Universidad de las Fuerzas Armadas

Métodos Numéricos

Actividad 2

Apellidos: Guzmán Cajas

Nombres: Diego Alejandro

NRC: 3657

GitHub: https://github.com/GuzmanDiegoEspe/MetodosNumericos-GuzmanDiego

1) Utilice todos los métodos estudiados (Newton, Bisección y Secante) para encontrar la raíz de la siguiente función: $f(x) = x + cos(x)$ en el intervalo $[-2, 0]$, con cuatro cifras decimales.

Metodo de Bisección

Pasos para resolver:

1) Obtenemos el punto medio. c = $\frac{a+b}{2}$

2) Evaluamos f(a), f(b), f(c)

3) Obtener un nuevo intervalo

Datos:

$f(x) = x + cos(x)$

$[-2, 0] = [a, b]$

$a = -2$

$b = 0$

$i = 1$

Primera iteración i = 1

$[-2; 0]$

$1)$

c = $\frac{a+b}{2}$ = $\frac{-2+0}{2}$ = -1

$2)$

f(a) = $f(-2)$ = $-2 + cos(-2) = -2,416$

f(b) = $f(0)$ = $cos(0) = 1$

f(c) = $f(-1)$ = $-1 + cos(-1) = -0,460$

$3)$

$f(c) * f(b) < 0$

$[-1; 0]$

Segunda iteración i = 2

$[-1; 0]$

$1)$

c = $\frac{a+b}{2}$ = $\frac{-1+0}{2}$ = -0,5

$2)$

f(a) = $f(-1)$ = $-1 + cos(-1) = -0,460$

f(b) = $f(0)$ = $cos(0) = 1$

f(c) = $f(-0,5)$ = $-0,5 + cos(-0,5) = 0,378$

$3)$

$f(a) * f(c) < 0$

$[-1; -0,5]$

Tercera iteración i = 3

$[-1; -0,5]$

$1)$

c = $\frac{a+b}{2}$ = $\frac{-1-0,5}{2}$ = -0,75

$2)$

f(a) = $f(-1)$ = $-1 + cos(-1) = -0,460$

f(b) = $f(-0,5)$ = $-0,5 + cos(-0,5) = 0,378$

f(c) = $f(-0,75)$ = $-0,75 + cos(-0,75) = -0,018$

$3)$

$f(b) * f(c) < 0$

$[-0,75; -0,5]$

Cuarta iteración i = 4

$[-0,75; -0,5]$

$1)$

c = $\frac{a+b}{2}$ = $\frac{-0{,}75-0{,}5}{2}$ = -0,625

$2)$

f(a) = $f(-0,75)$ = $-0,018$

f(b) = $f(-0,5)$ = $0,378$

f(c) = $f(-0,75)$ = $0,186$ (No es raíz)

$3)$

$f(a)*f(c)<0$

$[-0,75;-0,625]$

Quinta iteración i = 5

$[-0,75;-0,625]$

$1)$

c = $\frac{a+b}{2}$ = $\frac{-0{,}75-0{,}625}{2}$ = -0,688

$2)$

f(a) = $f(-0,75)$ = $-0,018$

f(b) = $f(-0,625)$ = $0,186$

f(c) = $f(-0,688)$ = $0,085$ (No es raíz)

$3)$

$f(a)*f(c)<0$

$[-0,75;-0,688]$

Sexta iteración i = 6

$[-0,75;-0,688]$

$1)$

c = $\frac{a+b}{2}$ = $\frac{-0{,}75-0{,}688}{2}$ = -0,719

$2)$

f(a) = $f(-0,75)$ = $-0,018$

f(b) = $f(-0,688)$ = $0,085$

f(c) = $f(-0,719)$ = $0,033$ (No es raíz)

$3)$

$f(a) * f(c) < 0$

$[-0,75; -0,719]$

Septima iteración i = 7

$[-0,75; -0,719]$

$1)$

c = $\frac{a+b}{2}$ = $\frac{-0,75-0,719}{2}$ = -0,735

$2)$

f(a) = $f(-0,75)$ = $-0,018$

f(b) = $f(-0,719)$ = $0,033$

f(c) = $f(-0,735)$ = $0,007$ (No es raíz)

$3)$

$f(a) * f(c) < 0$

$[-0,75; -0,735]$

Octava iteración i = 8

$[-0,75; -0,7135]$

$1)$

c = $\frac{a+b}{2}$ = $\frac{-0,75-0,735}{2}$ = -0,743

$2)$

f(a) = $f(-0,75)$ = $-0,018$

f(b) = $f(-0,735)$ = $0,007$

f(c) = $f(-0,743)$ = $-0,006$ (No es raíz)

