חשבון אינפיניטסימלי 1 - תרגיל 9

גיא תגר 206260762 - קבוצה 2

1 שאלה 1.

1. נאמר ש־f אינה רציפה ב (a,b) אם קיים $x_0 \in (a,b)$ וקיים $\varepsilon > 0$ כך שלכל $\delta > 0$ קיים $|x - x_0| < \delta$ כך ש:

$$|f(x) - f(x_0)| \geq \varepsilon$$

2. נאמר ש x_0 היא אי רציפות עיקרית אם $\lim\limits_{x \to x_0^+} f(x)$ לא קיים או $\lim\limits_{x \to x_0^-} f(x)$ לא קיים,
כלומר אם לכל $L \in \mathbb{R}$ קיים $\varepsilon > 0$ כך שלכל $\delta > 0$ קיים $x_0 < x < x_0 + \delta$ כך ש $|f(x) - L| \geq \varepsilon$
או:
לכל $L \in \mathbb{R}$ קיים $\varepsilon > 0$ כך שלכל $\delta > 0$ קיים $x_0 - \delta < x < x_0$ כך ש $|f(x) - L| \geq \varepsilon$

2 שאלה 2.

1. נגדיר $f(x) = 3x - \sqrt{x^3} - r$ לכל $x > 0$. הפונקציה רציפה מאש"ר. נשים לב ש:

$$f(1) = 2 - r \underset{r>2}{<} 0$$

$$f(4) = 4 - r \underset{r<4}{>} 0$$

לפי משפט ערך הביניים, קיים $1 < c < 4$ כך ש:

$$f(c) = 0 \Rightarrow$$

$$3c - \sqrt{c^3} - r = 0 \Rightarrow$$

$$3c - \sqrt{c^3} = r$$

כנדרש.

2. נגדיר $f(x)=2^x-\frac{\alpha}{x}$ לכל $x\neq 0$. הפונקציה רציפה מאש"ר. נשים לב שעבור $x=1$:

$$\underbrace{f(1)}=2^1-\alpha\underbrace{>}_{a<2}2-2=\underbrace{0}$$

בנוסף, נראה ש:

$$\lim_{x\to 0+}2^x-\frac{\alpha}{x}\underset{AOL}{=}2^0-\infty=-\infty$$

לכן עבור δ קטנה מספיק, קיים $0<x_1<1$ כך ש:

$$f(x_1)<0$$

לפי משפט ערך הביניים, קיימת נקודה $0<c<1$ כך ש:

$$f(c)=0\Rightarrow$$

$$2^c-\frac{\alpha}{c}=0\Rightarrow$$

$$2^c=\frac{\alpha}{c}$$

כנדרש.

3. נגדיר את הפונקציה:

$$g(x)=f(x)-f\left(x+\frac{1}{2}\right),\ \ \forall 0\leq x\leq\frac{1}{2}$$

הפונקציה נמצאת בטווח של f ובנוסף היא רציפה מאש"ר. מתקיים:

$$g(0)=f(0)-f\left(\frac{1}{2}\right)$$

$$\underbrace{g\left(\frac{1}{2}\right)}=f\left(\frac{1}{2}\right)-f(1)\underbrace{=}_{f(1)=f(0)}\underbrace{-g(0)}$$

ולכן $g\left(\frac{1}{2}\right)\cdot g(0)\leq 0$.
אם $g\left(\frac{1}{2}\right)\cdot g(0)=0$, לפחות אחד מהם מתאפס ואז זה יגרור:

$$0=g\left(\frac{1}{2}\right)=f\left(\frac{1}{2}\right)-f(1)\Rightarrow\underbrace{f\left(\frac{1}{2}\right)=f(1)}$$

או

$$0=g(0)=f(0)-f\left(\frac{1}{2}\right)\Rightarrow\underbrace{f(0)=f\left(\frac{1}{2}\right)}$$

ב־2 המקרים קיבלנו $f\left(x\right)=f\left(x+\frac{1}{2}\right)$ כאשר $0\leq x\leq\frac{1}{2}$

אם $g\left(\frac{1}{2}\right)\cdot g\left(0\right)<0$ אז לפי משפט ערך הביניים, קיים $0<c<\frac{1}{2}$ כך ש:

$$g\left(c\right)=0\Rightarrow$$

$$f\left(c\right)-f\left(c+\frac{1}{2}\right)=0\Rightarrow$$

$$f\left(c\right)=f\left(c+\frac{1}{2}\right)$$

כנדרש.

