

1 Fondements historiques de la théorie des espaces conceptuels

Définitions : Classe, extension et intension

Une classe est un ensemble d'objets regroupés par des attributs communs. Les attributs qu'un objet doit nécessairement avoir pour appartenir à une classe sont parfois appelés *propriétés essentielles* ou *nécessaires*, par opposition avec celles qui sont *accidentelles*, ou *contingentes*. Un concept apparaît donc comme un ensemble d'éléments qui partagent *tous* un (ou plusieurs) attribut(s).

L'équivalence entre les représentations arborescentes et spatiales

Dans son *Organon*, Aristote définit le *genre* (γένος) comme un *prédicat* commun à plusieurs choses ayant des *différences spécifiques* entre elles.¹ Par exemple, « animal » est le genre commun à l'espèce humaine, à l'espèce des chevaux, des oiseaux, etc. Chaque espèce se distingue de toutes les autres par sa différence spécifique. Par exemple, l'espèce des « lions » peut être définie comme des félins (genre) dotés d'une crinière (différence spécifique).

Traditionnellement, une classe (ou un concept) peut être défini en *extension* ou en *intension* :

- L'**extension** d'un concept désigne la collection de tous les objets qui tombent sous ce concept. L'extension englobe tous les objets qu'on peut ranger sous ce concept. Ainsi, l'extension du concept *cheval* est constituée par tous les chevaux.
- L'**intension** d'un concept (on dit parfois son *contenu*, sa *compréhension*) désigne les caractères du concept, c'est-à-dire la conjonction des propriétés que possèdent nécessairement les objets qui tombent sous lui. L'intension est l'ensemble des attributs (ou propriétés) nécessaires et suffisants pour dire qu'un objet appartient à une catégorie.

Ainsi, l'espèce doit être définie en compréhension par des propriétés essentielles qui déterminent son appartenance au genre *et* par des propriétés essentielles qui permettent de distinguer cette espèce de toutes les autres au sein de ce même genre. Étant admis qu'un genre contient au moins deux espèces, ce dernier a une plus grande extension que ses espèces, lesquelles nécessitent plus de conditions dans leurs définitions, autrement dit, des déterminations supplémentaires par rapport au genre.

Passer du concept d'espèce (plus spécifique) au concept de genre (plus général) correspond à une montée en abstraction, un mouvement du particulier vers le général. Nous pouvons distinguer trois processus principaux illustrant cette dynamique, présentés ici selon un ordre croissant d'abstraction et de formalité : Premièrement, en partant d'une collection d'objets concrets reconnus comme appartenant à un même concept (par exemple, en voyant plusieurs chaises différentes), on peut induire leurs caractéristiques communes essentielles pour construire ou affiner l'intension (les conditions nécessaires et suffisantes pour qu'un X soit considéré comme 'chaise'). Cette intension nouvellement formulée détermine alors une extension *plus vaste*, car elle s'applique potentiellement à toutes les chaises existantes ou imaginables, pas seulement celles observées initialement. C'est un processus de généralisation basé sur l'observation d'exemples (l'extension) comme c'est le cas pour les définitions ostensives.

1. ARISTOTE, *Organon*, *Topiques* I, 5, 102a31-32.

Deuxièmement, on peut opérer cette généralisation non pas sur des objets, mais sur des concepts. Par exemple, en examinant les concepts de 'triangle', 'carré', 'pentagone', etc., on constate qu'ils partagent tous une propriété essentielle : "être une figure géométrique plane fermée composée de segments de droite". En identifiant cette propriété commune à travers plusieurs concepts, on forme par généralisation le concept plus englobant de 'polygone' (le genre). Cette opération, comme la précédente, exige de se séparer mentalement de certaines propriétés pour en conserver seulement un plus petit nombre. La différence avec l'opération précédente tient à ce que l'induction opère sur les concepts plutôt que sur des objets directs.

Troisièmement, un processus plus formel consiste à analyser l'intension (la définition complète) d'un unique concept. La définition en intension d'un concept-espèce inclut les propriétés de son genre ainsi que sa différence spécifique. Par exemple, le concept de 'triangle' se définit en intension : "polygone (genre) ayant trois côtés (différence spécifique)". Par un acte d'abstraction, on peut mentalement isoler la partie générique de la définition ('polygone') en mettant de côté la différence spécifique ('ayant trois côtés').

