Preuves assistées par ordinateur – TD n° 3

Théories et modèles

Exercice 1 (Indépendance-1) Soit $p(\_,\_)$ un symbole de prédicat d'arité 2. On considère les formules

$$\begin{array}{rcl} R & \equiv & \forall x\ p(x,x) \\ S & \equiv & \forall x\ \forall y\ [p(x,y)\ \Rightarrow\ p(y,x)] \\ T & \equiv & \forall x\ \forall y\ \forall z\ [p(x,y)\ \wedge\ p(y,z)\ \Rightarrow\ p(x,z)] \end{array}$$

Montrer que les formules R, S et T sont indépendantes, en ce sens qu'aucun des trois séquents $S,T \vdash R$, $R,T \vdash S$ et $R,S \vdash T$ n'est dérivable.

Exercice 2 (Modèles finis)
On considère la théorie $\mathcal{T}$ (du premier ordre) dont la signature est formée par
- deux symboles de constante 0 et 1,
- un symbole de prédicat $<$ d'arité 2,

et dont les axiomes sont :

(A_1) $0 < 1$

(A_2) $\forall x\ \neg(x < x)$

(A_3) $\forall x\ \forall y\ \forall z\ (x < y\ \wedge\ y < z\ \Rightarrow\ x < z)$

(A_4) $\forall x\ \forall y\ [x < y\ \Rightarrow\ \exists z\ (x < z\ \wedge\ z < y)]$

1. Donner un modèle de $\mathcal{T}$. En déduire que $\mathcal{T}$ est cohérente.
2. Montrer que tout modèle de $\mathcal{T}$ est infini.
3. Montrer que pour tout $i \in \{1; 2; 3; 4\}$, la théorie $\mathcal{T}_i = \mathcal{T} - A_i$ (« $\mathcal{T}$ privée de l'axiome A_i ») admet en revanche un modèle fini. On exhibera un tel modèle pour chaque valeur de i.

Exercice 3 (Indépendance-2) Soit la signature formée par le symbole de constante 0, le symbole de fonction unaire s et le symbole de prédicat binaire $=$. Dans la théorie égalitaire induite par cette signature, montrer l'indépendance des axiomes de Peano :
- $\forall x\ \forall y\ [s(x) = s(y)\ \Rightarrow\ x = y]$
- $\forall x\ \neg[s(x) = 0]$
- $\forall x_1\ \ldots\ \forall x_n\ [A\{x := 0\}\ \wedge\ \forall x\ (A\ \Rightarrow\ A\{x := s(x)\})\ \Rightarrow\ \forall x\ A]$
  pour toute formule A telle que $FV(A) \subset \{x_1; \ldots ; x_n; x\}$

(Le principe de récurrence n'est pas réellement un axiome, mais un schéma d'axiomes.)

Exercice 4 (Théories égalitaires) Soit $\mathcal{T}$ une théorie égalitaire. On dit qu'un modèle $\mathcal{M}$ de $\mathcal{T}$ est égalitaire lorsque le prédicat binaire d'égalité $=$ est interprété par la relation d'égalité dans le modèle, c'est-à-dire : $[\![t = u]\!]_\rho^{\mathcal{M}} = 1$ ssi $[\![t]\!]_\rho^{\mathcal{M}} = [\![u]\!]_\rho^{\mathcal{M}}$ (pour toute valuation ρ sur $\mathcal{M}$).

Montrer que tout modèle $\mathcal{M}$ d'une théorie égalitaire $\mathcal{T}$ peut être transformé en un modèle égalitaire $\mathcal{M}'$ de $\mathcal{T}$. (On justifiera les différentes étapes de la construction de $\mathcal{M}'$.)

Exercice 5 (Isomorphisme de modèles) Soit Σ une signature.

1. Définir une notion d'isomorphisme entre deux Σ-modèles $\mathcal{M}_1$ et $\mathcal{M}_2$.
2. En déduire que si $\mathcal{M}_1$ et $\mathcal{M}_2$ sont deux Σ-modèles isomorphes, alors pour toute formule close A, on a $\mathcal{M}_1 \models A$ si et seulement si $\mathcal{M}_2 \models A$.

Exercice 6 (Modèles standard de l'arithmétique) À tout modèle égalitaire [1] $\mathcal{M}$ de l'arithmétique, on associe naturellement une application $\phi^{\mathcal{M}} : \mathbb{N} \to \mathcal{M}$ définie par

$$\phi^{\mathcal{M}}(n) \quad = \quad [\![\underbrace{s(\cdots s}_{n}(0)\cdots)]\!]^{\mathcal{M}}$$

pour tout $n \in \mathbb{N}$.

1. Vérifier que $\phi^{\mathcal{M}}$ est injective. Est-elle nécessairement surjective ?

On dit d'un modèle $\mathcal{M}$ de l'arithmétique qu'il est *standard* lorsque $\phi^{\mathcal{M}}$ est bijective.

2. Montrer que tous les modèles standard de l'arithmétique sont isomorphes.

Exercice 7 (Arithmétique non-standard) Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on note $\mathcal{T}_n$ l'extension de l'arithmétique obtenue en introduisant :

- Un nouveau symbole de constante ω ;
- Les n axiomes $\neg[\omega = 0]$, $\neg[\omega = s(0)]$, ..., $\neg[\omega = \underbrace{s(\cdots s}_{n-1}(0)\cdots)]$

Enfin, on note $\mathcal{T}_\omega$ la théorie limite, obtenue en réunissant les axiomes des théories $\mathcal{T}_n$ ($n \in \mathbb{N}$).

1. Montrer que chacune des théories $\mathcal{T}_n$ ($n \in \mathbb{N}$) est cohérente.
2. Peut-on en déduire que $\mathcal{T}_\omega$ est cohérente ? Pourquoi ?
3. Déduire des deux questions précédentes que l'arithmétique admet un modèle non standard.

Précision : Dans cet exercice, on présuppose la cohérence de l'arithmétique.

1. On ne s'intéresse ici qu'aux modèles égalitaires de l'arithmétique.