

UNIVERSIDAD COMPLUTENSE DE MADRID

FACULTAD DE CIENCIAS FÍSICAS

DEPARTAMENTO DE ARQUITECTURA DE COMPUTADORES Y AUTOMÁTICA



TRABAJO DE FIN DE GRADO

Código de TFG: ACA05

Estudio y simulación de maniobras orbitales con asistencia gravitatoria

Study and Simulation of Gravity Assist Maneuvers

Supervisor: Segundo Esteban San Román

Guzmán Grande González

Grado en Física

Curso académico 2024–25

Convocatoria Extraordinaria

Resumen

Este trabajo presenta un estudio de viabilidad para una misión interplanetaria tipo CubeSat de bajo coste dirigida al sistema de las lunas galileanas de Júpiter, mediante el uso combinado de maniobras de asistencia gravitatoria y propulsión iónica. Se desarrolla un marco teórico basado en formulaciones clásicas de mecánica orbital, seguido de un análisis detallado de trayectorias que incluyen flybys en Marte, así como de las posibles ventanas de lanzamiento. A partir de los requisitos de la misión, se evalúan distintas tecnologías de propulsión, concluyendo en la necesidad de una arquitectura híbrida que combine propulsores químicos de alto empuje con sistemas iónicos para el control orbital.

Uno de los pilares fundamentales del trabajo es el diseño e implementación de un entorno de simulación en Simulink, concebido para evaluar con realismo el comportamiento dinámico de la misión bajo múltiples perturbaciones. Este simulador, de carácter modular y extensible, permite incorporar algoritmos de control de órbita, cambios de configuración en los actuadores, y nuevas maniobras complejas como capturas asistidas o maniobras de actitud. Los resultados muestran la eficacia del entorno tanto para validar trayectorias como para servir como herramienta de diseño en futuros escenarios interplanetarios de creciente complejidad.

Abstract

This work presents a feasibility study for a low-cost interplanetary CubeSat mission targeting Jupiter's Galilean moons, using a combination of gravity assist maneuvers and ion propulsion. A theoretical framework grounded in classical orbital mechanics is established, followed by a trajectory analysis including a Mars flyby and the computation of possible launch windows. Several propulsion technologies are evaluated based on mission requirements, ultimately concluding that a hybrid system combining high-thrust chemical propulsion and ion propulsion for orbital control is necessary.

A core contribution of this study is the development of a simulation environment in Simulink, specifically designed to realistically assess the mission's dynamic behavior under various perturbations. The simulator features a modular, extensible structure that allows for the implementation of orbital control algorithms, actuator configuration changes, and complex maneuvers such as attitude corrections or assisted captures. The results demonstrate the simulator's potential as both a trajectory validation platform and a powerful tool for designing future, increasingly sophisticated interplanetary missions.

Declaración Responsable sobre Autoría y Uso Ético de Herramientas de Inteligencia Artificial (IA)

Yo, **Guzmán Grande González,**

con DNI **53521361Q,**

declaro de manera responsable que el/la presente:

☒ **Trabajo de Fin de Grado (TFG)**

☐ Trabajo de Fin de Máster (TFM)

☐ Tesis Doctoral

Titulado:

Estudio y simulación de maniobras orbitales con asistencia gravitatoria,

es el resultado de mi trabajo intelectual personal y creativo, y ha sido elaborado de acuerdo con los principios éticos y las normas de integridad vigentes en la comunidad académica y, más específicamente, en la Universidad Complutense de Madrid.

Soy, pues, autor del material aquí incluido y, cuando no ha sido así y he tomado el material de otra fuente, lo he citado o bien he declarado su procedencia de forma clara -incluidas, en su caso, herramientas de inteligencia artificial-. Las ideas y aportaciones principales incluidas en este trabajo, y que acreditan la adquisición de competencias, son mías y no proceden de otras fuentes o han sido reescritas usando material de otras fuentes.

Asimismo, aseguro que los datos y recursos utilizados son legítimos, verificables y han sido obtenidos de fuentes confiables y autorizadas. Además, he tomado medidas para garantizar la confidencialidad y privacidad de los datos utilizados, evitando cualquier tipo de sesgo o discriminación injusta en el tratamiento de la información.

En Madrid, a 19 de Junio de 2025.

Firma

Índice

Resumen	2
Abstract	2
1. Introducción	5
1.1. Actualidad y futuro	5
1.2. Objetivos	5
2. Marco Teórico	6
2.1. Sistema de referencia	6
2.2. Elementos orbitales	6
2.3. Coeficientes de Lagrange	7
2.4. Ecuación de Kepler y Variables Universales	7
2.5. Problema de Lambert	9
2.6. Ecuación del cohete de Tsiolkovsky	9
3. Análisis de la misión	10
3.1. Planteamiento inicial	10
3.2. Asistencias Gravitacionales	11
3.3. Ventanas de lanzamiento	12
3.4. Trayectoria conexa numérica	13
4. Arquitectura y Propulsión	15
4.1. Payload y Bus	15
4.2. Propulsión eléctrica	15
4.3. Propulsión híbrida	16
5. Simulador Orbital	16
5.1. Implementación en Simulink	16
5.2. Perturbaciones	17
5.3. Lógica de actuación	17
5.4. Ley de Control	18
6. Resultados	18
6.1. Órbita de parking	18
6.2. Propulsión híbrida	19
7. Conclusiones	22

1. Introducción

Hasta la fecha de redacción de este trabajo, son muy pocas las misiones espaciales más allá de las órbitas terrestres que han hecho uso de los motores iónicos como principal método de propulsión, y menos aún aquellas que no hayan hecho usos de maniobras gravitacionales. Ninguna de las grandes misiones interplanetarias que tanto nos han permitido aprender sobre nuestro sistema planetario tales como las misiones americanas *Voyager 1 y 2*, o la presente misión *JUICE* [1] de la Agencia Espacial Europea con objetivos muy similares a los de la presente discusión, han basado su propulsión en sistemas de bajo empuje. No obstante, esto podría estar a punto de cambiar.

1.1. Actualidad y futuro

La propulsión iónica o eléctrica resulta de gran interés práctico, pues dotan a los vehículos espaciales de una eficiencia de combustible mucho mayor que los cohetes químicos convencionales, a cambio de empujes muchos más bajos. Esto se traduce en la posibilidad obtener un mayor potencial de cambio de velocidad, o delta-v, con la misma masa de combustible que para un motor químico. Debido a esta razón, agencias espaciales de todo el mundo tales como la *NASA*, *JAXA* y *ESA*, entre muchas otras, han comenzado a invertir e innovar en esta tecnología para aplicarla a lejanas y complejas misiones.

Algunos notables ejemplos de misiones de años recientes que incorporan esta tecnología en su propulsión son Hayabusa [2] por parte de la *JAXA*, con los asteroides de tipo Apolo Itokawa y Ryugu como objeto de estudio, o BepiColombo de la *ESA*, que con 9 maniobras gravitacionales y propulsión eléctrica solar se dedicará a estudiar Mercurio. No obstante, el puesto a la misión más ambiciosa con este tipo de propulsión lo ocupa Dawn de la *NASA* [3]. Por medio de una propulsión principalmente eléctrica, el satélite exploró Ceres y Vesta, dos objetos de remarcado interés por ser remanentes de la época de la formación planetaria, ubicados en el Cinturón de Asteroides, siendo la primera misión en orbitar dos cuerpos extraterrestres distintos.

A las ventajas de la propulsión eléctrica se suman las de los sistemas *CubeSat*, que por su bajo coste y modularidad permiten a instituciones académicas acceder a misiones espaciales con fines científicos y educativos. Esta combinación ofrece un gran potencial para extender el alcance de estas misiones más allá de la órbita terrestre. Sin embargo, y pese a propuestas como *MARIO* [4] y *HENON* [5], no se ha identificado hasta la fecha ninguna misión *CubeSat* que combine este tipo de propulsión con un perfil planetario.

1.2. Objetivos

Este trabajo busca explorar de forma pormenorizada, pero con el mayor grado de realismo posible, la viabilidad de una misión Cubesat que haga uso de las ventajas de la propulsión eléctrica, así como de las asistencias gravitacionales, fundamentales en itinerarios interplanetarios. Para ello, se examinará las potenciales trayectorias que contengan una maniobra gravitacional en torno a Marte con objeto de alcanzar Júpiter desde La Tierra. Asimismo, se analizará el estado del arte de la propulsión iónica. De cara a materializar el trabajo en resultados concretos, se indagará en la arquitectura de misiones Cubesat para plantear un proyecto completo. Por último, se desarrollará un entorno de simulación con su respectivo sistema de control que será el que realmente nos permita obtener resultados y emitir las conclusiones pertinentes junto a la capacidad que tendrá este de aceptar nuevas propuestas y mejoras para estudiar de nuevo este tipo de programas espaciales.

2. Marco Teórico

2.1. Sistema de referencia

El presente trabajo se ha elaborado con el uso de un único sistema de referencia, el Sistema de Referencia Celeste Internacional, conocido comúnmente por sus siglas en inglés *ICRF* [6]. Este es el sistema de coordenadas celestes de referencia adoptado por la Unión Astronómica Internacional (IAU) para definir posiciones precisas de objetos en el cielo, centrado en el baricentro del sistema solar y basado en objetos extragalácticos. No obstante, todos los cálculos acometidos a lo largo del trabajo tales como la determinación de las efemérides planetarias o la propagación del vector de estado del Cubesat se basan en el Sistema de Referencia Celeste Baricéntrico, conocido por sus siglas en inglés *BCRS* [6], sistema físico-relativista definido en el marco de la Relatividad general, con mismo origen y orientación que el *ICRF*.

