Άσκ 1

ΠΕΤΣΑ ΓΕΩΡΓΙΑ
3200155

(α) Έστω κατευθυνόμενος γράφος $G(V, E)$, όπου V το σύνολο των εργασιών και οι ακμές E δηλώνουν με ποια εργασία πρέπει να προηγείται από μια άλλη. Η συνθήκη που πρέπει να ισχύει έτσι ώστε το σύνολο εργασιών V να είναι εφικτό είναι να μην υπάρχει κύκλος στον γράφο.

(β) Αφού - - ο γράφος δεν περιέχει κάποιο κύκλο, μπορούμε να λύσουμε το πρόβλημα με τη χρήση τοπολογικής ταξινόμησης. Στην ουσία, πριν ξεκινήσει κάποια εργασία θα πρέπει να περιμένει να ολοκληρωθούν οι προαπαιτούμενές της. Έστω αυτός ο χρόνος $t_{αναμονής}$, και έστω $t_{τερμ}$ η χρονική στιγμή ολοκλήρωσης.

Με τα παραπάνω έχουμε τα εξής συμπεράσματα:

▷ Μια εργασία θα ολοκληρωθεί τη χρονική στιγμή $t_{τερμ}(V) = t_{αναμονής}(V) + d(V)$

▷ $t_{αναμονής}(V)$ ίση με τη μέγιστη χρονική στιγμή ολοκλήρωσης των διεργασιών που πρέπει να προηγηθούν από τη V. (Εφόσον οι προηγούμενες εκτελούνται παράλληλα και άρα σίγουρα όλες οι προηγούμενες θα έχουν ολοκληρωθεί πριν από την διεργασία που κρατάει τον περισσότερο χρόνο)

Στον γράφο είναι η εσωτερική γειτονιά

Οπότε, για να βρούμε τον ελάχιστο χρόνο ολοκλήρωσης τρέχουμε DFS στον γράφο ώστε να μπει σε τοπολογική διάταξη G' και ύστερα:

Για κάθε v στον G'

$t_{αναμονής}(v) = \max$ των $t_{τερμ}$ των προαπαιτούμενων εργασιών

$t_{τερμ}(v) = t_{αναμονής}(v) + d(v)$

Άσκ 4

Ζητούμενο:
2k-κλίκες $\in NP$

έχουμε:

certificate: 2 σύνολα κόμβων V_1, V_2
ο verifier κάνει τους εξής ελέγχους

α) Ελέγχουμε τα 2 σύνολα (V_1, V_2) είναι υποσύνολα του V.

β) το σύνολο των κόμβων του V_1, V_2 να είναι $\leq k$

γ) τα σύνολα V_1, V_2 είναι ξένα μεταξύ τους

δ) ελέγχει $\forall$ ζεύγος (u,v) $\in V_1$ αν $\exists$ ακμή

Επομένως με ~~ένα~~ δεδομένο certificate (V_1, V_2) ~~...~~ μπορεί να γίνει verified σε πολυωνυμικό χρόνο επομένως έχουμε το ζητούμενο.

Ζητούμενο: όλα τα NP ~~...~~ προβλήματα ανάγονται πολυωνυμικά στο 2k-κλίκες.

Για να δείξουμε το παραπάνω: Φτιάχνουμε τον G' ο οποίος δημιουργείται από τον ίδιο το G και ένα αντίγραφο του G. ο G' θα έχει τον διπλάσιο αριθμό κόμβων από τον G (αφού φτιάχνουμε ξανά τον ίδιο τον G και το αντίγραφό του) και οι ακμές επίσης θα είναι διπλάσιες με την ίδια ~~...~~ λογική που κατασκευάστηκαν οι κόμβοι. (Άρα από τα παραπάνω προκύπτει ότι ο G' είναι μη-συνεκτικός)

Τώρα, δείχνουμε ότι είναι στιγμιότυπο $<G, k> \in$ k-κλίκα αν ν είναι και στιγμιότυπο της $<G', k> \in$ 2k-κλίκες

$\Rightarrow$ Αν ο G έχει k-κλίκα τότε ο G' θα έχει σίγουρα 2k-κλίκες εφόσον:

η <u>πρώτη</u> θα είναι μέρος του ίδιου του G, και η <u>δεύτερη</u> θα είναι η αντίστοιχη που δημιουργήθηκε από το αντίγραφο του G.

$\Leftarrow$

Θεωρούμε τις 2k-κλίκες V_{k_1}, V_{k_2} ξένες μεταξύ τους

Αν: (α) και οι 2 είναι υποσύνολα του V^* (όπου V οι στον G^*), ο G' θα έχει 4 k-κλίκες, οι 2 από τον αρχικό G και οι άλλες 2 ως τα αντίγραφα του G. Επομένως ο G έχει 2 k-κλίκες ενώ ο G' 4.

(β) V_{k_1} είναι υποσύνολο του V και η V_{k_2} είναι υποσύνολο του αντιγράφου του V στον G', τότε έχουμε ότι $\exists$ 1 k-κλίκα στον G.