Математика

Содержание

1 Тригонометрия

1.1 Начало геометрической тригонометрии

$$\sin\alpha = \frac{a}{c},\ \cos\alpha = \frac{b}{c},\ \operatorname{tg}\alpha = \frac{a}{b},\ \operatorname{ctg}\alpha = \frac{b}{a}$$

	30°	45°	60°
$\sin\alpha$	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$
$\cos\alpha$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$
$\operatorname{tg}\alpha$	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	1	$\sqrt{3}$
$\operatorname{ctg}\alpha$	$\sqrt{3}$	1	$\frac{\sqrt{3}}{3}$

$$a = c\cdot\sin\alpha = c\cdot\cos\beta$$

$$\sin(90^\circ-\alpha) = \cos\alpha,\ \cos(90^\circ-\alpha) = \sin\alpha,\ \operatorname{tg}(90^\circ-\alpha) = \operatorname{ctg}\alpha,\ \operatorname{ctg}(90^\circ-\alpha) = \operatorname{tg}\alpha$$

Первые формулы

$$\sin^2\alpha + \cos^2\alpha = 1$$

$$\operatorname{tg}\alpha\cdot\operatorname{ctg}\alpha = 1$$

$$\operatorname{tg}\alpha = \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}, \operatorname{ctg}\alpha = \frac{\cos\alpha}{\sin\alpha}$$

$$1+\operatorname{tg}^2\alpha = \frac{1}{\cos^2\alpha}, 1+\operatorname{ctg}^2\alpha = \frac{1}{\sin^2\alpha}$$

Тригонаметрические выражения для тупых углов

До этого мы рассматривали синус, косинус, тангенс и котангенс через прямоугольный треугольник. Для тупых углов нам понадобиться новое определение. Рассмотрим единичную окружность с радиусом $R = 1$ и центром в начале координат, а также точку $M(x;y)$. Синусом угла α (угол между радиусом и положительным направлением Ox) называется отношение y точки $M(x;y)$ к радиусу. То есть $\sin\alpha = \frac{y}{1} = y$. Аналогично $\cos\alpha = x$, $\operatorname{tg}\alpha = \frac{y}{x}$, $\operatorname{ctg}\alpha = \frac{x}{y}$.

Формулы приведения: $\sin(180^\circ-\alpha) = \sin\alpha, \cos(180^\circ-\alpha) = -\cos\alpha, \operatorname{tg}(180^\circ-\alpha) = -\operatorname{tg}\alpha, \operatorname{ctg}(180^\circ-\alpha) = -\operatorname{ctg}\alpha$

1.2 Теорема синусов, косинусов и связанные формулы

Теорема синусов

$$\frac{a}{\sin\alpha} = \frac{b}{\sin\beta} = \frac{c}{\sin\gamma} = 2R$$

Теорема косинусов

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos\alpha$$

$$\cos\alpha = \frac{b^2+c^2-a^2}{2bc}$$

Связанные формулы

Формула площади треугольника: $S = \frac{1}{2}ab\sin\gamma$

Формула площади параллелограмма: $S = ab\sin\gamma$

Формула площади выпуклого четырехугольника: $S = \frac{1}{2}d_1d_2\sin\phi$

Среднее геометрическое (пропорциональное): $h_c = \sqrt{a_cb_c}, a = \sqrt{ca_a}, b = \sqrt{cb_c}$. Работает только с высотой, проведенной из прямого угла.

