ΠΕΤΣΑ ΓΕΩΡΓΙΑ
ΑΜ: 3200155
7η ΟΜΑΔΑ ΑΣΚΗΣΕΩΝ

$\boxed{\text{ασκ. 45}}$

$s(f;P) \leq S(f;P)$

$s(f;P) = \sum m_i(P_i - P_{i-1}) = m_1(P_1 - P_0) + m_2(P_2 - P_1) + \dots + m_n(P_n - P_{n-1})$

$S(f;P) = \sum M_i(P_i - P_{i-1}) = M_1(P_1 - P_0) + M_2(P_2 - P_1) + \dots + M_n(P_n - P_{n-1})$

Ξέρουμε ότι $\begin{cases} m_i = \inf\{f(x) : p_{i-1} \leq x \leq p_i\} \\ M_i = \sup\{f(x) : p_{i-1} \leq x \leq p_i\} \end{cases}$

Το infimum μιας συνάρτησης σε κάθε διαμέριση ενός διαστήματος είναι πάντα μικρότερο ή το πολύ ίσο με το supremum. Άρα ισχύει $m_i \leq M_i \ \forall i \in (1,2,\dots n)$

Συγκρίνοντας όρο προς όρο θα έχουμε:

$\left.\begin{array}{l} m_1(P_1 - P_0) \leq M_1(P_1 - P_0) \Rightarrow m_1 \leq M_1 \\ m_2(P_2 - P_1) \leq M_2(P_2 - P_1) \Rightarrow m_2 \leq M_2 \\ \vdots \\ m_n(P_n - P_{n-1}) \leq M_n(P_n - P_{n-1}) \Rightarrow m_n \leq M_n \end{array}\right\}$ που ισχύουν άρα ισχύει και $s(f;P) \leq S(f;P)$

$\boxed{\text{ασκ. 47}}$ $f(x) = x$

Έστω η διαμέριση $P_n = \{p_0 = 0, p_1 = a/n, p_2 = 2a/n, \dots, p_n = a\}$

Ισχύει ότι $p_i = \frac{ia}{n}$

- η f είναι ↗ $\mathbb{R}$ άρα για να υπολογίσουμε το κάτω άθροισμα $s(f;P)$ αρκεί να πάρουμε τη τιμή της συνάρτησης στο αριστερό άκρο του διαστήματος, δηλ.:

$f(P_{i-1}) = P_{i-1}$ και:

$s(f;P_n) = \sum_{i=1}^{n} m_i(P_i - P_{i-1}) = \sum_{i=1}^{n} P_{i-1}(P_i - P_{i-1}) = \sum_{i=1}^{n} \frac{(i-1)a}{n} \cdot \frac{a}{n}$

$= a^2 \frac{\sum i-1}{n^2} = \frac{a^2 \cancel{n}(n-1)}{2n^{\cancel{2}}} = a^2 \frac{n(1 - 1/n)}{2n} = \frac{a^2(1 - 1/n)}{2} =$

Η ακολουθία αυτή είναι αύξουσα και συγκλίνει στο $a^2/2$.

- η f ↗ $\mathbb{R}$ άρα για να υπολογίσουμε το άνω άθροισμα αρκεί να πάρουμε τη τιμή της συνάρτησης στο δεξιό άκρο της κάθε διαμέρισης, δηλ.: $f(P_i) = P_i$

$$S(f,P) = \sum_{i=1}^{n} M_i (P_i - P_{i-1}) = \sum_{i=1}^{n} P_i (P_i - P_{i-1}) = \sum_{i=1}^{n} \frac{ia}{n} \cdot \frac{a}{n}$$

$$= \frac{a^2}{n^2} \sum_{i=1}^{n} i = \frac{a^2}{n^2} \cdot \frac{n(n+1)}{2} = \frac{a^2 (n+1)}{2n} = \frac{a^2 n (1 + 1/n)}{2n}$$

$= \frac{a^2}{2}(1 + 1/n)$. Η ακολουθία αυτή είναι φθίνουσα και συγκλίνει στο $a^2/2$.

$$\underline{\int_0^a} f \geq \frac{a^2}{2}, \quad \overline{\int_0^a} f \leq a^2/2, \quad \underline{\int_0^a} f \leq \overline{\int_0^a} f,$$

απ' το οποίο προκύπτει ότι το άνω και κάτω ολοκλήρωμα είναι ίσα με $a^2/2$, και τελικά η συνάρτηση είναι ολοκληρώσιμη με ολοκλήρωμα $a^2/2$

~~Άσκ. 48~~

~~$\forall x \in [a,b],\ f \geq 0$~~

~~Έστω ότι ...~~

~~$F\uparrow$, $\int_a^b f = 0 \Rightarrow F(b) - F(a) = 0 \Rightarrow F(b) = F(a)$, άτοπο, ...~~

~~$a < b \overset{F\uparrow}{\Rightarrow} F(a) \leq F(b)$ Επομένως η υπόθεση μας ήταν λάθος, άρα $f = 0\ \forall x \in [a,b]$~~

~~Άσκ. 49~~

~~Ξέρουμε από την ανισότητα Cauchy-Schwarz ότι~~

~~$\left|\int_a^b fg\right| \leq \left[\int_a^b f^2\right]^{1/2} \left[\int_a^b g^2\right]^{1/2}$~~

~~Έστω τώρα ... $g = c \cdot f$, $c \in \mathbb{R}$~~

$\boxed{\text{ασκ 50}}$

Ξέρουμε ότι $\int_a^b g^2 = 0$

Από την ανισότητα Cauchy-~~Sch~~ Schwarz έχουμε ότι

$$\left|\int_a^b fg\right| \le \left[\int_a^b f^2\right]^{1/2}\left[\int_a^b g^2\right]^{1/2} \Rightarrow$$

$$\left|\int_a^b fg\right| \le \left[\int_a^b f^2\right]^{1/2}\cdot 0 \Rightarrow \left|\int_a^b fg\right| \le 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow -0 \le \int_a^b fg \le 0$$

