חשבון אינפיניטסימלי 1 - תרגיל 12

גיא תגר - קבוצה 2

1 שאלה 1.

1. נגדיר $f(x) = x \cdot \left(1+\sqrt{x^2+1}\right)^3$ לכל $x \in \mathbb{R}$. נשים לב שלכל $x \in \mathbb{R}$ מתקיים $x^2+1>0$ ולכן f מוגדרת היטב. הפונקציה גזירה ורציפה ב $\mathbb{R}$ מאשג"ז. בנוסף:

$$f(0) = 0 < \frac{1}{2}$$

$$f\left(\sqrt{3}\right) = \sqrt{3}\left(1+\sqrt{4}\right)^3 = 27\sqrt{3} > \frac{1}{2}$$

לפי משפט ערך הביניים המורחב, קיים $0 < c < \sqrt{3}$ כך ש:

$$f(c) = \frac{1}{2} \Rightarrow$$

$$c \cdot \left(1+\sqrt{c^2+1}\right)^3 = \frac{1}{2}$$

כעת נראה שזה הוא הפתרון היחיד. נגזור את הפונקציה:

$$f'(x) = \left(1+\sqrt{x^2+1}\right)^3 + 3x\left(1+\sqrt{x^2+1}\right)^2\left(\frac{2x}{2\sqrt{1+x^2}}\right) =$$

$$\left(1+\sqrt{x^2+1}\right)^3 + \left(1+\sqrt{x^2+1}\right)^2\left(\frac{3x^2}{\sqrt{1+x^2}}\right)$$

ניתן לעצור כבר כאן ולהסיק ש $f'(x) > 0$ לכל $x \in \mathbb{R}$.
כעת נניח בשלילה שקיים יותר מפתרון אחד למשוואה. לכן קיימים $x_1 < x_2 \in \mathbb{R}$ כך ש:

$$f(x_1) = f(x_2) = \frac{1}{2}$$

נביט על הקטע $[x_1, x_2]$. f גזירה $\Leftarrow$ רציפה בפרט בקטע זה וגזירה ב (x_1, x_2) ולכן ממשפט רול קיים $x_1 < d < x_2$ כך ש:

$$f'(d) = 0$$

סתירה!

2. נכפיל את המשוואה ב $(x-b_1)(x-b_2)(x-b_3)$ ונקבל:

$$a_1(x-b_2)(x-b_3)+a_2(x-b_1)(x-b_3)+a_3(x-b_1)(x-b_2)=0$$

נגדיר:

$$f(x)=a_1(x-b_2)(x-b_3)+a_2(x-b_1)(x-b_3)+a_3(x-b_1)(x-b_2)$$

לכל $x\in\mathbb{R}$ ועבור $a_1,a_2,a_3,b_1,b_2,b_3\in\mathbb{R}$ כך ש $a_1,a_2,a_3>0$ וגם $b_1<b_2<b_3$.
נשים לב ש f רציפה לכל x מאש"ר ומתקיים:

$$f(b_1)=a_1(b_1-b_2)(b_1-b_3)>0$$

$$f(b_2)=a_2(b_2-b_1)(b_2-b_3)<0$$

$$f(b_3)=a_3(b_3-b_1)(b_3-b_2)>0$$

f רציפה ב $[b_1,b_2]$, לכן ממשפט ערך הביניים, קיים $b_1<c_1<b_2$ כך ש:

$$f(c_1)=0$$

f רציפה ב $[b_2,b_3]$, לכן ממשפט ערך הביניים, קיים $b_2<c_2<b_3$ כך ש:

$$f(c_2)=0$$

כעת נגדיר:

$$g(x)=\frac{f(x)}{(x-b_1)(x-b_2)(x-b_3)}\quad\forall x\in\mathbb{R}\setminus\{b_1,b_2,b_3\}$$

מתקיים:

$$g(x)=\frac{a_1}{x-b_1}+\frac{a_2}{x-b_2}+\frac{a_3}{x-b_3}$$

נשים לב ש f מתאפסת עבור c_1,c_2 ששייכים לתחום הגדרה של g, ולכן:

$$g(c_1)=0$$

$$g(c_2)=0$$

מצאנו 2 פתרונות למשוואה. כעת נראה שלא ייתכנו יותר פתרונות. g גזירה בתחום הגדרתה מאשג"ז. נביט על הנגזרת שלה:

$$g'(x)=-\left[\frac{a_1}{(x-b_1)^2}+\frac{a_2}{(x-b_2)^2}+\frac{a_3}{(x-b_3)}\right]\quad\forall x\in\mathbb{R}\setminus\{b_1,b_2,b_3\}$$

