ΠΕΤΣΑ ΓΕΩΡΓΙΑ
ΑΜ: 3200155

ΕΡΓΑΣΙΑ 1

ασκ. 1

$(a,b) \in S \Leftrightarrow |a-b| \leq 5$

Μια σχέση είναι σχέση ισοδυναμίας ανν είναι αυτοπαθής, συμμετρική και μεταβατική

- Αυτοπαθής

$aSa \Leftrightarrow |a-a| \leq 5 \Leftrightarrow |0| \leq 5 \Leftrightarrow 0 \leq 5$ που ισχύει

- Συμμετρική

$aSb \Rightarrow bSa$:

$aSb \Rightarrow |a-b| \leq 5 \Rightarrow |-b+a| \leq 5 \Rightarrow |-(b-a)| \leq 5 \Rightarrow |b-a| \leq 5 \Rightarrow bSa$

άρα είναι συμμετρική.

- Μεταβατική

$aSb,\ bSc \Rightarrow aSc$

Έστω το σύνολο $A = \{1, 2, 7\}$ και η σχέση S που ορίζεται στο A.
Έχουμε ότι $a=1$, $b=2$, $c=7$. Ισχύει ότι $|1-2| \leq 5 \Rightarrow 1 \leq 5 \rightarrow$ ισχύει άρα $1S2$
$|2-7| \leq 5 \Rightarrow 5 \leq 5 \rightarrow$ ισχύει άρα $2S7$ όμως $|1-7| \leq 5 \Rightarrow 6 \leq 5$ $\downarrow$ Δεν ισχύει.

Άρα $1S7$ δεν ισχύει, οπότε η σχέση S δεν είναι μεταβατική.
Επομένως η S δεν είναι σχέση ισοδυναμίας.

ασκ. 3

$(x,y) \in S \Leftrightarrow x^2 \equiv y^2$ δηλαδή $x^2 - y^2 = 4m$

(α')
- Η S είναι αυτοπαθής. Πράγματι $x^2 - x^2 = 0$
- Η S είναι συμμετρική:

$x \equiv_4 y \Rightarrow x^2 - y^2 = 4m \Rightarrow -x^2 + y^2 = -4m \Rightarrow y^2 - x^2 = 4(-m) \Rightarrow y \equiv_4 x$

- Η S είναι μεταβατική

Έστω $x \equiv_4 y \Rightarrow x^2 - y^2 = 4m_1$ (1)
Έστω $y \equiv_4 z \Rightarrow y^2 - z^2 = 4m_2$ (2)

Προσθέτουμε τις (1), (2) και έχουμε: $x^2 - y^2 + y^2 - z^2 = 4(m_1 + m_2)$
$= x^2 - z^2 = 4(m_1 + m_2) \Rightarrow x \equiv_4 z$

Αφού η S είναι σχέση ισοδυναμίας, μπορούν να κατασκευαστούν οι κλάσεις ισοδυναμίας $[a]_S = \{ b \in \mathbb{Z} : aSb \}$

$[0]_{\equiv_4} = \{ x \in \mathbb{Z} \mid 0^2 - y^2 = 4m, m \in \mathbb{Z} \} = \{0, 2, -2, 4, -4, 6, -6 \ldots\}$

$[1]_{\equiv_4} = \{ x \in \mathbb{Z} \mid 1^2 - y^2 = 4m, m \in \mathbb{Z} \} = \{1, -1, 3, -3, 5, -5 \ldots\}$

$[2]_{\equiv_4} = \{ x \in \mathbb{Z} \mid 2^2 - y^2 = 4m, m \in \mathbb{Z} \} = \{0, 4, -4, 6, -6 \ldots\}$

Παρατηρώ ότι $[0]_{\equiv_4} = [2]_{\equiv_4}$, επομένως οι κλάσεις ισοδυναμίας θα είναι η $[0]_{\equiv_4}$ και η $[1]_{\equiv_4}$

ασκ. 4

Ισχύουν $\begin{cases} xSx & \forall x \in A \\ xSy,\ ySz \Rightarrow xSz \end{cases}$

$$(x,y) \in R \Leftrightarrow \underbrace{(x,y) \in S}_{xSy} \text{ και } \underbrace{(y,x) \in S}_{ySx}$$

- Η R είναι αυτοπαθής. Πράγματι
  xSx και xSx άρα $(x,x) \in R$
- Η R είναι συμμετρική. Πράγματι
  xSy και ySx
- Η R είναι μεταβατική. Πράγματι
  xSy και $ySz \Rightarrow xSz$
  zSy και $ySx \Rightarrow zSx$

Άρα η S είναι σχέση ισοδυναμίας.

ασκ. 5

Για να είναι μερικής διάταξης θα πρέπει να είναι αυτοπαθής, αντισυμμετρική και μεταβατική. Ισχύουν ότι P_1 και P_2 είναι μερικής διάταξης.