Связь сторон параллелограмма и его диагоналей: $2a^2 + 2b^2 = d_1^2 + d_2^2$

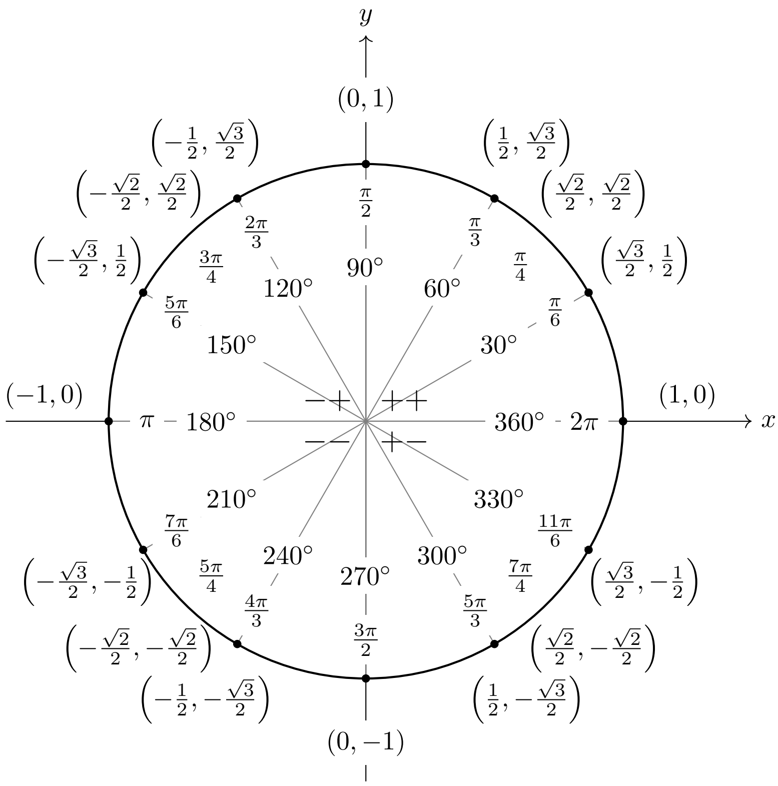
Формула медианы: $m_c = \frac{1}{2}\sqrt{2a^2+2b^2-c^2}$. Но лучше достраивать треугольник до параллелограмма и находить медиану как половину диагонали.

Формула Герона: $S = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}$, где $p = \frac{a+b+c}{2}$

1.3 Тригонометрия в алгебре

Радианы

Про единичную окружность уже было, так что не будем останавливаться. Только вспомним, что $\sin\alpha = y, \cos\alpha = x, \operatorname{tg}\alpha = \dfrac{y}{x}, \operatorname{ctg}\alpha = \dfrac{x}{y}$. Теперь добавляются радианы: $180^\circ = \pi$ радиан. 1 рад $= \dfrac{180^\circ}{\pi} \approx 57^\circ$. Для того, чтобы перевести градусы в радианы нужно умножить на $\dfrac{\pi}{180^\circ}$ (градусы сокращаются). Для перевода из радиан в градусы домножаем на $\dfrac{180^\circ}{\pi}$. Углы могут быть отрицательные.



Значения для определенных углов

Благодаря окружности мы можем вычислить значения для 0°, 90°, 180° и 270°. Важно, что для тангенса не существует значения при 0° и 180°. А для котангенса — при 90° и 270°.

Четверти

Есть 4 четверти: I: $0 < \alpha < \dfrac{\pi}{2}$, II: $\dfrac{\pi}{2} < \alpha < \pi$, III: $\pi < \alpha < \dfrac{3\pi}{2}$, IV: $\dfrac{3\pi}{4} < \alpha < 2\pi$. На рисунке в зависимости от четверти показан знак косинуса и синуса соответственно. У тангенса и котангенса знак положителен, только если знаки косинуса и синуса совпадают.

1.4 Тригонометрические функции

Функция синуса

1.5 Доказательства геометрической тригонометрии

Нахождение катета через угол и гипотинузу

$$\text{Если } \sin\alpha = \frac{a}{c}, \text{ то } a = c \cdot \sin\alpha$$

Доказательство формул приведения для углов $90^\circ - \alpha$

Если первый острый угол равен α, то второй равен $90^\circ - \alpha$. Тогда:

$$\sin(90^\circ - \alpha) = \frac{b}{c} = \cos\alpha,\ \cos(90^\circ - \alpha) = \frac{a}{c} = \sin\alpha,\ \operatorname{tg}(90^\circ - \alpha) = \frac{b}{a} = \operatorname{ctg}\alpha,\ \operatorname{ctg}(90^\circ - \alpha) = \frac{a}{b} = \operatorname{tg}\alpha$$

Заполнение таблицы

30°: Так как катет, лежащий против угла в 30°, равен половине гипотенузы, то пусть $a = 1$. Тогда $c = 2$. По теореме Пифагора $b = \sqrt{2^2 - 1^2} = \sqrt{3}$. $\sin 30^\circ = \dfrac{1}{2}$, $\cos 30^\circ = \dfrac{\sqrt{3}}{2}$, $\operatorname{tg} 30^\circ = \dfrac{1}{\sqrt{3}} = \dfrac{\sqrt{3}}{3}$, $\operatorname{ctg} 30^\circ = \dfrac{\sqrt{3}}{1} = \sqrt{3}$.

