ΠΕΤΣΑ ΓΕΩΡΓΙΑ
ΑΜ: 3200155

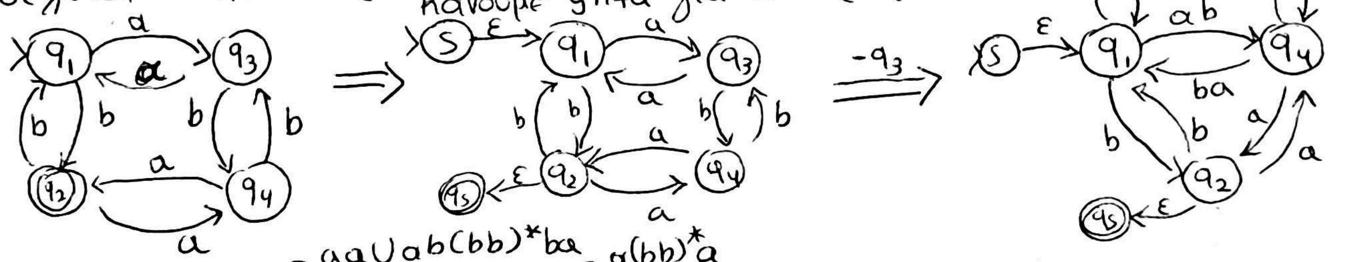
Λύση 1

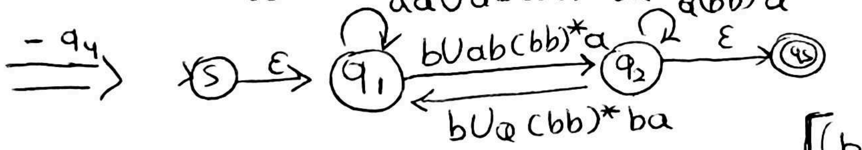
(α) Άρτιο πλήθος από a, σημαίνει ότι μπορούμε να έχουμε 0, 2, 4... a. Δηλαδή έχουμε είτε 0 a είτε πολ/σια του 2. Οπότε η κανονική έκφραση θα είναι: $b^* \cup (b^* a b^* a b^*)^* \equiv$
$\equiv (b^* a b^* a)^* b^*$

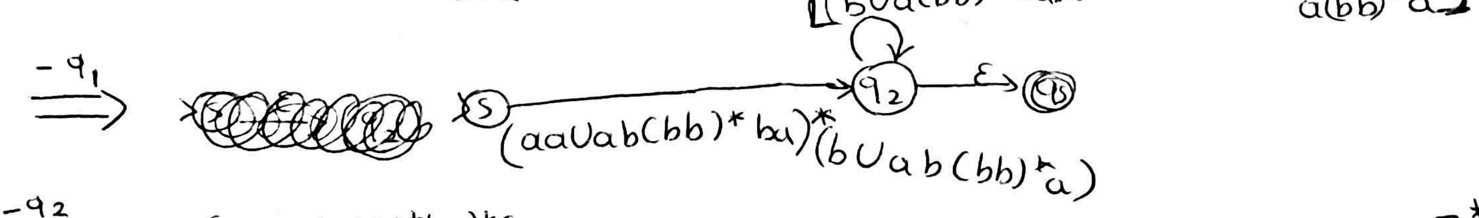
(β) Περιττό πλήθος από b σημαίνει ότι πρέπει να έχουμε 1, 3, 5 b. [illegible] είναι περιττό, μπορεί να γραφεί σε μορφή $2i+1$, οπότε με βάση αυτή τη λογική η κανονική έκφραση είναι η εξής:
$(a^* b a^* b a^* \cup a)^* b a^*$

