חשבון אינפיניטסימלי 1 - תרגיל 11

גיא תגר - קבוצה 2

1 שאלה 1.

ניקח את הפונקציה $f(x) = \arccos(x)$ לכל $x \in [-1,1]$

1. נגדיר $y = g(x) = \cos x$ לכל $0 < x < \pi$.
ראינו ש-g גזירה ו $g'(x) = -\sin x \neq 0$ לכל $0 < x < \pi$.
בנוסף g הפיכה ומתקיים $x = g^{-1}(y) = \arccos(y)$ לכל $y \in (-1,1)$
נשים לב ש g^{-1} רציפה מאש"ר בסיס ולכן:

$$(\arccos y)' = \frac{1}{g'(x)} = -\frac{1}{\sin x} \underset{\sin x > 0}{=} -\frac{1}{\sqrt{1-\cos^2 x}} =$$

$$-\frac{1}{\sqrt{1-(\cos(\arccos y))^2}} = -\frac{1}{\sqrt{1-y^2}}$$

ולכן:

$$(\arccos x)' = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}, \ \ \forall x \in (-1,1)$$

2. נבדוק גזירות בקצוות. עבור $x = 1$:

$$\lim_{x\to 1^-} \frac{\arccos x - \arccos 1}{x-1} = \lim_{x\to 1^-} \frac{\arccos x}{x-1} \underset{t=\arccos x}{=} \lim_{t\to 0^+} \frac{t}{\cos t - 1} =$$

$$\lim_{t\to 0^+} \frac{1}{\frac{\cos t - 1}{t^2}} \cdot \frac{1}{t} \underset{AOL}{=} -2 \cdot \infty = -\infty$$

עבור $x = -1$:

$$\lim_{x\to -1^+} \frac{\arccos x - \arccos(-1)}{x+1} = \lim_{x\to -1^+} \frac{\arccos x - \pi}{x+1} \underset{t=\arccos x}{=}$$

$$\lim_{t\to \pi^-} \frac{t-\pi}{\cos t + 1} \underset{u=t-\pi}{=} \lim_{u\to 0^-} \frac{u}{\cos(u+\pi)+1} = \lim_{u\to 0^-} -\frac{u}{\cos(u)-1} =$$

$$\lim_{u\to 0^-} -\frac{1}{\frac{\cos u - 1}{u^2}} \cdot \frac{1}{u} \underset{AOL}{=} \cdot 2 - \infty = -\infty$$

הגבול לא קיים, לכן $\arccos x$ לא גזירה בנקודה $1, -1$

2 שאלה 2.

נשים לב שלכל $x>1$ מתקיים $\ln x>0$. נגזור לפי אשג"ז:

$$\left[(x\ln x)^{\ln x}\right]'=\left[e^{\ln x\cdot\ln(x\ln x)}\right]'=$$

$$e^{\ln x\cdot\ln(x\ln x)}\left(\frac{\ln(x\ln x)}{x}+\frac{\cancel{\ln x}}{x\cancel{\ln x}}\left(\frac{1}{x}\cdot x+1\cdot\ln x\right)\right)=$$

$$e^{\ln x\cdot\ln(x\ln x)}\left(\frac{\ln(x\ln x)+\ln x+1}{x}\right)=(x\ln x)^{\ln x}\left(\frac{\ln\left(x^2\ln x\right)+1}{x}\right)$$

הנגזרת מוגדרת לכל $x>1$.

3 שאלה 3.

1. נחשב את הגבול:

$$\lim_{x\to-\infty}g(x)\underset{t=-x}{=}\lim_{t\to\infty}g(-t)\underset{odd}{=}\lim_{t\to\infty}-g(t)\underset{AOL}{=}-L$$

2. נשים לב ־ g גזירה מאשג"ז ולכן בפרט רציפה. בנוסף:

$$g(-x)=f(-x)-f(x)=-[f(x)-f(-x)]=-g(x)$$

כלומר g אי זוגית. לכן מסעיף 1 מתקיים:

$$\lim_{x\to-\infty}g(x)=-0=0$$

מש"ב 10 שאלה 5.ב, קיימת $x_0\in\mathbb{R}$ כך ש x_0 היא נקודת קיצון.
g גזירה בפרט ב־x_0. היא בוודאי לא נקודת קצה מכיוון שהתחום הוא $\mathbb{R}$. לכן לפי משפט פרמה, מתקיים:

$$g'(x_0)=0$$

3. נשים לב שלכל $x\in\mathbb{R}$:

$$\underbrace{g'(x)}=[f(x)-f(-x)]'\underset{AOD}{=}f'(x)-f'(-x)\underset{(*)}{=}$$

$$f'(x)-f'(x)\cdot(-1)=\underbrace{2f'(x)}$$

$(*)$ כלל השרשרת

עבור x_0 מתקיים:

$$0 = g'(x_0) = 2f'(x_0) \Rightarrow$$

$$f'(x_0) = 0$$

4 שאלה 4.

