

Applications Mathématiques pour la Finance de marché

Amina BOUMEDIENE

Master Mathématiques et Applications, spécialité Statistique

Stage effectué du 2 avril au 28 septembre 2007 au sein de la Gestion Financière, service Investissement et Couverture de Crédit Agricole S.A. et encadré par M. Karim Mzoughi (ingénieur financier)

Laboratoire de Statistiques Théoriques et Appliquées
Université Pierre et Marie Curie, Paris VI

Responsable de formation : Paul Deheuvels (professeur)
Encadrants : Delphine Blanke (maître de conférences)
Giovanni Peccati (maître de conférences)

Remerciements

Je tiens à remercier mon maître de stage Karim Mzoughi pour avoir su me guider tout au long de ce stage aussi bien dans les approches mathématique et informatique que dans le cadre de la Finance de marché. Je le remercie également pour m'avoir fait confiance, pour sa grande disponibilité, sa patience et ses conseils dans la rédaction de ce rapport.

Merci également à Virginie Krakowiak pour m'avoir décrit les instruments financiers et les stratégies sous-jacentes.

Merci aussi à Yves Amardeil, Philippe Gaspard, Patrick Mavro et Eric Morvan pour m'avoir appris comment obtenir et utiliser des données disponibles sur le marché.

Merci à toute l'équipe de la Direction Financière pour son accueil.

Je remercie enfin tous les enseignants du Master Mathématiques et Applications, spécialité Statistique, pour la richesse de leur formation.

Introduction

Créé en 2001, Crédit Agricole SA est l'organe central du groupe Crédit Agricole. Il garantit l'unité financière du groupe et coordonne, en liaison avec ses filiales spécialisées, les stratégies des différents métiers du groupe.

Le service Investissement et couverture de Crédit Agricole S.A. est en particulier chargé de la gestion du risque de taux d'intérêt global.

Ce rapport comporte deux volets quasi-indépendants correspondant aux deux missions dont j'ai été chargée :

- mettre en place le modèle de déformation de la courbe des taux de Brace, Gatarek & Musiela
- valoriser des produits structurés sur le pétrole

Il se vaudra surtout théorique et laissera peu de place à la partie informatique. Cependant, le développement en C++ a été très important au cours de ce stage tant au niveau des difficultés d'implémentation rencontrées qu'au temps consacré.

Modèle de Brace, Gatarek et Musiela

Le secteur de la Finance de marché en pleine expansion, il donne naissance à des produits dérivés de plus en plus complexes et diversifiés. C'est en particulier le cas pour les produits dérivés sur taux d'intérêt.

Les flux sous-jacents à ces derniers sont généralement des fonctions non linéaires des futurs taux interbancaires (IBOR), c'est pourquoi il est devenu indispensable de disposer d'un modèle simulant les taux d'intérêts à différentes dates dans le futur.

Après avoir fait un tour d'horizon des modèles disponibles dans la littérature sur le sujet, nous avons rapidement opté pour le modèle de marché de Brace, Gatarek et Musiela. Le modèle BGM a l'avantage de donner les mêmes formules de prix que les opérationnels du marché pour les caps et les swaptions, produits liquides sur le marché des taux d'intérêt.

Une première partie de ce rapport sera consacrée à des rappels sur les taux d'intérêt. En se plaçant dans le cadre unidimensionnel, nous exprimerons dans la deuxième partie, la dynamique des taux IBOR sous différentes mesures de probabilité. Nous proposerons une calibration détaillée, basée sur les cotations des caps à la monnaie après avoir déterminé les volatilités implicites des caplets sous-jacents. Nous simulerons enfin les trajectoires des taux IBOR et étudierons un exemple de produit pouvant être valorisé par notre modèle.

Valorisation de produits structurés sur le pétrole

Lorsqu'on valorise des produits sur le pétrole, une des premières difficultés est de prendre en compte la coexistence de deux risques :

- le risque lié aux fluctuations du prix du pétrole exprimé en \$ US
- le risque lié aux fluctuations du taux de change \$ / €

A partir des diffusions historiques, nous exprimerons les dynamiques de ces deux aléas sous la probabilité risque-neutre domestique en tenant compte des paramètres du marché étranger. Nous étendrons alors la formule de Black & Scholes aux options soumises à un risque de change, dites options « quanto ». Nous étudierons enfin plusieurs exemples de structures optionnelles et verrons comment il est possible d'appliquer nos formules.

Table des matières

I Produits dérivés sur taux d'intérêt	9
Modèle BGM	
1 Préliminaires sur les Taux d'Intérêt	13
2 Le modèle de Brace, Gatarek & Musiela	
un cas particulier du modèle de Heath, Jarrow & Merton	17
2.1 Hypothèses du modèle HJM	17
2.2 Vers le modèle BGM	19
3 Modèle BGM: calibration par rapport aux caps	23
3.1 Valorisation des caps sur le marché	23
3.1.1 Les caps: des produits liquides sur le marché des taux	23
3.1.2 Pratiques du marché - Cotation en volatilité	24
3.1.3 Volatilité implicite des caplets	25
3.2 Valorisation des caps dans le modèle BGM	29
3.2.1 Probabilité Forward Neutre et Propriété de Martingale	29
3.2.2 Pricing des caps dans le modèle BGM: objectif Calibration	32
3.3 Calibration du modèle BGM à un facteur	33
3.3.1 Méthode	33
3.3.2 Hypothèses sur la volatilité	33
4 Simulation	35
4.1 Choix d'une mesure pour la simulation	35
4.2 Algorithme de Simulation	36
5 Valorisation de produits dans le modèle BGM	39
5.1 Taux IBOR forward de maturité 1 an	39
5.2 Méthode de Monte-Carlo	40
5.3 Mise en place et valorisation d'un swap de volatilités dans le modèle BGM	41
5.3.1 Swap et Taux de swap	41
5.3.2 Structure du contrat	43
5.3.3 Valorisation de la jambe payeuse	43
5.3.4 Expression et valorisation de la jambe receveuse	44
5.3.5 Méthode employée	45

II Produits dérivés sur le pétrole	49
Marché étranger et risque de change	
1 La formule de Black, Scholes et Merton	53
1.1 Diffusion d'un actif financier	53
1.2 Formule de Black-Scholes-Merton pour un call européen	55
1.3 Les « grecques »	58
1.3.1 Le Delta	58
1.3.2 Le Gamma	59
1.3.3 Le Vega	60
1.3.4 Le Rho	61
2 Valorisation d'une option exotique :	
« le put gap »	63
2.1 Définition	63
2.2 Evaluation	63
3 Marché étranger	65
3.1 Coexistence de deux risques	65
3.2 Processus du taux de change	66
3.3 Diffusion du sous-jacent étranger	67
3.4 Valorisation d'un call quanto sans garantie de change	69
3.5 Call quanto avec garantie de change	70
3.5.1 Evaluation d'un call quanto avec garantie de change	70
3.5.2 Les « grecques » d'un call quanto avec garantie de change	72
3.6 Evaluation d'un put « gap » sur sous-jacent étranger	76
3.7 Les grecques du put « gap-quanto » avec garantie de change	76
4 Produits structurés sur le pétrole : Exemple 1	79
4.1 Description de la structure	79
4.2 Evaluation de la structure	80
4.2.1 Décomposition du payoff	80
4.2.2 Formule de prix	81
5 Produits structurés sur le pétrole : Exemple 2	83
5.1 Description	83
5.2 Evaluation	84
6 Produits structurés sur le pétrole : Exemple 3	87
6.1 Description	87
6.2 Formule de prix	88
Annexes	91
A Probabilités	93
A.1 Espérance conditionnelle	93
A.2 Changement de probabilité	93

B	Calcul stochastique	95
B.1	Mouvement Brownien	95
B.2	Intégrale stochastique	95
B.3	Processus d'Itô	96
B.4	Formule d'Itô multidimensionnelle	97
B.5	Théorème de Girsanov	97
B.6	Equation Différentielle Stochastique et Mouvement brownien géométrique	98
C	Simulation de processus stochastiques	99
C.1	Simulation d'une loi uniforme sur $[0,1]$	99
C.2	Simulation de variables gaussiennes : Méthode de Box & Muller	99
C.3	Simulation du mouvement brownien	100
C.4	Simulation des équations différentielles stochastiques	100
D	Marché en absence d'opportunité d'arbitrage	101
D.1	AOA	101
D.2	Conséquences de l'AOA	101
E	Numéraire et probabilité risque-neutre associée	103
E.1	Définitions	103
E.2	Changement de numéraire	104
	Bibliographie	107

Première partie

Produits dérivés sur taux d'intérêt Modèle BGM

Abréviations et notations

I. Notations Générales

- t Date courante
- $\tau(s, t)$ Mesure du temps, fraction d'année entre la date s et la date t compte tenu du choix de la base.
- N Nominal
- $\theta > 0$ Une durée (en année)
- $\beta(t)$ Facteur d'accumulation cf. définition 1.2 p. 13
- $\mathbf{DF}(t, T)$ Facteur d'actualisation stochastique cf. définition 1.3 p. 13
- $B(t, T)$ Prix en t d'un zéro-coupon de maturité T cf. définition 1.4 p. 13
- $L(t, T)$ Taux de composition simple cf. définition 1.5 p. 14
- $Y(t, T)$ Taux composé annuellement cf. définition 1.6 p. 14
- $F(t, T, S)$ Taux forward cf. définition 1.9 p. 15
- $f(t, T)$ Taux forward instantané cf. définition 1.10 p. 15
- $\{T_1, \dots, T_n\}$ Echéancier
- i Indice parcourant l'échéancier
- $r(t, \theta)$ Taux forward instantané de maturité θ cf. définition 1.10 p. 15
- $L(t, 0; \delta)$ Taux IBOR spot en t de maturité δ
- $L(t, \theta; \delta)$ Taux IBOR forward en t (maturité δ) d'échéance $t + \theta$
- $Cap(t, T_n, K)$ Le prix en t d'un cap de strike K et d'échéance T_n
- $Caplet(t, T_j, K)$ le prix en t d'un caplet de strike K et d'échéance T_j
- $\mathcal{N}(0, 1)$ La loi Normale centrée et réduite
- $\langle X \rangle = \langle X, X \rangle$ Le crochet d'un processus X cf. Annexe B p. 95
- Δ_t Pas de discrétisation
- $\{t_k = t + k\Delta_t, k\}$ Maillage discrétisant l'EDS
- k Indice parcourant le maillage

II. Définition des processus

- $\{B(t, T), \quad t \geq 0\}$ Processus du zéro-coupon cf. définition 2.1 p. 17
- $\{f(t, T), \quad t \in [0, T]\}$ Processus du taux forward instantané cf. équation 2.1 p. 17
- $\{L(t, \theta; \delta), \quad t \geq 0\}$ Processus du taux IBOR cf. proposition 2.2 p. 19

III. Définition des fonctions

$\mathcal{N}(x) = \int_{-\infty}^x \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{u^2}{2}} du$ La fonction de répartition de la loi Normale centrée et réduite

$\phi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}}$ La fonction de densité de la loi Normale centrée et réduite

$\sigma(t, T)$ La fonction de volatilité du processus $\{B(t, T), \quad t \geq 0\}$

$\sigma_f(t, T)$ La fonction de volatilité du processus $\{f(t, T), \quad t \in [0, T]\}$

$\gamma(t, \theta; \delta)$ La fonction de volatilité du processus $\{L(t, \theta; \delta), \quad t \geq 0\}$

$g_{K, \sigma}(x) = x\mathcal{N}\left[\frac{1}{\sigma} \log(x/K) + \frac{1}{2}\sigma\right] - K\mathcal{N}\left[\frac{1}{\sigma} \log(x/K) - \frac{1}{2}\sigma\right]$ La fonction de Black & Scholes

Chapitre 1

Préliminaires sur les Taux d'Intérêt

Définition 1.1 (Taux Court)

On définit le taux court $r(\cdot)$ comme le taux associé à un placement sans risque instantané. On parle de taux spot instantané.

Définition 1.2 (Facteur d'Accumulation)

Il s'agit d'un investissement dont l'évolution est régie par l'équation différentielle ordinaire :

$$\begin{cases} d\beta(t) = r(t)\beta(t)dt \\ \beta(0) = 1 \end{cases}$$

dont la solution est

$$\beta(t) = \exp \left\{ \int_0^t r(s)ds \right\}$$

Remarque 1.1

Autrement dit, pour tout instant petit Δ_t ,

$$\frac{\beta(t + \Delta_t) - \beta(t)}{\beta(t)} = r(t)\Delta_t$$

Définition 1.3 (Facteur d'actualisation stochastique)

Dans le cas où $\{r(t), t \geq 0\}$ est un processus stochastique, la quantité DF , facteur d'actualisation, définie par :

$$DF(t, T) := \frac{\beta(t)}{\beta(T)}$$

est aléatoire. Elle représente l'équivalent en t d'une unité de devise en T .

Définition 1.4 (Obligation Zéro-Coupon)

L'obligation Zéro-coupon de maturité T est un contrat qui garantit le paiement d'une unité de devise à la date T , sans versement intermédiaire.

Le prix de ce contrat est appelé **Zéro-coupon**, on le note :

$$B(t, T)$$

Remarque 1.2 (Taux déterministes)

Dans un modèle où les taux d'intérêt sont déterministes, on a : $B(t, T) = DF(t, T)$

Remarque 1.3

Le zéro-coupon est un outil essentiel à la valorisation de produits dérivés sur taux d'intérêt. En effet, leurs flux s'expriment souvent en fonction de zéro-coupons.

Définition 1.5 (Taux de composition simple)

Le taux spot de composition simple de durée de composition $\tau(t, T)$ est le taux constant auquel il faut investir pour disposer d'une unité de devise en T partant d'un nominal $B(t, T)$.

On le note $L(t, T)$ tel que :

$$L(t, T) := \frac{1 - B(t, T)}{\tau(t, T)B(t, T)}$$

Autrement écrit :

$$B(t, T) = \frac{1}{1 + \tau(t, T)L(t, T)}$$

Remarque 1.4 (Justification de la notation)

Ce taux est noté L car les taux IBOR sont contruits selon cette méthodologie.¹

Remarque 1.5

Ce taux est utilisé pour des durée de composition inférieures à un an. Dans les autres cas, on utilise le taux suivant :

Définition 1.6 (Taux composé annuellement)

Il s'agit du taux auquel il faut investir pour obtenir une unité de devise en T partant de $B(t, T)$.

On le note $Y(t, T)$ tel que :

$$Y(t, T) := \frac{1}{[B(t, T)]^{\frac{1}{\tau(t, T)}}}$$

Remarque 1.6 (Equivalence)

Ces deux définitions sont équivalentes quand on fait tendre $T \rightarrow t^+$. On retrouve alors le taux spot instantané :

$$\begin{aligned} r(t) &= \lim_{T \rightarrow t^+} L(t, T) \\ &= \lim_{T \rightarrow t^+} Y(t, T) \end{aligned}$$

Définition 1.7 (Courbe des taux)

La courbe des taux zéro-coupon, ou courbe des taux actuariels, est le graphe de la fonction :

$$T \mapsto \begin{cases} L(t, T) & \forall t < T \leq t + 1 \\ Y(t, T) & \forall T > t + 1 \end{cases}$$

Il s'agit de la courbe à un instant t du taux actuariel pour toutes les maturités espacées d'un an.

Remarque 1.7 (Construction)

Les banques construisent une courbe zéro-coupon à partir de différents instruments financiers tels que les taux courts et les taux de swap.

1. La base de calcul utilisée est $\frac{\text{Exact}}{360}$

Définition 1.8 (Forward Rate Agreement)

Le Forward Rate agreement (FRA) est une opération de garantie de taux à terme conclue entre deux contreparties qui s'engagent à échanger à une date future connue S , la différence entre un taux variable de référence $L(T, S)$ constaté sur le marché à la date T , et un taux fixe K garanti à l'origine t .
La valeur du contrat pour un nominal N est :

$$N \tau(T, S) (K - L(T, S))$$

Remarque 1.8

Le contrat FRA est sans paiement de prime au départ.

Définition 1.9 (Taux Forward)

Le taux forward $F(t, T, S)$ est le taux qui rend nulle la valeur du contrat $FRA(t, T, S)$.
Il est donné par :

$$F(t, T, S) := \frac{1}{\tau(T, S)} \left(\frac{B(t, T)}{B(t, S)} - 1 \right)$$

Remarque 1.9

Ce taux forward $F(t, T, S)$ peut être vu comme une estimation du futur taux spot $L(T, S)$

Définition 1.10 (Taux Forward instantané)

Le taux forward instantané $f(t, T)$ correspond au taux forward pour une durée de composition infinitésimale .

$$f(t, T) := \lim_{S \rightarrow T^+} F(t, T, S)$$

On notera $r(t, \theta)$, le taux forward instantané en t , de maturité $t + \theta$

Proposition 1.1

$$\begin{aligned} B(t, T) &= \exp \left(- \int_t^T f(t, u) du \right) \\ &= \exp \left(- \int_0^{T-t} r(t, u) du \right) \end{aligned}$$

Démonstration 1.1

- Nous avons :

$$\begin{aligned} f(t, T) &:= \lim_{S \rightarrow T^+} F(t, T, S) \\ &= - \lim_{S \rightarrow T^+} \frac{1}{B(t, S)} \frac{B(t, S) - B(t, T)}{S - T} \\ &= - \frac{1}{B(t, T)} \frac{\partial B(t, T)}{\partial T} \\ &= - \frac{\partial \ln B(t, T)}{\partial T} \end{aligned}$$

- La seconde partie s'obtient en effectuant un changement de variable et en remarquant que :

$$r(t, T - t) = f(t, T)$$

□

Remarque 1.10

D'après la proposition 1.1 p. 15 , on voit que modéliser le comportement du taux forward instantané revient à modéliser celui du zéro-coupon.

Chapitre 2

Le modèle de Brace, Gatarek & Musiela un cas particulier du modèle de Heath, Jarrow & Merton

2.1 Hypothèses du modèle HJM

Diffusion du Zéro-coupon

On suppose que le processus du zéro-coupon $\{B(t, T), t \geq 0\}$ suit une diffusion lognormale :

$$\boxed{dB(t, T) = B(t, T) (r(t, 0)dt - \sigma(t, T)dW_t)} \quad (2.1)$$

Remarque 2.1 (Symétrie du mouvement brownien)

Si W_t est un mouvement brownien, alors $-W_t$ est aussi un mouvement brownien.
Le signe $-$ apparaissant dans l'équation (2.1) p. 17 n'a qu'une valeur technique

Diffusion du processus des taux forward instantané $\{f(t, T), t \in [0, T]\}$

Proposition 2.1 (Diffusion du taux forward instantané)

En posant :

$$\sigma_f(t, T) = \frac{\partial \sigma(t, T)}{\partial T}$$

On a la diffusion suivante pour le taux forward instantané :

$$\boxed{df(t, T) = \sigma_f(t, T) \left(\int_t^T \sigma_f(t, u) du \right) dt + \sigma_f(t, T) dW_t}$$

Démonstration 2.1

Nous avons:

$$f(t, T) = -\frac{\partial \ln B(t, T)}{\partial T} \Big|_T$$

Ainsi:

$$\begin{aligned} df(t, T) &= d \left(-\frac{\partial \ln B(t, T)}{\partial T} \Big|_T \right) \\ &= -d \left(\frac{\partial \ln B(t, T)}{\partial T} \Big|_T \right) \\ &= -\frac{\partial d \ln B(t, T)}{\partial T} \Big|_T \end{aligned}$$

Appliquons la formule de Itô¹ au processus $\{Y_t = g(B(t, T)), t \geq 0\}$ avec $g(x) = \ln(x)$

On obtient :

$$Y_t = g(B(t, T)) = g(B(0, T)) + \int_0^t \frac{1}{B(s, T)} dB(s, T) + \frac{1}{2} \int_0^t \frac{-1}{B(s, T)^2} d \langle B(\cdot, T) \rangle_s$$

On a d'une part,

$$dB(t, T) = B(t, T) (r(t, 0)dt - \sigma(t, T)dW_t)$$

et d'autre part,

$$\langle B(\cdot, T) \rangle_s = \int_0^s \sigma^2(u, T) B(u, T)^2 du$$

Ainsi :

$$Y_t = Y_0 + \int_0^t (r(s, 0)ds - \sigma(s, T)dW_s) - \frac{1}{2} \int_0^t \sigma^2(s, T)ds$$

Autrement écrit:

$$dY_t = \left(r(t, 0) - \frac{1}{2} \sigma^2(t, T) \right) dt - \sigma(t, T)dW_t$$

Nous obtenons la diffusion suivante pour $\{f(t, T); t \in [0, T]\}$

$$df(t, T) = \sigma(t, T) \partial_T \sigma(t, T) dt + \partial_T \sigma(t, T) dW_t$$

Le résultat suit immédiatement en posant : $\sigma_f(t, T) = \partial_T \sigma(t, T)$

□

1. cf proposition B.7 p. 97 dans l'Annexe

2.2 Vers le modèle BGM

Définition 2.1 (Taux IBOR)

Les taux d'intérêt IBOR (Interbank Offered Rate) sont des indices usuels du marché monétaire. Ils servent de référence pour le prix de l'argent emprunté pendant des durées inférieures à un an. Ils sont fixés

- soit à Francfort pour l'euro, on les appelle alors **EURIBOR**
- soit à Londres pour le dollar US, la livre sterling, le franc suisse ... on les appelle **LIBOR**

Notation 2.1

On note $L(t, \theta; \delta)$ le taux IBOR forward en t pour une composition entre $t + \theta$ et $t + \theta + \delta$; il s'agit du taux auquel les prêts et emprunts seront effectués entre $t + \theta$ et $t + \theta + \delta$.

δ représente la durée de composition des taux entre les deux dates.

Par exemple $\delta = 3$ mois pour l'EURIBOR 3 mois, $\delta = 6$ mois pour l'EURIBOR 6 mois ...

Proposition 2.2 (Diffusion du taux IBOR)

Le processus du taux IBOR défini par :

$$1 + \delta L(t, \theta; \delta) := \exp \left(\int_{\theta}^{\theta + \delta} r(t, u) du \right) \quad (2.2)$$

suit la diffusion suivante :

$$dL(t, \theta; \delta) = \left(\frac{\partial}{\partial \theta} L(t, \theta; \delta) + L(t, \theta; \delta) \gamma(t, \theta; \delta) \sigma(t, t + \theta) + \frac{\delta L^2(t, \theta; \delta)}{1 + \delta L(t, \theta; \delta)} \gamma^2(t, \theta; \delta) \right) dt + L(t, \theta; \delta) \gamma(t, \theta; \delta) dW_t$$

Remarque 2.2

La démonstration de ce résultat s'appuiera fortement sur la diffusion du taux forward instantané à échéance glissante que nous allons préalablement préciser.

