# חשבון אינפיניטסימלי 1 - תרגיל 2

גיא תגר - קבוצה 2

## 1 שאלה 1.

יהי $p > 1$ מספר ראשוני. נוכיח כי $\sqrt[3]{p} \in \mathbb{R}\backslash\mathbb{Q}$.

נניח בשלילה ש $\sqrt[3]{p} \in \mathbb{Q}$. לכן קיימים $m, n \in \mathbb{Z}$ כאשר $m \neq 0$ כך ש:

$$\sqrt[3]{p} = \frac{n}{m} \Rightarrow p = \frac{n^3}{m^3} \Rightarrow pm^3 = n^3 \tag{1}$$

ובנוסף ש $\frac{m}{n}$ הוא שבר מצומצם. נגדיר מה זה מחלק ונוכיח משפט עזר.

**הגדרה 1.1** : יהיו $a, b \in \mathbb{Z}$. נאמר כי $a|b$ אם קיים $k \in \mathbb{Z}$ כך ש $b = k \cdot a$

**משפט 2.1** : יהי $1 < q \in \mathbb{N}$ מספר ראשוני ויהיו $a, b \in \mathbb{Z}$. נניח כי $q|(a \cdot b)$, אזי $q|a$ או $q|b$.
**הוכחה**: הוכחנו בכיתה.

נחזור ל (1). מהיות $1 < p \in N$, מתקיים בפרט ש $p \in \mathbb{Z}$. כמו כן מסגירות השלמים נובע כי $n^3 \in \mathbb{Z}$, ולכן נוכל להשתמש בהגדרה 1.1. ננסה להראות ש $p|n$

$$p|n^3 \underset{(2.1)}{\Rightarrow} p|n^2 \textbf{ or } p|n$$

אם $p|n$ אז הוכחנו. אבל אם $p|n^2$ אז:

$$p|n^2 \underset{(2.1)}{\Rightarrow} p|n \textbf{ or } p|n$$

כלומר הראינו ש $p|n$. לכן קיים $k \in \mathbb{Z}$ כך ש $n = k \cdot p$. נציב ב(1):

$$pm^3 = (kp)^3 = k^3p^3 \underset{p>1}{\Rightarrow} m^3 = p \cdot (pk^3)$$

כלומר $p|m^3$. אותם התנאים חלים, לכן באופן דומה זה גורר ש $p|m$.
קיבלנו כי $p|m$ וגם $p|n$, בסתירה לכך ש$\frac{m}{n}$ הוא שבר מצומצם.
☻

## 2 שאלה 2.

תהי $\phi \neq A \subseteq \mathbb{R}$.

**משפט 1.2 (החסם התחתון):** נניח כי $A$ חסומה מלרע. אזי יש לה חסם תחתון יחיד ונסמנו $\underline{s} \in \mathbb{R}$.

**הוכחה:** נביט בקבוצה $B = \{m \in \mathbb{R} \mid m \leq a,\ \forall a \in A\}$ קבוצת כל החסמים מלרע של $A$.
נשים לב כי $B \subseteq \mathbb{R}$ וגם מהיות $A$ חסומה מלרע, מתקיים ש $B \neq \phi$.
כמו כן, מההגדרה נובע שלכל $m \in B$ ולכל $a \in A$ מתקיים $m \leq a$ ולכן $B \leq A$.

לצורך ההמשך, נגדיר את אקסיומת השלמות:
**אקסיומה (השלמות):** תהיינה $\phi \neq A, B \subseteq \mathbb{R}$. נניח כי $A \leq B$, אזי קיים $c \in \mathbb{R}$ כך ש $a \leq c \leq b$ לכל $a \in A,\ b \in B$.

