חשבון אינפיניטסימלי 1 - תרגיל 7

גיא תגר 206260762 - קבוצה 2

1 שאלה 1.

תהי $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$

1. f אינה חסומה אם לכל $M\in\mathbb{R}$ קיים $x\in\mathbb{R}$ כך ש $|f(x)|>M$
2. $\lim\limits_{x\to-\infty}f(x)$ אינו $-\infty$ אם קיים $K<0$ כך שלכל $M<0$ קיים $x<M$ כך ש:

$$f(x)\geq K$$

2 שאלה 2.

1. מכיוון ש $x\to\infty$, נוכל לדרוש ש $x>1$ (מההגדרה). לכן $\lfloor x\rfloor\geq 1$ כלומר $\lfloor x\rfloor\in\mathbb{N}$ ונוכל לומר ש:

$$1+2+\ldots+\lfloor x\rfloor=\frac{\lfloor x\rfloor(\lfloor x\rfloor+1)}{2}$$

נחלק ב $x^2\neq 0$ ונקבל:

$$\frac{1}{x^2}+\frac{2}{x^2}+\ldots+\frac{\lfloor x\rfloor}{x^2}=\frac{\lfloor x\rfloor(\lfloor x\rfloor+1)}{2x^2},\ \ \forall x>1$$

הוכחנו בעבר ש:

$$(*)\ \ x-1\leq\lfloor x\rfloor\leq x$$

נכפיל את אי השוויון ב $\frac{\lfloor x\rfloor+1}{2x^2}$. הביטוי חיובי ולכן אי השוויון נשמר. נקבל:

$$\frac{x-1}{2x}=\frac{(x-1)\cancel{x}}{2x\cancel{^2}}\underset{x>1,*}{\leq}\frac{(x-1)(\lfloor x\rfloor+1)}{2x^2}\underset{*}{\leq}\underbrace{\frac{\lfloor x\rfloor(\lfloor x\rfloor+1)}{2x^2}}\underset{*}{\leq}\frac{\cancel{x}(\lfloor x\rfloor+1)}{2x\cancel{^2}}\underset{*}{\leq}\frac{x+1}{2x}$$

הגבול הימני

$$\lim_{x\to\infty}\frac{x+1}{2x}=\lim_{x\to\infty}\frac{1+\frac{1}{x}}{2}\underset{AOL}{=}\frac{1}{2}$$

הגבול השמאלי

$$\lim_{x\to\infty}\frac{x-1}{2x}=\lim_{x\to\infty}\frac{1-\frac{1}{x}}{2}\underset{AOL}{=}\frac{1}{2}$$

לכן לפי סנדוויץ':

$$\lim_{x\to\infty}\left(\frac{1}{x^2}+\frac{2}{x^2}+\ldots+\frac{\lfloor x\rfloor}{x^2}\right)=\lim_{x\to\infty}\frac{\lfloor x\rfloor\left(\lfloor x\rfloor+1\right)}{2x^2}=\frac{1}{2}$$

2. סטודנט A השתמש בכללי האריתמטיקה של גבולות בצורה לא נכונה. נשים לב שמספר המחוברים תלוי ב x, כלומר כאשר $x\to\infty$ מספר המחוברים גם שואף לאינסוף ולפיכך אי אפשר להשתמש באריתמטיקה של גבולות אינסוף פעמים, שהרי אינסוף הוא לא מספר. בנוסף, לא דיברנו על "גבולות של אריתמטיקה של גבולות".

3 שאלה 3.

יהיו $a<b$ ותהי $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ פונקציה עולה.

