北京大学信息科学技术学院期中试卷

考试科目：集合论与图论　姓名：参考答案　学号：________

一、填空题（共20分，每小题2分）

（1）归纳集是包含_空集 / ∅ / 自然数集_并且对于_后继_运算封闭的集合。

（2）自然数是_属于_每一个归纳集的集合；自然数集是_包含于_每一个归纳集的集合。

(3)集合 A 的后继是_$A\cup\{A\}$ / A^+_；集合 A 是传递集当且仅当_A 的元素的元素还是 A 的元素 / $\forall x(\exists y(y\in A\wedge x\in y)\to x\in A)$ / $\forall x\forall y(y\in A\wedge x\in y\to x\in A)$ / $\cup A\subseteq A$ / $A\subseteq P(A)$ / P(A)是传递集 / $\forall x(x\in A\to x\subseteq A)$_（写出任何一个充要条件即可）。

(4) 直线上所有开区间的集合的基数是_$\aleph_1$ / $\aleph$ (考虑两个端点，$R\times R$)；平面上所有曲线的集合的基数是_$\aleph_1$ / $\aleph$_（实连续函数的值由有理点处的值决定，考虑 $Q\to R\approx R^N\approx 2^N\approx R$）_。（曲线是闭区间在连续映射下的像。）

(5) 两个无穷集的并集的基数总是_等于 / 大于等于 / 不小于_其中一个集合的基数；每个集合的幂集的基数总是_大于 / 严格大于 / 不小于且不等于_这个集合的基数。

(6) $A=\{a,b,c,d,e,f,g\}$，R,S是A上的等价关系，$A/R=\{\{a,b,c\},\{d,e,g\},\{f\}\}$, $A/S=\{\{a,c\},\{b,d,g\},\{f,g\}\}$，则 $A/R\cap S=$_{ {a,c}, {b}, {d,e}, {f}, {g} }_

(7) 设$R=\{(x,y)|x\in N\wedge y\in N\wedge x+3y=12\}$，则$R^2$=_{ (3,3), (12,4) }_

R={ (0, 4), (3, 3), (6, 2), (9, 1), (12, 0) } ，　R^2={ (3, 3), (12, 4) }

(8) $A=\{a,b,c,d\}$, R是P(A)上的"⊆"关系，令$B=\{\{a,b\},\{b,c\},\{c,d\},\{a,c,d\},\{b,c,d\}\}$,

则B的极大元是_{a,b}, {a,c,d}, {b,c,d}_，下确界是_∅_。

(9) R是A上的二元关系，若$R^7=R^{15}$，则化简R^{2018}的结果是_R^{10}_。

$$R^{2018}=R^{7+251*8+3}=R^{7+3}=R^{10}$$

(10) $\cup\cup<\{a,b\},<a,b>>=$ ___{ a,b, {a}, {a,b} }___。

$$<\{a,b\},<a,b>>=\{\{\{a,b\}\},\{\{a,b\},<a,b>\}\}=\{\{\{a,b\}\},\{\{a,b\},\{\{a\},\{a,b\}\}\}\}$$

$$\cup\{\{\{a,b\}\},\{\{a,b\},\{\{a\},\{a,b\}\}\}\}=\{\{a,b\},\{\{a\},\{a,b\}\}\}$$

$$\cup\{\{a,b\},\{\{a\},\{a,b\}\}\}=\{a,b,\{a\},\{a,b\}\}$$

二、（16 分） 将下列推理符号化，并给出推理过程

“每个喜欢步行的人都不喜欢坐汽车；每个人或者喜欢坐汽车或者喜欢骑自行车；并非每个人都喜欢骑自行车。所以，有人不喜欢步行。”

P(x):x 是人；W(x):x 喜欢步行； C(x):x 喜欢坐汽车；B(x):x 喜欢骑车 （4 分）

$\forall x(P(x)\wedge W(x)\rightarrow \neg C(x)) \quad \wedge \quad \forall x(P(x)\rightarrow (C(x)\vee B(x))) \ \wedge \ \neg\forall x(P(x)\rightarrow B(x))$

$\Rightarrow \exists x(P(x)\wedge \neg W(x))$（4 分）

$\neg\forall x(P(x)\rightarrow B(x)) \Rightarrow \exists x(P(x)\wedge\neg B(x)) \Rightarrow P(c)\wedge\neg B(c) \Rightarrow P(c)$ （2 分）

$P(c)\rightarrow (C(c)\vee B(c)) \Rightarrow C(c)$ （2 分）

$P(c)\wedge W(c)\rightarrow \neg C(c) \Rightarrow P(c)\wedge W(c)=F \Rightarrow \neg W(c)$ （2 分）

