第十一次作业

Exercise 11.1

以下模型中属于概率图模型的有：

A. 决策树

B. 感知机

C. 支持向量机

D. 受限玻尔兹曼机

Exercise 11.2

(多选题)以下模型中属于贝叶斯网络的有：

A. 马尔可夫随机场

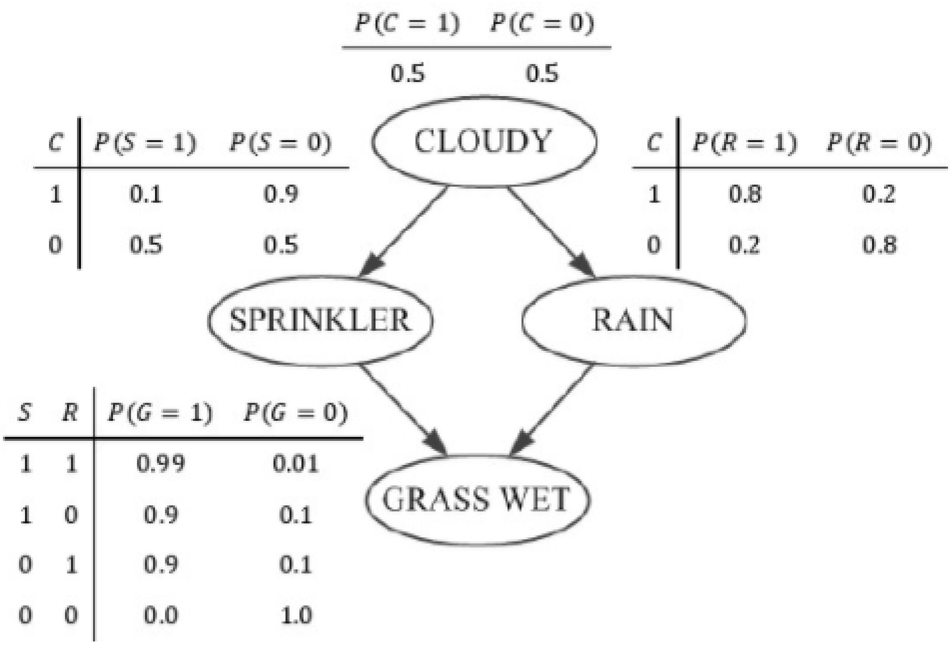
B. 隐马尔科夫模型

C. 条件随机场

D. 朴素贝叶斯分类器

Exercise 11.3

已知四个随机变量C, S, R, G, 分别代表CLOUDY，SPRINKLER, RAIN和GRASS WET，它们之间构成的贝叶斯网络所示。计算：1)在$G=1$的条件下，$S=1$的概率；2）在$G=1$条件下，$R=1$的概率



解析：

$$P(G,S,R,C) = P(G|S,R)P(S|C)P(R|C)P(C)$$

$$P_{1111} = P(G=1|S=1,R=1)P(S=1|C=1)P(R=1|C=1)P(C=1)$$
$$= 0.99 \times 0.1 \times 0.8 \times 0.5 = 0.0396$$

$$P_{1110} = P(G=1|S=1,R=1)P(S=1|C=0)P(R=1|C=0)P(C=0)$$
$$= 0.99 \times 0.5 \times 0.2 \times 0.5 = 0.0495$$

$$P_{1101} = P(G=1|S=1,R=0)P(S=1|C=1)P(R=0|C=1)P(C=1)$$
$$= 0.9 \times 0.1 \times 0.2 \times 0.5 = 0.009$$

$$P_{1100} = P(G=1|S=1,R=0)P(S=1|C=0)P(R=0|C=0)P(C=0)$$
$$= 0.9 \times 0.5 \times 0.8 \times 0.5 = 0.18$$

$$P(G,S,R,C) = P(G|S,R)P(S|C)P(R|C)P(C)$$

$$P_{1011} = P(G=1|S=0,R=1)P(S=0|C=1)P(R=1|C=1)P(C=1)$$
$$= 0.9 \times 0.9 \times 0.8 \times 0.5 = 0.324$$