2.2. Elementos orbitales

En Mecánica Celeste, se conoce como órbita kepleriana aquella trayectoria ideal sin perturbaciones que describe un cuerpo, en este caso un satélite, alrededor de otro cuerpo, en este caso el Sol o un planeta. Fijando el mayor cuerpo en el centro del sistema de referencia, la posición del satélite será:

$$r(\theta) = \frac{a(1 - e^2)}{1 + e \cos \theta} \quad (2.1)$$

donde a es el semieje mayor, e su excentricidad y θ o v su anomalía verdadera. Estos tres parámetros permiten describir una órbita kepleriana en el plano orbital en coordenadas polares. Al añadir la tercera dimensión, y considerando la posición del periastro como no arbitraria (punto caracterizado por $\theta = 0$) aparecen: i , la inclinación; Ω , la longitud o ascensión recta del nodo ascendente; y ω , el argumento del periastro. Finalmente, todos ellos forman los elementos orbitales clásicos $\mathbf{y} = [a, e, v, i, \Omega, \omega]$ [7].

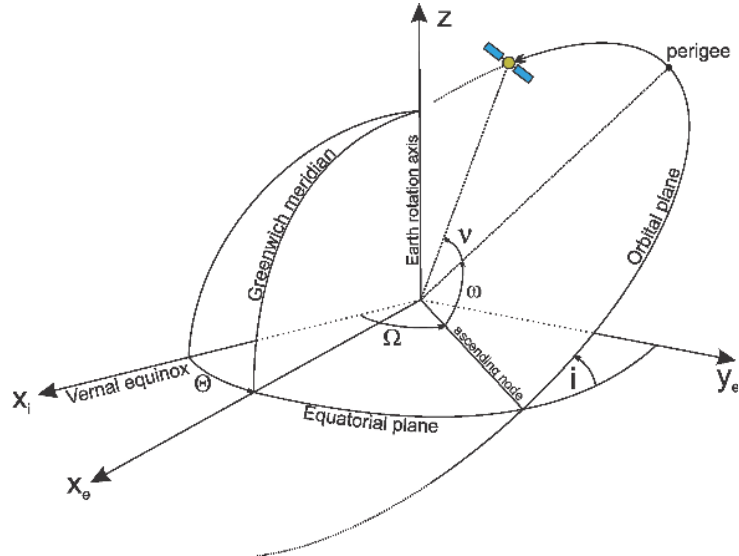


Figura 1: Representación de los elementos orbitales clásicos

En casos en los que únicamente se tiene el satélite orbitando al cuerpo central, se puede partir de los elementos orbitales clásicos y emplear un algoritmo, como el descrito por Schwarz [8], para obtener el vector de estado y así emplear la ecuación 2 para resolver su órbita. Posteriormente se puede aplicar un algoritmo inverso [9] para volver a obtener los elementos orbitales keplerianos.

2.3. Coeficientes de Lagrange

En este apartado, se establecerá lo que parece intuitivamente obvio: si se conoce la posición y la velocidad de un cierto cuerpo orbitando en un cierto instante, entonces la posición \mathbf{r} y la velocidad \mathbf{v} para cualquier otro instante puede expresarse en términos de los valores iniciales \mathbf{r}_0 y \mathbf{v}_0 , de forma que

$$\begin{cases} \mathbf{r} = f\mathbf{r}_0 + g\mathbf{v}_0 \\ \mathbf{v} = \dot{f}\mathbf{r}_0 + \dot{g}\mathbf{v}_0 \end{cases} \quad (2.2)$$

Las funciones f y g se conocen como los Coeficientes de Lagrange, atribuidos al físico y matemático francés Joseph-Louis Lagrange (1736-1813) cuyas numerosas contribuciones a la ciencia incluyen detallados cálculos del movimiento de los planetas. A continuación presentamos dichos coeficientes en función del cambio de anomalía verdadera entre la posición inicial y final $\Delta\theta$, el módulo del momento angular h , constante del movimiento y el parámetro gravitacional estandar del cuerpo central μ [7].

$$f = 1 - \frac{\mu r}{h^2}(1 - \cos \Delta\theta) \quad (2.3a)$$

$$g = \frac{rr_0}{h} \sin \Delta\theta \quad (2.3b)$$

$$\dot{f} = \frac{\mu}{h} \frac{1 - \cos \Delta\theta}{\sin \Delta\theta} \left[\frac{\mu}{h^2}(1 - \cos \Delta\theta) - \frac{1}{r_0} - \frac{1}{r} \right] \quad (2.3c)$$

$$\dot{g} = 1 - \frac{\mu r_0}{h^2}(1 - \cos \Delta\theta) \quad (2.3d)$$

2.4. Ecuación de Kepler y Variables Universales

La ecuación (2.2) establece la relación entre posición y anomalía verdadera para una órbita kepleriana. No obstante, para el desarrollo de este trabajo, resulta fundamental conocer la posición explícita en función del tiempo como se verá en el siguiente apartado. Esta relación viene descrita por las varias formas de la Ecuación de Kepler [7],

$$M_e = E - e \sin E \quad (2.4)$$

$$M_h = e \sinh F - F \quad (2.5)$$

donde e es la excentricidad de la órbita, E y F se conoce como anomalía excéntrica elíptica e hiperbólica, respectivamente, y M_e , M_h son las correspondientes anomalías medias.

Estas expresiones provienen de explotar la conservación del momento angular $h = r^2\dot{\theta}$ a través de la ecuación (2.1), que lleva a la necesidad de resolver la siguiente integral,

$$\frac{\mu^2}{h^3}(t - t_p) = \int_0^\theta \frac{d\vartheta}{(1 + e \cos \vartheta)^2} \quad (2.6)$$

donde t_p viene a indicar el instante en el que el satélite a pasado por el periápside P . Las anomalías excéntricas E y F son ángulos auxiliares a la anomalía verdadera θ que permiten simplificar el resultado de la integral para las distintas clases de órbitas, contenidos en el parámetro e . De igual manera, las anomalías medias M_e y M_h representan el ángulo recorrido por el satélite con velocidad angular igual al promedio de la verdadera, dadas por:

$$M_e = \frac{\mu^2}{h^3}(1 - e^2)^{\frac{3}{2}} = \frac{2\pi}{T_e}t \quad (2.7)$$

$$M_h = \frac{\mu^2}{h^3}(e^2 - 1)^{\frac{3}{2}} = \frac{2\pi}{T_h}t \quad (2.8)$$

De esta forma, la introducción de las anteriores variables permite relacionar la variación en la anomalía verdadera $\Delta\theta$ con el tiempo transcurrido $t - t_p$.

Como se puede apreciar, las expresiones (2.4) y (2.5) presentan una estructura muy parecida. Si prestamos atención a las ecuaciones 2.7 y 2.8, se comprueba que $M_h = -iM_e$, donde $i = \sqrt{-1}$. Esto parece indicar que la ecuación de Kepler podría ser escrita en términos de una variable universal, o anomalía universal χ , que sea válida para todas las órbitas. Si t_0 es el instante cuando la variable universal es cero, entonces el valor de χ para el instante $t_0 + \Delta t$ se encuentra como solución iterativa a la ecuación universal de Kepler [10].

$$\sqrt{\mu}\Delta t = \frac{r_0 v_{r_0}}{\sqrt{\mu}} \chi^2 C(\alpha\chi^2) + (1 - \alpha r_0) \chi^3 S(\alpha\chi^2) + r_0 \chi \quad (2.9)$$

en la que r_0 y v_{r_0} vienen a ser la distancia y velocidad radial del satélite en el instante $t = t_0$ y $\alpha = \frac{1}{a}$ es el recíproco del semieje mayor, de tal forma que $\alpha < 0, \alpha = 0, \alpha > 0$ para hipérbolas, parábolas y elipses, respectivamente. De igual manera, las funciones $C(z)$ y $S(z)$ pertenecen a la clase conocidas como *funciones de Stumpff*, definidas mediante series infinitas. Para los objetivos de este proyecto, nos basta estudiar su comportamiento para órbitas elípticas debido a su carácter cerrado, característico de los trayectos heliocéntricos que se describirán en futuras secciones. Para este caso particular, las anteriores funciones adquieren la siguiente forma, donde $z = \alpha\chi^2$.

$$S(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k z^k}{(2k+3)!} = \frac{\sqrt{z} - \sin \sqrt{z}}{(\sqrt{z})^3}, \quad z > 0 \quad (2.10)$$

$$C(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k z^k}{(2k+2)!} = \frac{1 - \cos \sqrt{z}}{z} \quad (2.11)$$

Las ecuaciones (2.3) dan f, g, \dot{f} y \dot{g} explícitamente en función del cambio de anomalía verdadera $\Delta\theta$ en el intervalo de tiempo $\Delta t = t - t_0$. Nos será muy útil relacionar los coeficiente de Lagrange en función de los cambios de anomalía excentricas ΔE y ΔF . Sin embargo, por medio de la formulación en base a las variables universales, podemos cubrir todos los tipos de órbitas con los mismos coeficientes de Lagrange [7], incluyendo las órbitas parabólicas, no estudiadas en este texto. De esta forma, los coeficientes de Lagrange en términos de de las anomalías universales adquieren la siguiente forma:

$$f = 1 - \frac{\chi^2}{r_0} C(\alpha\chi^2) \quad (2.12a)$$

$$g = \Delta t - \frac{\chi^3}{\sqrt{\mu}} S(\alpha\chi^2) \quad (2.12b)$$

$$\dot{f} = \frac{\sqrt{\mu}}{r_0} [\alpha\chi^3 S(\alpha\chi^2) - \chi] \quad (2.12c)$$

$$\dot{g} = 1 - \frac{\chi^2}{r} C(\alpha\chi^2) \quad (2.12d)$$

2.5. Problema de Lambert

Uno de los problemas fundamentales en astrodinámica es la transferencia de una nave espacial desde un punto P_1 hasta un punto P_2 en un intervalo de tiempo Δt . El problema de Lambert consiste en determinar la órbita que conecta tales puntos. La trayectoria está determinada una vez encontramos \mathbf{v}_1 , pues de acuerdo a las ecuaciones (2.2) la posición y velocidad en cualquier punto de la trayectoria quedan determinadas por \mathbf{r}_1 y \mathbf{v}_1 . Despejando las velocidades de las anteriores ecuaciones, la solución al problema será

$$\mathbf{v}_1 = \frac{1}{g}(\mathbf{r}_2 - f\mathbf{r}_1) \quad (2.13a)$$

$$\mathbf{v}_2 = \frac{1}{g}(\dot{g}\mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1) \quad (2.13b)$$