Proposition 2.3 (Diffusion de $\{r(t, \theta), t \geq 0\}$)

La diffusion du taux forward à échéance glissante est donnée par :

$$dr(t, \theta) = \frac{\partial}{\partial \theta} \left(r(t, \theta) + \frac{1}{2} \left(\int_t^T \sigma_f(t, u) du \right)^2 \right) + \sigma_f(t, t + \theta) dW_t$$

Démonstration 2.2 (Diffusion de $\{r(t, \theta), t \geq 0\}$)

En reprenant le résultat de la proposition 2.1 p. 17 nous avons :

$$\begin{aligned} dr(t, T - t) &= df(t, T) + \frac{\partial}{\partial T} f(t, T) dt \\ &= \sigma_f(t, T) \left(\int_t^T \sigma_f(t, u) du \right) dt + \sigma_f(t, T) dW_t + \partial_T f(t, T) dt \end{aligned}$$

En posant $\theta = T - t$, nous obtenons :

$$dr(t, \theta) = \frac{\partial}{\partial \theta} \left(r(t, \theta) + \frac{1}{2} \left(\int_t^{t+\theta} \sigma_f(t, u) du \right)^2 \right) dt + \sigma_f(t, t + \theta) dW_t$$

en appliquant la formule de dérivation des fonctions composées à l'expression $\frac{\partial}{\partial x} \left[\left(\int_t^{t+x} \sigma_f(t, u) du \right)^2 \right]$

Cette expression nous donne donc la diffusion du taux forward avec échéance glissante sous la probabilité risque neutre.

□

Démonstration 2.3 (Diffusion du taux IBOR)

Pour définir le processus de volatilité $\sigma_f(t, t + \theta)$, nous fixons $\delta > 0$ (par exemple $\delta = 0.25$ ce qui correspond à des taux trimestriels) et on suppose que pour tout $x \geq 0$ le processus du taux -IBOR $\{L(t, \theta; \delta); t \geq 0\}$ défini par

$$1 + \delta L(t, \theta; \delta) = \exp \left(\int_{\theta}^{\theta + \delta} r(t, u) du \right) \quad (2.3)$$

a une structure de volatilité lognormale i.e.

$$\boxed{dL(t, \theta; \delta) = \dots dt + L(t, \theta; \delta) \gamma(t, \theta; \delta) dW_t} \quad (2.4)$$

où la fonction $\gamma : \mathbb{R}_+^2 \mapsto \mathbb{R}^d$ est déterministe

$$\begin{aligned} d \left\{ \int_{\theta}^{\theta + \delta} r(t, u) du \right\} &= \int_{\theta}^{\theta + \delta} dr(t, u) du \\ &= \int_{\theta}^{\theta + \delta} \left\{ \frac{\partial}{\partial u} \left(r(t, u) + \frac{1}{2} \left(\int_t^{t+u} \sigma_f(t, v) dv \right)^2 \right) dt + \sigma_f(t, t + u) dW_t \right\} du \\ &\quad \text{en utilisant la proposition 2.3 p. 19} \\ &= \left[\int_{\theta}^{\theta + \delta} \frac{\partial}{\partial u} \left\{ r(t, u) + \frac{1}{2} \left(\int_t^{t+u} \sigma_f(t, v) dv \right)^2 \right\} du \right] dt + \left[\int_{\theta}^{\theta + \delta} \sigma_f(t, t + u) du \right] dW_t \\ &= \left[r(t, u) + \frac{1}{2} \left(\int_t^{t+u} \sigma_f(t, v) dv \right)^2 \right]_{u=\theta}^{u=\theta + \delta} dt \\ &\quad + \left[\int_0^{\theta + \delta} \sigma_f(t, t + u) du - \int_0^{\theta} \sigma_f(t, t + u) du \right] dW_t \\ &= \left[r(t, \theta + \delta) - r(t, \theta) + \frac{1}{2} \left(\int_t^{t+\theta + \delta} \sigma_f(t, s) ds \right)^2 - \frac{1}{2} \left(\int_t^{t+\theta} \sigma_f(t, s) ds \right)^2 \right] dt \\ &\quad + \left[\int_0^{\theta + \delta} \sigma_f(t, t + u) du - \int_0^{\theta} \sigma_f(t, t + u) du \right] dW_t \\ &= \left[r(t, \theta + \delta) - r(t, \theta) + \frac{1}{2} (\sigma(t, t + \theta + \delta)^2 - \sigma(t, t + \theta)^2) \right] dt \\ &\quad + (\sigma(t, t + \theta + \delta) - \sigma(t, t + \theta)) dW_t \end{aligned}$$

On obtient alors :

$$\begin{aligned} dL(t, \theta; \delta) &= d \left[\frac{\exp\left\{\int_{\theta}^{\theta+\delta} r(t, u) du\right\} - 1}{\delta} \right] \\ &= \frac{1}{\delta} \exp\left\{\int_{\theta}^{\theta+\delta} r(t, u) du\right\} d \left(\int_{\theta}^{\theta+\delta} r(t, u) du \right) \\ &\quad + \frac{1}{2\delta} \exp\left\{\int_{\theta}^{\theta+\delta} r(t, u) du\right\} d \left\langle \int_{\theta}^{\theta+\delta} r(t, u) du \right\rangle \end{aligned}$$

En utilisant la diffusion de $\{r(t, \theta), t \geq 0\}$ donnée par la proposition 2.3 p. 19, et en remarquant que :

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial \theta} L(t, \theta; \delta) &= \frac{\partial}{\partial \theta} \left[\frac{\exp\left\{\int_{\theta}^{\theta+\delta} r(t, u) du\right\} - 1}{\delta} \right] \\ &= \frac{1}{\delta} [1 + \delta L(t, \theta; \delta)] [r(t, \theta + \delta) - r(t, \theta)] \end{aligned}$$

Nous obtenons l'équation suivante

$$\begin{aligned} dL(t, \theta; \delta) &= \left(\frac{\partial}{\partial \theta} L(t, \theta; \delta) + \delta^{-1} (1 + \delta L(t, \theta; \delta)) \sigma(t, t + \theta + \delta) (\sigma(t, t + \theta + \delta) - \sigma(t, t + \theta)) \right) dt \\ &\quad + \delta^{-1} (1 + \delta L(t, \theta; \delta)) (\sigma(t, t + \theta + \delta) - \sigma(t, t + \theta)) dW_t \end{aligned}$$

Cette dernière équation et l'expression (2.4) p. 20 impliquent que pour tout $\theta \geq 0$

$$\sigma(t, t + \theta + \delta) - \sigma(t, t + \theta) = \frac{\delta L(t, \theta; \delta)}{1 + \delta L(t, \theta; \delta)} \gamma(t, \theta; \delta) \quad (2.5)$$

On obtient finalement :

$$dL(t, \theta; \delta) = \left(\frac{\partial}{\partial \theta} L(t, \theta; \delta) + L(t, \theta; \delta) \gamma(t, \theta; \delta) \sigma(t, t + \theta) + \frac{\delta L^2(t, \theta; \delta)}{1 + \delta L(t, \theta; \delta)} \gamma^2(t, \theta; \delta) \right) dt + L(t, \theta; \delta) \gamma(t, \theta; \delta) dW_t$$

□

Remarque 2.3

Le taux IBOR forward s'exprime en fonction des zéro-coupons spots de la manière suivante :

$$L(t, \theta; \delta) = \frac{1}{\delta} \left(\frac{B(t, t + \theta) - B(t, t + \theta + \delta)}{B(t, t + \theta + \delta)} \right)$$

Remarque 2.4 (Position du processus)

Etant donnée la position en t du processus du taux IBOR $L(t, \theta; \delta)$, en posant $x := t' - t$, durée écoulée entre les dates t et t' , sa position en t' est : $L(t', \theta - x; \delta)$

Chapitre 3

Modèle BGM : calibration par rapport aux caps

3.1 Valorisation des caps sur le marché

3.1.1 Les caps : des produits liquides sur le marché des taux

Echéancier

On se donne un ensemble de dates possibles pour le taux forward : $\{T_1, T_2, \dots, T_n\}$

On pose :

- $\delta := T_i - T_{i-1}$ en supposant que la durée écoulée entre deux dates consécutives est constante.
- $T_0 := t$ c'est à dire la date d'aujourd'hui.
- $T_i := t + i\delta, \quad i \in \llbracket 1, n \rrbracket$

Définition 3.1 (Cap-Caplets)

Un cap peut être vu comme un portefeuille de calls dont le sous-jacent est le taux IBOR. En effet, chaque versement n'est effectué en T_i que si le flux $(L(T_{i-1}, 0; \delta) - K)$ est positif.

Typiquement, pour un nominal N , le contrat verse à chaque date $T_i, i \in \llbracket 1, n \rrbracket$, le flux :

$N\delta(L(T_{i-1}, 0; \delta) - K)_+$, c'est à dire le différentiel entre :

– le taux IBOR entre T_{i-1} et $T_{i-1} + \delta = T_i$ fixé en T_{i-1}

– un taux fixe K établi à l'avance

La quantité δ correspond à la durée de composition des taux.

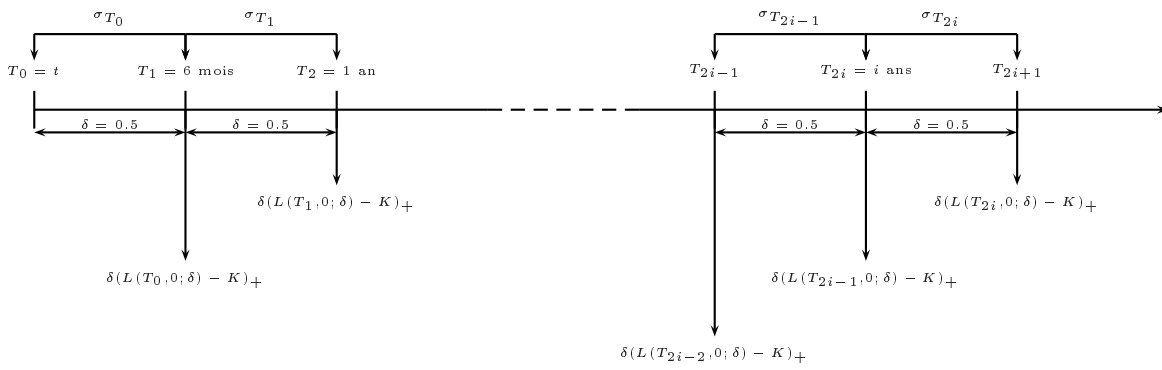
Un cap peut être décomposé en la somme de n contrats versant le flux décrit précédemment.

Chacun de ces contrats, appelé **Caplet**, verse le flux précédent.

Remarque 3.1 (Cadre de travail)

Notre étude se limitera à considérer des caps dont le sous-jacent est le taux IBOR 6 mois, ie : $\delta = 0.5$
Les échéances des caps seront des multiples d'une année (1 an, 2 ans, \dots , 10 ans), ainsi l'indice intervenant dans la date échéance du cap sera pair.

Mise en place des notations :



Remarque 3.2 (Nominal)

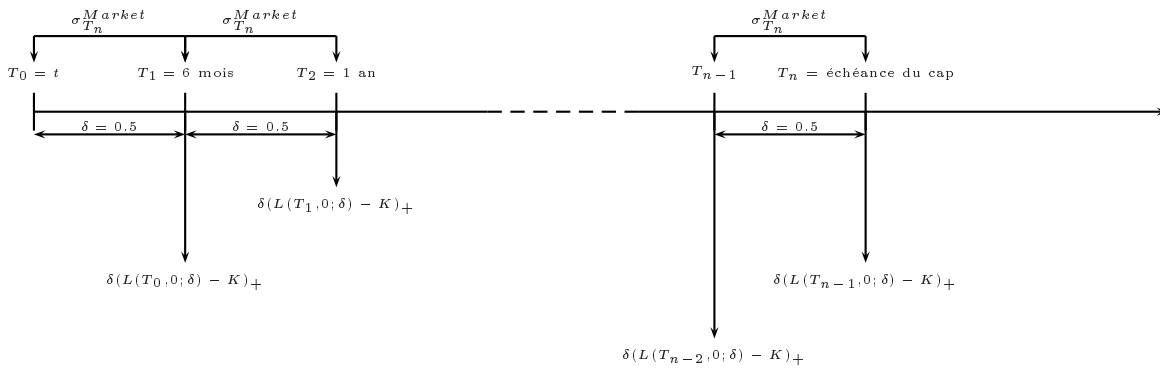
Valoriser un cap basé sur un nominal N est équivalent à valoriser un cap sur une unité de devise puis à multiplier ce prix par N . Ainsi, pour alléger les notations, nous considérerons des caps sur une unité de devise.

3.1.2 Pratiques du marché - Cotation en volatilité

Le prix d'un cap est obtenu en sommant les prix des n caplets le constituant. En fait, le premier caplet étant entièrement déterministe, il s'agit plutôt d'une somme à $n-1$ termes. Chacun des caplets est valorisé par la formule de Black :

$$Caplet^{Market}(t, T_i, K) = B(t, T_i) g_{K, \sigma_{T_{i-1}}} \sqrt{T_{i-1} - t} \left(L(t, (i-1)\delta; \delta) \right) \quad (3.1)$$

Sur le marché, seules les volatilités des caps sont cotées pour les différentes maturités. Les volatilités des caplets constituant un cap sont supposées égales à la volatilité du cap cotée sur le marché.



Ainsi, la formule du prix du marché pour le cap de maturité T_n (avec $n = 2k$) est :

$$Cap^{Market}(t, T_n, K) = \sum_{i=1}^{i=n} B(t, T_i) g_{K, \sigma_{T_n}} \sqrt{T_i - t} \left(L(t, (i-1)\delta; \delta) \right) \quad (3.2)$$

avec σ_{T_n} , la volatilité cotée sur le marché du cap $\frac{n}{2}$ ans .

3.1.3 Volatilité implicite des caplets

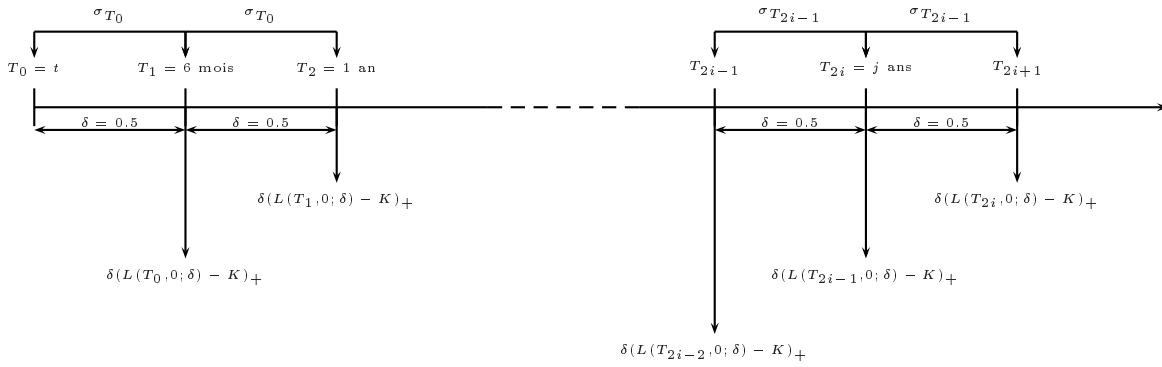
Néanmoins, à partir des différentes volatilités des caps cotées sur le marché, on peut déterminer par inversion de la formule de prix, la volatilité implicite de chaque caplet.

Pour cela, nous retiendrons deux méthodes :

- La méthode de stripping
- L'interpolation linéaire

a) Stripping

Il s'agit de considérer les volatilités des caps cotées sur le marché pour différentes maturités: 1 an, 2 an, 3 an, ... jusqu'à 10 ans et de supposer que deux caplets intervenant la même année ont même volatilité.



Il s'agit alors de résoudre les systèmes équations :

- Etape 1 : Initialisation

$$\sigma_{T_0} = \sigma_{T_1} \quad (3.3)$$

$$= \sigma_{T_2}^{Market} \quad (3.4)$$

$$(3.5)$$

- Etape 2 :

$$\begin{cases} Cap^{Market}(t, T_4, K) = \sum_{i=1}^{i=4} B(t, T_i) g_{K, \sigma_{T_{i-1}}} \sqrt{T_{i-1}-t} (L(t, (i-1)\delta; \delta)) \\ \sigma_{T_2} = \sigma_{T_3} \\ \vdots \end{cases} \quad (3.6)$$

- Etape n - 2:

$$\begin{cases} Cap^{Market}(t, T_n, K) = \sum_{i=1}^{i=n} B(t, T_i) g_{K, \sigma_{T_{i-1}}} \sqrt{T_{i-1}-t} (L(t, (i-1)\delta; \delta)) \\ \sigma_{T_{n-2}} = \sigma_{T_{n-1}} \end{cases} \quad (3.7)$$

où σ_{T_i} correspond à la volatilité du caplet d'échéance T_{i+1}

On résoud ces systèmes de manière itérative en inversant les formules de prix par un algorithme du type Newton-Raphson .

Le stripping suivant a été effectué avec les caps à la monnaie, produits les plus liquides sur le marché des taux d'intérêt.

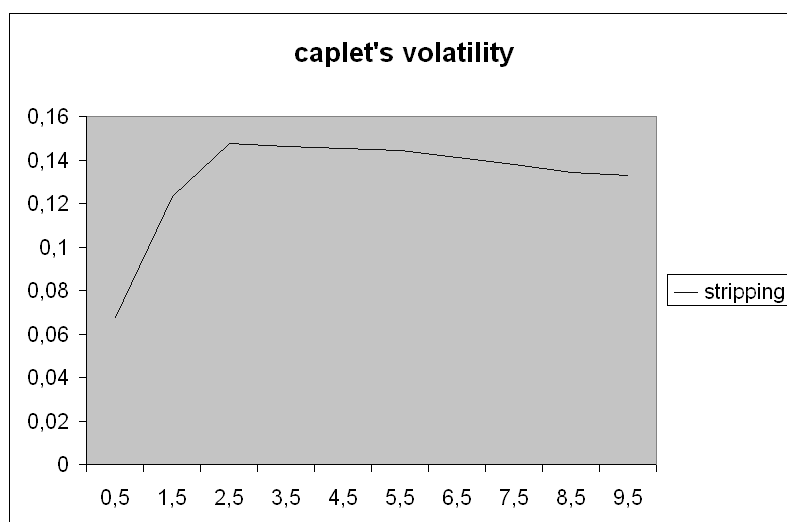


FIG. 3.1 – *Volatilités des caplets par stripping*

b) Interpolation linéaire

Cette méthode repose sur le fait que la différence entre le prix de deux caps de même strike K et de maturités consécutives T_{2i} et T_{2i+2} est égale à la somme des prix des caplets de maturités T_{2i+1} et T_{2i+2} .¹

Autrement écrit :

$$Cap^{Market}(t, T_{2i+2}, K) - Cap^{Market}(t, T_{2i}, K) = Caplet^{Market}(t, T_{2i+1}, K) + Cap^{Market}(t, T_{2i+2}, K)$$

En remarquant que le cap de maturité 1 an est uniquement lié à la volatilité du caplet de maturité 1 an² et en ajoutant une interpolation linéaire, on peut déterminer toutes les volatilités des caplets³.

Il s'agit de résoudre récursivement le système :

$$\begin{cases} \sigma_{T_0} &= \sigma_{T_2}^{Market} \\ Cap^{Market}(t, T_{2i+2}, K) - Cap^{Market}(t, T_{2i}, K) &= \delta B(t, T_{2i+2}) g_{K, \sigma_{T_{2i+1}}} \sqrt{T_{2i+1}-t} \left(K(t, T_{2i+1}) \right) \\ &\quad + \delta B(t, T_{2i+1}) g_{K, \sigma_{T_{2i}}} \sqrt{T_{2i}-t} \left(K(t, T_{2i}) \right) \\ \sigma_{T_{2i+1}} &= 2\sigma_{T_{2i}} - \sigma_{T_{2i-1}} \end{cases}$$

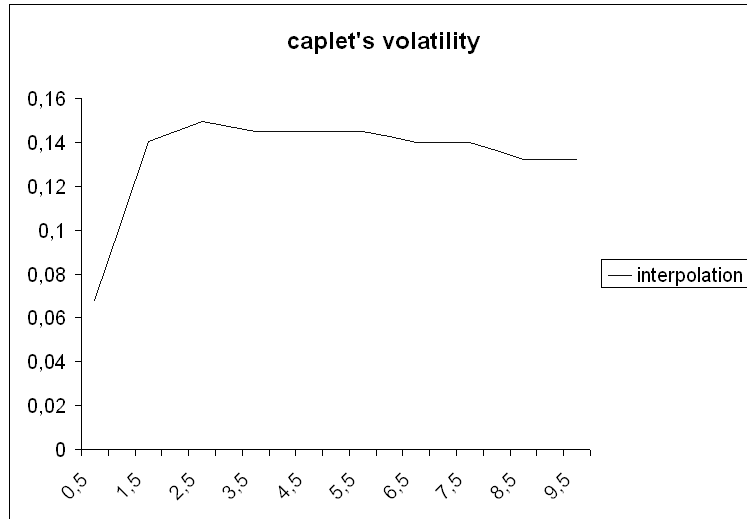


FIG. 3.2 – Volatilités des caplets par la méthode d'interpolation linéaire

1. par la proposition 3.5 p. 32
2. Le premier flux étant complètement déterministe
3. via un algorithme du type Newton-Raphson

Remarque 3.3 (Comparaison des deux méthodes)

Les résultats obtenus par chacune des deux méthodes sont très similaires.
On observe la même tendance : la volatilité des caplets est fortement croissante sur le court terme et légèrement décroissante sur le long terme.

3.2 Valorisation des caps dans le modèle BGM

3.2.1 Probabilité Forward Neutre et Propriété de Martingale

Définition 3.2 (Probabilité Forward Neutre)

On appelle probabilité T_i -forward neutre et on note \mathbb{Q}_{T_i} , la mesure sous laquelle tout actif S actualisé par le zéro-coupon de maturité T_i est martingale.

Proposition 3.1 (Martingale)

Sous la probabilité T_{i+1} -forward neutre, le taux IBOR de maturité T_i satisfait :

$$dL(t, i\delta; \delta) = \gamma(t, i\delta; \delta) L(t, i\delta; \delta) dW_t^{T_{i+1}}(t)$$

avec $W_t^{T_{i+1}}$ un $\mathbb{Q}_{T_{i+1}}$ -mouvement brownien.

Démonstration 3.1

On a déjà vu (cf. remarque 2.3 p. 21) que :

$$L(t, \theta; \delta) = \frac{1}{\delta} \left(\frac{B(t, t + \theta) - B(t, t + \theta + \delta)}{B(t, t + \theta + \delta)} \right)$$

Ainsi, $L(t, i\delta; \delta)$ peut être vu comme un actif actualisé par le zéro-coupon de maturité T_{i+1} , c'est donc une martingale sous $\mathbb{Q}_{T_{i+1}}$. Son terme de tendance étant alors nul sous $\mathbb{Q}_{T_{i+1}}$ et la volatilité étant invariante par changement de numéraire (cf. chapitre E p. 103 dans l'Annexe), on obtient bien :

$$dL(t, i\delta; \delta) = \gamma(t, i\delta; \delta) L(t, i\delta; \delta) dW_t^{T_{i+1}}(t)$$

□

Remarque 3.4 (Important)

Sous la probabilité T_{i+1} -forward neutre et en posant :

$$\Sigma_i^2 := \frac{1}{T_i - t} \int_t^{T_i} \gamma^2(s, T_i - s; \delta) ds$$

Le logarithme du rapport $\frac{L(T_i, 0, \delta)}{L(t, i\delta, \delta)}$ suit une loi normale

– de moyenne $-\frac{1}{2}\Sigma_i^2(T_i - t)$

– de variance $\Sigma_i^2(T_i - t)$.

