

Chapitre 1

Application de la théorie des espaces conceptuels aux couleurs

1.1. De RGB à HSL

Un espace colorimétrique est utilisé pour représenter l'organisation tridimensionnelle des couleurs. Les couleurs sont mappées le long d'axes qui représentent différentes propriétés. Un premier exemple est l'espace **RGB** dont les trois dimensions représentent respectivement le rouge, le vert et le bleu. Une nuance de couleur singulière est représentée dans **RGB** par un triplet¹ $(x_1, x_2, x_3) \in (R \times G \times B)$ où $R \times G \times B = \llbracket 0; 255 \rrbracket \times \llbracket 0; 255 \rrbracket \times \llbracket 0; 255 \rrbracket \subset \mathbb{N}^3$. Intuitivement, ce triplet représente le niveau de rouge, de vert et de bleu dans la nuance de couleur singulière. Plus généralement, l'espace **RGB** modélise chaque nuance de couleur comme une combinaison additive de sa valeur sur les trois dimensions de rouge, vert et bleu. L'espace **RGB** peut être représenté par un cube, où chaque axe représente l'intensité des composantes : rouge, vert et bleu.

Bien que l'espace **RGB** ait le mérite d'être simple, nous présenterons deux idées schématiques qui montrent qu'il n'est pas du tout adapté pour modéliser la vision humaine. Premièrement, puisque les dimensions de **RGB** sont chromatiques, le degré de luminosité doit être extrait des trois valeurs composants encodant la chromaticité. Cependant, pour modéliser le système visuel humain, il est plus approprié d'isoler un paramètre de luminosité des paramètres de chromaticité (FAIRCHILD 2013, p.78). La deuxième critique concerne les couleurs opposées dans **RGB**. Lorsque l'espace **RGB** est représenté comme un cube, il apparaît que chaque sommet – qui correspond intuitivement à une « couleur pure » – a un sommet opposé qui est également le plus éloigné sur le cube. En d'autres termes, les quatre diagonales joignant les quatre sommets opposés sur le cube indiquent les quatre paires de couleurs les plus éloignées (cf. Fig. 1a). Ainsi, l'une des lacunes du modèle **RGB** est que le sommet opposé à celui du ROUGE est celui correspondant au CYAN. Cependant, au cours des XIXe et XXe siècles, un certain nombre d'études empiriques et de théories² soutiennent l'idée que la couleur la plus opposée au ROUGE est le VERT, et

1. Cet espace est souvent utilisé en informatique, où la valeur du rouge, du vert et du bleu est encodée par un octet qui peut avoir 256 valeurs différentes.

2. Basé sur des expériences psychophysiques, Hering (1834-1918) a soutenu que le rouge carmin est l'opposé du vert et que le bleu est l'opposé du jaune. Cette idée a donné naissance à la théorie des processus opposés, qui stipule schématiquement que certains stimuli verts et certains stimuli rouges génèrent des réponses neurobiologiques opposées (sur les 3 types de bâtonnets : L ; S ; M) ou même antagonistes (mutuellement incompatibles).

non le CYAN comme c'est le cas dans **RGB**.

GÄRDENFORS (2017, section 2.1) présente l'espace colorimétrique tridimensionnel **HSL**, comprenant les dimensions de teinte, de saturation et de luminosité. Ce modèle résout les deux problèmes précédemment soulevés : premièrement, il dissocie la dimension de luminosité des dimensions chromatiques, et deuxièmement, il sépare le ROUGE et le VERT sur l'axe de saturation aussi loin que possible (voir Fig. 1.b).

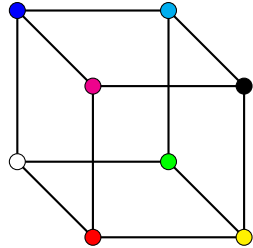


Figure 1a. **RGB** Space

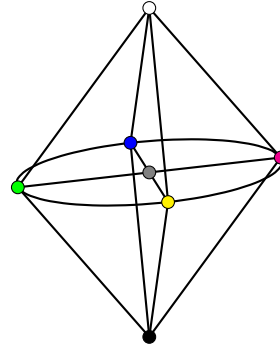


Figure 1b. **HSL** Space

1.2. Partir des expériences psychophysiques sur la vision humaine

La *Commission internationale de l'éclairage* (CIE) est l'institution en charge des normes pour la photométrie et la colorimétrie. En 1976, la CIE a recommandé l'utilisation de l'espace **CIELAB** pour représenter les couleurs vues sur papier ou textiles, et l'espace **CIELUV** pour représenter les couleurs perçues sur un écran. Depuis lors, l'espace **CIELAB** a été ajusté, corrigé et optimisé, ce qui est moins le cas avec **CIELUV**, dont l'utilisation a quelque peu diminué en faveur d'autres espaces³. Pour mettre en place ces espaces colorimétriques et les opérations correspondantes, la CIE a d'abord dû définir certaines *conditions de référence psychophysiques*. Ces conditions sont celles d'un « observateur standard » qui est utilisé pour *standardiser* les différents résultats d'observations, c'est-à-dire pour les interpréter selon les mêmes normes méthodologiques. Par exemple, l'une des normes pour les tests colorimétriques est l'utilisation de l'illuminant D65, qui a été défini statistiquement à partir de nombreuses mesures de la lumière du jour (Fairchild, 2013, p.62). Dans « D65 », la majuscule « D » indique qu'il s'agit d'une mesure de la lumière du jour (« Daylight ») et le nombre indique approximativement la température de

