חשבון אינפיניטסימלי 1 - תרגיל 3

גיא תגר - קבוצה 2

1 שאלה 1.

1. נאמר שלקבוצה A אין ערך מינימלי אם לכל $\underline{a} \in A$ קיים $a \in A$ כך ש $a < \underline{a}$.
2. יהי $M \in \mathbb{R}$ חסם מלעיל של A. נאמר שM אינו החסם מלעיל המינימלי של A אם קיים $K < M$ כך ש $a \le K$ לכל $a \in A$.
3. נאמר שהקבוצה A אינה צפופה בממשיים אם קיימים $x, y \in \mathbb{R}$ המקיימים $x < y$ כך שלכל $a \in A$ מתקיים $a \ge y$ או $a \le x$.

2 שאלה 2.

1. נראה ש $sup\,(A) = 2$. מתקיים:

$$\underbrace{\frac{2n+(-1)^n}{n+2}} \le \frac{2n+1}{n+2} \underbrace{<} \frac{2n+4}{n+2} = \frac{2\cancel{(n+2)}}{\cancel{n+2}} = \underbrace{2}$$

כלומר 2 הוא חסם מלעיל של איברי הקבוצה ובנוסף, כל איברי הקבוצה קטנים ממש ממנו.
לפי תכונת האפסילון של החסם העליון, נרצה להראות שלכל $\varepsilon > 0$ קיים $n \in \mathbb{N}$ כך ש $\frac{2n+(-1)^n}{n+2} > 2 - \varepsilon$.
יהי $\varepsilon > 0$. מתכונת הארכימדיות, קיים $n > \frac{5-2\varepsilon}{\varepsilon}$ כך ש:

$$n > \frac{5-2\varepsilon}{\varepsilon} \underset{1 \ge -(-1)^n}{\ge} \frac{4-(-1)^n-2\varepsilon}{\varepsilon} = \frac{4-(-1)^n}{\varepsilon} - 2 \Rightarrow$$

$$n+2 > \frac{4-(-1)^n}{\varepsilon} \Rightarrow \varepsilon > \frac{4-(-1)^n}{n+2} = \frac{4-2n+2n-(-1)^n}{n+2} =$$

$$\frac{2\,(n+2)-2n-(-1)^n}{n+2} = 2 - \frac{2n+(-1)^n}{n+2} \Rightarrow$$

$$\frac{2n+(-1)^n}{n+2} > 2 - \varepsilon$$

מהעובדה שכל איברי הסדרה קטנים ממש ממנו, לקבוצה אין מקסימום.
כעת נראה ש $max\,(A) \Rightarrow sup\,(A) = \frac{1}{3}$.
מהיות $n \in \mathbb{N}$, מתקיים:

$$n \ge 1 \Rightarrow 5n \ge 5 \Rightarrow$$

$$6n-3 \geq n+2 \Rightarrow \backslash 3$$

$$2n-1 \geq \frac{n+2}{3} \Rightarrow \backslash\left(n+2\right)>0$$

$$\underbrace{\frac{2n+\left(-1\right)^n}{n+2}} \geq \frac{2n-1}{n+2} \geq \underbrace{\frac{1}{3}}$$

קיבלנו שהקבוצה חסומה מלרע ע"י $\frac{1}{3}$. נשים לב שהוא מתקבל עבור $n=1$ ולכן $\frac{1}{3} \in A$. הוא המינימום ולכן גם הסופרימום של הקבוצה.
☺

2. מתקיים

$$\underbrace{\frac{n}{nm+1}} < \frac{\cancel{n}}{\cancel{n}m} = \frac{1}{m} \underset{m\geq 1}{\leq} \underbrace{1}$$