45°: Так как прямоугольный треугольник с углом 45° равнобедренный, то пусть $a = b = 1$. Тогда $c = \sqrt{1^2 + 1^2} = \sqrt{2}$. $\sin 45^\circ = \cos 45^\circ = \dfrac{1}{\sqrt{2}} = \dfrac{\sqrt{2}}{2}$, $\operatorname{tg} 45^\circ = \operatorname{ctg} 45^\circ = \dfrac{1}{1} = 1$.

60°: По формулам приведения $\sin 60^\circ = \cos 30^\circ = \dfrac{\sqrt{3}}{2}$, $\cos 60^\circ = \sin 30^\circ = \dfrac{1}{2}$, $\operatorname{tg} 60^\circ = \operatorname{ctg} 30^\circ = \sqrt{3}$, $\operatorname{ctg} 60^\circ = \operatorname{tg} 60^\circ = \dfrac{\sqrt{3}}{3}$. Можно находить и аналогично 30°.

Доказательство первых формул

$$\sin^2\alpha + \cos^2\alpha = \left(\frac{a}{c}\right)^2 + \left(\frac{b}{c}\right)^2 = \frac{a^2}{c^2} + \frac{b^2}{c^2} = \frac{a^2+b^2}{c^2} = \frac{c^2}{c^2} = 1$$

Отсюда можем выразить синус и косинус:

$$\sin\alpha = \sqrt{1-\cos^2\alpha}, \cos\alpha = \sqrt{1-\sin^2\alpha}$$

Разделив обе части тождества на $\cos^2\alpha$ получим

$$\frac{\sin^2\alpha}{\cos^2\alpha} + \frac{\cos^2\alpha}{\cos^2\alpha} = \frac{1}{\cos^2\alpha}, 1 + \operatorname{tg}^2\alpha = \frac{1}{\cos^2\alpha}$$

Разделив обе части тождества на $\sin^2\alpha$ получим

$$\frac{\sin^2\alpha}{\sin^2\alpha} + \frac{\cos^2\alpha}{\sin^2\alpha} = \frac{1}{\sin^2\alpha}, 1 + \operatorname{ctg}^2\alpha = \frac{1}{\sin^2\alpha}$$

Доказательство формул тангенса и котангенса:

$$\operatorname{tg}\alpha = \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha} = \frac{\frac{a}{c}}{\frac{b}{c}} = \frac{a}{b}, \operatorname{ctg}\alpha = \frac{\cos\alpha}{\sin\alpha} = \frac{\frac{b}{c}}{\frac{a}{c}} = \frac{b}{a}$$

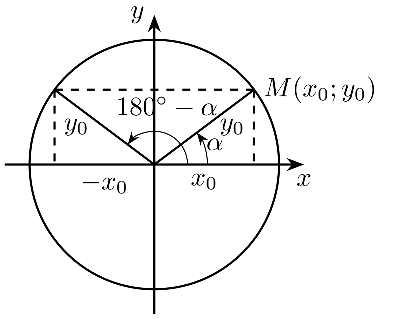
$$\operatorname{tg}\alpha \cdot \operatorname{ctg}\alpha = \frac{a}{b}\cdot\frac{b}{a} = 1$$

Из $\operatorname{tg}\alpha \cdot \operatorname{ctg}\alpha = 1$ получаем:

$$\operatorname{tg}\alpha = \frac{1}{\operatorname{ctg}\alpha}, \operatorname{ctg}\alpha = \frac{1}{\operatorname{tg}\alpha}$$

