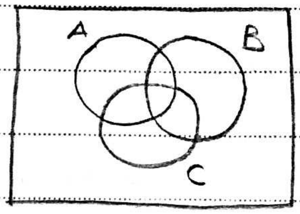
ΠΕΤΣΑ ΓΕΩΡΓΙΑ
ΑΜ: 3200155
1η ΟΜΑΔΑ ΑΣΚΗΣΕΩΝ

Ασκ 2



(α)' $D = A \cap B$

(β)' $E = B' \cap A$

(γ)' $F = A \cap B \cap C'$

(δ)' $G = (A \cap B') \cup (A \cap C) \cup A'$

Αφού ισχύει ότι A = «Σήμερα θα πέσει το δίκτυο», άρα A' = «Σήμερα δεν θα πέσει το δίκτυο», B = «Σήμερα είναι εργάσιμη μέρα», άρα B' = «Σήμερα είναι αργία», C = «Σήμερα ο τεχνικός είναι στο εργαστήριο», C' = «Σήμερα ο τεχνικός δεν είναι στο εργαστήριο».

Ασκ. 3 Έστω Σ = σταθερά τηλέφωνα και Κ = κινητά άρα Σ = 400 και Κ = 50 και x_1, x_2 η πρώτη και δεύτερη επιλογή αντίστοιχα. Ο δειγματικός χώρος Ω αποτελείται απ' όλα τα δυνατά αποτελέσματα που μπορεί να προκύψουν από τις επιλογές των 2 τηλεφώνων και αφού δεν επιτρέπεται να επιλέξουμε το ίδιο τηλέφωνο 2 φορές και η σειρά δεν έχει σημασία θα ισχύει ότι το πλήθος των δυνατών αποτελεσμάτων θα είναι οι συνδιασμοί των 450 τηλεφώνων ανά 2, δηλαδή

$$C(450,2) = \frac{450!}{448! \cdot 2!} = 101.025$$

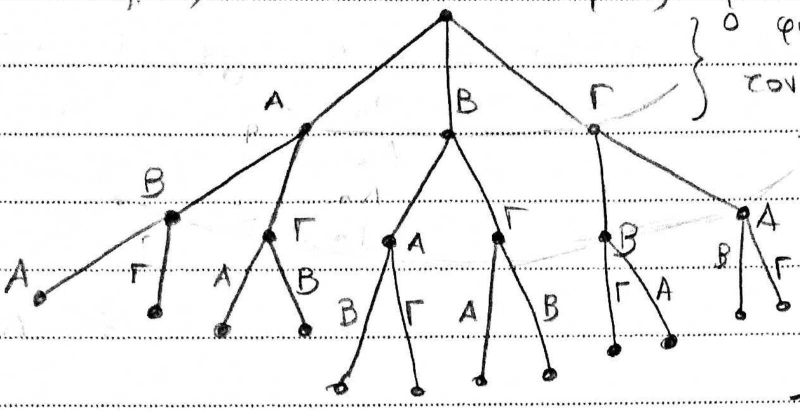
P(B) = P(«Συνολικά 2 επιλογές κόστισαν 21 €») = 0 γιατί το μέγιστο ποσό που μπορεί να πληρώσω είναι 10 € (δηλ. $B = \emptyset \Rightarrow P(\emptyset) = 0$)

P(A) = P(«συνολικά οι 2 επιλογές κόστισαν 6 €») =

$$= \frac{400 \cdot 50}{101.025} = 0,1979 \text{ ή } 19,79\%$$

άσκ. 4

Έστω A = "ο πρώτος φυλακισμένος", B = "ο δεύτερος φυλακισμένος" και Γ = "ο τρίτος φυλακισμένος"