1. **טענה**: תהי $f : [a,b] \to \mathbb{R}$. נניח ש b היא מינימום של f ב$[a,b]$ וש f גזירה בנקודה b. אזי $f'(b) \leq 0$.
הטענה נכונה.

מהיות b נקודת מינימום של f ב$[a,b]$, מתקיים:

$$f(b) \leq f(x) \quad \forall x \in [a,b]$$

לפיכך לכל $x \in [a,b)$ מתקיים:

$$\frac{f(x) - f(b)}{x - b} \leq 0$$

מהיות f גזירה בנקודה b, מתקיים:

$$f'(b) = \lim_{x \to b^-} \frac{f(x) - f(b)}{x - b} \underset{(*)}{\leq} 0$$

$(*)$ ממונוטוניות הגבול.
☺

2. **טענה**: תהי $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ מוגדרת ע"י:

$$f(x) = \begin{cases} x^{\frac{3}{2}} \sin\left(\frac{1}{x}\right) & x > 0 \\ 0 & x \leq 0 \end{cases}$$

אזי f' רציפה.

הטענה לא נכונה.

ראינו בתרגול כי:

$$f'(x) = \begin{cases} \frac{3}{2}\sqrt{x} \sin\left(\frac{1}{x}\right) - \frac{\cos\left(\frac{1}{x}\right)}{\sqrt{x}} & x > 0 \\ 0 & x \leq 0 \end{cases}$$

עבור $x>0$, f' רציפה מאשג"ז.
עבור $x<0$, f' רציפה מאשג"ז
עבור $x_0=0$ נבדוק בנפרד ונפצל את הגבול ל־2 חלקים:

$$\lim_{x\to0^+}\frac{3}{2}\sqrt{x}\sin\left(\frac{1}{x}\right)\underset{B\times V}{=}0$$

כעת נניח בשלילה ש $\lim_{x\to0^+}\frac{\cos\left(\frac{1}{x}\right)}{\sqrt{x}}$ קיים. לכן קיים $L\in\mathbb{R}$ כך ש:

$$\lim_{x\to0^+}\frac{\cos\left(\frac{1}{x}\right)}{\sqrt{x}}\underset{t=\frac{1}{x}}{=}\lim_{t\to\infty}\sqrt{t}\cos t\underset{u=t-\frac{\pi}{2}}{=}\lim_{u\to\infty}\sqrt{u+\frac{\pi}{2}}\cdot\sin u=L$$

לכן:

$$\underbrace{\lim_{x\to\infty}\sin x}=\lim_{x\to\infty}\frac{\sin x\cdot\sqrt{x+\frac{\pi}{2}}}{\sqrt{x+\frac{\pi}{2}}}\underset{AOL}{=}\cdot\frac{L}{\infty}=\underbrace{0}$$

סתירה! הוכחנו בעבר שהגבול הזה לא קיים.
לכן $\lim_{x\to0^+}\frac{\cos\left(\frac{1}{x}\right)}{\sqrt{x}}$ לא קיים ולכן:

$$\lim_{x\to0^+}f'(x)=\lim_{x\to0^+}\frac{3}{2}\sqrt{x}\sin\left(\frac{1}{x}\right)-\frac{\cos\left(\frac{1}{x}\right)}{\sqrt{x}}\underset{(*)}{=}DNE\neq0=f'(0)$$

$(*)$ קיים פחות לא קיים ־ לא קיים.

ולכן f' אינה רציפה ב־ 0.

3. **טענה**: קיימת פונקציה גזירה $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ כך ש:

$$f'(x)=\begin{cases}\frac{\cos x-1}{x^2} & x\neq0\\ 1 & x=0\end{cases}$$

<u>הטענה לא נכונה.</u>

נניח בשלילה שקיימת פונקציה כזו. לכן:

$$f'(0)=1$$

$$f'(2\pi)=0$$

לפי משפט דרבו המורחב, קיימת $0<c<2\pi$ כך ש:

$$f'(c)=\frac{1}{2}$$

כלומר:

$$f'(c) = \frac{1}{2} = \frac{\cos c - 1}{c^2} \Rightarrow$$

$$\cos c = 1 + \frac{c^2}{2} > 1$$

סתירה!

4. **טענה**: תהי $f : (0,\infty) \to \mathbb{R}$ פונקציה גזירה כך ש:

$$f'(x) \cdot f'\left(\frac{1}{x}\right) < 0 \ \ \forall 0 < x \neq 1$$

אזי $f'(1) = 0$.

