חשבון אינפיניטסימלי 1 - תרגיל 6

גיא תגר - קבוצה 2

1 שאלה 1.

סטודנט B צודק.
סטודנט A "הציב" את הגבול כדי להיפטר מביטוי שלא היה לו נוח לעבוד איתו ובכך למעשה עשה מהלך אסור מתמטית. אם הוא רצה להשתמש באריתמטיקה של גבולות, הוא היה צריך לעשות זאת ב"פעם אחת".

סטודנט B צודק מכיוון שכל הפעולות המתמטיות שעשה הן חוקיות, ובנוסף השתמש באריתמטיקה של גבולות בשלב הסופי בלבד.

2 שאלה 2.

1. יהי $K>0$. ניקח $\boxed{M=\max\left\{2,K^3\right\}}$ כך שלכל $x>M$ מתקיים:

$$\underbrace{\sqrt[3]{x^2-1}} = \sqrt[3]{(x-1)(x+1)} \underset{x>2}{\geq} \sqrt[3]{x+1} \geq \sqrt[3]{x} \underbrace{>} \sqrt[3]{M} \geq \underbrace{K}$$

2. יהי $\varepsilon>0$. ניקח $\boxed{\delta=\min\left\{1,\dfrac{\varepsilon^3}{3}\right\}}$ כך שלכל $x\in(1,1+\delta)$ מתקיים:

$$\underbrace{\left|\sqrt[3]{x^2-1}\right|} \underset{x>1}{=} \sqrt[3]{x^2-1} = \sqrt[3]{(x-1)(x+1)} \underbrace{<}_{x-1<\delta} \sqrt[3]{\delta(x+1)} \underset{*}{\leq} \sqrt[3]{3\delta} \leq \underbrace{\varepsilon}$$

* נשים לב ש:

$$x<1+\delta \Rightarrow$$

$$x+1<2+\delta \underset{\delta\leq 1}{\leq} 3$$

3 שאלה 3.

1. יהי $K < 0$. מהיות $\lim_{x\to x_0} f(x) = L$, קיים δ_1 כך שלכל $0 < |x - x_0| < \delta_1$ מתקיים:

$$|f(x) - L| < \boxed{\frac{L}{2}} \iff \frac{L}{2} < f(x) < \frac{3L}{2}$$

מהיות $\lim_{x\to x_0} g(x) = \infty$, קיים δ_2 כך שלכל $0 < |x - x_0| < \delta_2$ מתקיים:

$$g(x) > \boxed{K - \frac{L}{2}}$$

ניקח $\delta = \min\{\delta_1, \delta_2\}$ כך שלכל $0 < |x - x_0| < \delta$ מתקיים:

$$\underbrace{g(x) + f(x)} \underbrace{>} g(x) + \frac{L}{2} > \underbrace{K}$$

2. יהי $K < 0$. מהיות $\lim_{x\to x_0} f(x) = L$, קיים δ_1 כך שלכל $0 < |x - x_0| < \delta_1$ מתקיים:

$$|f(x) - L| \underset{L>0}{<} \boxed{\frac{L}{2}} \iff \frac{L}{2} < f(x) < \frac{3L}{2}$$

מהיות $\lim_{x\to x_0} g(x) = \infty$, קיים δ_2 כך שלכל $0 < |x - x_0| < \delta_2$ מתקיים:

$$g(x) \underset{L>0}{>} \boxed{\frac{2K}{L}}$$

ניקח $\delta = \min\{\delta_1, \delta_2\}$ כך שלכל $0 < |x - x_0| < \delta$ מתקיים:

$$\underbrace{g(x) \cdot f(x)} \underbrace{>} g(x) \cdot \frac{L}{2} > \underbrace{K}$$

4 שאלה 4.

תהי f פונקציה המוגדרת בסביבה מנוקבת של $x_0 \in \mathbb{R}$, כך ש $f(x) \neq 0$ לכל x בסביבה המנוקבת. נניח ש $\lim_{x\to x_0} \left(f(x) + \frac{1}{|f(x)|} \right) = 0$.
אוכיח 2 טענות עזר:

למה 1.4 לכל $y > 0$ מתקיים $y + \frac{1}{y} \geq 2$.

הוכחה: נניח בשלילה שקיים $y>0$ כך ש $y+\frac{1}{y}<2$. אזי:

$$y+\frac{1}{y}-2<0 \underset{y>0}{\Rightarrow}$$

$$y^2+-2y+1<0 \Rightarrow$$

$$(y-1)^2<0$$

סתירה לכך שריבוע של מספר הוא אי שלילי. ■

למה 2.4 לכל $x\in\mathbb{R}$, אם $x<|x|$ אזי $x<0$.

