חשבון אינפיניטסימלי 1 - תרגיל 5

גיא תגר - קבוצה 2

1 שאלה 1.

1. יהי $\varepsilon>0$. ניקח $\boxed{\delta=\min\{1,6\varepsilon\}}$ כך שלכל $0<|x-3|<\delta$ מתקיים:

$$\underbrace{\left|\left|2-\frac{1}{x}\right|-\frac{5}{3}\right|}=\left|\left|2-\frac{1}{x}\right|-\left|\frac{5}{3}\right|\right|\overset{\Delta_2}{\leq}\left|2-\frac{1}{x}-\frac{5}{3}\right|=\left|\frac{1}{3}-\frac{1}{x}\right|=\left|\frac{x-3}{3x}\right|=$$

$$\frac{|x-3|}{|3x|}\underbrace{<}\delta\cdot\frac{1}{|3x|}\underset{*}{\leq}\frac{\delta}{6}\leq\underbrace{\varepsilon}$$

* נשים לב ש:

$$|x-3|<\delta\iff 3-\delta<x<3+\delta$$

נכפיל ב3, עבור $\delta\leq 1$:

$$6<3x<12$$

ניתן לראות שהביטוי חיובי בתחום ולכן $|3x|=3x$ ונוכל לומר ש:

$$\frac{1}{|3x|}<\frac{1}{6}$$

2. יהי $\varepsilon>0$. ניקח $\boxed{\delta=\min\left\{1,\frac{5\varepsilon}{8}\right\}}$ כך שלכל $0<|x+3|<\delta$ מתקיים:

$$\left|\frac{x^2-5x}{x-3}+4\right|=\left|\frac{x^2-5x+4x-12}{x-3}\right|=\left|\frac{x^2-x-12}{x-3}\right|=\left|\frac{(x+3)\,(x-4)}{x-3}\right|=$$

$$\frac{|x+3|\,|x-4|}{|x-3|}<\delta\cdot\frac{|x-4|}{|x-3|}\underset{*}{\leq}\frac{8\delta}{|x-3|}\underset{**}{\leq}\frac{8}{5}\delta\leq\varepsilon$$

* מתקיים:

$$|x-4|=|x+3-7|\overset{\Delta}{\leq}|x+3|+7<\delta+7\underset{\delta\leq 1}{\leq}8$$

** מתקיים:

$$|x+3|<\delta \iff -\delta<x+3<\delta \underset{-6}{\Rightarrow}$$

$$-7 \underset{\delta\leq 1}{\leq} -\delta-6<x-3<\delta-6 \underset{\delta\leq 1}{\leq} -5$$

ניתן לראות שהביטוי שלילי בתחום ולכן $|x-3|=-(x-3)$. נכפיל במינוס אחד ונקבל:

$$5\leq |x-3|=-(x-3)\leq 7 \Rightarrow$$

$$\frac{1}{|x-3|}\leq \frac{1}{5}$$

2 שאלה 2.

.1 :

$$\lim_{x\to 2}\frac{\sqrt{2x^2+8}-4}{(x-2)(x^2+2x+4)}=\lim_{x\to 2}\frac{\sqrt{2x^2+8}-4}{(x-2)(x^2+2x+4)}\cdot\frac{\sqrt{2x^2+8}+4}{\sqrt{2x^2+8}+4}=$$

$$\lim_{x\to 2}\frac{2\left(x^2-4\right)}{\left(\sqrt{2x^2+8}+4\right)(x-2)(x^2+2x+4)}=\lim_{x\to 2}\frac{2\cancel{(x-2)}(x+2)}{\left(\sqrt{2x^2+8}+4\right)\cancel{(x-2)}(x^2+2x+4)}=$$

$$\lim_{x\to 2}\frac{2(x+2)}{\left(\sqrt{2x^2+8}+4\right)(x^2+2x+4)}\underset{AOL}{=}\frac{\cancel{8}}{\cancel{8}\cdot 12}=\frac{1}{12}$$

.2 :

$$\lim_{x\to 1}\left(\frac{2}{1-x^2}-\frac{3}{1-x^3}\right)=\lim_{x\to 1}\left(\frac{2}{(1-x)(1+x)}-\frac{3}{(1-x)(1+x+x^2)}\right)=$$

$$\lim_{x\to 1}\frac{2\left(1+x+x^2\right)-3(1+x)}{(1-x)(1+x)(1+x+x^2)}=\lim_{x\to 1}\frac{2+2x+2x^2-3-3x}{(1-x)(1+x)(1+x+x^2)}=$$

$$\lim_{x\to 1}\frac{2x^2-x-1}{(1-x)(1+x)(1+x+x^2)}=\lim_{x\to 1}\frac{(2x+1)(x-1)}{(1-x)(1+x)(1+x+x^2)}=$$

$$\lim_{x\to 1}\frac{-(2x+1)\cancel{(1-x)}}{\cancel{(1-x)}(1+x)(1+x+x^2)}=\lim_{x\to 1}\frac{-(2x+1)}{(1+x)(1+x+x^2)}\underset{AOL}{=}-\frac{3}{2\cdot 3}=-\frac{1}{2}$$

