ΠΕΤΣΑ ΓΕΩΡΓΙΑ
ΑΜ: 3200155

2η ΕΡΓΑΣΙΑ

$\boxed{\text{ασκ. 2}}$

$A = \{a, b, c, d, e, f, g\}$

b a g f _ _ _ όταν έχει τοποθετηθεί το ba στην 1η-2η θέση υπάρχουν άλλοι 4 τρόποι να τοποθετηθεί το gf. κάθε ένας απ' τον οποίο περιέχει 3! τρόπους να τοποθετηθούν τα εναπομείναντα γράμματα, δηλ. το c, d, e.

_ b a g f _ _ Ομοίως, όταν το ba είναι στη 2η-3η θέση υπάρχουν 3 τρόποι να τοποθετηθεί το gf καθ'ένας απ' τους οποίους περιέχει 3! τρόπους να τοποθετηθούν τα υπόλοιπα γράμματα

_ _ b a g f _ Ομοίως όταν το ba είναι στην 3η-4η θέση, υπάρχουν 3 θέσεις να τοποθετηθεί το gf και 3! θέσεις για τα υπόλοιπα γράμματα.

_ _ _ b a g f Ομοίως όταν το ba είναι στην 4η-5η θέση, υπάρχουν 3 θέσεις να τοποθετηθεί το gf και 3! θέσεις για τα υπόλοιπα γράμματα

g f _ _ b a _ Ομοίως όταν το ba είναι στην 5η-6η θέση, υπάρχουν 3 θέσεις να τοποθετηθεί το gf και 3! θέσεις για τα υπόλοιπα γράμματα.

g f _ _ _ b a Τέλος, όταν το ba είναι στη 6η-7η θέση υπάρχουν 4 θέσεις να μπει το gf και 3! τρόποι να τοποθετηθούν τα υπόλοιπα γράμματα.

Επομένως συνολικά έχουμε $4\cdot3! + 3\cdot3! + 3\cdot3! + 3\cdot3! + 3\cdot3! + 4\cdot3! = 120$ μεταθέσεις του A που περιέχουν τα gf και ba

ασκ. 3

(i) Έχουμε λέξεις μήκους 12 άρα έχουμε

$\mu = \mu_1 + \mu_2 = 6 + 6 = 12$

$M(\mu_1, \mu_2) = M(6,6) = \frac{12!}{6!6!}$

(ii) Ψάχνουμε όσες λέξεις περιέχουν 1 και 2 άσσους

Άρα έχουμε $\mu = 12$

$\mu_1 = 1$, $\mu_2 = 11$, για όσες περιέχουν έναν άσσο

$\mu_1 = 2$, $\mu_2 = 10$, για όσες περιέχουν 2 άσσους.

Άρα $M(1,11) + M(2,10) = \frac{12!}{1!11!} + \frac{12!}{2!10!}$

Συνολικά υπάρχουν ~~12!~~ τρόποι να τοποθετηθούν τα 0, 1. Επομένως απ' το σύνολο αυτό αφαιρούμε όσες λέξεις περιέχουν 1 και 2 άσσους για να μείνουν όσες λέξεις περιέχουν τουλάχιστον 3 άσσους

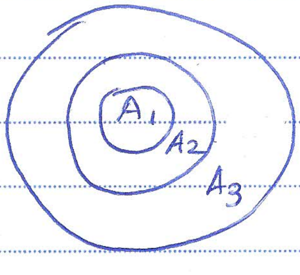
2^{12}

$\cancel{12!} - \left(\frac{12!}{11!} + \frac{12!}{2!10!}\right)$

ασκ. 4

A_1 έχει 100 στοιχεία, A_2 έχει 1000, A_3 έχει 10000

$A_1 \subseteq A_2 \subseteq A_3$



Άρα το $A_1 \cup A_2 \cup A_3$ έχει 10000 στοιχεία.

ασκ. 5

Έχουμε 5 είδη κρουασάν
Θέλουμε 20 με τουλάχιστον 2 από κάθε είδος
Έστω $x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 = 20$ με $x_{1,2,3,4,5} \geq 2$
Όπου x_i η κάθε κατηγορία κρουασάν.
Επομένως έχουμε $C(5+10-1, 10) = C(14, 10)$
$= \frac{14!}{10!\,4!}$

Αυτοί οι αριθμοί προέκυψαν ως εξής:
Από τα 20 κρουασάν που θέλουμε να πάρουμε θέλουμε τουλάχιστον 2 από κάθε είδος $2 \cdot 5 = 10$.
Άρα $20 - 10 = 10$ κρουασάν που απομένουν να επιλεχθούν από οποιαδήποτε κατηγορία. Χρησιμοποιήθηκε ο τύπος $C(n+r-1, r)$ των συνδυασμών όταν επιτρέπεται η επανάληψη. Πιο συγκεκριμένα από ένα σύνολο $n=5$ των κρουασάν, θέλουμε να πάρουμε $r=10$ συνδυασμούς.

