ΠΕΤΣΑ ΓΕΩΡΓΙΑ
ΑΜ: 3200155

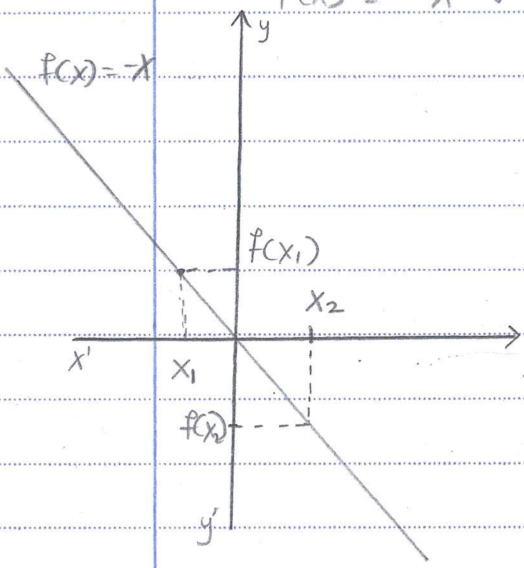
2η ΟΜΑΔΑ ΑΣΚΗΣΕΩΝ

ασκ.9

Έστω $f: A \to \mathbb{R}$ γνησίως φθίνουσα ($\downarrow$) στο $B \subseteq A$, με $x_1 < x_2$. Θα δείξουμε ότι $f(x_1) > f(x_2)$.

- Έστω $x_1 < x_2$. Τότε $\begin{cases} f(x_1) < f(x_2) \\ \text{ή} \\ f(x_1) = f(x_2) \\ \text{ή} \\ f(x_1) > f(x_2) \end{cases}$

Έστω $f(x_1) \leq f(x_2)$ με $x_1 < x_2$, και έστω η συνάρτηση $f(x) = -x \downarrow \mathbb{R}$



Γι' αυτή τη συνάρτηση έχουμε ότι για $x_1 < x_2$ ισχύει ότι $f(x_1) > f(x_2)$. Άρα η αρχική υπόθεση είναι λανθασμένη, οπότε θα έχουμε $f(x_1) > f(x_2)$ $\forall x \in B \subseteq A$
Άρα έχουμε ότι αν $x_1 < x_2$ τότε $f(x_1) > f(x_2)$ (I)

- Έστω ότι $f(x_1) > f(x_2)$. Τότε $\begin{cases} x_1 < x_2 \\ \text{ή} \\ x_1 = x_2 \\ \text{ή} \\ x_1 > x_2 \end{cases}$

Έστω $x_1 \geq x_2$ με $f(x_1) > f(x_2)$ και θεωρούμε τη συνάρτηση $f(x) = -x$, $\downarrow \mathbb{R}$. Έστω $x_1 = 2$ και $x_2 = 1$

$x_1 \geq x_2 \Rightarrow 2 \geq 1$ ισχύει

$f(x_1) > f(x_2) \Rightarrow f(2) > f(1) \Rightarrow -2 > -1 \to$ άτοπο. Άρα έχουμε ότι αν $f(x_1) > f(x_2)$ τότε $x_1 < x_2$ (II)

Από τις (I), (II) έχουμε ότι αν $f: A \to \mathbb{R}$, $f \downarrow$ ισχύει η συνεπαγωγή $x_1 < x_2 \Leftrightarrow f(x_1) > f(x_2)$

ασκ. 10

Έστω η $f(x) = \begin{cases} 1, & x \in \mathbb{R}-\mathbb{Q} \\ 0, & x \in \mathbb{Q} \end{cases}$ και έστω περίοδος $p \in (0, \varepsilon)$, p ρητός

- Έστω $x \in \mathbb{R}-\mathbb{Q}$. Τότε

$\begin{cases} (x+p) \in \mathbb{R}-\mathbb{Q} \\ (x-p) \in \mathbb{R}-\mathbb{Q} \end{cases}$ (Αφού αν από έναν άρρητο, προσθέσουμε ή αφαιρέσουμε έναν ρητό το αποτέλεσμα θα είναι άρρητος)