On peut écrire :

$$L(T_i, 0; \delta) = L(t, i\delta; \delta) \exp \left\{ -\frac{1}{2}\Sigma_i^2(T_i - t) + \Sigma_i \sqrt{T_i - t} U \right\} \quad (3.8)$$

cf. remarque 2.4 page 21 pour la position du processus

avec $U \stackrel{\mathcal{L}}{\sim} \mathcal{N}(0, 1)$

Proposition 3.2 (Mouvements Browniens Forwards)

Nous avons la relation suivante entre les différents mouvements browniens forwards :

$$dW_t^{T_{i+1}} = dW_t^{T_i} + \frac{\delta L(t, i\delta; \delta)}{1 + \delta L(t, i\delta; \delta)} \gamma(t, i\delta; \delta) dt$$

Démonstration 3.2 (Mouvements Browniens Forwards)

On écrit le quotient de Radon-Nikodym associé à ce changement de probabilité :

$$\begin{aligned} Z &= \frac{d\mathbb{Q}_{T_i}}{d\mathbb{Q}_{T_{i+1}}} \\ &= \frac{B(t, T_i)}{B(t, T_{i+1})} \frac{B(T_i, T_{i+1})}{B(T_i, T_i)} \end{aligned}$$

Par le Théorème de Girsanov⁴, on sait que Z est une martingale exponentielle sous $\mathbb{Q}_{T_{i+1}}$, ce qui peut s'écrire :

$$\frac{dZ}{Z} = \psi dW_t^{T_{i+1}}$$

avec

$$dW_t^{T_{i+1}} = dW_t^{T_i} + \psi dt$$

On a :

$$\begin{aligned} \frac{dZ}{Z} &= \frac{d \left(\frac{B(t, T_i)}{B(t, T_{i+1})} \right)}{\frac{B(t, T_i)}{B(t, T_{i+1})}} \\ &= \frac{d(1 + \delta L(t, i\delta; \delta))}{1 + \delta L(t, i\delta; \delta)} \end{aligned}$$

En substituant la diffusion du taux IBOR forward donnée à la proposition 3.1 p. 29, on obtient :

$$\frac{dZ}{Z} = \frac{\delta \gamma(t, i\delta; \delta) L(t, i\delta; \delta)}{1 + \delta L(t, i\delta; \delta)} dW_t^{T_{i+1}}$$

Par identification, on trouve :

$$\psi = \frac{\delta \gamma(t, i\delta; \delta) L(t, i\delta; \delta)}{1 + \delta L(t, i\delta; \delta)}$$

Et, par suite :

$$dW_t^{T_{i+1}} = dW_t^{T_i} + \frac{\delta \gamma(t, i\delta; \delta) L(t, i\delta; \delta)}{1 + \delta L(t, i\delta; \delta)} dt$$

□

4. cf. proposition B.8 p. 97 dans l'Annexe

Valorisation par AOA :

On rappelle le principe de valorisation en absence d'opportunité d'arbitrage:

Proposition 3.3 (Pricing des produits dérivés)

Considérons un flux $\phi(S_T)$ versé à la date T .

Soit \mathbb{Q}^{T^} , la probabilité T^* -forward.*

La valeur du flux en $t < T$ est :

$$\text{Prix}(t, \phi(S_T)) = \mathbb{E} \left[\frac{\beta(t)}{\beta(T)} \phi(S_T) / \mathcal{F}_t \right] = B(t, T^*) \mathbb{E}_{\mathbb{Q}^{T^*}} [\phi(S_T) / \mathcal{F}_t]$$

3.2.2 Pricing des caps dans le modèle BGM : objectif Calibration

Proposition 3.4 (Prix d'un caplet)

Le prix en t du caplet versant en T_i le différentiel entre le taux IBOR $L(T_{i-1}, 0; \delta)$ observé en T_{i-1} et le taux fixe K est donné par :

$$\text{Caplet}^{BGM}(t, T_i, K) = \delta B(t, T_i) g_{K, \Sigma_{i-1} \sqrt{T_{i-1}-t}}(L(t, (i-1)\delta; \delta))$$

$$\text{avec } \Sigma_{i-1} = \frac{1}{\sqrt{T_{i-1}-t}} \sqrt{\int_t^{T_{i-1}} \gamma^2(s, T_{i-1} - s; \delta) ds}$$

Démonstration 3.3 (Prix d'un caplet)

Nous avons :

$$\begin{aligned} \text{Caplet}^{BGM}(t, T_i, K) &= \mathbb{E} \left[\frac{\beta(t)}{\beta(T_i)} (L(T_{i-1}, 0; \delta) - K)_+ \delta / \mathcal{F}_t \right] \\ &= B(t, T_i) \mathbb{E}_{\mathbb{Q}_{T_i}} [(L(T_{i-1}, 0; \delta) - K)_+ \delta / \mathcal{F}_t] \end{aligned}$$

avec \mathbb{Q}_{T_i} la probabilité T_i -forward neutre.

Or, en utilisant la diffusion proposition 3.1 p. 29, on voit que l'on peut appliquer la formule de Black & Scholes pour un call européen avec drift nul⁵ :

$$\mathbb{E}_{\mathbb{Q}_{T_i}} [(L(T_{i-1}, 0; \delta) - K)_+ \delta / \mathcal{F}_t] = L(t, (i-1)\delta; \delta) \mathcal{N}(h(t, T_{i-1})) - K \mathcal{N}(h(t, T_{i-1}) - \Sigma_{i-1} \sqrt{T_{i-1} - t})$$

avec :

$$\begin{aligned} \Sigma_{i-1} &:= \frac{1}{\sqrt{T_{i-1} - t}} \sqrt{\int_t^{T_{i-1}} \gamma^2(s, T_{i-1} - s; \delta) ds} \\ h(t, T_{i-1}) &:= \frac{\log \left[\frac{L(t, (i-1)\delta; \delta)}{K} \right] + \frac{1}{2} \Sigma_{i-1}^2 (T_{i-1} - t)}{\Sigma_{i-1} \sqrt{T_{i-1} - t}} \end{aligned}$$

□

Proposition 3.5 (Prix d'un cap)

Le prix d'un cap est donné par :

$$\text{Cap}^{BGM}(t, T_n, K) = \sum_{i=1}^{i=n} B(t, T_i) g_{K, \Sigma_{i-1} \sqrt{T_{i-1}-t}}(K(t, T_{i-1}))$$

Démonstration 3.4 (Prix d'un cap)

Il suffit d'écrire :

$$\text{Cap}^{BGM}(t, T_n, K) = \sum_{i=1}^{i=n} \text{Caplet}^{BGM}(t, T_i, K)$$

□

5. cf. proposition 1.5 p. 56

3.3 Calibration du modèle BGM à un facteur

3.3.1 Méthode

Sur le marché des taux d'intérêt, les caps sont des produits dérivés parmi les plus liquides. Par cohérence avec le marché, la calibration du modèle s'effectuera de manière à retrouver les prix de ces produits. Pour calibrer notre modèle, nous allons chercher les paramètres γ qui minimisent l'écart entre les prix des caps sur le marché et les prix des caps donnés par le modèle. Autrement dit, on va chercher les paramètres tels que :

$$Cap^{Market}(t, T_n, K) = Cap^{BGM}(t, T_n, K) \quad (3.9)$$

Compte-tenu des résultats précédents, on peut écrire $\forall i \in \llbracket 1, n \rrbracket$,

$$B(t, T_i) g_{K, \sigma_{T_{i-1}}} \sqrt{T_{i-1} - t} \left(L(t, (i-1)\delta; \delta) \right) = B(t, T_i) g_{K, \Sigma_{T_{i-1}}} \sqrt{T_{i-1} - t} \left(L(t, (i-1)\delta; \delta) \right)$$

On voit apparaitre les contraintes de calibration du modèle

Contraintes de Calibration

$\forall i \in \llbracket 0, n-1 \rrbracket$,

$$\frac{1}{T_i - t} \int_t^{T_i} \gamma^2(s, T_i - s; \delta) ds = \sigma_{T_i}^2 \quad (3.10)$$

3.3.2 Hypothèses sur la volatilité

On suppose dans cette section que la fonction γ ne dépend que de l'écart à l'échéance :

$$\gamma(t, \theta; \delta) = \gamma(\theta; \delta)$$

On suppose également que γ est une fonction en escalier sur $\{T_0, T_1, \dots, T_{n-1}\}$.

Autrement dit, la volatilité est constante sur chaque intervalle $[T_i, T_{i+1}]$.

En notant γ_i la valeur de la fonction sur l'intervalle $[T_i, T_{i+1}]$ avec $i \in \llbracket 0, n-1 \rrbracket$, ceci s'écrit :

$$\gamma(\theta, \delta) = \sum_{i=0}^{n-1} \gamma_i \mathbb{1}_{\{i\delta \leq \theta < (i+1)\delta\}} \quad (3.11)$$

La contrainte de calibration (3.10) p. 33 s'écrit alors :

$$\frac{1}{T_i - t} \int_0^{i\delta} \gamma^2(\tau, \delta) d\tau = \sigma_{T_i}^2$$

En remarquant que :

$$\begin{aligned} \int_{i\delta}^{(i+1)\delta} \gamma^2(\tau, \delta) d\tau &= \int_0^{(i+1)\delta} \gamma^2(\tau, \delta) d\tau - \int_0^{i\delta} \gamma^2(\tau, \delta) d\tau \\ \Rightarrow \delta \gamma_i^2 &= (i+1) \delta \sigma_{T_{i+1}}^2 - i \delta \sigma_{T_i}^2 \end{aligned}$$

on voit qu'il est possible de calibrer le modèle de manière itérative en utilisant :

$$\begin{cases} \gamma_0 &= \sigma_{T_0} \\ \gamma_i^2 &= (i+1) \sigma_{T_{i+1}}^2 - i \sigma_{T_i}^2 \end{cases}$$

Chapitre 4

Simulation

Pour valoriser des produits dérivés sur taux d'intérêt pour lesquels il n'existe pas de formules fermées, nous aurons recours à des simulation de Monte Carlo. Il est alors nécessaire de fixer la mesure de probabilité sous laquelle ces simulations seront effectuées.

Nous utiliserons des versions discrétisées des équations suivantes :

$$dW_t^{T_{i+1}} = dW_t^{T_i} + \frac{\delta L(t, i\delta; \delta)}{1 + \delta L(t, i\delta; \delta)} \gamma(i\delta; \delta) dt, \quad i \in \llbracket 1, n \rrbracket \quad (4.1)$$

$$dL(t, i\delta; \delta) = \underbrace{\gamma(i\delta; \delta)}_{= \gamma_i \text{ par (3.11) p. 33}} L(t, i\delta; \delta) dW_t^{T_{i+1}}(t), \quad i \in \llbracket 0, n-1 \rrbracket \quad (4.2)$$

Remarque 4.1 (Pas de discrétisation)

Le pas de discrétisation en temps de ces équations introduira un biais dans la simulation dont il faudra tenir compte.

4.1 Choix d'une mesure pour la simulation

Définition 4.1 (Mesure Terminale)

On appelle mesure terminale la mesure T_n -forward neutre

Proposition 4.1 (Taux IBOR Forward sous la mesure Terminale)

$\forall i \in \llbracket 0, n-1 \rrbracket$:

$$dL(t, i\delta; \delta) = L(t, i\delta; \delta) \left[- \sum_{j=i+1}^{n-1} \left(\frac{\delta L(t, j\delta; \delta)}{1 + \delta L(t, j\delta; \delta)} \gamma_j \gamma_i \right) dt + \gamma_i dW_t^{T_n} \right]$$

Démonstration 4.1

On raisonne par récurrence sur n

si $n = 1$ La propriété est trivialement vraie en utilisant l'équation (4.2) p. 35

si la propriété est vraie au rang n on a alors :

$$dL(t, i\delta; \delta) = L(t, i\delta; \delta) \left[- \sum_{j=i+1}^{n-1} \left(\frac{\delta L(t, j\delta; \delta)}{1 + \delta L(t, j\delta; \delta)} \gamma_j \gamma_i \right) dt + \gamma_i dW_t^{T_n} \right]$$

On peut écrire que :

$$\begin{aligned} \frac{dL(t, i\delta; \delta)}{L(t, i\delta; \delta)} &= - \sum_{j=i+1}^n \left(\frac{\delta L(t, j\delta; \delta)}{1 + \delta L(t, j\delta; \delta)} \gamma_j \gamma_i \right) dt \\ &\quad + \underbrace{\frac{\delta L(t, n\delta; \delta)}{1 + \delta L(t, n\delta; \delta)} \gamma_n \gamma_i dt + \gamma_i dW_t^{T_n}}_{= \gamma_i dW_t^{T_{n+1}} \text{ par (4.1) p. 35}} \end{aligned}$$

La propriété est donc aussi vraie au rang $n + 1$

□

Remarque 4.2

On voit alors que l'on peut simuler tous les taux forwards sous cette mesure de probabilité.

4.2 Algorithme de Simulation

→ Mise en place d'un maillage

On considère un maillage régulier $\{t_0 = t = T_0, \dots, t_k, \dots, t_m\}$ avec $m \in \mathbb{N}^*$

On note Δ_t , le pas de discrétisation en temps.

On a $t_k = t + k\Delta_t$

→ Discrétisation des équations

En notant $\Delta W^{T_{i+1}}(t_k)$, l'accroissement du brownien sous la probabilité T_{i+1} - forward sur l'intervalle $[t_k, t_{k+1}]$, l'algorithme de simulation s'appuiera sur les équation suivantes¹ :

$$\Delta W^{T_i}(t_k) = \Delta W^{T_{i+1}}(t_k) - \frac{\delta L(t_k, i\delta; \delta)}{1 + \delta L(t_k, i\delta; \delta)} \gamma_i \Delta_t, \quad i \in \llbracket 1, n \rrbracket \quad \text{et} \quad t_k \leq T_i \quad (4.3)$$

$$L(t_{k+1}, i\delta; \delta) = L(t_k, i\delta; \delta) \exp \left\{ \gamma_i \Delta W^{T_{i+1}}(t_k) - \frac{1}{2} \gamma_i^2 \Delta_t \right\}, \quad i \in \llbracket 1, n \rrbracket \quad \text{et} \quad t_k \leq T_i \quad (4.4)$$

1. L'expression des taux IBOR sous forme exponentielle leur assure d'être positifs

→ Simulation pas à pas

Inputs du modèle : La courbe des taux forwards $\{L(t, i\delta; \delta), i \in \llbracket 0, n-1 \rrbracket\}$

1. 1^{er} point du maillage

On cherche les $L(t_1, i\delta; \delta)$ pour $i \in \llbracket 0, n-1 \rrbracket$

(a) Accroissements du brownien

- On commence par simuler $\Delta W^{T_n}(t)$ comme une variable aléatoire normale centrée et de variance Δ_t^2
- On obtient tous les $\Delta W^{T_i}(t)$ par la relation :

$$\Delta W^{T_i}(t) = \Delta W^{T_{i+1}}(t) - \frac{\delta L(t, i\delta; \delta)}{1 + \delta L(t, i\delta; \delta)} \gamma_i \Delta_t, \quad i = 0, \dots, n-1$$

(b) Taux IBOR en t_1

On peut alors évaluer :

$$L(t_1, i\delta; \delta) = L(t, i\delta; \delta) \exp \left\{ \gamma_i \Delta W^{T_{i+1}}(t) - \frac{1}{2} \gamma_i^2 \Delta_t \right\}, \quad i = 0, \dots, n-1$$

2. 2^{ème} point du maillage

On cherche les $L(t_2, i\delta; \delta)$ pour $i \in \llbracket 0, n-1 \rrbracket$

On connaît à ce stade les $L(t_1, i\delta; \delta)$

(a) Accroissements du brownien

- On commence par simuler $\Delta W^{T_n}(t_1)$ comme une variable aléatoire normale centrée et de variance Δ_t
- On obtient tous les $\Delta W^{T_i}(t_1)$ par la relation :

$$\Delta W^{T_i}(t_1) = \Delta W^{T_{i+1}}(t_1) - \frac{\delta L(t_1, i\delta; \delta)}{1 + \delta L(t_1, i\delta; \delta)} \gamma_i \Delta_t, \quad i = 0, \dots, n-1$$

(b) Taux IBOR en t_2

On peut alors évaluer :

$$L(t_2, i\delta; \delta) = L(t_1, i\delta; \delta) \exp \left\{ \gamma_i \Delta W^{T_{i+1}}(t_1) - \frac{1}{2} \gamma_i^2 \Delta_t \right\}, \quad i = 0, \dots, n-1$$

2. cf. algorithme de Box & Muller en annexe

⋮

k. $k^{\text{ème}}$ point du maillage

On cherche les $L(t_k, i\delta; \delta)$ pour $i \in \llbracket 0, n-1 \rrbracket$
On connaît à ce stade les $L(t_{k-1}, i\delta; \delta)$

(a) Accroissements du brownien

- On commence par simuler $\Delta W^{T_n}(t_{k-1})$ comme une variable aléatoire normale centrée et de variance Δ_t
- On obtient tous les $\Delta W^{T_i}(t_{k-1})$ par la relation :

$$\Delta W^{T_i}(t_{k-1}) = \Delta W^{T_{i+1}}(t_{k-1}) - \frac{\delta L(t_1, i\delta; \delta)}{1 + \delta L(t_1, i\delta; \delta)} \gamma_i \Delta_t, \quad i = 0, \dots, n-1$$

(b) Taux IBOR en t_k

On peut alors évaluer :

$$L(t_k, i\delta; \delta) = L(t_{k-1}, i\delta; \delta) \exp \left\{ \gamma_i \Delta W^{T_{i+1}}(t_{k-1}) - \frac{1}{2} \gamma_i^2 \Delta_t \right\}, \quad i = 0, \dots, n-1$$

⋮

Nous récapitulons les étapes de simulation dans le tableau suivant :

k/i	0	1	...	$n-2$	$n-1$
	$\Delta W^{T_1}(t)$	$\Delta W^{T_2}(t)$...	$\Delta W^{T_{n-1}}(t)$	$\Delta W^{T_n}(t)$
1	$L(t_1, 0; \delta)$	$L(t_1, \delta; \delta)$...	$L(t_1, (n-2)\delta; \delta)$	$L(t_1, (n-1)\delta; \delta)$
2	$\Delta W^{T_1}(t_1)$	$\Delta W^{T_2}(t_1)$...	$\Delta W^{T_{n-1}}(t_1)$	$\Delta W^{T_n}(t_1)$
	$L(t_2, 0; \delta)$	$L(t_2, \delta; \delta)$...	$L(t_2, (n-2)\delta; \delta)$	$L(t_2, (n-1)\delta; \delta)$
⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮
	$\Delta W^{T_1}(t_{k-1})$	$\Delta W^{T_2}(t_{k-1})$...	$\Delta W^{T_{n-1}}(t_{k-1})$	$\Delta W^{T_n}(t_{k-1})$
k	$L(t_k, 0; \delta)$	$L(t_k, \delta; \delta)$...	$L(t_k, (n-2)\delta; \delta)$	$L(t_k, (n-1)\delta; \delta)$
⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮
	$\Delta W^{T_1}(t_{m-1})$	$\Delta W^{T_2}(t_{m-1})$...	$\Delta W^{T_{n-1}}(t_{m-1})$	$\Delta W^{T_n}(t_{m-1})$
m	$L(t_m, 0; \delta)$	$L(t_m, \delta; \delta)$...	$L(t_m, (n-2)\delta; \delta)$	$L(t_m, (n-1)\delta; \delta)$

Ainsi, il nous est maintenant possible de déterminer toutes les trajectoires des taux IBOR forwards et par suite d'obtenir les $L(T_i, 0; \delta)$ qui vont nous permettre de valoriser nos produits.

Chapitre 5

Valorisation de produits dans le modèle BGM

5.1 Taux IBOR forward de maturité 1 an

Proposition 5.1

Les taux IBOR forwards de maturité 1 an $\{L(t, i\delta; 2\delta), i\}$ s'expriment en fonctions des taux IBOR de maturité 6 mois de la manière suivante :

$$L(t, i\delta; 2\delta) = \frac{L(t, i\delta; \delta) + L(t, (i+1)\delta; \delta)}{2} + \frac{L(t, i\delta; \delta)L(t, (i+1)\delta; \delta)}{4}$$

Démonstration 5.1

Nous avons :

(i) d'une part :

$$\begin{aligned} L(t, i\delta; \delta) &= \frac{1}{\delta} \left[\frac{B(t, t+i\delta)}{B(t, t+(i+1)\delta)} - 1 \right] \\ &\quad \text{cf. remarque 2.3 p. 21} \\ \Rightarrow \frac{B(t, T_i)}{B(t, T_{i+1})} &= \delta L(t, i\delta; \delta) - 1 \end{aligned}$$

(ii) de la même façon,

$$\frac{B(t, T_{i+1})}{B(t, T_{i+2})} = \delta L(t, (i+1)\delta; \delta) - 1$$

(iii) Utilisons la remarque 2.3 p. 21 pour évaluer $L(t, i\delta; 2\delta)$:

$$\begin{aligned}
 L(t, i\delta; \delta) &= \frac{1}{2\delta} \left[\frac{B(t, t + i\delta)}{B(t, t + (i+2)\delta)} - 1 \right] \\
 &\quad \delta = 0.5 \\
 &= \frac{B(t, T_i)}{B(t, T_{i+2})} - 1 \\
 &= \frac{B(t, T_i)}{B(t, T_{i+1})} \frac{B(t, T_{i+1})}{B(t, T_{i+2})} - 1 \\
 &= (\delta L(t, i\delta, \delta) - 1) (\delta L(t, (i+1)\delta, \delta) - 1) - 1 \\
 &\quad \text{par (i) et (ii)} \\
 &= \frac{L(t, i\delta; \delta) + L(t, (i+1)\delta; \delta)}{2} + \frac{L(t, i\delta; \delta)L(t, (i+1)\delta; \delta)}{4}
 \end{aligned}$$

□

Remarque 5.1

- On voit par cette relation qu'en simulant les trajectoires des taux IBOR 6 mois, on va pouvoir valoriser des produits dont le sous-jacent est l'IBOR 1 an.
- D'autre part, le taux IBOR de maturité 1 an apparait comme une combinaison des IBOR 6 mois.
En général, ces processus ne pourront être considérés simultanément comme log-normaux.
- Dans le cas de produit **ne dépendant que** du IBOR 1 an, il est possible de donner une diffusion au processus et de calibrer le modèle en considérant des produits liquides sur IBOR 1 an.
- Pour valoriser des produits dont les sous-jacents sont l'IBOR pour différentes maturités, il est plus pertinent d'utiliser le modèle BGM pour le taux à la plus petite maturité, puis d'en déduire les suivants à l'aide de la proposition 5.1 p. 39.