הוכחה: נניח בשלילה שקיים $x>0$ כך ש $x<|x|$. אזי:

$$\underbrace{|x|}\underset{x>0}{=}x\underbrace{<}\underbrace{|x|}$$

סתירה. ■

<u>תחילת השאלה:</u>

1. מהיות $\lim\limits_{x\to x_0}\left(f(x)+\frac{1}{|f(x)|}\right)=0$, קיים δ_1 כך שלכל $0<|x-x_0|<\delta_1$ מתקיים:

$$\left|f(x)+\frac{1}{|f(x)|}\right|<2 \iff -2<f(x)+\frac{1}{|f(x)|}<2$$

ולכן:

$$\underbrace{f(x)}\underbrace{<}2-\frac{1}{|f(x)|}\underset{(1.4)}{\leq}\underbrace{|f(x)|}$$

לפי למה (2.4), $f(x)<0$ לכל $0<|x-x_0|<\delta_1$

2. נגדיר $g(x)=f(x)+\frac{1}{|f(x)|}$ לכל $0<|x-x_0|<\delta_1$. נכפיל ב $f(x)$:

$$g(x)f(x)=f^2(x)+\frac{f(x)}{|f(x)|}\underset{f(x)<0}{\Rightarrow}$$

$$f^2(x)-g(x)f(x)-1\Rightarrow$$

$$f(x)_{1,2}=\frac{g(x)\pm\sqrt{g^2(x)+4}}{2}$$

מהגדרת הפונקציות, ברור כי:

$$f(x)<g(x)$$

ולכן:

$$f\left(x\right)=\frac{g\left(x\right)-\sqrt{g^{2}\left(x\right)+4}}{2}$$

הבהרה - נניח בשלילה ש $f\left(x\right)=\frac{g(x)+\sqrt{g^{2}(x)+4}}{2}$. אזי:

$$\underbrace{f\left(x\right)}=\frac{g\left(x\right)+\sqrt{g^{2}\left(x\right)+4}}{2}\underbrace{>}\frac{g\left(x\right)+\sqrt{g^{2}\left(x\right)}}{2}=\frac{g\left(x\right)+\left|g\left(x\right)\right|}{2}\geq$$

$$\frac{2g\left(x\right)}{2}=\underbrace{g\left(x\right)}$$

סתירה.

3. מהנתון $\lim\limits_{x\to x_{0}}g\left(x\right)=0$ ולכן:

$$\lim_{x\to x_{0}}f\left(x\right)=\lim_{x\to x_{0}}\frac{g\left(x\right)-\sqrt{g^{2}\left(x\right)+4}}{2}\underset{AOL}{=}\frac{0-\sqrt{0+4}}{2}=-1$$

5 שאלה 5.

למה 1.5 לכל $0\neq x\in\mathbb{R}$, $\left|x+\frac{1}{x}\right|=|x|+\frac{1}{|x|}$.

הוכחה: עבור $x>0$:

$$\left|x+\frac{1}{x}\right|=x+\frac{1}{x}\underset{x>0}{=}|x|+\frac{1}{|x|}$$

עבור $x<0$:

$$\left|x+\frac{1}{x}\right|=-\left(x+\frac{1}{x}\right)=\left(-x\right)+\left(\frac{1}{-x}\right)\underset{x<0}{=}|x|+\frac{1}{|x|}$$

$\blacksquare$

תחילת השאלה:

1. **טענה:** קיימת פונקציה f המוגדרת בסביבה מנוקבת של $x_{0}\in\mathbb{R}$, כך ש $f\left(x\right)\neq0$ לכל x בסביבה מנוקבת זו ו $\lim\limits_{x\to x_{0}}\left[f\left(x\right)+\frac{1}{f(x)}\right]=0$.
הטענה לא נכונה

נניח בשלילה שקיימת פונקציה כזו. מהיות $\lim\limits_{x\to x_{0}}\left[f\left(x\right)+\frac{1}{f(x)}\right]=0$, קיים δ_{1} כך שלכל $0<|x-x_{0}|<\delta_{1}$:

$$\underbrace{\left|f\left(x\right)\right|+\frac{1}{\left|f\left(x\right)\right|}}\underset{(1.5)}{=}\left|f\left(x\right)+\frac{1}{f\left(x\right)}\right|\underbrace{<}\underbrace{2}$$

בסתירה ללמה (1.4)

2. **טענה:** תהי $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ כך שלכל $x,y\in\mathbb{R}$,
$|f(x)-f(y)|=|x-y|$. אזי $\lim\limits_{x\to\infty}|f(x)|=\infty$.
הטענה נכונה.

הוכחה:
יהי $K>0$. ניקח $\boxed{M=K+|f(0)|}$ כך שלכל $x>M$ מתקיים:

$$\underbrace{|f(x)|}_{}=|-f(x)|=|-f(x)+f(0)-f(0)|\overset{\triangle}{\geq}||f(x)-f(0)|-|f(0)||\geq$$

$$|f(x)-f(0)|-|f(0)|=|x-0|-|f(0)|\underset{x>0}{=}x-|f(0)|\underbrace{>}_{}M-|f(0)|=\underbrace{K}_{}$$

☺

הערה: נתון שתחום ההגדרה של הפונקציה הוא $\mathbb{R}$ ולכן $f(0)$ קיים.