חשבון אינפיניטסימלי 1 - תרגיל 13

גיא תגר - קבוצה 2

1 שאלה 1.

1. נגדיר

$$f(x) = \tan x, \quad \forall x \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$$

יהיו $0 < \alpha < \beta < \frac{\pi}{2}$.
נביט על הקטע $[\alpha, \beta]$. f רציפה בקטע מאש"ר וגזירה ב (α, β) מאשג"ז. אזי לפי משפט לגראנז', קיימת $\alpha < c < \beta$ כך ש:

$$\frac{1}{\cos^2 c} = f'(c) = \frac{\tan \beta - \tan \alpha}{\beta - \alpha}$$

מהיות $\cos x$ יורדת ממש בקטע $\left(0, \frac{\pi}{2}\right)$. (ברור כי כבר הסתמכנו על זה ש $\cos x$ יורדת ממש ב $[0, \pi]$ כאשר הגדרנו את $\arccos x$ ולכן:

$$0 < \alpha < c < \beta < \frac{\pi}{2} \Rightarrow$$

$$\cos \beta < \cos c < \cos \alpha \Rightarrow$$

$$\cos^2 \beta < \cos^2 c < \cos^2 \alpha \Rightarrow$$

$$\frac{1}{\cos^2 \alpha} < \frac{1}{\cos^2 c} < \frac{1}{\cos^2 \beta} \Rightarrow$$

$$\frac{1}{\cos^2 \alpha} < \frac{\tan \beta - \tan \alpha}{\beta - \alpha} < \frac{1}{\cos^2 \beta} \underset{(\beta-\alpha)>0}{\Rightarrow}$$

$$\frac{\beta - \alpha}{\cos^2 \alpha} < \tan \beta - \tan \alpha < \frac{\beta - \alpha}{\cos^2 \beta}$$

כנדרש.

2 שאלה 2.

תהיינה f,g פונקציות המוגדרות בקטע $[a,b]$ עבור $a<b$.
נניח כי f,g רציפות ב־$[a,b]$ וגזירות ב־(a,b) כך ש $g'(x)\neq 0$ לכל $x\in(a,b)$.

נגדיר:

$$F(x)=(f(x)-f(a))\cdot(g(b)-g(x)),\quad \forall x\in[a,b]$$

f רציפה ב$[a,b]$ מאש"ר וגזירה ב (a,b) מאשג"ז. כמו כן קל לראות ש:

$$F(a)=F(b)=0$$

ולכן לפי משפט רול קיימת $a<c<b$ כך ש:

$$0=F'(c)=f'(c)[g(b)-g(c)]-g'(c)[f(c)-f(a)]\Rightarrow$$

$$f'(c)[g(b)-g(c)]=g'(c)[f(c)-f(a)]\underset{g'(c)\neq 0}{\Rightarrow}$$

$$\frac{f'(c)}{g'(c)}=\frac{f(c)-f(a)}{g(b)-g(c)}$$

3 שאלה 3.

1. :

$$\lim_{x\to 0}\frac{\ln(\cos(3x))}{\ln(\cos(5x))}=\lim_{x\to 0}\frac{-\ln(\cos(3x))}{-\ln(\cos(5x))}\underset{L}{\overset{?}{\overset{\infty}{\overline{\infty}}}}\lim_{x\to 0}\frac{\frac{3\sin(3x)}{\cos(3x)}}{\frac{5\sin(5x)}{\cos(5x)}}=$$

$$\lim_{x\to 0}\frac{3}{5}\frac{\sin(3x)\cos(5x)}{\sin(5x)\cos(3x)}\underset{(*)}{=}\left(\frac{3}{5}\right)^2=\frac{9}{25}$$

$(*)$ נחשב בנפרד:

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin(3x)}{\sin(5x)}=\lim_{x\to 0}\frac{3\frac{\sin(3x)}{3x}}{5\frac{\sin(5x)}{5x}}\underset{AOL}{=}\frac{3}{5}$$

$$\lim_{x\to 0}\frac{\cos(5x)}{\cos(3x)}=\frac{1}{1}=1$$

2. :

$$\lim_{x\to 1^+}[\ln x\cdot\ln(\ln x)]\underset{t=\ln x}{=}\lim_{t\to 0^+}t\ln t=\lim_{t\to 0^+}\frac{\ln t}{\frac{1}{t}}\underset{L}{\overset{?}{\overset{\infty}{\overline{\infty}}}}\lim_{t\to 0^+}-\frac{\frac{1}{t}}{\frac{1}{t^2}}=$$

$$\lim_{t\to 0^+}-t=0$$

.3 :

$$\lim_{x\to\infty}\left(e^{2x}-x+1\right)^{\frac{1}{x}}=\lim_{x\to\infty}e^{\frac{\ln\left(e^{2x}-x+1\right)}{x}}\underset{(*)}{=}e^{2}$$