5.2 Méthode de Monte-Carlo

Pour valoriser nos produits avec la méthode de Monte-Carlo, nous devons évaluer les payoff sous la mesure choisie pour effectuer les simulation : soit la mesure terminale \mathbb{Q}^{T_n} . Pour ce faire nous procéderons comme suit :

- a. Evaluation des zéro coupon de maturité T_n en chaque date de tombée des flux avec les taux simulés par :

$$B(T_i, T_n) = \prod_{j=i}^{n-1} [1 + \delta L(T_i, j\delta; \delta)]^{-1}$$

- b. Division de chaque payoff par la valeur du zéro-coupon à la date de paiement du flux
On a ainsi exprimé chaque payoff sous le numéraire $B(\cdot, T_n)$ associé à la mesure terminale \mathbb{Q}^{T_n}
- c. Actualisation à la date de valorisation en multipliant par $B(t, T_n)$

5.3 Mise en place et valorisation d'un swap de volatilités dans le modèle BGM

5.3.1 Swap et Taux de swap

Définition 5.1 (Swap de taux)

Un swap de taux sur une unité de devise est un contrat versant à une fréquence donnée le différentiel entre un taux K préalablement fixé et un taux variable.

Typiquement, pour un swap dont les dates de versements sont semestrielles de la forme $T_i = T_0 + i\delta$ avec $i = 1, \dots, n$, le taux reçu à la date T_i est le taux IBOR :

$$L(T_{i-1}, 0, \delta) = \frac{1}{\delta} \left(\frac{1}{B(T_{i-1}, T_i)} - 1 \right)$$

Nous nous placerons dans ce cadre.

Proposition 5.2 (Valorisation du swap)

Le prix du swap en t est donné par :

$$\boxed{\text{swap}(t, T_n, K) = B(t, T_0) - B(t, T_n) - K\delta \sum_{i=1}^n B(t, T_i)}$$

Démonstration 5.2

- Valorisation de la jambe fixe :

$$\begin{aligned} \mathbb{E} \left[\sum_{i=1}^n \frac{\beta(t)}{\beta(T_i)} \delta K / \mathcal{F}_t \right] &= \delta K \sum_{i=1}^n \mathbb{E} \left[\frac{\beta(t)}{\beta(T_i)} / \mathcal{F}_t \right] \\ &= \delta K \sum_{i=1}^n B(t, T_i) \end{aligned}$$

• Valorisation de la jambe variable :

$$\begin{aligned}
 \mathbb{E} \left[\sum_{i=1}^n \frac{\beta(t)}{\beta(T_i)} \delta L(t, (i-1)\delta; \delta) / \mathcal{F}_t \right] &= \sum_{i=1}^n \mathbb{E} \left[\frac{\beta(t)}{\beta(T_i)} \delta L(t, (i-1)\delta; \delta) / \mathcal{F}_t \right] \\
 &\stackrel{\text{par remarque 2.3 p. 21}}{=} \sum_{i=1}^n \mathbb{E} \left[\frac{\beta(t)}{\beta(T_i)} \left(\frac{1}{B(T_{i-1}, T_i)} - 1 \right) / \mathcal{F}_t \right] \\
 &= \sum_{i=1}^n \mathbb{E} \left[\frac{\beta(t)}{\beta(T_i)} \frac{1}{B(T_{i-1}, T_i)} / \mathcal{F}_t \right] - \sum_{i=1}^n \mathbb{E} \left[\frac{\beta(t)}{\beta(T_i)} / \mathcal{F}_t \right] \\
 &= \sum_{i=1}^n \mathbb{E} \left[\frac{\beta(t)}{\beta(T_{i-1}) B(T_{i-1}, T_i)} \frac{\beta(T_{i-1})}{\beta(T_i)} / \mathcal{F}_t \right] - \sum_{i=1}^n B(t, T_i) \\
 &= \sum_{i=1}^n \mathbb{E} \left[\frac{\beta(t)}{\beta(T_{i-1}) B(T_{i-1}, T_i)} \mathbb{E} \left[\frac{\beta(T_{i-1})}{\beta(T_i)} / \mathcal{F}_{T_{i-1}} \right] / \mathcal{F}_t \right] - \sum_{i=1}^n B(t, T_i) \\
 &= \sum_{i=1}^n \mathbb{E} \left[\frac{\beta(t)}{\beta(T_{i-1}) B(T_{i-1}, T_i)} B(T_{i-1}, T_i) / \mathcal{F}_t \right] - \sum_{i=1}^n B(t, T_i) \\
 &= \sum_{i=1}^n B(t, T_{i-1}) - \sum_{i=1}^n B(t, T_i) \\
 &= B(t, T_0) - B(t, T_n)
 \end{aligned}$$

En se plaçant en position payeuse du taux fixe K on a :

$$swap(t, T_n, K) = B(t, T_0) - B(t, T_n) - K \delta \sum_{i=1}^n B(t, T_i)$$

□

Définition 5.2 (Taux de swap)

Le taux de swap (associé à une maturité de swap) est la valeur K qui annule le prix du swap en t .
Il est donné par :

$$S_{0,n} = \frac{B(t, T_0) - B(t, T_n)}{\delta \sum_{i=1}^n B(t, T_i)}$$

Remarque 5.2

Pour une maturité donnée, le taux de swap est indépendant de la jambe variable

5.3.2 Structure du contrat

On considère la structure suivante :

Date de signature : t

Date de départ : T_0

Nominal : $N \in$

Echéancier : $\{T_1, \dots, T_n\}$ avec

$$\begin{cases} T_i &= T_0 + \delta \\ \delta &= 0.5 \quad \text{ie. 6 mois} \\ T_n &= T_0 + 20\delta \quad \text{ie. 10 ans} \end{cases}$$

Jambe payeuse : A chaque date T_i , avec $i \in \llbracket 1, n \rrbracket$ (ie. tous les semestres), on paie le flux :

$$N \delta [L(T_{i-1}, 0; \delta) + 2bps]$$

Jambe receveuse : A chaque date T_i avec $i \in \{2, 4, 6, 8, \dots, 18, 20\}$ (ie. tous les ans), on reçoit le flux :

$$x N \delta |S_{i, i+20\delta} - S_{i-1, i-1+20\delta}|$$

avec :

$$\begin{cases} S_{i, i+20\delta} & \text{le taux de swap 10 ans déterminé à la date } T_i \\ x & \text{une quantité non-aléatoire annulant la valeur du contrat en } t \end{cases}$$

5.3.3 Valorisation de la jambe payeuse

Proposition 5.3 (Prix en t de la jambe payeuse)

Nous avons :

$$\boxed{\text{prix}(\text{jambe payeuse}) = N \delta \sum_{i=1}^{20} [L(t, (i-1)\delta; \delta) + 2bps]}$$

Démonstration 5.3

On évalue :

$$\begin{aligned} \text{prix}(\text{jambe payeuse}) &= \mathbb{E} \left[\sum_{i=1}^{20} \frac{\beta(t)}{\beta(T_i)} N \delta (L(T_{i-1}, 0; \delta) + 2bps) / \mathcal{F}_t \right] \\ &= N \delta \sum_{i=1}^{20} \mathbb{E} \left[\frac{\beta(t)}{\beta(T_i)} (L(T_{i-1}, 0; \delta) + 2bps) / \mathcal{F}_t \right] \\ &= N \delta \sum_{i=1}^{20} B(t, T_i) \mathbb{E}_{\mathbb{Q}_{T_i}} [L(T_{i-1}, 0; \delta) + 2bps / \mathcal{F}_t] \\ &\quad \text{par la proposition 3.3 p. 31} \\ &= N \delta \sum_{i=1}^{20} B(t, T_i) [L(t, (i-1)\delta; \delta) + 2bps] \\ &\quad \text{par la proposition 3.1 p. 29} \end{aligned}$$

□

5.3.4 Expression et valorisation de la jambe receveuse

Proposition 5.4

Le taux de swap s'exprime en fonction des IBOR de maturité 1 an de la manière suivante :

$$S_{i,i+20\delta} = \frac{1 - \prod_{j=i+1}^{10} \frac{1}{1+2\delta L(T_i, 2j\delta; 2\delta)}}{\sum_{j=i+1}^{10} 2\delta \prod_{k=i+1}^j \frac{1}{1+2\delta L(T_i, 2k\delta; 2\delta)}}$$

Démonstration 5.4

Par la définition du taux de swap, on peut écrire que :

$$S_{i,i+20\delta} = \frac{1 - B(T_i, T_{i+20\delta})}{2\delta \sum_{j=i+1}^{i+10} B(T_i, T_{2j})}$$

Nous avons de plus pour $k > i$:

$$B(T_i, T_k) = \frac{B(T_i, T_k)}{B(T_i, T_{k-1})} \frac{B(T_i, T_{k-1})}{B(T_i, T_{k-2})} \frac{B(T_i, T_{k-2})}{B(T_i, T_{k-3})} \dots \frac{B(T_i, T_{i+1})}{B(T_i, T_i)}$$

et on a vu à la remarque 2.3 p. 21 que :

$$\frac{B(T_i, T_k)}{B(T_i, T_{k+1})} = 1 + \tau L(T_i, \tau; \tau)$$

avec $T_{k+1} - T_k = \tau$

En adaptant ces résultats à notre cadre de travail, on obtient :

$$B(T_i, T_{i+20\delta}) = \prod_{j=i+1}^{i+10} \frac{1}{1 + 2\delta L(T_i, 2j\delta; 2\delta)}$$

à substituer au numérateur et de la même façon :

$$B(T_i, T_{2j}) = \prod_{k=i+1}^j \frac{1}{1 + 2\delta L(T_i, 2k\delta; 2\delta)}$$

au dénominateur.

Ainsi :

$$S_{i,i+20\delta} = \frac{1 - \prod_{j=i+1}^{10} \frac{1}{1+2\delta L(T_i, 2j\delta; 2\delta)}}{\sum_{j=i+1}^{10} 2\delta \prod_{k=i+1}^j \frac{1}{1+2\delta L(T_i, 2k\delta; 2\delta)}}$$

□

Remarque 5.3 (Expression de $S_{i,i+20\delta}$ en fonction des taux IBOR de maturité 6 mois)

En substituant les $L(T_i, 2j\delta; 2\delta)$ par leur expression en fonction des $L(T_i, k\delta; \delta)$ donnée à la proposition 5.1 p. 39 :

$$L(T_i, 2j\delta; 2\delta) = \frac{L(T_i, 2j\delta; \delta) + L(T_i, 2(j+1)\delta; \delta)}{2} + \frac{L(T_i, 2j\delta; \delta) L(T_i, 2(j+1)\delta; \delta)}{4}$$

On obtient une expression pour le taux de swap en fonction des taux IBOR de maturité 6 mois :

$$S_{i,i+20\delta} = \frac{1 - \prod_{j=i+1}^{10} \left[1 + 2\delta \left\{ \frac{L(T_i, 2j\delta; \delta) + L(T_i, 2(j+1)\delta; \delta)}{2} + \frac{L(T_i, 2j\delta; \delta) L(T_i, 2(j+1)\delta; \delta)}{4} \right\} \right]^{-1}}{\sum_{j=i+1}^{10} 2\delta \prod_{k=i+1}^j \left[1 + 2\delta \left\{ \frac{L(T_i, 2k\delta; \delta) + L(T_i, 2(k+1)\delta; \delta)}{2} + \frac{L(T_i, 2k\delta; \delta) L(T_i, 2(k+1)\delta; \delta)}{4} \right\} \right]^{-1}}$$

On voit alors qu'en simulant les trajectoires des taux IBOR de maturité 6 mois avec notre modèle, on va pouvoir valoriser la jambe receveuse du contrat en utilisant leur position en T_i .

Remarque 5.4

La quantité non aléatoire x doit être fixée de manière à ce que jambe payeuse et jambe receveuse se compensent à la signature du contrat.

Remarque 5.5

Pour valoriser la jambe receveuse, il s'agit d'évaluer :

$$\mathbb{E} \left[\sum_{k=1}^{10} \frac{\beta(t)}{\beta(T_{2k})} x N \delta \left| S_{2k, 2(k+10)\delta} - S_{k-1, 2((k-1)+10)\delta} \right| / \mathcal{F}_t \right]$$

5.3.5 Méthode employée

Pour évaluer le prix de la jambe receveuse, nous procéderons comme suit :

- (i) Simulation des $L(T_{2k}, 2j\delta; \delta)$ pour :

$$\begin{cases} k &= 0, \dots, 10 \\ j &= k+1, \dots, k+11 \end{cases}$$
- (ii) Calcul des $L(T_{2k}, 2j\delta; 2\delta)$ pour :

$$\begin{cases} k &= 0, \dots, 10 \\ j &= k+1, \dots, k+10 \end{cases}$$
- (iii) Calculs des $S_{i, 2(i+10)\delta}$ pour $i = 1, \dots, 10$
- (iv) Evaluation des payoffs sous la mesure terminale comme évoqué précédemment.
- (v) Calculs de la valeur de x égalisant les deux jambes à la signature du contrat.

Conclusion

Le modèle implémenté nous permet de simuler les trajectoires des taux IBOR et par suite de valoriser tout produit dérivé dont les flux sont fonction de ces taux.

Côté informatique nous avons développé des DLL en C++ sous la plateforme Visual Studio Express Edition. Celles-ci sont alors intégrées dans un pricer Excel.

Néanmoins, certaines améliorations seront à apporter :

Problème de discrétisation

Une source de biais dans la simulation est due à la discrétisation des équations (4.1) et (4.2) p. 35. En effet l'intégrale :

$$\int_{t_k \Delta_t}^{t_{k+1} \Delta_t} \frac{\delta L(s, (i-1)\delta; \delta)}{1 + \delta L(s, (i-1)\delta; \delta)} \gamma(s, (i-1)\delta; \delta) ds$$

est approchée sur l'intervalle $[t_k, t_{k+1}]$ par :

$$\frac{\delta L(t_k, (i-1)\delta; \delta)}{1 + \delta L(t_k, (i-1)\delta; \delta)} \gamma(t_k, (i-1)\delta; \delta) \Delta_t$$

Lorsqu'on simule sous la mesure Terminale \mathbb{Q}^{T_n} , le taux Ibor $L(\cdot, (n-1)\delta; \delta)$ est bien une martingale sous cette mesure pour tout pas de discrétisation. Puis $L(\cdot, (n-2)\delta; \delta)$ est martingale sous la probabilité $\hat{\mathbb{Q}}_{T_n-1}$ définie par la discrétisation. Or on a $\hat{\mathbb{Q}}_{T_n-1} \neq \mathbb{Q}_{T_n-1}$ et la propriété de martingale se perd.

A. Brace, M. Musiela & E. Schlögl ont traité ce sujet dans [5] et ont proposé comme alternative d'utiliser l'équation suivante :

$$\Delta W_{T_{i+1}}(t_k) = \Delta W_{T_{i+2}}(t_k) - c_{i,i+1}(t_k) \Delta_t$$

avec

$$c_{i,i+1}(t_k) = \frac{1}{\Delta_t} \frac{1}{\gamma_i} \ln \left(\frac{1 + \delta L(t_k, (i+1)\delta; \delta) \exp \{ \gamma_i \gamma_{i+1} \Delta_t \}}{1 + \delta L(t_k, (i+1)\delta; \delta)} \right)$$

Corrélation entre les différents taux forwards

Nous avons mis en place un modèle unidimensionnel basé sur les prix des caps. Ce modèle ne permet pas de tenir compte des corrélations entre les différents taux forwards.

Il est possible d'étendre notre modèle à un modèle multi-facteurs. Une Analyse en Composantes Principales montre qu'il faudrait au minimum trois facteurs pour assurer la fiabilité du modèle. Il pourra alors être calibré de manière à retrouver simultanément les prix des caps et des swaptions à la monnaie.

Ces sujets sont traités dans [1].

Deuxième partie

Produits dérivés sur le pétrole Marché étranger et risque de change

Notations et Cadre de travail

On notera :

t la date courante

T désignera en général l'échéance d'un produit dérivé

r_t le taux sans risque à la date t sur notre marché

$\beta(t) = e^{\int_0^t r_s ds}$ le facteur d'accumulation entre 0 et t

$B(t, T)$ le prix en t d'un zéro-coupon de maturité T

S un sous-jacent exprimé en monnaie domestique

$F_t(S, T)$ le T -prix forward de S en t

$Call_t(T, K, S)$ le prix en t d'un call européen sur S de strike K et échéance T

$Put_t(T, K, S)$ le prix en t d'un put européen sur S de strike K et échéance T

$\mathcal{N}(0, 1)$ la loi gaussienne centrée et réduite

$\mathcal{N}(\cdot)$ la fonction de répartition de la gaussienne centrée et réduite

$\phi(\cdot)$ la densité de la gaussienne centrée et réduite

Hypothèse

On supposera l'absence d'opportunité d'arbitrage¹

1. cf. chapitre D p. 101 dans l'Annexe

Chapitre 1

La formule de Black, Scholes et Merton

1.1 Diffusion d'un actif financier

Diffusion « historique »

On suppose que tout processus de prix $\{S_t, t \in [0, T]\}$ est régi par une équation différentielle stochastique de la forme :

$$\frac{dS_t}{S_t} = \mu_S(t)dt + \sigma_S(t)d\widehat{W}_t$$

où

- Le terme de tendance $\mu_S(\cdot)$ est une fonction déterministe.
- Le terme de volatilité $\sigma_S(\cdot)$ est une fonction déterministe.
- \widehat{W}_t est un mouvement brownien sous la probabilité historique \mathbb{P} .

D'après le lemme d'Itô¹ on a :

$$S_t = S_0 \exp \left\{ \int_0^t \left(\mu_S(s) - \frac{1}{2} \sigma_S^2(s) \right) ds + \int_0^t \sigma_S(s) d\widehat{W}_s \right\}$$

De manière équivalente on a :

$$S_T = S_t \exp \left\{ \int_t^T \left(\mu_S(s) - \frac{1}{2} \sigma_S^2(s) \right) ds + \int_t^T \sigma_S(s) d\widehat{W}_s \right\}$$

1. cf. proposition B.7 p. 97 dans l'Annexe.

Diffusion "risque-neutre"

Proposition 1.1

La diffusion de $S(\cdot)$ sous la probabilité risque-neutre \mathbb{Q} est donnée par :

$$\frac{dS_t}{S_t} = r_t dt + \sigma_S(t) dW_t$$

D'après le lemme d'Itô², on obtient :

$$S_t = S_0 \exp \left\{ \int_0^t \left(r_s - \frac{1}{2} \sigma_S^2(s) \right) ds + \int_0^t \sigma_S(s) dW_s \right\}$$

De manière équivalente, on a :

$$S_T = S_t \exp \left\{ \int_t^T \left(r_u - \frac{1}{2} \sigma_S^2(u) \right) du + \int_t^T \sigma_S(u) dW_u \right\}$$

Proposition 1.2 (Loi du logarithme népérien $\frac{S_T}{S_t}$)

Sous la probabilité risque-neutre, et en posant :

$$- R(t, T) = \frac{1}{T-t} \int_t^T r_u du$$

$$- \Sigma_S^2(t, T) = \frac{1}{T-t} \int_t^T \sigma_S^2(u) du$$

le logarithme du rapport $\frac{S_T}{S_t}$ suit une loi normale :

$$- \text{de variance : } \Sigma_S(t, T) \sqrt{T-t}$$

$$- \text{de moyenne : } (R(t, T) - \frac{1}{2} \Sigma_S^2(t, T))(T-t)$$

Remarque 1.1

$R(t, T)$ et $\Sigma_S^2(t, T)$ représentent respectivement le taux sans risque moyen et la volatilité moyenne de l'actif S entre t et T .

2. cf. proposition B.7 p. 97 dans l'Annexe.

Remarque 1.2

On peut écrire que sous la probabilité risque-neutre \mathbb{Q} :

$$S_T = S_t e^{\left\{ R(t,T) - \frac{1}{2} \Sigma_S^2(t,T) \right\} (T-t) + \Sigma_S(t,T) \sqrt{T-t} U} \quad (1.1)$$

où la variable aléatoire U suit une loi gaussienne centrée et réduite et est indépendante de \mathcal{F}_t :

$$\begin{cases} U \stackrel{\mathcal{L}}{\sim} \mathcal{N}(0,1) \\ U \perp \mathcal{F}_t \end{cases}$$

Démonstration 1.1

- Par construction de l'intégrale de Wiener.
- Par propriété d'indépendance des accroissements du mouvement brownien par rapport à la filtration canonique.

□

Proposition 1.3

$$\forall t \quad \mu_S(t) = 0 \iff \{S_t, t\} \text{ est une } \{\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P}\} - \text{martingale}$$

Démonstration 1.2

- En utilisant les éléments de la démonstration 1.1 p. 55

□

Remarque 1.3 (Changement de probabilité)

Un changement de probabilité ne modifie que le terme de tendance (facteur de dt).

La volatilité est invariante par changement de mesure de probabilité³.

1.2 Formule de Black-Scholes-Merton pour un call européen

Définition 1.1

Un call européen sur un sous-jacent S , d'échéance T et de strike K est le droit d'acheter au prix K , fixé à l'avance, le sous-jacent S , à la date T .

Le flux à l'échéance est donc : $\phi(S_T) = (S_T - K)_+$

Définition 1.2

Un put européen sur un sous-jacent S , d'échéance T et de strike K est le droit de vendre au prix K , fixé à l'avance, le sous-jacent S , à la date T .