$$P_{1010} = P(G=1|S=0,R=1)P(S=0|C=0)P(R=1|C=0)P(C=0)$$
$$= 0.9 \times 0.5 \times 0.2 \times 0.5 = 0.045$$

$$P_{1001} = P(G=1|S=0,R=0)P(S=0|C=1)P(R=0|C=1)P(C=1)$$
$$= 0.0 \times 0.9 \times 0.2 \times 0.5 = 0.0$$

$$P_{1000} = P(G=1|S=0,R=0)P(S=0|C=0)P(R=0|C=0)P(C=0)$$
$$= 0.0 \times 0.5 \times 0.8 \times 0.5 = 0.0$$

$$P(S=1|G=1) = \frac{\sum_{R,C\in\{1,0\}} P(G=1,S=1,R,C)}{\sum_{S,R,C\in\{1,0\}} P(G=1,S,R,C)}$$

$$= \frac{P_{1111}+P_{1110}+P_{1101}+P_{1100}}{P_{1111}+P_{1110}+P_{1101}+P_{1100}+P_{1011}+P_{1010}+P_{1001}+P_{1000}}$$

$$= \frac{0.0396+0.0495+0.009+0.18}{0.0396+0.0495+0.009+0.18+0.324+0.045+0.0+0.0}$$

$$= \frac{0.2781}{0.6471} \approx 0.4298$$

$$P(R=1|G=1) = \frac{\sum_{S,C\in\{1,0\}} P(G=1,S,R=1,C)}{\sum_{S,R,C\in\{1,0\}} P(G=1,S,R,C)}$$

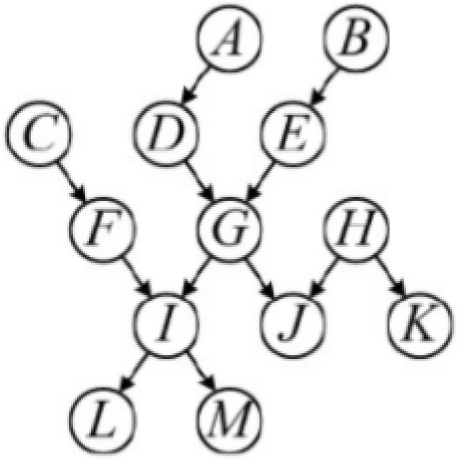
$$= \frac{P_{1111}+P_{1110}+P_{1011}+P_{1010}}{P_{1111}+P_{1110}+P_{1101}+P_{1100}+P_{1011}+P_{1010}+P_{1001}+P_{1000}}$$

$$= \frac{0.0396+0.0495+0.324+0.045}{0.0396+0.0495+0.009+0.18+0.324+0.045+0.0+0.0}$$

