ΠΕΤΣΑ ΓΕΩΡΓΙΑ
ΑΜ: 3200155
5η ΟΜΑΔΑ ΑΣΚΗΣΕΩΝ.

ασκ. 31

Έστω πως X είναι η φορά που έχουμε τη πρώτη κορώνα. Η $X \sim$ γεωμ$(0,5)$. $p=0,5$ γιατί το νόμισμα είναι δίκαιο. Είναι

k	$P_X(X=k)$
1	$(1-0,5)^0 \cdot 0,5 = 1/2$
2	$(1-0,5)^1 0,5 = 1/2^2$
3	$(1-0,5)^2 0,5 = 1/2^3$
⋮	⋮
k	$(1-0,5)^{k-1} 0,5 = 1/2^k = 2^{-k}$

Άρα $\boxed{P_X(X=k) = 2^{-k}}$

Έστω $Y = 2^k$ το κέρδος. Η Μέση τιμή του κέρδους είναι $E(Y) = \sum_{k=1}^{\infty} 2^k \cdot P_X(X=k) = \sum_{k=1}^{\infty} 2^k 2^{-k} = \sum_{k=1}^{\infty} 1 = \infty$

Δεν θα έδινα 50€ για να παίξω.

ασκ. 32

Έστω η δεύτερη κορώνα να εμφανισθεί στον αριθμό k.

$C = A \cap B$. Τα A, B είναι ανεξάρτητα άρα:

$P(C) = P(A) \cdot P(B)$ ⊛

- $P(A) = p$
- $P(B) = \binom{k-1}{1} p (1-p)^{k-2}$ $\quad B \sim$ Διων$(k-1, 0,5)$

Άρα ⊛ $P(C) = (k-1) p^2 (1-p)^{k-2}$

ασκ. 33

(α) Έστω N το πλήθος των παιδιών που έχουν μεγάλη μύτη και αυτιά. $N \sim$ Διων$(5, 1/4)$

$p = \frac{1}{4}$ γιατί έχουμε $p = \underbrace{\frac{1}{2}}_{\text{αυτιά}} \cdot \underbrace{\frac{1}{2}}_{\text{μύτη}}$ και τα ενδεχόμενα είναι ανεξάρτητα.

Άρα $P(X=x) = \binom{5}{x} \left(\frac{1}{4}\right)^x \left(\frac{3}{4}\right)^{5-x}$ με

$0 \leq x \leq 5$

(β) Πάλι, $Y \sim$ διων $(5, 3/4)$

$$p = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} - \frac{1}{4} = 3/4.$$

αυτιά   μύτη   αυτιά ∩ μύτη

Άρα $P(Y=y) = \binom{5}{y}\left(\frac{3}{4}\right)^{y}\left(\frac{1}{4}\right)^{5-y}$

(γ) Έστω κ πλήθος κοριτσιών με μεγάλη μύτη και ℓ με μεγάλα αυτιά.

$P_\kappa = P($"κορίτσι" ∩ "μεγάλη μύτη"$) = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} = 1/4$

$P_\ell = P($"κορίτσι" ∩ "μεγάλα αυτιά"$) = 1/2 \cdot 1/2 = 1/4$

$\kappa \sim$ διων$(5, 1/4)$ και $\ell \sim$ διων$(5, 1/4)$

• $E(\kappa) = \nu \cdot p = \frac{5}{4}$ • $E(\ell) = \nu \cdot p = 5/4$

Άρα ο Σταύρος και η Μαρία πρέπει να δώσουν κατά μέσο όρο $4000 \cdot E(\ell) + 2000 \cdot E(\kappa)$
$= \frac{4000 \cdot 5}{4} + \frac{2000 \cdot 5}{4} = 7.500$ €

$\boxed{\text{Άσκ. 34}}$

Έστω X το πλήθος αεροπλάνων που πέφτουν

$X \sim Poisson(\lambda)$, $\lambda = p$

• 3 αεροπλάνα την ίδια μέρα

$P_A(X=3) = \frac{e^{-p}p^3}{3!} \cdot 8 \cdot e^{-7p}$ (*) για τον ίδιο λόγο με το από κάτω που έχω e^{-5p}

8 επιλογές για τις μέρες

• 3 αεροπλάνα σε διαφορετικές μέρες

$P_B(X=3) = \binom{8}{3}\left(\frac{e^{-p}p}{1!}\right)^3 (e^{-5p}) = 56\, e^{-8p} p^3$

Έχουμε ότι $P(X=0) = \frac{e^{-p} \cdot p^0}{0!} = e^{-p}$. Επίσης έχουμε 5 μέρες που δεν θέλουμε να πέσει αεροπλάνο, άρα $(e^{-p})^5$

να μην πέσει κανένα αεροπλάνο

αση 35

a) $N=2000$ $n=12$ ελατ.

Έστω X οι υπολογιστές που επιλέγουμε.