3. FAIRCHILD (2013, pp.313-316) passe en revue les conditions de plusieurs expériences dans lesquelles **CIELAB** a obtenu de meilleurs résultats que **CIELUV**. Entre autres, il cite une expérience utilisant des comparaisons par paires d'images imprimées dans laquelle les prédictions de **CIELAB** étaient significativement meilleures que celles de **CIELUV** (*Ibid*, p.313).

couleur⁴. L'illuminant D65 est un blanc légèrement froid qui correspond à peu près à la lumière du jour dans l'hémisphère nord, sous des ciels légèrement nuageux, entre 10h et 12h au printemps et en automne (Berns 2019, p.4 ; Hirsch, 2014, p.72). En plus de l'éclairage, les conditions de référence psychophysiques incluent également les modalités d'objet (par exemple, *tissu, papier, écran*), la couleur de fond ou la taille du stimulus en degrés d'angle visuel⁵

L'espace **CIELAB** est défini en trois dimensions $\langle L; a; b \rangle$. L'axe a représente la saturation, l'axe b représente la teinte et l'axe L indique le degré de luminosité. Ainsi, bien que la structure des espaces **CIELAB** et **CIELUV** semble similaire⁶ à celle de **HSL** (ils comprennent une dimension dédiée à la luminosité, et la teinte y est déterminée par rotation), contrairement à **HSL**, ces espaces s'appuient sur de nombreuses données psychophysiques concernant les jugements de similarité entre couleurs. Bien que l'espace **HSL** semble mieux représenter que **RVB** le système visuel humain, il n'est pas construit à partir de données empiriques concernant les jugements de similarité entre les couleurs.

Les espaces **CIELAB** et **CIELUV** ont ouvert la voie à de nombreux *Modèles d'Apparence des Couleurs* (MAC). Ces modèles cherchent à décrire mathématiquement le fonctionnement de la vision humaine des couleurs. Par exemple, l'espace **CIELAB** peut prédire le fait qu'une couleur, comme celle d'une pomme rouge, est perçue de manière *constante* malgré les variations de source lumineuse, comme le soleil, un feu ou une ampoule électrique. Ce phénomène, appelé *adaptation chromatique*, intégré à **CIELAB**, dérive d'une loi formulée en 1902 par le physiologiste allemand von Kries⁷. Il existe aujourd'hui de nombreuses variantes, dont certaines visent à prendre en compte plus de facteurs pour mieux reproduire d'autres phénomènes de la perception visuelle humaine, tels que l'effet des zones adjacentes ou contours⁸.

La transformation des espaces **RVB** ou **HSL** à ces espaces est non linéaire⁹, cela signifie que la distance euclidienne entre deux points dans **RVB** ou **HSL** ne sera pas la même dans ces espaces. Imaginons par exemple qu'on pioche arbitrairement trois nuances de couleurs différentes dans **RVB**. Pour exemplifier cette non-linéarité, prenons $x, y, z \in \mathbf{RVB}$. trois triplets différents correspondant à trois

4. La température de D65 est de 6504 Kelvin.

5. En 1995, la CIE a introduit une mesure de différence de couleur appelée « CIE94 », dont les conditions de référence incluent un fond uniforme avec un gris neutre ($L = 50$) et un angle visuel supérieur à 4° , ce qui correspond à peu près à la taille perçue d'un cercle de 3,5 cm de diamètre placé à 50 cm d'un observateur (Berns 2019, p.103 ; Fairchild 2013, p.83).

6. Sur les différences précises entre **CIELAB** et **CIELUV**, voir (Fairchild, 2013, p.211).

7. L'idée de von Kries est que les trois types de cônes (L, M, S) dans la rétine humaine ajustent leur sensibilité en fonction de la lumière ambiante. A la place de coder les signaux de ces cônes isolément, les lois de von Kries cherchent à tenir compte de l'intensité de la lumière ambiante dans la détermination de la chromatique (Fairchild, 2013, sec. 9.1 ; Berns, 2019, p.22).

8. Il est par exemple possible, dans le MAC **CIECAM02**, d'intégrer comme variable la luminosité du contour (surround) (Fairchild, 2013, p.289) ; c'est également possible dans le plus récent **CAM16**.

9. FAIRCHILD (2013, p.43) : « CIELAB color space that are based on a cube-root compressive power-law nonlinearity ».

nuances de couleurs. Soit la fonction $\mathcal{D}_E : (\mathbb{R}^3)^2 \rightarrow \mathbb{R}^+$ permettant de mesurer la distance euclidienne entre deux vecteurs tridimensionnels¹⁰. Imaginons que la distance entre x et y (resp. z) est k fois plus petite (resp. grande) que la distance entre x et z (resp. y), en d'autres termes $\exists k \in \mathbb{R} \quad k \times \mathcal{D}_E(x, y) = \mathcal{D}_E(x, z)$. Soit la fonction $Conv : \mathbf{RVB} \rightarrow \mathbf{CIELAB}$ permettant de passer d'un code $\langle R; V; B \rangle$ à un code $\langle L; a; b \rangle$ l'un et l'autre renvoyant à la même couleur perçue. Si donc on transforme les trois points $x, y, z \in \mathbf{RVB}$ en trois points $x', y', z' \in \mathbf{CIELAB}$, il est probable que la relation $k \times \mathcal{D}_E(x, y) = \mathcal{D}_E(x, z)$ ne soit pas préservée après cette conversion, c'est-à-dire que $k \times \mathcal{D}_E(x', y') = \mathcal{D}_E(x', z')$. Cela signifie plus généralement que si deux couleurs sont proches l'une de l'autre dans \mathbf{RVB} ou \mathbf{HSL} , elles peuvent ne plus l'être dans un espace colorimétrique, et vice versa.

