ΠΕΤΣΑ ΓΕΩΡΓΙΑ
ΑΜ: 3200155
3η ΟΜΑΔΑ

$\boxed{\text{ασκ. 21}}$

(α) Όλος ο δειγματικός χώρος Ω θα είναι όλες οι διατάξεις με επανάληψη $(6)_4 = 6^4$.

Ορίζουμε ως A = «1ο και 4ο ζάρι διαφορετικά» και B = «όλα διαφ.»

$P(B|A) = \frac{P(BA)}{P(A)}$ (1). Είναι: $P(A) = \frac{6\cdot6\cdot6\cdot5}{6^4} = 5/6$.

$P(B) = \frac{6\cdot5\cdot4\cdot3}{6^4} = \frac{60}{216} = \frac{5}{18}$. Επειδή $B \subset A$ έχουμε ότι

$(1) \Rightarrow P(B|A) = \frac{P(B)}{P(A)} = \frac{5/18}{5/6} = \frac{5\cdot6}{18\cdot5} = \frac{1}{3}$

(β) Έστω C = «2 ζευγάρια όμοιων αποτ.». $P(C|A) = \frac{P(CA)}{P(A)}$

$|AC| = 6\cdot1\cdot5\cdot1 + 6\cdot5\cdot1\cdot1 = 60$ Άρα $P(AC) = \frac{60}{6^4}$

$P(C|A) = \frac{\frac{60}{6^4}}{\frac{5}{6}} = \frac{6\cdot60}{6^4\cdot5} = \frac{1}{18}$

$\boxed{\text{ασκ. 22}}$

Δ = «Δυνατό χτύπημα», Μ = «Μέτριο χτύπημα», A = «Το παιδί αστόχησε»

Άρα $P(\Delta) = P(M) = 1/4$ και $P(A) = 1/2$

Σ = «Σπάσιμο Πινιάτας». Θα υπολογίσουμε την $P(\Sigma) = 1 - P(\Sigma')$.

Ορίζουμε ως A_i = «Το παιδί i αστόχησε», M_i = «Το παιδί i χτύπησε την πινιάτα μέτρια». Επειδή ψάχνουμε το $P(\Sigma')$, μέσα σε κάθε τετράδα παιδιών δεν μπορούμε να έχουμε 1 δυνατό χτύπημα (γιατί θα σπάσει η πινιάτα) ούτε 2 μέτρια. Άρα μπορούμε να έχουμε ένα ή κανένα μέτρια χτυπήματα, επομένως:

$P(\Sigma) = 1 - (P(A_1A_2A_3A_4) + P(A_1A_2A_3M_4) + P(A_2A_2M_3A_4) +$
$+ P(A_1M_2A_3A_4) + P(M_1A_2A_3A_4)) =$

$= 1 - (\frac12\cdot\frac12\cdot\frac12\cdot\frac12 + \frac12\cdot\frac12\cdot\frac12\cdot\frac14 + \frac12\cdot\frac12\cdot\frac14\cdot\frac12 + \frac12\cdot\frac14\cdot\frac12\cdot\frac12 + \frac14\cdot\frac12\cdot\frac12\cdot\frac12) =$

$= 1 - (\frac{1}{16} + 4\cdot\frac{1}{32}) = 1 - 0{,}187 = 0{,}813 \Rightarrow \boxed{P(\Sigma) = 81{,}3\%}$

ασκ. 24

Ορίζουμε τα ενδεχόμενα In_i = «Είσοδος i» και Out_i = «Έξοδος i».