Синус, косинус, тангенс и котангенс тупого угла

Рассмотрим единичную окружность с радиусом $R = 1$ и центром в начале координат, а также точку $M(x;y)$. Синусом угла α (угол между радиусом и положительным направлением Ox) называется отношение y точки $M(x;y)$ к радиусу. То есть $\sin\alpha = \frac{y}{1} = y$. Аналогично $\cos\alpha = \frac{x}{1} = x$, $\operatorname{tg}\alpha = \frac{y}{x} = \frac{\cos x}{\sin x}$, $\operatorname{ctg}\alpha = \frac{x}{y} = \frac{\sin x}{\cos x}$. Тут 1 — это c, y — это a, а x — это b. От сюда и следует, что x — это косинус, а y — это синус. Основное тригонометрическое тождество верно, так как $x^2 + y^2 = 1$ (уравнение окружности). Верны и другие формулы.

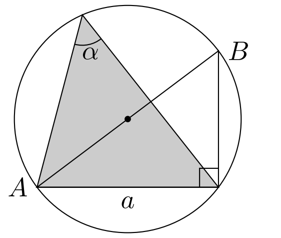


Формулы приведения тупых углов

Из равенства прямоугольных треугольников: $\sin(180^\circ - \alpha) = \sin\alpha$ (равные y), а также $\cos(180^\circ-\alpha) = -\cos(\alpha)$ (противоположные x и $-x$). $\operatorname{tg}(180^\circ-\alpha) = \frac{\sin(180^\circ-\alpha)}{\cos(180^\circ-\alpha)} = \frac{\sin\alpha}{-\cos\alpha} = -\operatorname{tg}\alpha$. Аналогично $\operatorname{ctg}(180^\circ-\alpha) = -\operatorname{ctg}\alpha$. Благодаря этому можем вычислить значения для 120°, 135° и 150°.

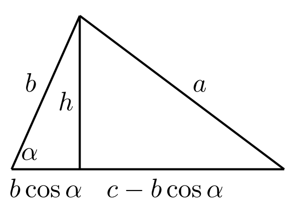
Доказательство теоремы синусов

Дан треугольник со стороной a и противолежащим углом α. Опишем около треугольника окружность. Из конца хорды a проведем диаметр AB. Так как угол, опирающийся на диаметр, — прямой, то получим прямоугольный треугольник с гипотенузой AB и острым углом α (углы, опирающиеся на одну и ту же дугу, равны). $\frac{a}{AB} = \sin\alpha$, $\frac{a}{\sin\alpha} = AB = 2R$. Аналогично доказываем $\frac{b}{\sin\beta} = 2R$, $\frac{c}{\sin\gamma} = 2R$. Следовательно, $\frac{a}{\sin\alpha} = \frac{b}{\sin\beta} = \frac{c}{\sin\gamma} = 2R$.



Доказательство теоремы косинусов

Проекция стороны b на сторону c равна $b\cos\alpha$. Проекция стороны a на сторону c равна $c - b\cos\alpha$. Из левого прямоугольного треугольника $h^2 = b^2 - (b\cos\alpha)^2$, из правого $h^2 = a^2 - (c - b\cos\alpha)^2$. Приравняем правые части равенств: $b^2 - (b\cos\alpha)^2 = a^2 - c^2 + 2bc\cos\alpha - (b\cos\alpha)^2$, откуда $a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos\alpha$. Остюда можно выразить и косинус: $\cos\alpha = \frac{b^2+c^2-a^2}{2bc}$.



Связанные формулы

Формула площади треугольника и параллелограмма через две стороны (a и b) и синус угла между ними ($\sin\gamma$): проведем высоту h на сторону a. Из полученного треугольника $h = b\sin\gamma$. Значит $S = \frac{1}{2}ah_a = \frac{1}{2}ab\sin\gamma$. Так как диагональ параллелограмма разбивает его на два треугольника, площадь которых $S = \frac{1}{2}ab\sin\gamma$, то площадь всего параллелограмма $S = ab\sin\gamma$. Работает и для тупых углов.