Les parties suivantes visent à défendre l'idée que si on admet que la similarité (resp. dissimilarité) équivaut à la proximité (resp. distance) dans un espace, les points qui tombent sous la même catégorie doivent être représentés de manière *groupée* plutôt que *dispersée* dans cet espace. Une représentation "en bloc" des concepts de couleurs, où tous les points catégorisés comme C_i sont *regroupés* dans l'espace psychologique, est plus conforme à nos intuitions sur les couleurs.

1.3. Les propriétés des couleurs comme des régions dans l'espace colorimétrique.

Disposer d'un espace colorimétrique permet de *le découper* pour représenter les différentes couleurs comme des *régions* dans cet espace. Pour savoir si une nuance de couleur quelconque est rouge, il convient alors de déterminer un seuil inférieur et un seuil supérieur dans l'espace choisi pour déterminer la plage des nuances considérées comme rouges. Plus spatialement, cela consiste à délimiter une région correspondant au ROUGE. Cette région contient, entre autres, ECARLATE ou BORDEAUX comme sous-régions. Pour toute nuance singulière, pour décider s'il s'agit, ou non, d'une instance de rouge, il suffit de vérifier si le triplet correspondant $\langle x_1, x_2, x_3 \rangle$ est à l'intérieur ou à l'extérieur de la région "ROUGE".

Cette idée consiste à définir *en compréhension* une couleur C_i dans l'espace colorimétrique \mathcal{U} en notant $C_i = \{x \in \mathcal{U} \mid \varphi(x)\}$, qui se lit « C_i est l'ensemble des x dans \mathcal{U} pour lesquels la formule $\varphi(x)$ est vraie » Il est donc possible de définir une *fonction indicatrice* associée à la couleur C_i qui renvoie 1 si l'élément appartient à la couleur, sinon 0. La fonction indicatrice décide, pour tout élément $x \in \mathcal{U}$, si $x \in C_i$ ou si $x \in \mathcal{U} \setminus C_i$. En d'autres termes, en prenant n'importe quel élément de \mathcal{U} , cette fonction renvoie 1 pour dire "Oui, x est dans C_i " ou bien renvoie 0 pour dire "Non, x est hors de C_i ". Cette fonction, notée $\chi_{C_i} : \mathcal{U} \rightarrow \{0, 1\}$, situe l'élément x , ou bien dans C_i , ou bien dans $\mathcal{U} \setminus C_i$, le complémentaire de C_i dans \mathcal{U} :

10. $\mathcal{D}_E(x, y) = \sqrt{\sum_{i=1}^3 (x_i - y_i)^2}$

$$\chi_{C_i}(x) = \begin{cases} 1, & \text{si } \varphi(x), \text{ alors } x \in C_i \\ 0, & \text{si } \neg\varphi(x), \text{ alors } x \in \mathcal{U} \setminus C_i \end{cases}$$

Ce genre de définition de C_i le sépare *partes extra partes* de $\mathcal{U} \setminus C_i$. Or, intuitivement, il existe des nuances *entre deux*, au bord des frontières d'une région correspondant à une couleur. Une fonction d'appartenance *tout ou rien*, c'est-à-dire *binaire* ne permet pas de rendre compte du statut de ces *cas-limites* : un rouge qui tire vers l'orange n'est pas comme n'importe quel autre rouge, il n'est pas rouge au même *degré*¹¹. Dans le langage naturel, des locutions et adverbes comme « très », « un peu », « presque », « complètement », « proche de », sont utilisés pour exprimer ces degrés d'appartenance.

A la différence d'une fonction d'appartenance bivalente, où un changement infime dans l'argument x peut produire un renversement complet du degré d'appartenance, le problème consiste donc dès lors à déterminer une formule générale permettant de calculer, pour tout x , à quel degré x est C_i .

1.4. Représentation de la catégorisation d'une couleur : de la similarité aux prototypes

1.4.1. La corrélation entre le degré de similarité de deux couleurs et la probabilité qu'elles soient classées dans la même catégorie

La procédure employée par Ekman (1954) est directe et simple. Il part de n couleurs différentes et veut obtenir une matrice de similarité de dimension $n \times n$. Celle-ci prend la forme d'un tableau dans lequel la cellule, où la colonne i et la ligne j se croisent, contient le degré de similarité des couleurs i et j . Le protocole pour obtenir cette matrice de similarité consiste à demander aux sujets un jugement de similarité subjectif entre toutes les paires possibles avec les n couleurs. Ainsi, chaque participant évalue la similarité entre $\frac{n \times (n-1)}{2}$ paires de couleurs différentes sur une échelle de 0 à 4. Ces jugements de similarité permettent, pour toute couleur $C_i \in \{C_1, \dots, C_n\}$ de classer par ordre décroissant de similarité les autres couleurs. Soit $C'_1 \in \{C_1, \dots, C_n\} \setminus \{C_i\}$ la couleur la plus similaire à C_i , et supposons que la deuxième couleur la plus similaire à C_i est notée C'_2 et ainsi de suite jusqu'à C'_{n-1} , la couleur la moins similaire à C_i . Cette mise en ordre est donc telle que $\forall k \in \llbracket 1; n-1 \rrbracket$ la couleur C'_k est moins similaire à C_i que C'_{k-1} mais en est plus similaire que C'_{k+1} . Imaginez que vous n'avez *jamais vu* la couleur C_i et que vous *ignorez* à quelle catégorie elle appartient, mais que vous connaissez les catégories assignées à toutes les autres couleurs C_1, \dots, C_n . Utilisez maintenant vos intuitions sur la question suivante : avec quelle couleur parmi C'_1, \dots, C'_n la couleur C'_i est-elle la plus susceptible d'appartenir à la même catégorie

