ασκ. 48

ΠΕΤΣΑ ΓΕΩΡΓΙΑ
ΑΜ: 3200155
8η ΟΜΑΔΑ ΑΣΚΗΣΕΩΝ

$h(x) = a f(x) + (1-a) g(x)$, $a \in (0,1)$

(α) Αφού f, g είναι 2 πυκνότητες πιθανότητας θα είναι μη αρνητικές. Επίσης $a \in (0,1)$ άρα $1-a>0$ και $a \in (0,1)$ οπότε όλη η h θα είναι και αυτή μη αρνητική, δηλ. $h(x) \geq 0$

Αρκεί νδο: $\int_{-\infty}^{\infty} h(x)dx = 1$.

Είναι: $\int_{-\infty}^{\infty} h(x)dx = \int_{-\infty}^{\infty} a f(x)dx + \int_{-\infty}^{\infty} (1-a) g(x)dx =$

$= a\int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx + (1-a)\int_{-\infty}^{\infty} g(x)dx = a \cdot 1 + (1-a)\cdot 1 = a + 1 - a = \boxed{1}$

Άρα η h(x) είναι και αυτή πυκνότητα πιθανότητας μιας τ.μ. Z

(β) $E(Z) = \int_{-\infty}^{\infty} x h(x)dx = \int_{-\infty}^{\infty} ax f(x) + (1-a) x g(x) dx$

$= a\int_{-\infty}^{\infty} x f(x)dx + (1-a)\int_{-\infty}^{\infty} x g(x)dx = \boxed{a \cdot E(X) + (1-a) E(Y)}$

(γ) $E(Z^2) = \int_{-\infty}^{\infty} x^2 h(x)dx = \int_{-\infty}^{\infty} x^2 a f(x)dx + \int_{-\infty}^{\infty} x^2 (1-a) g(x)dx =$

$= a\int_{-\infty}^{\infty} x^2 f(x)dx + (1-a)\int_{-\infty}^{\infty} x^2 g(x)dx = \boxed{a \cdot E(X^2) + (1-a) E(Y^2)}$

(δ) $Var(Z) = E(Z^2) - (E(Z))^2 = \boxed{a\, E(X^2) + (1-a) E(Y^2) - (a E(X) + (1-a) E(Y))^2}$

$\boxed{\text{ασκ. 49}}$

$X \sim N(0, \sigma^2)$ $\quad a > 0$

Είναι: $g(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} e^{-x^2/2\sigma^2}$. Έστω $Z = \frac{X-\mu}{\sigma} = \frac{X}{\sigma} \Rightarrow Z \sim N(0,1)$

- $G(y) = P(Y \le y) = P(aX^2 \le y) = P(X^2 \le y/a) = P(X \le \sqrt{y}/\sqrt{a}) =$

$P\left(\frac{X}{|\sigma|} \le \frac{\sqrt{y}}{|\sigma|\sqrt{a}}\right) = P\left(-\frac{\sqrt{y}}{\sigma\sqrt{a}} \le Z \le \frac{\sqrt{y}}{\sigma\sqrt{a}}\right) = P\left(-\frac{\sqrt{y}}{\sqrt{a}} \le Z \le \frac{\sqrt{y}}{\sqrt{a}}\right)$

$= \Phi\left(\frac{\sqrt{y}}{\sigma\sqrt{a}}\right) - \Phi\left(-\frac{\sqrt{y}}{\sigma\sqrt{a}}\right) = 2\Phi\left(\frac{\sqrt{y}}{\sigma\sqrt{a}}\right) - 1$

- $g(y) = (G(y))' = 2\phi\left(\frac{\sqrt{y}}{\sigma\sqrt{a}}\right) \cdot \frac{1}{2\sqrt{y}\cdot\sigma\cdot\sqrt{a}}$

- $E(Y) = E(aX^2) = aE(X^2) = (var(X) + E(X)^2)a = a(\sigma^2 + E(X)^2) = a(\sigma^2 + \mu)$

$= a\cdot\sigma^2$

$\boxed{\text{ασκ. 50}}$ $\quad F(x) = \begin{cases} 0 & , x < 4 \\ Ax + B - 4/x & , x \ge 4 \end{cases}$

(α)

<u>Πρέπει:</u> • $\lim_{x\to\infty} F(x) = 1$. Είναι: $\lim_{x\to\infty}\left(Ax + B - 4/x\right) = 1 \Rightarrow$

$\lim_{x\to\infty}(Ax) + \lim_{x\to\infty}(B) + \lim_{x\to\infty}\left(-\frac{4}{x}\right) = 1 \Rightarrow$

$\lim_{x\to\infty}(Ax) + B - 0 = 1 \Rightarrow \lim_{x\to\infty} Ax = 1 - B$

Επειδή $1 - B \in \mathbb{R}$ και $\begin{cases} \text{αν } A > 0, \text{ τότε } \lim_{x\to\infty}(Ax) = \infty \\ \text{αν } A < 0, \text{ τότε } \lim_{x\to\infty}(Ax) = -\infty \end{cases}$

πρέπει $\boxed{A = 0}$, για να βγει απροσδιοριστία της οποίας το αποτέλεσμα θα είναι ο πραγματικός αριθμός $1-B$.