Άρα $f(x-p) = f(x) = f(x+p) = 1$

- Έστω ότι $x \in \mathbb{Q}$. Τότε

$\begin{cases} x+p \in \mathbb{Q} \\ x-p \in \mathbb{Q} \end{cases}$ (Αφού αν σε έναν ρητό προσθέσουμε ή αφαιρέσουμε έναν ρητό, το αποτέλεσμα θα είναι ρητός)

Άρα βρήκαμε μια συνάρτηση για την οποία $\forall \varepsilon > 0$ να $\exists p \in (0, \varepsilon)$ τ.ω. $f(x-p) = f(x) = f(x+p)$, δηλ. η f είναι περιοδική με αυθαίρετα μικρές περιόδους

ασκ. 11

$f, g : B \to \mathbb{R}$ κάτω φραγμένες, άρα θα έχουν infimum. Η $f+g$ θα είναι και αυτή κάτω φραγμένη ως αποτέλεσμα πρόσθεσης κάτω φραγμένων συναρτήσεων.

Θέλουμε να δείξουμε ότι $\inf_{x \in B}(f+g) \geq \inf_{x \in B}\{f\} + \inf_{x \in B}\{g\}$

Υποθέτουμε ότι $\inf_{x \in B}\{f+g\} < \inf_{x \in B}\{f\} + \inf_{x \in B}\{g\}$

Έστω η συνάρτηση $f(x) = x^2 + 2$, $x \in \mathbb{R}$, κάτω φραγμένη από το $y = 2$ και έστω η $g(x) = x^2 + 4$, $x \in \mathbb{R}$ κάτω φραγμένη από το $y = 4$. Ισχύει δηλ. $f(x) \geq 2$ και $g(x) \geq 4$

$\inf_{x \in \mathbb{R}}\{f\} = 2$, $\inf_{x \in \mathbb{R}}\{g\} = 4$

$(f+g)(x) = f(x)+g(x) = 2x^2+6$, η οποία είναι κάτω φραγμένη από το $y=6$, δηλ. $(f+g)(x) \geq 6$ και $\inf\{f+g\}=6$

Από υπόθεση έχουμε ότι:

$$\inf_{x\in E}\{f+g\} < \inf_{x\in B}\{f\} + \inf_{x\in B}\{g\} \Rightarrow$$

$\Rightarrow 6 < 2+4 \Rightarrow 6<6 \rightarrow$ Άτοπο. Άρα έχουμε ότι $\inf_{x\in B}\{f+g\} \geq \inf_{x\in B}\{f\} + \inf_{x\in B}\{g\}$

$\boxed{\text{ασκ. 12}}$

(α΄) • $\sinh(-x) = \left(\frac{e^{-x}-e^{x}}{2}\right) = -\left(\frac{e^{x}-e^{-x}}{2}\right) = -\sinh(x)$

δηλ. $\sinh(-x) = -\sinh(x)$ Άρα περιττή

• $\cosh(-x) = \frac{e^{-x}+e^{x}}{2} = \frac{e^{x}+e^{-x}}{2} = \cosh(x)$

δηλ. $\cosh(-x) = \cosh(x)$ Άρα άρτια

• $\tanh(-x) = \frac{\sinh(-x)}{\cosh(-x)} = -\frac{\sinh(x)}{\cosh(x)} = -\tanh(x)$

δηλ. $\tanh(-x) = -\tanh(x)$ Άρα περιττή

• $\coth(-x) = \frac{\cosh(-x)}{\sinh(-x)} = -\frac{\cosh(x)}{\sinh(x)} = -\coth(x)$

δηλ. $\coth(-x) = -\coth(x)$, Άρα περιττή

(β)΄ • $\cosh^2 x = \left(\frac{e^{x}+e^{-x}}{2}\right)^2 = \frac{e^{2x}+2e^{x}e^{-x}+e^{-2x}}{4} = \frac{e^{2x}+e^{-2x}+2}{4}$ (1)

$\sinh^2 x = \left(\frac{e^{x}-e^{-x}}{2}\right)^2 = \frac{e^{2x}-2e^{x}e^{-x}+e^{-2x}}{4} = \frac{e^{2x}-2+e^{-2x}}{4}$ (2)

$(1)-(2) = \frac{\cancel{e^{2x}}+\cancel{e^{-2x}}+2-\cancel{e^{2x}}+2-\cancel{e^{-2x}}}{4} = \frac{4}{4} = 1$, το ζητούμενο.