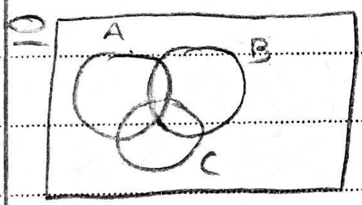
ο φυλακισμένος ρωτάει τον φύλακα

ο φύλακας απαντάει ποιος θα εκτελεστεί

ο φυλακισμένος επιλέγει αν θα αλλάξει τη θέση του

Άρα $\Omega = \{(A,B,A), (A,B,\Gamma), (A,\Gamma,A), (A,\Gamma,B), (B,A,B), (B,A,\Gamma), (B,\Gamma,A), (B,\Gamma,B), (\Gamma,B,\Gamma), (\Gamma,B,A), (\Gamma,A,B), (\Gamma,A,\Gamma)\}$

άσκ. 5



(α)' $B\cap(A\cup C)'$

(β)' $A\cap B\cap C'$

(γ)' $A\cup B\cup C$

(δ)' $(A\cap B)\cup P(A\cap C)\cup P(B\cap C)$

(ε)' $A\cap B\cap C$

(ς)' $A'\cap B'\cap C'$

(ζ)' $(A\cap B'\cap C')\cup(A'\cap B'\cap C)\cup(A'\cap B\cap C')\cup(A'\cap B'\cap C')$

(η)' $(A'\cup B'\cup C')$

ασκ. 10

Έστω ότι $A \subset B \Rightarrow P(A) < P(B)$ (1)

Έστω μία τράπουλα με τα εξής φύλλα: A, J, Q, K, και έστω ότι παίζουμε με έναν παίκτη ο οποίος μας κλέβει και επομένως η πιθανότητα να φέρουμε J, Q είναι 0 και η πιθανότητα να φέρουμε A K είναι 1/2 η καθεμία. Έστω A = «A,Q ενδεχόμενο» και B = «A,Q,K». $P(A) = 0 + \frac{1}{2} = \frac{1}{2}$ $P(B) = 0 + \frac{1}{2} + 0 = \frac{1}{2}$

Άρα $A \subset B$ και $P(A) = P(B)$, άτοπο. Επομένως δεν ισχύει η ιδιότητα (1)

ασκ. 1 Νδο $A \cup \left(\bigcap_{i=1}^{\infty} B_i\right) = \bigcap_{i=1}^{\infty} (A \cup B_i)$

Έστω $x \in \left(A \cup \bigcap_{i=1}^{\infty} B_i\right)$. Τότε: Αν $x \in A$ θα ισχύει και ότι $x \in A \cup B_i$ $\forall i$, άρα θα ανήκει και στην άπειρη τομή τους, δηλαδή $x \in \bigcap_{i=1}^{\infty} (A \cup B_i)$. Αν $x \notin A$, θα ισχύει $x \in B_i$ $\forall i$ γιατί αν δεν ανήκε έστω σε ένα B_i, τότε δεν θα ανήκε ούτε στην άπειρη τομή τους και θα είχαμε άτοπο. Αφού $x \in B_i$ $\forall i$, τότε αναγκαστικά και $x \in A \cup B_i$, άρα και στην άπειρη τομή τους. Επομένως $A \cup \left(\bigcap_{i=1}^{\infty} B_i\right) \subseteq \bigcap_{i=1}^{\infty} (A \cup B_i)$ (1)

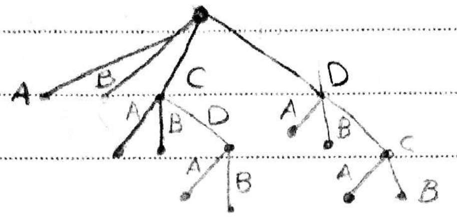
Έστω $x \in \bigcap_{i=1}^{\infty} (A \cup B_i)$. Αν $x \in A$ τότε αναγκαστικά και $x \in A \cup \left(\bigcap_{i=1}^{\infty} B_i\right)$. Αν $x \notin A$ τότε θα πρέπει $x \in B_i$ $\forall i$ γιατί αν δεν ανήκε έστω και σε ένα B_i δεν θα ανήκε ούτε στην άπειρη τομή τους και θα είχαμε άτοπο. Άρα αφού $x \in B_i$ $\forall i$, τότε και $x \in A \cup \left(\bigcap_{i=1}^{\infty} B_i\right)$ άρα