כלומר 1 הוא חסם מלעיל של A. נראה ש $sup\left(A\right)=1$.
לפי תכונת האפסילון של החסם העליון, נראה שלכל $\varepsilon>0$ קיימים $n,m\in\mathbb{N}$ כך ש $\frac{n}{nm+1}>1-\varepsilon$.
ובכן, יהי $\varepsilon>0$. ניקח $m=1\in\mathbb{N}$ ולפי תכונת ארכימדס , קיים $n>\frac{1}{\varepsilon}-1$ כך ש:

$$n>\frac{1}{\varepsilon}-1 \Rightarrow n+1>\frac{1}{\varepsilon} \Rightarrow \varepsilon > \frac{1}{n+1} = \frac{\left(n+1\right)-n}{n+1} = 1-\frac{n}{n+1} \Rightarrow$$

$$\frac{n}{n+1} > 1-\varepsilon \underset{m=1}{\Rightarrow}$$

$$\frac{n}{nm+1} > 1-\varepsilon$$

הראינו באי השוויון הראשון שכל איברי הסדרה קטנים ממש מ־1 ולכן לקבוצה אין מקסימום.

כעת נראה ש $inf\left(A\right)=0$. ראשית, ברור כי $nm+1>0$ וגם $n>0$ לכל $m,n\in\mathbb{N}$ ולכן $\frac{n}{nm+1}>0$ (חלוקה של 2 מספרים חיוביים היא חיובית). כלומר A חסומה מלרע ע"י 0. נראה שהוא האינפימום.

לפי תכונת האפסילון של החסם התחתון, נראה שלכל $\varepsilon>0$ קיימים $n,m\in\mathbb{N}$ כך ש $\frac{n}{nm+1}<\varepsilon$.
יהי $\varepsilon>0$. ניקח $n=1\in\mathbb{N}$ ולפי תכונת ארכימדס , קיים $m>\frac{1}{\varepsilon}-1$ כך ש:

$$m>\frac{1}{\varepsilon}-1 \Rightarrow m+1>\frac{1}{\varepsilon} \Rightarrow \frac{1}{m+1}<\varepsilon \underset{n=1}{\Rightarrow}$$

$$\frac{n}{nm+1}<\varepsilon$$

בגלל ההסבר לעיל ובפרט בגלל ש $n > 0$, אין איבר בקבוצה ששווה ל0 ולכן אין לקבוצה מינימום.
☺

3 שאלה 3.

תהיינה $\phi \neq A, B \subseteq \mathbb{R}$ שתי קבוצות חסומות.

1. מכיוון ש A, B חסומות, הן בפרט חסומות מלעיל, ולכן לפי משפט החסם העליון (הוכחנו בכיתה), יש להן סופרימום, כלומר $sup\left(A\right), sup\left(B\right)$ קיימים.

   כעת נוכיח ש $sup\left(A\right) = sup\left(B\right)$.
   נניח בשלילה ש $sup\left(A\right) > sup\left(B\right)$. לפי תכונת האפסילון של הסופרימום, עבור $\boxed{sup\left(A\right) - sup\left(B\right)} = \varepsilon > 0$ קיים $a_1 \in A$ שעבורו:

   $$\underbrace{a_1}_{} > sup\left(A\right) - \left[sup\left(A\right) - sup\left(B\right)\right] = \underbrace{sup\left(B\right)}_{}$$

   נתון שלכל $a \in A$ קיים $b \in B$ כך ש $a \leq b$. זה נכון בפרט לa_1 ולכן קיים $b \in B$ המקיים:

   $$\underbrace{sup\left(B\right)}_{} < a_1 \leq \underbrace{b}_{}$$

   בסתירה לכך ש $sup\left(B\right)$ הוא הסופרימום של B.