Le flux à l'échéance est donc : $\phi(S_T) = (K - S_T)_+$

3. cf. Annexe B p. 95

Proposition 1.4 (Probabilité d'exercice du call)

La probabilité d'exercice d'un call est donné par la formule :

$$\mathbb{Q}[S_T \geq K / \mathcal{F}_t] = \mathcal{N}(d_2) \quad (1.2)$$

avec

$$d_2 := \frac{\ln\{\frac{S_t}{K}\} + (R(t,T) - \frac{1}{2}\Sigma_S^2(t,T))(T-t)}{\Sigma_S(t,T)\sqrt{T-t}}$$

Démonstration 1.3

$$\begin{aligned} \mathbb{Q}[S_T \geq K / \mathcal{F}_t] &= \mathbb{Q}\left[S_t e^{(R(t,T) - \frac{1}{2}\Sigma_S^2(t,T))(T-t) + \Sigma_S(t,T)\sqrt{T-t}U} \geq K / \mathcal{F}_t\right] \\ &\quad \text{d'après la remarque 1.2 p. 55.} \\ &= \mathbb{Q}\left[(R(t,T) - \frac{1}{2}\Sigma_S^2(t,T))(T-t) + \Sigma_S(t,T)\sqrt{T-t}U \geq \ln\frac{K}{S_t} / \mathcal{F}_t\right] \\ &= \mathbb{Q}\left[U \geq \frac{\ln\{\frac{K}{S_t}\} - (R(t,T) - \frac{1}{2}\Sigma_S^2(t,T))(T-t)}{\Sigma_S(t,T)\sqrt{T-t}} / \mathcal{F}_t\right] \\ &= \mathbb{Q}\left[-U \leq \frac{\ln\{\frac{S_t}{K}\} + (R(t,T) - \frac{1}{2}\Sigma_S^2(t,T))(T-t)}{\Sigma_S(t,T)\sqrt{T-t}} / \mathcal{F}_t\right] \\ &= \mathbb{Q}\left[-U \leq \frac{\ln\{\frac{S_t}{K}\} + (R(t,T) - \frac{1}{2}\Sigma_S^2(t,T))(T-t)}{\Sigma_S(t,T)\sqrt{T-t}}\right] \\ &\quad \text{d'après le lemme d'indépendance cf. proposition A.5 p. 94 dans l'Annexe.} \\ &\quad U \text{ étant indépendant de } \mathcal{F}_t \text{ et } S_t \text{ étant } \mathcal{F}_t\text{-mesurable.} \\ &= \mathbb{Q}\left[U \leq \frac{\ln\{\frac{S_t}{K}\} + (R(t,T) - \frac{1}{2}\Sigma_S^2(t,T))(T-t)}{\Sigma_S(t,T)\sqrt{T-t}}\right] \\ &\quad \text{par symétrie de la loi gaussienne } U \stackrel{\mathcal{L}}{\sim} \mathcal{N}(0,1) \Leftrightarrow -U \stackrel{\mathcal{L}}{\sim} \mathcal{N}(0,1) \end{aligned}$$

□

Proposition 1.5 (La formule de Black-Scholes-Merton)

Le prix à la date t d'un call européen d'échéance T , et de strike K est donné par :

$$Call_t(T, K, S) = S_t \mathcal{N}(d_1) - K e^{-\int_t^T r_u du} \mathcal{N}(d_2)$$

avec :

$$\begin{aligned} d_1 &:= \frac{\ln\{\frac{S_t}{K}\} + (R(t,T) + \frac{1}{2}\Sigma_S^2(t,T))(T-t)}{\Sigma_S(t,T)\sqrt{T-t}} \\ d_2 &:= \frac{\ln\{\frac{S_t}{K}\} + (R(t,T) - \frac{1}{2}\Sigma_S^2(t,T))(T-t)}{\Sigma_S(t,T)\sqrt{T-t}} \\ &= d_1 - \Sigma_S(t,T)\sqrt{T-t} \end{aligned}$$

Démonstration 1.4

Le prix du call à la date $t < T$ est donné par :

$$\begin{aligned}
 C_t(S, T, K) &= \mathbb{E}_{\mathbb{Q}} \left[\frac{\beta(t)}{\beta(T)} (S_T - K) \mathbb{1}_{\{S_T \geq K\}} / \mathcal{F}_t \right] \\
 &= \mathbb{E}_{\mathbb{Q}} \left[\frac{\beta(t)}{\beta(T)} S_T \mathbb{1}_{\{S_T \geq K\}} / \mathcal{F}_t \right] - \frac{\beta(t)}{\beta(T)} K \mathbb{E}_{\mathbb{Q}} [\mathbb{1}_{\{S_T \geq K\}} / \mathcal{F}_t] \\
 &\quad \text{par linéarité de l'espérance conditionnelle} \\
 &= \mathbb{E}_{\mathbb{Q}} \left[\frac{\beta(t)}{\beta(T)} S_T \mathbb{1}_{\{S_T \geq K\}} / \mathcal{F}_t \right] - \frac{\beta(t)}{\beta(T)} K \mathbb{Q} [S_T \geq K / \mathcal{F}_t]
 \end{aligned} \tag{1.3}$$

Il reste à déterminer le premier membre :

$$\begin{aligned}
 \mathbb{E}_{\mathbb{Q}} \left[\frac{\beta(t)}{\beta(T)} S_T \mathbb{1}_{\{S_T \geq K\}} / \mathcal{F}_t \right] &= \mathbb{E}_{\mathbb{Q}} \left[\frac{\beta(t)}{\beta(T)} S_t e^{(R(t, T) - \frac{1}{2} \Sigma_S^2(t, T))(T-t) + \Sigma_S(t, T) \sqrt{T-t} U} \mathbb{1}_{\{S_T \geq K\}} / \mathcal{F}_t \right] \\
 &\quad \text{d'après la remarque 1.2 p. 55.} \\
 &= S_t \mathbb{E}_{\mathbb{Q}} \left[e^{-\frac{1}{2} \Sigma_S^2(t, T)(T-t) + \Sigma_S(t, T) \sqrt{T-t} U} \mathbb{1}_{\{S_T \geq K\}} / \mathcal{F}_t \right] \\
 &= S_t \int_{\{S_T \geq K\}} e^{-\frac{1}{2} \Sigma_S^2(t, T)(T-t) + \Sigma_S(t, T) \sqrt{T-t} U} d\mathbb{Q} \\
 &\quad \text{d'après le lemme d'indépendance cf. proposition A.5 p. 94 dans l'Annexe.} \\
 &= S_t \int_{-d_2}^{\infty} e^{-\frac{1}{2} \Sigma_S^2(t, T)(T-t) + \Sigma_S(t, T) \sqrt{T-t} U} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{u^2}{2}} du \\
 &\quad \text{car } \mathbb{Q} \text{ est absolument continue par rapport à la mesure de Lebesgues et admet une densité.} \\
 &= S_t \int_{-d_2}^{\infty} e^{-\frac{u^2}{2} - \frac{1}{2} \Sigma_S^2(t, T)(T-t) + \Sigma_S(t, T) \sqrt{T-t} U} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} du \\
 &= S_t \int_{-d_2}^{\infty} e^{-\frac{u^2 - 2 \Sigma_S(t, T) \sqrt{T-t} U + \Sigma_S^2(t, T)(T-t)}{2}} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} du \\
 &= S_t \int_{-d_2}^{\infty} e^{-\frac{(u - \Sigma_S(t, T) \sqrt{T-t})^2}{2}} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} du \\
 &= S_t \int_{-d_2 - \Sigma_S(t, T) \sqrt{T-t}}^{\infty} e^{-\frac{z^2}{2}} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} dz \\
 &\quad \text{par changement de variable : } z = u - \Sigma_S(t, T) \sqrt{T-t} \\
 &= S_t \mathcal{N}(d_1) \\
 &\quad \text{en posant } d_1 = d_2 + \Sigma_S(t, T) \sqrt{T-t} \\
 &\quad \text{en utilisant la symétrie de la loi gaussienne centrée réduite}
 \end{aligned}$$

□

Remarque 1.4

Lorsque les taux d'intérêt et la volatilité sont constants, on a :

$$d_2 = \frac{\ln\left\{\frac{S_t}{K}\right\} + (r - \frac{1}{2}\sigma_S^2)(T-t)}{\sigma_S \sqrt{T-t}}$$

Proposition 1.6 (Formule de Black-Scholes-Merton pour un put)

$$Put_t(T, K, S) = -S_t \mathcal{N}(-d_1) + K e^{-\int_t^T r_u du} \mathcal{N}(-d_2) \tag{1.4}$$

Démonstration 1.5 (Parité Call-Put)

D'après la remarque D.2 p. 102 et la proposition 1.5 p. 56 on a :

$$\begin{aligned}
 Put_t(T, K, S) &= Call_t(T, K, S) - S_t + K B(t, T) \\
 &= S_t \mathcal{N}(d_1) - K e^{-\int_t^T r_u du} \mathcal{N}(d_2) - S_t + K e^{-\int_t^T r_u du} \\
 &= -S_t (1 - \mathcal{N}(d_1)) + K e^{-\int_t^T r_u du} (1 - \mathcal{N}(d_2)) \\
 &\quad \text{par symétrie de la loi normale} \\
 &= -S_t \mathcal{N}(-d_1) + K e^{-\int_t^T r_u du} \mathcal{N}(-d_2)
 \end{aligned}$$

□

1.3 Les « grecques »

1.3.1 Le Delta

Définition 1.3 (Delta d'une option)

Le delta d'une option est la sensibilité du prix de l'option par rapport au prix sous-jacent

Remarque 1.5 (Formulation mathématique)

Mathématiquement, le Delta se calcule en dérivant le prix de l'option par rapport au sous-jacent

Proposition 1.7 (Delta d'un call européen)

Le delta d'un call européen est donné par :

$$\Delta^{Call_t(T, K, S)} = \mathcal{N}(d_1)$$

Proposition 1.8 (Résultat utile)

On désigne par $\phi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}}$, la fonction de densité de la gaussienne centrée et réduite. On a :

$$\phi(d_2) = \frac{S_t}{K} e^{-R(t, T)(T-t)} \phi(d_1)$$

Démonstration 1.6

En effet :

$$\begin{aligned}
 \phi(d_2) &= \phi(d_1 - \Sigma_S(t, T) \sqrt{T-t}) \\
 &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp \left\{ -\frac{1}{2} (d_1 - \Sigma_S(t, T) \sqrt{T-t})^2 \right\} \\
 &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp \left\{ -\frac{1}{2} (d_1^2 - 2d_1 \Sigma_S(t, T) \sqrt{T-t} + \Sigma_S^2(t, T) (T-t)) \right\} \\
 &= \phi(d_1) \exp \left\{ d_1 \Sigma_S(t, T) \sqrt{T-t} - \frac{1}{2} \Sigma_S^2(t, T) (T-t) \right\} \\
 &= \phi(d_1) \exp \left\{ \ln \left\{ \frac{S_t}{K} \right\} + (R(t, T) + \frac{1}{2} \Sigma_S^2(t, T)) (T-t) - \frac{1}{2} \Sigma_S^2(t, T) (T-t) \right\} \\
 &= \phi(d_1) \frac{S_t}{K} e^{R(t, T)(T-t)}
 \end{aligned}$$

□

Démonstration 1.7 (Delta d'un call européen)

– Par définition, le Delta du call européen s'écrit :

$$\begin{aligned}\Delta^{Call_t(T,K,S)} &:= \frac{\partial Call_t(T,K,S)}{\partial S_t} \\ &= \mathcal{N}(d_1) + S_t \frac{\partial \mathcal{N}(d_1)}{\partial S_t} - K e^{-R(t,T)(T-t)} \frac{\partial \mathcal{N}(d_2)}{\partial S_t} \\ &= \mathcal{N}(d_1) + \phi(d_1) \frac{\partial d_1}{\partial S_t} - K e^{-R(t,T)(T-t)} \phi(d_2) \frac{\partial d_2}{\partial S_t}\end{aligned}$$

où $\phi(\cdot)$ désigne la densité de la gaussienne centrée et réduite

– On a :

$$\begin{aligned}\frac{\partial d_1}{\partial S_t} &= \frac{\partial d_2}{\partial S_t} \\ &= \frac{1}{S_t \Sigma_S(t,T) \sqrt{T-t}}\end{aligned}$$

– D'autre part, par la proposition 1.8 p. 58 :

$$\phi(d_2) = \phi(d_1) \frac{S_t}{K} e^{R(t,T)(T-t)}$$

– Ainsi :

$$\begin{aligned}\Delta^{Call_t(T,K,S)} &= \mathcal{N}(d_1) + S_t \phi(d_1) \frac{\partial d_1}{\partial S_t} - K e^{-R(t,T)(T-t)} \frac{\partial d_2}{\partial S_t} \\ &= \mathcal{N}(d_1) \\ &\quad + S_t \phi(d_1) \frac{1}{S_t \Sigma_S(t,T) \sqrt{T-t}} \\ &\quad - K e^{-R(t,T)(T-t)} \frac{1}{S_t \Sigma_S(t,T) \sqrt{T-t}} \phi(d_1) \frac{S_t}{K} e^{R(t,T)(T-t)} \\ &= \mathcal{N}(d_1) + \phi(d_1) \left[\frac{1}{\Sigma_S(t,T) \sqrt{T-t}} - \frac{1}{\Sigma_S(t,T) \sqrt{T-t}} \right] \\ &= \mathcal{N}(d_1)\end{aligned}$$

□

1.3.2 Le Gamma

Définition 1.4 (Gamma d'une option)

Le Gamma d'une option est la sensibilité du Delta de l'option par rapport au sous-jacent.

Remarque 1.6 (Formulation Mathématique)

Il s'agit de calculer :

$$\Gamma^{Call_t(T,K,S)} := \frac{\partial \Delta^{Call_t(T,K,S)}}{\partial S_t}$$

Proposition 1.9 (Gamma d'un call européen)

Le Gamma d'un call européen est donné par :

$$\Gamma^{Call_t(T,K,S)} = \frac{\phi(d_1)}{S_t \Sigma_S(t,T) \sqrt{T-t}}$$

Démonstration 1.8

Il suffit d'utiliser la formulation mathématique

□

1.3.3 Le Vega

Définition 1.5 (Vega d'une option)

Le Vega d'une option est la sensibilité du prix de l'option par rapport à la volatilité.

Proposition 1.10 (Vega d'un call européen)

Le Vega d'un call européen est donné par :

$$Vega^{Call_t(T,K,S)} = S_t \sqrt{T-t} \phi(d_1)$$

Démonstration 1.9

– On a :

$$\begin{aligned} Vega^{Call_t(T,K,S)} &:= \frac{\partial Call_t(T,K,S)}{\partial \Sigma_S(t,T)} \\ &= S_t \phi(d_1) \frac{\partial d_1}{\partial \Sigma_S(t,T)} - K e^{-R(t,T)(T-t)} \phi(d_2) \frac{\partial d_2}{\partial \Sigma_S(t,T)} \end{aligned}$$

– De plus :

$$\frac{\partial d_2}{\partial \Sigma_S(t,T)} = \frac{\partial d_1}{\partial \Sigma_S(t,T)} - \sqrt{T-t}$$

– Et , par la proposition 1.8 p. 58:

$$\phi(d_2) = \phi(d_1) \frac{S_t}{K} e^{R(t,T)(T-t)}$$

– D'où :

$$\begin{aligned} Vega^{Call_t(T,K,S)} &= S_t \phi(d_1) \frac{\partial d_1}{\partial \Sigma_S(t,T)} - K e^{-R(t,T)(T-t)} \phi(d_1) \frac{S_t}{K} e^{R(t,T)(T-t)} \left(\frac{\partial d_1}{\partial \Sigma_S(t,T)} - \sqrt{T-t} \right) \\ &= S_t \sqrt{T-t} \phi(d_1) \end{aligned}$$

□

1.3.4 Le Rho

Définition 1.6 (Rho d'une option)

Le Rho d'une option est la sensibilité du prix de l'option par rapport au taux d'intérêt.

Proposition 1.11 (Rho d'un call européen)

Le Rho d'un call européen est donné par :

$$\rho^{Call_t(T,K,S)} = (T-t)Ke^{-R(t,T)(T-t)}\mathcal{N}(d_2)$$

Démonstration 1.10

On a :

$$\begin{aligned}\rho^{Call_t(T,K,S)} &:= \frac{\partial Call_t(T,K,S)}{\partial R(t,T)} \\ &= S_t\phi(d_1)\frac{\partial d_1}{\partial R(t,T)} - Ke^{-R(t,T)(T-t)}\phi(d_2)\frac{\partial d_2}{\partial R(t,T)} + (T-t)Ke^{-R(t,T)(T-t)}\mathcal{N}(d_2) \\ &= (T-t)Ke^{-R(t,T)(T-t)}\mathcal{N}(d_2)\end{aligned}$$

□

Chapitre 2

Valorisation d'une option exotique : « le put gap »

2.1 Définition

Définition 2.1 (Put gap européen)

Un put « gap » est un put dont le strike K (dont dépend l'exercice ou non de l'option à l'échéance) est différent du montant L utilisé pour calculer son payoff.

Le payoff pour un put gap est :

$$\begin{cases} L - S_T & \text{si } S_T < K \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

C'est-à dire le flux peut s'écrire : $(L - S_T) \mathbf{1}_{\{S_T < K\}}$

2.2 Evaluation

Proposition 2.1

Le prix d'un put gap est donné par :

$$\boxed{L e^{-\int_t^T r_s ds} \mathcal{N}(-d_2) - S_t \mathcal{N}(-d_1)}$$

avec :

$$\begin{aligned} d_1 &= \frac{\ln\{\frac{S_t}{K}\} + (R(t,T) + \frac{1}{2}\Sigma_S^2(t,T))(T-t)}{\Sigma_S(t,T)\sqrt{T-t}} \\ d_2 &= \frac{\ln\{\frac{S_t}{K}\} + (R(t,T) - \frac{1}{2}\Sigma_S^2(t,T))(T-t)}{\Sigma_S(t,T)\sqrt{T-t}} \\ &= d_1 - \Sigma_S(t,T)\sqrt{T-t} \end{aligned}$$

Démonstration 2.1

- Utiliser la probabilité d'exercice d'un call vanilla¹.
- Utiliser la démonstration 1.4 p. 57.

□

1. cf. Proposition 1.2 p. 56.

Chapitre 3

Marché étranger

3.1 Coexistence de deux risques

Lorsque l'on considère des options sur un sous-jacent exprimé en monnaie étrangère, on est simultanément soumis à deux risques :

- le risque lié aux fluctuations du prix du sous-jacent
- le risque lié aux fluctuations du taux de change

Exemple 3.1

Typiquement, une option sur le pétrole (exprimé en \$) avec strike ou nominal en €.

Remarque 3.1

La coexistence de ces deux risques induit naturellement une corrélation dont il faut tenir compte pour valoriser ce type de produit.

Remarque 3.2

Il est également nécessaire de considérer les paramètres du marché étranger.

Paramètres du marché étranger

On notera :

- $\{r_t^f, t \in [0, T]\}$, le processus (supposé déterministe) du taux d'intérêt sur le marché étranger
- $\{\beta^f(t) = e^{\int_0^t r_s ds}, t \in [0, T]\}$, le facteur d'accumulation associé
- $\{B^f(t, T) = e^{-\int_t^T r_s ds}, t \in [0, T]\}$, les zéro-coupons associés
- \mathbb{Q}^f , la mesure de probabilité risque-neutre étrangère, i.e. associée au numéraire du facteur d'accumulation étranger

Proposition 3.1 (Changement de probabilité)

Pour tout flux exprimé en monnaie étrangère ϕ^f , on a la formule d'évaluation¹:

$$\mathbb{E}_{\mathbb{Q}} \left[\frac{\beta(t)}{\beta(T)} X_T \phi^f(T) / \mathcal{F}_t \right] = X_t \mathbb{E}_{\mathbb{Q}^f} \left[\frac{\beta^f(t)}{\beta^f(T)} \phi^f(T) / \mathcal{F}_t \right] \quad (3.1)$$

3.2 Processus du taux de change

On note $\{X_t, t \in [0, T]\}$, le processus du taux de change, i.e à la date t :

$$1 \$ = X_t €$$

Diffusion « historique »

On place sur ce processus une diffusion classique:

$$\frac{dX_t}{X_t} = \mu_X(t) dt + \sigma_X(t) d\widehat{W}_t^x$$

où $\{\widehat{W}_t^x, t\}$ est un $\{\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P}\}$ -mouvement brownien.

Diffusion risque-neutre domicile

Proposition 3.2

Sous la probabilité risque-neutre domicile, la diffusion de $\{X_t, t \in [0, T]\}$ est:

$$\frac{dX_t}{X_t} = (r_t - r_t^f) dt + \sigma_X(t) dW_t^x \quad (3.2)$$

avec $\{W_t^x, t\}$ un $\{\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{Q}\}$ -mouvement brownien.

Démonstration 3.1

Supposons que la diffusion du processus du taux de change sous \mathbb{Q} soit donnée par:

$$\frac{dX_t}{X_t} = \mu'_X(t) dt + \sigma_X(t) dW_t^x$$

où $\{W_t^x, t\}$ est un $\{\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{Q}\}$ -mouvement brownien.

On sait d'ores et déjà que la volatilité est invariante par changement de probabilité, il suffit de déterminer le terme de tendance $\mu'_X(t)$ sous la probabilité risque-neutre domicile.

Notons respectivement $A(t) = \exp \{-\int_0^t r_s ds\}$ et $A^f(t) = \exp \{-\int_0^t r_s^f ds\}$, les facteurs d'actualisation domestique et étranger.

On considère le processus $Y_t := \frac{X_t}{A^f(t)} A(t)$.

$Y(t)$ est le prix en t d'un titre étranger (sans risque) $\frac{1}{A^f(t)}$, échangé en monnaie domestique $\frac{1}{A(t)} X_t$, et actualisé au taux d'intérêt sans risque domestique $\frac{X_t}{A^f(t)} A(t)$

1. par changement de numéraire cf. Annexe E p. 103

⇒ c'est une $\{\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{Q}\}$ - martingale
 ⇒ son terme de tendance est nul sous \mathbb{Q}
 et, on a :

$$\begin{aligned}
 dY_t &= d \left[X_t \frac{A(t)}{A^f(t)} \right] \\
 &= \frac{A(t)}{A^f(t)} dX_t + X_t d \left(\frac{A(t)}{A^f(t)} \right) \\
 &= \frac{A(t)}{A^f(t)} X_t \{ \mu'_X(t) dt + \sigma_X(t) dW_t^x \} + X_t (-r_t + r_t^f) \frac{A(t)}{A^f(t)} dt \\
 &= \frac{A(t)}{A^f(t)} X_t \left\{ (\mu'_X(t) - r_t + r_t^f) dt + \sigma_X(t) dW_t^x \right\} \\
 \\
 &\Rightarrow \frac{dY_t}{Y_t} = (\mu'_X(t) - r_t + r_t^f) dt + \sigma_X(t) dW_t^x \\
 &\Rightarrow \mu'_X(t) - r_t + r_t^f = 0 \\
 &\Rightarrow \mu'_X(t) = r_t - r_t^f
 \end{aligned}$$

□

3.3 Diffusion du sous-jacent étranger

Soit $\{S_t^f, t \in [0, T]\}$, le processus de prix d'un sous-jacent exprimé en monnaie étrangère.

Remarque 3.3

Le titre $S_t^d = S_t^f X_t$ est un titre domestique, c'est la valeur en monnaie domestique d'un titre étranger.

Diffusion « historique »

Comme d'habitude, on place une diffusion de la forme :

$$\frac{dS_t^f}{S_t^f} = \mu_{S^f}(t) dt + \sigma_{S^f}(t) d\widehat{W}_t^{S^f}$$

avec $\{\widehat{W}_t^{S^f}, t\}$ un $\{\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P}\}$ -mouvement brownien.

Diffusion risque-neutre domicile

Proposition 3.3

Sous la probabilité risque-neutre domicile, la diffusion de $\{S_t^f, t \in [0, T]\}$ est :

$$\boxed{\frac{dS_t^f}{S_t^f} = \{ r_t - \rho_t(X, S^f) \sigma_X(t) \sigma_{S^f}(t) \} dt + \sigma_{S^f}(t) dW_t^{S^f}} \quad (3.3)$$

avec $\{W_t^{S^f}, t\}$ un $\{\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{Q}\}$ -mouvement brownien.

Démonstration 3.2

- On suppose que la diffusion du sous-jacent étranger sous \mathbb{Q} est :

$$\frac{dS_t^f}{S_t^f} = \mu'_{S^f}(t) dt + \sigma_{S^f}(t) dW_t^{S^f}$$

avec $\{W_t^{S^f}, t\}$ un $\{\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{Q}\}$ -mouvement brownien.