11. Kleiber (2007, p.12) : « L'existence de nombreux adjectifs de couleur composés tels que rouge vif, jaune pâle, vert pomme, etc. serait, selon Noailly, la preuve linguistique d'une gradation à l'intérieur d'une catégorie chromatique, puisqu'il revient à ces adjectifs de discriminer entre le plus ou le moins bleu, le plus ou le moins jaune. Et, pour Van de Velde, ce sont les dérivés adjectivaux tels que blanchâtre, rougeâtre, etc. (...) qui indiquent la possession, à un faible degré d'intensité, d'une couleur déterminée (...) ».

sachant que $Sim(C_i, C'_1) > \dots > Sim(C_i, C'_{n-1})$? Pour répondre à cette question, il faut imaginer que tout ce que nous savons des couleurs est d'une part les catégories attachées aux nuances de couleur C'_1, \dots, C'_{n-1} et d'autre part que C'_1, \dots, C'_{n-1} sont triées par ordre de similarité par rapport à C_i . Cette question invite à s'appuyer sur l'hypothèse théorique selon laquelle si une couleur x est plus similaire à une couleur y qu'à une couleur z , alors il est plus probable que x soit de la même catégorie que y , qu'elle soit de la même catégorie que z . En l'occurrence, puisque la couleur la plus similaire à C_i est C'_1 , la probabilité que C_i partage la même catégorie que C'_1 est *a priori* supérieure ou égale à la probabilité que C_i partage la même catégorie que C'_k pour tout $k \in \llbracket 2; n-1 \rrbracket$. Suivant cette même hypothèse, la probabilité que C_i partage la même catégorie que C'_{n-1} , qui est la nuance de couleur qui lui est le plus dissimilaire, est la moins élevée, l'idée étant que ces probabilités diminuent de manière monotone de C'_1 à C'_{n-1} . Faire comme si on ne connaissait rien d'autre sur la catégorie qu'un petit nombre d'exemplaire implique de prendre ces exemplaires comme « points de références » de ces catégories, en ce sens que c'est à partir de ceci que le jugement de similarité sera opéré.

1.4.2. Représenter la similarité (*resp.* dissimilarité) par la proximité (*resp.* distance)

L'une des idées qui traverse les travaux de Shepard¹² est que la dissimilarité entre deux stimuli est représentable par leur distance dans un espace psychologique. Ainsi SHEPARD (1962) propose d'appliquer une technique de réduction de la dimensionnalité appelé *multidimensional scaling (MDS)* sur les données d'Ekman (1954) concernant les jugements de similarité entre couleurs. L'objectif du MDS est de réduire la complexité des données en minimisant la perte d'information et en conservant les relations de similarité entre les éléments. Les résultats du MDS indiquent qu'il existe deux dimensions optimales¹³ pour représenter ces données de similarité, en excluant le paramètre de luminosité. Ce résultat suggère que deux paramètres suffisent pour modéliser au mieux les variations de la chromaticité dans l'espace des couleurs représentées par les humains (Kistler, 2016, p.139). Il est possible de prendre cet espace pour expliquer les jugements de similarité : lorsqu'on juge du degré de similarité entre deux couleurs, on calculerait la *distance* entre les points correspondant à ces deux couleurs dans un espace déterminé. L'idée de Shepard est que la similarité entre deux stimulus (*e.g.* deux couleurs) est représentable par une fonction monotone décroissante de leur distance dans cet espace psychologique. Cela signifie que si deux

12. Shepard applique cette idée à d'autres stimulus que les couleurs comme les consonnes de sa langue maternelle ou les intervalles musicaux (1974).

13. L'optimalité de la dimensionnalité est mesurée par la fonction de coût du MDS, appelée "Stress" (cf. Appendice 1.3). BORG et GROENEN (2005, p.66) appliquent un MDS sur la matrice de similarité utilisée par Shepard et obtiennent que "Measured in terms of Stress, the badness-of-fit of the 1D, 2D, and 3D solutions is 0.272, 0.023, and 0.018, respectively. (...) The 1D solution has high Stress, and adding one additional dimension leads to a major Stress reduction. Adding yet another dimension has very little further effect and, indeed, cannot have much of an effect because the 0.023 for the 2D solution is so close to zero already".

couleurs A et B sont jugées plus semblables que deux couleurs C et D , alors la distance dans l'espace psychologique entre A et B est plus petite que la distance entre les couleurs C et D ¹⁴.

1.4.3. La catégorisation dans la théorie des exemplaires

Comme évoqué, lorsqu'on doit catégoriser un élément inconnu, il est intuitif de chercher parmi les éléments que nous connaissons déjà ceux qui sont les plus similaires, et d'attribuer à l'élément inconnu la même catégorie (cf 1.4.1). La théorie des exemplaires s'appuie sur deux idées essentielles. La première est que nous conservons en mémoire tous les exemples rencontrés pour chaque catégorie donnée. La deuxième est que, lorsqu'on doit catégoriser un nouvel élément, on le compare aux différents exemplaires stockés en mémoire et en le rattachant à la catégorie dont les exemplaires lui ressemblent le plus.