   כעת נניח בשלילה ש $sup\left(A\right) < sup\left(B\right)$. לפי תכונת האפסילון של הסופרימום, עבור $\boxed{sup\left(B\right) - sup\left(A\right)} = \varepsilon > 0$ קיים $b_1 \in B$ שעבורו

   $$\underbrace{b_1}_{} > sup\left(B\right) - \left[sup\left(B\right) - sup\left(A\right)\right] = \underbrace{sup\left(A\right)}_{}$$

   נתון שלכל $b \in B$ קיים $a \in A$ כך ש $b \leq a$. זה נכון בפרט ל b_1 ולכן קיים $a \in A$ המקיים:

   $$\underbrace{sup\left(A\right)}_{} < b_1 \leq \underbrace{a}_{}$$

   בסתירה לכך ש $sup\left(A\right)$ הוא הסופרימום של A.
   לפיכך, $sup\left(A\right) = sup\left(B\right)$.
   ☺

2. ניקח:
   $A = [0, 2] \subseteq \mathbb{R}$
   $B = [1, 2] \subseteq \mathbb{R}$

   ברור שלכל $a \in [0, 2]$ קיים $b \in [1, 2]$ כך ש $a \leq b \leq 2$.

בנוסף ברור שלכל $b\in[1,2]$ קיים $a\in[0,2]$ כך ש $b\leq a\leq 2$. (בין היתר מכיוון ש $B\subseteq A$)
בנוסף $sup\left(A\right)=sup\left(B\right)=2$.
התנאים מתקיימים אבל:

$$\underbrace{inf\left(A\right)}=0\underbrace{\neq}1=\underbrace{inf\left(B\right)}$$

כנדרש.
☺

4 שאלה 4.

תהיינה $\phi\neq A,B\subseteq(0,\infty)$ שתי קבוצות חסומות מלעיל. נגדיר

$$\frac{A}{B}=\left\{\frac{a}{b}\mid a\in A,b\in B\right\}$$

1. ניקח $A=\{1\}\subseteq(0,\infty)$ וניקח $B=(0,1)\subseteq(0,\infty)$. (שתיהן חסומות מלעיל ע"י 1) כך ש:

$$\frac{A}{B}=\left\{\frac{a}{b}\mid a\in A,b\in B\right\}=\frac{1}{b}\quad\forall a\in A,\forall b\in B$$

נניח בשלילה שהקבוצה חסומה מלעיל. אזי קיים $M>1$ כך שלכל $a\in A,b\in B$ מתקיים

$$\frac{1}{b}<M$$

ניקח $1\underset{M>1}{<}b=\frac{1}{2M}\underset{M>0}{<}0$ כלומר $\frac{1}{2M}\in B$. אבל:

$$\underbrace{\frac{a}{b}}=\frac{1}{\frac{1}{2M}}=2M\underbrace{>}_{M>1}\underbrace{M}$$

בסתירה לכך ש M חסם מלעיל של $\frac{A}{B}$.
☺

2. צ"ל שהקבוצה $\frac{A}{B}$ חסומה אם ורק אם $inf\left(B\right)>0$.

($\Leftarrow$) נניח ש $\frac{A}{B}$ חסומה, לכן בפרט חסומה מלעיל ויש לה סופרימום. כלומר לכל $b\in B$, וקיים $0<a_1\in A$ שעבורם מתקיים:

$$\frac{a_1}{b}\leq sup\left(\frac{A}{B}\right)\underset{(*)}{\Rightarrow}b\geq\frac{a_1}{sup\left(\frac{A}{B}\right)}$$

$$a_1, b > 0 \Rightarrow \underbrace{0}\underbrace{<}\frac{a_1}{b} \leq \underbrace{sup\left(\frac{A}{B}\right)} \quad (*)$$

כלומר B חסומה מלרע ע"י $\frac{a_1}{sup\left(\frac{A}{B}\right)}$. נוכל לחזור על התהליך הזה לכל $0 < a \in A$ ולכן:

$$\underbrace{0}\underbrace{<}_{*}\frac{a}{sup\left(\frac{A}{B}\right)} \leq \underbrace{inf\left(B\right)} \quad \forall a \in A, \forall b \in B$$

