ΠΕΤΣΑ ΓΕΩΡΓΙΑ
ΑΜ: 3200155

4η ομάδα ασκήσεων

ασκ. 22

Η $f(x)=|x|$ είναι συνεχής στο $\mathbb{R}$:

Για $x>0$:

$$\lim_{x\to 0^+} f(x) = \lim_{x\to 0^+} |x| = \lim x = 0$$

Για $x<0$:

$$\lim_{x\to 0^-} f(x) = \lim_{x\to 0^-} |x| = \lim_{x\to 0^-} (-x) = 0$$

Για $x=0$: $f(0)=0$ άρα f συνεχής στο $\mathbb{R}$

ασκ. 23

(α) $\lim_{x\to 0} \sin(\sin x) = \sin\left(\lim_{x\to 0} \sin x\right) = \sin(0) = 0$

(β) $\lim_{x\to 0}(\cos(\sin x)) = \cos\left(\lim_{x\to 0} \sin x\right) = \cos(0) = 1$

(γ) $\lim_{x\to 1}\left(\tan \frac{x^2+1}{x^3+2}\right) = \tan\left(\lim_{x\to 1} \frac{x^2+1}{x^3+2}\right) = \tan\left(\frac{2}{3}\right)$

ασκ. 24

Έστω $I=(x_0-\delta, x_0+\delta)$, $f(x_0)>0$

Ξέρουμε ότι $\forall \varepsilon>0\ \exists \delta>0: \forall x\in I-\{x_0\} \Rightarrow |f(x)-f(x_0)|<\varepsilon$

Θέτω $\varepsilon = \frac{f(x_0)}{2} > 0$ (αφού $f(x_0)>0$)

$0 < x-x_0 < \delta \Rightarrow |f(x)-f(x_0)| < \varepsilon \Rightarrow -\varepsilon < f(x)-f(x_0) < \varepsilon$

$\Rightarrow -\frac{f(x_0)}{2} < f(x)-f(x_0) \Rightarrow f(x_0) - \frac{f(x_0)}{2} < f(x) \Rightarrow$

$\Rightarrow \frac{f(x_0)}{2} < f(x) \Rightarrow f(x)>0$, άρα το

διάστημα όπου $f(x)>0\ \forall x\in I$ είναι το $I=(x_0-\delta, x_0+\delta)$

$\boxed{\text{ασκ. 25}}$

Αρκεί νδο $\forall \varepsilon > 0 \; \exists \; N \in \mathbb{N}^*: \; n > N \Rightarrow |f(a_n) - f(x_0)| < \varepsilon$

Έστω $\varepsilon > 0$. Επειδή f συνεχής στο x_0 θα ισχύει ότι
$\exists \delta > 0 : \; |x - x_0| < \delta \Rightarrow |f(x) - f(x_0)| < \varepsilon$

Άρα θα ισχύει και για $x = a_n$, επομένως
$|a_n - x_0| < \delta \Rightarrow |f(a_n) - f(x_0)| < \varepsilon$ (1)
Άρα $\exists \lim\limits_{n \to \infty} a_n$ για το παραπάνω δ, επομένως $\exists N \in \mathbb{N}^*$:

$n > N \Rightarrow |a_n - x_0| < \delta$ (2)

Από (1), (2) έχουμε:

$n > N \Rightarrow |a_n - x_0| < \delta \Rightarrow |f(a_n) - f(x_0)| < \varepsilon$
άρα και $n > N \Rightarrow |f(a_n) - f(x_0)| < \varepsilon$

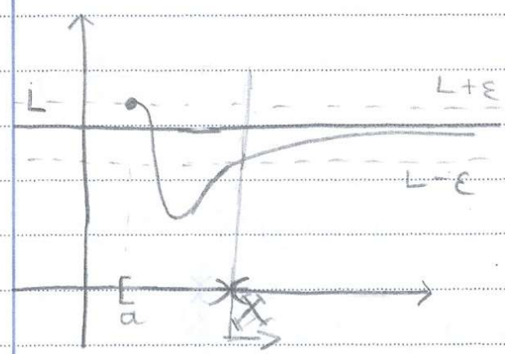
$\boxed{\text{ασκ. 28}}$

Ξέρουμε ότι $f(2) = 2$ και $f(4) = 1$, $x_0 \in (2, 4)$ άρα και $\frac{x_0}{2} \in (1, 2)$ αφού:

Έχουμε ότι $2 < x_0 < 4 \Rightarrow 1 < \frac{x_0}{2} < 2$

Είναι $1 < \frac{x_0}{2} < 2 \Rightarrow f(4) < \frac{x_0}{2} < f(2)$ άρα από ΘΜΕΤ $\exists x_0 \in (2, 4): f(x_0) = \frac{x_0}{2}$

ασκ. 26



$\exists \quad L=\lim_{x\to\infty} f(x)$

Άρα $\forall \varepsilon>0 \ \exists X : \forall x>X$

και είναι $|f(x)-L|<\varepsilon$

Επομένως η f είναι φραγμένη. (1)

Για $x\in[a,X]$ (2)

απ' το θεώρημα ακροτάτων ξέρουμε ότι αν μία συνάρτηση είναι συνεχής σ' ένα κλειστό διάστημα, τότε είναι φραγμένη σε αυτό.

Επομένως από (1) και (2) έχουμε ότι η f είναι άνω και κάτω φραγμένη στο $[a,+\infty)$.

ασκ. 27

Έστω ρ_1, ρ_2 διαδοχικοί ρητοί αριθμοί και $f(a)=\rho_1$, $f(b)=\rho_2$.

Αν η f δεν είναι σταθερή στο $[a,b]$ τότε θα $\exists x_0\in(a,b): f(x_0)=h$ με $f(a)<h<f(b)$

από ΘΕΤ

αυτό όμως είναι άτοπο αφού μεταξύ 2 διαδοχικών ρητών υπάρχουν άπειροι άρρητοι επομένως h άρρητος άρα $\notin$ στο σύνολο τιμών της f.

Άρα f σταθερή στο $[a,b]$

$\boxed{\text{ασκ. 32}}$

Γνωρίζουμε ότι $\boxed{\cos x - \cos y = 2\sin\left(\frac{x+y}{2}\right)\cdot\sin\left(\frac{y-x}{2}\right)}$ (1)

<u>αρκεί νδο</u>

$\exists c>0 : \forall x,y \in \mathbb{R} \quad |f(x)-f(y)| \leq c|x-y|$

$f(x) = A\cos(ax+b) \quad , \quad A, a, b \in \mathbb{R}$

Είναι:

$|f(x)-f(y)| = |A\cos(ax+b) - A\cos(ay+b)| =$

$|A|\,|\cos(ax+b) - \cos(ay+b)| \overset{(1)}{=} 2|A|\sin\left(\frac{a(x+y)+2b}{2}\right)\cdot\sin\left(\frac{a(x-y)}{2}\right)$ (*)

(Ισχύει ότι $\sin\left(\frac{a(x+y)+2b}{2}\right) \leq 1$ άρα):

$2|A|\sin\left(\frac{a(x+y)+2b}{2}\right)\cdot\sin\left(\frac{a(x-y)}{2}\right) \leq 2|A|\left|\sin\left(\frac{a(x-y)}{2}\right)\right| \leq$

$\leq \cancel{2}|A|\frac{a(x-y)}{\cancel{2}} = |A|a(x-y)$

$\boxed{\text{Άρα } \quad C = |A|\cdot a}$

Άρα η f είναι lipschitz συνεχής στο $\mathbb{R}$

(*) Από τη σχέση (1) θα είναι:

$2\sin\left(\frac{ax+b+ay+b}{2}\right)\cdot\sin\left(\frac{ax+\cancel{b}-ay-\cancel{b}}{2}\right)$

$= 2\sin\left(\frac{a(x+y)+2b}{2}\right)\cdot\sin\left(\frac{a(x-y)}{2}\right)$

$\boxed{\text{ασκ. 29}}$ Για $x \geq 0$

- $x_1 = x_2 \overset{e^x \uparrow}{\underset{1-1}{\Rightarrow}} e^{x_1} = e^{x_2}$