$P(In0) = 1/4 \quad P(In1) = 1/4 \quad P(In2) = 1/2$

Από το σχήμα καταλαβαίνουμε ότι:

$P(Out2|In2) = 1-\epsilon \quad P(Out1|In2) = \epsilon \quad P(Out0|In2) = 0$

$P(Out2|In1) = 0 \quad P(Out1|In1) = 1-\epsilon \quad P(Out0|In1) = \epsilon$

$P(Out2|In0) = \epsilon \quad P(Out1|In0) = 0 \quad P(Out0|In0 = 1-\epsilon$

(α) • $P(Out2) = P(Out2|In2)\cdot P(In2) + P(Out2|In1)\cdot P(In1) + P(Out2|In0)\, P(In0)$

$P(Out2) = (1-\epsilon)\, 1/2 + 0 + \epsilon \cdot 1/4 = \frac{1-\epsilon}{2} + \frac{\epsilon}{4} \Rightarrow \boxed{P(Out2) = \frac{2-\epsilon}{4}}$

• $P(Out1) = P(Out1|In2)\cdot P(In2) + P(Out1|In1)\, P(In1) + P(Out1|In0)\cdot P(In0)$

$= \frac{\epsilon}{2} + \frac{1-\epsilon}{4} + 0 \Rightarrow \boxed{\frac{\epsilon+1}{4} = P(Out1)}$

• $P(Out0) = P(Out0|In2)\, P(In2) + P(Out0|In1)\cdot P(In1) + P(Out0|In0)\, P(In0)$

$= 0 + \frac{\epsilon}{4} + \frac{1-\epsilon}{4} \Rightarrow \boxed{P(Out0) = 1/4}$

(β) • $P(In0|Out1) = \frac{P(Out1 \cap In0)}{P(Out1)} =$

$= \frac{P(Out1|In0)\, P(In0)}{P(Out1|In0)\, P(In0) + P(Out1|In1)\, P(In1) + P(Out1|In2)\, P(In2)}$

$= 0$

- $P(In1|Out1) = \dfrac{P(Out1 \cap In1)}{P(Out1)} = P(Out1|In1) \cdot P(In1)$

$$= \frac{P(Out1|In1) \cdot P(In1)}{P(Out1|In1) \cdot P(In1) + P(Out1|In0) \cdot P(In0) + P(Out1|In2) \cdot P(In2)}$$

$$= \frac{(1-\epsilon) \cdot 1/4}{(1-\epsilon)1/4 + 0 + \epsilon/2} \Rightarrow \boxed{P(In1|out1) = \frac{1-\epsilon}{1+\epsilon}}$$

- $P(In2|Out1) = \dfrac{P(Out1 \cap In2)}{P(Out1)}$

$$= \frac{P(Out1|In2) \cdot P(In2)}{P(Out1|In2) P(In2) + P(Out1|In1) \cdot P(In1) + P(Out1|In0)\, P(In0)}$$

$$= \frac{\epsilon\, 1/2}{\epsilon/2 + \frac{1-\epsilon}{4} + 0} \Rightarrow \boxed{P(In2|out1) = \frac{2\epsilon}{\epsilon+1}}$$

ασκ. 25

Έστω S = «έχει το στίγμα» άρα $P(S) = 0,01 \Rightarrow P(S') = 0,99$

Γ_1 = «και οι 2 γονείς έχουν το στίγμα» Γ_2 = «1 έχει στίγμα»

Γ_3 = «κανένας δεν έχει στίγμα». Έστω επίσης S_1 = «το πρώτο παιδί έχει το στίγμα» και S_2 = «Το δεύτερο παιδί έχει στίγμα»

- $P(S_1|\Gamma_1) = 0,5$, $P(S_2|\Gamma_1) = 0,5$, $P(S_1|\Gamma_2) = 0,02$, $P(S_2|\Gamma_2) = 0,02$, $P(S_1|\Gamma_3) = P(S_2|\Gamma_3) = 0$.

