ΠΕΤΣΑ ΓΕΩΡΓΙΑ
ΑΜ: 3200155

3η ΟΜΑΔΑ ΑΣΚΗΣΕΩΝ

ασκ. 14

Έστω πως υπάρχει το πρώτο όριο. Άρα θα ισχύει

$\forall \varepsilon>0\ \exists \delta>0:$

$0<|x-x_0|<\delta \Rightarrow |f(x)-L|<\varepsilon$ (1)

Αρκεί νδο: $\forall \varepsilon>0\ \exists \delta>0:\ 0<\left|h-\frac{x_0-b}{a}\right|<\delta \Rightarrow |f(ah+b)-L|<\varepsilon$

Έστω $\varepsilon>0$

Θέτω $\delta_1=\delta/a$

Έστω πως $0<\left|h-\frac{x_0-b}{a}\right|<\delta_1 \Rightarrow 0<|ah-x_0+b|<\delta$ (2)

Θέτω $x=ah+b$ (1):

$0<|ah+b-x_0|<\delta \Rightarrow |f(ah+b)-L|<\varepsilon$

Άρα από (1) και (2) έχουμε:

$0<\left|h-\frac{x_0-b}{a}\right|<\delta_1 \Rightarrow \left|f(ah+b)-L\right|<\varepsilon$

Αντίστροφο

Γνωρίζω: $\forall \varepsilon>0\ \exists \delta>0:\ \left|h-\frac{x_0-b}{a}\right|<\delta_1 \Rightarrow |f(ah+b)-L|<\varepsilon$. Αρκεί νδο

$\forall \varepsilon>0\ \exists \delta>0:\ 0<|x-x_0|<\delta \Rightarrow |f(x)-L|<\varepsilon$

Έσω $\varepsilon>0$. Θέτω $\delta_1=\delta|a|>0$

$0<|x-x_0|<\delta_1 \Rightarrow 0<\left|\frac{x}{a}-\frac{x_0}{a}\right|<\delta \Rightarrow 0<\left|\frac{x-x_0}{a}\right|<\delta$

$0<\left|\frac{x}{a}-\frac{b}{a}-\frac{x_0}{a}+\frac{b}{a}\right|<\delta \Rightarrow 0<\left|\frac{x-b}{a}-\frac{x_0-b}{a}\right|<\delta$

Θέτω $h=\frac{x-b}{a}$ και: $\Rightarrow 0<|f(a\cdot h+b)-L|<\varepsilon$

άσκ. 15

$\lim_{x \to x_0} f(x) = k > 0$ $\quad I = (\alpha, x_0) \cup (x_0, b)$

$\alpha < x_0 < b$

Θέτω $\varepsilon = k/2$ Άρα $\exists \delta > 0$:

$0 < |x - c| < \delta \Rightarrow |f(x) - k| < \varepsilon \Rightarrow |f(x) - k| < k/2 \Rightarrow$

$-\frac{k}{2} < f(x) - k < k/2 \Rightarrow k - k/2 < f(x) < k + k/2 \Rightarrow$

$\frac{k}{2} < f(x) < \frac{3k}{2}$

Άρα $f(x) > k/2$ Θέτω $P = k/2$ άρα

$f(x) > P$

άσκ. 16

$\lim f(x) = 0$ και $g(x_0)$ φραγμένη σε μια γειτονιά I

Άρα ισχύει $|g(x)| \leq M$ $\forall x \in (x_0 - \delta, x_0) \cup (x_0, x_0 + \delta)$, $M \in \mathbb{R}$

Έχουμε: $|g(x)| \leq M \Rightarrow |g(x)| \cdot |f(x)| \leq M|f(x)| \Rightarrow$

Ισχύει ότι $|g(x) \cdot f(x)| \leq |g(x)| \cdot |f(x)|$ Άρα και

$|g(x) \cdot f(x)| \leq M|f(x)| \Rightarrow -M|f(x)| \leq g(x) f(x) \leq M|f(x)|$

Ισχύει ότι $\lim f(x) = 0 \Rightarrow \lim |f(x)| = 0$ άρα

$\lim_{x \to x_0} (-M|f(x)|) = 0 = \lim_{x \to x_0} (M|f(x)|)$ Άρα και

$\lim_{x \to x_0} (g(x) \cdot f(x)) = 0$, το ζητούμενο.

