1η ομάδα ασκήσεων
ΠΕΤΣΑ ΓΕΩΡΓΙΑ
ΑΜ: 3200155

$\boxed{\text{ασκ. 57}}$

Έχουμε: $P(|X-\mu| \geq s) \leq \sigma^2/s^2$

Ψάχνουμε την τιμή του s ώστε η πιθανότητα να πέσει το δίκτυο να είναι το πολύ 1%. Άρα: $P(|X-\mu| \geq s) \leq 0{,}01$, δηλ:

$$s^2 = \frac{\sigma^2}{0{,}01} = 100\cdot\sigma^2 = 100\cdot 500^2 \Rightarrow \boxed{s = 5000}$$

$\boxed{\text{ασκ 60}}$

Έχουμε: $P\left(\sum_{n=1}^{N} X_n > 3000\right) < 10^{-4} \Leftrightarrow P\left(\sum_{n=1}^{N} X_n \leq 3000\right) > 1-10^{-4}$

$$\Leftrightarrow P\left(\frac{\sum_{n=1}^{N} X_n - 15N}{\sqrt{N}} \leq \frac{300-15N}{\sqrt{N}}\right) > 1-10^{-4} \Leftrightarrow P\left(Z \leq \frac{3000-15N}{\sqrt{N}}\right) > 1-10^{-4}$$

$$\Leftrightarrow \Phi\left(\frac{3000-15N}{\sqrt{N}}\right) > 1-10^{-4} \Leftrightarrow \frac{3000-15N}{\sqrt{N}} > \Phi^{-1}(1-10^{-4})$$

Για να βρω το N_0 θέτω $a = \Phi^{-1}(1-10^{-4})$, $x = \sqrt{N}$, άρα

$$\frac{3000-15x^2}{x} = a \Leftrightarrow 3000 - 15x^2 = ax \Leftrightarrow 15x^2 + ax - 3000 = 0$$

$$x = \frac{-a \pm \sqrt{a^2 + 4\cdot 15\cdot 3000}}{2\cdot 15} \Leftrightarrow x_1 = 14{,}01$$

$\boxed{\text{ασκ. 63}}$

$$f(x) = \begin{cases} 1/100, & x \in [30, 130] \\ 0, & x \notin [30, 130] \end{cases}$$

(α)

Η X είναι ομοιόμορφα κατανεμημένη άρα θα είναι

- $E(X) = \dfrac{30+130}{80} = \dfrac{16\cancel{0}}{8\cancel{0}} = 80$ και
- $var(X) = \dfrac{(130-30)^2}{12} = \dfrac{2500}{3}$

(β) ψάχνουμε το $E(Y) = E(20X+500) = 20\,E(X) + 500 = 20 \cdot 80 + 500$

$= 1600 + 500 = 2100.$

$\boxed{\text{ασκ. 62}}$

(α) X_i = διάρκεια κλήσεων και $E(X_i) = 40$ άρα $var(X_i) = 40^2 = 1600$

$X_i \sim$ εκθετική κατανομή και τυπική απόκλιση $\sigma = 40$,

Έστω $X_i = 1, 2 .. 250$ η διάρκεια των κλήσεων.

$$P\Big(\sum_{i=1}^{250} x_i > 170 \times 60 = 10200\Big) = P\left(\frac{\sum_{i=1}^{250} X_i - 80 \cdot 40}{40\sqrt{250}} > \frac{10200 - 250 \cdot 40}{40\sqrt{250}}\right)$$

2 ώρες κ' 50 λεπτά

$$= P\left(Z > 1/\sqrt{10}\right) = 1 - \Phi\left(1/\sqrt{10}\right)$$

(β) κάθε κλήση θα έχει διάρκεια > 1 λεπτού με $p = e^{-5/4}$

Έστω τώρα η ~~[illegible]~~ τ.μ. $Y_i \sim$ Bernoulli με $Y_i = 1$ όταν η διάρκεια ξεπεράσει το 1 λεπτό και $Y_i = 0$ όταν η διάρκεια είναι από 0 έως και 1 λεπτό, έχουμε

$$P\Big(\sum_{i=1}^{250} Y_i < 75\Big) = P\left(\frac{\sum_{i=1}^{250} Y_i - 250 \cdot p}{\sqrt{250 \cdot p \cdot (1-p)}} < \frac{75 - 250\,p}{\sqrt{250p(1-p)}}\right) =$$

$$= P\left(Z < \frac{75 - 250p}{\sqrt{250p(1-p)}}\right) = \Phi\left(\frac{75 - 250p}{\sqrt{250p - p^2}}\right)$$

ασκ 61

100 μπιφτέκια των ~~200 γρ. έκαστο~~ $[180, 220]$ γρ. έκαστο.