$$= \frac{0.4581}{0.6471} \approx 0.7079$$

Exercise 11.4

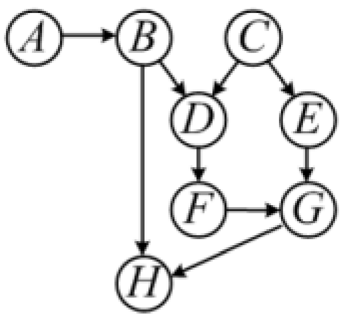
如下图所示有向图，节点 G 的马尔可夫毯为：



A. {D, E}
B. {D, E, I, J}
C. {D, E, F, H, I, J}
D. {C, D, E, F,H, I, J}

Exercise 11.5

如下图所示有向图，以下陈述正确的有



A. B 和 C 关于 F 条件独立
B. B 和 G 关于 F 条件独立
C. B 和 G 关于 {C,F} 条件独立
D. B 和 G 关于 {C,F,H} 条件独立

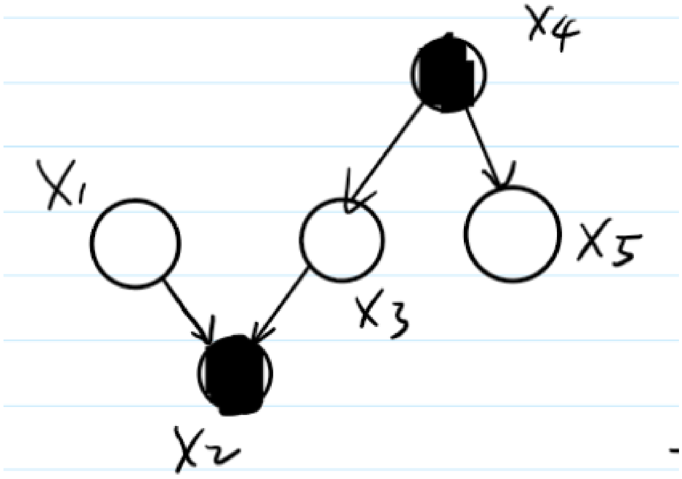
Exercise 11.6

朴素贝叶斯是高方差还是低方差模型?

解析: 朴素贝叶斯是低方差模型。(误差 = 偏差 + 方差)。对于复杂模型来说，由于复杂模型充分拟合了部分数据，使得它们的偏差变小，但由于对部分数据过分拟合，这就导致预测的方差会变大。因为朴素贝叶斯假设了各个属性之间是相互的，算是一个简单的模型。对于简单的模型来说，则恰恰相反，简单模型的偏差会更大，相对的，方差就会较小。

Exercise 11.7

给定概率图模型，其中 X_2, X_4 为已观测变量，请问变量X_1, X_5 是否独立？ 并用概率推导证明。



解析：x1和x5相互独立

二者独立，证明如下：

欲证明二者独立，即须证明：$P(X_1 \mid X_2, X_4, X_5) = P(X_1 \mid X_2, X_4)$

$$
\begin{aligned}
P(X_1 \mid X_2, X_4, X_5) &= \frac{P(X_1, X_2, X_4, X_5)}{P(X_2, X_4, X_5)} \\
&= \frac{\sum_{X_3} P(X_1, X_2, X_3, X_4, X_5)}{\sum_{X_1}\sum_{X_3} P(X_1, X_2, X_3, X_4, X_5)} \\
&= \frac{\sum_{X_3} P(X_1)P(X_4)P(X_3 \mid X_4)P(X_5 \mid X_4)P(X_2 \mid X_1, X_3)}{\sum_{X_1}\sum_{X_3} P(X_1)P(X_4)P(X_3 \mid X_4)P(X_5 \mid X_4)P(X_2 \mid X_1, X_3)} \\
&= \frac{\sum_{X_3} P(X_1)P(X_3 \mid X_4)P(X_2 \mid X_1, X_3)}{\sum_{X_1}\sum_{X_3} P(X_1)P(X_3 \mid X_4)P(X_2 \mid X_1, X_3)}
\end{aligned}
$$

而

$$
\begin{aligned}
P(X_1 \mid X_2, X_4) &= \frac{P(X_1, X_2, X_4)}{P(X_2, X_4)} \\
&= \frac{\sum_{X_5} P(X_1, X_2, X_4, X_5)}{\sum_{X_1} P(X_1, X_2, X_4)} \\
&= \frac{\sum_{X_3} P(X_1)P(X_4)P(X_3 \mid X_4)P(X_2 \mid X_1, X_3)}{\sum_{X_1}\sum_{X_3} P(X_1)P(X_4)P(X_3 \mid X_4)P(X_2 \mid X_1, X_3)} \\
&= \frac{\sum_{X_3} P(X_1)P(X_3 \mid X_4)P(X_2 \mid X_1, X_3)}{\sum_{X_1}\sum_{X_3} P(X_1)P(X_3 \mid X_4)P(X_2 \mid X_1, X_3)}
\end{aligned}
$$

故有

$$
\begin{aligned}
P(X_1 \mid X_2, X_4, X_5) &= \frac{\sum_{X_3} P(X_1)P(X_3 \mid X_4)P(X_2 \mid X_1, X_3)}{\sum_{X_1}\sum_{X_3} P(X_1)P(X_3 \mid X_4)P(X_2 \mid X_1, X_3)} \\
&= P(X_1 \mid X_2, X_4)
\end{aligned}
$$

综上，在 X_2 与 X_4 已观测的情况下，X_1 与 X_5 相互独立