Sur ce principe, la théorie des exemplaires permet de rendre compte du fait que certaines nuances sont considérées comme plus représentatives d'une catégorie que d'autres au sein d'une même catégorie. Une nuance de couleur sera très représentative d'une catégorie si elle est très similaire à de nombreuses nuances au sein de cette même catégorie. Plus formellement, si une catégorie C est définie en extension par un ensemble d'exemplaires connus $\{x_1, \dots, x_n\}$, alors la représentativité d'une nuance particulière x_k (avec $1 \leq k \leq n$) pour la catégorie C est mesurée par la moyenne de ses scores de similarité avec les $n - 1$ autres nuances de C . Plus un élément ressemble aux exemplaires d'une catégorie donnée, plus il sera associé à cette catégorie et considéré comme représentatif de celle-ci. Par exemple, si une nuance est proche du BLEU et du VERT, mais qu'elle est catégorisée comme BLEU, cela signifie qu'elle est plus représentative du BLEU que de VERT, et cela implique qu'elle partage en moyenne plus de similarité avec les nuances de BLEU qu'avec celles de VERT. Ainsi, la théorie de la catégorisation par les exemplaires prédit que la probabilité pour qu'une nuance x soit assignée à la catégorie C est d'autant plus grande, qu'il y a beaucoup de nuances dans C qui sont similaires à x .

Cette idée est opérationnalisée par l'algorithme des k plus proches voisins : la catégorie d'un élément x est déterminée par la catégorie majoritaire parmi ses k plus proches voisins. La méthode des k plus proches voisins consiste à calculer les distances entre un élément à classer et les exemples déjà connus. Pour déterminer l'étiquette de x , il s'agit donc de trouver les k points dans l'espace colorimétrique qui en sont le plus proche (Douven 2023, p.6).

Le coût cognitif de la technique des k plus proche voisins est d'autant plus important que k – le nombre d'exemplaires à prendre en compte dans la catégorisation – est grand. D'où on peut se demander pourquoi ne pas se contenter d'un seul plus proche voisin, afin de minimiser le coût de la catégorisation ? Pourquoi ne pas baser la catégorisation d'un élément x uniquement sur son voisin le plus proche en fixant $k = 1$ afin d'avoir un modèle de la catégorisation plus économe en ressources ? Cela peut conduire à

14. Formellement : $[\text{Sim}(A, B) > \text{Sim}(C, D)] \Rightarrow [\mathcal{D}(A, B) < \mathcal{D}(C, D)]$

des erreurs de catégorisation si le plus proche voisin est un *cas isolé*, atypique et marginal. Même si le plus proche voisin d'un élément x inconnu appartient à une classe donnée, il est possible que la majorité de ses autres voisins proches appartiennent à une classe différente. Se fier exclusivement au plus proche voisin pour catégoriser x serait alors peu fiable. Pour obtenir une classification plus robuste, une stratégie fréquente consiste à augmenter le nombre k d'exemples pris en compte, quitte à accroître le coût cognitif de chaque catégorisation.

Nous soutenons qu'il est possible de réduire la valeur de k en imposant des contraintes sur les exemplaires et/ou sur l'organisation des catégories. En ce sens, dans la partie suivante, on propose un modèle de catégorisation ne prenant en compte qu'un seul plus proche voisin ($k = 1$). En effet, dans ce modèle, un seul plus proche voisin est cherché, et il n'existe qu'un seul exemplaire par catégorie. Un modèle de catégorisation basé sur *un seul* plus proche voisin n'est viable qu'à condition d'imposer des contraintes sur l'organisation des catégories dans l'espace colorimétrique. Avant de présenter en détail ce modèle, il est important de justifier *pourquoi* imposer des contraintes sur l'organisation des catégories de couleurs. Les deux hypothèses suivantes donnent un aperçu bref et partiel des justifications qu'il y a à imposer ces contraintes sur l'organisation des catégories des couleurs :

- (i) Chaque couleur regroupe des nuances perceptuellement similaires,
- (ii) La catégorisation des couleurs doit être rapide et/ou peu coûteuse.

Il est possible de rendre compte de ces deux hypothèses en admettant que les catégories des couleurs sont *optimalement organisées* dans l'espace colorimétrique. Cet espace serait organisé de manière à minimiser la similarité entre différentes catégories et à maximiser la similarité au sein d'une même catégorie¹⁵. Cette hypothèse d'optimalité explique pourquoi, étant donné la contrainte de rapidité et d'économie énoncée dans l'hypothèse (ii), la propriété décrite par l'hypothèse (i) – l'existence d'une forte similarité perceptuelle au sein des catégories – a émergé. En d'autres termes, si l'organisation des catégories n'était pas optimale, cela entraînerait une catégorisation plus lente et plus coûteuse, ainsi que la présence de nuances perceptuellement hétérogènes au sein d'une même catégorie, ce qui contredirait les deux hypothèses (i) et (ii).

1.4.4. La catégorisation dans la théorie du prototype.

L'hypothèse que la cohérence interne des catégories est *forte*, c'est-à-dire qu'elles regroupent des éléments *homogènes*, permet une catégorisation fluide et économique grâce à la constitution d'un prototype

15. Ces contraintes sont exposées dans (Douven et Gärdenfors 2020). En principe, si on enlève toutes les étiquettes des exemplaires et qu'on partitionne à nouveau l'espace selon ces contraintes, on devrait re-obtenir presque les mêmes clusters (catégories) (Douven 2023) Un exemple de technique de partition optimale est l'algorithme des k moyennes, qui consiste à minimiser la distance entre les points d'un même cluster. Détails dans l'appendice (1.1)

distinctif. Ainsi l'hypothèse d'optimalité permet de *synthétiser*, tous les exemplaires d'une même catégorie en un seul exemplaire appelé *prototype*. Celui-ci offre un modèle plus économique de la catégorisation en s'appuyant sur un unique prototype pour chaque catégorie. L'existence d'un prototype pour chaque catégorie permet de penser la catégorisation de manière *plus simple et moins coûteuse* que la manière par laquelle elle est pensée dans le modèle de la théorie des exemplaires exposée précédemment (1.4.3). En effet, plutôt que d'utiliser *tous les exemplaires connus* dans la catégorisation, ne seraient utilisées que les coordonnées des points prototypiques, qui sont les plus représentatifs de chaque catégorie (Rosch 1978).