- $\sinh x \cosh y = \left(\dfrac{e^{x}-e^{-x}}{2}\right)\cdot\left(\dfrac{e^{y}+e^{-y}}{2}\right) = \dfrac{e^{x}e^{y}+e^{x}e^{-y}-e^{-x}e^{y}-e^{-x}e^{y}}{4}$

$= \dfrac{e^{x+y}+e^{x-y}-e^{y-x}-e^{-x-y}}{4} \quad (1)$

$\cosh x \sinh y = \left(\dfrac{e^{x}+e^{-x}}{2}\right)\left(\dfrac{e^{y}-e^{-y}}{2}\right) = \dfrac{e^{x}e^{y}-e^{x}e^{-y}+e^{-x}e^{y}-e^{-x}e^{-y}}{4}$

$= \dfrac{e^{x+y}-e^{x-y}+e^{-x+y}-e^{-x-y}}{4} \quad (2)$

$(1)+(2) = \dfrac{e^{x+y}+\cancel{e^{x-y}}-\cancel{e^{y-x}}-e^{-x-y}+e^{x+y}-\cancel{e^{x-y}}+\cancel{e^{-x+y}}-e^{-x-y}}{4}$

$= \dfrac{2e^{x+y}-2e^{-x-y}}{4} = \dfrac{2\left(e^{x+y}-e^{-x-y}\right)}{4} = \dfrac{e^{x+y}-e^{-x-y}}{2}$

$= \sinh(x+y)$, το ζητούμενο

- $\cosh x \cosh y = \left(\dfrac{e^{x}+e^{-x}}{2}\right)\left(\dfrac{e^{y}+e^{-y}}{2}\right) = \dfrac{e^{x}e^{y}+e^{x}e^{-y}+e^{-x}e^{y}+e^{-x}e^{-y}}{4}$

$= \dfrac{e^{x+y}+e^{x-y}+e^{y-x}+e^{-x-y}}{4} \quad (1)$

$\sinh x \sinh y = \left(\dfrac{e^{x}-e^{-x}}{2}\right)\left(\dfrac{e^{y}-e^{-y}}{2}\right) = \dfrac{e^{x}e^{y}-e^{x}e^{-y}-e^{-x}e^{y}+e^{-x}e^{-y}}{4}$

$= \dfrac{e^{x+y}-e^{x-y}-e^{y-x}+e^{-x-y}}{4} \quad (2)$

$(1)+(2) = \dfrac{e^{x+y}+\cancel{e^{x-y}}+\cancel{e^{y-x}}+e^{-x-y}+e^{x+y}-\cancel{e^{x-y}}-\cancel{e^{y-x}}+e^{-x-y}}{4}$

$= \dfrac{2e^{x+y}+2e^{-x-y}}{4} = \dfrac{e^{x+y}+e^{-x-y}}{2} = \cosh(x+y)$, το ζητούμενο

- $2\sinh x \cosh x = 2\left(\dfrac{e^{x}-e^{-x}}{2}\right)\left(\dfrac{e^{x}+e^{-x}}{2}\right) = \dfrac{e^{2x}+e^{0}-e^{0}-e^{-2x}}{2}$

$= \dfrac{e^{2x}-e^{-2x}}{2} = \sinh(2x)$, το ζητούμενο

- $\cosh^2 x = \left(\frac{e^x+e^{-x}}{2}\right)^2 = \frac{e^{2x}+2e^0+e^{-2x}}{4} = \frac{e^{2x}+2+e^{-2x}}{4}$ (1)

$\sinh^2 x = \left(\frac{e^x-e^{-x}}{2}\right)^2 = \frac{e^{2x}-2+e^{-2x}}{4}$ (2)

$(1)+(2) = \frac{e^{2x}+\cancel{2}+e^{-2x}+e^{2x}-\cancel{2}+e^{-2x}}{4} = \frac{2e^{2x}+2e^{-2x}}{4} = \frac{e^{2x}+e^{-2x}}{2}$

$= \cosh(2x)$, το ζητούμενο

- $2\tanh x = 2\frac{\sinh x}{\cosh x}$ (1)

$1-\tanh^2 x = 1-\left(\frac{\sinh x}{\cosh x}\right)^2 = \frac{\cos^2 x-\sinh^2 x}{\cosh^2 x} = \frac{1}{\cosh^2 x}$ (2)