- On considère le processus $\{Z_t := S_t^f X_t A(t), t \in [0, T]\}$.
 Z_t est le prix du sous-jacent étranger S_t^f , échangé en monnaie domestique $S_t^f X_t$, et actualisé au taux risque neutre domestique $S_t^f X_t A(t)$
 \Rightarrow c'est une $\{\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{Q}\}$ - martingale
 \Rightarrow son terme de tendance est nul sous \mathbb{Q}

Or ,

$$\begin{aligned} dZ_t &= d[S_t^f X_t A(t)] \\ &= A(t) dS_t^f X_t + S_t^f X_t dA(t) \end{aligned}$$

- **Prise en compte de la corrélation entre taux de change et sous-jacent :**

La formule de Itô² appliquée avec la fonction $f(x, y) = xy$ nous donne :

$$\begin{aligned} dS_t^f X_t &= X_t dS_t^f + S_t^f dX_t + \frac{1}{2} \text{Cov}_t(dS_t^f, dX_t) + \frac{1}{2} \text{Cov}_t(dX_t, dS_t^f) \\ &= X_t dS_t^f + S_t^f dX_t + \text{Cov}_t(dS_t^f, dX_t) \\ &= S_t^f X_t \left[\frac{dS_t^f}{S_t^f} + \frac{dX_t}{X_t} + \frac{1}{S_t^f X_t} \text{Cov}_t(dS_t^f, dX_t) \right] \\ \frac{dS_t^f X_t}{S_t^f X_t} &= \frac{dS_t^f}{S_t^f} + \frac{dX_t}{X_t} + \text{Cov}_t\left(\frac{dS_t^f}{S_t^f}, \frac{dX_t}{X_t}\right) \end{aligned}$$

Et, on a :

$$\text{Cov}_t\left(\frac{dS_t^f}{S_t^f}, \frac{dX_t}{X_t}\right) = \rho_t(X, S^f) \sigma_X(t) \sigma_{S^f}(t) dt$$

où $\rho_t(X, S^f)$ est le coefficient de corrélation des logarithmes de X_t et S_t^f .

- La diffusion de Z_t sous \mathbb{Q} est alors donnée par :

$$\begin{aligned} dZ_t &= A(t) S_t^f X_t \frac{dS_t^f X_t}{S_t^f X_t} + A(t) S_t^f X_t (-r_t) dt \\ \frac{dZ_t}{Z_t} &= \frac{dS_t^f}{S_t^f} + \frac{dX_t}{X_t} + \rho_t(X, S^f) \sigma_X(t) \sigma_{S^f}(t) dt - r_t dt \\ &= \left(\mu'_{S^f}(t) dt + \sigma_{S^f}(t) dW_t^{S^f} \right) + \left(\mu'_X(t) dt + \sigma_X(t) dW_t^x \right) + \rho_t(X, S^f) \sigma_X(t) \sigma_{S^f}(t) dt - r_t dt \end{aligned}$$

2. cf. proposition B.7 p. 97 dans l'Annexe.

– En ne s'intéressant qu'au terme de tendance, on voit que :

$$\mu'_{S^f}(t) + \mu'_X(t) + \rho_t(X, S^f) \sigma_X(t) \sigma_{S^f}(t) - r_t = 0$$

$$\Rightarrow \mu'_{S^f}(t) = -\mu'_X(t) - \rho_t(X, S^f) \sigma_X(t) \sigma_{S^f}(t) + r_t$$

$$\Rightarrow \mu'_{S^f}(t) = r_t - \rho_t(X, S^f) \sigma_X(t) \sigma_{S^f}(t)$$

□

Remarque 3.4

Comme précédemment, en posant :

$$- \Gamma_X^{S^f}(t, T) = \frac{1}{T-t} \int_t^T (\rho_u(X, S^f) \sigma_X(u) \sigma_{S^f}(u)) du$$

$$- \Sigma_{S^f}^2(t, T) = \frac{1}{T-t} \int_t^T \sigma_{S^f}^2(u) du$$

$$- R^f(t, T) = \frac{1}{T-t} \int_t^T r_u du$$

le logarithme du rapport $\frac{S^f}{S_T}$ suit une loi gaussienne :

$$- \text{de variance: } \Sigma_{S^f}(t, T) \sqrt{T-t}$$

$$- \text{de moyenne: } (R^f(t, T) - \Gamma_X^{S^f}(t, T) - \frac{1}{2} \Sigma_{S^f}^2(t, T))(T-t)$$

Et on peut écrire que sous la probabilité risque-neutre domicile \mathbb{Q} :

$$S_T^f = S_t^f \exp \left\{ (R^f(t, T) - \Gamma_X^{S^f}(t, T) - \frac{1}{2} \Sigma_{S^f}^2(t, T))(T-t) + \Sigma_{S^f}(t, T) \sqrt{T-t} U \right\} \quad (3.4)$$

où la variable aléatoire U suit une loi gaussienne centrée et réduite et est indépendante de \mathcal{F}_t :

$$\begin{cases} U \stackrel{\mathcal{L}}{\sim} \mathcal{N}(0, 1) \\ U \perp \mathcal{F}_t \end{cases}$$

3.4 Valorisation d'un call quanto sans garantie de change

Par la proposition 3.1 p. 66, on voit que lorsque le taux de change appliqué à l'échéance est celui en cours, il n'y a pas de risque lié au changement de devise. Il suffit alors d'évaluer l'option sur le marché étranger puis de convertir en monnaie domestique.

Formule de Black-Scholes-Merton pour un call quanto

Soit $Call_t(T, K^f, S^f)$ le prix en t d'un call domestique sur sous-jacent étranger S^f , de strike K^f exprimé en monnaie étrangère et d'échéance T .

Si on note $Call_t^f(T, K^f, S^f)$ le prix d'un call étranger sur le sous-jacent S^f de strike K^f et d'échéance T , avec ce qui précède on peut écrire que :

$$Call_t(T, K^f, S^f) = X_t Call_t^f(T, K^f, S^f) \quad (3.5)$$

Proposition 3.4 (Prix d'un call quanto)

Le prix d'un call quanto³ est :

$$Call_t(T, K^f, S^f) = X_t \left\{ S_t^f \mathcal{N}(d_1^f) - K^f e^{-\int_t^T r_u^f du} \mathcal{N}(d_2^f) \right\}$$

avec :

$$\begin{aligned} d_1^f &= \frac{\ln\left\{\frac{S_t^f}{K^f}\right\} + (R^f(t, T) + \frac{1}{2}\Sigma_{S^f}^2(t, T))(T - t)}{\Sigma_{S^f}^f(t, T)\sqrt{T - t}} \\ d_2^f &= \frac{\ln\left\{\frac{S_t^f}{K^f}\right\} + (R^f(t, T) - \frac{1}{2}\Sigma_{S^f}^2(t, T))(T - t)}{\Sigma_{S^f}^f(t, T)\sqrt{T - t}} \\ &= d_1^f - \Sigma_{S^f}(t, T)\sqrt{T - t} \end{aligned}$$

Démonstration 3.3

Il suffit d'appliquer la formule de Black-Scholes-Merton⁴ sur le marché étranger.

□

3.5 Call quanto avec garantie de change

3.5.1 Evaluation d'un call quanto avec garantie de change

L'évaluation est plus compliquée lorsque le taux de change appliqué à l'échéance est stipulé dans le contrat.

On notera \underline{X} ce taux. Il s'agit alors d'évaluer la valeur en t du flux :

$$\underline{X}(S_T^f - K^f)_+$$

Proposition 3.5 (Prix d'un call quanto avec garantie de change)

Le prix du call quanto avec taux de change fixé par le contrat est :

$$Call_t^{\underline{X}}(T, K^f, S^f) = \underline{X} \left\{ S_t^f e^{-\Gamma_X^{S^f}(t, T)(T-t)} e^{-\int_t^T (r_u - r_u^f) du} \mathcal{N}(D_1) - K^f e^{-\int_t^T r_u du} \mathcal{N}(D_2) \right\} \quad (3.6)$$

avec :

$$D_1 = \frac{\ln\left\{\frac{S_t^f}{K^f}\right\} + (R^f(t, T) - \Gamma_X^{S^f}(t, T) + \frac{1}{2}\Sigma_{S^f}^2(t, T))(T - t)}{\Sigma_{S^f}(t, T)\sqrt{T - t}} \quad (3.7)$$

$$D_2 = \frac{\ln\left\{\frac{S_t^f}{K^f}\right\} + (R^f(t, T) - \Gamma_X^{S^f}(t, T) - \frac{1}{2}\Sigma_{S^f}^2(t, T))(T - t)}{\Sigma_{S^f}(t, T)\sqrt{T - t}} \quad (3.8)$$

$$= D_1 - \Sigma_{S^f}(t, T)\sqrt{T - t} \quad (3.9)$$

3. sans fixation du taux de change

4. cf. proposition 1.5 p. 56

Démonstration 3.4

– On a :

$$\begin{aligned}\mathbb{E}_{\mathbb{Q}} \left[\underline{X}(S_T^f - K^f)_+ / \mathcal{F}_t \right] &= \underline{X} \mathbb{E}_{\mathbb{Q}} \left[(S_T^f - K^f)_+ / \mathcal{F}_t \right] \\ &= \underline{X} \mathbb{E}_{\mathbb{Q}} \left[(S_T^f - K^f) \mathbb{1}_{\{S_T^f \geq K^f\}} / \mathcal{F}_t \right]\end{aligned}$$

– En utilisant la diffusion de $\{S_t^f, t \in [0, T]\}$ sous \mathbb{Q} et la méthode d'évaluation d'un call classique, on obtient :

$$Call_t^X(T, K^f, S^f) = \underline{X} e^{-\int_t^T r_u du} \left\{ \mathbb{E}_{\mathbb{Q}} \left[S_T^f \mathbb{1}_{\{S_T^f \geq K^f\}} / \mathcal{F}_t \right] - K \mathbb{Q} \left[S_T^f \geq K^f / \mathcal{F}_t \right] \right\}$$

– Probabilité d'exercice

Comme précédemment, on est amené à évaluer la probabilité d'exercice de l'option :

$$\mathbb{Q} \left[S_T^f \geq K^f / \mathcal{F}_t \right] = \mathbb{Q} \left[S_t \exp \left\{ (R^f(t, T) - \Gamma_X^{S^f}(t, T) - \frac{1}{2} \Sigma_{S^f}^2(t, T))(T - t) + \Sigma_{S^f}(t, T) \sqrt{T - t} U \right\} \geq K^f / \mathcal{F}_t \right]$$

avec $U \stackrel{\mathcal{L}}{\sim} \mathcal{N}(0, 1)$

On trouve par des calculs similaires que la probabilité d'exercice du call est :

$$\mathcal{N}(D_2^f)$$

avec :

$$D_2^f = \frac{\ln \left\{ \frac{S_t^f}{K^f} \right\} + (R^f(t, T) - \Gamma_X^{S^f}(t, T) - \frac{1}{2} \Sigma_{S^f}^2(t, T))(T - t)}{\Sigma_{S^f}(t, T) \sqrt{T - t}} \quad (3.10)$$

– Le traitement du premier terme :

$$\mathbb{E}_{\mathbb{Q}} \left[S_T^f \mathbb{1}_{\{S_T^f \geq K^f\}} / \mathcal{F}_t \right]$$

fait apparaître un facteur supplémentaire. En effet, en utilisant la même méthode que pour la démonstration de la formule de Black-Scholes-Merton 1.4 p. 57, on a :

$$\begin{aligned}& \mathbb{E}_{\mathbb{Q}} \left[S_T^f \mathbb{1}_{\{S_T^f \geq K^f\}} / \mathcal{F}_t \right] \\ &= \mathbb{E}_{\mathbb{Q}} \left[S_t^f \exp \left\{ (R^f(t, T) - \Gamma_X^{S^f}(t, T) - \frac{1}{2} \Sigma_{S^f}^2(t, T))(T - t) + \Sigma_{S^f}(t, T) \sqrt{T - t} U \right\} \mathbb{1}_{\{S_T^f \geq K^f\}} / \mathcal{F}_t \right] \\ &= S_t^f \exp \left\{ (R^f(t, T) - \Gamma_X^{S^f}(t, T))(T - t) \right\} \mathbb{E}_{\mathbb{Q}} \left[\exp \left\{ -\frac{1}{2} \Sigma_{S^f}^2(t, T)(T - t) + \Sigma_{S^f}(t, T) \sqrt{T - t} U \right\} \mathbb{1}_{\{S_T^f \geq K^f\}} / \mathcal{F}_t \right] \\ &= \frac{S_t^f e^{-\Gamma_X^{S^f}(t, T)(T - t)}}{e^{-\int_t^T r_u^f du}} \int_{-D_2^f}^{\infty} e^{-\frac{1}{2} \Sigma_{S^f}^2(t, T)(T - t) + \Sigma_{S^f}(t, T) \sqrt{T - t} u} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{u^2}{2}} du\end{aligned}$$

Pour les mêmes raisons que précédemment, ce terme est égal à :

$$\mathbb{E}_{\mathbb{Q}} \left[S_T^f \mathbb{1}_{\{S_T^f \geq K^f\}} / \mathcal{F}_t \right] = \frac{S_t^f e^{-\Gamma_X^{S^f}(t, T)(T - t)}}{e^{-\int_t^T r_u^f du}} \mathcal{N}(D_1^f)$$

avec :

$$D_1^f = D_2^f + \Sigma_{S^f}(t, T) \sqrt{T-t}$$

□

Prix du put quanto avec garantie de change

Par la relation de parité Call-Put ⁵, le résultat suivant est immédiat :

Proposition 3.6 (Prix d'un put quanto avec garantie de change)

$$\text{Put}_t^X(T, K^f, S^f) = \underline{X} e^{-R(t, T)(T-t)} \left\{ K^f \mathcal{N}(-D_2^f) - S_t^f e^{(R^f(t, T) + \Gamma_X^{S^f}(t, T))(T-t)} \mathcal{N}(-D_1^f) \right\} \quad (3.11)$$

avec :

$$\begin{aligned} D_1^f &= \frac{\ln \left\{ \frac{S_t^f}{K^f} \right\} + (R^f(t, T) - \Gamma_X^{S^f}(t, T) + \frac{1}{2} \Sigma_{S^f}^2(t, T))(T-t)}{\Sigma_{S^f}(t, T) \sqrt{T-t}} \\ D_2^f &= \frac{\ln \left\{ \frac{S_t^f}{K^f} \right\} + (R^f(t, T) - \Gamma_X^{S^f}(t, T) - \frac{1}{2} \Sigma_{S^f}^2(t, T))(T-t)}{\Sigma_{S^f}(t, T) \sqrt{T-t}} \\ &= D_1 - \Sigma_{S^f}(t, T) \sqrt{T-t} \end{aligned}$$

3.5.2 Les « grecques » d'un call quanto avec garantie de change

Les calculs des grecques d'un call quanto avec garantie de change s'appuieront sur le résultat suivant :

Proposition 3.7 (Résultat préliminaire)

$$\phi(D_2^f) = \frac{S_t^f}{K^f} e^{(R^f(t, T) - \Gamma_X^{S^f}(t, T))(T-t)} \phi(D_1^f)$$

où $\phi(\cdot)$ désigne la densité de la $\mathcal{N}(0, 1)$

Démonstration 3.5

En effet, on a :

$$\begin{aligned} \phi(D_2^f) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp \left\{ -\frac{1}{2} \left(D_1^f - \Sigma_{S^f}(t, T) \sqrt{T-t} \right)^2 \right\} \\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp \left\{ -\frac{1}{2} \left((D_1^f)^2 - 2D_1^f \Sigma_{S^f}(t, T) \sqrt{T-t} + \Sigma_{S^f}^2(t, T)(T-t) \right) \right\} \\ &= \left[\frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}(D_1^f)^2} \right] + \exp \left\{ \ln \left(\frac{S_t^f}{K^f} \right) + \left(R^f(t, T) - \Gamma_X^{S^f}(t, T) + \frac{1}{2} \Sigma_{S^f}^2(t, T) \right) (T-t) - \frac{1}{2} \Sigma_{S^f}^2(t, T)(T-t) \right\} \\ &= \phi(D_1^f) \frac{S_t^f}{K^f} e^{(R^f(t, T) - \Gamma_X^{S^f}(t, T))(T-t)} \end{aligned}$$

□

5. cf. remarque D.2 p. 102 dans l'Annexe

- Le Delta

Proposition 3.8 (Delta d'un call quanto avec garantie de change)

Le delta d'un call quanto avec garantie de change est donné par :

$$\Delta^{Call_t^X(T, K^f, S^f)} = \underline{X} e^{-(\Gamma_X^{S^f}(t, T) + R(t, T) - R^f(t, T))(T-t)} \mathcal{N}(D_1^f)$$

Démonstration 3.6 (Delta d'un call quanto avec garantie de change)

Nous avons :

$$\begin{aligned} \Delta^{Call_t^X(T, K^f, S^f)} &= \frac{\partial Call_t^X(T, K^f, S^f)}{\partial S_t^f} \\ &= \underline{X} e^{-(\Gamma_X^{S^f}(t, T) + R(t, T) - R^f(t, T))(T-t)} \mathcal{N}(D_1^f) \\ &\quad + \underline{X} S_t^f e^{-(\Gamma_X^{S^f}(t, T) + R(t, T) - R^f(t, T))(T-t)} \phi(D_1^f) \frac{\partial D_1^f}{\partial S_t^f} \\ &\quad - \underline{X} K e^{R(t, T)(T-t)} \phi(D_2^f) \frac{\partial D_2^f}{\partial S_t^f} \end{aligned}$$

On a :

$$\frac{\partial D_2^f}{\partial S_t^f} = \frac{\partial D_1^f}{\partial S_t^f}$$

Ainsi, par application du résultat de la proposition 3.7 p. 72

$$\begin{aligned} \Delta^{Call_t^X(T, K^f, S^f)} &= \underline{X} e^{-(\Gamma_X^{S^f}(t, T) + R(t, T) - R^f(t, T))(T-t)} \mathcal{N}(D_1^f) \\ &\quad + \underline{X} S_t^f e^{-(\Gamma_X^{S^f}(t, T) + R(t, T) - R^f(t, T))(T-t)} \phi(D_1^f) \frac{\partial D_1^f}{\partial S_t^f} \\ &\quad - \underline{X} K^f e^{R(t, T)(T-t)} \frac{S_t^f}{K} e^{(R^f(t, T) - \Gamma_X^{S^f}(t, T))(T-t)} \phi(D_1^f) \frac{\partial D_1^f}{\partial S_t^f} \\ &= \underline{X} e^{-(\Gamma_X^{S^f}(t, T) + R(t, T) - R^f(t, T))(T-t)} \mathcal{N}(D_1^f) \end{aligned}$$

□

- Le Gamma

Proposition 3.9 (Gamma d'un call quanto avec garantie de change)

$$\Gamma^{Call_t^X(T, K^f, S^f)} = \frac{\underline{X} e^{-(\Gamma_X^{S^f}(t, T) + R(t, T) - R^f(t, T))(T-t)}}{S_t^f \Sigma_{S^f}(t, T) \sqrt{T-t}} \phi(D_1^f)$$

Démonstration 3.7 (Gamma d'un call quanto avec garantie de change)

En effet,

$$\begin{aligned}\Gamma^{Call_t^X(T, K^f, S^f)} &= \frac{\partial \Delta^{Call_t^X(T, K^f, S^f)}}{\partial S_t^f} \\ &= \underline{X} e^{-(\Gamma_X^{S^f}(t, T) + R(t, T) - R^f(t, T))(T-t)} \phi(D_1^f) \frac{\partial D_1^f}{\partial S_t^f}\end{aligned}$$

Et,

$$\begin{aligned}\frac{\partial D_1^f}{\partial S_t^f} &= \frac{\partial}{\partial S_t^f} \left[\frac{\ln \left\{ \frac{S_t^f}{K^f} \right\} + (R^f(t, T) - \Gamma_X^{S^f}(t, T) + \frac{1}{2} \Sigma_{S^f}^2(t, T))(T-t)}{\Sigma_{S^f}(t, T) \sqrt{T-t}} \right] \\ &= \frac{1}{S_t^f \Sigma_{S^f}(t, T) \sqrt{T-t}}\end{aligned}$$

□

- **Sensibilité par rapport aux taux d'intérêt**

La formule de prix d'un call quanto avec garantie de change faisant intervenir deux taux :

- le taux moyen $R(t, T)$ entre t et T sur le marché domestique
- le taux moyen $R^f(t, T)$ entre t et T sur le marché étranger

on s'intéressera à la sensibilité de l'option par rapport à chacun de ces taux.

Proposition 3.10 (Sensibilité par rapport au taux domestique)

En notant :

$\rho_1^{Call_t^X(T, K^f, S^f)}$, la sensibilité par rapport au taux domestique, on a :

$$\boxed{\rho_1^{Call_t^X(T, K^f, S^f)} = -(T-t) Call_t^X(T, K^f, S^f)}$$

Démonstration 3.8 (Sensibilité par rapport au taux domestique)

En effet, les formules pour D_1^f et D_2^f ne faisant intervenir que le taux étranger, on a :

$$\begin{aligned}\rho_1^{Call_t^X(T, K^f, S^f)} &= \frac{\partial Call_t^X(T, K^f, S^f)}{\partial R(t, T)} \\ &= -(T-t) \underline{X} S_t^f e^{-(\Gamma_X^{S^f}(t, T) + R(t, T) - R^f(t, T))(T-t)} \mathcal{N}(D_1^f) + \underline{X} K^f (T-t) e^{-R(t, T)(T-t)} \mathcal{N}(D_2^f) \\ &= -(T-t) Call_t^X(T, K^f, S^f)\end{aligned}$$

□

Proposition 3.11 (Sensibilité par rapport au taux étranger)

En notant :

$\rho_2^{Call_t^X(T, K^f, S^f)}$, la sensibilité par rapport au taux étranger, on a :

$$\boxed{\rho_2^{Call_t^X(T, K^f, S^f)} = (T - t) \underline{X} S_t^f e^{-(\Gamma_X^{S^f}(t, T) + R(t, T) - R^f(t, T))(T-t)} \mathcal{N}(D_1^f)}$$

Démonstration 3.9 (Sensibilité par rapport au taux étranger)

On a :

$$\begin{aligned} \rho_2^{Call_t^X(T, K^f, S^f)} &= \frac{\partial Call_t^X(T, K^f, S^f)}{\partial R^f(t, T)} \\ &= \underline{X} S_t^f (T - t) e^{-(\Gamma_X^{S^f}(t, T) + R(t, T) - R^f(t, T))(T-t)} \mathcal{N}(D_1^f) \\ &\quad + \underline{X} S_t^f e^{-(\Gamma_X^{S^f}(t, T) + R(t, T) - R^f(t, T))(T-t)} \phi(D_1^f) \frac{\partial D_1^f}{\partial R^f(t, T)} \\ &\quad - \underline{X} K^f (T - t) e^{-R(t, T)(T-t)} \phi(D_2^f) \frac{\partial D_2^f}{\partial R^f(t, T)} \end{aligned}$$

De plus :

$$\frac{\partial D_2^f}{\partial R^f(t, T)} = \frac{\partial D_1^f}{\partial R^f(t, T)}$$

Donc :

$$\begin{aligned} \rho_2^{Call_t^X(T, K^f, S^f)} &= \underline{X} S_t^f (T - t) e^{-(\Gamma_X^{S^f}(t, T) + R(t, T) - R^f(t, T))(T-t)} \mathcal{N}(D_1^f) \\ &\quad + \underline{X} S_t^f e^{-(\Gamma_X^{S^f}(t, T) + R(t, T) - R^f(t, T))(T-t)} \phi(D_1^f) \frac{\partial D_1^f}{\partial R^f(t, T)} \\ &\quad - \underline{X} K^f (T - t) e^{-R(t, T)(T-t)} \frac{S_t^f}{K^f} e^{(R^f(t, T) - \Gamma_X^{S^f}(t, T))(T-t)} \phi(D_1^f) \frac{\partial D_1^f}{\partial R^f(t, T)} \\ &= \underline{X} S_t^f (T - t) e^{-(\Gamma_X^{S^f}(t, T) + R(t, T) - R^f(t, T))(T-t)} \mathcal{N}(D_1^f) \end{aligned}$$

□

3.6 Evaluation d'un put « gap » sur sous-jacent étranger

Définition 3.1 (Put européen « gap-quanto » avec garanti de change)

Il s'agit d'un contrat donnant droit à son détenteur de vendre à la date T , un sous-jacent S^f exprimé en monnaie étrangère, à un prix L^f et pour un taux de change \underline{X} fixés à l'avance, et à condition que le prix du sous-jacent ne dépasse pas un montant K^f également fixé.