3. :

$$\lim_{x\to-\infty}\left(\sqrt{4x^2-6x}-\sqrt{4x^2-8x}\right)=\lim_{x\to-\infty}\left(\frac{\left(4x^2-6x\right)-\left(4x^2-8x\right)}{\sqrt{4x^2-6x}+\sqrt{4x^2-8x}}\right)=$$

$$\lim_{x\to-\infty}\frac{2x}{\sqrt{4x^2-6x}+\sqrt{4x^2-8x}}=\lim_{x\to-\infty}\frac{2x}{2\left|x\right|\sqrt{1-\frac{1.5}{x}}+2\left|x\right|\sqrt{1-\frac{2}{x}}}\underset{x<M<0}{=}$$

$$\lim_{x\to-\infty}\frac{\cancel{2x}}{-\cancel{2x}\sqrt{1-\frac{1.5}{x}}-\cancel{2x}\sqrt{1-\frac{2}{x}}}=\lim_{x\to-\infty}\frac{1}{-\left(\sqrt{1-\frac{1.5}{x}}+\sqrt{1-\frac{2}{x}}\right)}\underset{AOL}{=}-\frac{1}{2}$$

3 שאלה 3.

תהי $A\subseteq\mathbb{R}$ ויהיו $a,b\in\mathbb{R}$. נניח ש $A,\mathbb{R}\backslash A$ צפופות ב $\mathbb{R}$ וש $a\neq b$. תהי $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ מוגדרת ע"י:

$$f\left(x\right)=\begin{cases}a & x\in A\\ b & x\notin A\end{cases}$$

נראה ש $\lim_{x\to\infty}f\left(x\right)$ לא קיים.

נניח בשלילה שקיים $L\in\mathbb{R}$ כך ש $\lim_{x\to\infty}f\left(x\right)=L$. לכן קיים $M>0$ כך שלכל $x>M$ מתקיים:

$$\left|f\left(x\right)-L\right|<\boxed{\frac{\left|a-b\right|}{2}}$$

נשים לב ש $\varepsilon\neq0$ מכיוון ש $a\neq b$.
מהצפיפות של A ב $\mathbb{R}$, קיים $M<x_1\in A$ כך ש:

$$\left|f\left(x_1\right)-L\right|=\left|a-L\right|<\frac{\left|a-b\right|}{2}$$

מהצפיפות של $\mathbb{R}\backslash A$ ב $\mathbb{R}$, קיים $M<x_2\notin A$ כך ש:

$$\left|f\left(x_2\right)-L\right|=\left|b-L\right|<\frac{\left|a-b\right|}{2}$$

אבל:

$$\underbrace{\left|a-b\right|}=\left|\left(a-L\right)+\left(L-b\right)\right|\overset{\Delta}{\leq}\left|a-L\right|+\left|b-L\right|\underbrace{<}\frac{\left|a-b\right|}{2}+\frac{\left|a-b\right|}{2}=\underbrace{\left|a-b\right|}$$

סתירה.
☺

4 שאלה 4.

1. **טענה:** $\lim\limits_{x\to x_0} f\left(x\right)=L$ אם ורק אם לכל $0\neq\alpha\in\mathbb{R}$ $\lim\limits_{x\to x_0}\left[\alpha\cdot f\left(x\right)\right]=\alpha\cdot L$

הטענה נכונה.

$(\Leftarrow)$ נניח ש $\lim\limits_{x\to x_0} f\left(x\right)=L$. מהיות α קבוע, מתקיים $\lim\limits_{x\to x_0}\alpha=\alpha$ לפי אש"ג בסיס. מתקיים:

$$\underbrace{\lim_{x\to x_0}\left[\alpha\cdot f\left(x\right)\right]}\underset{AOL}{=}\lim_{x\to x_0}\alpha\cdot\lim_{x\to x_0}f\left(x\right)\underbrace{=}_{AOL}\underbrace{\alpha\cdot L}$$

$(\Rightarrow)$ נניח ש $\lim\limits_{x\to x_0}\left[\alpha\cdot f\left(x\right)\right]=\alpha\cdot L$. מתקיים:

$$\lim_{x\to x_0}f\left(x\right)\underset{\alpha\neq 0}{=}\lim_{x\to x_0}\left[\frac{\alpha\cdot f\left(x\right)}{\alpha}\right]\underset{AOL}{=}\frac{\lim\limits_{x\to x_0}\left[\alpha\cdot f\left(x\right)\right]}{\lim\limits_{x\to x_0}\alpha}\underset{AOL}{=}\frac{\cancel{\alpha}L}{\cancel{\alpha}}\underbrace{=}L$$

☺

2. **טענה:** אם $\lim\limits_{x\to x_0}\left[f\left(x\right)+g\left(x\right)\right]=L$ אזי $\lim\limits_{x\to x_0}f\left(x\right),\ \lim\limits_{x\to x_0}g\left(x\right)$ קיימים או $\lim\limits_{x\to x_0}f\left(x\right),\ \lim\limits_{x\to x_0}g\left(x\right)$ לא קיימים.