- Η $P_1 \cup P_2$ είναι αυτοπαθής. Πράγματι:
  $(a,a) \in (P_1 \cup P_2) \Rightarrow a \in P_1$ ή $a \in P_2$ που ισχύει

• Η $P_1 \cup P_2$ δεν είναι αντισυμμετρική ($(x,y) \in (P_1 \cup P_2)$ και $(y,x) \in (P_1 \cup P_2) \Rightarrow x = y$ δεν ισχύει)

Έστω οι σχέσεις P_1, P_2 που ορίζονται στο $A = \{1, 2, 3\}$

$P_1 = \{(1,1), (2,2), (3,3), (1,2)\}$, $P_2 = \{(1,1)(2,2)(3,3), (2,1)\}$

Άρα οι P_1 και P_2 είναι μερικής διάταξης. Έστω τώρα η $P_1 \cup P_2 = \{(1,1)(2,2), (3,3), (1,2), (2,1)\}$ Επειδή $(1,2) \in (P_1 \cup P_2)$ και $(2,1) \in (P_1 \cup P_2)$, για να ήταν αντισυμμετρική θα έπρεπε $1=2$, που δεν ισχύει

• Η $P_1 \cup P_2$ δεν είναι μεταβατική ($(x,y) \in (P_1 \cup P_2)$ και $(y,z) \in (P_1 \cup P_2) \Rightarrow (x,z) \in (P_1 \cup P_2)$ δεν ισχύει)

Έστω οι σχέσεις P_1, P_2 που ορίζονται στο $A = \{1, 2, 3\}$

$P_1 = \{(1,1), (2,2), (3,3), (1,2)\}$ και $P_2 = \{(1,1), (2,2), (3,3), (2,3)\}$

Άρα οι P_1 και P_2 είναι μερικής διάταξης. Έστω τώρα η $P_1 \cup P_2 = \{(1,1), (2,2), (3,3), (1,2), (2,3)\}$. Έχουμε ότι $(1,2) \in (P_1 \cup P_2)$ και $(2,3) \in (P_1 \cup P_2)$ όμως το $(3,1) \notin (P_1 \cup P_2)$, άρα η $P_1 \cup P_2$ δεν είναι μεταβατική.

Άρα η $P_1 \cup P_2$ δεν είναι σχέση μερικής διάταξης

ασκ. 7

$\neg p \to (q \to r)$ $\quad\quad$ $q \to (p \vee r)$

p	q	r	$\neg p$	$q \to r$	$\neg p \to (q \to r)$	$p \vee r$	$q \to (p \vee r)$
Α	Α	Α	Ψ	Α	Α	Α	Α
Α	Α	Ψ	Ψ	Ψ	Α	Α	Α
Α	Ψ	Α	Ψ	Α	Α	Α	Α
Ψ	Α	Α	Α	Α	Α	Α	Α
Α	Ψ	Ψ	Ψ	Α	Α	Α	Α
Ψ	Α	Ψ	Α	Ψ	Ψ	Ψ	Ψ
Ψ	Ψ	Α	Α	Α	Α	Α	Α
Ψ	Ψ	Ψ	Α	Α	Α	Ψ	Α

Άρα οι $\neg p \to (q \to r)$ και $q \to (p \vee r)$ είναι ταυτολογικά ισοδύναμοι.

αση. 6

$(p, q) \in S \Leftrightarrow p \wedge q$

• αυτοπαθής

$(p,p) \in S \Rightarrow p \wedge p$

p	p	p^p
A	A	A
Ψ	Ψ	Ψ

Αρα δεν είναι αυτοπαθής διότι δεν ορίζεται αποτίμηση που να κάνει το p^p ψευδή

• Συμμετρική

$(p, q) \in S \Rightarrow (q, p) \in S$

p	q	p^q	q^p
A	A	A	A
Ψ	A	Ψ	Ψ
Ψ	Ψ	Ψ	Ψ
A	Ψ	Ψ	Ψ

Άρα είναι συμμετρική αφού κάθε αποτίμηση που κάνει τον p, q Αληθή κάνει και τον p^q αληθή και τον q^p αληθή

• Μεταβατική

$(p, q) \in S$ και $(q, z) \in S$ τότε $(p, z) \in S$

p	q	z	p^q	q^z	p^z
A	A	A	A	A	A
A	A	Ψ	A	Ψ	Ψ
A	Ψ	A	Ψ	Ψ	A
Ψ	A	A	Ψ	A	Ψ
A	Ψ	Ψ	Ψ	Ψ	Ψ
Ψ	A	Ψ	Ψ	Ψ	Ψ
Ψ	Ψ	A	Ψ	Ψ	Ψ
Ψ	Ψ	Ψ	Ψ	Ψ	Ψ

Άρα είναι μεταβατική αφού κάθε αποτίμηση που κάνει ταυτόχρονα και τον p, και τον q και τον z Αληθή, κάνει και τον p^q και τον q^z και τον p^z αληθή.

άσκ. 8

P_0	P_1	P_2	$P_1 \leftrightarrow P_2$	$P_0 \rightarrow (P_1 \leftrightarrow P_2)$	$\neg(P_0 \rightarrow (P_1 \leftrightarrow P_2))$
Α	Α	Α	Α	Α	Ψ
Α	Α	Ψ	Ψ	Ψ	Α
Α	Ψ	Α	Ψ	Ψ	Α
Ψ	Α	Α	Α	Α	Ψ
Α	Ψ	Ψ	Α	Α	Ψ
Ψ	Α	Ψ	Ψ	Α	Ψ
Ψ	Ψ	Α	Ψ	Α	Ψ
Ψ	Ψ	Ψ	Α	Α	Ψ

Άρα ο προτασιακός τύπος σε κανονική διαζευκτική μορφή που είναι ταυτολογικά ισοδύναμος με τον $\neg(P_0 \rightarrow (P_1 \leftrightarrow P_2))$ είναι :

$$\phi = (P_0 \wedge P_1 \wedge \neg P_2) \vee (P_0 \wedge \neg P_1 \wedge P_2)$$

άσκ. 2 Έστω το σύνολο $A = \{1,2,3\}$ και

$S = \{(1,2), (2,1), (1,1), (2,2)\}$

Η S είναι συμμετρική και μεταβατική, όχι όμως αυτοπαθής αφού δεν υπάρχει στο στοιχείο $(3,3)$ στην S