$(\Rightarrow)$ נניח ש $inf\left(B\right) > 0$. בנוסף ידוע כי A, B חסומות מלעיל.
נשים לב שעבור כל $a \in A, b \in B$ מתקיים:

$$a, b > 0 \Rightarrow \frac{a}{b} > 0$$

כמו כן לכל $a \in A, b \in B$ מתקיים:

$$0 < a \leq sup\left(A\right)$$

$$b \geq inf\left(B\right) > 0 \Rightarrow \frac{1}{b} \leq \frac{1}{inf\left(B\right)}$$

מכיוון ש $a, b, sup\left(A\right), inf\left(B\right)$ גדולים מ־0, נוכל לכפול את אי השוויונים ולקבל:

$$\frac{a}{b} \leq \frac{sup\left(A\right)}{inf\left(B\right)}$$

קיבלנו ש $\frac{A}{B}$ חסומה מלעיל ע"י ביטוי מספרי. כמו כן הראינו ש $0 < \frac{a}{b}$ ולכן גם חסומה מלרע. כלומר $\frac{A}{B}$ חסומה.
☺

3. נניח בנוסף שלקבוצה B יש מינימום ונוכיח כי $sup\left(\frac{A}{B}\right) = \frac{sup(A)}{min(B)}$.
מהגדרת הקבוצות A, B, ברור כי $a, b > 0, \ \forall a \in A, \forall b \in B$, כמו כן מכיוון שהן חסומות מלעיל, יש להן סופרמום.
מהעובדה שקיים בB איבר מינימלי, $min\left(B\right) \in B$ ולכן מתקיים $min\left(B\right) > 0$.
בנוסף מהגדרת המינימום, לכל $b \in B$ ולכל $a \in A$ מתקיים:

$$b \geq min\left(B\right) \underset{a>0}{\Rightarrow} \frac{b}{a} \geq \frac{min\left(B\right)}{a} \underset{b>0}{\Rightarrow} \underbrace{\frac{a}{b}} \leq \frac{a}{min\left(B\right)} \underset{a \leq sup(A)}{\leq} \underbrace{\frac{sup\left(A\right)}{min\left(B\right)}}$$

כלומר $\frac{sup(A)}{min(B)}$ הוא חסם מלעיל של הקבוצה $\frac{A}{B}$. מתקיים בפרט שהקבוצה חסומה מלעיל ולכן יש לה סופרימום ומתקיים:

$$sup\left(\frac{A}{B}\right) \leq \frac{sup\left(A\right)}{min\left(B\right)} \quad (*)$$

מהיות $\frac{A}{B}$ חסומה מלעיל, אזי לכל $b \in B$ וקיים $0 < a \in A$ כך ש:

$$\frac{a}{b} \leq sup\left(\frac{A}{B}\right) \underset{a,b>0}{\Rightarrow}$$

$$b \geq \frac{a}{sup\left(\frac{A}{B}\right)}$$

כלומר $\frac{a}{sup\left(\frac{A}{B}\right)}$ הוא חסם מלרע של B. ומתקיים

$$min\left(B\right) \geq \frac{a}{sup\left(\frac{A}{B}\right)}$$

ולכן מתקיים

$$a \leq min\left(B\right) \cdot sup\left(\frac{A}{B}\right)$$

נוכל לחזור על התהליך עבור כל $0 < a \in A$ ולכן:

$$a \leq min\left(B\right) \cdot sup\left(\frac{A}{B}\right) \ ,\forall a \in A$$

לכן $min\left(B\right) \cdot sup\left(\frac{A}{B}\right)$ הוא חסם מלעיל של A, כלומר:

$$sup\left(A\right) \leq min\left(B\right) \cdot sup\left(\frac{A}{B}\right) \Rightarrow$$

$$sup\left(\frac{A}{B}\right) \geq \frac{sup\left(A\right)}{min\left(B\right)} \quad (**)$$

מ$(**)$ו$(*)$ קיבלנו ש:

$$sup\left(\frac{A}{B}\right) = \frac{sup\left(A\right)}{min\left(B\right)}$$

כנדרש.
☺

5 שאלה 5.