Por tanto, el problema radica en obtener los coeficientes de Lagrange f, g y \dot{g} en función de los datos del problema. En [11] se obtiene la solución

$$f = 1 - \frac{y}{r_1}, \quad g = A\sqrt{\frac{y}{\mu}}, \quad \dot{g} = 1 - \frac{y}{r_2} \quad (2.14)$$

en función de las símbolos auxiliares A e y , definidos como

$$A = \frac{\sqrt{r_1 r_2} \sin \Delta\theta}{\sqrt{1 - \cos \Delta\theta}}, \quad y = \frac{\mu r_1 r_2}{h^2} (1 - \cos \Delta\theta) \quad (2.15)$$

El punto aquí reside en igualar las ecuaciones (2.3) con (2.12) para obtener una relación $\chi = \chi(\Delta\theta)$, que por medio de la ecuación universal de Kepler (2.9) permite obtener numéricamente $\Delta\theta$ a partir de ΔT , con métodos iterativos como el de la bisección, quedando el problema resuelto.

2.6. Ecuación del cohete de Tsiolkovsky

Esta sección introduce las bases para entender cualquier sistema de propulsión aeroespacial. La ecuación del cohete ideal o ecuación de Tsiolkovsky [12] caracteriza los principios básicos de un motor de un cohete, es decir, un dispositivo que genera un empuje expulsando parte de su masa (su combustible) a altas velocidades explotando así la ley de conservación del momento. Una de las posibles expresiones es:

$$\frac{m_0}{m_f} = e^{\frac{\Delta V}{I_{sp} \cdot g_0}} \quad (2.16)$$

Esta, permite relacionar la masa inicial m_0 y final m_f del vehículo con su potencial cambio de velocidad disponible ΔV a través de los parámetros I_{sp} y g_0 . La última no es más que la aceleración gravitatoria estandar en la superficie de la Tierra. Los parámetros fundamentales para caracterizar a un propulsor ideal son I_{sp} , conocido como Impulso específico, y F o impulso instantáneo, es decir, la fuerza que es capaz de ejercer el sistema. El primero se define como

$$I_{sp} = \frac{F}{\dot{m}g_0} = \frac{v_e}{g_0} \quad (2.17)$$

El I_{sp} permite entender el cambio de momento por unidad de combustible estandarizado a la superficie terrestre. Cuanto mayor sea este, mayor impulso por la misma quema de combustible se consigue, siendo un indicador de la eficiencia de una propulsión.

3. Análisis de la misión

En esta sección, se estudia la trayectoria interplanetaria de una aeronave que parte de La Tierra con destino a Júpiter, realizando una maniobra de asistencia gravitacional en torno a Marte. El diseño de una trayectoria de transferencia combinando Propulsión Eléctrica Solar (SEP) una asistencia gravitacional puede ser visto como un problema de optimización general de trayectoria [13]. No obstante, se seguirán los algoritmos mostrados en [11] para obtener una solución teórica simplificada, que permita obtener futuras trayectorias numéricas con objeto de exponerlas a ciertas perturbaciones, y corregir los errores que estas generen utilizando algoritmos de control. No obstante, se implementa y estudia un algoritmo basado en estas ideas para obtener las mejores ventanas de lanzamiento posibles.

3.1. Planteamiento inicial

Sea \mathbf{r}_0 , \mathbf{r}_1 y \mathbf{r}_3 los vectores de posición de la Tierra, Marte y Júpiter en el BCRS, así como Δt_1 y Δt_2 la duración del trayecto Tierra-Marte y Marte-Júpiter, respectivamente. De igual modo, sean los pares $(\mathbf{V}_0, \mathbf{V}_1)$ y $(\mathbf{V}_2, \mathbf{V}_3)$ las soluciones (2.5) a los problemas de Lambert entre la Tierra y Marte, caracterizados por \mathbf{r}_0 , \mathbf{r}_1 y Δt_1 , y entre Marte y Júpiter, definido por \mathbf{r}_1 , \mathbf{r}_3 y Δt_2 .

El análisis clásico de escalas para misiones interplanetarias, así como el concepto de esfera de influencia de un planeta es adoptado [7]. Desde el punto de vista del segmento planetario, el límite de la esfera de influencia, comúnmente conocida como SoI, se considera en el infinito, mientras que respecto a los trayectos heliocéntricos, la SoI de los planetas se consideran puntuales. Bajo esta aproximación, y las definiciones anteriores, la trayectoria completa se divide en tres diferentes segmentos. Dos de ellos son órbitas elípticas heliocéntricas, mientras que la restante es un segmento planetario en torno a Marte. De cara a plantear los resultados, no se tendrá en cuenta el impulso inicial para salir de la Tierra, ni la captura por parte de Júpiter, que sí son consideradas en [11]. En el presente documento, la captura se afrontará de forma numérica. En la figura 2, recogida en [11], se muestra un esquema del planteamiento.

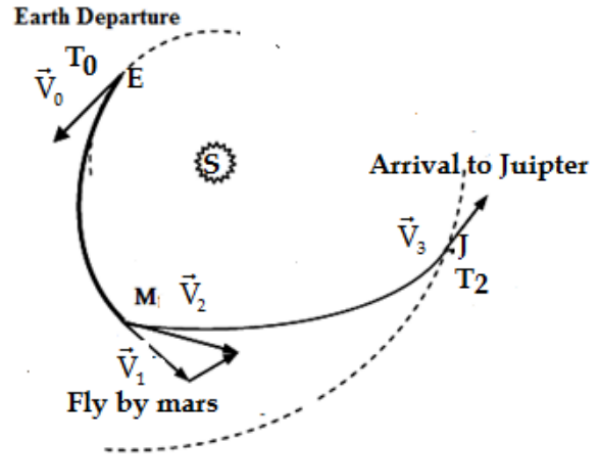


Figura 2: Trayectoria interplanetaria con asistencia gravitacional

La trayectoria se considerará teóricamente resuelta cuando se encuentre una maniobra gravitacional, en forma de sus elementos orbitales, tal que sea capaz de conectar los anteriores problemas de Lambert.

3.2. Asistencias Gravitacionales

Una nave que entra en la esfera de influencia (SoI) de un planeta y no impacta contra este o establece una órbita cerrada en torno a él, continuará su trayectoria hiperbólica. Las operaciones que aprovechan este fenómeno se les denomina como asistencias gravitacionales o *flyby*. Este tipo de maniobras se realizan con un solo objetivo: cambiar la velocidad heliocéntrica del satélite, y con ello la energía de la órbita. En la figura 3, recogida en [7], se muestra una asistencia gravitacional junto con la línea de ápsides y asíntotas de la hipérbola.

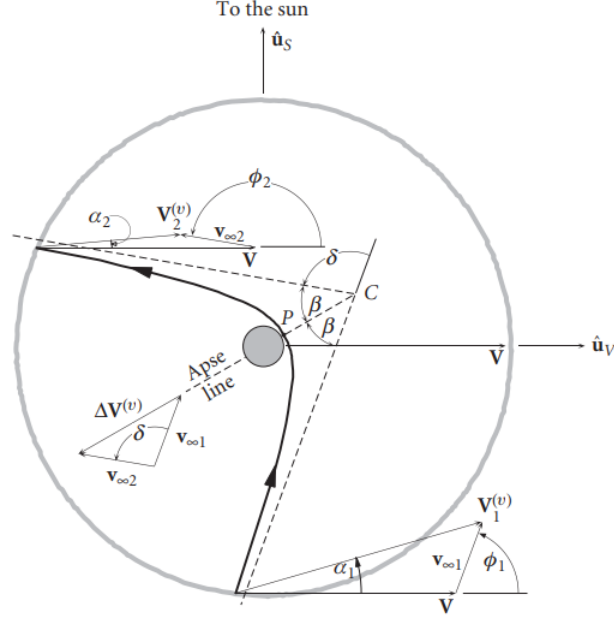


Figura 3: Elementos principales de un *flyby*

Sean $\mathbf{v}_{\infty}^{(1)}$, $\mathbf{v}_{\infty}^{(2)}$ y \mathbf{v}_{out} las velocidades respecto al sistema planetocéntrico del satélite al entrada y salida de la SoI de Marte, así como la velocidad necesaria a la salida para conectar ambos problemas de Lambert, respectivamente, dadas por

$$\mathbf{v}_{\infty}^{(1)} = \mathbf{V}_1 - \mathbf{V}_M \quad (3.1a)$$

$$\mathbf{v}_{out} = \mathbf{V}_2 - \mathbf{V}_M \quad (3.1b)$$

donde \mathbf{V}_M , \mathbf{V}_1 y \mathbf{V}_2 son las velocidades heliocéntricas de Marte en el momento del *flyby* y las soluciones a los anteriores problemas de Lambert en el entorno de Marte. Si examinamos la ecuación (3.3), se observa la ligadura del problema. Para obtener una maniobra acertada, se ha de imponer que la dirección de \mathbf{v}_{out} y $\mathbf{v}_{\infty}^{(2)}$ sea la misma. Esta condición se traduce el ángulo de deflexión δ de la hipérbola

$$\cos \delta = \frac{\mathbf{v}_{\infty}^{(1)} \cdot \mathbf{v}_{\infty}^{(2)}}{\|\mathbf{v}_{\infty}\|^2} = \frac{\mathbf{v}_{\infty}^{(1)} \cdot \mathbf{v}_{out}}{\|\mathbf{v}_{\infty}\| \|\mathbf{v}_{out}\|} \quad (3.2)$$