La relation « X et Y sont deux *espèces* de Z » (ou de manière équivalente « Z est le *genre* de X et Y ») peut être représentée de deux manières distinctes : soit de manière *arborescente* où X et Y sont deux nœuds inférieurs connectés au nœud supérieur Z, soit de manière *spatiale*, où X et Y sont *inclus* à l'intérieur de Z comme dans une boîte. Les propriétés qui définissent Z sont également attribuées à X et Y. Interprété dans une arborescence, cela veut dire que les nœuds inférieurs *héritent* des propriétés des nœuds supérieurs. Interprété spatialement, cela veut dire qu'une propriété définissant un ensemble est *transmise* à ses sous-ensembles. Ainsi, plus un nœud est *haut* dans l'arborescence, plus les propriétés qui le caractérisent sont *générales*, et inversement. De la même manière, moins les conditions requises pour appartenir à Z sont restrictives et spécifiques, plus l'extension de Z sera *vaste*, et inversement. Ces principes semblent particulièrement bien exemplifiés dans les taxonomies des êtres vivants, ou bien dans celles des objets mathématiques. Par exemple, Nicole et Arnauld (1662) proposent une arborescence hiérarchique entre quelques *concepts géométriques*²

2. NICOLE et ARNAULD (1992, p.53 ; p.311) décrivent ces relations par les notions de genres et d'espèces, par exemple : « le quadrilatère, qui est un genre au regard du parallélogramme et du trapèze, est une espèce au regard de la figure ».

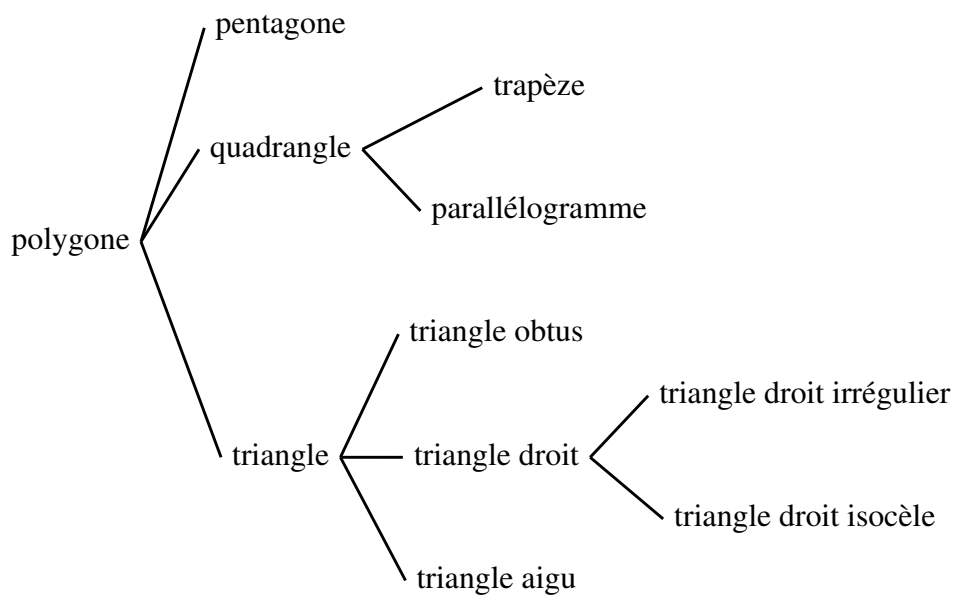


FIGURE 1 – Exemple d'arborescence logique selon Arnauld et Nicole (1662)

Chaque nœud de l'arborescence représente un ensemble d'objets satisfaisant des propriétés déterminées. Lorsqu'on définit en compréhension l'ensemble des triangles, on constate bien que tous les nœuds inférieurs (les espèces) héritent de toutes les propriétés des nœuds supérieurs (le genre). On doit faire figurer explicitement dans la définition la différence spécifique de l'espèce "triangle" permettant de distinguer cette classe de toutes les autres classes du même genre "polygone" :

$$\text{Triangles} = \{x : \text{Polygone}(x) \wedge \text{Trois Côtés}(x)\}$$

Ou de manière équivalente :

$$\text{Triangles} = \{x : \text{Polygone}(x) \wedge \text{Nombre d'angles intérieurs}(x) = 3\}$$

Une même classe peut jouer le rôle de *genre* ou d'*espèce* selon qu'elle est considérée dans sa relation avec la classe dans laquelle elle est contenue ou bien dans sa relation avec les sous-classes qu'elle contient.