נחזור להוכחה. הסקנו כי $A, B \neq \phi$ ו $B \leq A$. לכן מאקסיומת השלמות קיים $\underline{s} \in \mathbb{R}$ כך ש $m \overset{**}{\leq} \underline{s} \overset{*}{\leq} a$ , $\forall a \in A, \forall m \in B$. כעת נוכיח כי $\underline{s}$ חסם תחתון של $A$:

- $\underline{s}$ חסם מלרע של $A$: לכל $a \in A$, מתקיים $\underline{s} \leq a$ מ $(*)$
- $\underline{s}$ מקסימלי: לכל חסם מלרע $m \in \mathbb{R}$ של $A$ מתקיים $m \leq \underline{s}$ מ $(**)$

כעת נוכיח כי הוא יחיד וסיימנו. נניח ש $\underline{s}, \underline{\underline{s}} \in \mathbb{R}$ חסמים תחתונים של $A$ ונוכיח ש $\underline{s} = \underline{\underline{s}}$.

מהיות $\underline{s}$ חסם מלרע ו$\underline{\underline{s}}$ מקסימלי, מתקיים $\underline{s} \leq \underline{\underline{s}}$.
מהיות $\underline{\underline{s}}$ חסם מלרע ו$\underline{s}$ מקסימלי, מתקיים $\underline{\underline{s}} \leq \underline{s}$.
לכן $\underline{s} = \underline{\underline{s}}$.

☻

**משפט 2.2 (תכונת ה $\varepsilon$ של החסם התחתון):** תהי $\phi \neq A \subseteq \mathbb{R}$ קבוצה חסומה מלרע ויהי $\underline{s} \in \mathbb{R}$ חסם מלרע של $A$. נאמר ש $\underline{s} = inf\,(A)$ אם"ם לכל $\varepsilon > 0$ קיים $a \in A$ כך ש $a < \underline{s} + \varepsilon$.

**הוכחה:**
$(\Leftarrow)$ נניח ש $\underline{s} = inf(A)$. ולכן מקיים $\underline{s} \leq a,\ \forall a \in A$. יהי $\varepsilon > 0$. נראה שקיים $a \in A$ כך ש $a < \underline{s} + \varepsilon$.
נניח בשלילה שקיים $\varepsilon > 0$ כך שלכל $a \in A$ מתקיים $a \geq \underline{s} + \varepsilon$. אזי $\underline{s} + \varepsilon$ הוא חסם מלרע של $A$ ובנוסף $\underline{s} + \varepsilon \underset{\varepsilon > 0}{>} \underline{s}$, בסתירה לכך ש $\underline{s}$ הוא האינפימום (החסם התחתון).

$(\Rightarrow)$ נניח שלכל $\varepsilon > 0$ קיים $a \in A$ כך ש $a < \underline{s} + \varepsilon$. נרצה להראות ש $\underline{s} = inf(A)$.
נניח בשלילה שקיים $m \in \mathbb{R}$ חסם מלרע של $A$ הגדול יותר מ $\underline{s}$, כלומר:

$$m > \underline{s} \Rightarrow m - \underline{s} > 0$$

ניקח $0 < \varepsilon = m - \underline{s}$ ונקבל שקיים $a \in A$ כך ש:

$$\underbrace{a <} \underline{s} + \varepsilon = \underline{s} + (m - \underline{s}) = \underbrace{m}$$

בסתירה לכך ש $m$ חסם מלרע של $A$.
☻

נניח ש $A$ חסומה מלרע.

**טענה 3.2** : $inf(A) \in A$ אם"ם קיים איבר מינימלי ב$A$.
הטענה נכונה.

($\Leftarrow$) נניח ש $inf(A) \in A$. מתכונת האינפימום, הוא בפרט חסם מלרע של $A$ ולכן מקיים $inf(A) \le a, \ \forall a \in A$. מהיותו שייך לקבוצה, הוא האיבר המינימלי ב $A$ ולכן בפרט, קיים איבר מינימלי ב$A$.