Le payoff du contrat est donné par :

$$\underline{X} (L^f - S_T^f) \mathbf{1}_{\{S_T^f \leq K^f\}}$$

Proposition 3.12 (Prix du put « gap » sur sous-jacent étranger avec garantie de change)

Pour un taux de change \underline{X} fixé à l'avance, le prix du put gap sur un sous-jacent étranger est donné par :

$$\underline{X} e^{-R(t,T)(T-t)} \left\{ L^f \mathcal{N}(-D_2^f) - S_t^f e^{(R^f(t,T) - \Gamma_X^{S^f}(t,T))(T-t)} \mathcal{N}(-D_1^f) \right\} \quad (3.12)$$

avec :

$$\begin{aligned} D_1 &= \frac{\ln \left\{ \frac{S_t^f}{K^f} \right\} + (R^f(t,T) - \Gamma_X^{S^f}(t,T) + \frac{1}{2} \Sigma_{S^f}^2(t,T))(T-t)}{\Sigma_{S^f}(t,T) \sqrt{T-t}} \\ D_2 &= \frac{\ln \left\{ \frac{S_t^f}{K^f} \right\} + (R^f(t,T) - \Gamma_X^{S^f}(t,T) - \frac{1}{2} \Sigma_{S^f}^2(t,T))(T-t)}{\Sigma_{S^f}(t,T) \sqrt{T-t}} \\ &= D_1 - \Sigma_{S^f}(t,T) \sqrt{T-t} \end{aligned}$$

Démonstration 3.10

On utilise la formule du put quanto avec garantie de change⁶ en effectuant les changements nécessaires pour distinguer les strikes K^f et L^f intervenant respectivement dans la probabilité d'exercice de l'option et dans le flux à l'échéance.

□

3.7 Les grecques du put « gap-quanto » avec garantie de change

Remarque 3.5

Les calculs seront très similaires à ceux des grecques pour les options quanto avec garantie de change, ils s'appuieront également sur la proposition 3.7 p. 72.

Le delta

Proposition 3.13 (Delta du put « gap-quanto » avec garantie de change)

$$\Delta(Put_{gap}^{quanto}) = \underline{X} e^{-[R(t,T) + \Gamma_X^{S^f}(t,T) - R^f(t,T)](T-t)} \left\{ \frac{\phi(D_1^f)}{\Sigma_{S^f}(t,T) \sqrt{T-t}} \left[1 - \frac{L^f}{K^f} \right] - \mathcal{N}(-D_1^f) \right\}$$

6. cf. proposition 3.6 p. 72

Démonstration 3.11 (Delta du put « gap-quanto » avec garantie de change)

En effet, en dérivant l'expression (3.12) p. 76, on obtient :

$$\begin{aligned}\Delta(Put_{gap}^{quanto}) &= \underline{X}L^f e^{-R(t,T)(T-t)}\phi(-D_2^f) \left(-\frac{\partial D_2^f}{\partial S_t^f} \right) \\ &\quad - \underline{X}e^{-[R(t,T)+\Gamma_X^{S^f}(t,T)-R^f(t,T)](T-t)}\mathcal{N}(-D_1^f) \\ &\quad + \underline{X}S_t^f e^{-[R(t,T)+\Gamma_X^{S^f}(t,T)-R^f(t,T)](T-t)}\phi(-D_1^f) \left(-\frac{\partial D_1^f}{\partial S_t^f} \right)\end{aligned}$$

On a d'une part,

$$\begin{aligned}\phi(-D_1^f) &= \phi(D_1^f) \\ \phi(-D_2^f) &= \phi(D_2^f) \\ &= \frac{S_t^f}{K^f} e^{(R^f(t,T)-\Gamma_X^{S^f}(t,T))(T-t)}\phi(D_1^f)\end{aligned}$$

par la proposition 3.7 p. 72

et d'autre part,

$$\begin{aligned}\frac{\partial D_2^f}{\partial S_t^f} &= \frac{\partial D_1^f}{\partial S_t^f} \\ &= \frac{1}{S_t^f \Sigma_{S^f}(t,T)\sqrt{T-t}}\end{aligned}$$

On obtient :

$$\begin{aligned}\Delta(Put_{gap}^{quanto}) &= -\underline{X}L^f e^{-R(t,T)(T-t)}\frac{S_t^f}{K^f} e^{(R^f(t,T)-\Gamma_X^{S^f}(t,T))(T-t)}\phi(D_1^f)\frac{\partial D_1^f}{\partial S_t^f} \\ &\quad - \underline{X}e^{-[R(t,T)+\Gamma_X^{S^f}(t,T)-R^f(t,T)](T-t)}\mathcal{N}(-D_1^f) \\ &\quad - \underline{X}S_t^f e^{-[R(t,T)+\Gamma_X^{S^f}(t,T)-R^f(t,T)](T-t)}\phi(D_1^f)\frac{\partial D_1^f}{\partial S_t^f} \\ &= \underline{X}e^{-[R(t,T)+\Gamma_X^{S^f}(t,T)-R^f(t,T)](T-t)}\left\{ \frac{\phi(D_1^f)}{\Sigma_{S^f}(t,T)\sqrt{T-t}} \left[1 - \frac{L^f}{K^f} \right] - \mathcal{N}(-D_1^f) \right\}\end{aligned}$$

□

Remarque 3.6

Lorsque $L^f = K^f$, on retrouve bien l'expression du delta d'un put quanto avec garantie de change.

Le Gamma

Proposition 3.14 (Gamma d'un put « gap-quanto » avec garantie de change)

$$\Gamma(Put_{gap}^{quanto}) = \frac{\underline{X}\phi(D_1^f)}{S_t^f \Sigma_{S^f}(t,T)\sqrt{T-t}} e^{-[R(t,T)+\Gamma_X^{S^f}(t,T)-R^f(t,T)](T-t)} \left\{ \frac{D_1^f}{\Sigma_{S^f}(t,T)\sqrt{T-t}} \left[\frac{L^f}{K^f} - 1 \right] + 1 \right\}$$

Démonstration 3.12 (Gamma d'un put « gap-quanto » avec garantie de change)

Il suffit de dériver $\Delta(Put_{gap}^{quanto})$ par rapport à S_t^f

□

Sensibilités par rapport aux taux d'intérêt

Proposition 3.15 (sensibilité par rapport au taux domestique)

$$\rho_1(Put_{gap}^{quanto}) = -(T-t)Put(t, T, K^f, S^f, L^f, \underline{X})$$

avec $Put(t, T, K^f, S^f, L^f, \underline{X})$, le prix en t de l'option, et $\rho_1(Put_{gap}^{quanto})$, sa sensibilité par rapport au taux domestique.

Démonstration 3.13 (sensibilité par rapport au taux domestique)

Le résultat est immédiat en remarquant que le taux domestique n'intervient dans le prix du contrat que par actualisation du flux à l'échéance; autrement dit il est absent des expressions de D_1^f et D_2^f .⁷

□

sensibilité par rapport au taux étranger

Proposition 3.16 (Sensibilité par rapport au taux étranger)

$$\rho_2(Put_{gap}^{quanto}) = (T-t)\underline{X}S_t^f e^{-[R(t, T) + \Gamma_X^{S^f} - R^f(t, T)](T-t)} \left\{ \frac{\phi(D_1^f)}{\Sigma_{S^f}(t, T)\sqrt{T-t}} \left[1 - \frac{L^f}{K^f} \right] - \mathcal{N}(-D_1^f) \right\}$$

où $\rho_2(Put_{gap}^{quanto})$ est la sensibilité par rapport à $R^f(t, T)$ du put « gap-quanto » avec garantie de change

Démonstration 3.14 (Sensibilité par rapport au taux étranger)

Le résultat est immédiat en utilisant :

•

$$\begin{aligned} \frac{\partial D_2^f}{\partial R^f(t, T)} &= \frac{\partial D_1^f}{\partial R^f(t, T)} \\ &= \frac{T-t}{\Sigma_{S^f}(t, T)\sqrt{T-t}} \end{aligned}$$

•

$$\begin{aligned} \phi(-D_2^f) &= \phi(D_2^f) \\ &= \frac{S_t^f}{K^f} e^{(R^f(t, T) - \Gamma_X^{S^f}(t, T))(T-t)} \phi(D_1^f) \end{aligned}$$

□

7. En fait, les paramètres intervenant dans les expressions de D_1^f et D_2^f , sont ceux intervenant dans la diffusion de S_t^f sous la probabilité risque neutre domestique \mathbb{Q}

Chapitre 4

Produits structurés sur le pétrole : Exemple 1

4.1 Description de la structure

On considère une structure optionnelle sur un nominal de $N \text{ €}$ dont le sous-jacent est le pétrole exprimé en monnaie étrangère (\$ par baril).

- On note :

t La date de valorisation de l'option

T L'échéance de l'option

$\{S_t^f, t\}$ Le processus de prix du pétrole (en \$)

- Le flux reçu à l'échéance T est :

– si $S_T^f < 70$ alors 0

– si $70 \leq S_T^f < 75$ alors $S_T^f - 70$

– si $75 \leq S_T^f < 80$ alors $5 + 2(S_T^f - 75)$

– si $80 \leq S_T^f < 85$ alors $15 + 3(S_T^f - 80)$

– si $S_T^f \geq 85$ alors 30

- Le taux de change appliqué à l'échéance est fixé à : $1 \$ = 1 \text{ €}$
- Le nominal N est exprimé en monnaie €.

On est dans le cadre d'un produit structuré quanto avec garantie de change

4.2 Evaluation de la structure

4.2.1 Décomposition du payoff

Le flux à l'échéance T peut être dupliqué par un portefeuille constitué des produits suivants :

- l'achat d'un call de strike $K_1^f = 70$ \$ et d'échéance T
- l'achat d'un call de strike $K_2^f = 75$ \$ et d'échéance T
- l'achat d'un call de strike $K_3^f = 80$ \$ et d'échéance T
- la vente de trois call de strike $K_4^f = 85$ \$ et d'échéance T

En effet, la valeur du portefeuille à l'échéance est :

$$(S_T^f - 70)_+ + (S_T^f - 75)_+ + (S_T^f - 80)_+ + 3(85 - S_T^f)_+$$

- si $S_T^f < 70$, payoff = 0
- si $70 \leq S_T^f < 75$, payoff = $S_T^f - 70$
- si $75 \leq S_T^f < 80$,

$$\begin{aligned} \text{payoff} &= (S_T^f - 70) + (S_T^f - 75) \\ &= 2S_T^f - (75 - 5) - 75 \\ &= 2(S_T^f - 75) + 5 \end{aligned}$$

- si $80 \leq S_T^f < 85$,

$$\begin{aligned} \text{payoff} &= (S_T^f - 70) + (S_T^f - 75) + (S_T^f - 80) \\ &= 3S_T^f - (80 - 10) - (80 - 5) - 80 \\ &= 3(S_T^f - 80) + 15 \end{aligned}$$

- si $85 \leq S_T^f$,

$$\begin{aligned} \text{payoff} &= (S_T^f - 70) + (S_T^f - 75) + (S_T^f - 80) + 3(85 - S_T^f) \\ &= -70 - 75 - 80 + 3 * 85 \\ &= 30 \end{aligned}$$

Par AOA¹, les valeurs du portefeuille et du contrat sont les mêmes à toute date t précédant l'échéance T .

Il s'agit donc d'évaluer la valeur à la date t de quatre **calls européens quanto avec garantie de change**.

On note \underline{X} le taux de change fixé par le contrat.

4.2.2 Formule de prix

La valeur à toute date t précédant l'échéance T est donnée par :

$$Call_t^X(T, K_1^f, S^f) + Call_t^X(T, K_2^f, S^f) + Call_t^X(T, K_3^f, S^f) - 3 Call_t^X(T, K_4^f, S^f)$$

En appliquant la formule de la première partie (cf. proposition 3.5 p. 70), on trouve² :

$$\begin{aligned} & \underline{X} S_t^f e^{-\Gamma_X^{S^f}(t, T)(T-t)} e^{-\int_t^T (r_u - r_u^f) du} \{ \mathcal{N}(D_1^1) + \mathcal{N}(D_1^2) + \mathcal{N}(D_1^3) - 3\mathcal{N}(D_1^4) \} \\ & - \underline{X} e^{-\int_t^T r_u du} K \{ \mathcal{N}(D_2^1) + \mathcal{N}(D_2^2) + \mathcal{N}(D_2^3) - 3\mathcal{N}(D_2^4) \} \end{aligned}$$

avec : $\forall i \in \llbracket 1, 4 \rrbracket$,

$$\begin{aligned} D_1^i &= \frac{\ln \left\{ \frac{S_t^f}{K_i^f} \right\} + (R^f(t, T) - \Gamma_X^{S^f}(t, T) + \frac{1}{2} \Sigma_{S^f}^2(t, T))(T - t)}{\Sigma_{S^f}(t, T) \sqrt{T - t}} \\ D_2^i &= \frac{\ln \left\{ \frac{S_t^f}{K_i^f} \right\} + (R^f(t, T) - \Gamma_X^{S^f}(t, T) - \frac{1}{2} \Sigma_{S^f}^2(t, T))(T - t)}{\Sigma_{S^f}(t, T) \sqrt{T - t}} \\ &= D_1^i - \Sigma_{S^f}(t, T) \sqrt{T - t} \end{aligned}$$

Estimation empirique des inputs de la formule

En pratique, l'application de cette formule nécessitera inéluctablement l'estimation de certains inputs tels que :

- Les taux sans risque moyens $R(t, T)$ et $R^f(t, T)$ sur les marchés domestique et étranger
- Les volatilités et la corrélation moyennes de X et S^f entre t et T

Ces quantités pourront être remplacées par leur estimateur empirique basé sur des données historiques.

1. cf. chapitre D p. 101 dans l'Annexe

2. en multipliant par le nominal

Chapitre 5

Produits structurés sur le pétrole : Exemple 2

5.1 Description

On considère la structure de swap décrite par les terms sheet suivants :

- durée du contrat : 3 ans
- nominal : N €
- tous les 3 mois la contrepartie A paye l'EURIBOR 3 mois constaté 3 mois plus tôt
- la contrepartie B paye une fois par an :
 - 6,05% si le cours du pétrole (en \$) dépasse de plus de 75% la valeur de référence stipulée à la signature du contrat
 - 0 sinon
- la valeur de référence est fixée à 65,50 \$

Ce contrat est un swap particulier car la partie B ne paye le taux fixe que si le prix du pétrole à chaque date de flux dépasse de plus de 75% une valeur de référence stipulée dans le contrat.

Tout d'abord déterminons l'échéancier correspondant à ce contrat.

On note :

- t La date de signature du contrat
- T_0 la date de début de composition
- T_1 la date de tombée du premier flux (trois mois plus tard)

- de manière plus générale $T_i, i \in \llbracket 1, 12 \rrbracket$ la date de tombée du i-ème flux
- δ_i le temps écoulé (exprimé en fraction d'année) entre les date T_i et T_{i-1} ¹
- δ'_i le temps écoulé (exprimé en fraction d'année) entre les date T_{4i} et $T_{4(i-1)}$ ²
- $L(T_{i-1}, \delta_i)$ taux EURIBOR entre T_{i-1} et $T_{i-1} + \delta_i = T_i$

Le flux à l'échéance est³ :

$$\sum_{i=1}^{i=12} \delta_i L(T_{i-1}, \delta_i) - \sum_{i=1}^{i=3} \delta'_i 6,05\% \mathbb{1}_{\{S_{T_{4i}}^f \geq K^f\}}$$

avec :

$$K^f = 75\% \text{ } 65,50 \text{ \$}$$

5.2 Evaluation

Il s'agit alors d'évaluer :

$$\begin{aligned} & \mathbb{E}_{\mathbb{Q}} \left[\sum_{i=1}^{i=12} \frac{\beta(t)}{\beta(T_i)} \delta_i L(T_{i-1}, \delta_i) - \sum_{i=1}^{i=3} \frac{\beta(t)}{\beta(T_{4i})} \delta'_i 6,05\% \mathbb{1}_{\{S_{T_{4i}}^f \geq K^f\}} / \mathcal{F}_t \right] \\ &= \sum_{i=1}^{i=12} \mathbb{E}_{\mathbb{Q}} \left[\frac{\beta(t)}{\beta(T_i)} \delta_i L(T_{i-1}, \delta_i) / \mathcal{F}_t \right] - \sum_{i=1}^{i=3} \mathbb{E}_{\mathbb{Q}} \left[\frac{\beta(t)}{\beta(T_{4i})} \delta'_i 6,05\% \mathbb{1}_{\{S_{T_{4i}}^f \geq K^f\}} / \mathcal{F}_t \right] \end{aligned}$$

En notant :

$$A_i = \mathbb{E}_{\mathbb{Q}} \left[\frac{\beta(t)}{\beta(T_i)} \delta_i L(T_{i-1}, \delta_i) / \mathcal{F}_t \right]$$

et,

$$B_i = \mathbb{E}_{\mathbb{Q}} \left[\frac{\beta(t)}{\beta(T_{4i})} \delta'_i 6,05\% \mathbb{1}_{\{S_{T_{4i}}^f \geq K^f\}} / \mathcal{F}_t \right]$$

On peut écrire que la valeur du contrat en t est :

$$\sum_{i=1}^{i=12} A_i - \sum_{i=1}^{i=3} B_i$$

1. il s'agit de la durée de composition du i-ème flux pour A
2. il s'agit de la durée de composition du i-ème flux pour B
3. en multipliant bien-sûr par le nominal exprimé en €

Evaluons A_i

Formule pour l'EURIBOR

Le taux EURIBOR appliqué entre T_{i-1} et $T_{i-1} + \delta_i = T_i$ est donné par la formule suivante :

$$L(T_{i-1}, \delta_i) = \frac{1}{\delta_i} \left(\frac{1}{B(T_{i-1}, T_i)} - 1 \right)$$

avec :

$$\begin{aligned} B(T_{i-1}, T_i) &= \exp \left\{ - \int_{T_{i-1}}^{T_i} r_s ds \right\} \\ &= \frac{\beta(T_{i-1})}{\beta(T_i)} \end{aligned}$$

on a donc :

$$\begin{aligned} A_i &= \mathbb{E}_{\mathbb{Q}} \left[\frac{\beta(t)}{\beta(T_i)} \delta_i L(T_{i-1}, \delta_i) / \mathcal{F}_t \right] \\ &= \mathbb{E}_{\mathbb{Q}} \left[\frac{\beta(t)}{\beta(T_i)} \delta_i \frac{1}{\delta_i} \left(\frac{1}{B(T_{i-1}, T_i)} - 1 \right) / \mathcal{F}_t \right] \\ &= \mathbb{E}_{\mathbb{Q}} \left[\frac{\beta(t)}{\beta(T_i)} \frac{1}{B(T_{i-1}, T_i)} / \mathcal{F}_t \right] - \mathbb{E}_{\mathbb{Q}} \left[\frac{\beta(t)}{\beta(T_i)} / \mathcal{F}_t \right] \\ &= \mathbb{E}_{\mathbb{Q}} \left[\frac{\beta(t)}{\beta(T_i)} \frac{\beta(T_i)}{\beta(T_{i-1})} / \mathcal{F}_t \right] - B(t, T_i) \\ &= B(t, T_{i-1}) - B(t, T_i) \end{aligned}$$

Evaluons B_i

$$\begin{aligned} B_i &= \mathbb{E}_{\mathbb{Q}} \left[\frac{\beta(t)}{\beta(T_{4i})} \delta'_i 6,05\% \mathbb{1}_{\{S_{T_{4i}}^f \geq K^f\}} / \mathcal{F}_t \right] \\ &= \delta'_i 6,05\% B(t, T_{4i}) \mathbb{E}_{\mathbb{Q}} \left[\mathbb{1}_{\{S_{T_{4i}}^f \geq K^f\}} / \mathcal{F}_t \right] \\ &= \delta'_i 6,05\% B(t, T_{4i}) \mathbb{Q} \left[S_{T_{4i}}^f \geq K^f / \mathcal{F}_t \right] \end{aligned}$$

Le terme: $\mathbb{Q} \left[S_{T_{4i}}^f \geq K^f / \mathcal{F}_t \right]$ s'identifie à la probabilité d'exercice d'un call européen de strike K^f (en \$), d'échéance T_{4i} sur un sous-jacent exprimé en monnaie étrangère. Cette quantité a été évaluée en première partie, et on a :

$$\mathbb{Q} \left[S_{T_{4i}}^f \geq K^f / \mathcal{F}_t \right] = \mathcal{N}(D_2^{T_{4i}})$$

où en posant :

$$\begin{aligned} - \Gamma_X^{S^f}(t, T_{4i}) &= \frac{1}{T_{4i}-t} \int_t^{T_{4i}} (\rho_u(X, S^f) \sigma_X(u) \sigma_{S^f}(u)) du \\ - \Sigma_{S^f}^2(t, T_{4i}) &= \frac{1}{T_{4i}-t} \int_t^{T_{4i}} \sigma_{S^f}^2(u) du \\ - R^f(t, T_{4i}) &= \frac{1}{T_{4i}-t} \int_t^{T_{4i}} r_u du \end{aligned}$$

on a :

$$D_2^{T_{4i}} = \frac{\ln \left\{ \frac{S^f}{K} \right\} + (R^f(t, T_{4i}) - \Gamma_X^{S^f}(t, T_{4i}) - \frac{1}{2} \Sigma_{S^f}^2(t, T_{4i}))(T_{4i} - t)}{\Sigma_{S^f}(t, T_{4i}) \sqrt{T_{4i} - t}}$$