1. **טענה**: אם A צפופה ב B ו־B צפופה ב$\mathbb{R}$, אזי A צפופה ב$\mathbb{R}$.
<u>הטענה נכונה.</u>

מהיות B צפופה ב$\mathbb{R}$, לכל $x < y \in \mathbb{R}$ קיים $b_1 \in B$ כך ש:

$$x < b_1 < y$$

מהיות $B \subseteq \mathbb{R}$, מתקיים ש $b_1 \in \mathbb{R}$. ולכן שוב ע"פ הצפיפות של B ב$\mathbb{R}$, מכיוון ש $x < b_1 \in \mathbb{R}$, קיים $b_2 \in B$ כך ש:

$$x < b_2 < b_1 < y \quad (*)$$

מהיות A צפופה בB, לכל $b_x < b_y \in B$ קיים $a \in A$ כך ש:

$$b_x < a < b_y$$

ולכן ובהתבסס על (*), לכל $x < y \in \mathbb{R}$ קיים $a \in A$ כך ש:

$$\underbrace{x} < b_1 \underbrace{< a <} b_2 < \underbrace{y}$$

☺

2. **טענה**: אם A צפופה ב $(0,1)$ אז A צפופה ב $[0,1]$.
<u>הטענה נכונה</u>.

נרצה להראות שלכל $x < y \in [0,1]$ קיים $a \in A$ כך ש

$$0 \leq x < a < y \leq 1$$

ניקח את הממוצע הגיאומטרי של x, y וברור שמתקיים:

$$0 \leq x = \frac{x+x}{2} < \frac{x+y}{2} < \frac{y+y}{2} = y \leq 1$$

בנוסף ניקח את הממוצע הגיאומטרי של $y, \frac{x+y}{2}$:

$$\frac{\frac{x+y}{2} + y}{2} = \frac{x+y}{4} + \frac{y}{2} = \frac{x+3y}{4}$$

נשים לב ש:

$$\underbrace{0} \leq x \underbrace{< \frac{x+y}{2}} = \frac{2x+2y}{4} \underbrace{<}_{x<y} \underbrace{\frac{x+3y}{4}} \underbrace{<} \frac{y+3y}{4} = y \leq \underbrace{1}$$

מצאנו ש $\frac{x+y}{2} < \frac{x+3y}{4} \in (0,1)$ ולכן ע"פ הצפיפות של A ב $(0,1)$, קיים $a \in A$ כך ש:

$$0 \leq x < \frac{x+y}{2} < a < \frac{x+3y}{4} < y \leq 1$$

קיבלנו שלכל $x < y \in [0,1]$ קיים $a \in A$ כך ש

$$0 \leq x < a < y \leq 1$$

ולכן A צפופה ב $[0,1]$.
☺

3. **טענה**: אם A צפופה ב $\mathbb{R}$, אז $A\cap\mathbb{Q}$ צפופה ב$\mathbb{R}$ או $A\cap\mathbb{R}\backslash\mathbb{Q}$ צפופה ב$\mathbb{R}$.
<u>הטענה לא נכונה.</u>

נרצה להראות שקיימת קבוצה C צפופה ב$\mathbb{R}$ כך שהקבוצות $C\cap\mathbb{R}\backslash\mathbb{Q}$ <u>**וגם**</u> $C\cap\mathbb{Q}$ לא צפופות ב$\mathbb{R}$.
דוגמה נגדית - נתבונן על הקבוצות:

$$A=\{q\in\mathbb{Q}\mid q\in(-\infty,0]\}$$

$$B=\{r\in\mathbb{R}\backslash\mathbb{Q}\mid r\in[0,\infty)\}$$

$$C=A\cup B$$

ראשית, נשים לב כי $A=C\cap\mathbb{Q}$ וכי $B=C\cap\mathbb{R}\backslash\mathbb{Q}$.