($\Rightarrow$) נניח שקיים איבר מינימלי ב$A$ ונקרא לו $\underline{a} \in A$. נראה שהוא האינפימום. מהיותו המינימום, הוא בפרט חסם מלרע של $A$.
יהי $m \in \mathbb{R}$ חסם מלרע של $A$. אזי $m \le \underline{a}$ בגלל ש $\underline{a} \in A$. לכן $\underline{a}$ הוא החסם מלרע המקסימלי של $A$, כלומר $\underline{a} = inf(A)$ ובפרט, $inf(A) \in A$.

# 3 שאלה 3.

1. נראה כי $inf(A) \Rightarrow min(A) = (-\frac{3}{5})$:

$$x \ge 0 \Rightarrow 2x-3 \ge -3 \underset{3x+5>0}{\Rightarrow} \underbrace{\frac{2x-3}{3x+5}} \ge -\frac{3}{3x+5} \underset{x \ge 0}{\ge} \underbrace{-\frac{3}{5}}$$

כלומר $-\frac{3}{5}$ הוא חסם מלרע של $A$. בנוסף הוא מתקבל כאשר $x=0$ ולכן $-\frac{3}{5} \in A$.
אם הוא חסם מלרע והוא שייך לקבוצה, אז הוא המינימום ובפרט גם האינפימום.
כלומר $min\,(A) \Rightarrow inf(A) = -\frac{3}{5}$.
כעת נרצה להראות ש $sup(A) = \frac{2}{3}$. ראשית נראה שהוא חסם מלעיל של $A$.

$$\frac{2x-3}{3x+5} \le \frac{2x}{3x+5} \le \frac{2x}{3x} \underset{x \ne 0*}{=} \frac{2}{3}$$

*אם $x=0$ הטענה ברורה $-\frac{3}{5} \le \frac{2}{3}$. הפיצול למקרים הכרחי כדי לצמצם את $x$.

הראינו ש $\frac{2}{3}$ הוא חסם מלעיל של $A$. נראה ש $sup(A) = \frac{2}{3}$.
לפי תכונת ה$-\varepsilon$ של החסם העליון (הוכחנו בכיתה, או לפי משפט 2.2 בה"כ), נרצה להראות שלכל $\varepsilon > 0$ קיים $x \ge 0$ כך ש $\frac{2x-3}{3x+5} > \frac{2}{3} - \varepsilon$.
ובכן, יהי $\varepsilon > 0$. קיים $x = max\{0, \frac{19-15\varepsilon}{9\varepsilon} + 1\}$. נובע כי $x \ge 0$ כך שהאיבר שייך לקבוצה. כמו כן מתקיים:

$$x > \frac{19-15\varepsilon}{9\varepsilon} \Rightarrow 9\varepsilon x > 19 - 15\varepsilon \Rightarrow 3\varepsilon(3x+5) > 19 \Rightarrow$$

$$\underbrace{\varepsilon >} \frac{19}{3(3x+5)} = \frac{6x+9-6x+10}{3(3x+5)} = \frac{9-6x}{3(3x+5)} + \frac{10+6x}{3(3x+5)} =$$

$$\frac{3(3-2x)}{3(3x+5)}+\frac{2(3x+5)}{3(3x+5)}=\underbrace{\frac{3-2x}{3x+5}+\frac{2}{3}}\Rightarrow \boldsymbol{\frac{2x-3}{3x+5}>\frac{2}{3}}-\varepsilon$$

כעת נוכיח שאין ל $A$ מקסימום. מהיות $\frac{2}{3}$ הסופרמום, מספיק להראות שאין איבר בקבוצה ששווה אליו:

$$\frac{2x-3}{3x+5}=\frac{2}{3}\Rightarrow 6x-9=6x+10\Rightarrow \boldsymbol{-9=10}$$

אין אף $x$ שיקיים את המשוואה ולכן ל $A$ אין מקסימום.