כלומר $g'(x)<0$ לכל x בתחום הגדרתה. נניח שקיים $c_3\in\mathbb{R}$ כך ש $g(c_3)=0$.
אם $c_3>b_3$ אזי קל לראות ש:

$$g(c_3)>0$$

אם $c_3 < b_1$ אזי קל לראות ש:

$$g(c_3) < 0$$

לכן $b_2 < c_3 < b_3$ או $b_1 < c_3 < b_2$. אך נזכור ש c_1, c_2 נמצאים בסביבות אלו. ב־2 המקרים נביט על הקטע הסגור:

$$\left[\min\{c_i, c_3\}, \max\{c_i, c_3\}\right], \quad i = 1, 2$$

הפונקציה רציפה בקטע מאש"ר. כמו כן $f(c_i) = f(c_3) = 0$ ולכן ממשפט רול, קיימת $c_i < d_i < c_3$ כך ש:

$$g'(d_i) = 0$$

סתירה לכך ש $g'(x) < 0$ לכל $x \neq b_1, b_2, b_3$

2 שאלה 2.

1. :

$$\lim_{x\to 0} \frac{x^2 - x\sin x}{(e^x - 1)\cdot\ln(1+x)} = \lim_{x\to 0}\left[\frac{x}{e^x - 1}\cdot\frac{x - \sin x}{\ln(1+x)}\right]$$

נבדוק בנפרד:

$$\lim_{x\to 0}\frac{x - \sin x}{\ln(1+x)} \overset{\frac{0}{0}}{\underset{L}{=}} \lim_{x\to 0}\frac{1 - \cos x}{\frac{1}{1+x}} = \lim_{x\to 0}(1+x)(1-\cos x) = 1\cdot 0 = 0$$

$$\lim_{x\to 0}\frac{x}{e^x - 1} \overset{\frac{0}{0}}{\underset{L}{=}} \lim_{x\to 0}\frac{1}{e^x} \underset{AOC}{=} \frac{1}{1} = 1$$

לכן:

$$\lim_{x\to 0}\frac{x^2 - x\sin x}{(e^x - 1)\cdot\ln(1+x)} = 1\cdot 0 = 0$$

2. :

$$\lim_{x\to 0^+} x^2\ln x = \lim_{x\to 0^+}\frac{\ln x}{\frac{1}{x^2}} \overset{\frac{?}{\infty}}{\underset{L}{=}} \lim_{x\to 0^+} -\frac{\frac{1}{x}}{\frac{2x}{x^4}} = \lim_{x\to 0^+}\frac{x^2}{2} = 0$$

3. :

$$\lim_{x\to 0^-}\left(\frac{1}{x}\cdot e^{\frac{1}{x}}\right) \underset{t=-\frac{1}{x}}{=} \lim_{t\to\infty} -t\cdot e^{-t} = \lim_{t\to\infty} -\frac{t}{e^t} \overset{\frac{?}{\infty}}{\underset{L}{=}} \lim_{t\to\infty} -\frac{1}{e^t} = -\frac{1}{\infty} = 0$$

4. :

$$\lim_{x\to0}(1+x)^{\frac{1}{\tan x}}=\lim_{x\to0}e^{\ln(1+x)^{\frac{1}{\tan x}}}=\lim_{x\to0}e^{\frac{\ln(1+x)}{\tan x}}$$

נביט על הגבול של האקספוננט:

$$\lim_{x\to0}\frac{\ln(1+x)}{\tan x}\overset{\frac{0}{0}}{\underset{L}{=}}\lim_{x\to0}\frac{\frac{1}{1+x}}{\frac{1}{\cos^2 x}}=\lim_{x\to0}\frac{\cos^2 x}{1+x}=\frac{1\cdot1}{1+0}=1$$

לפי אש"ג חזקה (או מהיות e^x פונקציה רציפה):

$$\lim_{x\to0}(1+x)^{\frac{1}{\tan x}}=\lim_{x\to0}e^{\frac{\ln(1+x)}{\tan x}}=e^1=e$$

3 שאלה 3.