הוכחנו בשיעור את צפיפות הרציונליים ב$\mathbb{R}$ ואת צפיפות האי רציונליים ב$\mathbb{R}$. אי לכך, קבוצה A צפופה בפרט ב$(-\infty,0]$ וקבוצה B צפופה בפרט ב$[0,\infty)$.
ברור שהקבוצה C מוגדרת על כל הישר הממשי, ומהיות קבוצה A צפופה בקטע $(-\infty,0]$ ומהיות קבוצה B צפופה בקטע $[0,\infty)$, הרי שקבוצה C צפופה ב

$$(-\infty,0]\cup[0,\infty)=(-\infty,\infty)$$

כלומר צפופה ב $\mathbb{R}$. <u>אבל</u>:
קבוצה A לא צפופה ב$\mathbb{R}$ כי ניקח למשל $x=1<2=y$. ברור כי $x,y\in\mathbb{R}$. אבל לא קיים $q\in A$ כך ש $x=1<q<2=y$.
ליתר דיוק, קיימים $x=1<2=y\in\mathbb{R}$ כך שלכל $q\in A$ מתקיים $q\le 1\le 2$ ולכן A לא צפופה ב$\mathbb{R}$.

בנוסף, גם קבוצה B לא צפופה ב$\mathbb{R}$ כי ניקח למשל $x=-2<-1=y$. ברור כי $x,y\in\mathbb{R}$. אבל לא קיים $r\in B$ כך ש $x=-2<r<-1=y$.
ליתר דיוק, קיימים $x=-2<-1=y\in\mathbb{R}$ כך שלכל $r\in A$ מתקיים $r\ge -2\ge -1$ ולכן B לא צפופה ב$\mathbb{R}$.

מצאנו קבוצה C שצפופה ב$\mathbb{R}$ אבל $C\cap\mathbb{R}\backslash\mathbb{Q}$ <u>**וגם**</u> $C\cap\mathbb{Q}$ לא צפופות ב$\mathbb{R}$.

4. **טענה**: הקבוצה $A=\left\{\frac{n}{m^2}\mid n\in\mathbb{Z},m\in\mathbb{N}\right\}$ צפופה ב $\mathbb{R}$.
<u>הטענה נכונה.</u>

הוכחה: יהיו $x,y\in\mathbb{R}$ כך ש $x<y$. מצפיפות הרציונליים קיימים $m_0\in\mathbb{N},n_0\in\mathbb{Z}$ כך ש

$$x<\frac{n_0}{m_0}<y \tag{1}$$

נשים לב כי

$$\frac{n_0}{m_0} < y \Rightarrow ym_0 - n_0 > 0$$

מתכונת ארכימדס, קיים $k \in \mathbb{N}$ כך ש

$$k > \frac{1}{\sqrt{m_0(ym_0 - n_0)}}$$

שני האגפים חיוביים ולכן נוכל להעלות אותם בריבוע בלי לפגוע באי השוויון.

$$k^2 > \frac{1}{m_0(ym_0 - n_0)}$$

$$yk^2m_0^2 - k^2m_0n_0 > 1$$

$$yk^2m_0^2 > 1 + k^2m_0n_0 \underset{m,k>0}{\Rightarrow}$$

$$y > \frac{1 + k^2m_0n_0}{k^2m_0^2} = \frac{k^2m_0n_0 + 1}{(km_0)^2}$$

מסגירות השלמים, מתקיים ש$k^2m_0n_0 + 1 \in \mathbb{Z}$ ונשים לב ש $km_0 \in \mathbb{N}$ ולכן $\frac{k^2m_0n_0+1}{(km_0)^2} \in A$
בנוסף:

$$\frac{k^2m_0n_0 + 1}{(km)^2} = \frac{1 + k^2m_0n_0}{k^2m_0^2} = \frac{1}{k^2m_0^2} + \frac{n_0}{m_0} > \frac{n_0}{m_0}$$

לכן:

$$x < \frac{n_0}{m_0} < \frac{k^2m_0n_0 + 1}{(km_0)^2} < y$$

כנדרש.
☺