2. ראשית נגדיר:

$$(-1)^n=\begin{cases}1 & 2|n\\ -1 & 2|(n+1)\end{cases}$$

נראה כי $max(A)\Rightarrow sup(A)=1.5$. ננסה למצוא איבר בקבוצה שגדול ממנו. $n\in\mathbb{N}$ ולכן נוכל להשתמש בהגדרה 1.1. אם $2|n$:

$$\frac{1}{n}+(-1)^n=\frac{1}{n}+1>1.5\Rightarrow\frac{1}{n}>\frac{1}{2}\Rightarrow \boldsymbol{n<2}$$

אבל לא קיים מספר טבעי זוגי שקטן יותר מ2, ולכן לא קיים $n$ כזה.
כאשר $2|(n+1)$:

$$\frac{1}{n}+(-1)^n=\frac{1}{n}-1>1.5\Rightarrow\frac{1}{n}>\frac{5}{2}\Rightarrow \boldsymbol{n<\frac{2}{5}}$$

וזו סתירה לכך ש $n\in\mathbb{N}$.
נשים לב ש$1.5$ מתקבל עבור $n=2$ ולכן הוא איבר בקבוצה. בנוסף הראינו שכל איברי הקבוצה קטנים ממנו ולכן הוא המקסימום ובפרט, גם הסופרמום.

כעת נראה ש $inf(A)=-1$. עבור כל $n\in\mathbb{N}$ מתקיים:

$$\frac{1}{n}+(-1)^n\geq\frac{1}{n}-1\underset{\frac{1}{n}>0}{\geq}-1$$

כלומר $-1$ הוא חסם מלרע של $A$. כעת נוכיח שהוא האינפימום.
עבור $n$ זוגי, מתקיים:

$$\frac{1}{n}+(-1)^n\underset{2|n}{=}\frac{1}{n}+1\underset{\frac{1}{n}>0}{>}1$$

כלומר $1$ הוא חסם מלרע כאשר $n$ זוגי. אך יש איברים בקבוצה שקטנים מ1 ולכן אינו חסם מלרע של הקבוצה. כעת נבדוק עבור $n$ אי־זוגי.
לפי תכונת האפסילון של החסם התחתון, נרצה להראות שלכל $\varepsilon>0$ קיים $n\in\mathbb{N}$ אי־זוגי, כך ש $\frac{1}{n}+(-1)^n<-1+\varepsilon$

לפי תכונת ארכימדס ההפוכה (הוכחנו בכיתה), לכל $\varepsilon > 0$ קיים $n \in \mathbb{N}$ כך ש:

$$\frac{1}{n} < \varepsilon \Rightarrow \underbrace{\frac{1}{n} + (-1)^n} \underbrace{<} \varepsilon + (-1)^n \underset{2|(n+1)}{=} \varepsilon - 1 = \underbrace{-1 + \varepsilon}$$

כנדרש.

3. נניח בשלילה ש $A$ חסומה מלעיל. אזי קיים $M > 2$ כך שלכל $x \in A$ מתקיים $a + \frac{1}{a} \leq M$.
נביט על $0 < 2 < a = M \in \mathbb{R}$ ולכן מתקיים ש $M + \frac{1}{M} \in A$. אבל:

$$x = M + \frac{1}{M} \underset{\frac{1}{M} > 0}{>} M$$

וזו סתירה לכך ש $M$ חסם מלעיל של $A$. כלומר $sup\,(A) = \infty$ ולא קיים איבר מקסימלי.

כעת נראה כי $min\,(A) \Rightarrow inf\,(A) = 2$.
נשים לב כי עבור $0 < a = 1$ מתקיים $1 + \frac{1}{1} = 2$ כלומר 2 הוא איבר בקבוצה. כעת נוכיח שאין איבר שקטן ממנו. לשם כך נניח בשלילה שקיים איבר שקטן ממנו ולכן מקיים:

$$a + \frac{1}{a} < 2 \underset{a>0}{\Rightarrow} a^2 - 2a + 1 < 0 \Rightarrow (a-1)^2 < 0$$

אבל $y^2 \geq 0$ (ריבוע של מספר הוא אי־שלילי) ולכן לא קיים $a \in \mathbb{R}$ שיקיים את המשוואה.

