ΠΕΤΣΑ ΓΕΩΡΓΙΑ
ΑΜ: 3200155
4η ΟΜΑΔΑ ΑΣΚΗΣΕΩΝ

ασκ. 27

$p_X(x) = \frac{9-x}{10}$, $x = 5, 6, 7, 8$

$p_X(5) = \frac{9-5}{10} = \frac{4}{10}$

$p_X(6) = \frac{9-6}{10} = \frac{3}{10}$

$p_X(7) = \frac{9-7}{10} = \frac{2}{10}$

$p_X(8) = \frac{9-8}{10} = \frac{1}{10}$

Αν ο μανάβης αγοράσει:

5 κολοκύθες: θα τις πουλήσει όλες, $2 \cdot 5 = 10$€ κέρδος.

6 κολοκύθες:

$E(Y) = 6 \cdot 2 \cdot \frac{6}{10}$ (*) $+ (5 \cdot 2 - 2) \cdot \frac{4}{10} = \frac{104}{10}$

7 κολοκύθες:

$E(Y) = 7 \cdot 2 \cdot \frac{3}{10} + (6 \cdot 2 - 2) \cdot \frac{3}{10} + (5 \cdot 2 - 4) \cdot \frac{4}{10} = \frac{96}{10}$

8 κολοκύθες:

$E(Y) = 8 \cdot 2 \cdot \frac{1}{10} + (7 \cdot 2 - 2) \cdot \frac{2}{10} + (6 \cdot 2 - 4) \cdot \frac{3}{10} + (5 \cdot 2 - 6) \cdot \frac{4}{10}$

$= \frac{80}{10} = 8$. Άρα συμφέρει τον μανάβη να αγοράσει 6 κολοκύθες.

(*) Έχουμε πάρει $\frac{6}{10}$ και όχι 3/10 γιατί παίρνουμε σαν ενδεχόμενο να έρθουν ακριβώς λιγότεροι ή ισηαπό 6 πελάτες, και το άθροισμα των πιθανοτήτων πρέπει να ισούται με 1.

ασκ. 28

Ψάχνουμε την μάζα της X δηλ. $p_X(x)$, με $x = 1, 2, .., 6$ (γιατί η τελευταία πιο υψηλή θέση που μπορεί να πάρει μια γυναίκα είναι η 6η)

$p_X(x=1) = 1/2$ (γιατί είναι εξίσου πιθανό τη πρώτη θέση να τη πάρει άντρας ή γυναίκα).

$p_X(x=2) = \frac{5 \cdot 5 \cdot 8!}{10!} = \frac{25}{9 \cdot 10} = \frac{25}{90} = \frac{5}{18}$

Το πρώτο 5 προέκυψε απ' το γεγονός ότι στη πρώτη θέση μπορούμε να έχουμε οποιονδήποτε απ' τους 5 άντρες. Το δεύτερο 5 απ' το γεγονός ότι στη 2η θέση μπορούμε να έχουμε οποιαδήποτε απ' τις 5 γυναίκες και το 8! απ' το γεγονός ότι τα 8 άτομα που απομένουν μπορούν να τοποθετηθούν με 8! διαφορετικούς τρόπους. Με την ίδια λογική:

$$p_X(X=3) = \frac{5\cdot 4\cdot 5\cdot 7!}{10!} = \frac{10\cancel{0}}{8\cdot 9\cdot 1\cancel{0}} = \frac{10}{72}$$

$$p_X(X=4) = \frac{5\cdot 4\cdot 3\cdot 5\cdot 6!}{10!} = \frac{30\cancel{0}}{7\cdot 8\cdot 9\cdot 1\cancel{0}} = \frac{30}{504} = \frac{5}{84}$$

$$p_X(X=5) = \frac{5\cdot 4\cdot 3\cdot 2\cdot 5\cdot 5!}{10!} = \frac{60\cancel{0}}{6\cdot 7\cdot 8\cdot 9\cdot 1\cancel{0}} = \frac{60}{3024} = \frac{5}{252}$$

$$p_X(X=6) = \frac{5\cdot 4\cdot 3\cdot 2\cdot 1\cdot 5\cdot 4!}{10!} = \frac{12\cancel{0}}{6\cdot 7\cdot 8\cdot 9\cdot 1\cancel{0}} = \frac{12}{3024} = \frac{1}{252}$$

$\boxed{\text{Άσκ. 29}}$

(α) $Y = K - \Gamma$

Ο Ω είναι μία διάταξη με 2^n στοιχεία που αποτελούνται από κορώνες ή γράμματα. Η Y μπορεί να

Το ενδεχόμενο $Y=0$ προκύπτει όταν οι φορές που το κέρμα ήρθε κορώνα είναι ίσες με τις φορές που το κέρμα ήρθε γράμματα. Το ενδεχόμενο $Y \leq \kappa$, με $\mathbb{Z}^+$, μας δείχνει πως οι φορές που το κέρμα ήρθε κορώνα είναι τουλάχιστον κατά μία περισσότερες απ' τις φορές που το κέρμα ήρθε γράμματα, όταν το Y είναι μη αρνητικό και όταν το Y είναι αρνητικό ότι οι φορές που το νόμισμα ήρθε γράμματα είναι περισσότερες.