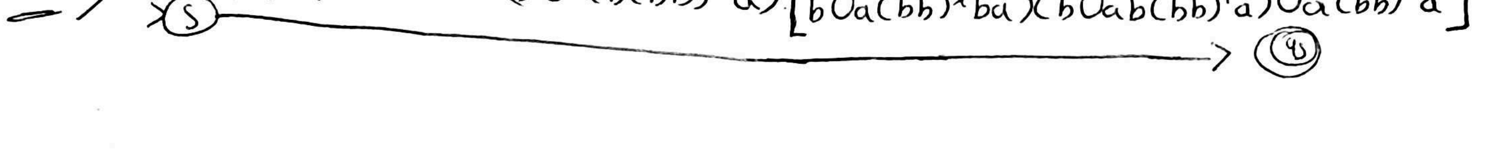
(γ) Για να βρούμε είτε άρτιο αριθμό από a είτε περιττό από b θα πάρουμε την ένωση των a και b, δηλαδή:
$(b^* a b^* a)^* b^* \cup (a^* b a^* b a^* \cup a)^* b a^*$

(1δ, 2)
Για να βρούμε την Κ.Ε. κατασκευάζουμε αυτόματο που θα δέχεται την παραπάνω γλώσσα. Οπότε έχουμε:
Κάνουμε gnfa για να βρούμε την ΚΕ







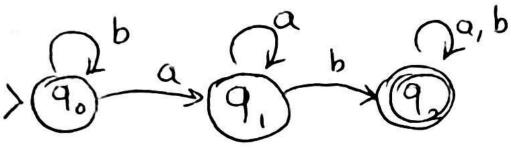


Άσκηση 2

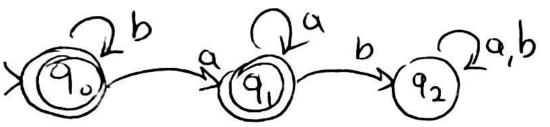
(a) $\{x \mid$ το x δεν περιέχει την υποσυμβολοσειρά $a\}$

Άρα ζητάμε την κανονική έκφραση που περιέχει μόνο b. Επομένως θα έχουμε η κ.ε. είναι η b^*

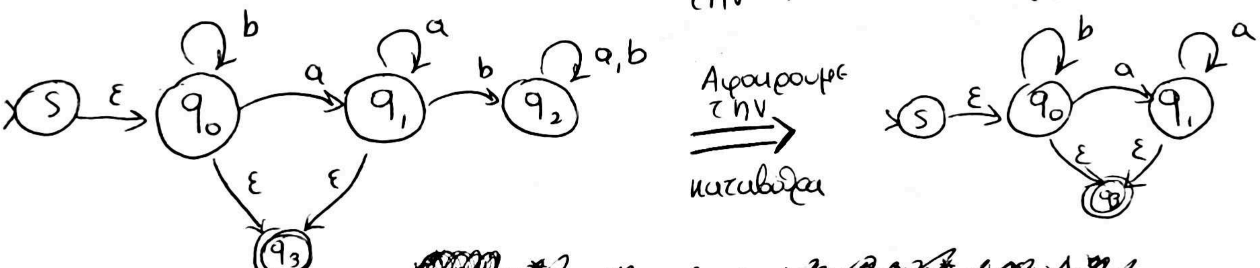
(β) $\{x \mid$ το x δεν περιέχει την υποσυμβολοσειρά $ab\}$. Αρχική σκέψη είναι να φτιάξουμε ένα αυτόματο, το οποίο να αποδέχεται την ab:

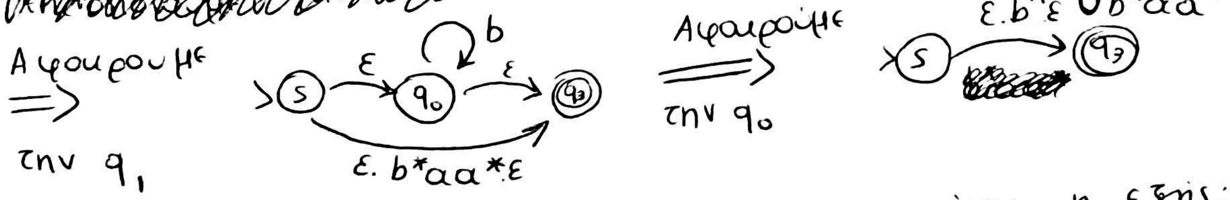


Στην συνέχεια, αλλάζουμε τις τελικές καταστάσεις, ώστε το αυτόματο να <u>μην</u> αποδέχεται την ab. Έχουμε:



Έπειτα, δημιουργούμε το αντίστοιχο GNFA ώστε μέσω αυτού να βρούμε την κανονική έκφραση. Έχουμε δηλαδή:



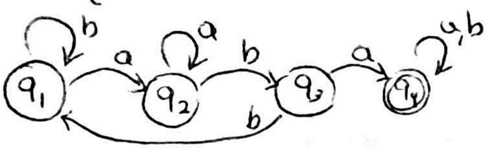


Άρα η κανονική έκφραση που προκύπτει είναι η εξής:

$$b^* \cup b^*aa^* \equiv b^*a^*$$

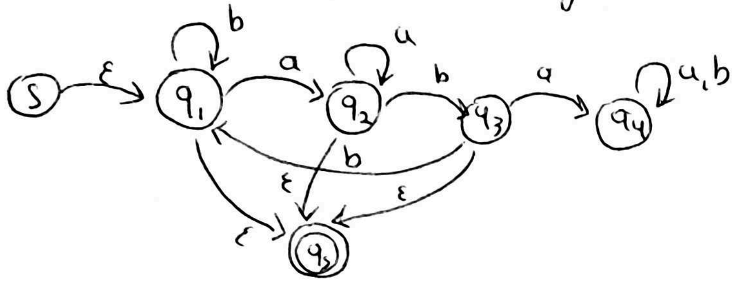
(γ) Αρχικά δημιουργούμε το αυτόματο που αποδέχεται τη συμβολοσειρά aba:

(

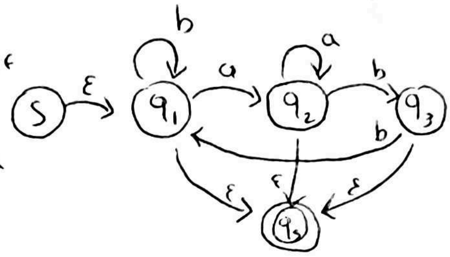


Έπειτα, αλλάζουμε τις τελικές καταστάσεις έτσι ώστε να μην αποδέχεται την aba και δημιουργούμε το gnfa για να βρούμε την τελική κανονική έκφραση.

i

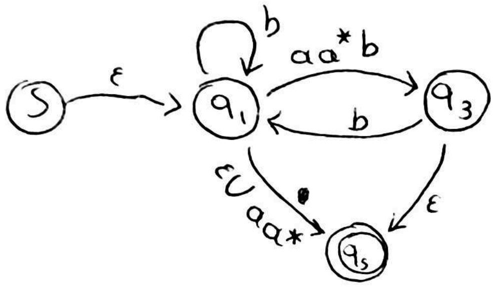


Αφαιρούμε την καταβόθρα $\Longrightarrow$

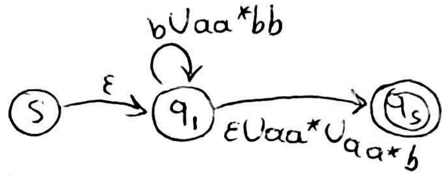


ii

Αφαιρούμε την q_2 $\Longrightarrow$

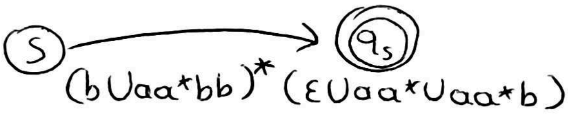


Αφαιρούμε την q_3 $\Longrightarrow$



v

Αφαιρούμε την q_1 $\Longrightarrow$



v)

Άρα η κανονική έκφραση που δεν περιέχει την συμβολοσειρά aba είναι η: $(b \cup aa^*bb)^*(\varepsilon \cup aa^* \cup aa^*b)$

Άσκηση 3

(i) Η $(0 \cup 1)^*$ <u>δεν</u> είναι ισοδύναμη με την $0^* \cup 1^*$. Έστω η συμβολοσειρά 00100. Αυτή, ανήκει στη πρώτη κανονική έκφραση αλλά όχι στη δεύτερη.