יהי $L\in\mathbb{R}$ ותהי f פונקציה הגזירה בסביבה מנוקבת של $x_0\in\mathbb{R}$ כך ש $\lim\limits_{x\to x_0}f'(x)=L$

1. נביט בפונקציה:

$$f(x)=\begin{cases}x & x\neq0\\1 & x=0\end{cases}$$

עבור $x\neq0$, הנגזרת:

$$f'(x)=1,\ \ \forall x\neq0$$

נשים לב ש f גזירה לכל $x_0\neq0$ מאשג"ז, בפרט בסביבה מנוקבת שלו. ומתקיים

$$\lim_{x\to0}f'(x)\underset{x\neq0}{=}\lim_{x\to0}1=1$$

התנאים של השאלה מתקיימים. כעת נבדוק גזירות ב $x_0=0$:

$$\lim_{x\to0}\frac{f(x)-f(0)}{x-0}=\lim_{x\to0}\frac{x-1}{x}=\lim_{x\to0}\left[1-\frac{1}{x}\right]$$

נפריד לגבולות חד צדדיים:

$$\lim_{x\to0^+}\left[1-\frac{1}{x}\right]=1-\infty=-\infty$$

אחד הגבולות החד צדדיים לא קיים, לכן f אינה גזירה ב 0.
כנדרש.
הערה־ היה ניתן להגיד במקום, ש f אינה רציפה ב־0 ולכן אינה גזירה ב־0.

2. כעת נניח בנוסף ש f רציפה ב x_0 ונראה כי f גזירה ב x_0 ושמתקיים $f'(x_0) = L$ מהיות f גזירה בסביבה מנוקבת של x_0 ורציפה ב x_0, הרי ש f רציפה בסביבה של x_0. נבדוק גזירות בנקודה x_0 ונפצל לגבולות חד צדדיים:

$$\lim_{x \to x_0^+} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$$

נשים לב כי $x_0 < x$ ומהיות f רציפה בסביבה של x_0, היא בפרט רציפה בקטע $[x_0, x]$. היא גם גזירה ב (x_0, x) ולכן לפי לגראנז', קיימת $x_0 < c_x < x$ כך ש:

$$f'(c_x) = \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$$

נחזור לגבול:

$$\lim_{x \to x_0^+} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \lim_{x \to x_0^+} f'(c_x) \underset{t=c_x}{\overset{(*)}{=}} \lim_{t \to x_0} f'(t) = L$$

$(*)$ נשים לב כי $x_0 < c_x < x$ וגם:

$$\lim_{x \to x_0} x = x_0$$

$$\lim_{x \to x_0} x_0 = x_0$$

לכן לפי סנדוויץ':

$$\lim_{x \to x_0} c_x = x_0$$

כעת נבדוק את הצד השני:

$$\lim_{x \to x_0^-} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$$

נשים לב כי $x_0 > x$ ומהיות f רציפה בסביבה של x_0, היא בפרט רציפה בקטע $[x, x_0]$. היא גם גזירה ב (x, x_0) ולכן לפי לגראנז', קיימת $x < c_x < x_0$ כך ש:

$$f'(c_x) = \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$$

נחזור לגבול:

$$\lim_{x \to x_0^-} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \lim_{x \to x_0^-} f'(c_x) \underset{t=c_x}{\overset{(**)}{=}} \lim_{t \to x_0} f'(t) = L$$

$(**)$ נשים לב כי $x < c_x < x_0$ וגם:

$$\lim_{x \to x_0} x = x_0$$

$$\lim_{x\to x_0} x_0 = x_0$$

לכן לפי סנדוויץ':

$$\lim_{x\to x_0} c_x = x_0$$

קיבלנו ש־2 הגבולות החד צדדיים שווים, לכן הגבול קיים ו:

$$f'(x_0) = \lim_{x\to x_0} \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} = L$$

כנדרש.

4 שאלה 4.

תהי $f:[0,\infty)\to\mathbb{R}$ פונקציה גזירה.
נניח כי f' עולה ו $f(0)=0$.

1. יהי $x>0$. נביט על הקטע $[0,x]$. נתון כי f גזירה $\leftarrow$ רציפה בקטע זה וגזירה בקטע $(0,x)$. לפי לגראנז', קיימת $0<c_x<x$ כך ש:

$$\underbrace{f'(c_x)} = \frac{f(x)-f(0)}{x-0} = \underbrace{\frac{f(x)}{x}}$$

f' עולה ולכן:

$$c_x < x \Rightarrow$$

$$f'(c_x) \le f'(x) \Rightarrow$$

$$\frac{f(x)}{x} \le f'(x)$$

כנדרש.