$3)$

$f(b) * f(c) < 0$

$[-0,743; -0,735]$

Novena iteración i = 9

$1)$

c = $\frac{a+b}{2}$ = $\frac{-0,743-0,735}{2}$ = -0,739

$2)$

f(a) = $f(-0,743)$ = $-0,006$

f(b) = $f(-0,735)$ = $0,007$

f(c) = $f(-0,739)$ = $-0,000$

La raíz de nuestra función $f(x) = x + cos(x)$ es:

$x = -0,739$

Metodo de Newton

Datos:

$f(x) = x + cos(x)$

[a,b] = [-2,0]

$x_0 = 0$

f(-2) = -2 + cos(-2) = -2,416

i = 0, 1, 2 , 3

f(0) = cos(0) =1

xi + 1 = xi + $\frac{f(xi)}{f'(xi)}$

f'(x) = 1-sen(x)

Primera iteración i = 0

1)

$x_0 = 0$

$f(xi) = f(x_0) = f(0) = cos(0) = 1$

$f'(xi) = f'(x_0) = f'(0) = 1 - sen(0) = 1$

2)

x_1 = x_0 + $\frac{f(x_0)}{f'(x0)}$

x_1 = 0 + $\frac{1}{1}$ = 1

Segunda iteración i = 1

1)

$x_1 = 1$

$f(xi) = f(x_1) = f(-1) = -1 + cos(-1) = -0,460$

$f'(xi) = f'(x_1) = f'(-1) = 1 - sen(-1) = 1,841$

2)

x_2 = x_1 + $\frac{f(x_1)}{f'(x1)}$

x_2 = -1 - $\frac{(-0,460)}{1,841}$ = -0,750

Tercera iteración i = 2

1)

$x_2 = -0,750$

$f(xi) = f(x_2) = f(-0,750) = -0,018$

$f'(xi) = f'(x_2) = f'(-0,750) = 1,681$

2)

x_3 = x_2 + $\frac{f(x_2)}{f'(x2)}$

x_3 = -0,750 - $\frac{(-0{,}018)}{1{,}681}$ = -0,739

Cuarta iteración i = 3

1)

$x_3 = -0,739$

$f(xi) = f(x_3) = f(-0,739) = 0,0001$

$f'(xi) = f'(x_3) = f'(-0,739) = 1,6735$

2)

x_4 = x_3 + $\frac{f(x_3)}{f'(x3)}$

x_4 = -0,739 - $\frac{(0)}{1{,}673}$ = -0,739

La raíz de nuestra función $f(x) = x + cos(x)$ es:

$x = -0,739$

Metodo de Secante

Datos:

f(x) = x + cos(x)

[a,b] = [-2,0]

$x_1 - 1 = -2$ = x_0

xi = 0 = x_1

xi + 1 = xi - $\frac{f(x_i)(x_i - 1 - xi)}{f(x_i - 1 - f(x_i)}$

Primera iteración i = 1

1)

$f(xi - 1) = f(x_0) = f(-2) = -2 + cos(-2) = -2,416$

$f(x_1) = f(x_1) = f(0) = cos(0) = 1$

2)

$x_2 = x_1 - \frac{f(x_1)(x_0 - x_1)}{f(x_0) - f(x_1)}$

$x_2 = 0 - \frac{1(-2-0)}{(-2{,}416-1)}$ = -0,585

Segunda iteración i = 2

1)

$f(xi - 1) = f(x_2) = f(-0,585) = 0,249$

$f(x_1 - 1) = f(x_1) = f(0) = 1$

2)

$x_3 = x_2 - \frac{f(x_2)(x_1 - x_2)}{f(x_1) - f(x_2)}$

$x_3 = -0,585 - \frac{(0{,}249)(0+0{,}585)}{1-0{,}249}$ = - 0,779

Tercera iteración i = 3

$x_3 = -0,779; x_2 = -0,585$

1)

$f(xi - 1) = f(x_2) = f(-0,585) = 0,249$

$f(x_i = f(x_3) = f(-0,779) = -0,067$

2)

$x_4 = x_3 - \frac{f(x_3)(x_2 - x_3)}{f(x_2) - f(x_3)}$

$x_4 = -0,779 - \frac{(-0{,}067)(-0{,}585+0{,}779)}{0{,}249+0{,}067}$ = - 0,738

Cuarta iteración i = 4

$x_4 = -0,738; x_3 = -0,779$

1)

$f(xi - 1) = f(x_3) = f(-0,779) = -0,067$

$f(x_i = f(x_4) = f(-0,738) = -0,002$

2)

$x_5 = x_4 - \frac{f(x_4)(x_3 - x_4)}{f(x_3) - f(x_4)}$

$x_4 = -0,738 - \frac{(-0{,}002)(-0{,}779+0{,}738)}{-0{,}067-0{,}002}$ = - 0,739

La raíz de nuestra función $f(x) = x + cos(x)$ es:

$x = -0,739$

2) Encuentre la intersección de las siguientes funciones: $f(x) = 3 - x$ y $g(x) = ln(x)$, con tres cifras decimales.