3 שאלה 3.

1. **טענה:** תהי f פונקציה רציפה ב $x_0\in\mathbb{R}$. אזי $g=f\cdot D$ רציפה ב x_0 אם ורק אם $f\left(x_0\right)=0$.
<u>הטענה נכונה</u>

($\Leftarrow$) נניח ש $f\left(x_0\right)=0$. מהיות f רציפה, מתקיים $\lim\limits_{x\to x_0}f\left(x\right)=f\left(x_0\right)=0$. אזי:

$$\lim_{x\to x_0}g\left(x\right)=\lim_{x\to x_0}f\left(x\right)\cdot D\left(x\right)\underset{B\times V}{=}0$$

וגם:

$$g\left(x_0\right)=f\left(x_0\right)\cdot D\left(x_0\right)=0$$

לכן g רציפה ב x_0.

($\Rightarrow$) נניח ש g רציפה ב x_0. כלומר:

$$\lim_{x\to x_0}g\left(x\right)=g\left(x_0\right)$$

כלומר

$$\lim_{x\to x_0}\left[f\left(x\right)\cdot D\left(x\right)\right]=f\left(x_0\right)\cdot D\left(x_0\right)$$

נניח בשלילה ש $f\left(x_0\right)\neq0$. אזי:

$$\underbrace{\lim_{x\to x_0}D\left(x\right)}\underset{f(x_0)\neq0}{=}\lim_{x\to x_0}\frac{f\left(x\right)\cdot D\left(x\right)}{f\left(x\right)}\underset{AOL}{=}\frac{f\left(x_0\right)\cdot D\left(x_0\right)}{f\left(x_0\right)}=\underbrace{D\left(x\right)}$$

קיבלנו שדיריכלה היא פונקציה רציפה, סתירה!

2. **טענה**: קיים $0.33 < x < 0.34$ כך ש $\ln(x)$ אי רציונלי.
<u>הטענה נכונה</u>.

נניח בשלילה שלכל $0.33 < x < 0.34$, $\ln(x)$ רציונלי. כלומר $\mathrm{Im}(f)\in\mathbb{Q}$ לכל $0.33 < x < 0.34$. נשים לב גם ש $\ln(x)$ רציפה בתחום זה. לכן לפי הטענה בתרגול 9, f היא קבועה בתחום $0.33 < x < 0.34$. סתירה לכך ש $\ln(x)$ היא פונקציה עולה <u>ממש</u> (הסתמכנו על זה בשיעור 14)
☺

3. **טענה**: תהי $f:(0,\infty)\to\mathbb{R}$ פונקציה כך ש $f(x)\cdot f\left(\frac{1}{x}\right) < 0$ לכל $0 < x \neq 1$ ונניח ש f רציפה ב $x_0 = 1$. אזי $f(1) = 0$.
<u>הטענה נכונה</u>.

נתון ש f רציפה ב $x_0 = 1$, לכן:

$$\lim_{x\to 1} f(x) = f(1)$$

$$\lim_{x\to 1} f\left(\frac{1}{x}\right) \underset{y=\frac{1}{x}}{=} \lim_{y\to 1} f(y) = f(1)$$