Формула для выпуклого четырехугольника: пусть в четырех угольники диагонали равны d_1 и d_2, а угол между ними ϕ. Обозначим части диагоналей m, n и x, y. Тогда площадь четырехугольника будет равна сумме треугольников: $S = \frac{1}{2}xm\sin\phi + \frac{1}{2}ym\sin(180^\circ - \phi) + \frac{1}{2}yn\sin\phi + \frac{1}{2}xn\sin(180^\circ - \phi) = \frac{1}{2}m\sin\phi(x+y) + \frac{1}{2}n\sin\phi(x+y) = \frac{1}{2}(x+y)(m+n)\sin\phi = \frac{1}{2}d_1d_2\sin\phi$.

2 Классы

2.1 Алгебра 9 класс

Геометрическая прогрессия

$$b_{n+1} = b_n \cdot q, \text{ где } q \text{ – знаменатель}$$
$$b_n = b_1 \cdot q^{n-1}; \quad b_n = b_k \cdot q^{n-k}$$
$$b_n^2 = b_{n-1} \cdot b_{n+1}; \quad b_n^2 = b_{n-k} \cdot b_{n+k}$$
$$S_n = \frac{b_1(q^n - 1)}{q - 1} = \frac{b_1(1 - q^n)}{1 - q}$$
$$S = \frac{b_1}{1 - q}, \text{ если } |q| < 1$$
$$b_n \cdot b_m = b_k \cdot b_p, \text{ если } n + m = k + p$$

Арифметическая прогрессия

$$a_{n+1} = a_n + d, \text{ где } d \text{ – разность прогрессии}$$
$$a_n = a_1 + d(n-1); \quad a_n = a_k + d(n-k)$$
$$a_n = \frac{a_{n-1} + a_{n+1}}{2}; \quad a_n = \frac{a_{n-k} + a_{n+k}}{2}$$
$$S_n = \frac{2a_1 + (n-1)d}{2} \cdot n = \frac{a_1 + a_n}{2} \cdot n$$
$$a_n + a_m = a_k + a_p, \text{ если } n + m = k + p$$

Четные и нечетные функции

$D(f)$ симметрична относительно нуля

Четная функция: $f(x) = f(-x)$

Нечетная функция: $f(-x) = -f(x)$

Преобразование графиков функции

$f(x \pm a)$ – перенос графика на a влево/вправо

$f(x) \pm b$ – перенос графика на b вверх/вниз

Дробно-рациональные уравнения

$$\frac{A}{B} = 0, \text{ если } \begin{cases} A = 0 \\ B \neq 0 \end{cases}$$

Формула длины отрезка с заданными координатами его концов

$$d = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$$

Уравнение окружности

$$(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 = R^2,$$
где $(x_0; y_0)$ координата центра окружности с радиусом R

Функции

$D(f)$ – область определения (все x)

$E(f)$ – множества значений (все y)

Нули функции ($f(x) = 0$)

Промежутки знакопостоянства ($f(x) > 0, f(x) < 0$)

Промежутки монотонности ($f(x) \uparrow, f(x) \downarrow$)

Точки пересечения с осями ($x = 0, y = 0$)

Примечание: каждому x единственное y

Метод интервалов

Привести неравенство

Отметить нули функции на схеме

Записать ответ в соответствии со знаком

Примечания: x должны быть без минуса

При строгом неравенстве или нуле

в знаменателе точки незакрашенные

При нуле четной степени знаки повторяются

2.2 9 нестандартных уравнений

1. $(x+3)(x+1)(x+5)(x+7)=-16$
   $(x^2+8x+15)(x^2+8x+7)=-16$ $(3+5=1+7)$, $t=x^2+8x+11$ (или x^2+8x+7), $(t-4)(t+4)=-16$, $t^2-16=-16$, $t=0$, $x^2+8x+11=0$ ...
   Примеры: $x(x+3)(x+5)(x+8)=100$, $(x^2-6x+8)(x^2-4x+3)=24$, $(12x-1)(6x-1)(4x-1)(3x-1)=5$.