<u>Μάζα</u>

(β) Ψάχνουμε το $p_Y(Y=y)$ για $n=4$, $y \in S$

$\Omega = 2^4 = 16$ (2 γράμματα από 4 με επανάληψη)

$$P_Y(Y=-4) = P(\text{"}\Gamma_1\Gamma_2\Gamma_3\Gamma_4\text{"}) = \frac{1}{16}$$

$$p_X(Y=-2) = P(\text{"}\Gamma_1\Gamma_2\Gamma_3K_4\text{"}) + P(\text{"}\Gamma_1\Gamma_2K_3\Gamma_4\text{"}) + P(\text{"}\Gamma_1K_2\Gamma_3\Gamma_4\text{"}) + P(\text{"}K_1\Gamma_2\Gamma_3\Gamma_4\text{"}) = \frac{1}{16}+\frac{1}{16}+\frac{1}{16}+\frac{1}{16} = \frac{4}{16} = \frac{1}{4}$$

$$P_X(Y=0) = P(\text{"}\Gamma_1\Gamma_2K_3K_4\text{"}) + P(\text{"}\Gamma_1K_2\Gamma_3K_4\text{"}) + P(\text{"}\Gamma_1K_2K_3\Gamma_4\text{"}) + P(\text{"}K_1K_2\Gamma_3\Gamma_4\text{"}) + P(\text{"}K_1\Gamma_2K_3\Gamma_4\text{"}) + P(\text{"}K_1\Gamma_2\Gamma_3K_4\text{"}) = \frac{6}{16} = \frac{3}{8}$$

$P_y(Y=-3)=0$

$P_y(Y=-1)=0$

$P_y(Y=1)=0$

$P_y(Y=2)=P(\text{"}K_1K_2K_3\Gamma_4\text{"})+P(\text{"}K_1K_2\Gamma_3K_4\text{"})+P(\text{"}K_1\Gamma_2K_3K_4\text{"})$
$+P(\text{"}\Gamma_1K_2K_3K_4\text{"})=\frac{4}{16}=\frac{1}{4}$

$P_y(Y=3)=0$

$P_y(Y=4)=P(\text{"}K_1K_2K_3K_4\text{"})=\frac{1}{16}$

(δ)' <u>Μάζα</u>

Ψάχνουμε το $P_X(Y=y)$, $y\in S$, για $n=5$

$\Omega=2^5=32$

$P_y(Y=-5)=P(\text{"}\Gamma_1\Gamma_2\Gamma_3\Gamma_4\Gamma_5\text{"})=1/32$

$P_y(Y=-4)=0$

$P_y(Y=-3)=P(\text{"}\Gamma_1\Gamma_2\Gamma_3\Gamma_4K_5\text{"})+P(\text{"}\Gamma_1\Gamma_2\Gamma_3K_4\Gamma_5\text{"})+P(\text{"}\Gamma_1\Gamma_2K_3\Gamma_4\Gamma_5\text{"})+$
$P(\text{"}\Gamma_1K_2\Gamma_3\Gamma_4\Gamma_5\text{"})+P(\text{"}K_1\Gamma_2\Gamma_3\Gamma_4\Gamma_5\text{"})=5/32$

$P_y(Y=-2)=0$

$P_y(Y=-1)=10/32$ ⊛

$P_y(Y=0)=0$

$P_y(Y=1)=10/32$

$P_y(Y=2)=0$

$P_y(Y=3)=5/32$

$P_y(Y=4)=0$

$P_y(Y=5)=1/32$

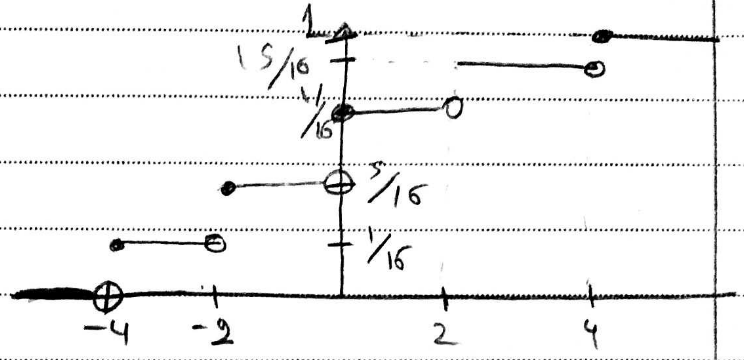
⊛ Ψάχνουμε τους τρόπους που μπορούμε να διατάξουμε 2Κ και 3Γ ανά 5, δηλ. $\mu_1=2$, $\mu_2=3$, $\mu=5$ επομένως $=\frac{5!}{3!\,2!}$ $=10$