1. מהיות f עולה ב$[a,b]$, לכל $a<x\le b\iff x\in(a,b]$ מתקיים:

$$f\left(a\right)\le f\left(x\right)\le f\left(b\right)$$

כלומר הקבוצה $\{f\left(x\right)\mid a<x\le b\}$ חסומה מלרע ע"י $f\left(a\right)$. היא גם בוודאי לא ריקה ולכן לפי משפט החסם התחתון, קיים $\underline{s}\in\mathbb{R}$ כך ש:

$$\underline{s}=\inf\{f\left(x\right)\mid a<x\le b\}$$

☺

2. יהי $\varepsilon>0$. מהיות $\underline{s}$ חסם תחתון של הקבוצה, אזי מתכונת האפסילון שלו, קיים $a<x_1\le b$ כך ש $\underline{s}\le f\left(x_1\right)<\underline{s}+\boxed{\varepsilon}$. נבחר $0<\delta=\boxed{x_1-a}$ כך שלכל $a<\underbrace{x}_{}\underbrace{<}_{}a+\delta=\underbrace{x_1}_{}$ מתקיים:

$$\underbrace{\left|f\left(x\right)-\underline{s}\right|}_{}\underset{f(x)\ge\underline{s}}{=}f\left(x\right)-\underline{s}\underset{x<x_1}{\le}f\left(x_1\right)-\underline{s}\underbrace{<}_{}\underbrace{\varepsilon}_{}$$

☺

3. ניקח את הפונקציה:

$$f\left(x\right)=\begin{cases}x & 1<x\le2\\0 & x=1\end{cases}$$

מתקיים ש $f:[1,2]\to\mathbb{R}$ וכמו כן הפונקציה עולה בתחום זה. בנוסף:

$$\inf\{f(x)\mid 1\le x\le 2\}=\min\{f(x)\mid 1\le x\le 2\}=f(1)=0$$

אבל

$$\lim_{x\to 1^+} f(x)\underset{x>1}{=}\lim_{x\to 1^+} x\underset{AOL}{=}1\ne 0=\inf\{f(x)\mid 1\le x\le 2\}$$

כנדרש.

4 שאלה 4.

יהי $\varepsilon>0$. מהיות $\lim\limits_{x\to x_0} h(x)=L$, קיים δ_1 כך שלכל $0<|x-x_0|<\delta_1$ מתקיים:

$$(*)\,|h(x)-L|<\frac{\varepsilon}{2}\Rightarrow \underbrace{f(x)}\le h(x)\underbrace{<}\underbrace{L+\frac{\varepsilon}{2}}$$

וגם:

$$\underbrace{L-\frac{\varepsilon}{2}}\underbrace{<}h(x)\le\underbrace{g(x)}$$

מהיות $\lim\limits_{x\to x_0}[g(x)-f(x)]=0$, קיים δ_2 כך שלכל $0<|x-x_0|<\delta_2$ מתקיים:

$$(**)\,|g(x)-f(x)|<\frac{\varepsilon}{2}\iff -\frac{\varepsilon}{2}<g(x)-f(x)<\frac{\varepsilon}{2}$$

ניקח $\delta=\min\{\delta_1,\delta_2\}$ כך שלכל $0<|x-x_0|<\delta$ מתקיים:

$$\underbrace{L-\varepsilon}\underset{*}{<}g(x)-\frac{\varepsilon}{2}\underset{**}{<}\underbrace{f(x)}\le\underbrace{g(x)}\underset{**}{<}f(x)+\frac{\varepsilon}{2}\underset{*}{<}\underbrace{L+\varepsilon}$$

כלומר:

$$|f(x)-L|<\varepsilon$$

וגם

$$|g(x)-L|<\varepsilon$$

ולכן:

$$\lim_{x\to x_0} g(x)=\lim_{x\to x_0} f(x)=L$$

☺

5 שאלה 5.

1. **טענה**: קיימת פונקציה $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ כך ש $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{f(x)}{x}=3$ וגם $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{f(x)\cdot\sin(x)}{x^2}=6$.
<u>הטענה לא נכונה</u>.

נניח בשלילה שקיימת פונקציה כזאת, לכן:

$$\underbrace{6}=\lim_{x\to\infty}\frac{f(x)\cdot\sin(x)}{x^2}\underbrace{=}\lim_{x\to\infty}\frac{f(x)}{x}\cdot\sin(x)\cdot\frac{1}{x}\underset{B\times V,AOL}{=}3\cdot 0=\underbrace{0}$$

סתירה.