(ii) Η $0(120)^*12$ <u>είναι</u> ισοδύναμη με την $01(201)^*2$. Απόδειξη:

- $0(\underbrace{1}_{a}\underbrace{20}_{b})^*\underbrace{12}_{a} \equiv 012(012)^*$, με βάση τον κανόνα $(ab)^*a \equiv a(ba)^*$
- $01(\underbrace{20}_{a}\underbrace{1}_{b})^*\underbrace{2}_{a} \equiv 012(012)^*$, -//-

(iii) Η $\emptyset^*$ είναι ισοδύναμη με το ε^*, αφού
$\emptyset^* \equiv \varepsilon^* \equiv \varepsilon$, και $\varepsilon^* \equiv \varepsilon$

(iv) $(0^*1^*)^*$ <u>δεν</u> είναι ισοδύναμη με την $(0^*1)^*$
γιατί η συμβολοσειρά 0 ανήκει στην πρώτη κανονική έκφραση, αλλά όχι στη δεύτερη.

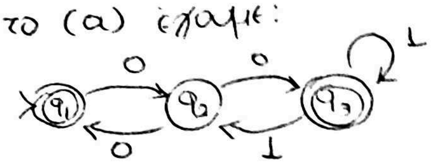
(v) Η $(01 \cup 0)^*0$ είναι ισοδύναμη με την $0(10 \cup 0)^*$ αυτό γιατί:
- $(01 \cup 0)^*0 \equiv (\underbrace{0}_{a}\underbrace{1}_{b})^*\underbrace{0}_{a} \cup 0^*0 \equiv 0(10)^* \cup 0^*0$
  ↳ με βάση το: $(ab)^*a \equiv a(ba)^*$

και

- $0(10 \cup 0)^* \equiv 0(10)^* \cup \underbrace{0}_{a}\underbrace{0^*}_{a} \equiv 0(10)^* \cup 0^*0$
  ↳ με βάση το $aa^* \equiv a^*a$

Λυση 4

Για το (α) έχουμε:

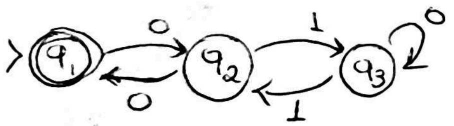


Για να φτάσουμε σε κατάσταση αποδοχής q_1 χρειαζόμαστε την ε, είτε 001^*10. Για να φτάσουμε στην q_3, μπορούμε να πάμε είτε με 00 είτε με 001^*. Ενώνοντας λοιπόν όλα τα παραπάνω έχουμε: $\varepsilon \cup 00 \cup 001^* \cup 001^*10$. (1) Ο τρόπος σκέψης που ακολούθησα για να βρω τη σωστή απάντηση είναι ο εξής: Βλέπουμε ότι στην (i) $\varepsilon \cup 0(01^*1 \cup 00)^*01^*$ απάντηση έχουμε όλους τους συνδυασμούς που ζητάμε από τη σχέση 1, δηλαδή:

- Το ε προφανώς υπάρχει,
- Το 00 το "παίρνουμε" αφού στη σχέση είναι: $\varepsilon \cup \underline{0}(01^*1 \cup 00)^* \underline{01^*}$, δηλ. μπορούμε να έχουμε 0, έπειτα καμία φορά την έκφραση μέσα στη παρένθεση, έπειτα πάλι 0, και τέλος καμία φορά τον άσσο.
- Το 001^* το "παίρνουμε" με τον ίδιο τρόπο από: $\varepsilon \cup \underline{0}(01^*1 \cup 00)^* \underline{01^*}$
- Το 001^*10, επίσης από $\varepsilon \cup \underline{0}(\underline{01^*1} \cup 00)^* \underline{0}1^*$

{i→a}

Για το (β) έχουμε:



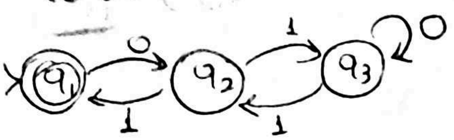
Για να φτάσουμε στην q_1 χρειαζόμαστε: είτε ε, είτε $(00)^*$ είτε 010^*10. Συνολικά λοιπόν έχουμε $\varepsilon \cup (00)^* \cup (010^*10)$. Από τις επιλογές που έχουμε παρατηρούμε ότι στην (iii) καλύπτουμε τα ζητούμενα.