$\frac{(1)}{(2)} = \frac{2\frac{\sinh x}{\cosh x}}{\frac{1}{\cosh^2 x}} = \frac{2\sinh x\cosh^2 x}{\cosh^2 x} = 2\sinh x\cosh x = \sin 2x$, το ζητούμενο

- $1+\tan^2 x = \frac{\cosh^2 x+\sinh^2 x}{\cosh^2 x}$ (1)

$1-\tan^2 x = \frac{1}{\cosh^2 x}$ (2)

$\frac{(1)}{(2)} = \frac{\frac{\cosh^2 x+\sinh^2 x}{\cosh^2 x}}{\frac{1}{\cosh^2 x}} = \frac{\cancel{\cosh^2 x}(\cosh^2 x+\sinh^2 x)}{\cancel{\cosh^2 x}} = \cosh(2x)$, το ζητούμενο

- $2\tanh x = \frac{2\sinh x}{\cosh x}$ (1)

$1+\tan^2 x = \frac{\cosh^2 x+\sinh^2 x}{\cosh^2 x}$ (2)

$\frac{(1)}{(2)} = \frac{\frac{2\sinh x}{\cosh x}}{\frac{\cosh^2 x+\sinh^2 x}{\cosh^2 x}} = \frac{2\sinh x\cdot\cosh^{\cancel{2}} x}{\cancel{\cosh x}(\cosh^2 x+\sinh^2 x)} = \frac{\sinh 2x}{\cosh 2x} =$

$\tanh(2x)$, το ζητούμενο

$\boxed{\text{ασκ. 13}}$

Ισχύει ότι $r = 2\cos\theta \Rightarrow r^2 = 2r\cos\theta \Rightarrow$

$r^2 + (r\cos\theta - 1)^2 + (r\sin\theta)^2 = 2r\cos\theta + (r\cos\theta - 1)^2 + (r\sin\theta)^2 \Rightarrow$

$r^2 + (r\cos\theta - 1)^2 + (r\sin\theta)^2 = 2r\cos\theta + (r\cos\theta - 1)^2 + r^2\underbrace{\sin^2\theta}_{1-\cos^2\theta}$

$\Rightarrow \cancel{r^2} + (r\cos\theta - 1)^2 + (r\sin\theta)^2 = 2r\cos\theta + (r\cos\theta - 1)^2 + \cancel{r^2} - r^2\cos^2\theta$

$(r\cos\theta - 1)^2 + (r\sin\theta)^2 = \cancel{2r\cos\theta} + \cancel{r^2\cos^2\theta} - \cancel{2r\cos\theta} + 1 - \cancel{r^2\cos^2\theta}$

$(x-1)^2 + (y)^2 = 1 \Rightarrow (x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 = 1^2$

(όπου $x_0 = 1$ και $y_0 = 0$) Άρα η εξίσωση αυτή

είναι ένας κύκλος με ακτίνα r 1.

Ένα σημείο θα είναι κέντρο του κύκλου αν απέχει

από κάθε σημείο του κύκλου απόσταση ίση με την ακτίνα

Έστω $K(1,0)$ και M σημείο του κύκλου

$(KM) = \rho \Rightarrow \sqrt{(x-x_0)^2 + (y-y_0)^2} = \rho \Rightarrow (x-x_0)^2 + (y-y_0)^2 = \rho^2$

$\Rightarrow (x-1)^2 + (y-0)^2 = 1 \Rightarrow x^2 - 2x + \cancel{1} + y^2 = \cancel{1}$

$\Rightarrow r^2\cos^2\theta - 2r\cos\theta + r^2\sin^2\theta = 0$

$\Rightarrow r^2(\cos^2\theta + \sin^2\theta) - 2r\cos\theta = 0 \Rightarrow r^2 - 2r\cos\theta = 0$

$\Rightarrow r(r - 2\cos\theta) = 0 \overset{r\neq 0}{\Rightarrow} r - 2\cos\theta = 0 \Rightarrow r = 2\cos\theta$

ισχύει από υπόθεση

Αν $r = 0$ τότε $\theta = -\pi/2$, αφού $0 = 2\cos\theta \Rightarrow \cos(-\pi/2) = \cos\theta$

$\Rightarrow$ $\pi/2$ άρα θα ανήκει στον κύκλο.