2. נגדיר $g(x)=\frac{f(x)}{x}$ לכל $x>0$.
g גזירה מאשג"ז ומתקיים:

$$\underbrace{g'(x)} = \frac{f'(x)\cdot x - f(x)}{x^2} \underbrace{\ge} \frac{\frac{f(x)}{x}\cdot x - f(x)}{x^2} = \frac{f(x)-f(x)}{x^2} = \underbrace{0}$$

הנגזרת אי שלילית, לכן ממסקנה 2 של לגראנז', g עולה לכל $x>0$.

5 שאלה 5.

1. **טענה**: תהי $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ פונקציה רציפה. אם למשוואה $f'(x)=0$ יש פתרון אחד בדיוק, אזי למשוואה $f(x)=0$ יש לפחות 2 פתרונות.
הטענה לא נכונה.

דוגמה נגדית - ניקח את הפונקציה

$$f(x)=x^3$$

f גזירה מאשג"ז ולמשוואה:

$$f'(x)=3x^2=0$$

יש פתרון אחד בלבד והוא מתקבל עבור $x=0$, אחרת עבור $x\neq 0$ $f'(x)>0$.
אבל למשוואה:

$$f(x)=x^3=0$$

יש פתרון אחד בלבד עבור $x=0$. אחרת:
עבור $x<0$ מתקיים $x^3<0$
עבור $x>0$ מתקיים $x^3>0$

2. **טענה**: יהי $a\in\mathbb{R}$ ותהיינה $f,g:(-\infty,a]\to\mathbb{R}$ פונקציות גזירות.
נניח ש $f(a)\leq g(a)$ וגם $f'(x)>g'(x)$ לכל $x\in(-\infty,a]$.
אזי $f(x)<g(x)$ לכל $x<a$.
הטענה נכונה.

נניח בשלילה שקיים $x_1<a$ כך ש $f(x_1)\geq g(x_1)$.
נגדיר את הפונקציה $h(x)=f(x)-g(x)$ לכל $x\in(-\infty,a]$. נשים לב כי h גזירה מאשג"ז וכי:

$$h(x_1)\geq 0$$

בנוסף לכל $x\in(-\infty,a]$:

$$h'(x)=f'(x)-g'(x)>0$$

לכן h עולה ממש בכל קטע סגור ב $(-\infty,a]$. בנוסף:

$$h(a)\leq 0$$

מהיות $x_1<a$, ומהיות h עולה ממש, מתקיים:

$$\underbrace{h(x_1)<h(a)\leq 0}$$

סתירה!
☺

3. **טענה**: $\arctan x < x$ לכל $x > 0$.
<u>הטענה נכונה</u>.

נגדיר $f(x) = \arctan x$ לכל $x > 0$.
יהי $x > 0$. נביט על הקטע $[0, x]$. f רציפה בקטע מאש"ר וגזירה ב $(0, x)$ מאשג"ז.
ממשפט לגראנז' קיים $0 < c < x$ כך ש:

$$\underbrace{\frac{1}{1+c^2}} = f'(c) = \frac{\arctan x - \arctan 0}{x - 0} = \underbrace{\frac{\arctan x}{x}}$$

כמו כן מתקיים:

$$0 < c < x \Rightarrow$$

$$0 < c^2 < x^2 \Rightarrow$$

$$1 < 1 + c^2 < 1 + x^2 \Rightarrow$$

$$\frac{1}{1+x^2} < \frac{1}{1+c^2} < 1 \Rightarrow$$

$$\frac{\arctan x}{x} < 1 \underset{x>0}{\Rightarrow}$$

$$\arctan x < x$$

☺

4. **טענה**: הפונקציה:

$$f(x) = \begin{cases} \frac{\sin x}{x} & x \neq 0 \\ 1 & x = 0 \end{cases}$$

גזירה.
<u>הטענה נכונה</u>.

נשים לב שלכל $x \neq 0$, קיימת סביבה שבה $f(x) = \frac{\sin x}{x}$ ולכן f גזירה מאשג"ז.
נבדוק עבור $x_0 = 0$:

$$f'(0) = \lim_{x\to 0} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim_{x\to 0} \frac{\frac{\sin x}{x} - 1}{x} = \lim_{x\to 0} \frac{\frac{\sin x - x}{x}}{x} = \lim_{x\to 0} \frac{\sin x - x}{x^2} \underset{L}{\overset{\frac{0}{0}}{=}}$$

$$\lim_{x\to 0} \frac{\cos x - 1}{2x} \underset{L}{\overset{\frac{0}{0}}{=}} \lim_{x\to 0} -\frac{\sin x}{2} = 0$$