כלומר גם $f\left(\frac{1}{x}\right)$ רציפה ב $x_0 = 1$ (היה ניתן להראות גם באמצעות אש"ר הרכבה)
נתון:

$$f(x)\cdot f\left(\frac{1}{x}\right) < 0, \quad \forall 0 < x \neq 1$$

כאשר $x \to 1$, הגבולות קיימים (הראינו) וגם התנאי לעיל מתקיים (עבור דלתא קטנה מספיק). מאש"ג, גבול המכפלה קיים. לפיכך ממונוטוניות הגבול מתקיים:

$$\lim_{x\to 1}\left[f(x)\cdot f\left(\frac{1}{x}\right)\right] \leq \lim_{x\to 1} 0$$

מאש"ג כפל:

$$\lim_{x\to 1} f(x)\cdot \lim_{x\to 1} f\left(\frac{1}{x}\right) \leq \lim_{x\to 1} 0 \Rightarrow$$

$$f^2(1) \leq 0$$

ריבוע של מספר הוא אי שלילי ולכן

$$f(1) = 0$$

☺

4 שאלה 4.

תהי $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ פונקציה רציפה וחסומה שאינה קבועה, ויהיו $M=\sup Im\left(f\right)$, $m=$ $\inf Im\left(f\right)$. צ"ל ש $\left(m,M\right)\subseteq Im\left(f\right)\subseteq\left[m,M\right]$

נתון שהפונקציה חסומה ולכן m,M קיימים. כמו כן f רציפה ב$\mathbb{R}$ ולכן התמונה שלה היא קטע.

מתכונת הסופרמום והאינפימום של תמונת הפונקציה, לכל $x\in\mathbb{R}$, מתקיים:

$$m\leq f\left(x\right)\leq M\underset{constant}{\Rightarrow}Im\left(f\right)\subseteq\left[m,M\right]$$

שנית, נראה שלכל $r\in\left(m,M\right)$, מתקיים $r\in Im\left(f\right)$.

יהי $r\in\left(m,M\right)$. לפי תכונת האפסילון של החסם התחתון, קיים $x_{1}\in\mathbb{R}$ כך ש:

$$f\left(x_{1}\right)<m+\boxed{r-m}=r$$

לפי תכונת האפסילון של החסם העליון, קיים $x_{2}\in\mathbb{R}$ כך ש:

$$f\left(x_{2}\right)>M-\boxed{M-r}=r$$

כלומר קיבלנו ש

$$f\left(x_{1}\right)<r<f\left(x_{2}\right)$$

כלומר $r\in Im\left(f\right)$

קיבלנו ש $\left(m,M\right)\subseteq Im\left(f\right)\subseteq\left[m,M\right]$

כנדרש.

5 שאלה 5.

תהי $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ פונקציה הרציפה ב $\mathbb{Z}$ ואי־רציפה ב $\mathbb{R}\backslash\mathbb{Z}$ (כלומר רציפה ב־x_{0} אם ורק אם $x_{0}\in\mathbb{Z}$)

1. ניקח את הפונקציה:

$$f\left(x\right)=\begin{cases}\sin\left(\pi x\right) & x\in\mathbb{Q}\\ 0 & x\in\mathbb{R}\backslash\mathbb{Q}\end{cases}$$

$(*)$ממעגל היחידה, π משלים חצי סיבוב, לכן כפולה שלמה של π משלימה מספר שלם של חצאי סיבובים ומובילה לצידה הימני או השמאלי של מעגל היחידה בה הגובה, כלומר $\sin$ מתאפס.

במילים אחרות, לכל $k\in\mathbb{Z}$, $\sin\left(\pi\cdot k\right)=0$

ראשית נראה שf לא רציפה לכל $x_{0}\in\mathbb{R}\backslash\mathbb{Z}$

יהי $x_{0}\in\mathbb{Q}\backslash\mathbb{Z}$. נשים לב ש:

$$f\left(x_{0}\right)=\sin\left(\pi\cdot x_{0}\right)\underset{**}{\neq}0$$

(**) שהרי לא הושלם מספר שלם של חצאי סיבובים, לא ייתכן כי ה"מחוג" ייעצר על צידו הימני או השמאלי של מעגל היחיד, שם $\sin$ מתאפס.
נניח בשלילה שהפונקציה רציפה ב־x_0, לכן קיים $\delta_1 > 0$ כך שלכל $|x - x_0| < \delta_1$ מתקיים:

$$|f(x) - f(x_0)| < \frac{|\sin(\pi \cdot x_0)|}{2}$$

מצפיפות האי רציונלים, קיים $r \in \mathbb{R} \backslash \mathbb{Q}$ כך ש $|r - x_0| < \delta_1$ ולכן מקיים:

$$|f(r) - f(x_0)| = |0 - \sin(\pi \cdot x_0)| = |\sin(\pi \cdot x_0)| < \frac{|\sin(\pi \cdot x_0)|}{2}$$

סתירה !

יהי $x_0 \in \mathbb{R} \backslash \mathbb{Q}$. נשים לב ש:

$$f(x_0) = 0$$

וכי גם במקרה הזה

$$\sin(\pi \cdot x_0) \underset{**}{\neq} 0$$

כעת נסתכל על הגבול, נסתכל על סביבות דלתא קטנות ככל האפשר, מצפיפות הרציונליים, תמיד יהיו רציונליים לכל סביבת דלתא. קיים $x \in \mathbb{Q} \backslash \mathbb{Z}$ כך ש $|x - x_0| < \delta$ לכל $\delta > 0$:

$$\underbrace{\lim_{x \to x_0} f(x)} = \lim_{x \to x_0} \sin(\pi \cdot x) \underset{AOC}{=} \sin(\pi \cdot x_0) \underbrace{\neq} 0 = \underbrace{f(x_0)}$$

כלומר אינה רציפה לכל $x_0 \in \mathbb{R} \backslash \mathbb{Z}$
כעת נראה שהיא רציפה ב־$\mathbb{Z}$. יהי $n_0 \in \mathbb{Z}$. ראשית נראה כי:

$$f(n_0) = \sin(\pi \cdot n_0) \underset{*}{=} 0$$

כעת נסתכל על הגבול, נסתכל על סביבות דלתא קטנות ככל האפשר, מצפיפות תמיד יהיו רציונליים ואי רציונליים לכל סביבת דלתא. עבור $x \in \mathbb{R} \backslash \mathbb{Q}$ כך ש $|x - n_0| < \delta$ לכל $\delta > 0$:

$$\lim_{x \to n_0} f(x) = \lim_{x \to n_0} 0 \underset{AOL}{=} 0$$

עבור $x \in \mathbb{Q}$ כך ש $|x - n_0| < \delta$ לכל $\delta > 0$:

$$\lim_{x \to n_0} f(x) = \lim_{x \to n_0} \sin(\pi \cdot x_0) \underset{AOC}{=} \sin(\pi \cdot n_0) = 0$$

כלומר בכל מקרה:

$$\lim_{x \to n_0} f(x) = 0 = f(n_0)$$

ולכן f רציפה לכל $x_0 \in \mathbb{Z}$

2. סטודנט א' טעה בסדר הפעולות שלו. ברציפות של n הוא קיבע את ε_0, זה מהלך חוקי והוא יכל לעשות זאת מכיוון שזה היה נכון לכל $\varepsilon > 0$. מהצפיפות הוא הצהיר שקיים $x_1 \in \mathbb{R} \backslash \mathbb{Z}$ שנמצא במרחק דלתא מ־n ולכן מקיים את הגדרת הצפיפות, שזה גם נכון.

לאחר מכן הוא הציג שמהיות x_1 לא מספר שלם, הפונקציה לא רציפה ב־x_1, ולכן קיים $\varepsilon > 0$ כך שלכל $\delta > 0$ קיים $|x - x_1|$ כך ש $\varepsilon \geq |f(x) - f(x_1)|$
זה נכון, אבל למרבה הפלא סטודנט א' החליט שהאפסילון הספציפי הזה (שהרי מדובר בקיים ולא לכל), הוא ε_0 שנקבע בהתחלה. זו הנחה שגויה וההנחה הזו הייתה גורלית להמשך ההוכחה שלו.