$-x_1 = -x_2 \overset{e^x \uparrow}{\underset{1-1}{\Rightarrow}} e^{-x_1} = e^{-x_2}$ (+)

$e^{x_1} + e^{-x_1} = e^{x_2} + e^{-x_2} \Rightarrow \dfrac{e^{x_1} + e^{-x_1}}{2} = \dfrac{e^{x_2} + e^{-x_2}}{2}$

$\Rightarrow f(x_1) = f(x_2)$ Άρα $f: 1-1$

- $\dfrac{e^x + e^{-x}}{2} = y \Rightarrow e^x + e^{-x} = 2y \overset{\cdot e^x}{\Rightarrow} e^{2x} + e^{-x+x} = 2y e^x$

$\Rightarrow e^{2x} - 2y e^x + e^0 = 0 \Rightarrow e^{2x} - 2ye^x + 1 = 0$

θέτω $u = e^x$ και έχω:

$u^2 - 2y \cdot u + 1 = 0$

$\Delta = 4y^2 - 4 \Rightarrow 4(y^2 - 1)$

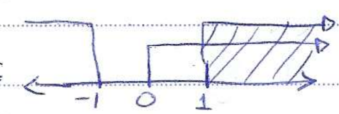
$u_{1,2} = \dfrac{2y \pm \sqrt{4y^2 - 1}}{2} = \dfrac{2y \pm 2\sqrt{y^2 - 1}}{2} = y \pm \sqrt{y^2 - 1}$

άρα

(1) $e^x = y \pm \sqrt{y^2 - 1}$. Πρέπει $y^2 - 1 \geq 0 \Rightarrow y \in (-\infty, -1] \cup [1, +\infty)$

πρέπει $y - \sqrt{y^2 - 1} > 0 \Rightarrow y > \sqrt{y^2 - 1}$. Αυτό ισχύει μόνο

για $y > 0$. Άρα :



$y \in [1, +\infty)$

(1) $\ln e^x = \ln\left(y \pm \sqrt{y^2 - 1}\right) \Rightarrow \boxed{x = \ln\left(y \pm \sqrt{y^2 - 1}\right)}$

απ' το π.ο. της f πρέπει $x \geq 0$. Άρα

$\ln\left(y \pm \sqrt{y^2 - 1}\right) \geq \ln 1 \overset{\ln \uparrow}{\underset{1-1}{\Rightarrow}} y \pm \sqrt{y^2 - 1} \geq 1$

Για $y - \sqrt{y^2 - 1} \geq 1 \Rightarrow y - 1 \geq \sqrt{y^2 - 1} \overset{y \geq 1}{\Rightarrow} y^2 - 2y + 1 \geq y^2 - 1$