donde se ha empleado la conservación del módulo de la velocidad. Ahora, los elementos orbitales de la órbita hiperbólica se pueden calcular usando las relaciones siguientes [7]

$$e_2 = \frac{1}{\sin \frac{\delta}{2}}, \quad r_p = \frac{\mu_M}{\|\mathbf{v}_{\infty}\|^2} (e_2 - 1), \quad \Delta = r_p \sqrt{1 + \frac{2\mu_M}{r_p \|\mathbf{v}_{\infty}\|^2}} \quad (3.3)$$

en las que μ_M es el parámetro gravitacional estandar de Marte. Con estos parámetros, queda definida la trayectoria hiperbólica, pero no la operación. En las maniobras de asistencia gravitacional, el principal parámetro, fundamental para ver la viabilidad y calidad de la maniobra, es el delta-v o ΔV , impulso que debe de realizar la aeronave para alcanzar la órbita desada. Esta viene dada por la siguiente expresión

$$\Delta V = \|\mathbf{v}_{out}\| - \|\mathbf{v}_{\infty}^{(2)}\| \quad (3.4)$$

3.3. Ventanas de lanzamiento

Las maniobras basadas en *flybys* son especialmente sensibles al parámetro $\rho = \sqrt{\frac{\mu_P}{R_p}}$, donde R_p es el radio del planeta pues, acorde a (3.2), al imponer que el periápside r_p sea mayor que R_p , $\frac{\|\mathbf{v}_{\infty}\|}{(e-1)} < \rho$. Este resultado pone una cota inferior al valor de e para un cierto $\|\mathbf{v}_{\infty}\|$ dado. Marte se caracteriza por un valor muy bajo de este parámetro. Esto resultará en valores muy alejados de la unidad para la excentricidad, y por tanto deflexiones δ muy pequeñas, limitando mucho la flexibilidad de las maniobras y el número de ventanas de lanzamiento.

Debido a este factor, se ha desarrollado un programa en MATLAB que determina los posibles itinerarios interplanetarios caracterizados por: la fecha de salida desde la Tierra T_D , la fecha de realización del *flyby* T_f y la fecha de llegada a Júpiter T_J . Además, los parámetros de la órbita hiperbólica (3.2), el delta-v requerido (3.4), así como las velocidades $\|\mathbf{v}_{\infty}\|$ y \mathbf{V}_0 son igualmente calculados. Este tiene por entradas un itinerario inicial, el intervalo ΔT para las que se busca las soluciones y la distancia mínima del periapside del *flyby*. El algortimo empleado se muestra a continuación en forma de pseudocódigo. Se le puede agregar un umbral para ΔV si se desea.

Algoritmo 1 Esquema general del algoritmo de búsqueda de trayectorias

Datos: Listas de fechas T_D , T_f , T_J

Resultado: Trayectorias válidas

```

1 Para cada  $T_D[k]$  hacer
2   Para cada  $T_f[i]$  hacer
3     Si  $T_D[k] \leq T_f[i]$  entonces
4       Para cada  $T_J[j]$  hacer
5         Si  $T_f[i] \leq T_J[j]$  entonces
6           Resolver Lambert Tierra-Marte y Marte-Júpiter
7           Calcular parámetros de la maniobra de asistencia
8           Filtrar resultados según  $r_p > R_{Marte}$ 
9           Almacenar las soluciones válidas
10        fin
11      fin
12    fin
13  fin
14 fin
```

A continuación se adjuntan en la tabla 1 las fechas y sus respectivos parámetros que cumplen con la condición $r_p > R_M$, siguiendo como itinerario inicial sobre el que aplicar las fechas propuestas en [11], destacadas en la primera fila, cuyos parámetros del *flyby* han tenido que ser de nuevo calculados debido a incongruencias en las efemérides planetarias del artículo. Además, debido al volumen de opciones, se ha impuesto $\Delta V < 10km/s$, parámetro que interesa minimizar.

T_D	T_f	T_J	e	δ (rad)	$\ \mathbf{V}_0\ $ (km/s)	r_p (km)	ΔV (km/s)
22-April-2018	22-Jun-2018	03-April-2021	3.87	0.52	33.90	1667.1	33.90
28-Jan-2031	08-Jun-2031	06-Jul-2033	16.16	0.12	23.06	4641	7.17
28-Jan-2031	08-Jun-2031	25-Aug-2033	14.45	0.14	23.06	4116	6.74
28-Jan-2031	08-Jun-2031	15-Oct-2033	12.91	0.15	23.06	3646	6.31
19-Mar-2031	08-Jun-2031	05-Feb-2033	28.44	0.070	25.57	5834	6.14
19-Mar-2031	08-Jun-2031	27-Mar-2033	25.60	0.078	25.57	5229	8.04
19-Mar-2031	08-Jun-2031	16-May-2033	22.52	0.089	25.57	4575	5.23
19-Mar-2031	08-Jun-2031	06-Jul-2033	19.64	0.10	25.57	3962	4.81
19-Mar-2031	08-Jun-2031	25-Aug-2033	17.11	0.12	25.57	3423	4.38

Tabla 1: Resumen de trayectorias interplanetarias con flyby en Marte.

3.4. Trayectoria conexa numérica

El objetivo final de la sección es obtener una secuencia temporal de puntos en el espacio de fases $(t, \mathbf{r}, \mathbf{v})$ que acople los dos vuelos heliocéntricos y el segmento planetario del *flyby*. Para ello, la solución comienza con el análisis de la figura 3, donde se observa cómo los vectores

$$\Delta \mathbf{V} = \mathbf{v}_\infty^{(2)} - \mathbf{v}_\infty^{(1)}, \quad \Sigma \mathbf{V} = \mathbf{v}_\infty^{(2)} + \mathbf{v}_\infty^{(1)} \quad (3.5)$$

forman una base ortogonal en el plano orbital de la hipérbola. En ella, $\mathbf{v}_\infty^{(2)}$ corresponde a la velocidad relativa de entrada $\mathbf{v}_\infty^{(1)}$ tras ser deflectada un ángulo δ . Esta base resulta especialmente útil porque permite describir de forma precisa el flyby directamente en el sistema de referencia inercial heliocéntrico (ICRF), sin necesidad de recurrir a sistemas locales. Por tanto, el primer paso del procedimiento consiste en calcular $\mathbf{v}_\infty^{(2)}$ en dicho marco. El algoritmo 2 resume el procedimiento seguido para construir la trayectoria acoplada, mientras que la figura 4 ilustra la solución numérica obtenida. Cabe destacar que el análisis presentado en esta sección ha sido desarrollado íntegramente en el marco de este trabajo, constituyendo una formulación robusta y generalizable para la simulación detallada de maniobras de asistencia gravitacional con acoplamiento orbital. Hasta donde alcanza la revisión bibliográfica realizada, este tratamiento no ha sido abordado con este nivel de formalismo y aplicabilidad en la literatura pública.

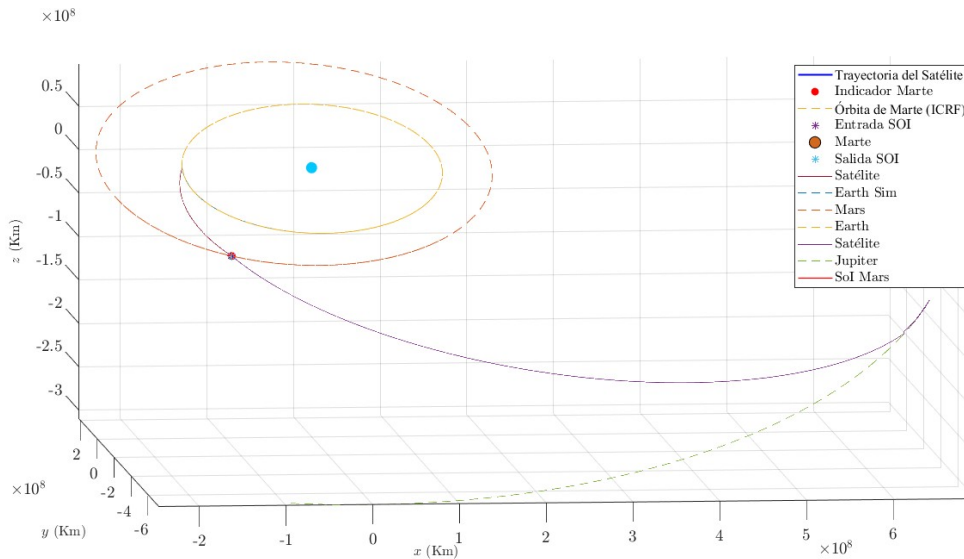


Figura 4: Representación de la trayectoria numérica inicial central

Algoritmo 2 Algoritmo de Trayectoria Conexa Numérica

1: **Entrada:** Efemérides planetarias (Tierra, Marte, Júpiter), fechas de vuelo (T_D, T_f, T_J) , R_{SoI} de Marte, parámetros orbitales, umbrales de precisión.

2: **Inicio:**

3: Resolver los Problemas de Lambert:

- (a) Resolver Lambert (Tierra-Marte) \rightarrow obtener $(\mathbf{V}_0, \mathbf{V}_1)$.
- (b) Resolver Lambert (Marte-Júpiter) \rightarrow obtener $(\mathbf{V}_2, \mathbf{V}_3)$.

4: Calcular la trayectoria Tierra-Marte:

- (a) Obtener los elementos orbitales a partir de $(\mathbf{r}_0, \mathbf{V}_0)$.
- (b) Propagar la órbita hasta intersección con la SoI de Marte:
 - Encontrar t tal que $\|\mathbf{r}(t) - \mathbf{r}_M\| = R_{SoI}$.
 - Definir $r_{SoI} = r(t)$.

