Corrigé de l'exercice 2 (modèles finis) du TD 3 (théories et modèles)

Question 1

$(\mathbb{R}, 0, 1, <)$, $(\mathbb{Q}, 0, 1, <)$ et $([0,1], 0, 1, <)$ sont trois exemples de modèles valides. Tous vérifient les quatre axiomes.

Une théorie est cohérente si on ne peut pas prouver la formule $\bot$.

Supposons que $\mathcal{T} \vdash \bot$ ($\bot$ est un théorème de $\mathcal{T}$), alors $\mathcal{M} \vDash \bot$ ($\mathcal{M}$ valide $\bot$) pour tout modèle $\mathcal{M}$ de $\mathcal{T}$, c'est-à-dire que $[\![\bot]\!]^{\mathcal{M}} = 1$. Or, par définition, la valeur de vérité associée à $\bot$ dans tout modèle est 0 ($[\![\bot]\!]^{\mathcal{M}} = 0$). On obtient une contradiction donc $\mathcal{T} \nvdash \bot$.

Par conséquent, la théorie $\mathcal{T}$ est cohérente (puisqu'elle admet des modèles).

Question 2

Dans un modèle donné $\mathcal{M}$ de $\mathcal{T}$, on construit une suite infinie vérifiant $0 < \ldots < u_n < u_{n-1} < \ldots < u_1 < u_0 = 1$, de la manière suivante :

- $u_0 = 1$ (on a bien $0 < u_0$ par l'axiome 1).
- Par construction $0 < u_n$ donc par l'axiome 4, on trouve u_{n+1} tel que $0 < u_{n+1}$ et $u_{n+1} < u_n$.

Par récurrence et par transitivité (axiome 3), on obtient $u_n < u_m$ pour tous $n < m$.

Par anti-réflexivité (axiome 2), on obtient $u_n \neq u_m$ pour tous $n \neq m$.

Notre suite est ainsi une injection de $\mathbb{N}$ dans $\mathcal{M}$ donc $\mathcal{M}$ est infini.

Question 3

Modèle fini pour $\mathcal{T}_1$

$(\{0, \ldots, n\}, 0, 0, \emptyset)$ (0 et 1 sont interprétés par le même élément et < est interprété par la relation vide) est un modèle fini de $\mathcal{T}_1$.

En effet, il vérifie bien les axiomes 2, 3 et 4 (dont les hypothèses ne sont jamais vérifiées).

Modèle fini pour $\mathscr{T}_2$

$(\{0, 1, ..., n\}, 0, 1, \leq)$ est un modèle fini de $\mathscr{T}_2$.

En effet, il vérifie bien les axiomes 1 ($0 \leq 1$), 3 ($\leq$ est une relation d'ordre, donc transitive) et 4 (il suffit de prendre $z = x$).

Modèle fini pour $\mathscr{T}_3$

$(\{0, 1, 2, ..., n\}, 0, 1, \neq)$ est un modèle fini de $\mathscr{T}_3$.

En effet, il vérifie bien les axiomes 1 ($0 \neq 1$), 2 ($\forall x, \neg(x \neq x)$) et 4 (à partir de trois éléments on peut en trouver un qui est simultanément différent de deux autres).

Modèle fini pour $\mathscr{T}_4$

$(\{0, 1, ..., n\}, 0, 1, <)$ est un modèle fini de $\mathscr{T}_4$.

En effet, il vérifie bien les axiomes 1 ($0 < 1$), 2 (l'ordre strict est anti-réflexif) et 3 ($<$ est une relation d'ordre strict, donc transitive).