ΠΕΤΣΑ ΓΕΩΡΓΙΑ
ΑΜ: 3200155

2η ΟΜΑΔΑ ΑΣΚΗΣΕΩΝ

$\boxed{\text{ασκ. 11}}$

Ο δειγματικός χώρος θα είναι οι πιθανοί τρόποι να επιλέξουμε 10 χαρτιά από μία τράπουλα 52 φύλλων, άρα: $|\Omega| = \binom{52}{10}$

(α) Η πιθανότητα να μην επιλέξουμε κανέναν άσσο θα είναι ίση με τους συνδυασμούς 10 αντικειμένων από μία τράπουλα 48 φύλλων (έχουμε αφαιρέσει τους 4 άσσους) Άρα $|A| = \binom{48}{10}$

Επομένως η πιθανότητα είναι ίση με $\frac{|A|}{|\Omega|} = \frac{\frac{48!}{38!\cdot 10!}}{\frac{52!}{42!\,10!}}$

$= \frac{48!\cdot 42!}{52!\cdot 38!} = 0{,}4134 \Leftrightarrow P(A) = 41{,}34\%$

(β) B = « Το πολύ 3 άσσοι ». Το B είναι ισοδύναμο με τους συνδυασμούς του Ω μείον την πιθανότητα να έχουμε 4 άσσους, όπου $\binom{4}{4} = 1 \cdot \binom{48}{6}$ για τα υπόλοιπα 6 φύλλα.

Άρα $P(B) = 1 - \frac{1\binom{48}{6}}{\binom{52}{10}} = 0{,}992 \Rightarrow P(B) = 99{,}2\%$

(γ) Στην τελευταία σελίδα.

$\boxed{\text{ασκ. 12}}$

$|\Omega| = (24)_5$ με επανάληψη $= 24^5$

(α) A = « Υπάρχει το γράμμα A ». $P(A) = 1 - P(A')$

$P(A') = \frac{23^5}{24^5}$. Άρα $P(A) = 1 - \left(\frac{23}{24}\right)^5 = 0,1916 = 19,16\%$

(β) $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$.

Είναι : $P(A \cup B) = 1 - P(A' \cap B') = 1 - \frac{22^5}{24^5} = 0,3527 = 35,27\%$

(γ) Υποθέτουμε ότι $P(A) = P(B)$ άρα από (β)

έχουμε $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B) \Rightarrow$

$\Rightarrow 35,27\% - 19,16\% - 19,16\% = -P(A \cap B)$

$\Rightarrow P(A \cap B) = 3,05\%$

(δ) $P(B \cap A') = P(B) - P(A \cap B)$

$P(B \cap A') = 19,16\% - 3,05\%$

$P(B \cap A') = 16,11\%$

άσκ 13

$|\Omega| = \mu$

(α) Θα υπολογίσουμε την πιθανότητα 2 άτομα από το μ να μην έχουν ίδια μέρα γενέθλια

$$= \frac{365}{365} \cdot \frac{364}{365} \cdots = \frac{365!}{365^{\mu}(365-\mu)!}$$

Άρα $P(A) = 1 - \dfrac{365!}{365^{\mu}(365-\mu)!}$

(β) $\mu = 23$, γιατί για $\mu = 23$ έχουμε $P(A) = 1 - \dfrac{365!}{365^{23}(342)} = 50{,}7\%$

(γ) $q(\mu) = 1 - \left(\dfrac{364}{365}\right)^{\mu}$

άσκ. 14 Για να βρούμε τους συνολικούς αγώνες μπορούμε να δούμε τις ομάδες ως διατάξεις ανά 2 χωρίς επανάληψη έτσι ώστε να παίξουν όλες με όλες ακριβώς 2 φορές. Άρα έχουμε διατάξεις $(16)_2 = \dfrac{16!}{14!} = 15 \cdot 16 = 240$ αγώνες

Το πρωτάθλημα θα το πάρει ο Παναθηναϊκός γιατί αγαπάμε το τριφύλλι.