Un prototype peut être vu comme l'instance qui représente le mieux la catégorie. De manière concrète, lorsqu'un enfant apprend à identifier une nouvelle couleur, le premier exemplaire qu'on lui montre devient son premier point de référence. Au fil du temps, au fur et à mesure qu'il sera exposé à d'autres variantes de cette couleur, ce point de référence sera affiné et ajusté.

Dans l'espace colorimétrique, le prototype est un point dont la position est parfois définie comme la moyenne de la position de tous les exemplaires de la catégorie¹⁶. Pour Gärdenfors, lorsque l'on dit qu'une nuance de couleur x est « plus rouge » qu'une nuance de couleur y , c'est équivalent à dire que x est plus proche du prototype du ROUGE que y ¹⁷. Plus généralement, plus un point est proche du prototype du ROUGE, plus il correspond à une nuance *représentative* de cette catégorie.

Pour catégoriser une nuance de couleur selon la théorie du prototype, il suffit de mesurer sa distance avec les prototypes de chaque catégorie plutôt que de calculer sa similarité avec tous les membres de toutes les catégories. Contrairement aux théories de la catégorisation basées sur les exemplaires, dans la théorie du prototype, le plus proche voisin d'un élément x inconnu n'est jamais une exception ou une valeur marginale, mais sera toujours un prototype maximalement représentatif de sa catégorie. Un élément est considéré comme appartenant à une catégorie si sa distance avec le prototype de cette catégorie est inférieure à sa distance avec tous les autres prototypes de toutes les autres catégories¹⁸.

1.4.4-a Propriétés géométriques des régions représentant les catégories de couleurs

Supposons que la représentativité d'une nuance pour une couleur C soit calculable par une fonction prenant toutes les valeurs réelles entre 0 et 1 notée $M_C : U \rightarrow [0; 1]$. Le domaine \mathcal{U} sur lequel cette fonction est définie correspond à un espace colorimétrique où la distance entre deux points correspond

16. Gärdenfors (2014, sec. 2.7) "the position of the point representing the prototype is defined to be the mean of the positions for all the exemplars". Le prototype est calculé en divisant la somme des valeurs pour chaque dimension par le nombre total d'exemples dans ce groupe. Formellement, si $|C_i|$ note le nombre d'exemplaires de la catégorie C_i , le prototype est donné par $\frac{1}{|C_i|} \sum_{x_k \in C_i} x_k$ (Douven 2023, p.6).

17. Gärdenfors (2014, sec.7.1).

18. Gärdenfors (2000, pp.92-97; sec.4.9) : « An object represented as a vector x_i in a conceptual space belongs to the category for which the corresponding prototypical circle is the closest » Voir aussi (Douven, 2016).

à la dissimilarité perçue entre les deux nuances représentées par ces points. Si cette fonction attribue une valeur k à un point x (c'est-à-dire $M_C(x) = k$), cela signifie intuitivement que x est représentatif de la couleur C avec un degré k . Tous les exemplaires de la couleur C ont une valeur de représentativité non nulle ($M_C(x) > 0$), tandis que toutes les nuances x n'ayant pas la couleur C ont une valeur de représentativité égale à zéro ($M_C(x) = 0$). Les éléments de la catégorie C sont donc représentés par l'ensemble des x tels que $x \in \mathcal{U}$ et $M_C(x) > 0$. De plus, par définition, si p note le prototype de C , il prend la valeur maximale de l'intervalle puisqu'il est maximalelement représentatif de la catégorie ($M_C(x) = 1$).

Plusieurs études empiriques¹⁹ suggèrent que les extensions des catégories de couleurs satisfont une propriété qui indique qu'elles correspondent à des régions n'ayant pas aucune *discontinuité*, aucun *trous*. Cette propriété s'énonce intuitivement comme suit : si un sujet juge qu'une nuance x est ROUGE, alors toutes les nuances y situées entre x et le prototype du ROUGE seront également jugées comme étant ROUGE à un degré au moins égal à celui de x . Plus généralement, si x appartient à la catégorie C et que p en est maximalelement représentatif, alors tous les mélanges intermédiaires entre x et p seront aussi dans C . Dans des termes plus formels : si p est le prototype de la catégorie C , pour tout $x \in C$, toutes les nuances y sur le segment $[p, x]$ satisferont l'inégalité :

$$0 < M_C(x) \leq M_C(y) \leq 1.$$

Puisque y satisfait $M_C(y) > 0$, la nuance représentée par ce point est dans la catégorie C . Cette propriété peut être exprimée formellement comme suit :

$$\forall x \in U, M_C(x) > 0 \implies \forall \lambda \in [0, 1], M_C(\lambda x + (1 - \lambda)p) > 0.$$

Une région qui satisfait cette propriété est dite étoilée par rapport au prototype p ²⁰ et toute région étoilée ne contient *aucun trou*²¹. En effet, un trou devrait être un point t satisfaisant $M_C(t) = 0$ qui se trouve entre p et un autre point x tel que $M_C(x) > 0$, ce qui est impossible car, si C est étoilé par rapport à p , M_C est strictement positif sur tout le segment $[p; x]$.

19. Hampton et al. (2005) mènent une expérience sur la frontière entre le BLEU et le VIOLET. Ils écrivent que la contrainte d'ordre a été respectée dans 5992 essais sur 6000 : "In Experiments 2 and 3, only eight such non-monotonic responses occurred, out of almost 6000 opportunities".