5: Calcular la dirección del momento angular planetocéntrico:

$$\hat{h} = \frac{(\mathbf{r}_{SoI} - \mathbf{r}_M) \times (\mathbf{V}_1 - \mathbf{V}_M)}{\|\mathbf{r}_{SoI} - \mathbf{r}_M\| \|(\mathbf{V}_1 - \mathbf{V}_M)\|}$$

6: Calcular la velocidad hiperbólica de entrada $\mathbf{v}_\infty^{(1)}$ con (3.1a).

7: Rotar $\mathbf{v}_\infty^{(1)}$ para obtener $\mathbf{v}_\infty^{(2)}$:

- (a) Calcular el ángulo de deflexión δ .
- (b) Aplicar la fórmula de Rodrigues [14].
- (c) Obtener $\mathbf{v}_\infty^{(2)}$.

8: Construir la órbita hiperbólica planetocéntrica:

- (a) Calcular los elementos (e, r_p, Δ, \dots) .
- (b) Describir la trayectoria con (3.5)
- (c) Encontrar numéricamente \mathbf{r}_{in} y \mathbf{r}_{out} tal que $\|\mathbf{r}\| = R_{SoI}$.

9: Simular el flyby:

- (a) Integrar la trayectoria planetocéntrica desde \mathbf{r}_{in} hasta \mathbf{r}_{in} .
- (b) Registrar el estado de salida $(\mathbf{r}_{out}, \mathbf{v}_\infty^{(2)})$.

10: Transformar al sistema heliocéntrico:

$$\mathbf{r}_{in,ICRF} = \mathbf{r}_{in} + \mathbf{r}_M - \mathbf{v}_M \frac{T_{flyby}}{k} \quad \text{con } k \in B(2, \varepsilon)$$

11: Recalcular los Problemas de Lambert con posiciones corregidas:

- (a) Resolver Lambert (Tierra - $\mathbf{r}_{in,ICRF}$).
- (b) Resolver Lambert (\mathbf{r}_{out} - Júpiter).

12: Generar la trayectoria numérica completa concatenando:

- (i) Trayectoria Tierra-Marte (primer Lambert).
- (ii) Trayectoria hiperbólica (flyby).
- (iii) Trayectoria Marte-Júpiter (segundo Lambert).

13: **Fin.**

4. Arquitectura y Propulsión

Antes de introducir las perturbaciones y el control de órbita pertinente, resulta práctico introducir los sistemas de propulsión que permitirá aplicar el delta-v (3.4) para completar la maniobra. Por tanto, en esta sección se define la configuración del Cubesat y se incluye los potenciales cambios de velocidad delta-v en función de parámetros fundamentales de la misión.

4.1. Payload y Bus

En la arquitectura de un satélite se distinguen tres partes principales: El payload o carga útil, el bus, y los sistemas de propulsión. La primera de ellas consiste en la razón de ser del satélite, en nuestro caso instrumentos científicos, mientras que la segunda es el sistema de soporte que mantiene operativa a la carga útil. Por último, el sistema de propulsión satélite es el conjunto de componentes que le permite cambiar su velocidad o trayectoria en el espacio. Esta prueba de concepto se inspira en la misión MARIO [4]. Al ser una misión mucho más lejana la que se propone en el presente texto, emplearemos una arquitectura de Cubesat 32U de 30Kg de payload y bus.

4.2. Propulsión eléctrica

Los sistemas de propulsión eléctrica emplean campos electromagnéticos para acelerar el combustible iónico a altas velocidades, y así obtener un empuje. Cuanto más alta sea estas velocidades, más eficientes serán según (2.17). Debido a los principios sobre los que se basa este tipo de propulsión [15], y a la limitada potencia eléctrica disponible en los satélites, estos sistemas se caracterizan por tener bajos empujes.

Tras revisar el mundo de los propulsores eléctricos, destaca uno sobre todos los demás para cumplir con las exigencias de la misión, el Busek BIT-3. En (M. Tsay et al)[16] describen las pruebas integradas del sistema, así como sus características fundamentales para un Cubesat 6U de 14kg. De esta forma, mediante (2.16) y los datos disponibles en la tabla 3, referentes a los parámetros caracterizados en el anterior estudio, se calcula la masa inicial m_0 y de combustible necesarias para generar una serie de valores de ΔV considerando $m_f = 30kg$. Se considerará que el motor pueda operar de forma ininterrumpida a una potencia de 80W y máximo impulso instantáneo, siendo este independiente de la masa consumida con objeto de simplificar las simulaciones de esta prueba de concepto.

ΔV (m/s)	Masa Inicial (kg)	Masa Propelente (kg)	Tiempo (años)
1200	31.423	1.422	0.973
1400	31.666	1.666	1.139
1600	31.912	1.911	1.307
1800	32.159	2.159	1.476
2000	32.409	2.408	1.647
2200	32.660	2.659	1.819
2400	32.913	2.913	1.992

Tabla 2: Tabla de Propulsión Iónica a máxima potencia (con Tiempo en años)

La última columna resulta muy reveladora. Consiste en una sobreestimación del tiempo que tardará la maniobra de impulso, derivada de $t = \frac{\Delta V}{a_{max}}$, donde $a_{max} = \frac{F_{max}}{m_0}$. De la tabla 1, se comprueba que el delta-V requerido para el *flyby* no puede lograrse únicamente con este tipo de propulsión. Esto requerirá de un sistema híbrido de propulsión similar al expuesto en [17], combinando propulsión química e iónica.

4.3. Propulsión híbrida

Mani et al. (2019) [17] presentan un sistema de propulsión química “verde” basado en ADN (FLP-106) para CubeSats, En la tabla 3 se muestran todos los detalles técnicos relevantes. Si consideramos el sistema de propulsión híbrido, la propulsión química nos ofrece con una $m_f = 39,5kg$ los valores ΔV indicados en la tabla 3. De estos valores se concluye que, con la tecnología actual, el diseño de una misión como la descrita en la sección 3 requiere de un sistema de propulsión híbrido, con una etapa de propulsión química que permita completar la maniobra gravitacional, y una propulsión iónica encargada del control de órbita.

Parámetro	BUKSET BIT-3	Químico verde ADN (FLP-106)
Tipo de propulsión	Iónica RF con yodo	Monopropelente químico (verde)
Empuje máximo	1.49 mN	3.072 N (con 2 thrusters)
Impulso específico (I_{sp})	3168 s	241.2 s
Potencia de entrada	67 W	No requiere (reacción química)
Masa del sistema (seca/húmeda)	3.0 kg / 8.3 kg	6.59 kg (propulsor y sistema de alimentación)
Impulso total disponible	37,000 N·s	N/A (orientado a ΔV específico)
ΔV típico alcanzado	2.9 km/s (6U, 14 kg)	3600, 5000 m/s (100.85, 287.32 kg) (22, 63 horas)
Combustible	Iodo sólido	FLP-106 (nitrato de amonio en solución)
Presión de cámara	N/A (eléctrico)	2 MPa
Densidad del propelente	4940 kg/m ³	1357 kg/m ³
Volumen del sistema	3U	7.5U
Materiales destacados	Alúmina / Hastelloy	Titanio Ti-6Al-4V
Ubicación típica	Interno y Externo	Externo (propulsor) + interno (tanques)

Tabla 3: Comparativa entre el sistema de propulsión eléctrico BIT-3 y el químico monopropelente FLP-106 para CubeSats.

5. Simulador Orbital

5.1. Implementación en Simulink

A continuación se describe el simulador que permitirá materializar por completo la misión Cubesat, además de dar un entorno generalizable para otras futuras misiones, con capacidad de ampliarlo fácilmente para incorporar nuevas maniobras gravitacionales. En la figura 5 se muestra su disposición. El entorno se constituye de cuatro módulos: El controlador, el actuador, propagador orbital y la ventana de visualización

El primer módulo, representado en color naranja, se encarga de generar la señal de control necesaria para corregir la órbita mediante realimentación de estados. Su diseño permite ajustar dinámicamente el comportamiento del controlador, a través de las constantes K_p y K_d , adaptándolo a distintos escenarios operativos. Esta flexibilidad resulta clave, ya que el peso relativo de los errores varía significativamente entre los tramos heliocéntricos y las fases críticas, como la captura gravitacional. En el núcleo del entorno se encuentra el actuador, encargado de emular con realismo el sistema de propulsión. Este bloque transforma la señal de control, expresada como impulso, en la aceleración efectiva que experimenta la sonda, calculando además en cada instante la masa total del sistema mediante la ecuación (2.17), fundamental para estimar correctamente la dinámica. Por último, el bloque cian corresponde al propagador, que reproduce la dinámica del satélite a partir del estado inicial usando el módulo *Orbit Propagator* de la *Aerospace Tool Box* [18], con capacidad para incorporar perturbaciones externas definidas por el usuario.

