**Классификация формул алгебры логики:**

1. Тавтология
2. Выполнимая формула
3. Противоречие
4. Опровержимая формула

**Булева функция:**

**Булевой функцией** (или функцией алгебры логики) называется функция, заданная на множестве {0;1} и принимающая значение на том же множестве.

**Булева переменная:**

**Булевая переменная** - это переменная, принимающая значение 0 или 1. Над булевыми переменными можно производить основные логические операции.

**Способы задания Булевой функции:**

1) табличный способ:

n + 1; столбца (n - количество переменных, 1 - шапка)

2^n

они соответствуют различным наборам значений переменных. Как правило, таблица упорядочивается определенным способом:

а) Задается порядок переменных

X, Y, Z, (X1, X2, X3)

б) Наборы значений записываются в лексико-графическом порядке (сначала нули, потом единицы)

2) С помощью вектора, обязательно переменные и наборы значений должны быть упорядочены

F=(10111010)

3) Задание булевых функций через множество

H1 - множество, на котором булевая функция принимает значение истина

H0 - множество наборов значений переменных на котором булевая функция принимает значение ложь

H1 = {000, 010, 011, 100, 110}

H0 = {001, 101, 111}

**СКНФ:**

Совершенная конъюнктивная нормальная форма (СКНФ) - КНФ, в которой в каждую дизъюнкцию входят все переменные, причём при составлении дизъюнкция используются значения переменных, при которых значение функции равно 0, которые в последствии объединяются в конъюнкцию.

**СДНФ:**

Совершенная дизъюнктивная нормальная форма (СДНФ) - ДНФ, в которой в каждую конъюнкцию входят все переменные имеющегося списка, причём при составлении конъюнкции используются значения переменных, при которых значение функции равно 1, которые впоследствии объединяются в дизъюнкцию.

**Отрицание:**

Отрицание(инверсия) – это логическая операция, при которой высказывание А истинно, если НЕ(А) – ложно.

**Конъюнкция:**

Конъюнкция (логическое умножение) – это сложное логическое высказывание, которое истинно в случае истинности всех составляющих этого высказывания, в противном случае оно ложно.

**Дизъюнкция:**

Дизъюнкция(логическое сложение) – это сложное логическое высказывание, которое ложно только в случае ложности всех составляющих, в противном случае истинно.

**Импликация:**

Импликация(логическое следование) – это сложное логическое высказывание, которое ложно когда первое истинно, а второе ложно, в остальных случаях высказывание истинно.

**Эквиваленция:**

Эквиваленция(логическое тождество) – это сложное высказывание, которое истинно в случае совпадения истинности исходных высказываний, в противном случае высказывание ложно.

**Сложение по модулю два:**

Отрицание эквиваленции.

**Существенные и несущественные переменные:**

Переменная будет являться **существенной** для некоторой функции F, если функция F будет принимать различные значения хотя бы на одной паре соседних наборов. Если принимает одинаковые значения то переменная называется **несущественной (фиктивная)**.

**Дизъюнктивная нормальная форма:**

**Дизъюнктивной нормальной формой** (ДНФ) - функция, которая представлена в виде дизъюнкций простых конъюнкций.

**Простая конъюнкция:**

**Простая конъюнкция** (*конъюктивный одночлен*) - либо сами переменные, либо их отрицание, либо конъюнкция двух или более переменных, каждая из которых встречается не более одного раза.

**Простая дизъюнкция:**

**Простая дизъюнкция** (дизъюнктивным одночленом) - одна или несколько переменных, при чем каждая переменная (либо сама, либо ее отрицание) входит в дизъюнкцию не более одного раза.

**Полином Жегалкина:**

**Полином Жегалкина** - это полином, коэффициенты которого это либо числа 0, либо 1, в качестве операции в полиноме выступает конъюнкция и сложение по модулю 2

**Монотонность:**

Булева функция называется монотонной, если из того, что она принимает значение 1 {\displaystyle 1} на некотором наборе аргументов {\displaystyle a}, следует, что она принимает значение 1 {\displaystyle 1} на всяком наборе аргументов {\displaystyle b}, который получается из данного путём замены произвольного числа нулей на единицы.

**Способы расположения булевой функции в Полиноме Жегалкина:**

1. Метод неопределённых коэффициентов

Булевая функция записывается в виде полинома Жигалкина с неопределёнными коэффициентами. Далее приравниваются значения функции к значению полинома на соответствующих наборах переменных. Из этих равенств составляется система уравнений, решая которую находим неизвестные коэффициенты полинома.