הגבול קיים ולכן f גזירה.
☺

5. **טענה**: מתקיים $1.984^{2.020} < 2.020^{1.985}$
<u>הטענה נכונה.</u>

נגדיר:

$$f\left(x\right)=x^{\frac{1}{x}},\ \ \forall x>0$$

נשים לב ש f גזירה ומתקיים:

$$f'\left(x\right)=\left[e^{\frac{\ln x}{x}}\right]'=e^{\frac{\ln x}{x}}\left(\frac{1-\ln x}{x^{2}}\right)=x^{\frac{1}{x}}\left(\frac{1-\ln x}{x^{2}}\right)$$

נשים לב שלכל $0<x<e$ מתקיים $\ln x<\ln e=1$ ולכן $f'\left(x\right)>0$. ממסקנה של לגראנז', f עולה ממש לכל $0<x<e$. נביט על:

$$0<1.984<2.020<e$$

מהיות f עולה ב $\left[1.984,2.020\right]$, מתקיים:

$$f\left(1.984\right)<f\left(2.020\right)\Rightarrow$$

$$1.984^{\frac{1}{1.984}}<2.020^{\frac{1}{2.020}}\quad\left(\Rightarrow\right)^{2.020\cdot1.984}$$

$$1.984^{\frac{2.020\cdot1.984}{1.984}}<2.020^{\frac{2.020\cdot1.984}{2.020}}\Rightarrow$$

$$1.984^{2.020}<2.020^{1.984}$$

☺

6. <u>טענת עזר</u> - מסקנה משיעור 12:
תהי f פונקציה המוגדרת ב $\left[a,b\right)$ עבור $a<b$. אם f עולה ב $\left[a,b\right)$, אזי $\lim\limits_{x\to b^{-}}f\left(x\right)$ קיים במובן הרחב שווה ל $\sup\left\{f\left(x\right):a\leq x<b\right\}$

טענה: תהי $f:\left[a,b\right)\to\mathbb{R}$ פונקציה גזירה כך ש $\lim\limits_{x\to b^{-}}f\left(x\right)$ לא קיים במובן הרחב.
אזי קיים $x_{0}\in\left[a,b\right)$ כך ש $f'\left(x_{0}\right)=0$.
<u>הטענה נכונה.</u>

נשים לב ש f גזירה ורציפה לכל $x\in\left[a,b\right)$.
נניח בשלילה שלכל $x\in\left[a,b\right)$ מתקיים $f'\left(x\right)\neq0$. נפצל ל-3 מקרים:
(1) לכל $x\in\left[a,b\right)$ מתקיים $f'\left(x\right)>0$
(2) לכל $x\in\left[a,b\right)$ מתקיים $f'\left(x\right)<0$
(3) לכל $x\in\left[a,b\right)$ מתקיים $f'\left(x\right)<0$ או $f'\left(x\right)>0$

עבור מקרה (1), f' חיובית לכל $x\in\left[a,b\right)$ בנוסף f רציפה בקטע. ולכן <u>לכל</u> $a\leq x_{1}<x_{2}<b$, מתקיים ש f עולה בקטע $\left[x_{1},x_{2}\right]$ ולכן f עולה ממש ב $\left[a,b\right)$.

לכן לפי משפט העזר, הגבול $\lim_{x\to b^-} f(x)$ קיים במובן הרחב.
סתירה!

עבור מקרה (2) נגדיר $g(x) = -f(x)$ לכל $x \in [a,b)$. היא גזירה מאשג"ז ובנוסף:

$$g'(x) = [-f(x)]' = -f'(x) > 0$$

g' חיובית לכל $x \in [a,b)$, ו־g רציפה בקטע. לכן ממקרה 1 מתקיים ש g עולה ממש ב $[a,b)$ ולפי משפט העזר, הגבול $\lim_{x\to b^-} g(x)$ קיים במובן הרחב. ושווה ל $\sup\{g(x) : a \le x < b\}$. לכן:

$$\lim_{x\to b^-} f(x) = \lim_{x\to b^-} -g(x) = -\sup\{g(x) : a \le x < b\}$$

כלומר $\lim_{x\to b^-} f(x)$ קיים במובן הרחב.
סתירה!

עבור מקרה (3), קיימים $x_1 < x_2 \in [a,b)$ כך ש:

$$f'(x_1) < 0$$

$$f'(x_2) > 0$$

נביט על הקטע $[x_1, x_2]$. f גזירה בו בפרט. לכן לפי דרבו, קיימת $x_1 < c < x_2$ כך ש:

$$f'(c) = 0$$

סתירה!
☺