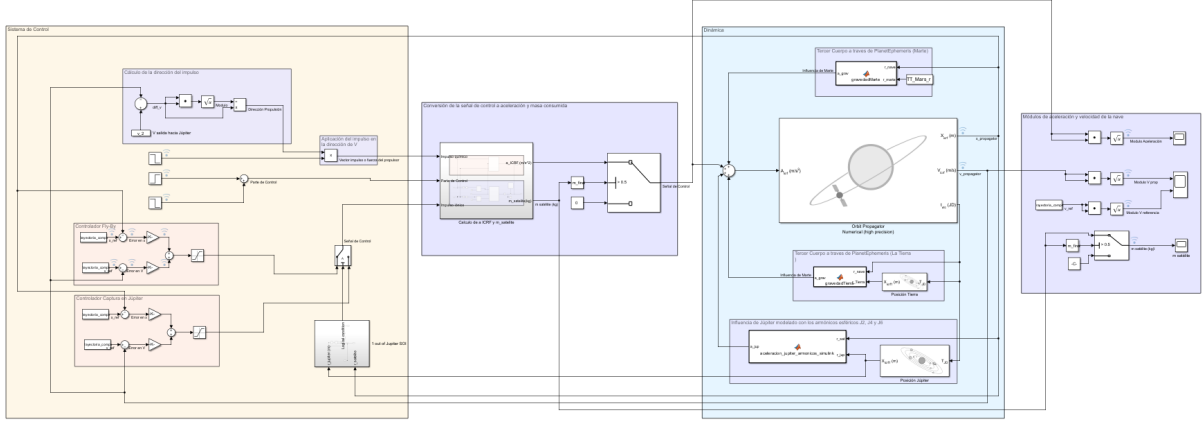


Figura 5: Versión final del simulador

5.2. Perturbaciones

En este apartado se establecen una serie de perturbaciones a las que se someterá al CubeSat a lo largo de su itinerario. La principal perturbación es, sin duda, el efecto del tercer cuerpo, tanto de la Tierra como de Marte, pues las soluciones numéricas obtenidas resolviendo los Problemas de Lambert no tienen la capacidad de tener en cuenta dichos cuerpos. Otras perturbaciones mucho menos significativas como la presión de radiación se excluyen en detrimento a las aquí comentadas. La influencia del tercer cuerpo viene dada por:

$$\mathbf{a}_i = -\mu_i \left(\frac{(\mathbf{r} - \mathbf{r}_i)}{\|\mathbf{r} - \mathbf{r}_i\|^3} \right) \quad (5.1)$$

donde μ_i y \mathbf{r}_i es el parámetro gravitacional estandar y la posición en el ICRF del planeta que quiere tenerse en cuenta. Todos los valores para μ_i pueden encontrarse en [7]. Además de esta, una perturbación adicional modelada en el simulador corresponde a la aceleración gravitatoria generada por Júpiter, teniendo en cuenta su forma no esférica mediante el uso de armónicos zonales. En este caso, se utiliza una expansión del potencial gravitacional basada en polinomios de Legendre $P_n(\cos \theta)$, considerando los términos J_2 , J_4 y J_6 . La aceleración total ejercida por Júpiter sobre un satélite se modela como la suma del término central de Kepler y las contribuciones debidas a estos armónicos:

$$\mathbf{a}_{\text{jup}} = -\frac{\mu_{\text{jup}}}{r^3} \mathbf{r} + \sum_{n=2,4,6} \frac{\mu_{\text{jup}}}{r^2} \left(\frac{R_{\text{jup}}}{r} \right)^n J_n \left[(n+1)P_n(u) \frac{\mathbf{r}}{r} - \frac{dP_n}{du} \left(\frac{z}{r^2} \mathbf{r} - \hat{\mathbf{z}} \right) \right] \quad (5.2)$$

donde μ_{jup} es el parámetro gravitacional de Júpiter, R_{jup} su radio ecuatorial, \mathbf{r} el vector posición del satélite respecto al centro del planeta, $u = z/r$, y J_n los coeficientes armónicos zonales. Esta expresión asume que el campo gravitacional de Júpiter es axialmente simétrico y que los efectos dinámicos, como los flujos atmosféricos profundos, son despreciables en los coeficientes considerados. Los coeficientes J_n utilizados han sido extraídos del trabajo de Iess et al. (2018) [19].

5.3. Lógica de actuación

En este punto se discute la lógica integrada en el bloque de los actuadores. El sistema tiene dos actuadores: el sistema de propulsión iónico y la etapa química de alto impulso.

Debido a ello, es necesario introducir una lógica que permite cambiar de un actuador a otro. En este caso particular, el entorno se ha configurado de tal forma que la propulsión química se active nada más salir de la SoI de Marte durante un intervalo de tiempo en el que se complete la quema total del propelente, para completar la maniobra gravitacional según el requisito 3.4. Además, la lógica del bloque incluye el desprendimiento de la etapa química una vez todo el combustible ha sido consumido, que se traduce en una mejora en el rango de las aceleraciones conseguidas. Uno de los puntos fuertes de este subsistema reside en su versatilidad y generalidad, pues tanto el sistema de propulsión iónico y químico se definen con los valores I_{sp} y F_{max} , lo que permite fácilmente probar otro tipo de propulsores cambiando estos dos parámetros.

Finalmente, para traducir la señal de control a la aceleración que experimenta el satélite de forma rigurosa, este subsistema calcula realiza un cálculo de la masa del satélite para cada paso de integración por medio de (2.17), que además permite cerrar la lógica de los actuadores al inhabilitar estos cuando la masa total de combustible llega a cero.

5.4. Ley de Control

Aquí se expone la estrategia de control implementada en el primero de los subsistemas del entorno. Esta se basa en un esquema proporcional-derivativo (PD, por sus siglas en inglés) [20] orientado al control orbital mediante propulsión iónica, complementado por una etapa de empuje químico que aplica un impulso continuo, constante y dirigido a lo largo del vector tangente a la trayectoria, con el fin de completar la maniobra de asistencia gravitacional. La ley queda resumida en la siguiente expresión:

$$\mathbf{u}(t) = (1 - \Gamma(t)) \cdot \text{sat}_{F_I} (K_p \mathbf{e}_p(t) + K_d \mathbf{e}_d(t)) + \Gamma(t) \cdot F_Q \cdot \frac{\dot{\mathbf{r}}(t)}{\|\dot{\mathbf{r}}(t)\|} \quad \left| \quad \Gamma(t) = \begin{cases} 1 & \text{si } t \in (t_0, t_0 + \Delta T) \\ 0 & \text{si } t \notin (t_0, t_0 + \Delta T) \end{cases} \right. \quad (5.3)$$

donde F_Q y F_I son los impulsos instantáneos máximos de los propulsores químico e iónico, $\Gamma(t)$ permite introducir la lógica del cambio de actuadores a la señal de control y K_p y K_d las constantes de características del controlador. Además, \mathbf{e}_p y \mathbf{e}_d son los errores entre la trayectoria consigna y la propagada. La función $\text{sat}_{F_I}()$ representa la saturación que implementa la controladora, que sustituye a su argumento cuando este es mayor que F_I , y conserva su dirección y sentido mientras que cambia su módulo a F_I .

6. Resultados

6.1. Órbita de parking

Las primeras simulaciones han consistido en probar la trayectoria numérica obtenida en el apartado 3.4. En la tabla 4 se muestra una comparativa entre los parámetros ofrecido por el tratamiento teórico y la solución numérica representada en la figura 4, donde destaca el parámetro delta-v con una disminución del 18 % respecto al valor teórico. Se observa un grato acuerdo entre resultados analíticos y numéricos.

e	$\delta(^{\circ})$	$\hat{i} (^{\circ})$	$\Omega (^{\circ})$	$\omega (^{\circ})$	r_p (km)	ΔV (km/s)
17.11	6.87	N/A	N/A	N/A	3423	4.38
16.96	5.65	9.37	26.26	125.817	3426	3.59

Tabla 4: Órbita teórica e ideal.

Al incluir las perturbaciones descritas previamente, se observa que, bajo el modelo de cuerpo central de Júpiter, el satélite es capturado. Sin embargo, al considerar los términos armónicos, la captura no se produce, obteniéndose una órbita parabólica con $e \approx 1,15$. Esto permite plantear la órbita de parking como un problema de control a resolver. Las figuras 6 muestran la órbita establecida y el estado transitorio previo.

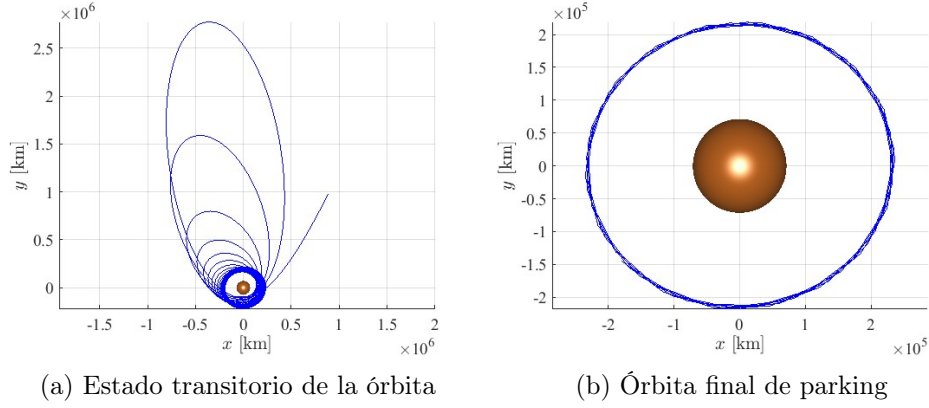


Figura 6: Captura del satélite en aproximación al cuerpo central.

6.2. Propulsión híbrida

A continuación, en la figura se expone el resultado de exponer a la sonda a todas las perturbaciones anteriormente explicadas sin la implementación del controlador. La interpretación es clara. Al comienzo del viaje, el sistema comienza desviarse ligeramente de trayectoria consigna, lo que impide la realización de la maniobra gravitacional y da lugar a la total desviación del satélite respecto a la trayectoria ideal. Todo ello es natural, pues hay que darse cuenta que un *flyby* es una maniobra que requiere gran precisión, en especial con planetas con un tirón gravitatorio tan pobre como el de Marte.