(α) Ψάχνουμε την πιθανότητα και τα δύο παιδιά να έχουν το στίγμα, με δεδομένο ότι ένας γονιός έχει το στίγμα. Επειδή οι πιθανότητες τα παιδιά να έχουν το στίγμα είναι ανεξάρτητες ψάχνουμε το $P(S_1 S_2|\Gamma_2) = P(S_1|\Gamma_2) \cdot P(S_2|\Gamma_2)$

$\Rightarrow P(S_1 S_2|\Gamma_2) = 0,02 \cdot 0,02 \Rightarrow \boxed{P(S_1 S_2|\Gamma_2) = 4 \cdot 10^{-4}}$

(β) $P(B) = P(\Gamma_1) P(S_1 S_2|\Gamma_1) + P(\Gamma_2) P(S_1 S_2|\Gamma_2) + P(S_1 S_2|\Gamma_3) P(\Gamma_3)$.

B = «Τα 2 παιδιά ενός τυχαίου ζευγαριού έχουν στίγμα»

• $P(S_1 S_2 | \Gamma_1) = P(S_1 | \Gamma_1) \cdot P(S_2 | \Gamma_1) = 0,5 \cdot 0,5 = 0,25$

• $P(S_1 S_2 | \Gamma_2) = 4 \cdot 10^{-4}$ (από (α))

• $P(S_1 S_2 | \Gamma_3) = 0$.

• $P(\Gamma_1) = 0,01 \cdot 0,01 = 10^{-4}$, • $P(\Gamma_2) = 0,1$, • $P(\Gamma_3) = 0,99 \cdot 0,99 = 0,9801$

Άρα $P(B) = 0,25 \cdot P(\Gamma_1) + 4 \cdot 10^{-4} \cdot P(\Gamma_2) + 0 \cdot P(\Gamma_3)$

$P(B) = 0,25 \cdot 10^{-4} + 4 \cdot 10^{-4} \cdot 0,1 + 0 \Rightarrow \boxed{P(B) = 6,5 \cdot 10^{-5}}$

(γ) $$P(\Gamma_2 | S_1 S_2) = \frac{P(S_1 S_2 | \Gamma_2) P(\Gamma_2)}{P(S_1 S_2 | \Gamma_2) P(\Gamma_2) + P(S_1 S_2 | \Gamma_1) P(\Gamma_1) + P(S_1 S_2 | \Gamma_3) P(\Gamma_3)}$$

$$= \frac{4 \cdot 10^{-4} P(\Gamma_2)}{4 \cdot 10^{-4} P(\Gamma_2) + 0,25 P(\Gamma_1) + 0 \cdot P(\Gamma_3)}$$

$$= \frac{4 \cdot 10^{-4} \cdot 0,1}{4 \cdot 10^{-4} \cdot 0,1 + 0,25 \cdot 10^{-4} + 0} = 0,615 \Rightarrow \boxed{P(\Gamma_2 | S_1 S_2) = 61,5\%}$$

ασκ 25

$P(P_1) = 1/2$ $P(P_2) = 3/4$ Για να είναι ανεξάρτητα θα πρέπει να ισχύει $P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B)$

$P(K_1) = 1/2$, $P(\Gamma_1) = 1/2$ $P(K|N_1) = 1/2$ $P(\Gamma|N_1) = 1/2$

$P(K_2) = 3/4$ $P(\Gamma_2) = 1/4$ $P(K|N_2) = 3/4$ $P(\Gamma|N_2) = 1/4$

Έχουμε συνολικά $2 \cdot 2 = 4$ αποτελέσματα.

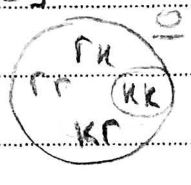
$P(A) = P(K_1|N_1) P(N_1) + P(K_2|N_2) \cdot P(N_2)$

$= 1/2 \cdot 1/2 + 3/4 \cdot 1/2 = 5/8$

$P(B) = 5/8$

AB: Έχουμε $\Omega = \{KK, \Gamma\Gamma, K\Gamma, \Gamma K\}$

Το $A \cap B$ είναι το KK



άρα $\boxed{P(AB) = \frac{1}{4}}$

Επειδή $P(AB) = \frac{1}{4} \neq \frac{25}{64}$ τα A, B είναι εξαρτημένα