ασκ. 6

Έχουμε 10 ερωτήσεις. Έστω
$x_1 + x_2 + \ldots + x_{10} = 200$, με $x_{1,2,..,10} = 15$
Όπου x_i η κάθε μία απ' τις 10 ερωτήσεις και 15 ο βαθμός που η κάθε μία πρέπει τουλάχιστον να έχει.
Από ένα σύνολο 200 βαθμών θέλουμε τουλάχιστον 15 βαθμούς. Άρα $15 \cdot \underset{\text{αριθμός ερωτήσεων}}{\underset{\downarrow}{10}} = 150$. Άρα έχουμε
$200 - 150 = 50$ βαθμοί που πρέπει να μοιραστούν στις ερωτήσεις. Επομένως έχουμε $n=10$, $r=50$.
Άρα $C(10+50-1, 50) = C(59, 50) = \frac{59!}{50!\,9!}$

τρόποι για να τοποθετήσουμε τους βαθμούς στις ερωτήσεις.

$\boxed{\text{ασκ. 7}}$

(i) 1Δ, 2Ι, 2Α, 1Κ, 1Ρ, 1Τ

_ _ _ _ _ _ _ _ Το 1Δ μπορεί να τοποθετηθεί ανάμεσα στις 8 θέσεις με $C(8,1)$ τρόπους αφήνοντας 7 θέσεις ελεύθερες. Μετά υπάρχουν 2Ι που μπορούν να τοποθετηθούν με $C(7,2)$ τρόπους, αφήνοντας 5 θέσεις ελεύθερες. Μετά, τα 2Α μπορούν να μπουν με $C(5,2)$ τρόπους αφήνοντας 3 θέσεις ελεύθερες. Μετά το 1Κ μπορεί να τοποθετηθεί με $C(3,1)$ τρόπους αφήνοντας 2 θέσεις ελεύθερες. Μετά, το 1Ρ μπορεί να τοποθετηθεί με $C(2,1)$ τρόπους αφήνοντας μία θέση ελεύθερη, και τέλος το 1Τ με $C(1,1)$ τρόπους. Επομένως συνολικά έχουμε

$$C(8,1)\cdot C(7,2)\cdot C(5,2)\cdot C(3,1)\cdot C(2,1)\cdot C(1,1) =$$

$$= \frac{8!}{\cancel{7!}}\cdot\frac{\cancel{7!}}{2!5!}\cdot\frac{5!}{2!3!}\cdot\frac{3!}{1!2!}\cdot\frac{2!}{1!}\cdot\frac{1!}{1!0!} = \frac{8!}{2!2!}$$

τρόπους να αναδιατάξουμε τα 8 γράμματα της λέξης ΔΙΑΚΡΙΤΑ.

(ii)

$\underbrace{A\ A\ \_\ \_\ \_\ \_\ \_\ \_}$ Έχουμε 7 τρόπους να τοποθετηθούν τα 2 Α. Σε κάθε έναν απ' τους 7 τρόπους έχουμε 6 θέσεις ελεύθερες να τοποθετηθούν τα υπόλοιπα γράμματα. Δηλαδή $n=6$, με

$n_1 = 1$, $n_2 = 2$, $n_3 = 1$, $n_4 = 1$, $n_5 = 1$ → απ' το 1Τ.

↳ από το Δ ↳ απ' τα 2Δ ↳ απ' το 1Κ απ' το 1Ρ

Έχουμε $M(1,2,1,1,1) = \frac{6!}{1!2!1!1!1!} = \frac{6!}{2!}$

Επομένως έχουμε $7\cdot\frac{6!}{2!}$ διατάξεις στις οποίες τα 2Α εμφανίζονται το ένα δίπλα στο άλλο

ασκ. 8

Όλα τα υποσύνολα του A που περιέχουν 10 στοιχεία θα είναι $C(26,10) = \frac{26!}{10!\,16!}$

Ψάχνουμε όσα υποσύνολα 10 στοιχείων που περιέχουν τα γράμματα $\{a, b, c, d\}$. $C(26-4, 10-4)$
$= C(22, 6) = \frac{22!}{6!\,16!}$

Άρα έχουμε $\frac{26!}{10!\,16!} - \frac{22!}{6!\,16!}$ ~~τρόπο~~ υποσύνολα του A που δεν περιέχουν το $\{a, b, c, d\}$

ασκ. 1

1 _ 1 Επειδή επιτρέπεται η επανάληψη στη πρώτη και
2 _ 2 στη τρίτη θέση, σε κάθε μία περίπτωση
39 _ 39 (πχ 1-1, 2-2, ...) στη μεσαία θέση
μπορούμε να έχουμε κάθε φορά 38 ψηφία.
Άρα θα έχουμε συνολικά $39 \cdot 38!$ τρόπους να τοποθετηθούν τα ψηφία.
Επίσης ψάχνουμε τις μεταθέσεις των τριών ψηφίων χωρίς να επιτρέπεται η επανάληψη ψηφίων, οι οποίες θα είναι $P(39, 3) = \frac{39!}{36!}$

Επομένως, προσθέτοντας τα δύο αποτελέσματα που βρήκαμε έχουμε
$39 \cdot 38! + \frac{39!}{36!}$ συνδυασμούς.