<u>הטענה נכונה.</u>

נביט על הקטע $\left[\frac{1}{1.1}, 1.1\right]$. f גזירה בפרט בקטע זה. בנוסף לפי הנתון:

$$f'\left(\frac{1}{1.1}\right) \cdot f'(1.1) < 0$$

לכן לפי משפט דרבו, קיים $0.91 \approx \frac{1}{1.1} < c < 1.1$ כך ש:

$$f'(c) = 0$$

נניח בשלילה ש $f(c) \neq 1$. אז לפי ההנחה:

$$f'(c) \cdot f'\left(\frac{1}{c}\right) < 0$$

סתירה!

5. **טענה**: יהי $x_0 \in \mathbb{R}$ ותהי f פונקציה גזירה בקטע (x_0, b) עבור $b > x_0$ כלשהו.

אם $\lim\limits_{x \to x_0^+} = \infty$, אזי $\lim\limits_{x \to x_0^+} f'(x) = -\infty$

<u>הטענה לא נכונה.</u>

דוגמה נגדית - ניקח את הפונקציה:

$$f(x) = \sin\left(\frac{1}{x+1}\right) + \frac{1}{x+1}, \ \ \forall x \in (-1, 0)$$

הפונקציה גזירה בקטע מאשג"ז. נשים לב ש:

$$\sin\left(\frac{1}{x+1}\right) + \frac{1}{x+1} \geq \frac{1}{x+1} - 2$$

$$\lim_{x \to -1^+} \left[\frac{1}{x+1} - 2\right] = \infty$$

לכן לפי משפט הטוסט,

$$\lim_{x\to -1^+} f(x) = \infty$$

בנוסף:

$$f'(x) = \cos\left(\frac{1}{x+1}\right)\cdot\left(-\frac{1}{(x+1)^2}\right) - \frac{1}{(x+1)^2} = -\frac{1}{(x+1)^2}\cdot\left[1+\cos\left(\frac{1}{x+1}\right)\right]$$

נבדוק את הגבול של הנגזרת מימין ל-1-:

$$\lim_{x\to -1+}\left[-\frac{1}{(x+1)^2}\cdot\left[1+\cos\left(\frac{1}{x+1}\right)\right]\right] \underset{t=\frac{1}{x+1}}{=} \lim_{t\to\infty} -t^2(1+\cos t)$$

נניח בשלילה ש $\lim_{t\to\infty} -t^2(1+\cos t) = -\infty$. לכן קיים $M_1 < 0$ כך שלכל $t < M_1$ מתקיים:

$$f(t) < \boxed{-1}$$

נבחר $M_1 > t_1 = \lfloor M_1 \rfloor \cdot 2\pi$. לכן מתקיים:

$$f(t_1) = -(\lfloor M_1 \rfloor \cdot 2\pi)^2 (1+\cos(\lfloor M_1 \rfloor \cdot 2\pi)) = 0 > -1$$

סתירה!

5 שאלה 5.

תהי $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ פונקציה מחזורית וגזירה.

1. :

$$\underbrace{f'(T)} = \lim_{x\to T}\frac{f(x)-f(T)}{x-T} \underset{y=x-T}{=} \lim_{y\to 0}\frac{f(y+T)-f(T+0)}{y} =$$

$$\lim_{y\to 0}\frac{f(y)-f(0)}{y-0} = \underbrace{f'(0)}$$

2. ראינו כבר ש $f'(T) = f'(0)$. לכן אם $f'(T) = f'(0) = 0$, ניקח $x_1 = 0,\ x_2 = T$ וסיימנו. אחרת, $f'(T) = f'(0) \neq 0$. הפונקציה גזירה בפרט ב $(0, T)$ ולכן לפי משפט רול, קיימת $0 < x_1 < T$ כך ש:

$$f'(x_1) = 0$$

נשים לב כי $f(x_1) = f(x_1 + T)$. נביט על הקטע $[x_1, x_1 + T]$. אותם התנאים חלים ולכן לפי משפט רול קיימת $x_1 < x_2 < x_1 + T$ כך ש:

$$f'(x_2) = 0$$

אם $T < x_2$, אזי:

$$0 < x_1 < x_2 < T$$

וסיימנו. אחרת $x_2 > T$ (לא ייתכן שוויון כי $f'(T) \neq 0$) ומתקיים:

$$0 < x_2 - T < x_1$$

נבחר $x_3 = x_2 - T$. נראה ש $f'(x_3) = 0$ ונסיים:

$$\lim_{x \to x_2 - T} \frac{f(x) - f(x_2 - T)}{x - x_2 + T} \underset{y = x + T}{=} \lim_{y \to x_2} \frac{f(y - T) - f(x_2 - T)}{y - T} =$$

$$\lim_{y \to x_2} \frac{f(y) - f(x_2)}{y - T} = f'(x_2) = 0$$

בכל מקרה מצאנו $x_3, x_1 \in [0, T]$ כך ש $f'(x_1) = f'(x_3) = 0$
כנדרש.
☺