20. On peut l'exprimer en écrivant que le degré d'appartenance à la catégorie C est une fonction monotone de la distance dans la direction spécifique du segment $[p, x]$:

$$\forall x \in C, \forall \lambda, \lambda' \in [0, 1]^2, (\lambda < \lambda') \implies [M_C(\lambda'x + (1 - \lambda')p) \leq M_C(\lambda x + (1 - \lambda)p)]$$

Une formule équivalente est donnée en utilisant le prédicat $Btw(x, y, z)$ signifiant que y est entre x et z :

$$\forall z, y, x \in C, [Btw(p, y, x) \wedge Btw(p, z, y)] \implies M_C(z) \leq M_C(y) \leq M_C(x)$$

21. Douven (2013, p.140) : "A region R is said to be connected iff, for all points p_i and p_j in R , there is a curve [a path] connecting p_i and p_j such that the curve [the path] lies entirely in R ".

Dire qu'une région est étoilée par rapport à l'ensemble de ses points revient à dire que pour toute paire de points x et z dans C , tous les points y sur le segment reliant x à z sont également dans C . Dans des termes plus concrets, si x et y sont deux nuances de ROUGE, alors toutes les nuances intermédiaires entre x et y seront également ROUGE. Selon Gärdenfors, toutes les catégories des couleurs doivent être représentées par des régions qui vérifient ce principe de *convexité géométrique*, qui est plus exigeant que le précédent²². Le fait d'imposer cette convexité à *toutes les régions* d'un même espace colorimétrique a une conséquence sur la *forme* des frontières entre ces régions. En effet, si la frontière entre deux régions A et B présente une courbure, alors au moins l'une des deux régions A ou B n'est *pas convexe*²³. Sous cette contrainte de convexité géométrique, la seule façon de séparer deux régions adjacentes est d'utiliser comme frontières des *segments de droite*. Une technique géométrique permettant de délimiter de telles frontières, tout en respectant les hypothèses de *convexité géométrique*, d'*existence des prototypes*, et d'*organisation optimale* des catégories de couleurs est mise en œuvre dans la partie suivante.

1.4.4-b Le pavage de l'espace colorimétrique

La théorie du prototype, fondée sur l'homogénéité au sein des catégories, trouve un parallèle géométrique dans les pavages de Voronoï, où la notion de similarité entre deux nuances est interprétée comme la proximité entre deux points. Tout comme dans la théorie du prototype, où une nuance de couleur est attribuée à une catégorie si elle est plus similaire à son prototype qu'à tout autre, dans les pavages de Voronoï, un point est défini comme appartenant à une région s'il est plus proche de son site que de tout autre site. Cette interprétation géométrique de la théorie du prototype, où il s'agit de trouver le prototype le plus proche de tout élément x à catégoriser, permet de paver l'espace colorimétrique en régions de Voronoï qui correspondent aux extensions des différentes couleurs.

La section suivante montre comment délimiter géométriquement l'extension d'une catégorie de couleur, en prenant l'exemple de la catégorie ROUGE dans un espace colorimétrique bidimensionnel²⁴ et en utilisant une fonction de distance euclidienne pour mesurer la similarité entre deux nuances. Mais comment circonscrire l'extension de la catégorie ROUGE dans cet espace colorimétrique? On se fixe pour cela un premier objectif qui est de délimiter une région R contenant toutes les nuances de ROUGE, mais ne contenant aucune nuance d'ORANGE, ni de VIOLET. On admet qu'on dispose des prototypes du ROUGE, de l'ORANGE et du VIOLET respectivement notés p_r , p_o et p_p qui correspondent à trois points dans l'espace colorimétrique bidimensionnel.

Conformément aux principes précédemment exposés, pour tout point x dans l'espace colorimétrique,

22. Un ensemble est convexe s'il est étoilé par rapport à *tous* ses points, ainsi, un ensemble étoilé par rapport à *un* point n'est pas nécessairement convexe.

23. « courbé » est ici équivalent à « non-rectiligne »

24. Toutes les constructions proposées dans cette partie sont réalisables dans des espaces de dimensionnalité supérieure.

la distance de ce dernier avec p_r , p_o et p_p permet de savoir *de quel couleur il n'est pas*. La région R doit alors satisfaire les deux conditions suivantes :

$\forall x \in R, \mathcal{D}_E(x, p_r) \leq \mathcal{D}_E(x, p_o)$ Tous les points de la région R sont plus proches de p_r que de p_o . Cela signifie que la région R ne contient aucune nuance d'ORANGE.

$\forall x \in R, \mathcal{D}_E(x, p_r) \leq \mathcal{D}_E(x, p_p)$ Tous les points de la région R sont plus proches de p_r que de p_p . Cela signifie que la région R ne contient aucune nuance de VIOLET.

Les trois étapes suivantes (i), (ii) et (iii) expliquent comment construire cette région R .

(i) Construction de la médiatrice entre p_r et p_o

Traçons le segment $[p_r; p_o]$ reliant p_r , le prototype du ROUGE, à p_o , prototype de l'ORANGE. Les points de ce segment représentent un dégradé continu du rouge à l'orange, où le point au milieu du segment représente une nuance de couleur équidistante de p_r et p_o . L'unique droite qui traverse perpendiculairement le milieu du segment $[p_r; p_o]$ est appelée médiatrice. Cette médiatrice partage le plan en deux demi-plans contenant chacun les points plus proches d'un prototype donné²⁵ :

- d'un côté, $H(p_r, p_o)$ contient tous les points plus proches de p_r que de p_o ,
- de l'autre côté, $H(p_o, p_r)$ contient tous les points plus proches de p_o que de p_r .