και λόγω συμμετρίας θα είναι και $P_x(Y=1)=10/32$

ασκ. 29 συνέχεια: Κατανομή

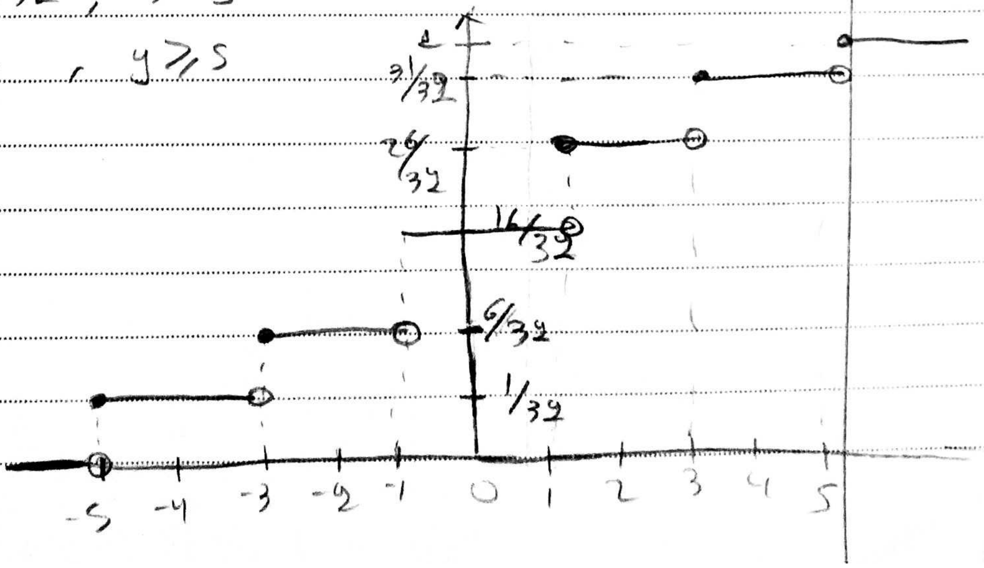
(β)

$$F_Y(y)=\begin{cases} 0, & y<-4 \\ 1/16 & -4\le y<-2 \\ 1/16+4/16=5/16 & -2\le y<0 \\ 11/16 & 0\le y<2 \\ 15/16 & 2\le y<4 \\ 1 & y\ge 4 \end{cases}$$



(γ)

$$F_Y(y)=\begin{cases} 0, & y<-5 \\ 1/32, & -5\le y<-3 \\ 6/32, & -3\le y<-1 \\ 16/32, & -1\le y<1 \\ 26/32, & 1\le y<3 \\ 31/32, & 3\le y<5 \\ 1, & y\ge 5 \end{cases}$$



$\boxed{\text{ασκ. 30}}$

(α) $\Omega = \binom{20}{3} = \frac{20!}{3!\,17!} = \frac{18 \cdot 19 \cdot 20}{6} = 1140$

Άρα ο δειγματικός χώρος περιλαμβάνει 1140 αποτελέσματα

(β) Για $x < 3$:

$F_X(x) = 0$ (αφού η μικρότερη δυνατή τιμή που μπορεί να πάρει το x είναι 3)

Για $x > 20$:

$F_X(x) = 1$

Για $3 \leq x \leq 20$

$F_X(x) = P(X \leq x) = P(Y \leq \lfloor x \rfloor) = \binom{\lfloor x \rfloor}{3} \Big/ \binom{20}{3}$

(γ) $p_X(x)$, $x = 1, 2, \ldots, 20$

Η μικρότερη τιμή του X είναι 3 και η μεγαλύτερη η 20. Άρα $S_X = \{3, 4, \ldots, 20\}$

Για να βρούμε τις επιλογές του $X = x$ χρειαζόμαστε τη μπάλα x και άλλες 2 μπάλες, από τις $x-1$.

Άρα έχουμε $\binom{x-1}{2}$ τρόπους.

Άρα $p_X(x) = \binom{x-1}{2} \Big/ \binom{20}{3}$, για $x = 3, 4, \ldots, 20$

(δ) Για $x = 17$ έχουμε

$p_X(17) = \binom{16}{2} \Big/ \binom{20}{3} = \frac{\frac{16!}{2!\,14!}}{1140} = \frac{15 \cdot 16}{2280} = \frac{240}{2280} =$

$= 0{,}1052$ ή $10{,}52\%$