$(*)$ נחשב את הגבול של האקספוננט:

$$\lim_{x\to\infty}\frac{\ln\left(e^{2x}-x+1\right)}{x}\underset{L}{\overset{?}{\overset{\infty}{\equiv}}}\lim_{x\to\infty}\frac{\frac{\left(2e^{2x}-1\right)}{\left(e^{2x}-x+1\right)}}{1}=\lim_{x\to\infty}\frac{\cancel{e^{2x}}\left(2-\frac{1}{e^{2x}}\right)}{\cancel{e^{2x}}\left(1-\frac{x}{e^{2x}}+\frac{1}{e^{2x}}\right)}\underset{(**)}{=}$$

$$\frac{2-0}{1-0+0}=2$$

$(**)$ נחשב בנפרד:

$$\lim_{x\to\infty}\frac{x}{e^{2x}}\underset{L}{\overset{?}{\overset{\infty}{\equiv}}}\lim_{x\to\infty}\frac{1}{e^{2x}}=0$$

4 שאלה 4.

תהי $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ פונקציה גזירה פעמיים.
נניח כי $f''(x)>0$ לכל $x\in\mathbb{R}$.

מהיות f גזירה פעמיים, היא בוודאי גזירה פעם אחת ולכן f רציפה.
בנוסף, מהיות $f''(x)>0$ לכל $x\in\mathbb{R}$, הרי ש f' עולה ממש.
יהי $x\in\mathbb{R}$.
נביט על הקטע $[x-1,x]$. f רציפה בו וגזירה ב $(x-1,x)$. לכן לפי לגראנז', קיימת $x-1<c<x$ כך ש:

$$f'(c)=\frac{f(x)-f(x-1)}{x-(x-1)}=f(x)-f(x-1)$$

כעת נביט על הקטע $[x,x+1]$. f רציפה בו וגזירה ב $(x,x+1)$. לכן לפי לגראנז', קיימת $x<d<x+1$ כך ש:

$$f'(d)=\frac{f(x+1)-f(x)}{x+1-x}=f(x+1)-f(x)$$

מהיות f' עולה ממש, מתקיים:

$$c<x<d\Rightarrow$$

$$f'(c)<f'(d)\Rightarrow$$

$$f(x)-f(x-1)<f(x+1)-f(x)\Rightarrow$$

$$2f(x) < f(x+1) + f(x-1) \Rightarrow$$

$$f(x) < \frac{f(x+1) + f(x-1)}{2}$$

5 שאלה 5.

1. **טענה**: לכל $a,b \in [1,2]$ כך ש $b \leq a$ מתקיים:

$$2(\ln b - \ln a) \leq b^2 - a^2$$

הטענה נכונה.

נגדיר:

$$g(x) = \ln x \quad \forall x \in [1,2]$$

$$f(x) = x^2, \quad \forall x \in [1,2]$$

יהיו $a,b \in [1,2]$ כך ש $a \leq b$. אם $a = b$, אזי:

$$2(\ln a - \ln a) = a^2 - a^2 \Rightarrow 0 = 0$$

מתקיים שווין. אחרת, עבור $a < b$ נביט על הקטע $[a,b]$. מהיות הקטע מוכל ב $[1,2]$, הרי ש f,g רציפות ב $[a,b]$ מאש"ר וגזירות ב (a,b) מאשג"ז. נשים לב ש $0 \neq \frac{1}{x} = g'(x)$ לכל $x \in (a,b) > 0$. לכן ממשפט קושי קיים $a < c < b$ כך ש:

$$2 \underset{1<c}{<} 2c^2 = \frac{2c}{\frac{1}{c}} = \frac{f'(c)}{g'(c)} = \frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)} = \frac{b^2 - a^2}{\ln b - \ln a}$$

מהיות $\ln x$ עולה ממש:

$$a < b \Rightarrow \ln a < \ln b$$

ולכן נוכל להכפיל את האגפים ב $0 < (\ln b - \ln a)$ ולשמר את אי השוויון. נקבל:

$$2(\ln b - \ln a) < b^2 - a^2$$

קיבלנו שלכל $a,b \in [1,2]$ כך ש $a \leq b$ מתקיים:

$$2(\ln b - \ln a) \leq b^2 - a^2$$

☺

2. **טענה**: נגדיר $f\left(x\right)=\frac{3^{x}-2^{x}-4^{x}}{3^{x}+2^{x}+4^{x}}$ לכל $x\in\mathbb{R}$.
אזי קיימת נקודה $c\in\mathbb{R}$ כך ש $f'\left(c\right)=0$.
<u>הטענה נכונה.</u>

נשים לב שהמכנה חיובי לכל $x\in\mathbb{R}$ ולכן אינו מתאפס. נביט בקטע $\left[0,1\right]$.
f רציפה ב $\left[0,1\right]$ מאש"ר וגזירה ב $\left(0,1\right)$ מאשג"ז. בנוסף:

$$f\left(0\right)=\frac{1-1-1}{1+1+1}=-\frac{1}{3}$$

$$f\left(1\right)=\frac{3-2-4}{3+2+4}=-\frac{3}{9}=-\frac{1}{3}$$

לכן ממשפט רול, קיימת $0<c<1$ כך ש:

$$f'\left(c\right)=0$$

☺

3. **טענה**: תהי f פונקציה המוגדרת בקטע $\left[a,b\right]$. נניח ש f רציפה ב $\left[a,b\right]$ וגזירה ב $\left(a,b\right)$.
יהי $c\in\left(a,b\right)$. אזי קיימים x_{1},x_{2} כך ש $a\leq x_{1}<x_{2}\leq b$
וגם $f'\left(c\right)=\frac{f\left(x_{2}\right)-f\left(x_{1}\right)}{x_{2}-x_{1}}$
<u>הטענה לא נכונה.</u>

