

ΑΛΓΟΡΙΘΜΟΙ–Εαρινό εξάμηνο 2022

Ομάδα Ασκήσεων #1

Άσκ. 1 (Βαθ. 1) Βάλτε τις παρακάτω συναρτήσεις σε σειρά, f_1, f_2, f_3, \dots , ώστε να ισχύει $f_i = O(f_{i+1})$. Δεν χρειάζεται να αιτιολογήσετε την απάντησή σας.

$$n!, (\log n)^9, \sqrt[9]{n}, n^{\log n}, 2^{(\log n)^2}, n^n, (\log n)^{\log n}, n \log_9 n, n \log(\log n)^9, \sqrt{n}^n, 2^{n \log n}, n^{\sqrt{n}}.$$

Άσκ. 2 (Βαθ. 1) Για κάθε μία από τις παρακάτω περιπτώσεις αναδρομικού ορισμού της $T(n)$ (με $T(1) = O(1)$) δώστε συνάρτηση f (την καλύτερη που μπορείτε) ώστε $T(n) = O(f)$. Εξηγήστε τις παραμέτρους εφαρμογής του Master Theorem.

$$\begin{aligned} T(n) &= T(n/2) + O(n), & T(n) &= T(n/2) + O(1), & T(n) &= 2T(n/2) + O(1), \\ T(n) &= 4T(n/2) + O(n^2), & T(n) &= 4T(n/2) + O(n^3), & T(n) &= 4T(n/2) + O(n). \end{aligned}$$

Άσκ. 3 (Βαθ. 3) Εξηγήστε τι κάνει ο παρακάτω αλγόριθμος και αποδείξτε την ορθότητά του διατυπώνοντας αναλλοίωτη για τον βρόχο στις γραμμές 2–5.

```
A(a, b) // θετικοί ακέραιοι a, b
1  p ← 0
2  while a > 0
3      if a mod 2 = 1 then p ← p + b
4      a ← ⌊a/2⌋
5      b ← 2b
6  return p
```

Άσκ. 4 (Βαθ. 3) Δίνεται πίνακας A με n στοιχεία. Ένα στοιχείο του ονομάζεται a -δημοφιλές, αν εμφανίζεται τουλάχιστον an φορές. Μεταξύ των στοιχείων δεν υπάρχει διάταξη και δεν ορίζονται πράξεις (δεν μπορείτε να κάνετε συγκρίσεις ή αριθμητικές πράξεις μεταξύ των στοιχείων), μπορείτε όμως να ελέγξετε αν δύο στοιχεία είναι ίσα. Σχεδιάστε αλγόριθμο με την τεχνική διαιρεί και βασίλευε που βρίσκει όλα τα a -δημοφιλή στοιχεία του A . Ποια είναι η πολυπλοκότητα του αλγορίθμου σας;

Άσκ. 5 (Βαθ. 2) Δίνονται αριθμοί x_1, x_2, \dots, x_{2n} . Σχεδιάστε αλγόριθμο που τους χωρίζει σε ζεύγη ώστε να ελαχιστοποιείται το μέγιστο άθροισμα των ζευγών. Αποδείξτε αυστηρά ότι ο αλγόριθμός σας βρίσκει τη βέλτιστη διαμέριση σε ζεύγη.

Προθεσμία: 8 Απριλίου