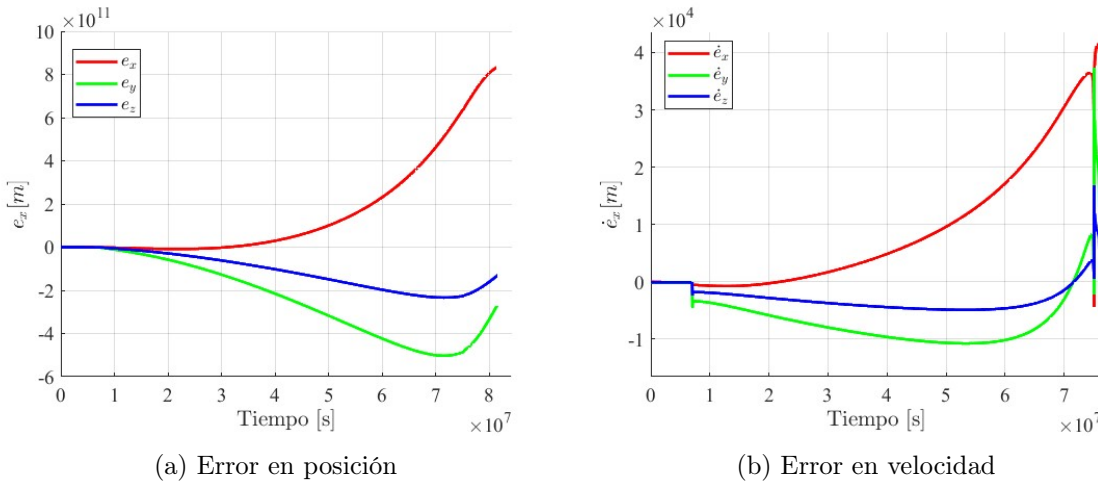


Figura 7: Error en el vector de estados del satélite sin aplicar control

Con la necesidad del controlador demostrada, se presenta el efecto del sistema de control y actuadores descritos en la sección anterior, junto al sistema de propulsión híbrido comentado en el apartado 4.3. En la tabla 5 se adjuntan los parámetros empleados para caracterizar al sistema y el controlador. Además, $K_P = 1e-8$ y $K_D = 0,02$, desactivando a su vez el control derivativo en la captura debido a su alta fluctuabilidad.

m_f	$m_{\text{FLP-106}}$	m_{BIT3}	m_{fuel}	m_{yodo} [kg]	$\Delta V_{\text{químico}}$	$\Delta V_{\text{iónico}}$ [km/s]	m_0 [kg]
30	6.59	3.00	236.49	2.91	4.6	2.4	278.99

Tabla 5: Parámetros de cada simulación.

A continuación se muestra una comparativa entre la posición y velocidad de la sonda espacial con sus valores consigna derivados de la trayectoria, así como los errores de posición y velocidad. La señal de control no se incluye por no aportar información sustancial al ser proporcional a los errores tridimensionales y estar saturada prácticamente en cualquier momento.

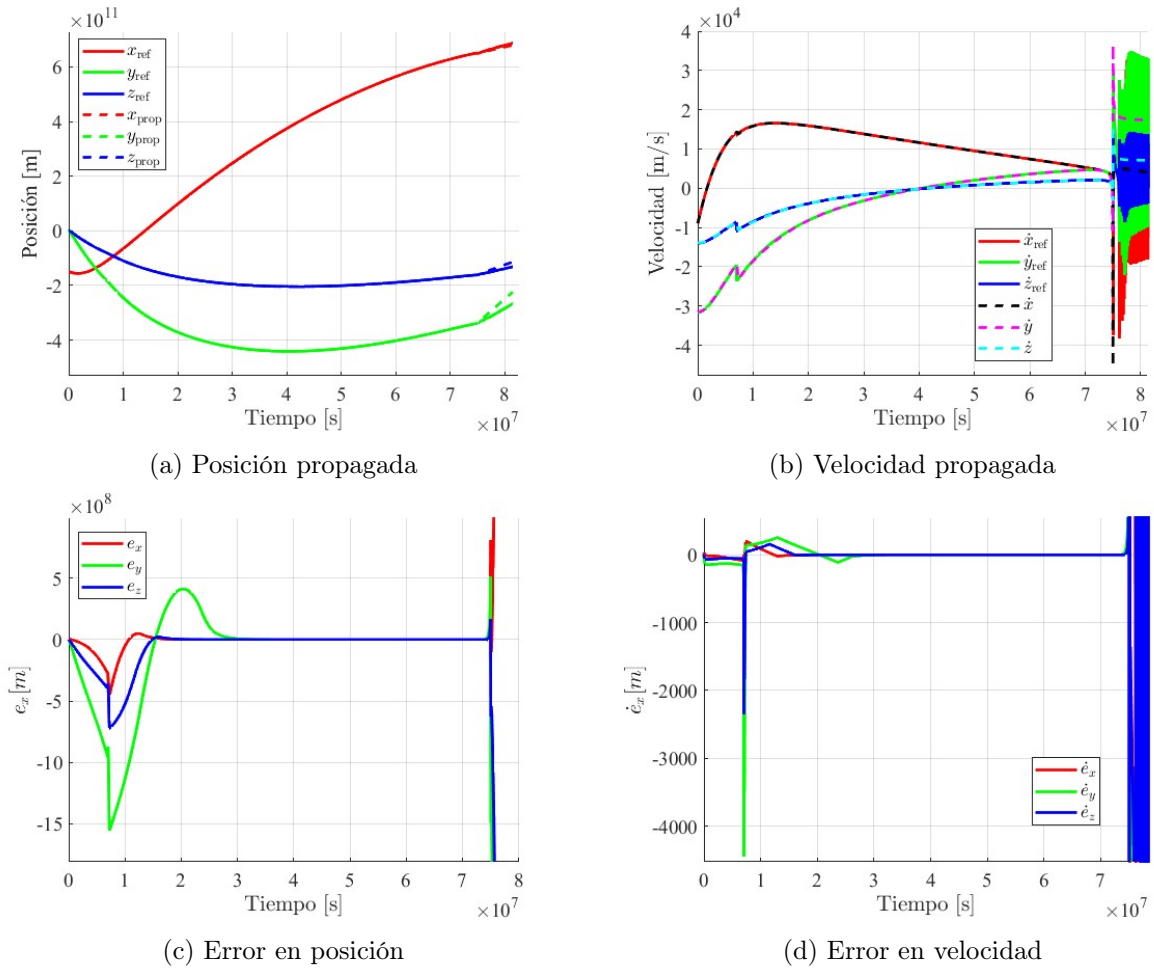


Figura 8: Evaluación de la misión Cubesat con el controlador implementado.

Se observa cómo el controlador por medio de los actuadores descritos es capaz de corregir las desviaciones de órbita y realizar correctamente la maniobra gravitacional, que corresponde al inminente y efímero pico presente en la figura del error en la velocidad. Este queda resuelto rápidamente gracias a la aplicación de la etapa química, que aporta el ΔV de forma casi inmediata.

No obstante, el controlador basado en la propulsión iónica es quién finalmente completa la maniobra como se puede apreciar, al corregir unas desviaciones residuales. A pesar de su correcto funcionamiento, dos consecuencias importantes aparecen de estas figuras derivadas del bajo impulso del sistema. La primera de ellas se aprecia en 8c, que es la incapacidad de corregir completamente la perturbación introducida por la Tierra en los apenas 5 meses que dura el trayecto Tierra-Marte. La segunda es la incapacidad de seguir la órbita parking exhibida en 6, observable en las gráficas que caracterizan el comportamiento de la velocidad. Con objeto de evaluar si tiene sentido tratar el problema de la órbita de parking como un problema de control descrito anteriormente, se ha asumido un hipotético propulsión iónico que, con una mayor potencia operativa, sea capaz de alcanzar unos parámetros $I_{sp} = 1000s$ y $F_{max} = 0,5N$. Los resultados se muestran en la figura 9.

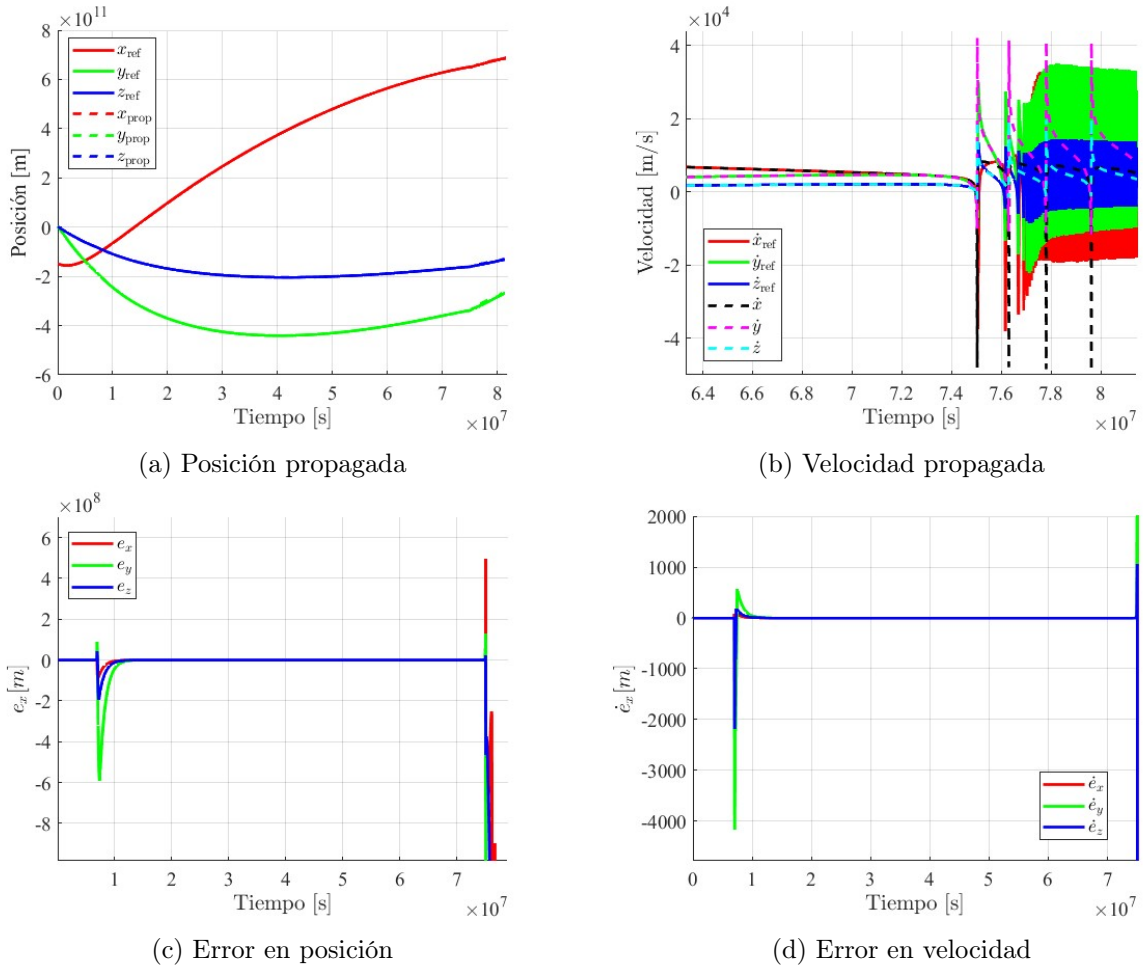


Figura 9: Evaluación de la misión Cubesat con propulsión nuclear.