Δηλαδή:

- Το ε προφανώς υπάρχει
- Το $(00)^*$ το "παίρνουμε" αφού $\varepsilon \cup 0(10^*1 \cup \underline{00})^*0$
- Το (010^*10) το "παίρναμε" αφού $\varepsilon \cup \underline{0}(\underline{10^*1} \cup 00)^*\underline{0}$

Άρα {b→iii}

Για το (c):



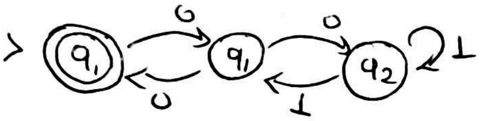
Παρατηρούμε ότι για να φτάσουμε στην q_1 χρειαζόμαστε είτε ε, είτε $(01)^*$ είτε $(010^*11)^*$. Συνολικά: $\varepsilon \cup (01)^* \cup (010^*11)^*$ (2)

Έχουμε λοιπόν ότι (v) $\varepsilon \cup 0(10^*1 \cup 10)^*1$, το οποίο καλύπτει την σχέση(2):

- Το ε προφανώς υπάρχει
- Το $(01)^*$ το "παίρνουμε", ~~αλλά~~ αφού $\varepsilon \cup \underline{0}(10^*1 \cup 10)^*\underline{1}$ ή $\varepsilon \cup \underline{0}(10^*1 \cup \underline{10})^*\underline{1}$, δηλ. παίρνουμε το πρώτο 0, ύστερα το 10 όσες φορές θέλουμε και τέλος το 1, δημιουργείται έτσι το $0(10)^*1 \equiv 01(01)^*$
- Το $(010^*11)^*$ το παίρνουμε, αφού $\varepsilon \cup \underline{0(10^*1} \cup 10)^*\underline{1}$

Άρα $\{c \to v\}$

Για το (d):



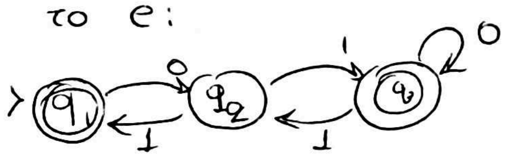
Παρατηρούμε ότι για να φτάσουμε στη q_1 έχουμε: είτε ε, είτε $(00)^*$, είτε $(001^*10)^*$. Συνολικά λοιπόν: $\varepsilon \cup (00)^* \cup (001^*10)^*$ (3)

Για το (iv) έχουμε: $\varepsilon \cup 0(01^*1 \cup 00)^*0$, το οποίο καλύπτει την σχέση(3) αφού:

- Το ε προφανώς υπάρχει
- Το $(00)^*$ το "παίρνουμε" είτε ~~από~~ από $\varepsilon \cup \underline{0}(01^*1 \cup 00)^*\underline{0}$ είτε από $\varepsilon \cup 0(01^*1 \cup \underline{00})^*0$
- Το $(001^*10)^*$ το "παίρνουμε" από: $\varepsilon \cup \underline{0(01^*1} \cup 00)^*\underline{0}$

Άρα $\{d \to iv\}$

Για το e:



Για να φτάσουμε σε q_1 έχουμε: είτε ε, είτε $(01)^*$ είτε $(010^*11)^*$. Για να φτάσουμε σε q_3 έχουμε: είτε 01 είτε 010^*. Συνολικά δηλαδή: $\varepsilon \cup (01)^* \cup (010^*) \cup (010^*11)^*$ (4)

Η επιλογή (ii) παρατηρούμε ότι ικανοποιεί τη σχέση (4) αφού:

- Το ε προφανώς υπάρχει
- Το $(01)^*$ το "παίρνουμε" είτε $\varepsilon \cup \underline{0}(10^*1 \cup 10)^*\underline{10^*}$ είτε $\varepsilon \cup \underline{0} \cup (10^*1 \cup \underline{10})^*\underline{10^*}$

• Το 0010^* το "παίρνουμε" αφού: $\varepsilon \cup \underline{0}(10^* 1 \cup 10) + \underline{10^*}$

• Το $(0 10^* 11)^*$ το "παίρνουμε" αφού $\varepsilon \cup \underline{0}(\underline{10^* 1} \cup 10)\underline{+1}0^*$

Άρα $(e \to ii)$

Λύση 6

Υποθέτουμε ότι η L είναι κανονική. Από το λήμμα της άντλησης έχουμε ότι: • $\forall i > 0$, $xy^i z \in L$ • $|y| > 0$ • $|xy| \leq p$, όπου p το μήκος της άντλησης. Έστω s η συμβολοσειρά a^{p^2}. Η $s \in L$ και έχει μήκος προφανώς $\geq p$. Το λήμμα της άντλησης εξασφαλίζει ότι μπορούμε να χωρίσουμε την s σε $xy^i z$, $\forall i \geq 0$ και η s να συνεχίζει να ανήκει.

Έστω ότι έχουμε $i = 1$ και $i = 2$, δηλαδή παίρνουμε τις συμβολοσειρές που χωρίζονται ως xyz και $xy^2 z$.

Παρατηρούμε ότι $|xy| \leq p$ (από λήμμα άντλησης), άρα και $0 < |y| \leq p$. Επίσης $|xyz| = p^2$ και $|xy^2 z| \leq p^2 + p$ (αφού $|y| \leq p$). Τώρα, $p^2 + p \leq p^2 + 2p + 1$ $\Rightarrow p^2 + p < (p+1)^2$. (1) Επίσης, η y δεν μπορεί να είναι η ε (αφού $|y| > 0$), οπότε συμπεραίνουμε ότι $|xy^2 z| > p^2$. (2) Άρα έχουμε ότι από (1), (2) $p^2 < |xy^2 z| < (p+1)^2$

Που σημαίνει ότι το μήκος της $xy^2 z$ βρίσκεται ανάμεσα σε 2 διαδοχικά τέλεια τετράγωνα, που σημαίνει ότι το μήκος της ίδιας δεν μπορεί να είναι τέλειο τετράγωνο. Άρα η λέξη δεν ανήκει στη γλώσσα, δηλαδή έχουμε οδηγηθεί σε άτοπο. Συνεπώς, η L δεν είναι κανονική γλώσσα.

Άσκηση 5

(2) $L_2 = \{x\$y \mid x, y \in \{a, b\}^*$, το πλήθος των a στη x^{ν} ισούται με το πλήθος των b στην y $\}$

Έστω η λέξη $s = a^p \$ b^p$, όπου p το μήκος της άντλησης, και έστω πως η L_2 είναι κανονική. Από το pumping lemma έχουμε ότι $\forall i \geq 0$ $x.y^i.z$ χωρισμός της s, πρέπει $\in L_2$, $|y| > 0$ και $|xy| \leq p$. Για να ισχύει ότι $|xy| \leq p$ πρέπει αναγκαστικά το y να βρίσκεται στα a. (αλλιώς $|xy| > p$) Άρα $y = a^r$, όπου $r \in \mathbb{N}$ (και $r \geq 1$ για να ισχύει $|y| \neq \varepsilon$) πρέπει δηλαδή $xy^iz \in L_2$ $\forall i \geq 0$. Όμως, για $i = 2$ έχουμε $xyyz = a^{p-r} a^r a^r \$ b^p$, που σημαίνει ότι η λέξη περιέχει περισσότερα a από ότι b. Άρα $\notin L_2$

Επομένως η L_2 δεν είναι κανονική, αφού έχουμε οδηγηθεί σε άτοπο.