En l'occurrence, dans l'arborescence ci-dessus, la classe des triangles est partitionnée en trois sous-classes grâce à trois différences spécifiques portant sur les angles : (1) la propriété d'avoir trois angles strictement inférieurs à 90°, (2) la propriété d'avoir un angle égal à 90° et (3) la propriété d'avoir un angle strictement supérieur à 90°. Il est tout à fait possible de remplacer la valeur de 90° par d'autres valeurs (comme 80°, 100°, etc.) pour définir une autre partition de l'ensemble des triangles.³

De manière similaire, Nicole et Arnauld précisent que l'ensemble des triangles « peut se diviser selon les côtés, ou selon les angles »⁴. La division selon les côtés aurait produit trois branches : triangles isocèles, équilatéraux et scalènes. La partition dépend de la propriété prise en compte.

3. La partition classique est certainement la plus intéressante

4. *Ibid* (1992, p.311).

1.1 Classification par clustering

Comme évoqué, l'approche classique (aristotélicienne) de la classification repose sur l'identification de propriétés essentielles permettant de définir des catégories aux frontières nettes et de les organiser hiérarchiquement. Bien qu'efficace pour les concepts mathématiques (Fig. 1), il s'agit d'une vision essentialiste de la catégorisation qui ne rend pas compte de la catégorisation dans le langage naturel. Il est souvent impossible d'identifier un ensemble unique de conditions nécessaires et suffisantes pour définir des catégories naturelles. C'est dans ce contexte que certains, comme Whewell, ont proposé une approche plus souple et qui part davantage des données empiriques.

Dans son article consacré à Whewell, L. Ward (2023) le situe parmi les penseurs qui considèrent les propriétés naturelles comme des *clusters*. Cette approche, appelée théorie des clusters, s'oppose à l'idée que les concepts peuvent être définis par des conditions nécessaires et suffisantes. Whewell met en avant une perspective *non-essentialisme* de classification qui ne s'appuie pas sur des propriétés essentielles, fixes et invariables pour définir des groupes. Les membres d'un groupe partagent un ensemble de caractéristiques, mais il n'est pas nécessaire que chaque membre possède toutes ces caractéristiques. Selon Ward (2023), Whewell propose une théorie des clusters qui repose sur trois principes fondamentaux :

1. **Similarité** : Les individus d'un même type naturel partagent de nombreuses propriétés.
2. **Séparation** : Les propriétés co-occurentes qui caractérisent les types naturels sont regroupées dans le sens où il existe des "écarts" entre les types dans l'espace des propriétés.
3. **Anti-essentialisme** : De nombreux ou la plupart des types naturels ne possèdent pas d'essence : il n'y a pas de conditions nécessaires et suffisantes pour appartenir à un type.

Le premier engagement (*Similarité*) implique qu'une collection d'objets ne peut être un genre naturel que si ses objets partagent de nombreuses propriétés. Il n'est toutefois pas nécessaire qu'il y ait une propriété que tous et seulement les membres d'un genre aient en commun. Le troisième engagement (*Anti-essentialisme*) suggère précisément que les catégories ne sont pas associées à des conditions d'appartenance nécessaires et suffisantes. Ainsi, les théoriciens des clusters se positionnent entre ces deux extrêmes en exigeant à la fois des similitudes et une séparation entre les différentes catégories, tout en refusant de les essentialiser.

L'une des raisons pour laquelle Whewell apparaît comme théoricien des *clusters* est qu'il suggère qu'une catégorie a un *centre* qui en est le plus représentatif :

Natural Groups are best described, not by any Definition which marks their boundaries, but by a Type which marks their center⁵

Les espèces qui appartiennent à un genre gravitent autour du centre de ce dernier. Les espèces qui appartiennent à un genre sont *rangées autour* de l'espèce-type du genre. Un genre regroupe des espèces présentant un continuum de ressemblances, certaines très proches du type et d'autres plus éloignées, mais toutes ayant plus d'affinités entre elles qu'avec les espèces d'autres genres.