2. $(x-4)(x+5)(x+10)(x-2)=18x^2$
   $(x^2+x-20)(x^2+8x-20)=18x^2$ $(-4\cdot 5=-2\cdot 10)$, $x^2(x-\frac{20}{x}+1)(x-\frac{20}{x}+8)=18x^2$, $t(t+7)=18$ ...
   Примеры: $(2x-1)(x-2)(2x^2+7x+2)=-20x^2$; $4(x+5)(x+6)(x+10)(x+12)-3x^2=0$.

3. $x^2+x+\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}=28$
   $\left(x+\frac{1}{x}\right)+\left(x^2+\frac{1}{x^2}\right)=28$, $x+\frac{1}{x}=t$, $x^2+\frac{1}{x^2}=t^2-2$, $t^2+t-30=0$ ...
   Примеры: $7\left(x+\frac{1}{x}\right)-2\left(x^2+\frac{1}{x^2}\right)=9$; $3x^2+5x+\frac{5}{x}+\frac{3}{x^2}=16$, $x^4-2x^3-13x^2-2x+1=0$.

   Примечание: Уравнение $x^4-3x^3-8x^2+12x+16=0$ тоже относится к этому типу: $x^2-3x-8+\frac{12}{x}+\frac{16}{x^2}=0$.

4. $2(x^2+x+1)^2-7(x-1)^2=13(x^3-1)$
   $2(x^2+x+1)^2-7(x-1)^2-13(x-1)(x^2+x+1)=0$, $(x-1)=t$, $(x^2+x+1)=m$, $2m^2-13tm-7t^2=0$,
   $D=169t^2+56t^2=225t^2$, $m=\frac{13t\pm 15t}{4}$ $\left[\begin{array}{l} m=7t \\ m=-\frac{t}{2} \end{array}\right.$ ...
   Примеры: $(2x-1)^2+(2x-1)(x+2)-2(x+2)^2=0$, $(3x^2+7x-2)^2+5x^2(3x^2+7x-2)-24x^4=0$

5. $\frac{2x}{x^2-4x+2}+\frac{3x}{x^2+x+2}=-\frac{5}{4}$
   $\frac{2x}{x(x+\frac{2}{x}-4)}+\frac{3x}{x(x+\frac{2}{x}+1)}+\frac{5}{4}=0$, $\frac{2}{t-4}+\frac{3}{t+1}+\frac{5}{4}=0$, $\frac{8(t+1)+12(t-4)+5(t^2-3t-4)}{4(t-4)(t+1)}=0$
   $\begin{cases} t^2+t-12=0 \\ t\neq 4;\ t\neq -1 \end{cases}$ $\left\{\begin{array}{l} \left[\begin{array}{l} t=-4 \\ t=3 \end{array}\right. \\ t\neq 4; t\neq -1 \end{array}\right.$ $\left[\begin{array}{l} x+\frac{2}{x}+4=0 \\ x+\frac{2}{x}-3=0 \end{array}\right.$ ...
   Примеры: $\frac{x^2-10x+15}{x^2-6x+15}=\frac{4x}{x^2-12x+15}$, $\frac{x^2-6x-9}{x}=\frac{x^2-4x-9}{x^2-6x-9}$, $\frac{x^2+5x+4}{x^2-7x+4}+\frac{x^2-x+4}{x^2+x+4}+\frac{13}{3}=0$

6. $(x+3)^4+(x+1)^4=20$
   $(t+1)^4+(t-1)^4=20$, $2t^4+12t^2+2=20$, $m^2+6m-9=0$ ... Складываем в столбик $(a+b)^n$ и $(a-b)^n$
   Примеры: $(x-2)^6+(x-4)^6=64$, $x^5+(6-x)^5=1056$, $(x-3)^4+(x-2)^4-(2x-5)^4=0$

7. $x^2+\left(\frac{x}{x-1}\right)^2=8$
   $\left(x+\frac{x}{x-1}\right)^2-2\frac{x^2}{x-1}=8$, $\left(\frac{x^2-x+x}{x-1}\right)^2-2\frac{x^2}{x-1}=8$, $t=\frac{x^2}{x-1}$, $t^2-2t-8=0$ ...
   Пользуемся $a^2+b^2=(a^2\pm b^2)\mp 2ab$(рассматриваем 2 варианта).
   Примеры: $\left(\frac{x}{x-1}\right)^2+\left(\frac{x}{x+1}\right)^2=90$, $\left(\frac{x-1}{x}\right)^2+\left(\frac{x-1}{x+2}\right)^2=\frac{40}{9}$, $x^2+\frac{25x^2}{(5+2x)^2}=\frac{74}{49}$