Al graficar encontramos que, el punto de corte de las 2 funciones son iguales.

f(x) = g(x)

3 - x = ln |x|

ln |x| + x - 3 = 0

Generamos una nueva función:

h(x) = ln|x|+x-3

Las raices de h(x) serán los puntos de intersección de: f(X) y g(x)

Metodo de Newton

$x_i + 1 = x_i - \frac{f(x_i)}{f'(x_i)}$

Datos:

h(x) = ln|x| + x - 3

$x_0 = 2$

i = 0, 1 , 2 , 3 , ... n-1

h'(x) = $\frac{1}{x}$ + 1

Primera iteración i = 0

$x_0 = 2$

1)

$h(x_i) = h(x_0) = h(2) = ln|2| + 2 - 3 = -0,307$

$h'(x_i) = h'(x_0) = h'(2)$ = $\frac{1}{2}$ +1 = $1,5$

2)

$x_1 = x_0 - \frac{h(x_0)}{h'(x_0))}$

$x_i = 2 - \frac{(-0{,}307)}{(1{,}5)}$ = 2,205

Segunda iteración i = 1

$x_1 = 2,205$

1)

$h(x_i) = h(x_1) = h(2,205) = -0,004$

$h'(x_i) = h'(x_1) = h'(2,205) = 1,454$

2)

$x_2 = x_1 - \frac{f(x_1)}{h'(x_1)}$

$x_2 = 2,205 - \frac{(-0{,}004)}{(1{,}454)}$ = 2,208

Tercera iteración i = 2

$x_2 = 2,208$

1)

$h(x_i) = h(x_2) = h(2,208) = ln|2,208| + 2,208 - 3 = -0,000$

$h'(x_i) = h'(x_2) = h'(2,208)$ = $\frac{1}{2{,}208}$ +1 $= 1,453$

2)

$x_3 = x_2 - \frac{f(x_2)}{h'(x_2)}$

$x_3 = 2,208 - 0 = 2,208$ (Raíz)

f(x) = 3-x

f(2,208) = 3 - 2,208 = 0,792

Puntos de intersección son: (2,208; 0,792)

3) Programe el método de sustitución regresiva. Analice el número de operaciones del algoritmo para matrices de tamaño 3 × 3

Ejercicio a resolver:

$$\begin{aligned} 2x + 4y - z &= 2 \quad (1) \\ y - z &= 3 \quad (2) \\ 2z &= 1 \quad (3) \end{aligned}$$

In [ ]:

```
import numpy as np

# Definimos los datos de nuestra matriz
A = np.array([[2,4,-1],[0,1,-1],[0,0,2]])
# Terminos de X,Y,Z
b = np.array([2,3,1])

n = np.size(b)
x = np.zeros(n)

# Bucle regresivo
for i in range(n-1,-1,-1):
    sumj=0
    for j in range(i+1,n):
        sumj+=A[i,j]*x[j]
    x[i]=(b[i]-sumj)*1/A[i,i]
print(x)
```

Analisis del número de operaciones del algoritmo para matrices 3x3

Las operaciones del algoritmo se definen como el coste computacional, este hace referencia al número de operaciones basicas que realiza al resolver un problema. El metodo de sustitución regresiva su coste computacional se traduce a : n^2 operaciones. Al ser una matriz de 3x3 entonces : nxn = 3x3 , n = 3 entonces 3^2, por lo tanto las operaciones que se realizan en este algoritmo serán: 9 operaciones.

4) Una importante parte de la física es la termodinámica que es el estudio de la transferencia de calor. En este ejercicio vamos a determinar la distribución de temperatura de estado estable de una placa delgada cuando se conoce la temperatura en los bordes. Suponga que la placa que se ilustra en la figura representa una sección transversal de una viga de metal, con flujo de calor despreciable en la dirección perpendicular a la placa. Sean $T_1 T_2 T_3$ y T_4 las temperaturas en los cuatro nodos interiores de la malla en la figura. La temperatura en un nodo es aproximadamente igual al promedio de las temperaturas de los cuatro nodos más cercanos, esto es, a la izquierda, arriba, a la derecha y abajo. Escriba un sistema de ecuaciones cuya solución de estimaciones de las temperaturas $T_1 T_2 T_3$ y T_4. Programe el método de eliminación gaussiana y halle el valor de estas temperaturas. Utilice como apoyo el ejercicio del literal anterior.