De nombreuses techniques permettent d'évaluer à quel point un jeu de données satisfait chacun des trois critères énoncés ci-dessus. La facilité de construction de clusters dépend des données. Par exemple,

5. Whewell, *Novum Organon Renovatum*, 1858, p.21.

lorsque des gènes sont fortement associés à une pathologie, les données formeront un cluster dense avec une forte cohésion entre les points. Si deux sous-types d'une pathologie ont des profils génétiques distincts, cela se traduira par deux clusters séparés et bien définis.

En revanche, si les éléments sont très variables, il sera difficile d'identifier des clusters. Dans ce cas, les clusters seront plus étalés, avec une faible cohésion entre les points, rendant la segmentation et le partitionnement moins évidents.

Une mesure de la similarité interne d'un cluster C est définie comme la somme des distances entre toutes les paires distinctes de points au sein de ce cluster. Cette mesure évalue la proximité des éléments qu'il contient, reflétant ainsi la qualité de son homogénéité. Cette mesure est formellement donnée par :

$$\text{Similarité Interne}(C) = \sum_{\substack{x,y \in C \\ x \neq y}} D(x,y) \quad (1)$$

où $D(x,y)$ représente la distance entre les points x et y . Une faible similarité interne indique que les points du cluster sont proches les uns des autres, suggérant un cluster bien défini et homogène. À l'inverse, une similarité interne élevée peut indiquer que les points sont dispersés, suggérant un cluster moins cohérent. Ainsi cette mesure peut être utilisée pour évaluer la qualité des clusters dans le cadre d'un clustering de données.

Qu'est-ce que le clustering ?

1.1.1 L'algorithme des k moyennes

Tels qu'ils sont définis par Borg et Groenen, les clusters sont des regroupements de points *denses* et *séparés* les uns des autres.⁶ Ainsi, en principe, les clusters ont à la fois une forte similarité interne et une séparabilité.

L'analyse en clusters vise à regrouper des objets de manière à maximiser la similarité au sein de chaque groupe et à minimiser la similarité entre les différents groupes. Cette méthode fait partie de l'apprentissage non supervisé, car elle ne nécessite pas de pré-étiquetage des données pour effectuer la partition en clusters. Considérons un ensemble de données noté $D = \{x_1, \dots, x_n\}$, où chaque x_i est un vecteur multidimensionnel. Par souci de simplicité, nous représenterons ces données en deux dimensions. Ainsi, dans la Fig. 2, les points noirs représentent les données non catégorisées :

6. Borg & Groenen (2005, p.104) : "a cluster is a particular region whose points are all closer to each other than to any point in some other region. This makes the points in a cluster look relatively densely packed, with "empty" space around the cluster. For regions, such a requirement generally is not relevant".

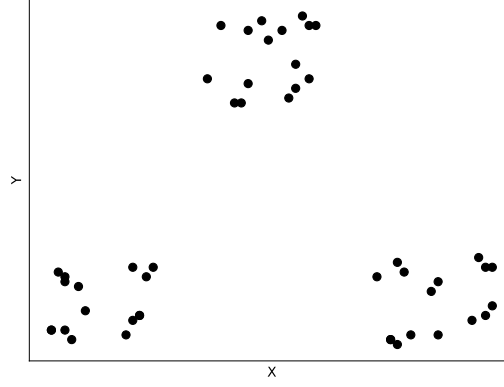


FIGURE 2 – Données $D = \{x_1, \dots, x_n\}$

La première étape du clustering des k -moyennes consiste à sélectionner aléatoirement trois points c_1, c_2, c_3 qui seront chacun considérés comme le centre d'un cluster :