# 4 שאלה 4.

תהיינה $\phi \neq A, B \subseteq \mathbb{R}$.

1. נניח ש $A \leq B$. נראה כי $sup\,(A) \leq inf\,(B)$.

מאקסיומת השלמות (התנאים מתקיימים), קיים $m \in \mathbb{R}$ כך ש $a \overset{*}{\leq} m \overset{**}{\leq} b$ לכל $a \in A$ ולכל $b \in B$.
$m(*)$ הוא חסם מלעיל של $a$ ולכן הוא גדול או שווה לחסם מלעיל הכי קטן שלה, כלומר $sup\,(A) \leq m$.
$m\,(**)$ הוא חסם מלרע של $b$ ולכן הוא קטן או שווה לחסם מלרע הכי גדול שלה, כלומר $m \leq inf\,(B)$. קיבלנו כי:

$$\underbrace{sup\,(A)} \leq m \underbrace{\leq inf\,(B)}$$

☻

2. נניח ש $sup\left(A\right)=inf\left(B\right)$ ונראה שלקבוצה $A\cap B$ יש לכל היותר איבר אחד בלבד.

נתבונן על הקבוצה $A\cap B=\{x\in\mathbb{R}\mid x\in A,x\in B\}$ ונניח שהיא לא ריקה. נביט על $x_1\in A\cap B$:
מהיות $x_1\in A$, מתקיים $x_1\le sup\left(A\right)$.
מהיות $x_1\in B$, מתקיים $inf\left(B\right)\le x_1$. כלומר:

$$inf\left(B\right)\le x_1\le sup\left(A\right)$$

אבל הנחנו ש $sup\left(A\right)=inf\left(B\right)$ ולכן $x_1=sup\left(A\right)=inf\left(B\right)$.
נניח בשלילה שקיים איבר נוסף, $x_1<x_2\in A\cap B$. מאותם התנאים לעיל, יתקיים:

$$\underbrace{inf\left(B\right)}\le x_1\underbrace{<}x_2\le\underbrace{sup\left(A\right)}$$

בסתירה לכך ש$sup\left(A\right)=inf\left(B\right)$.
ולכן אם קיים $x\in A\cap B$, אזי הוא יחיד.
☻

## 5 שאלה 5.

תהיינה $\phi\ne A,B\subseteq\mathbb{R}$.

1. **טענה:** אם $A$ חסומה מלעיל ו $B\subseteq A$, אזי $B$ חסומה מלעיל ו $sup\left(B\right)\le sup\left(A\right)$.
<u>הטענה נכונה.</u>

מהיות $B\subseteq A$, מתקיים ש $\forall b\in B,\ b\in A$. ולכן מתקיים $b\le sup\left(A\right)$, כלומר $B$ חסומה. מהיות $B$ חסומה, יש לה סופרימום ולכן בהחלט מתקיים $\forall b\in B\ \ ,b\le sup\left(B\right)$. מהיות $sup\left(B\right)$ החסם מלעיל המינימלי של $B$ ומהיות $sup\left(A\right)$ חסם מלעיל של $B$, מתקיים:

$$sup\left(B\right)\le sup\left(A\right)$$

כנדרש.
☻

2. יהי $0<\alpha\in\mathbb{R}$. נגדיר $a\cdot A=\{\alpha\cdot a\mid a\in A\}$

**טענה**: אם $A$ חסומה מלעיל, אזי $sup\left(\alpha\cdot A\right)=\alpha\cdot sup\left(A\right)$
<u>הטענה נכונה.</u>

$A$ חסומה ולכן יש לה סופרימום. מהיות $sup\left(A\right)$ הסופרימום של $A$, לכל $a\in A$ מתקיים:

$$a\le sup\left(A\right)\underset{\alpha>0}{\Rightarrow}\alpha a\le\alpha\cdot sup\left(A\right)$$