$P(c)\wedge\neg W(c) \Rightarrow \exists x(P(x)\wedge\neg W(x))$ （2 分）

三、（16 分） 设 h∈(X->X)，证明：对于任意的 f,g ∈(X->X)，只要 h∘f =h∘g 就有 f=g 当且仅当 h 是单射的。

必要性：反证法（1 分） 若 h 不是单射，则存在 x1,x2，使得 h(x1)=h(x2) （2 分）

则存在两个函数 f,g，令 $f: X\rightarrow X$,f(x)=x1，$g: X\rightarrow X$，g(x)=x2；（3 分） 使得 h∘f =h∘g，但 $f\neq g$，与已知矛盾。（2 分）所以 h 是单射的。

充分性：h 是单射的，则 h 存在左逆 h'，h' ∘ h = I_X （4 分）

对于任意函数 f,g，若 h∘f =h∘g，则 （4 分）

h'∘h∘f =h'∘h∘g ⟹ f=g

四、（16 分）求自然数的所有有穷序列的集合的基数并证明。该集合可以写为 $\cup_{i=1}^{\infty} N^i$ = {$<a_0,a_1,\ldots,a_k>$ | $a_0,a_1,\ldots,a_k\in N$，k=0,1,2,... }，其中 $N^i=N\times N\times\ldots\times N$（i 个 N 的卡氏积）。

$\aleph_0$（4 分） （这题若答案错则最多给 8 分）

证明一：（1）构造从该集合到 N 的单射：利用歌德尔编码：让$\langle a_0,a_1,\ldots,a_k\rangle$

对应于 $p_1^{a_0+1}p_2^{a_1+1}p_3^{a_2+1}\ldots p_{k+1}^{a_k+1}$， 其中 $p_1, p_2, p_3,\ldots, p_{k+1}$ 是前 k+1 个素数。（8 分）

（2）构造从 N 到该集合的单射　　　（4 分）

证明二：每个 N^i 的基数都是$\aleph_0$，（4 分）

所以$\bigcup_{i=1}^{\infty} N^i$的基数是$\aleph_0\times\aleph_0=\aleph_0$ （或者利用 康托对角线法 证明）。（8 分）

（一种常见错误是：$\bigcup_{i=1}^{\infty} N^i$的基数是$\aleph_0{}^{\aleph_0}=2^{\aleph_0}=\aleph_1$）

五、（16 分）证明（M,∅,P）是 Peano 系统，其中∅是空集，P 是求幂集运算，M 是从空集开始不断求幂集形成的集合（M={∅,P(∅),P(P(∅)),…}）。

证明一：皮亚诺系统的定义：（1） ∅∈M 显然 （3 分）

（2） M 在 P 下封闭 显然 （3 分） （3） ∅∉ran P，显然 （3 分）

（4）P 是单射： 因为 A=∪P(A), B=∪P(B), 所以 A=B⇔P(A)=P(B) （3 分）

（5）极小性公理：A⊆M ∧ ∅∈A ∧ A 在 P 下封闭 ⇒ A=M （M⊆A） 显然 （4 分）

证明二：与自然数系统<N,0,+>同构。(酌情给分)

六、（16 分） 设 R 是集合 A 上的二元关系，定义$\mathbf{S}=\{(\mathbf{a},\mathbf{b})\mid \exists\mathbf{c}\in\mathbf{A},(\mathbf{a},\mathbf{c})\in\mathbf{R},(\mathbf{c},\mathbf{b})\in\mathbf{R}\}$. 证明：若 R 是 A 上的等价关系，则 S 也是 A 上的等价关系，且 S=R。

(1)S 是自反的：因为 R 是自反的，对任意 a∈A，有<a,a>∈R,

根据 S 的定义，有<a,a>∈S，所以 S 是自反的。　　　（4 分）

(2)S 是对称的：若<a,b>∈S, 则存在 c∈A，使<a,c>∈R <c,b>∈R，

因为 R 是对称的，故有<c,a>∈R, (b,c)∈R,

根据 S 的定义，有<b,a>∈S,所以 S 是对称的。　　　（4 分）

(3)S 是传递的：如果<a,b>∈S，<b,c>∈S，则存在 d∈A 使<a,d>∈R 且<d,b>∈R。

因为 R 是传递的，所以<a,b>∈R。且存在 e∈A,使(b,e)∈R 且 (e,c)∈R。

因为 R 是传递的，所以<b,c>∈R。故 S 是传递的。　　　（4 分）

（4）S=R　　（略）　　　（4 分）