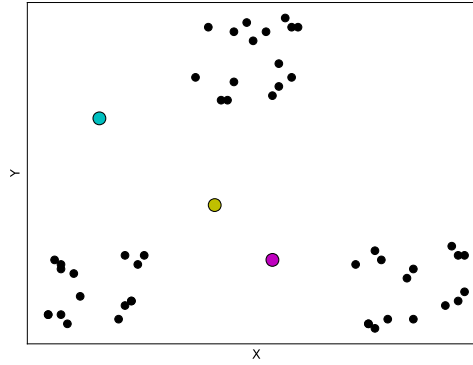


FIGURE 3 – Initialisation aléatoire des centres c_1, c_2, c_3

Notons θ l'ensemble des points centraux, qui sont représentés par les trois points colorés dans la Figure 3. Pour déterminer quels points dans l'ensemble de données D doivent être assignés à un centre $c_i \in \theta$, définissons une fonction indicatrice prenant deux arguments. Le premier argument de cette fonction est θ , l'ensemble des centres (qui correspondent aux trois points colorés sur la Fig. 3). Cette fonction sert donc à colorer un point x_j figuré en noir sur la Figure 2. Pour cela, il suffit ensuite de mesurer la distance de ce x_j à chacun des centres $c_k \in \theta$:

$$M_{c_i}(\theta, x_j) = \begin{cases} 1 & \text{si } D(x_j, c_i) < D(x_j, c_k) \text{ pour tout } k \neq i \\ 0 & \text{sinon} \end{cases} \quad (2)$$

La fonction $M_{c_i}(\theta, x_j)$ teste si x_j appartient au cluster généré par le point c_i . Elle pose la question suivante : « Est-ce que le point x_j est plus proche du point $c_i \in \theta$ que de tout autre point $c_k \in \theta$ différent de c_i ? ». Si c'est le cas, alors $M_{c_i}(\theta, x_j) = 1$; sinon, x_j est associé à un autre centre, et $M_{c_i}(\theta, x_j) = 0$.

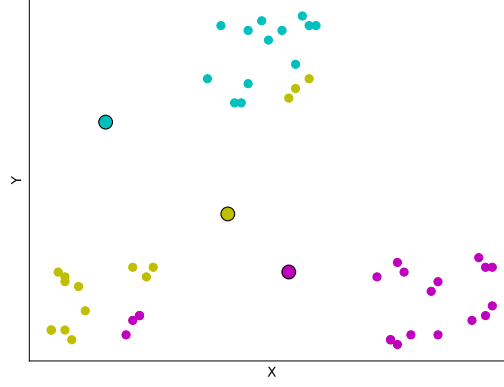


FIGURE 4 – Assignment des points aux clusters les plus proches (itération 1)

L'ensemble des points d'une même couleur (Fig. 6) correspondent aux points dans un cluster C_i défini par :

$$C_i = \{x_j \in D \mid M_{c_i}(\theta, x_j) = 1\} = \{x_j \in D \mid \forall k \neq i, D(x_j, c_i) < D(x_j, c_k)\} \quad (3)$$

$M_{c_i}(\theta, x_j)$ indique donc si x_j appartient à C_i sous la configuration θ . Le nombre de point dans le cluster C_i est noté $|C_i|$ et se calcule appliquant la fonction M_{c_i} à tous les points dans D , c'est-à-dire $\sum_{x_k \in D} M_{c_i}(\theta, x_k) = |C_i|$. Les clusters forment une partition de D , c'est-à-dire que l'union de tous les clusters équivaut à l'ensemble des données i.e. $\bigcup_{i=1}^k C_i = D = C_1 \cup \dots \cup C_k$ et, pour toute paire de clusters distincts (C_i, C_j) , ceux-ci ne contiennent aucun point en commun, i.e. $C_i \cap C_j = \emptyset$.

On peut améliorer la position des centres c_i dans θ . L'idée de cette amélioration est de déplacer chaque c_i de manière à ce qu'il soit plus central par rapport aux points qui lui sont assignés. Pour ce faire, il faut additionner tous les points dans C_i puis diviser par le nombre de point dans C_i :

$$\text{Mean}(C_i) = \frac{1}{|C_i|} \sum_{x_j \in C_i} x_j = \frac{\sum_{x_k \in D} M_{c_i}(\theta, x_k) \cdot x_k}{\sum_{x_k \in D} M_{c_i}(\theta, x_k)} \quad (4)$$

Cela donne les coordonnées de la *moyenne* des points qui se trouvent dans le cluster C_i .