Έστω η τμ. X_i ομοιόμορφα κατανεμημένη που δείχνει τα
(α) διαδοχικά γραμμάρια των μπιφτεκιών. Έχουμε:

$$E(X_i) = \frac{180+220}{2} = 200 \quad \text{και} \quad \sigma^2 = \frac{(220-180)^2}{12} = \frac{400}{3}$$

$$\bullet\ P\left(\sum_{i=1}^{100} X_i \leq 20200\right) = P\left(\frac{\sum_{i=1}^{100} X_i - 100\cdot 200}{\sqrt{100\cdot\frac{400}{3}}} \leq \frac{20200-100\cdot 200}{\sqrt{100\cdot\frac{400}{3}}}\right)$$

$$= P\left(\frac{20200-100\cdot 200}{\sqrt{100\cdot\frac{400}{3}}}\right)$$

β) ορίζω g το γραμμάριο που πρέπει να έχει ο μάγειρας.

Έχουμε
$$P\left(\sum_{i=1}^{100} X_i \leq g\right) = P\left(\frac{\sum_{i=1}^{100} X_i - 100\cdot 200}{\sqrt{100\cdot\frac{400}{3}}} \leq \frac{g-100\cdot 200}{\sqrt{100\cdot\frac{400}{3}}}\right)$$

$$= P\left(\frac{g-20000}{\sqrt{\frac{40000}{3}}}\right) \geq 0{,}99 \iff \Phi\left(\frac{g-20000}{\sqrt{\frac{40000}{3}}}\right) \geq 0{,}99$$

$$\iff \frac{g-20000}{\sqrt{\frac{40000}{3}}} \geq \Phi^{-1}(0{,}99) \iff g = \Phi^{-1}(0{,}99)\cdot\sqrt{\frac{40000}{3}} + 20000$$

ασκ ~~58~~

$$f(x) = c e^{-4|x|}, \quad x \in \mathbb{R}, \quad c>0.$$

(α) Πρέπει: $\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\,dx = 1$. Άρα $\int_{-\infty}^{\infty} c e^{-4|x|}\,dx = \int_{-\infty}^{0} c e^{4x}\,dx + \int_{0}^{\infty} c e^{-4x}$ (1)

$\cdot\ f(-x) = c e^{-4|-x|} = c e^{-4|x|} = f(x)$, άρα η f είναι άρτια, άρα

$$(1) \Rightarrow 2c\int_0^{\infty} e^{-4x}\,dx = 2c\left[\frac{-e^{-4x}}{4}\right]_0^{\infty} = \frac{2c}{4} = \frac{c}{2}. \quad \frac{c}{2} = 1 \Rightarrow \boxed{c=2}$$

$$\lim_{x\to\infty} -\frac{e^{-4x}}{4} = -\frac{0}{4} = 0$$

(β) $E(X) = \int_{-\infty}^{\infty} x f(x)\,dx = \int_{-\infty}^{0} 2x e^{4x}\,dx + \int_{0}^{\infty} 2x e^{-4x}\,dx = -\int_{0}^{\infty} 2x e^{-4x}\,dx + \int_{0}^{\infty} 2x e^{-4x}\,dx = 0.$

ή επειδή η f είναι άρτια (το δείξαμε στο (α)), ξέραμε ότι το ολοκλήρωμα αυτό έπρεπε να βγει 0).

(γ) $Var(X) = E(X^2) - (E(X))^2 = E(X^2) - 0 = \int_{-\infty}^{\infty} x^2 f(x)\,dx$

$= \int_{-\infty}^{0} 2x^2 e^{4x} + \int_{0}^{\infty} 2x^2 e^{-4x}\,dx = \int_{0}^{\infty} 4 x^2 e^{-4x}\,dx$

$= \left[-x^2 e^{-4x}\right]_0^{\infty} + \int_0^{\infty} 2x\, e^{-4x}\,dx$

$= -\frac{1}{2}\left[x e^{-4x}\right]_0^{\infty} + \frac{1}{2}\int_0^{\infty} e^{-4x}\,dx =$

$= -\frac{1}{8}\left[\frac{e^{-4x}}{-4}\right]_0^{\infty} = \frac{1}{8}$

δ) $P(|X| \geq \frac{1}{2}) = P(-\frac{1}{2} \geq X \geq \frac{1}{2}) = P(X \geq \frac{1}{2}) + P(X \leq -\frac{1}{2})$

$= \int_{1/2}^{\infty} 2e^{-4x}\,dx + \int_{-\infty}^{-1/2} 2e^{4x}\,dx = 4\int_{1/2}^{\infty} e^{-4x}\,dx = \left[e^{-4x}\right]_{1/2}^{\infty}$

$= -0 + e^{-1/2}$

(ε) $P(|X| \geq \frac{1}{2}) = P(|X - 0| \geq \frac{1}{2}) \leq \frac{Var(X)}{(\frac{1}{2})^2} = \frac{\frac{1}{8}}{(\frac{1}{2})^2} = \frac{1}{2}$