Pour rappel, l'objectif est d'obtenir une région qui ne contient aucune nuance d'ORANGE ni aucune nuance de VIOLET. Bien que la région $H(p_r, p_o)$ ne contienne aucune nuance d'ORANGE²⁶, elle a l'inconvénient de contenir au moins une nuance de VIOLET²⁷, et est donc trop vaste pour être la région cherchée. Il faut donc désunir toutes les nuances violettes incorporées dans la région $H(p_r, p_o)$. C'est ce que font les deux étapes suivantes.

(ii) Construction de la médiatrice entre p_r et p_p

Reproduisons le procédé de la première étape, mais en remplaçant le prototype de l'ORANGE (p_o) par celui du VIOLET (p_p). Il s'agit donc de construire une nouvelle médiatrice, avec p_r et p_p ,

25. Formellement, cette médiatrice est $B(p_r, p_o) = \{x \in \mathcal{U} \mid \mathcal{D}_E(x, p_o) = \mathcal{D}_E(x, p_r)\}$.

26. $\forall x \in H(p_r, p_o), \mathcal{D}_E(x, p_o) > \mathcal{D}_E(x, p_r)$

27. Cette hypothèse, qui peut s'écrire $\exists x \in H(p_r, p_o)$ tel que $\mathcal{D}_E(x, p_r) > \mathcal{D}_E(x, p_p)$ ou $H(p_r, p_o) \cap H(p_p, p_r) \neq \emptyset$, est ici admise sans preuve.

pour obtenir deux nouveaux demi-plans. Parmi ces deux demi-plans, c'est $H(p_r, p_p)$ qui retient notre attention. En effet, $H(p_r, p_p)$ ne contient aucune nuance de VIOLET et corrige donc le défaut de $H(p_r, p_o)$. Toutefois, le demi-plan $H(p_r, p_p)$ présente le même travers vis-à-vis de l'ORANGE puisqu'il en contient au moins une nuance. À ce stade, nous avons donc deux régions qui excèdent chacune la région cible de deux manières distinctes. Précisons : la région $H(p_r, p_o)$ est trop vaste en ce qu'elle inclut des nuances violettes, lesquelles sont absentes de $H(p_r, p_p)$; vice versa, la région $H(p_r, p_p)$ est trop vaste en ce qu'elle inclut des nuances oranges, lesquelles sont absentes de $H(p_r, p_o)$.

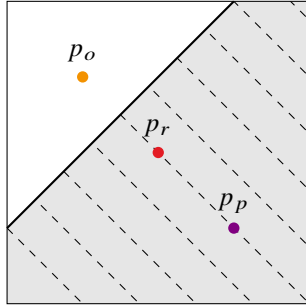


Fig. 2a. Le demi-plan $H(p_r, p_o)$

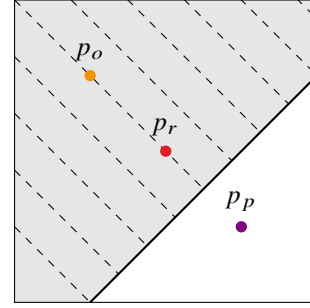


Fig. 2b. Le demi-plan $H(p_r, p_p)$

(iii) Intersection de $H(p_r, p_o)$ et de $H(p_r, p_p)$

Ce non-recouvrement des excès des deux demi-plans invite à considérer leur intersection afin de déterminer une région plus petite satisfaisant toutes les conditions de la région cible. En d'autres termes, l'ensemble des nuances communes à $H(p_r, p_o)$ et $H(p_r, p_p)$ est une région réduite qui concentre toutes les nuances du ROUGE tout en écartant toutes les nuances d'ORANGE et de VIOLET. L'intersection correspond donc à la zone où les deux se croisent, comme illustré ci-après :

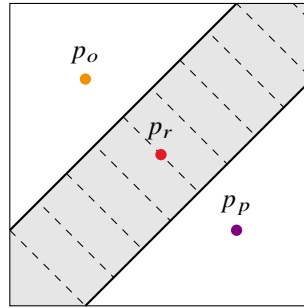


Fig. 2c. Intersection de $H(p_r, p_o)$ et $H(p_r, p_p)$

Cette construction peut être encore reproduite s'il existe davantage de prototypes adjacents au prototype du ROUGE. Par exemple, si p_m est le prototype du MAGENTA et que l'on cherche à obtenir une région excluant toute nuance de VIOLET, d'ORANGE et de MAGENTA, il convient

de construire un nouveau demi-plan $H(p_r, p_m)$ et de l'intersecter avec les deux précédents. Cette intersection produit une région qui exclue toute nuance d'ORANGE, de VIOLET et de MAGENTA, comme illustré sur la Fig 3b :

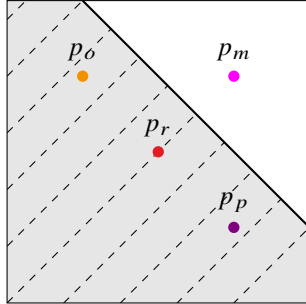


Fig. 3a. Le demi-plan $H(p_r, p_m)$

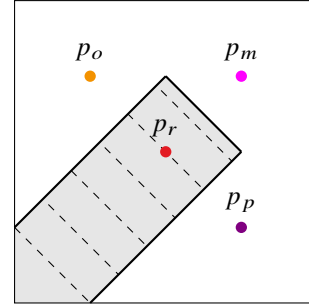


Fig. 3b. Intersection des 3 demi-plans
 $H(p_r, p_o) \cap H(p_r, p_p) \cap H(p_r, p_m)$