Se observa que, aumentando el empuje instantáneo del propulsor, el sistema resuelve los problemas derivados de la perturbación inicial de la Tierra y parcialmente el establecimiento de la órbita parking, que sin ser la inicial, es una solución estable. En la figura 9b se puede apreciar el perfil de velocidad de una órbita altamente elíptica. Este resultado evidencia la necesidad de incorporar en el planeamiento teórico esta etapa final, ya sea en forma de un Problema de Optimización General de Trayectoria [13] o incorporar una maniobra de transferencia Hohhman [7] con propulsión de alto empuje, pues el sistema de control es incapaz de resolver el problema derivado de los términos armónicos de Júpiter con un coste de masa de propelente razonable.

7. Conclusiones

El presente trabajo ha desarrollado un estudio detallado de la viabilidad de una misión interplanetaria tipo CubeSat con destino al sistema joviano, combinando maniobras de asistencia gravitatoria con sistemas de propulsión avanzada. El marco teórico construido ha permitido resolver inicialmente el problema de trayectorias mediante formulaciones clásicas como el problema de Lambert, los coeficientes de Lagrange y las ecuaciones de Kepler en su versión universal, proporcionando una base sólida sobre la cual asentar los diseños de misión. A partir de este fundamento, se han diseñado algoritmos específicos que permiten obtener soluciones numéricas precisas para maniobras de flyby y determinar con eficacia las ventanas de lanzamiento más favorables. Hasta donde alcanza la revisión bibliográfica realizada, no se ha encontrado ninguna referencia que combine de forma explícita tanto el formalismo teórico como los aspectos prácticos de implementación abordados en este estudio.

Sin embargo, los resultados numéricos obtenidos tras la inclusión de perturbaciones reales ponen de manifiesto un aspecto crítico: la necesidad ineludible de implementar sistemas activos de control de órbita para garantizar la viabilidad de estas trayectorias. El carácter extremadamente sensible de las maniobras de asistencia gravitacional, junto con la influencia significativa de perturbaciones de terceros cuerpos y armónicos zonales de Júpiter, hacen imprescindible contar con controladores capaces de realizar correcciones continuas a lo largo del trayecto.

En este contexto, uno de los principales logros de este trabajo ha sido el desarrollo de un entorno de simulación versátil y extensible en Simulink, que permite evaluar de forma realista el comportamiento de la misión frente a estos escenarios complejos. La arquitectura modular del simulador facilita no solo la incorporación de diferentes leyes de control de órbita, sino también su futura ampliación hacia el control de actitud, la inclusión de nuevas maniobras de captura o sobrevuelo y la simulación de nuevas perturbaciones que puedan afectar la navegación. Esta flexibilidad convierte al entorno desarrollado en una herramienta potente tanto para validación de conceptos como para la optimización de perfiles de misión más sofisticados.

Respecto al sistema de propulsión, los resultados obtenidos reflejan que, bajo las condiciones aquí analizadas y con las limitaciones tecnológicas actuales, es necesario recurrir a una arquitectura híbrida de propulsión química e iónica. No obstante, es importante subrayar que este estudio no permite concluir la inviabilidad de la misión, ya que el diseño óptimo de estas trayectorias debe ser abordado como un Problema General de Optimización de Órbitas [13], en el que soluciones alternativas mediante perfiles de propulsión continua desde el despegue podrían permitir resolver la misión sin necesidad de etapas híbridas complejas.

En definitiva, el presente trabajo no sólo proporciona una primera prueba de concepto de este tipo de misión, sino que establece un marco flexible y extensible de simulación que permite explorar de forma realista futuros escenarios interplanetarios, adaptados al avance tecnológico y a la creciente ambición de las misiones CubeSat en la exploración del sistema solar.

Referencias

- [1] O. Grasset *et al.*, “Jupiter icy moons explorer (juice): An esa mission to orbit ganymede and to characterise the jupiter system,” *Planetary and Space Science*, vol. 78, pp. 1–21, April 2013. ESA Cosmic Vision Programme 2015–2025.
- [2] Y. Tsuda, R. Nakamura, T. Yoshikawa, M. Yamamoto, H. Noda, and et al., “The hayabusa mission: Overview and status,” *Acta Astronautica*, vol. 62, pp. 639–647, April 2008. JAXA asteroid sample-return mission overview.

- [3] M. Rayman, T. Fraschetti, C. Raymond, and C. Russell, “Dawn: A mission in development for exploration of main belt asteroids vesta and ceres,” *Acta Astronautica*, vol. 58, pp. 605–616, March 2006. NASA Discovery Program mission to Vesta and Ceres.
- [4] K. Mani, A. Cervone, and F. Topputo, “Combined chemical–electric propulsion for a stand-alone mars cubesat,” *Journal of Spacecraft and Rockets*, 2019. Published online.
- [5] L. Provinciali, D. Linnarsson, A. Paffi, C. Kilpua, J. Vainio, and et al., “Henon – main challenges of a space weather alerts cubesat mission,” in *Proceedings of the IEEE Aerospace Conference*, (Big Sky, Montana, USA), pp. 1–5, March 2024. ESA Deep Space CubeSat mission for solar storm early warning.
- [6] M. Soffel *et al.*, “The iau 2000 resolutions for astrometry, celestial mechanics and metrology in the relativistic framework: explanatory supplement.” arXiv preprint astro-ph/0303376, 2003.
- [7] H. D. Curtis, *Orbital Mechanics for Engineering Students*. Oxford, UK: Elsevier Butterworth-Heinemann, 2nd ed., 2005. Embry-Riddle Aeronautical University.
- [8] R. Schwarz, “Cartesian state vectors to keplerian orbit elements,” Tech. Rep. Memorandum 2, Private Memorandum, October 2017. Internal orbital mechanics documentation.
- [9] R. Schwarz, “Keplerian orbit elements to cartesian state vectors,” Tech. Rep. Memorandum 1, Private Memorandum, October 2017. Internal orbital mechanics documentation.
- [10] R. H. Battin, *An Introduction to the Mathematics and Methods of Astrodynamics*. Reston, VA, USA: AIAA Education Series, revised edition ed., 1999. Second printing, American Institute of Aeronautics and Astronautics.
- [11] M. Ammar and D. Oda, “Design of gravity assist trajectory from earth to jupiter,” *Applied Mathematics and Nonlinear Sciences*, vol. 3, no. 1, pp. 151–160, 2018. Helwan University, Cairo, Egypt.
- [12] K. E. Tsiolkovsky, “Reactive flying machines,” in *Collected Works of K. E. Tsiolkovsky*, vol. 2, Moscow, USSR: Academy of Sciences of the USSR, 1954. Originally written in 1903; foundational work on rocket dynamics.
- [13] M. Vasile, F. Bernelli-Zazzera, R. Jehn, and G. Janin, “Optimal interplanetary trajectories using a combination of low-thrust and gravity assist manoeuvres,” in *51st International Astronautical Congress (IAC)*, (Rio de Janeiro, Brazil), 2000. IAF-00-A.5.07.
- [14] H. Goldstein, C. P. Poole, and J. L. Saffo, *Classical Mechanics*. San Francisco, CA, USA: Addison-Wesley, 3rd ed., 2002. See Section 4.7 on Rotation of Rigid Bodies; Rodrigues’ rotation formula.
- [15] D. M. Goebel and I. Katz, *Fundamentals of Electric Propulsion: Ion and Hall Thrusters*. JPL Space Science and Technology Series, Pasadena, CA, USA: Jet Propulsion Laboratory, California Institute of Technology, 2008. Supported by NASA and the Jet Propulsion Laboratory.
- [16] M. Tsay, J. Model, C. Barcroft, J. Frongillo, J. Zwahlen, and C. Feng, “Integrated testing of iodine bit-3 rf ion propulsion system for 6u cubesat applications,” in *35th International Electric Propulsion Conference*, (Atlanta, Georgia, USA), October 2017. IEPC-2017-264.
- [17] K. V. Mani, A. Cervone, and F. Topputo, “Combined chemical–electric propulsion for a stand-alone mars cubesat,” *Journal of Spacecraft and Rockets*, 2019.
- [18] MathWorks, “Spacecraft dynamics.” <https://es.mathworks.com/help/aeroblks/spacecraftdynamics.html>, February 2024. Online; consultado 29 Feb, 2024.
- [19] L. Iess *et al.*, “Measurement of jupiter’s asymmetric gravity field,” *Nature*, vol. 555, pp. 220–222, March 2018. Juno Mission gravity science results from perijove passes PJ3 and PJ6.
- [20] J. P. Hespanha, *Linear Systems Theory*. Princeton, NJ, USA: Princeton University Press, 1st ed., 2009. Preprint version, October 2010. Available for educational use.