8. $\frac{2x-1}{x+1}+\frac{3x-1}{x+2}=\frac{x-7}{x-1}+4$
   $\frac{(2x+2)-3}{x+1}+\frac{(3x+6)-7}{x+2}=\frac{(x-1)-6}{x-1}+4$, $\frac{2(x+1)}{x+1}-\frac{3}{x+1}+\frac{3(x+2)}{x+2}-\frac{7}{x+2}=\frac{x-1}{x-1}-\frac{6}{x-1}+4$,
   $\frac{7}{x+2}=\frac{6}{x-1}-\frac{3}{x+1}$, $\frac{7}{x+2}=\frac{3x+9}{x^2-1}$, $7(x^2-1)=3(x+2)(x+3)$ ...
   Примеры: $\frac{x-1}{x+1}-\frac{x-2}{x+2}=\frac{x-3}{x+3}-\frac{x-4}{x+4}$, $\frac{x^2+2x+2}{x+1}+\frac{x^2+8x+20}{x+4}=\frac{x^2+4x+6}{x+2}+\frac{x^2+6x+12}{x+3}$

9. $\frac{x^2+x+2}{3x^2+5x-14}=\frac{x^2+x+6}{3x^2+5x-10}$
   $\frac{y}{t}=\frac{y+4}{t+4}$, $ty+4y+ty+4t=0$, $t=-y$ ...

Делить или сокращать на x мы можем только в том случае, если $x\neq 0$. Подставяем в уравнение и проверяем.

2.3 Уравнения с модулями

1. $|f(x)| = a$:
   $a < 0 \Rightarrow x \in \varnothing$
   $a = 0 \Rightarrow f(x) = 0$
   $a > 0 \Rightarrow f(x) = \pm a$
   Если $|f(x)| = g(x)$ то решение очень схоже. Мы устанавлеваем ограничения x через $g(x) \geqslant 00$. Потом решаем $f(x) = g(x)$ и $f(x) = -g(x)$.