2. **טענה**: תהיינה f,g פונקציות המוגדרות בסביבה מנוקבת של 0 ונניח ש $xf(x)\le g(x)\le x$ לכל x בסביבה זו. אזי $\lim\limits_{x\to 0}g(x)=0$.
<u>הטענה לא נכונה</u>. דוגמא נגדית:

נביט על הפונקציות $g(x)=-1$, $f(x)=-\frac{1}{x}$. הן בוודאי מוגדרות בסביבה מנוקבת של 0 ובסביבה זו מתקיים:

$$\underbrace{xf(x)}=-\frac{1}{x}\cdot x\underset{x\neq 0}{=}-1\le -1=\underbrace{g(x)}\underset{*}{\le}\underbrace{x}$$

* מכיוון שמדובר בסביבה מנוקבת של 0, מספיק $0<\delta<1$ כך שאי השוויון יתקיים.
אבל:

$$\lim_{x\to 0}g(x)=\lim_{x\to 0}-1\underset{AOL}{=}-1\neq 0$$

3. **טענה**: תהיינה f,g פונקציות המוגדרות בסביבה מנוקבת של $x_0\in\mathbb{R}$. אם $g(x)\neq 0$ לכל x בסביבה זו ו $\lim\limits_{x\to x_0}\frac{f(x)}{g(x)}=1$, אזי $\lim\limits_{x\to x_0}[f(x)-g(x)]=0$.
<u>הטענה לא נכונה</u>.

דוגמא נגדית - ניקח $f(x)=1+\frac{1}{x}$, $g(x)=\frac{1}{x}$ בסביבה מנוקבת של 0. מתקיים:

$$\lim_{x\to 0}\frac{f(x)}{g(x)}=\lim_{x\to 0}\frac{1+\frac{1}{x}}{\frac{1}{x}}=\lim_{x\to 0}\frac{\frac{x+1}{x}}{\frac{1}{x}}=\lim_{x\to 0}(x+1)\underset{AOL}{=}1$$

כנדרש, אבל:

$$\lim_{x\to 0}[f(x)-g(x)]=\lim_{x\to 0}\left[1+\frac{1}{x}-\frac{1}{x}\right]=\lim_{x\to 0}1\underset{AOL}{=}1\neq 0$$

4. **טענה**: תהיינה f,g פונקציות המוגדרות בתחום $[a,\infty)$ כאשר $a\in\mathbb{R}$.
אם $\lim\limits_{x\to\infty}[f(x)\cdot g(x)]=\infty$, אזי $\lim\limits_{x\to\infty}|f(x)|=\infty$ או $\lim\limits_{x\to\infty}|g(x)|=\infty$

<u>הטענה נכונה</u>

נניח בשלילה ש $\lim_{x\to\infty}|f(x)|\neq\infty$ <u>וגם</u> $\lim_{x\to\infty}|g(x)|\neq\infty$. לכן קיים $0<K_1$ כך שלכל $M>0$ קיים $x>M$ כך ש:

$$|f(x)|\leq K_1$$

בנוסף, קיים $0<K_2$ כך שלכל $M>0$ קיים $x>M$ כך ש:

$$|g(x)|\leq K_2$$

ניקח $K=\max\{K_1,K_2\}$ כך שלכל $M>0$ קיים $x>M$ כך ששני התנאים לעיל מתקיימים. נשים לב שכל האגפים חיוביים ולכן נוכל לכפול את אי שוויונים ולקבל:

$$|f(x)|\cdot|g(x)|\leq K^2$$

וזו סתירה לנתון ש $\lim_{x\to\infty}[f(x)\cdot g(x)]=\infty$.
הסבר - מהיות $\lim_{x\to\infty}[f(x)\cdot g(x)]=\infty$, <u>קיים</u> $M>0$ כך שלכל $x>M$ מתקיים:

$$\underbrace{|f(x)|\cdot|g(x)|}=|f(x)\cdot g(x)|\underset{K>0}{=}f(x)\cdot g(x)\underbrace{>}K^2$$

☺