{x\to\infty} f(x) = L$, קיים $M_2 > 0$ כך שלכל $x > M_2$ מתקיים:

$$|f(x) - L| < \boxed{f(x_1) - L} \Rightarrow f(x) < f(x_1)$$

לפיכך נובע ש $M_1 \leq x_1 \leq M_2$ (אחרת $x_1 > M_2$ או $x_1 < M_1$ ויקיים $f(x_1) < f(x_1)$)
כלומר $x_1 \in [M_1, M_2]$.
נשים לב ש־f רציפה בפרט ב $[M_1, M_2]$.
מתקיים $M_1 < 0 < M_2$ ולכן לפי משפט ויירשטארס 2, קיים $x_M \in [M_1, M_2]$ כך ש:

$$f(x_M) \geq f(x), \quad \forall x \in [M_1, M_2]$$

מהיות $x_1 \in [M_1, M_2]$ מתקיים:

$$f(x_M) \geq f(x_1)$$

עבור $x > M_2$ הראינו שמתקיים:

$$f(x) < f(x_1) \leq f(x_M)$$

עבור $x < M_1$ הראינו שמתקיים:

$$f(x) < f(x_1) \leq f(x_M)$$

עבור $M_1 \leq x \leq M_2$ הראינו שמתקיים:

$$f(x) \leq f(x_M)$$

כלומר לכל $x \in \mathbb{R}$ מתקיים:

$$f(x) \leq f(x_M)$$

ולכן x_M היא נקודת מקסימום של f ובפרט, נקודת קיצון.

כעת נניח ש $f(x_1) < L$.
נגדיר $g(x) = -f(x)$. נשים לב כי g רציפה מאש"ר, כמו כן:

$$\lim_{x\to\pm\infty} g(x) = \lim_{x\to\pm\infty} -f(x) \underset{AOL}{=} -L$$

בנוסף:

$$f(x_1) < L \Rightarrow -f(x_1) > -L \Rightarrow$$

$$g(x_1) > -L$$

מהחלק הראשון, קיימת $x_m \in \mathbb{R}$ כך ש:

$$g(x) \leq g(x_m), \quad \forall x \in \mathbb{R} \Rightarrow$$

$$-f(x) \leq -f(x_m) \Rightarrow$$

$$f(x) \geq f(x_m), \quad \forall x \in \mathbb{R}$$

כלומר x_m היא נקודת מינימום של f ובפרט, נקודת קיצון.

קיבלנו שבכל מקרה קיימת נקודת קיצון ל־f.
☺