נגדיר:

$$f\left(x\right)=x^{3},\ \ \forall x\in\left[-1,1\right]$$

נביט על הקטע $\left[-1,1\right]$. f רציפה בו מאש"ר וגזירה ב $\left(-1,1\right)$ מאשג"ז.
נבחר $c=0\in\left(-1,1\right)$. נניח בשלילה שקיימים $-1\leq x_{1}<x_{2}\leq1$ כך ש $f'\left(0\right)=\frac{f\left(x_{2}\right)-f\left(x_{1}\right)}{x_{2}-x_{1}}$. אזי:

$$0=3\left(0\right)^{2}=f'\left(0\right)=\frac{\left(x_{2}\right)^{3}-\left(x_{1}\right)^{3}}{x_{2}-x_{1}}\Rightarrow$$

$$\left(x_{2}\right)^{3}=\left(x_{1}\right)^{3}\Rightarrow$$

$$x_{2}=x_{1}$$

סתירה!

4. **טענה**: תהי $f:\mathbb{R}\rightarrow\mathbb{R}$ פונקציה גזירה ויהי $L\in\mathbb{R}$.
אם $\lim\limits_{x\rightarrow\infty}\frac{f\left(x\right)+xf'\left(x\right)}{x}=L$, אזי $\lim\limits_{x\rightarrow\infty}\frac{f\left(x\right)}{x}=\frac{L}{2}$.
<u>הטענה נכונה.</u>

נגדיר:

$$g\left(x\right)=x\cdot f\left(x\right),\ \ \forall x\in\mathbb{R}$$

מהיות f גזירה, גם g גזירה מאש"ר. לכן מתקיים:

$$g'\left(x\right)=f\left(x\right)+x\cdot f'\left(x\right)$$

נשים לב ש:

$$\lim_{x\to\infty}\frac{g'\left(x\right)}{x}=L$$

נחשב את הגבול:

$$\lim_{x\to\infty}\frac{f\left(x\right)}{x}=\lim_{x\to\infty}\frac{x\cdot f\left(x\right)}{x^{2}}=\lim_{x\to\infty}\frac{g\left(x\right)}{x^{2}}\underset{L}{\overset{?}{\overset{\infty}{=}}}\lim_{x\to\infty}\frac{g'\left(x\right)}{2x}=\frac{L}{2}$$

6 שאלה 6.

נניח שקיימים $r,n_{0}>0$ כך שלכל $t\geq0$ מתקיים:

$$N\left(t\right)=n_{0}\left[R\left(t\right)\right]^{\frac{t}{r}}$$

נניח בנוסף ש $R\left(t\right)\geq1$ לכל $t\geq0$ ויהי $\underline{s}=\inf\left\{ R\left(t\right):t\geq0\right\}$.

1. נשים לב שלכל $t\geq0$ מתקיים:

$$R\left(t\right)\geq\underline{s}>1$$

לכן לכל $t\geq0$ ומהיות $n_{0},r>0$ מתקיים:

$$n_{0}\left[R\left(t\right)\right]^{\frac{t}{r}}\geq n_{0}\cdot\underline{s}^{\frac{t}{r}}$$

נשים לב ש:

$$\lim_{t\to\infty}n_{0}\cdot\underline{s}^{\frac{t}{r}}=\underline{s}^{\infty}\underset{\underline{s}>1}{=}\infty$$

לכן, ממשפט הטוסט:

$$\lim_{t\to\infty}N\left(t\right)=\lim_{t\to\infty}n_{0}\left[R\left(t\right)\right]^{\frac{t}{r}}=\infty$$

2. מהיות N חסומה מלעיל, קיים $M > 0$ כך שלכל $t \geq 0$ מתקיים:

$$N(t) \leq M \underset{n_0>0}{\Rightarrow}$$

$$\frac{N(t)}{n_0} \leq \frac{M}{n_0} \underset{r>0}{\Rightarrow}$$

$$1 \leq R(t) = \left(\frac{N(t)}{n_0}\right)^{\frac{r}{t}} \leq \left(\frac{M}{n_0}\right)^{\frac{r}{t}}$$

הגבול הימני:

$$\lim_{t\to\infty}\left(\frac{M}{n_0}\right)^{\frac{r}{t}} = \left(\frac{M}{n_0}\right)^{\frac{r}{\infty}} = \left(\frac{M}{n_0}\right)^{0} = 1$$

הגבול השמאלי:

$$\lim_{t\to\infty} 1 = 1$$

לכן מסנדוויץ':

$$\lim_{t\to\infty} R(t) = 1$$

☺