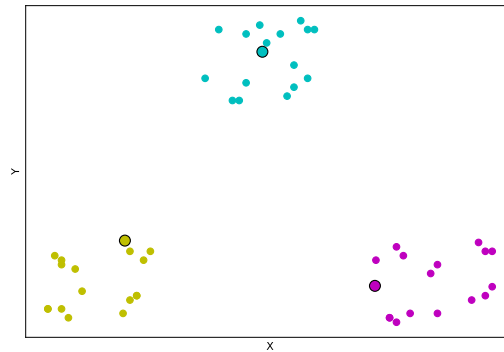


FIGURE 5 – Mise à jour des centres des clusters

Chaque itération de l'algorithme des k -means se décompose en trois étapes. Premièrement, chaque point $x_j \in D$ est assigné au centre $c_i \in \theta$ le plus proche (Eq. 2, Fig. 6). Visuellement, cela consiste à colorer chaque point $x_j \in D$ avec la même couleur que le centre $c_i \in \theta$ auquel il est assigné, partitionnant ainsi

les données en k groupes de points (clusters C_i , Eq. 3) chacun associé à une couleur différente. Deuxièmement, la moyenne des points de chaque cluster est calculée (Eq. 4, Fig. 5) (ci-dessus la moyenne du cluster i est notée " $\text{Mean}(C_i)$ "). Troisièmement, les coordonnées de chaque $c_i \in \theta$ sont mises à jour par cette moyenne, ce qui déplace c_i vers les points qui lui ont été assignés et qui portent donc la même couleur que lui.

Pour formuler la règle de mise à jour en explicitant la dimension temporelle, notons $c_i^{(t)}$ comme la position de $c_i \in \theta$ à l'itération t . Ainsi les trois points jaunes, verts et roses ayant un contour dans la Figure 6 (les centres *avant* la mise à jour de l'itération 1) seraient notés $c_1^{(1)}, c_2^{(1)}, c_3^{(1)}$ et ceux de la Figure 5 (les nouvelles positions *calculées* à l'itération 1, qui deviendront les centres pour l'itération 2) seraient notés $c_1^{(2)}, c_2^{(2)}, c_3^{(2)}$. Plus généralement, le centre $c_i^{(t)}$ est mis à jour en $c_i^{(t+1)}$ en lui assignant comme nouvelles coordonnées la moyenne des points dans $C_i^{(t)}$ (le cluster défini à l'étape t en utilisant les centres $c^{(t)}$). Formellement, cette troisième et dernière étape de l'itération t consiste à mettre à jour le centre du i -ème cluster comme suit :

$$c_i^{(t+1)} = \frac{1}{|C_i^{(t)}|} \sum_{x_j \in C_i^{(t)}} x_j \quad (5)$$

où $C_i^{(t)}$ représente l'ensemble des points assignés au centre c_i à l'itération t . En appliquant ceci, il est donc possible de mettre à jour les trois centres de la Figure 4 en trois nouveaux centres $c_1^{(3)}, c_2^{(3)}, c_3^{(3)}$ comme illustré dans la Figure 5 :

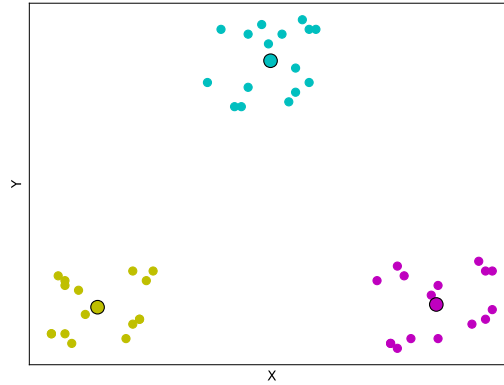


FIGURE 6

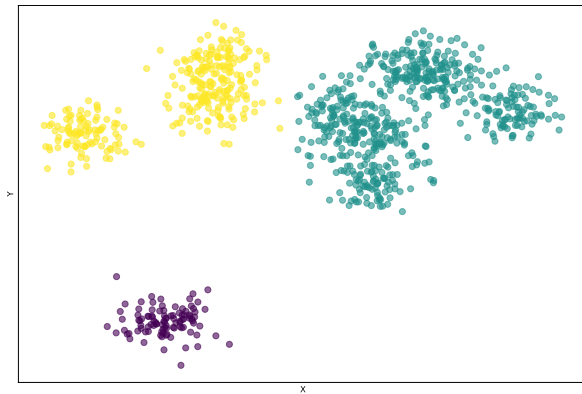
Les centres dans θ finissent toujours par converger vers une position stable en peu d'étapes.

