

北京大学信息科学技术学院期中试卷

考试科目： 集合论与图论 姓名： _____ 学号： _____

考试时间： 2018 年 11 月 20 日 任课教师： _____

题号	一	二	三	四	五	六			总分
分数									
阅卷人									

一、填空题（共20分，每小题2分）

(1) 归纳集是包含 _____ 并且对于 _____ 运算封闭的集合。

(2) 自然数是 _____ 每一个归纳集的集合；自然数集是 _____ 每一个归纳集的集合。

(3) 集合 A 的后继是 _____；集合 A 是传递集当且仅当 _____（写出任何一个充要条件即可）。

(4) 直线上所有开区间的集合的基数是 _____；平面上所有曲线的集合的基数是 _____。（曲线是闭区间在连续映射下的像。）

(5) 两个无穷集的并集的基数总是 _____ 其中一个集合的基数；每个集合的幂集的基数总是 _____ 这个集合的基数。

(6) $A = \{a, b, c, d, e, f, g\}$, R, S 是 A 上的等价关系, $A/R = \{\{a, b, c\}, \{d, e, g\}, \{f\}\}$, $A/S = \{\{a, c\}, \{b, d, g\}, \{f, g\}\}$, 则 $A/R \cap S =$ _____

(7) 设 $R = \{(x, y) | x \in \mathbb{N} \wedge y \in \mathbb{N} \wedge x + 3y = 12\}$, 则 $R^2 =$ _____

(8) $A = \{a, b, c, d\}$, R 是 $P(A)$ 上的 " \subseteq " 关系, 令 $B = \{\{a, b\}, \{b, c\}, \{c, d\}, \{a, c, d\}, \{b, c, d\}\}$,

则 B 的极大元是 _____, 下确界是 _____。

(9) R 是 A 上的二元关系, 若 $R^7 = R^{15}$, 则化简 R^{2018} 的结果是_____。

(10) $\bigcup \bigcup \langle \{a, b\}, \langle a, b \rangle \rangle =$ _____。

二、(16 分) 将下列推理符号化, 并给出推理过程

“每个喜欢步行的人都不喜欢坐汽车; 每个人或者喜欢坐汽车或者喜欢骑自行车; 并非每个人都喜欢骑自行车。所以, 有人不喜欢步行。”

三、(16 分) 设 $h \in (X \rightarrow X)$, 证明: 对于任意的 $f, g \in (X \rightarrow X)$, 只要 $h \circ f = h \circ g$ 就有 $f = g$ 当且仅当 h 是单射的。

四、(16 分) 求自然数的所有有穷序列的集合的基数并证明。该集合可以写为 $\bigcup_{i=1}^{\infty} N^i = \{ \langle a_0, a_1, \dots, a_k \rangle \mid a_0, a_1, \dots, a_k \in N, k=1, 2, \dots \}$, 其中 $N^i = N \times N \times \dots \times N$ (i 个 N 的卡氏积)。

五、(16 分) 证明 (M, \emptyset, P) 是 Peano 系统, 其中 \emptyset 是空集, P 是求幂集运算, M 是从空集开始不断求幂集形成的集合 $(M = \{\emptyset, P(\emptyset), P(P(\emptyset)), \dots\})$ 。

六、(16 分) 设 R 是集合 A 上的二元关系, 定义 $S = \{ (a, b) \mid \exists c \in A, (a, c) \in R, (c, b) \in R \}$. 证明: 若 R 是 A 上的等价关系, 则 S 也是 A 上的等价关系, 且 $S = R$ 。