άσκ. 15

Η πιθανότητα να κερδίσουμε θα είναι $\dfrac{1}{|\Omega|}$.

$$|\Omega| = \binom{49}{6} = \frac{49!}{6!\,43!} = 13983816$$

Άρα $P(A) = \dfrac{1}{13983816}$

$\boxed{\text{ασκ. 16}}$

$|\Omega| = \binom{52}{7} = \frac{52!}{7!\,45!}$

(α) Συνολικά 13 ♦, 13 ♠, 13 ♥, 13 ♣

Άρα η πιθανότητα να επιλέξουμε πχ 7 ♦ από τα 13 είναι $\binom{13}{7} = \frac{13!}{7!\,6!} = 1716$, και αφού έχουμε 4 διαφορετικά σύμβολα το P(A) θα είναι

$$= \frac{4 \cdot 1716}{\binom{52}{7}}$$

(β) Αρχικά οι συνδυασμοί που θα περιέχουν ακριβώς 5 φύλλα από το ίδιο σύμβολο θα είναι $4 \cdot \binom{13}{5}\binom{52-13}{2} = 4 \cdot \binom{13}{5}\binom{39}{2}$. Οι

συνδυασμοί που θα περιέχουν ακριβώς 6 φύλλα απ' το ίδιο σύμβολο θα είναι:

$4 \cdot \binom{13}{6}\binom{39}{1}$. Τέλος οι συνδυασμοί

που θα περιέχουν ακριβώς 7 φύλλα απ' το ίδιο σύμβολο είναι $4 \cdot \binom{13}{7}$ (οπό (α) ερώτημα).

Άρα από την προσθετική αρχή της απαρίθμησης

έχουμε $P(B) = \frac{4\left[\binom{13}{5}\binom{39}{2} + \binom{13}{6}\binom{39}{1} + \binom{13}{7}\right]}{\binom{52}{7}}$

(γ) Έχουμε 13 επιλογές για τα 3 ζεύγη και από κάθε ζεύγος θέλουμε 2 απ' τα 4 πιθανά φύλλα άρα έχουμε: $\binom{13}{3}\cdot\binom{4}{2}^3$

Άρα $P(C) = \dfrac{(52-12)\binom{13}{3}\binom{4}{2}^3}{\binom{52}{7}} = \dfrac{40\binom{13}{3}\binom{4}{2}^3}{\binom{52}{7}}$

Είναι 40 γιατί η μία κάθε δεν θα επιλεγεί (αφού θα επιλεχθούν οι 3) και επομένως μπορούμε να την συμπεριλάβουμε στα φύλλα και θα έχουμε $52-(13-1)=40$ επιλογές.

$\boxed{\text{ασκ. 17}}$

(α) $|\Omega| = \binom{20}{4} = \dfrac{20!}{4!\,16!} = 4845$

Από τα 20 παπούτσια αφαιρούμε τα ζευγάρια και μένουν 10. Άρα υπάρχουν $\binom{10}{4}$ τρόποι να πάρουμε 4 παπούτσια και για καθ' έναν έχουμε 2 επιλογές (δηλ. $2\cdot2\cdot2\cdot2 = 16$)

Άρα $P(A) = \dfrac{\binom{10}{4}\cdot 16}{\binom{20}{4}} = \dfrac{\frac{10!}{4!6!}\cdot 16}{\frac{20!}{4!16!}} = 0{,}6934 \Rightarrow P(A) = 69{,}34\%$

(β) $P(B) = \dfrac{10\binom{9}{2}\cdot 2\cdot 2}{\binom{20}{4}} = 0{,}2972 \Rightarrow P(B) = 29{,}72\%$

γιατί έχουμε 10 πιθανά ζευγάρια για να επιλέξουμε το 1. Έπειτα για τα άλλα 2 παπούτσια έχουμε ένα σύνολο 9 παπουτσιών (αφού από ένα σύνολο 20 παπουτσιών πήραμε το ένα ζευγάρι και απομένουν 18 παπούτσια, απ' τα οποία αφαιρούμε τα ζευγάρια και μένουν 9). Και τέλος, έχουμε 2·2 επιλογές για το καθ' ένα απ' τα 2 παπούτσια.

(δ) Για να υπάρχουν 2 ζευγάρια έχουμε $\binom{10}{2}$ τρόπους.