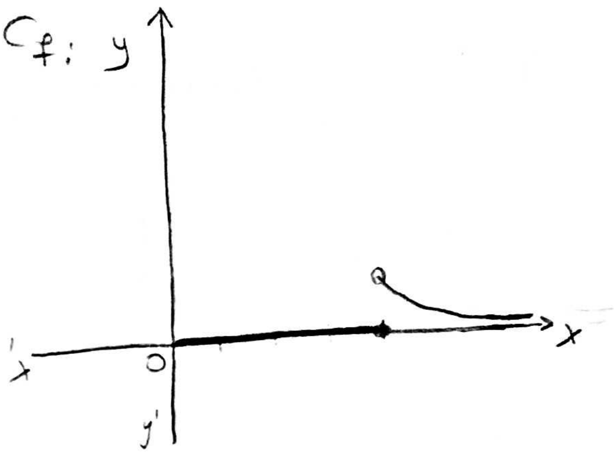
- $\lim_{x\to-\infty} F(x) = 0 \Rightarrow \lim_{x\to-\infty} 0 = 0$

Αν $\boxed{A=0}$, τότε $F(x) = \begin{cases} 0, & x < 4 \\ B - \frac{4}{x}, & x \ge 4 \end{cases}$. Η F πρέπει να είναι ↑

και συνεχής. Άρα πρέπει $F(4) = 0$. $F(4) = B - \frac{4}{4} = B - 1 \Rightarrow$

$B - 1 = 0 \Rightarrow \boxed{B = 1}$

Άρα, $F(x) = \begin{cases} 0, & x<4 \\ 1-\frac{4}{x}, & x \geq 4. \end{cases}$



(β) $F'(x) = f(x) = \begin{cases} 0, & x<4 \\ \frac{4}{x^2}, & x \geq 4. \end{cases}$

(γ) $P(X<5 \mid X<6) = \frac{P((X<5)\cap(X<6))}{P(X<6)} = \frac{P(X<5)}{P(X<6)}$

$= \frac{F(5)}{F(6)} = \frac{1-4/5}{1-4/6} = 0,6$

ασκ. 51

(α) $f(x) = \begin{cases} 0, & x<0 \\ cx, & 0\leq x\leq 1 \\ c, & 1\leq x\leq 2 \\ 0, & x>2 \end{cases}$

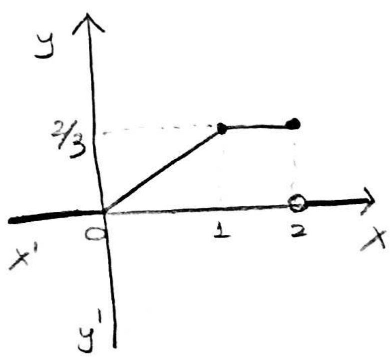
Πρέπει $\int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx = 1. \quad (1)$ Άρα

$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx = \int_{-\infty}^{0} 0\,dx + \int_0^1 cx\,dx + \int_1^2 c\,dx + \int_2^{\infty} 0\,dx =$

$= \left[\frac{cx^2}{2}\right]_0^1 + \left[cx\right]_1^2 = \frac{c}{2} - 0 + 2c - c = \frac{3c}{2}.$ Άρα $\overset{(1)}{\Rightarrow} \frac{3c}{2} = 1 \Rightarrow \boxed{c = 2/3}$

Επομένως:

$f(x) = \begin{cases} 0, & x<0 \\ \frac{2x}{3}, & 0\leq x\leq 1 \\ 2/3, & 1\leq x\leq 2 \\ 0, & x>2 \end{cases}$



(β) $P(X>1,5 \cup X<0,5) = P(X>1,5) \cup P(X<0,5)$

$= P(X>1,5) + P(X<0,5) = \int_{-\infty}^{0} 0\,dx + \int_0^{1/2} \frac{2x}{3}dx + \int_{3/2}^{\infty} \frac{2}{3}dx =$

$= \left[\frac{x^2}{3}\right]_0^{1/2} + \int_{3/2}^{2} 2/3\,dx + \int_2^{\infty} 0\,dx = \frac{1}{12} - 0 + \left[\frac{2}{3}x\right]_{3/2}^{2} =$

$= \frac{1}{12} + \frac{4}{3} - 1 = \boxed{\frac{5}{12}}$

(γ) $E(X) = \int_{-\infty}^{\infty} x f(x)\, dx = \int_0^1 \frac{2x^2}{3} + \int_1^2 \frac{2}{3} x = \left[\frac{2x^3}{9}\right]_0^1 + \left[\frac{x^2}{3}\right]_1^2 =$

$= \frac{2}{9} - 0 + \frac{4}{3} - \frac{1}{3} = \frac{2+12-3}{9} = \frac{11}{9} \Leftrightarrow \boxed{E(X) = \frac{11}{9}}$