άρα αναγκαστικά θα πρέπει $\int_a^b f\cdot g = 0$

$\boxed{\text{ασκ 46}}$

$P' = P \cup \{q\},\ q \notin P,\ P \subseteq P'$

Έστω πως k, ℓ διαδοχικά διαμερίσεις της P και k, q, ℓ διαδοχικά διαμερίσεις της P'. Έστω πως

$$s(f;P) > s(f;P') \Rightarrow \sum_{i=1}^{n} m_i(P_i - P_{i-1}) > \sum_{i=1}^{n} m_i(P'_i - P'_{i-1}) \quad (1)$$

Επίσης ξέρουμε ότι οι διαμερίσεις P, P' θα είναι ίδιες με τη διαφορά ότι οι P' θα έχουν κάποιες παραπάνω, και στη συγκεκριμένη περίπτωση την q. Συνεπώς έχουμε: (1)

$$m_1(P_1 - P_0) + \dots + m_k(P_k - P_{k-1}) + m_\ell(P_\ell - P_k) + \dots > m_1(P_1 - P_0) + \dots + m_k(P_k - P_{k-1}) + m_q(P_q - P_k) + m_\ell(P_\ell - P_q) + \dots$$

$$m_\ell(P_\ell - P_k) > m_q(P_q - P_k) + m_\ell(P_\ell - P_q)$$

$$m_\ell P_\ell - m_\ell P_k > m_q P_q - m_q P_k + m_\ell P_\ell - m_\ell P_q$$

$$m_\ell P_q - m_\ell P_k > m_q(P_q - P_k)$$

$$m_\ell(\cancel{P_q - P_k}) > m_q(\cancel{P_q - P_k}) \Rightarrow m_\ell > m_q$$, άτοπο αφού $m_\ell \le m_q$

άρα $s(f;P) \le s(f;P')$

Με ~~του~~ την ίδια λογική έχουμε και $S(f;P) \geq S(f;P')$

Υποθέτουμε πως $S(f;P) < S(f;P')$

$\sum_{i=1}^{n} M_i(P_i - P_{i-1}) < \sum_{i=1}^{n} M_i(P_i - P_{i-1}) \Rightarrow \ldots \Rightarrow$

$M_k(P_k - P_{k-1}) + M_\ell(P_\ell - P_k) < M_k(P_k - P_{k-1}) + M_q(P_q - P_k) + M_\ell(P_\ell - P_q) \Rightarrow$

$M_\ell P_\ell - M_\ell P_k < M_q(P_q - P_k) + M_\ell P_\ell - M_\ell P_q$

$M_\ell P_q - M_\ell P_k < M_q(P_q - P_k) \Rightarrow M_\ell(P_q - P_k) < M_q(P_q - P_k)$

$\Rightarrow M_\ell < M_k$ άτοπο αφού $M_\ell \geq M_q$, άρα

$S(f;P) \geq S(f;P')$

~~Έστω ότι $\exists x \in [a,b]$: $f \neq 0$, και $f \geq 0$, $F \uparrow [a,b]$~~

~~$f(x_0) = c$, $c \neq 0$~~ ~~$F(a) = F(b)$~~

x^{4}

$\boxed{\text{ασκ. 49}}$ Έστω ~~g≤cf~~ $f = c\cdot g,\ c\in\mathbb{R}$

$$\left|\int_a^b fg\right| \le \left[\int_a^b f^2\right]^{1/2}\left[\int_a^b g^2\right]^{1/2}$$

$$\left|\int_a^b fg\right| \le \left[\int_a^b c^2 g^2\right]^{1/2}\left[\int_a^b g^2\right]^{1/2}$$

$$\left|\int_a^b fg\right| \le \left|\int_a^b c\, g^2\right|$$

$$\left|\int_a^b fg\right| \le \left|\int_a^b cg\cdot g\right|$$

$$\left|\int_a^b fg\right| = \left|\int_a^b f\cdot g\right|$$

Αυτή η συνθήκη δεν είναι αναγκαία για να ισχύει η ισότητα γιατί μπορεί για κάποιο x να μην ισχύει ότι η μία συνάρτηση είναι πολ/σιο της άλλης, όμως τα ολοκληρώματά τους πάλι θα είναι ίσα.

$\boxed{\text{ασκ. 48}}$

Έστω ότι $\exists\, x_0 \in [a, b] : f \neq 0$, άρα $f(x_0) > 0$

f συνεχής άρα:

$\forall \varepsilon > 0 \;\exists \delta > 0 : |x - x_0| < \delta \Rightarrow |f(x) - f(x_0)| < \varepsilon$

$\underbrace{f(x_0) - \varepsilon < f(x)} < f(x_0) + \varepsilon$

έστω $\varepsilon = \dfrac{f(x_0)}{2}$

$$f(x_0) - \frac{f(x_0)}{2} < f(x) \Rightarrow \int_a^b \left(f(x_0) - \frac{f(x_0)}{2}\right) < \int_a^b f(x)$$

$$\int_a^b \frac{f(x_0)}{2} < \int_a^b f(x) \Rightarrow \frac{f(x_0)}{2}(b-a) < \int_a^b f(x)$$

Ξέρουμε $\dfrac{f(x_0)}{2}(b-a) > 0$ αφού $f(x_0) > 0 \Rightarrow \dfrac{f(x_0)}{2} > 0$

και

$a < b \Rightarrow b - a > 0$