הטענה נכונה.

נניח בשלילה, בלי הגבלת הכלליות ש $\lim\limits_{x\to x_0}f\left(x\right)=L_1$ ו $\lim\limits_{x\to x_0}g\left(x\right)$ לא קיים. (כלומר אחד הגבולות קיים והשני לא קיים). נשים לב ש:

$$\underbrace{\lim_{x\to x_0}g\left(x\right)}=\lim_{x\to x_0}\left[g\left(x\right)+f\left(x\right)-f\left(x\right)\right]\underset{AOL}{=}$$

$$\lim_{x\to x_0}\left[g\left(x\right)+f\left(x\right)\right]-\lim_{x\to x_0}f\left(x\right)\underset{AOL}{=}\underbrace{L-L_1}$$

בסתירה לכך ש $\lim\limits_{x\to x_0}g\left(x\right)$ לא קיים.

☺

3. **טענה:** תהי $h:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$. אם $\lim\limits_{x\to a}h\left(x\right)=L$ לכל $a\in\mathbb{R}$, אזי $h\left(x\right)=L$ לכל $x\in\mathbb{R}$.

הטענה לא נכונה.

נרצה לחפש פונקציה קבועה עם נקודת אי רציפות, ויחד עם זאת מוגדרת לכל $x\in\mathbb{R}$. דוגמה נגדית - יהיו $x,a\in\mathbb{R}$. ניקח את הפונקצייה:

$$h\left(x\right)=\begin{cases}1 & x\neq a\\ 2 & x=a\end{cases}$$

ברור שתחום ההגדרה הוא $\mathbb{R}$. מאש"ג בסיס, לכל $a\in\mathbb{R}$ מתקיים:

$$\lim_{x\to a}h\left(x\right)\underset{*}{=}\lim_{x\to a}1\underset{AOL}{=}1$$

*מכיוון ש־x נמצא בסביבה מנוקבת של a, אזי $x\neq a$.
אבל עבור $x=a$:

$$h\left(a\right)=2\neq1=L$$

קיבלנו ש $\lim_{x\to a}h\left(x\right)=1$ לכל $a\in\mathbb{R}$ אבל קיים $x\in\mathbb{R}$ כך ש $h\left(x\right)\neq1$.
☺

5 שאלה 5.

תהי $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ ויהי $m\in\mathbb{R}$. נסתכל על הקבוצה:

$$A=\left\{ x\in[a,b)\mid f\left(x\right)>m\right\}$$

1. נניח ש $A\neq\phi$ ונראה ש $\underline{s}=\inf\left(A\right)$ קיים וכי $a\leq\underline{s}<b$.
מהגדרת הקבוצה נובע שהיא חסומה מלרע ע"י a (הוא לא בהכרח המינימום מכיוון שיש תנאי נוסף). בנוסף הקבוצה לא ריקה ולכן על פי משפט החסם התחתון (הוכחנו בעבר) יש לה אינפימום, כלומר קיים $\inf\left(A\right)=\underline{s}$.

מהיות $\underline{s}$ החסם מלרע המקסימלי ומהיות a חסם מלרע, מתקיים:

$$a\leq\underline{s}$$

בנוסף b חסם מלעיל של A (הוא בהכרח לא המקסימום מכיוון שהוא לא שייך לקבוצה ללא תלות בתנאי הנוסף) ולכן מתקיים:

$$a\leq\underline{s}<b$$

2. יהי $L\in\mathbb{R}$ ונניח ש $\lim_{x\to\underline{s}}f\left(x\right)=L$. נוכיח כי $L\geq m$.

נניח בשלילה ש $L<m$. נשים לב שזה גורר $m-L>0$. מהיות L גבול של f ב $\underline{s}$, קיים $\delta_{1}>0$ כך שלכל $0<\left|x-\underline{s}\right|<\delta_{1}$, מתקיים:

$$\left|f\left(x\right)-L\right|<\boxed{m-L}\iff$$

$$L-\left(m-L\right)<f\left(x\right)<L+\left(m-L\right)$$

ובפרט:

$$f\left(x\right)<m$$

וזו סתירה. אפרט מדוע:

נתון ש $\underline{s} \notin A$ וש A אינה קבוצה ריקה.
מתכונת האפסילון של החסם התחתון, קיים $x_1 \in A$ כך ש:

$$x_1 < \underline{s} + \boxed{\delta_1}$$

מכיוון ש $\underline{s} \notin A$, מתקיים:

$$x_1 > \underline{s}$$

כלומר קיבלנו ש:

$$x_1 \in (\underline{s}, \underline{s} + \delta_1)$$

זה גם אומר בפרט ש:

$$x_1 \in (\underline{s} - \delta_1, \underline{s} + \delta_1) \setminus \{\underline{s}\} \iff 0 < |x_1 - \underline{s}| < \delta_1$$

לפיכך מהנחת השלילה שלנו מתקיים:

$$f(x_1) < m$$

אבל $x_1 \in A$ (ראינו), לכן הוא מקיים:

$$f(x_1) > m$$

כאמור, סתירה.
☺