άσκ. 17

Ορισμός για $\lim_{x \to \infty} f(x) = \infty$. $\forall M > 0 \ \exists \Xi : \forall x > \Xi$ να ισχύει $f(x) > M$

$\boxed{\text{ασκ 19}}$

$$\lim_{x\to\infty} \frac{10x}{x+5} = 10$$

Έστω $\varepsilon>0$

$$|f(x)-L|<\varepsilon \Leftrightarrow \left|\frac{10x}{x+5} - 10\right| < \varepsilon \Leftrightarrow \left|\frac{\cancel{10x}-\cancel{10x}-50}{x+5}\right| < \varepsilon$$

$$\Leftrightarrow \left|\frac{-50}{x+5}\right| < \varepsilon \Leftrightarrow \left|\frac{x+5}{50}\right| > 1/\varepsilon \Leftrightarrow |x+5| > 50/\varepsilon$$

- $x+5>0 \Rightarrow x+5 > 50/\varepsilon$
- $x+5<0 \Rightarrow -x-5 < 50/\varepsilon \Leftrightarrow x > -\frac{50}{\varepsilon} - 5$

Θέτω $\mathcal{X} = \frac{50}{\varepsilon} - 5$

$x > \mathcal{X}$

$$x > \frac{50}{\varepsilon} - 5 \Rightarrow x+5 > \frac{50}{\varepsilon} \Rightarrow |x+5| > 50/5 \Rightarrow f(x) - L < \varepsilon$$

$\boxed{\text{ασκ 20}}$

$f: [a,\infty) \to \mathbb{R}$, $\lim_{x\to\infty} f(x) = L$, $L \in \mathbb{R}$

νδο $f(x) \le L$ Έστω πως $\exists\, x_0 \in [a,\infty) : f(x_0) > L$

$\Rightarrow f(x_0) - L > 0$

$\forall \varepsilon>0\ \exists \mathcal{X} \ge 0 : x > \mathcal{X} \Rightarrow f(x) - L < \varepsilon \Rightarrow f(x) < L + \varepsilon$ (1)

$f\uparrow$: $x_0 > x \Rightarrow$ θα πρέπει $f(x_0) \ge f(x)$

Θέτω $\varepsilon = \overbrace{f(x_0) - L}^{>0}$ και έχουμε (1) $f(x) < \cancel{L} + f(x_0) - \cancel{L}$

$\Rightarrow f(x) < f(x_0) \to$ Άτοπο. Άρα η αρχική υπόθεση είναι άτοπη, οπότε ισχύει ότι $f(x) \le L$

ασκ. 21

(α) $\lim_{x\to 0} \frac{x}{\sqrt{1-\cos x}} = \lim_{x\to 0} \frac{x\sqrt{1+\cos x}}{\sqrt{1-\cos x}\cdot\sqrt{1+\cos x}} = \lim_{x\to 0} \frac{x\sqrt{1+\cos x}}{\sqrt{1-\cos^2 x}}$

$= \lim_{x\to 0} \frac{x\sqrt{1+\cos x}}{|\sin x|} = \lim_{x\to 0} \frac{\sqrt{1+\cos x}}{\left|\frac{\sin x}{x}\right|} \overset{*}{=} \lim_{x\to 0} \frac{\sqrt{1+\cos x}}{\left|\frac{\sin x}{x}\right|} = \sqrt{2}$

$* \quad \lim_{x\to 0^-} \left|\frac{\sin x}{x}\right| = \lim_{x\to 0^-}\left(-\frac{\sin x}{x}\right) = 1 = \lim_{x\to 0^+}\left|\frac{\sin x}{x}\right|$

(β) $\lim_{h\to 0^+} \sup_{(0<x<h)} (\sin 1/x)$

Έστω $h>0$

$x = \frac{1}{2k\pi + \pi/2} \Rightarrow \frac{1}{x} = 2k\pi + \pi/2, \; 0<x<h \qquad k\in\mathbb{Z}$

$\lim_{k\to\infty} x = 0$, άρα $\exists k: \; 0 < \frac{1}{2k\pi+\pi/2} < h$

$\sin\left(\frac{1}{x}\right) = \sin\left(2k\pi + \pi/2\right) = 1.$

ασκ. 18

(α) $\lim_{x\to\infty}\left(\frac{|\cos x|}{2}\right)^x$

$0 \le |\cos x| \le 1 \Rightarrow 0 \le \frac{|\cos x|}{2} \le \frac{1}{2} \overset{x>0}{\Rightarrow} 0 \le \left|\frac{\cos x}{2}\right|^x \le \left(\frac{1}{2}\right)^x$

$\lim_{x\to\infty} 0 = \lim_{x\to\infty}\left(\frac{1}{2}\right)^x = 0$ άρα από το κριτήριο της

παρεμβολής έχουμε ότι $\lim_{x\to\infty}\left|\frac{\cos x}{2}\right|^x = 0$

άρα και $\lim_{x\to\infty}\left(\frac{|\cos x|}{2}\right)^x = 0$

(β) $\lim_{x\to\infty} |\cos x|^x$ Έστω $x_1 = 2k\pi$ και $x_2 = 2k\pi + \pi/2$, τα οποία $\to\infty$

για $k\to\infty$ οπότε $\lim_{k\to\infty} \cos x_1 = 0 \neq \lim_{k\to\infty} \cos x_2 = 1$