Preuves assistées par ordinateur – TD n° 1

Déduction naturelle

Exercice 1 – Équivalences remarquables Établir en déduction naturelle intuitionniste les équivalences suivantes :

1. Réflexivité, transitivité de l'implication :

$$A \Rightarrow A \qquad\qquad (A \Rightarrow B) \wedge (B \Rightarrow C) \Rightarrow (A \Rightarrow C)$$

2. Isomorphisme de Curry :

$$(A \wedge B \Rightarrow C) \quad \Leftrightarrow \quad (A \Rightarrow B \Rightarrow C)$$

3. Associativité, commutativité :

$$\begin{array}{lcl} (A \wedge B) \wedge C & \Leftrightarrow & A \wedge (B \wedge C) \\ (A \vee B) \vee C & \Leftrightarrow & A \vee (B \vee C) \end{array} \qquad \begin{array}{lcl} A \wedge B & \Leftrightarrow & B \wedge A \\ A \vee B & \Leftrightarrow & B \vee A \end{array}$$

4. Propriétés des unités :

$$\begin{array}{lcl} A \wedge \top & \Leftrightarrow & A \\ A \vee \bot & \Leftrightarrow & A \end{array} \qquad \begin{array}{lcl} A \wedge \bot & \Leftrightarrow & \bot \\ A \vee \top & \Leftrightarrow & \top \end{array}$$

5. Distributivités $\vee/\wedge$:

$$\begin{array}{lcl} A \wedge (B \vee C) & \Leftrightarrow & (A \wedge B) \vee (A \wedge C) \\ A \vee (B \wedge C) & \Leftrightarrow & (A \vee B) \wedge (A \vee C) \end{array}$$

6. Distributivités avec les quantificateurs :

$$\begin{array}{lcl} \forall x\, (A \wedge B) & \Leftrightarrow & (\forall x\, A) \wedge (\forall x\, B) \\ \exists x\, (A \vee B) & \Leftrightarrow & (\exists x\, A) \vee (\exists x\, B) \end{array}$$

7. Distributivité de $\wedge$ et $\vee$ avec l'implication :

$$\begin{array}{lcl} A \Rightarrow (B \wedge C) & \Leftrightarrow & (A \Rightarrow B) \wedge (A \Rightarrow C) \\ (A \vee B) \Rightarrow C & \Leftrightarrow & (A \Rightarrow C) \wedge (B \Rightarrow C) \end{array}$$

Exercice 2 – Échange de quantificateurs Soit A une formule quelconque.

1. Montrer les équivalences $\forall x\, \forall y\, A \;\Leftrightarrow\; \forall y\, \forall x\, A$ et $\exists x\, \exists y\, A \;\Leftrightarrow\; \exists y\, \exists x\, A$.
2. Montrer l'implication $\exists y\, \forall x\, A \quad\Rightarrow\quad \forall x\, \exists y\, A$.
   Pourquoi ne peut-on pas prouver l'implication réciproque ?

Exercice 3 – Caractérisation des connecteurs Au langage du calcul des prédicats du premier ordre, on ajoute un nouveau connecteur binaire $A \heartsuit B$, muni des règles d'introduction et d'élimination suivantes

$$\frac{\Gamma \vdash A \qquad \Gamma \vdash B}{\Gamma \vdash A \heartsuit B} \qquad\qquad \frac{\Gamma \vdash A \heartsuit B}{\Gamma \vdash A} \qquad \frac{\Gamma \vdash A \heartsuit B}{\Gamma \vdash B}$$

calquées sur les règles du connecteur $\wedge$.

1. Démontrer l'équivalence $\vdash (A \heartsuit B) \Leftrightarrow (A \wedge B)$ dans ce système. Que peut-on en conclure ?
2. Refaire le même exercice en introduisant successivement des connecteurs $\diamondsuit$ et $\clubsuit$ dont les règles sont calquées respectivement sur les règles des connecteurs $\vee$ et $\Rightarrow$, puis montrer les équivalences $(A \diamondsuit B) \Leftrightarrow (A \vee B)$ et $(A \clubsuit B) \Leftrightarrow (A \Rightarrow B)$. On pourra également jouer au même jeu avec les unités $\top$ et $\bot$ et les quantificateurs $\forall$ et $\exists$.

Exercice 4 – Lois classiques Montrer en déduction naturelle les formules suivantes. Pour chaque équivalence, préciser quelle implication est intuitionniste ou classique :

1. Double négation : $A \Leftrightarrow \neg\neg A$
2. Tiers exclu : $A \vee \neg A$
3. Lois de Morgan :

$$\begin{array}{rcl@{\qquad\qquad}rcl}
\neg\top & \Leftrightarrow & \bot & \neg\bot & \Leftrightarrow & \top \\
\neg(A \wedge B) & \Leftrightarrow & (\neg A) \vee (\neg B) & \neg(A \vee B) & \Leftrightarrow & (\neg A) \wedge (\neg B) \\
\neg(\forall x\, A) & \Leftrightarrow & \exists x\, (\neg A) & \neg(\exists x\, A) & \Leftrightarrow & \forall x\, (\neg A)
\end{array}$$

4. Décomposition de l'implication :

$$A \Rightarrow B \;\Leftrightarrow\; (\neg A) \vee B \qquad\qquad \neg(A \Rightarrow B) \;\Leftrightarrow\; A \wedge \neg B$$

5. Loi de Peirce : $((A \Rightarrow B) \Rightarrow A) \Rightarrow A$

Exercice 5 – Induction sur les dérivations

1. Énoncer précisément le schéma de raisonnement par récurrence sur la structure des dérivations en déduction naturelle.
2. À l'aide de ce schéma, montrer le lemme d'affaiblissement

   Si $\Gamma \vdash A$ *et* $\Gamma \subset \Gamma'$, *alors* $\Gamma' \vdash A$.

   et rédiger au propre sa démonstration, en mettant clairement en évidence l'hypothèse de récurrence utilisée.