$X \sim$ Διων. $(10, 0{,}006)$

$$p = \frac{12}{2000} = 0{,}006$$

$$P(X=2) = \binom{10}{2}(0{,}006)^2(0{,}994)^8 = 0{,}0015 = 0{,}15\%$$

(β) $E(X) = n \cdot p = 10 \cdot 0{,}006 = 0{,}06$

$var(X) = np(1-p) = 10 \cdot 0{,}006 \cdot 0{,}994 = 0{,}05964$

(γ) Επειδή ψάχνουμε υπολογιστές, μέχρι τον πρώτο ελαττωματικό θα έχουμε ότι $Y \sim$ γεωμ$(0{,}006)$

$X=1$	$(1-0{,}006)^0 0{,}006$
$X=2$	$(1-0{,}006)^1 0{,}006$
⋮	
$X=N$	$(1-0{,}006)^{N-1} 0{,}006$

$$\boxed{P_Y(Y=y) = (0{,}994)^{y-1} 0{,}006}$$

$$E(Y) = \frac{1}{p} = \frac{1}{0{,}006} = 166{,}66 \qquad var(Y) = \frac{0{,}994}{(0{,}006)^2}$$

αση 36

$X \sim Bernoulli(p)$ $\quad Y \sim Bernoulli(1/2)$

$$Z = X \cdot Y \quad E(Z) = \sum_{z \in S_Z} z P(z) = 0 \cdot P_X(0) \cdot P_Y(0) + P_Y(1) \cdot P_X(1) = p/2$$

$$Var(Z) = E(Z^2) - (E(Z))^2 = p/2 - \frac{p^2}{4}$$

$\boxed{\text{ασκ } 37}$

$p = 0,002$

(α) $X \sim \Delta\iota\omega\nu(\underbrace{50}_{2\cdot 25}, 0,002)$

$E(X) = 50 \cdot 0,002 = 0,1$

$var(X) = 50 \cdot 0,002(1-0,002) = 0,0998$

Το πολύ μία αποτυχία $P(X \le 1) = P(X=0) + P(X=1)$

$= \binom{25}{0}(0,002)^0(1-0,002)^{25} + \binom{25}{1} 0,002(1-0,002)^{24}$

(β)

$X \sim \gamma\epsilon\omega\mu(0,002)$

$P(X=100) = (1-0,002)^{99} 0,002 = 0,0016\ldots$

$E(X) = \frac{1}{0,002} = 500$

$\boxed{\text{ασκ } 34}$ (Συνέχεια)

- 2 αεροπλάνα στην ίδια μέρα και 1 σε μία άλλη

$P_\Gamma(X=3) = \frac{8\, e^{-\rho}\rho^2}{2!} \cdot 7\, \frac{e^{-\rho}\rho}{1!} \cdot e^{-6\rho} = 28\, e^{-8\rho}\rho^3$

Άρα $P(X=3) = P_A(X=3) + P_B(X=3) + P_\Gamma(X=3) = \frac{e^{-8\rho}\rho^3 \cdot 256}{3}$

ασκ. 38

(α) Έχουμε ότι $Π \sim Διων(10, 0,6)$ και $Ο \sim Διων(10, 0,4)$
Για να κερδίσει ο Π περισσότερους αγώνες απ' τον Ο πρέπει ο Π να κερδίσει τουλ. 6 αγώνες. Άρα:

$$P_Π = \sum_{i=6}^{10} \binom{10}{i} (0,6)^i (0,4)^{10-i}$$

(β) Αφού έχουμε αγώνες μέχρι να κερδίσει ο Ο, έχουμε ότι $Ο \sim Γεωμ(0,4)$ και έχουμε:

$$P_O(O=6) = 0,6^5 \, 0,4 = 0,031$$

(γ) Έστω $A =$ "ο Ο κερδίζει μία φορά στους πρώτους 4 αγώνες" και $B =$ "ο Ο κερδίζει τον 5ο αγώνα"
Εμείς ψάχνουμε το $C = A \cap B$

$A \sim Διων(4, 0,4)$

$P(A) = \binom{4}{1} 0,4^1 \cdot 0,6^3$ και $P(B) = 0,4$

Άρα $P(C) = P(A) \cdot P(B) = 4 \cdot 0,4 \cdot 0,6^3 \cdot 0,4 = 0,1382 = 13,82\%$

(δ) Έστω τώρα $D =$ "ο Ο κερδίζει την 4η νίκη στον 6ο αγώνα" και $E =$ "ο Π κερδίζει την 4η νίκη στον 6ο αγώνα".
Εμείς ψάχνουμε το $F = E + D$ γιατί τα E, D είναι ξένα μεταξύ τους.

$E \sim Διων(5, 0,6)$ και $P(E) = \underbrace{\binom{5}{3} 0,6^3 \, 0,4^2}_{3 \text{ πρώτοι αγώνες}} \cdot \underbrace{0,6}_{4ος}$

$D \sim Διων(5, 0,4)$ και $P(D) = \binom{5}{3} 0,4^3 \, 0,6^2 \cdot 0,4$

$P(F) = P(E) + P(D) = 0,2995 = 29,95\%$