Promedio de los nodos mas cercanos:

$T1_1$ = $\frac{10^\circ + T_2 + 20^\circ + T_3}{4}$

$4T_1 = 30^\circ + T_2 + T_3$

$4T_1 - T_2 - T_3 = 30^\circ$ (Primera ecuación)

T_2 = $\frac{T_1 + 40^\circ + 20^\circ + T_4}{4}$

$4T_2 = 60^\circ + T_1 + T_4$

$-T_1 + 4T_2 - T_4 = 60^\circ$ (Segunda ecuación)

T_3 = $\frac{10^\circ + T_4 + T_1 + 30^\circ}{4}$

$4T_3 = 40^\circ + T_1 + T_4$

$-T_1 + 4T_3 - T_4 = 40$ (Tercera ecuación)

T_4 = $\frac{T_3 + 40^\circ + T_2 + 30^\circ}{4}$

$4T_4 = 70^\circ + T_3 + T_2$

$-T_2 - T_3 + 4T_4 = 70^\circ$ (Cuarta ecuación)

Sistema de ecuaciones:

$$\begin{align}
4T_1 - T_2 - T_3 &= 30^\circ \tag{4} \\
-T_1 + 4T_2 - T_4 &= 60^\circ \tag{5} \\
-T_1 + 4T_3 - T_4 &= 40 \tag{6} \\
-T_2 - T_3 + 4T_4 &= 70^\circ \tag{7}
\end{align}$$

Matriz:

$$\begin{bmatrix} 30 \\ 60 \\ 40 \\ 70 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} T_1 \\ T_2 \\ T_3 \\ T_4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 4 & -1 & -1 & 0 \\ -1 & 4 & 0 & -1 \\ -1 & 0 & 4 & -1 \\ 0 & -1 & -1 & 4 \end{bmatrix}$$

Codigo para hallar el valor de las temperaturas:

In [2]:

```
import numpy as np
a=np.array([[4,-1,-1,0],
            [-1,4,0,-1],
            [-1,0,4,-1],
            [0,-1,-1,4]])
b=np.array([30,60,40,70])
def EliminacionGaussiana(a,b):
    n=len(b)
    for k in range(0,n-1):
        for i in range(k+1,n):
            if a[i,k]!=0.0:
                lam = a[i,k]/a[k,k]
                a[i,k+1:n] = a[i,k+1:n]-lam*a[k,k+1:n]
                b[i] = b[i]-lam*b[k]
    for k in range(n-1,-1,-1):
            b[k] =(b[k]-np.dot(a[k,k+1:n],b[k+1:n]))/a[k,k]
    return b
EliminacionGaussiana(a,b)
```

Out[2]:

```
array([25, 40, 33, 53])
```

5) Programe el pivoteo parcial en el algoritmo de eliminación gaussiana. Utilice este nuevo programa para resolver el ejercicio anterior. Compare los resultados.

In [9]:

```
import numpy as np

A = np.array([[4,-1,-1,0],
              [-1,4,0,-1],
              [-1,0,4,-1],
              [0,-1,-1,4]])

B = np.array([[30],
              [60],
              [40],
              [70]])

AB  = np.concatenate((A,B),axis=1)
AB0 = np.copy(AB)


tamano = np.shape(AB)
n = tamano[0]
m = tamano[1]


for i in range(0,n-1,1):

    columna = abs(AB[i:,i])
    dondemax = np.argmax(columna)

    if (dondemax !=0):

        temporal = np.copy(AB[i,:])
        AB[i,:]  = AB[dondemax+i,:]
```

```
        AB[dondemax+i,:] = temporal

print('Matriz aumentada:')
print(AB0)
print('Pivoteo parcial por filas')
print(AB)
```

```
Matriz aumentada:
[[ 4 -1 -1  0 30]
 [-1  4  0 -1 60]
 [-1  0  4 -1 40]
 [ 0 -1 -1  4 70]]
Pivoteo parcial por filas
[[ 4 -1 -1  0 30]
 [-1  4  0 -1 60]
 [-1  0  4 -1 40]
 [ 0 -1 -1  4 70]]
```