Άρα $P(\Gamma) = \dfrac{\binom{10}{2}}{\binom{20}{4}} = 0{,}009 \Leftrightarrow P(\Gamma) = 0{,}9\%$

$\boxed{\text{ασκ. 18}}$ $|\Omega| = \binom{50}{10}$

Η πιθανότητα να επιβιβαστούν τουλ. 7 ελέφαντες θα είναι ίση με την πιθανότητα να επιβιβαστούν ακριβώς 7 + ακριβώς 8 + ακριβώς 9 + ακριβώς 10.

Άρα έχουμε για τους 7:

$\binom{20}{7} \cdot \binom{30}{3} \rightarrow$ (10−7=3 πεζηκόριοι απ' τους 30).

↳ 7 απ' τους 20 ελέφαντες

Για τους 8: Με την ίδια λογική έχουμε

$\binom{20}{8} \cdot \binom{30}{2}$

Για τους 9: $\binom{20}{9} \cdot \binom{30}{1}$

Για τους 10: $\binom{20}{10}$

Επομένως συνολικά έχουμε:

$$P(A) = \frac{\binom{20}{7}\binom{30}{3} + \binom{20}{8}\binom{30}{2} + \binom{20}{9} \cdot 30 + \binom{20}{10}}{\binom{50}{10}}$$

$\boxed{\text{ασκ. 19}}$

Υποθέτουμε ότι δεν έχει σημασία η σειρά με την οποία παραδίδουμε τα βραβεία (Αφού δεν πρόκειται για μετάλλια).

$$|\Omega| = \binom{2n}{n} = \frac{2n!}{n!n!}$$

$$P(A) = \frac{2\cdot 2\cdot 2 \cdots 2}{\binom{2n}{n}} = \frac{2^n}{\frac{2n!}{n!n!}} = \frac{n!n!\cdot 2^n}{2n!}$$

Γιατί υπάρχουν 2 επιλογές για το ποιος θα πάρει το βραβείο απ'το πρώτο ζευγάρι, 2 για το 2ο κλπ.

$\boxed{\text{ασκ. 20}}$

Υποθέτουμε πως δεν έχει σημασία η σειρά επιλογής, άρα προφανώς $|\Omega| = \binom{2n}{k}$

(α)΄ Επειδή μιλάμε για ζευγάρια κατασκόπων υποθέτουμε ότι απ'τα 2n άτομα τα n είναι άντρες και τα υπόλοιπα n γυναίκες. Επομένως για να επιλέξουμε j άνδρες απ'τις συνολικά k επιλογές αυτοί θα είναι οι συνδυασμοί $\binom{n}{j}$ και για καθέναν απ'αυτούς έχω $\binom{n}{k-j}$ επιλογές στις γυναίκες

Άρα $\boxed{P(A) = \frac{\binom{n}{j}\binom{n}{k-j}}{\binom{2n}{k}}}$

(β)΄ Από τα n ζευγάρια εμείς επιλέγουμε τα k, απ'τα οποία ο ένας θα επιλεγεί. Άρα έχουμε $\binom{n}{k}$ συνδυασμούς και 2 επιλογές για τον κάθε έναν άρα συνολικά 2^k.

Άρα $\boxed{P(B) = \frac{\binom{n}{k}2^k}{\binom{2n}{k}}}$

ασκ. 11

(γ) Έστω D το ενδ. να πάρουμε τουλ. 1 άσσο και E το ενδ. να πάρουμε τουλ. 1 φιγούρα. Επειδή ψάχνουμε την πιθανότητα $P(D \cap E)$, έστω $P(C)$ $(C = D \cap E)$.

$P(C) = 1 - P(C')$

$= 1 - P(D' \cup E')$ | Άρα $D' =$ «0 άσσοι» και

$= 1 - (P(D') + P(E') - P(D' \cap E'))$ | $E' =$ «0 φιγούρες».

$$P(C') = \frac{\binom{4}{0}\binom{48}{10} + \binom{12}{0}\binom{40}{10} - \binom{4}{0}\binom{12}{0}\binom{36}{10}}{\binom{52}{10}}$$

$52 - 12 - 4 = 36$

$52 - 4$ άσσοι $= 48$

$52 - 12$ φιγούρες $= 40$

$$P(C') = \frac{\binom{48}{10} + \binom{40}{10} - \binom{36}{10}}{\binom{52}{10}}$$

Άρα $$\boxed{P(C) = 1 - \frac{\binom{48}{10} + \binom{40}{10} - \binom{36}{10}}{\binom{52}{10}}}$$