$\bigcap_{i=1}^{\infty} (A \cup B_i) \subseteq A \cup \left(\bigcap_{i=1}^{\infty} B_i\right)$ (2)

Επομένως $A \cup \left(\bigcap_{i=1}^{\infty} B_i\right) = \bigcap_{i=1}^{\infty} (A \cup B_i)$

$\boxed{\text{ασκ. 6}}$

(α)' A

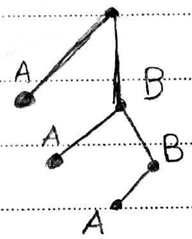


$\underline{\Omega} = \{(A), (B), (C,A), (C,B), (C,D,A), (C,D,B), (D,A), (D,B), (D,C,A), (D,C,B)\}$

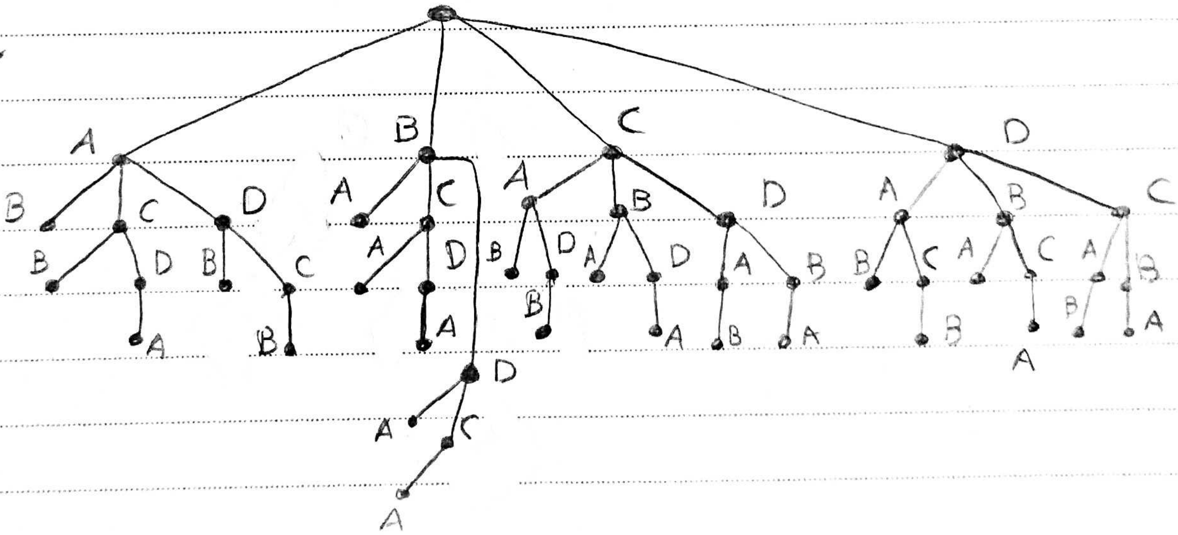
όπου A, B είναι ο πρώτος και ο δεύτερος μπλε μαρκαδόρος και C, D ο πρώτος και ο δεύτερος κόκκινος αντίστοιχα.

(β)' Έστω ότι A, A οι πανομοιότυποι μπλε και B, B οι πανομοιότυποι κόκκινοι.

$\underline{\Omega} = \{(A), (B,A), (B,B,A)\}$

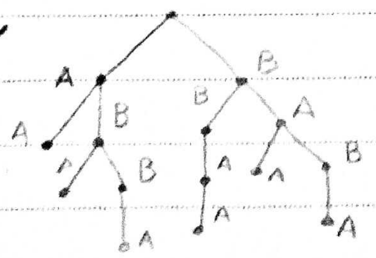


(γ)'