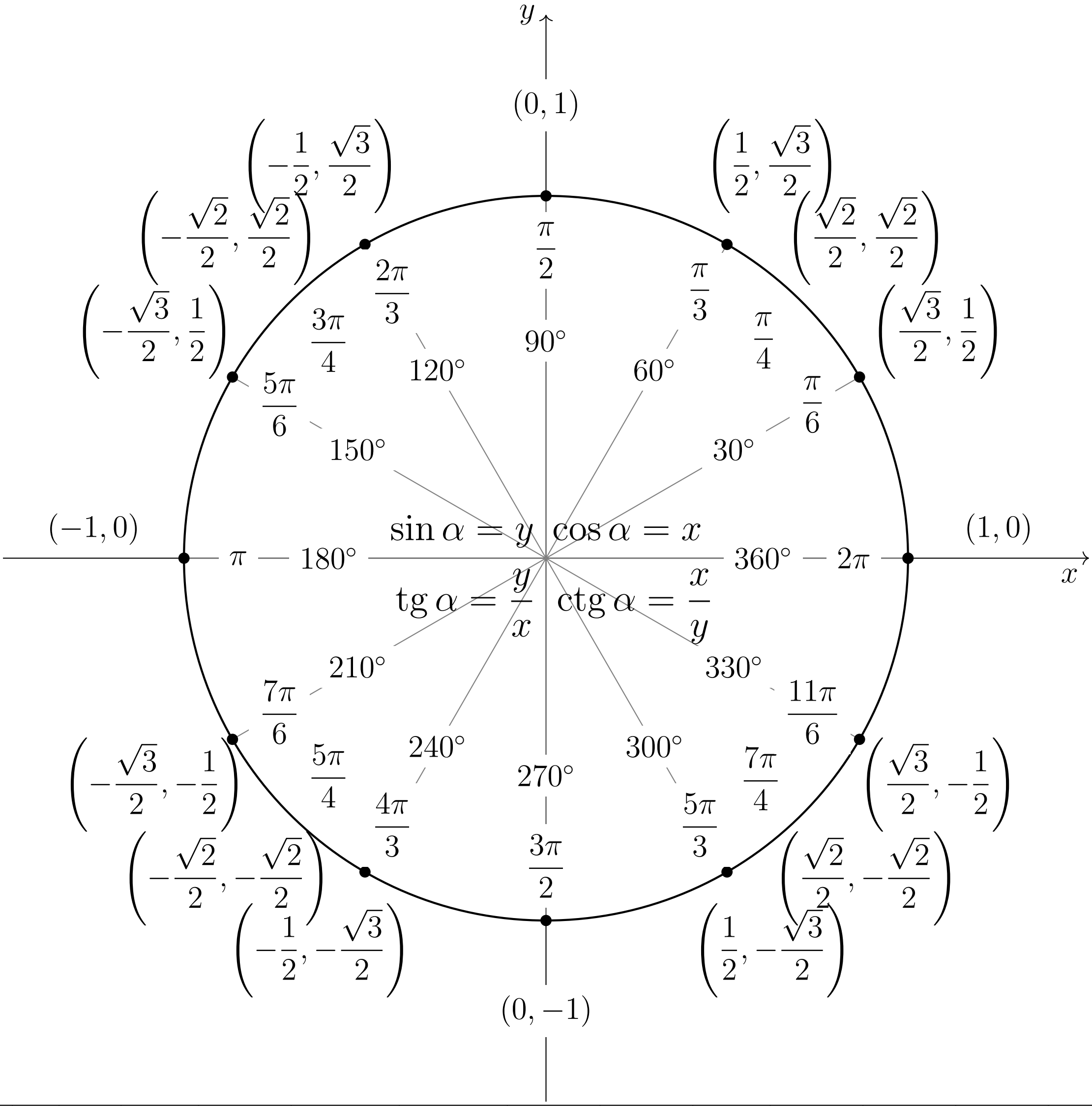
2. $|f(x)| = |g(x)|$:
   $$\left[\begin{array}{l} f(x) = g(x) \\ f(x) = -g(x) \end{array}\right. \text{ или } f^2(x) = g^2(x)$$

3. $|f(x)| = f(x) \Rightarrow f(x) \geqslant 0$. $|f(x)| = -f(x) \Rightarrow f(x) \leqslant 0$

4. Метод нулей модулей:
   $|f(x)| + |g(x)| = n(x)$. Находим нули подмодульных выражений $(f(x) = 0, g(x) = 0)$. Отмечаем эти нули на числовой оси. Эти точки разбивают числовую ось на интервалы. Раскрываем модули на каждом интервале в соответствии со знаком подмодульного выражения (берем любое число на интервале). Решаем получившееся уравнение без модулей на каждом интервале. Проверяем, принадлежат ли найденные решения соответствующим интервалам. Объединяем решения.

3 Распечатки

	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
1	100	121	144	169	196	225	256	289	324	361
2	400	441	484	529	576	625	676	729	784	841
3	900	961	1024	1089	1156	1225	1296	1369	1444	1521
4	1600	1681	1764	1849	1936	2025	2116	2209	2304	2401
5	2500	2601	2704	2809	2916	3025	3136	3249	3364	3481
6	3600	3721	3844	3969	4096	4225	4356	4489	4624	4761
7	4900	5041	5184	5329	5476	5625	5776	5929	6084	6241
8	6400	6561	6724	6889	7056	7225	7396	7569	7744	7921
9	8100	8281	8464	8649	8836	9025	9216	9409	9604	9801



n	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13
2^n	2	4	8	16	32	64	128	256	512	1024	2048	4096	8192
3^n	3	9	27	81	243	729	2187	6561					
4^n	4	16	64	256	1024	4096							
5^n	5	25	125	625	3125	15625							
6^n	6	36	216	1296	7776								
7^n	7	49	343	2401	16807								
8^n	8	64	512	4096									
9^n	9	81	729	6561									