Il est recommandé de relancer plusieurs fois un l'algorithme k-means avec des initialisations aléatoires différentes. En relançant plusieurs fois, on peut garder seulement la meilleure solution. Comme évoqué, le meilleur partitionnement est celui qui maximise la cohésion interne, ce qui est visualisable par l'aspect "dense" et "compact" des clusters, ou calculable par un indicateur appelé WCSS (within-cluster sum of squares).

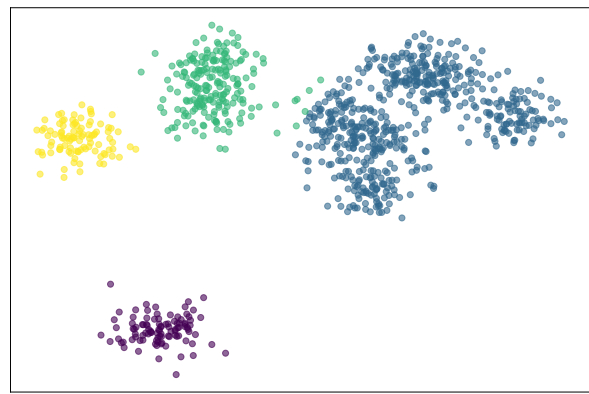
1.1.2 Clustering hiérarchique

Nielsen (2016) explique en détail les concepts, les méthodes et les algorithmes associés au clustering hiérarchique. Nous nous contenterons ici de donner une idée de ce en quoi il consiste par les deux

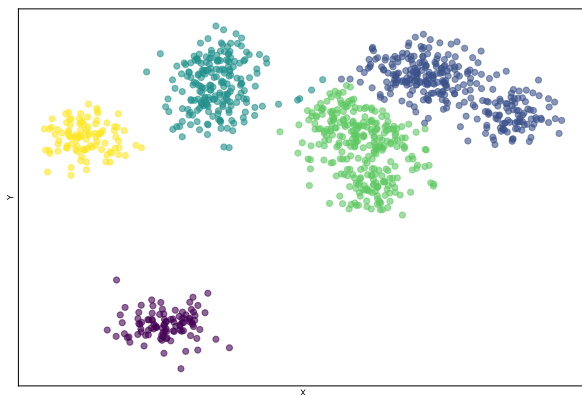
schémas suivants



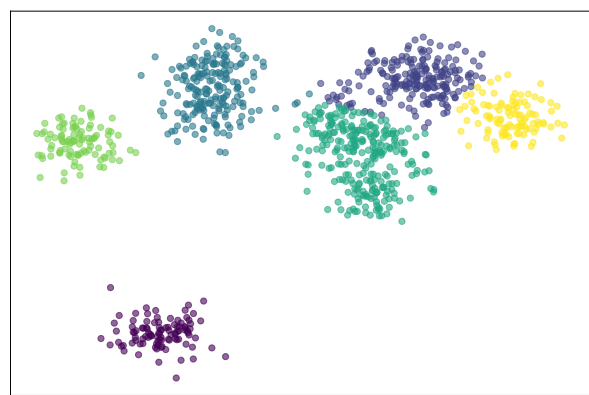
(a) 3 clusters



(b) 4 clusters



(a) 5 clusters



(b) 6 clusters

L'idée clé du clustering *hiérarchique* est que les clusters formés à différentes étapes sont *imbriqués* les uns dans les autres. Cela signifie que les petits sous-clusters sont entièrement inclus dans d'autres plus grands clusters. On distingue clustering hiérarchique agglomératif et clustering hiérarchique divisif. Cela s'illustre sous la forme de représentations arborescentes appelées dendogrammes.