1. Метода треугольника Паскаля

Составляется таблица истинности булевой функции. Записывается вектор этой функции F. Строится треугольник Паскаля. В каждой строке треугольника Паскаля ставится в соответствии монотонная конъюнкция полинома. Для этого, двигаясь по сторонам треугольника сверху-вниз ставим в соответствии в каждой строке двоичный набор из таблицы истинности. По значению F=1 записывается монотонная конъюнкция. В полином войдут те конъюнкции, коэффициенты которых равны 1 на левой стороне треугольника Паскаля.

Замечание: переменная булевой функции является несущественной тогда и только тогда, когда полином Жигалкина не содержит

1. С помощью преобразования СДНФ

**Специальные классы булевых функций:**

1. Булевые функции, сохраняющие константу 0

Булевая функция сохраняет константу 0, если F(0, 0, ..., 0) (если значение функции на НУЛЕВОМ наборе = 0) Обозначим Т0 - класс булевой функции, сохраняющий константу 0

[Т0] - замыкание [Т0]=Т0 - замыкание совпадает с множеством этих функций

Примеры:

К классу Т0 относятся: 0, X v Y, X ^ Y, X ⊕ Y

1. Булевые функции, сохраняющие константу 1

Булевая функция сохраняет константа 1, если значение F(1, 1, ..., 1) (если значение функции на ЕДИНИЧНОМ наборе = 1)

Обозначим Т1 - класс булевой функции, сохраняющий константу 1

[Т1] - замыкание [Т1]=Т1 - замыкание совпадает с множеством этих функций

Примеры:

К классу Т1 относятся: 1, X v Y, X ^ Y, X <=> Y, X -> Y

1. Самодвойственные функции

Функция F\*(X1, X2, ..., Xn) называется двойственной функцией F(X1, X2, ..., Xn), если выполняется следующее равенство:

F\*(X1, ..., Xn) = ¬F(¬X1, ..., ¬Xn)

Замечание: Отношение двойственности является симметричным, т.е. если F\* - двойственная к F, то F - двойственная к F\*

Построим двойственную функцию к булевой функции F(X1, X2)

1. Монотонные булевые функции

**Определение:** если в двух наборах значений переменных X~=(X1, X2, ..., Xn) и X~\* =(X1\*, X2\*, ..., Xn\*) выполняется условие Xi >= Xi\* для любого i от 1 до n, то говорят, что набор X~ >= X~\* (значок обозначает предпочтительнее, больше)

**Самодвойственная функция:**

Булевая функция называется САМОДВОЙСТВЕННОЙ, если она двойственна сама к себе, т.е. выполняется следующее равенство F(X1, ..., Xn) = ¬F(¬X1, ..., ¬Xn)

**Линейная булева функция:**

**Определение:** булевая функция называется линейной, если её полином Жегалкина имеет вид:

G = a0 ⊕ a1X1 ⊕ a2X2 ⊕ ... ⊕ anXn

**Классы Поста:**

Множества Т0, Т1, S, M, L - называются **классами Поста**

**Полнота системы (критерий Поста):**

С точки зрения таблицы принадлежности к классам Поста множества функций являются **полным**, если в каждом столбце стоит хотя бы **один** минус.

**Противоречие:**

Формула F называется противоречием (тождественно ложной), если для любых высказываний, которые подставляются вместо переменых, формула превращается в ложное высказывание.

**Тавтология:**

Формула F называется тавтологией (тождественно истинной), если она превращается в истинное высказывание при подстановке вместо переменых любых высказываний.

**Выполнимая функция:**

Формула F называется выполнимой, если существуют конкретные высказывания, которые превращают исходную формулу в истинное высказывание.

**Опровержимая функция:**

Формула F называется опровержимой, если существуют некоторые высказывания, которые обращают исходную формулу в ложное высказывание.

**Закон де Моргана:**

**Высказывание:**

Высказывание – это утвердительное предложение, о котором можно судить истинно оно или ложно.

**Простое высказывание:**

Простое высказывание – это некоторое высказывание, которое является неделимым по смыслу.

**Составное (сложное) высказывание:**

Составное высказывание состоит из простых высказываний, которые соединены с помощью логических связок.

**Штрих Шеффера:**

Отрицание конъюнкции

**Стрелка Пирса:**

Отрицание дизъюнкции

**Операция запрета:**

Операция запрета – сложная логическая операция, истинная тогда, когда первое ложно, а второе истинно, в остальных случаях она ложна.