כלומר $\alpha \cdot sup\left(A\right)$ הוא חסם מלעיל של הקבוצה $\alpha A$. לכן $\alpha A$ חסומה ויש לה סופרימום. לכן מתקיים:

$$\underbrace{sup\left(\alpha A\right) \leq \alpha \cdot sup\left(A\right)} \tag{2}$$

מצד שני, מהיות $sup\left(\alpha A\right)$ הסופרימום של הקבוצה $\alpha A$, ברור שלכל $a \in A$ מתקיים:

$$\alpha a \leq sup\left(\alpha A\right) \underset{\alpha>0}{\Rightarrow} a \leq \frac{sup\left(\alpha A\right)}{\alpha}$$

כלומר $\frac{sup(\alpha A)}{\alpha}$ הוא חסם מלעיל של הקבוצה $A$ ולכן גדול או שווה לסופרימום שלה ומתקיים:

$$sup\left(A\right) \leq \frac{sup\left(\alpha A\right)}{\alpha} \underset{\alpha>0}{\Rightarrow} \underbrace{sup\left(\alpha A\right) \geq \alpha \cdot sup\left(A\right)} \tag{3}$$

מ $(2)$,$(3)$ נקבל:

$$sup\left(\alpha A\right) = \alpha \cdot sup\left(A\right)$$

כנדרש.
☻

3. נגדיר $-A = \{-a \mid a \in A\}$.

**טענה:** אם $A$ חסומה מלעיל, אזי $-A$ חסומה מלרע ו $inf\left(-A\right) = -sup\left(A\right)$.
הטענה נכונה.

$A$ חסומה מלעיל, כלומר יש לה סופרימום ומתקיים $\forall a \in A\,,\ a \leq sup\left(A\right)$:

$$a \leq sup\left(A\right) \Rightarrow -a \geq -sup\left(A\right)$$

כלומר $-A$ חסומה מלרע ע"י $-sup\left(A\right)$. מהיותה חסומה מלרע יש לה חסם תחתון ולכן מתקיים:

$$\underbrace{inf\left(-A\right) \geq -sup\left(A\right)} \tag{4}$$

בנוסף, מתכונת האינפימום של $-A$ מתקיים $\forall a \in -A\,,\ -a \geq inf\left(-A\right)$:

$$-a \geq inf\left(-A\right) \Rightarrow a \leq -inf\left(-A\right)$$

כלומר $A$ חסומה מלעיל ע"י $-inf\left(-A\right)$, אך הוא בוודאי קטן או שווה לסופרמום שלה ולכן מתקיים:

$$-inf\left(-A\right) \geq sup\left(A\right) \Rightarrow \underbrace{inf\left(-A\right) \leq -sup\left(A\right)} \tag{5}$$

מ $(5),(4)$ נקבל ש:

$$inf\left(-A\right)=-sup\left(A\right)$$

כנדרש.
☻

4. **טענה:** אם $A$ חסומה מלעיל ו $A\notin sup\left(A\right)$, אזי קיים $\varepsilon>0$ כך שלקבוצה $C=\{x\in A\mid x\leq sup\left(A\right)-\varepsilon\}$ יש איבר מקסימלי.
<u>הטענה נכונה.</u>

מהיות $A$ קבוצה לא ריקה ומכיוון שהסופרמום לא שייך לקבוצה, קיים $x_1\in A$ המקיים $x_1<sup\left(A\right)$.

$$x_1<sup\left(A\right)\Rightarrow sup\left(A\right)-x_1>0$$

ניקח $0<\varepsilon=sup\left(A\right)-x_1$ ונקבל את הקבוצה:

$$C=\{x\in A\mid x\leq sup\left(A\right)-\left(sup\left(A\right)-x_1\right)\}$$

$$C=\{x\in A\mid x\leq x_1\}$$

$x_1\in A$ ולכן לקבוצה $C$ יש מקסימום.
☻