$\Rightarrow 2y \leq 2 \Rightarrow y \leq 1$ Άρα ισχύει μόνο για $y = 1$

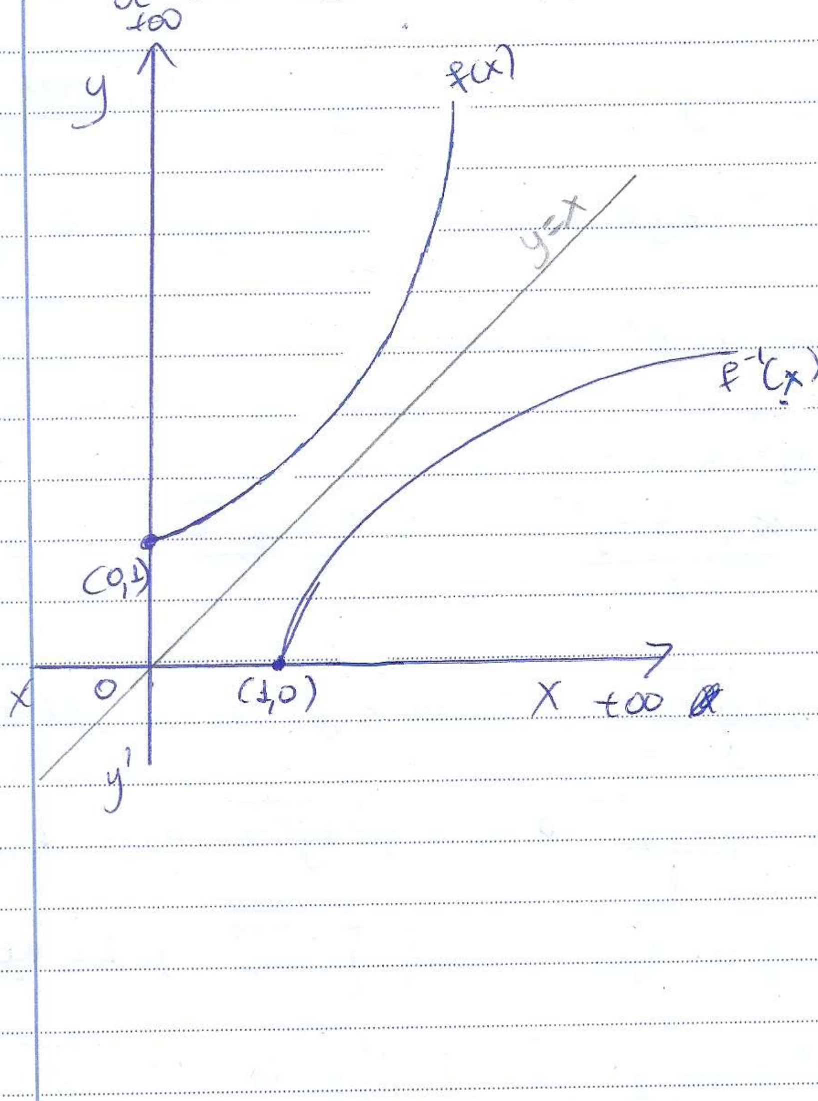
~~[illegible]~~ Για $x = \ln(y+\sqrt{y^2-1})$

Για $y=1$ έχουμε

$x = \ln 1 \Rightarrow x=0$ ισχύει άρα

$f^{-1}(y) = \ln(y+\sqrt{y^2-1})$, το ζητούμενο
με π.ο. το $[1,+\infty)$ και σ.τ. το $[0,+\infty)$

Η γραφική παράσταση του είναι:



Άσκηση 31 και 32

```python
def bis(f, a, b, Ex, Ef):
    from operator import abs
    n = 1
    print ("n a b m       f(a)                        f(b)               f(m)")
    m = (a+b) / 2
    while ((b-a)/2 > Ex) and (abs(f(m)) > Ef):
        print (f"{n} {a} {b} {m} {f(a)} {f(b)} {f(m)}")
        if (f(m)*f(a)) < 0:
            b = m
        elif (f(m)*f(b)) < 0:
            a = m
        n = n + 1
        m = (a+b) / 2
    return m


from math import cos
f = lambda x: 2*cos(x) - x
bis(f, 1, 3, 0.0010, 0.0015)
```

PROBLEMS OUTPUT DEBUG CONSOLE TERMINAL

```
python-2020.12.422005962\pythonFiles\lib\python\debugpy\launcher' '58507' '--' 'c:\Users\Gogo\Deskto
n a b m       f(a)                        f(b)               f(m)
1 1 3 2.0 0.08060461173627931 -4.97998499320089 -2.8322936730942847
2 1 2.0 1.5 0.08060461173627931 -2.8322936730942847 -1.3585255966645942
3 1 1.5 1.25 0.08060461173627931 -1.3585255966645942 -0.6193552752094627
4 1 1.25 1.125 0.08060461173627931 -0.6193552752094627 -0.2626469664026676
5 1 1.125 1.0625 0.08060461173627931 -0.2626469664026676 -0.08912066459607337
6 1 1.0625 1.03125 0.08060461173627931 -0.08912066459607337 -0.0037563613792639394
7 1 1.03125 1.015625 0.08060461173627931 -0.0037563613792639394 0.03855280637470493
8 1.015625 1.03125 1.0234375 0.03855280637470493 -0.0037563613792639394 0.017429987091011956
9 1.0234375 1.03125 1.02734375 0.017429987091011956 -0.0037563613792639394 0.006844703077569125
10 1.02734375 1.03125 1.029296875 0.006844703077569125 -0.0037563613792639394 0.0015461370255371865
```