Άρα $\underline{\Omega} = \{(A,B), (A,C,B), (A,C,D,A), (A,D,B), (A,D,C,B), (B,A), (B,C,A), (B,C,D,A), (B,D,A), (B,D,C,A), (C,A,B), (C,A,D,B), (C,B,A), (C,B,D,A), (C,D,A,B), (C,D,B,A), (D,A,B), (D,A,C,B), (D,B,C,A), (D,B,A), (D,C,A,B), (D,C,B,A)\}$

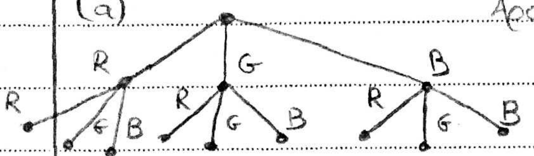
(δ)'



Άρα $\underline{\Omega} = \{(A,A), (A,B,A), (A,B,B,A), (B,B,A,A), (B,A,A), (B,A,B,A)\}$

άσκ. 8

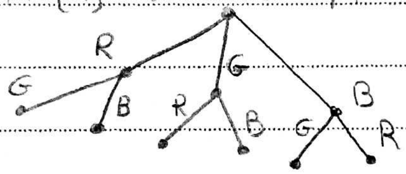
(a)



Άρα $\Omega = \{(R,R),(R,G),(R,B),(G,R),(G,G),(G,B),(B,R),(B,G),(B,B)\}$

• Άρα η πιθανότητα να πετύχουμε μία κόκκινη σφαίρα στις 2 δοκιμές είναι $\frac{\# R}{|\Omega|} = \frac{5}{9} = 0,55$

(β) Χωρίς επανάθεση:



Άρα $\Omega = \{(R,G),(R,B),(G,R),(G,B),(B,G),(B,R)\}$

Άρα η πιθανότητα να πετύχουμε μία κόκκινη μπάλα στις 2 δοκιμές είναι $\frac{4}{6} = 0,66$

άσκ. 9

$P(A\cap B) \geq P(A) + P(B) - 1$

Ξέρουμε ότι $P(A\cup B) \leq 1 \Rightarrow P(A) + P(B) - P(A\cap B) \leq 1$

$\Rightarrow P(A) + P(B) - 1 \leq P(A\cap B)$, το ζητούμενο.

Σχετικά με την δεύτερη ανισοϊσότητα ξέρουμε:

$P(A_1\cap A_2\cap \dots \cap A_n) = 1 - P((A_1\cap A_2 \cap \dots \cap A_n)') \Rightarrow$

$P(A_1'\cap A_2'\cap \dots \cap A_n') = 1 - P(A_1\cap A_2 \dots \cap_n)$ ①

Είναι, $P(A_1'\cap A_2'\cap \dots \cap A_n') \leq P(A_1') + P(A_2') + \dots + P(A_n') =$

$1 - P(A_1) + 1 - P(A_2) + \dots + 1 - P(A_n)$

$= n\cdot 1 - P(A_1) - P(A_2) - \dots - P(A_n)$

Άρα: ① $\Rightarrow n - P(A_1) - P(A_2) \dots - P(A_n) \geq 1 - P(A_1\cap A_2 \cap \dots \cap A_n) \Rightarrow P(A_1\cap A_2 \dots \cap A_n) \leq 1 - n + P(A_1) + P(A_2) + \dots + P(A_n)$

$\boxed{\alpha\sigma\kappa.7}$

(α) $A=\{135, 315, 153, 513, 351, 531, 126, 621, 216, 612, 261, 162, 144, 414, 441, 225, 252, 522, 324, 234, 243, 423, 342, 432, 333\}$

$|A|=25$

Άρα $P(A)=\frac{|A|}{|\Omega|}=\frac{25}{216}=0,1157$ ή $11,57\%$

(β) $B=\{226, 622, 262, 361, 136, 316, 613, 163, 631, 145, 154, 514, 451, 415, 541, 253, 523, 235, 325, 352, 532, 244, 424, 442, 334, 343, 433\}$

Άρα $P(B)=\frac{|B|}{|\Omega|}=\frac{27}{216}=0,125$ ή $12,5\%$