Evaluation du contrat

En rassemblant ces calculs, le prix du contrat est donné par⁴ :

$$\begin{aligned} & \sum_{i=1}^{i=12} \{ B(t, T_{i-1}) - B(t, T_i) \} - \sum_{i=1}^{i=3} \left\{ \delta'_i 6,05\% B(t, T_{4i}) \mathcal{N}(D_2^{T_{4i}}) \right\} \\ &= \sum_{i=1}^{i=12} \{ B(t, T_{i-1}) - B(t, T_i) \} - 6,05\% \sum_{i=1}^{i=3} \left\{ \delta'_i B(t, T_{4i}) \mathcal{N}(D_2^{T_{4i}}) \right\} \end{aligned}$$

4. en multipliant par le nominal

Chapitre 6

Produits structurés sur le pétrole : Exemple 3

6.1 Description

Le contrat décrit dans cette partie est un swap particulier car en plus de dépendre du taux variable considéré (EURIBOR 6 mois), les flux dépendent d'un autre sous-jacent : le rendement du prix du pétrole entre le jour de la signature du contrat et l'échéance ie. $\frac{S_0^f - S_T^f}{S_0^f}$

- durée du contrat : 6 mois
- nominal : $N \text{ €}$
- dans 6 mois :
 - la partie A paye 7,80 %
 - la partie B paye $Eur_6 + 0,02\% + CO$ si $S_T^f \leq 80\%S_0^f$ et 0 sinon

En notant:

- $t = T_0$ la date de signature
- T l'échéance
- T_1 la date de début de composition des intérêts
- δ la durée de composition (en fraction d'année) entre T_1 et l'échéance
- S_0^f le cours du pétrole à la signature T_0 ($S_0^f = 55.90 \$$)
- S_T^f le cours du pétrole à l'échéance
- Eur_6 le taux EURIBOR 6 mois valable pour toute la durée de composition δ (fixé en T_1)

Le payoff est alors donné par¹ :

$$\delta (Eur_6 + 2bps + CO - 7.80\%)$$

où :

$$CO = \frac{S_0^f - S_T^f}{S_0^f} \mathbb{1}_{\{S_T^f \leq 80\% S_0^f\}}$$

6.2 Formule de prix

Il s'agit d'évaluer :

$$\begin{aligned} \mathbb{E}_{\mathbb{Q}} \left[\frac{\beta(t)}{\beta(T)} \delta \left(Eur_6 + 2bps + \frac{S_0 - S_T}{S_0} \mathbb{1}_{\{S_T \leq 80\% S_0\}} - 7.80\% \right) / \mathcal{F}_t \right] = \\ \mathbb{E}_{\mathbb{Q}} \left[\frac{\beta(t)}{\beta(T)} \delta Eur_6 / \mathcal{F}_t \right] + \mathbb{E}_{\mathbb{Q}} \left[\frac{\beta(t)}{\beta(T)} \delta 2bps / \mathcal{F}_t \right] \\ + \mathbb{E}_{\mathbb{Q}} \left[\frac{\beta(t)}{\beta(T)} \delta \frac{S_0 - S_T}{S_0} \mathbb{1}_{\{S_T \leq 80\% S_0\}} / \mathcal{F}_t \right] - \mathbb{E}_{\mathbb{Q}} \left[\frac{\beta(t)}{\beta(T)} \delta - 7.80\% / \mathcal{F}_t \right] \end{aligned}$$

et on a :

$$\begin{aligned} Eur_6 &= \frac{1}{\delta} \left(\frac{1}{B(T_1, T)} - 1 \right) \\ B(T_1, T) &= \frac{\beta(T_1)}{\beta(T)} \end{aligned}$$

Le premier terme nous donne donc :

$$\begin{aligned} \mathbb{E}_{\mathbb{Q}} \left[\frac{\beta(t)}{\beta(T)} \delta Eur_6 / \mathcal{F}_t \right] &= \delta \mathbb{E}_{\mathbb{Q}} \left[\frac{\beta(t)}{\beta(T)} \frac{1}{\delta} \left(\frac{1}{B(T_1, T)} - 1 \right) / \mathcal{F}_t \right] \\ &= \mathbb{E}_{\mathbb{Q}} \left[\frac{\beta(t)}{\beta(T)} \frac{\beta(T)}{\beta(T_1)} / \mathcal{F}_t \right] - \mathbb{E}_{\mathbb{Q}} \left[\frac{\beta(t)}{\beta(T)} / \mathcal{F}_t \right] \\ &= B(t, T_1) - B(t, T) \end{aligned}$$

D'autre part ,

$$\mathbb{E}_{\mathbb{Q}} \left[\frac{\beta(t)}{\beta(T)} \delta 2bps / \mathcal{F}_t \right] - \mathbb{E}_{\mathbb{Q}} \left[\frac{\beta(t)}{\beta(T)} \delta - 7.80\% / \mathcal{F}_t \right] = 2bps \delta B(t, T) - \delta 7.80\% B(t, T)$$

Il reste à déterminer :

$$\mathbb{E}_{\mathbb{Q}} \left[\frac{\beta(t)}{\beta(T)} \delta \frac{S_0^f - S_T^f}{S_0^f} \mathbb{1}_{\{S_T^f \leq 80\% S_0^f\}} / \mathcal{F}_t \right] = \frac{\delta}{S_0^f} \mathbb{E}_{\mathbb{Q}} \left[\frac{\beta(t)}{\beta(T)} (S_0^f - S_T^f) \mathbb{1}_{\{S_T^f \leq 80\% S_0^f\}} / \mathcal{F}_t \right]$$

1. en multipliant par le nominal exprimé en €

Et, on reconnait dans le terme :

$$\mathbb{E}_{\mathbb{Q}} \left[\frac{\beta(t)}{\beta(T)} (S_0^f - S_T^f) \mathbb{1}_{\{S_T^f \leq 80\% S_0^f\}} / \mathcal{F}_t \right]$$

la formule d'évaluation risque-neutre domestique d'un put gap sur sous-jacent étranger dont les strikes sont :

– $L^f = S_0^f$ pour le strike intervenant dans le payoff

– $K^f = 80\% S_0^f$ pour le strike intervenant dans la probabilité d'exercice de l'option

En adaptant la formule du put gap à notre cas et en prenant en compte la corrélation entre sous-jacent étranger et taux de change, on trouve que :

$$\mathbb{E}_{\mathbb{Q}} \left[\frac{\beta(t)}{\beta(T)} (S_0^f - S_T^f) \mathbb{1}_{\{S_T^f \leq 80\% S_0^f\}} / \mathcal{F}_t \right] = L^f e^{-\int_t^T r_s ds} \mathcal{N}(-D_2^f) - S_t \mathcal{N}(-D_1^f)$$

avec :

$$D_1^f = \frac{\ln \left\{ \frac{S_t^f}{K^f} \right\} + (R^f(t, T) - \Gamma_X^{S^f}(t, T) + \frac{1}{2} \Sigma_{S^f}^2(t, T))(T - t)}{\Sigma_{S^f}(t, T) \sqrt{T - t}}$$

$$D_2^f = \frac{\ln \left\{ \frac{S_t^f}{K^f} \right\} + (R^f(t, T) - \Gamma_X^{S^f}(t, T) - \frac{1}{2} \Sigma_{S^f}^2(t, T))(T - t)}{\Sigma_{S^f}(t, T) \sqrt{T - t}}$$

prix du contrat

Le prix du contrat en t est alors donné par la formule suivante² :

$$B(t, T_1) - B(t, T) + 2 bps \delta B(t, T) - \delta 7.80\% B(t, T) + \frac{\delta}{S_0^f} \left\{ S_0^f e^{-\int_t^T r_s ds} \mathcal{N}(-D_2^f) - S_t \mathcal{N}(-D_1^f) \right\}$$

$$= B(t, T_1) + B(t, T) \left\{ -1 + \delta \left(-7.78\% + \mathcal{N}(-D_2^f) \right) \right\} + \frac{\delta S_t^f}{S_0^f} \mathcal{N}(-D_1^f)$$

avec :

$$D_1^f = \frac{\ln \left\{ \frac{100 S_t^f}{80 S_0^f} \right\} + (R^f(t, T) - \Gamma_X^{S^f}(t, T) + \frac{1}{2} \Sigma_{S^f}^2(t, T))(T - t)}{\Sigma_{S^f}(t, T) \sqrt{T - t}}$$

$$D_2^f = \frac{\ln \left\{ \frac{100 S_t^f}{80 S_0^f} \right\} + (R^f(t, T) - \Gamma_X^{S^f}(t, T) - \frac{1}{2} \Sigma_{S^f}^2(t, T))(T - t)}{\Sigma_{S^f}(t, T) \sqrt{T - t}}$$

2. en multipliant par le nominal

Annexes

Annexe A

Probabilités

A.1 Espérance conditionnelle

Proposition A.1 (Propriété de l'Espérance Conditionnelle)

Soit \mathcal{G} une tribu.

Soit Z une variable aléatoire \mathcal{G} -mesurable et \mathbb{P} -intégrable.

Soit \tilde{Z} une variable aléatoire \mathbb{P} -intégrable.

On alors :

- $\mathbb{E}[Z] = \mathbb{E}[\mathbb{E}[Z/\mathcal{G}]]$
- $\mathbb{E}[Z\tilde{Z}/\mathcal{G}] = Z\mathbb{E}[\tilde{Z}/\mathcal{G}]$

A.2 Changement de probabilité

Définition A.1 (Dérivée de Radon-Nikodym)

Une probabilité \mathbb{Q} sur un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ définit un changement de probabilité s'il existe une variable aléatoire $\frac{d\mathbb{Q}}{d\mathbb{P}}$, dérivée de Radon-Nikodym, telle que pour tout événement $A \in \mathcal{A}$

$$\mathbb{Q}(A) = \mathbb{E}^{\mathbb{P}}\left[\frac{d\mathbb{Q}}{d\mathbb{P}}\mathbb{1}_A\right]$$

De plus si Z est une variable aléatoire \mathbb{Q} -intégrable on a

$$\mathbb{E}^{\mathbb{Q}}[Z] = \mathbb{E}^{\mathbb{P}}\left[\frac{d\mathbb{Q}}{d\mathbb{P}}Z\right]$$

Proposition A.2 (Règle de Bayes)

On considère $\mathbb{P} \sim \mathbb{Q}$ (ie. \mathbb{P} et \mathbb{Q} équivalentes) sur l'espace probabilisable (Ω, \mathcal{A}) .

Soit \mathcal{G} une sous-tribu de \mathcal{A}

Soit $\frac{d\mathbb{Q}}{d\mathbb{P}}|_{\mathcal{G}}$ la dérivée de Radon-Nikodym de \mathbb{Q} par rapport à \mathbb{P} sur la sous-tribu \mathcal{G} .

On alors :

$$\mathbb{E}^{\mathbb{Q}}[Z/\mathcal{G}] = \frac{\mathbb{E}^{\mathbb{P}}[\frac{d\mathbb{Q}}{d\mathbb{P}}|_{\mathcal{G}} Z/\mathcal{G}]}{\mathbb{E}^{\mathbb{P}}[\frac{d\mathbb{Q}}{d\mathbb{P}}|_{\mathcal{G}}/\mathcal{G}]}$$

Définition A.2 (Filtration)

Soit $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ un espace probabilisé. Une filtration sur cet espace est une famille croissante $(\mathcal{F})_{0 \leq t \leq +\infty}$ de sous tribus de \mathcal{A} .

Proposition A.3

Supposons que $\mathbb{Q} \ll \mathbb{P}$ (ie. \mathbb{Q} est absolument continue par rapport à \mathbb{P}) sur $\mathcal{F}_{+\infty}$. Pour tout $t \in [0, +\infty]$,

$$L_t := \frac{d\mathbb{Q}}{d\mathbb{P}}|_{\mathcal{F}_t}$$

la dérivée de Radon-Nikodym \mathbb{Q} par rapport à \mathbb{P} sur \mathcal{F}_t est un (\mathcal{F}) -martingale.

Proposition A.4

Si on suppose de plus que $\mathbb{Q} \sim \mathbb{P}$ sur $\mathcal{F}_{+\infty}$ alors on a

$$\forall t \geq 0 \quad L_t > 0 \quad p.s.$$

Proposition A.5 (Lemme d'indépendance)

Si X est \mathcal{F} -mesurable et Y est indépendante de \mathcal{F} , alors :

$$\begin{aligned} \mathbb{E} [h(X, Y) / \mathcal{F}] &= \gamma(X) \\ \text{où } \gamma(X) &= \mathbb{E} [h(X, Y)] \end{aligned}$$

Annexe B

Calcul stochastique

B.1 Mouvement Brownien

On notera $W^{\mathbb{P}}$ un \mathbb{P} -mouvement brownien issu de 0 (i.e. $W_0^{\mathbb{P}} = 0$) défini sur l'espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$.

On notera $\mathcal{F} := (\mathcal{F}_t)_{\{0 \leq t \leq T\}}$ sa filtration canonique.

Proposition B.1 (Crochet oblique d'un mouvement brownien)

Le crochet oblique du mouvement brownien $W^{\mathbb{P}}$ est

$$\langle W^{\mathbb{P}} \rangle_t = t$$

On notera $W_1^{\mathbb{P}}$ et $W_2^{\mathbb{P}}$, deux browniens corrélés issus de 0.

Proposition B.2 (Crochet oblique de deux mouvement browniens)

Le crochet de deux mouvements browniens $W_1^{\mathbb{P}}$ et $W_2^{\mathbb{P}}$ est

$$\langle W_1^{\mathbb{P}}, W_2^{\mathbb{P}} \rangle_t = \rho t$$

où ρ représente la corrélation entre les deux mouvements browniens.

B.2 Intégrale stochastique

Définition B.1 (Régularité)

On considérera qu'un processus $\{\theta(t), t \geq 0\}$ est régulier par rapport au mouvement brownien $W^{\mathbb{P}}$ si l'intégrale stochastique définie par

$$\int_0^t \theta_s dW_s^{\mathbb{P}}$$

est bien définie.

On considère deux processus $\{H_t, t \geq 0\}$ et $\{K_t, t \geq 0\}$ réguliers par rapport au mouvement brownien $W^\mathbb{P}$ et on définit deux intégrales stochastiques M_t et N_t

$$\begin{cases} M_t := \int_0^t H_s dW_s^\mathbb{P} \\ N_t := \int_0^t K_s dW_s^\mathbb{P} \end{cases}$$

Proposition B.3 (Crochet oblique de deux intégrales stochastiques)

Le crochet oblique des intégrales stochastiques M_t et N_t est

$$\langle M, N \rangle_t = \int_0^t H_s K_s ds$$

Proposition B.4 (Crochet oblique d'une intégrale stochastique)

Le crochet oblique de l'intégrale stochastique M_t est

$$\langle M, M \rangle_t = \int_0^t H_s^2 ds$$

Remarque B.1

On notera dans ce cas $\langle M \rangle_t := \langle M, M \rangle_t$

On considère deux processus $\{\tilde{H}_t, t \geq 0\}$ et $\{\tilde{K}_t, t \geq 0\}$ réguliers respectivement par rapport aux mouvements browniens $W_1^\mathbb{P}$ et $W_2^\mathbb{P}$ et on définit deux intégrales stochastiques \tilde{M}_t et \tilde{N}_t

$$\begin{cases} \tilde{M}_t := \int_0^t \tilde{H}_s dW_{1,s}^\mathbb{P} \\ \tilde{N}_t := \int_0^t \tilde{K}_s dW_{2,s}^\mathbb{P} \end{cases}$$

Proposition B.5 (Crochet oblique de deux intégrales stochastiques avec browniens corrélés)

Le crochet oblique des intégrales stochastiques \tilde{M}_t et \tilde{N}_t est

$$\langle \tilde{M}, \tilde{N} \rangle_t = \int_0^t \tilde{H}_s \tilde{K}_s \rho ds$$

B.3 Processus d'Itô

Définition B.2 (Régularité)

On considérera qu'un processus $\{\theta(t), t \geq 0\}$ est régulier par rapport à la mesure de Lebesgue si l'intégrale de Lebesgue définie par

$$\int_0^t \theta_s ds$$

est bien définie.

Définition B.3 (Processus d'Itô)

Un processus X est un processus d'Itô si X_t a la décomposition suivante

$$\forall t \geq 0 \quad X_t := x + \int_0^t b_s ds + \int_0^t \sigma_s dW_s^\mathbb{P} \quad (\text{B.1})$$

Remarque B.2 (Equation Différentielle Stochastique)

L'équation (B.1) ci-dessus peut s'écrire également :

$$\begin{cases} dX_t = b_t dt + \sigma_t dW_t^{\mathbb{P}} \\ X_0 = x \end{cases}$$

Proposition B.6 (Crochet oblique d'un processus d'Itô)

Le crochet oblique d'un processus d'Itô est

$$\langle X \rangle_t = \int_0^t \sigma_s^2 ds$$

B.4 Formule d'Itô multidimensionnelle

Proposition B.7 (Lemme d'Itô)

Soient $X_t^1, X_t^2, \dots, X_t^p$, des processus d'Itô.

Posons $X_t := (X_t^1, X_t^2, \dots, X_t^p)$.

Soit f une fonction de \mathbb{R}^p dans \mathbb{R} .

Alors $f(X_t)$ est un processus de Itô, et on a :

$$f(X_t) = f(X_0) + \sum_{i=1}^p \int_0^t \frac{\partial f}{\partial x_i}(X_s) dX_s^i + \frac{1}{2} \sum_{i,j=1}^p \int_0^t \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(X_s) d\langle X^i, X^j \rangle_s$$

B.5 Théorème de Girsanov

Soit un processus $\{\theta_t, t \geq 0\}$ régulier par rapport à la mesure de Lebesgue et par rapport au mouvement brownien $W^{\mathbb{P}}$

Définition B.4 (Exponentielle de Doléans-Dade)

On définit l'exponentielle de Doléans-Dade par

$$\mathcal{E}_t(\theta \bullet W^{\mathbb{P}}) := \exp \left\{ \int_0^t \theta_s ds - \frac{1}{2} \int_0^t \theta_s dW_s^{\mathbb{P}} \right\}$$

Proposition B.8 (Théorème de Girsanov)

On considère le processus $\{L_t, t \geq 0\}$ défini par

$$L_t := \mathcal{E}_t(\theta \bullet W^{\mathbb{P}})$$

Sous des conditions supplémentaires de régularité sur le processus $\{\theta_t, t \geq 0\}$ on a alors

- $\{L_t, t \geq 0\}$ est une $(\mathbb{P}, \mathcal{F}_t)$ -martingale.
- Il existe une probabilité \mathbb{Q} telle que sa dérivée de Radon-Nikodym par rapport à \mathbb{P} sur la filtration \mathcal{F}_T est

$$\frac{d\mathbb{Q}}{d\mathbb{P}} = L_T$$

- Il existe un \mathbb{Q} -mouvement brownien $\tilde{W}_t^{\mathbb{Q}} := W_t^{\mathbb{P}} + \int_0^t \theta_s ds$.

B.6 Equation Différentielle Stochastique et Mouvement brownien géométrique

Définition B.5 (Mouvement brownien géométrique)

On dit qu'un processus $\{X_t, t \leq T\}$ est un mouvement brownien géométrique s'il satisfait à une équation différentielle stochastique (sous une certaine probabilité) du type :

$$\frac{dX_t}{X_t} = \mu_t dt + \sigma_t dW_t$$

dont la solution est donnée par¹ :

$$X_t = X_0 \exp \left\{ \int_0^t \left(\mu_s - \frac{1}{2} \sigma_s^2 \right) ds + \int_0^t \sigma_s dW_s \right\}$$

Remarque B.3

- En modélisation des marchés financiers, on suppose souvent que les instruments étudiés sont des processus régis par ce type d'EDS
- Le terme μ_t est appelé **terme de tendance** ou **drift**
- σ_t représente la **volatilité instantanée du processus en t**

Proposition B.9

- La volatilité est invariante par changement de probabilité
- $\{X_t, t \leq T\}$ est une $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ -martingale, si et seulement si son terme de tendance est nul sous \mathbb{P}

1. En appliquant le Lemme d'Itô cf. proposition B.7 p. 97

Annexe C

Simulation de processus stochastiques

C.1 Simulation d'une loi uniforme sur $[0,1]$

On simule une suite de variables aléatoires uniformes sur $[0,1]$ par l'algorithme suivant :

$$\begin{cases} x_0 &= \text{valeur initiale} \\ x_{n+1} &= ax_n + b(\text{mod } m) \end{cases}$$

La valeur initiale x_0 doit être un entier compris entre 0 et $m-1$, on peut utiliser le générateur de nombre aléatoire (`rand()` en C++). Il faut choisir a , b et m de manière à optimiser la répartition des valeurs. Typiquement, pour une machine à 32 bits :

$$\begin{cases} m &= 2^{32} \\ a &= 1103515245 \\ b &= 12345 \end{cases}$$

La suite de nombres $\{u_n = \frac{x_n}{m}, n \geq 1\}$ obtenue simule une loi uniforme sur $[0,1]$.

C.2 Simulation de variables gaussiennes : Méthode de Box & Muller

Cette méthode est basée sur le fait que si U_1 et U_2 sont deux variables uniformes indépendantes alors :

$$\sqrt{-2\log(U_1)} \cos(2\pi U_2)$$

suit une loi gaussienne centrée et réduite.

Pour simuler une gaussienne X de moyenne μ et de variance σ , il suffit de poser :

$$X = \mu + \sigma Y$$

avec Y une gaussienne centrée et réduite

C.3 Simulation du mouvement brownien

Pour simuler un mouvement brownien $(W_t)_{t \geq 0}$ il s'agit de remarquer que si $(y_n)_{n \geq 0}$ est une suite de gaussiennes indépendantes, centrées et réduite, si $\Delta_t > 0$ et si on construit $(S_n)_{n \geq 1}$ comme suit :

$$\begin{cases} S_0 &= 0 \\ S_{n+1} &= y_n + S_n \end{cases}$$

alors les lois de $(\sqrt{\Delta_t}S_0, \sqrt{\Delta_t}S_1, \dots, \sqrt{\Delta_t}S_n)$ et de $(W_0, W_{\Delta_t}, W_{2\Delta_t}, \dots, W_{n\Delta_t})$ sont identiques. On peut alors approcher le brownien par $X_t^n = \sqrt{\Delta_t}S_{[t/\Delta_t]}$

C.4 Simulation des équations différentielles stochastiques

On cherche à simuler l'équation différentielle stochastique :

$$\begin{cases} X_0 &= x \\ dX_t &= b(X_t)dt + \sigma(X_t)dW_t \end{cases}$$

On se fixe un pas de discrétisation en temps Δ_t et on considère une suite $(y_n)_{n \geq 0}$ de gaussiennes centrées réduites indépendantes .

On construit le processus $(S_n)_{n \geq 0}$ en posant :

$$\begin{cases} S_0 &= x \\ S_{n+1} &= S_n + \Delta_t b(S_n) + \sigma(S_n)y_n\sqrt{\Delta_t} \end{cases}$$

Alors le processus $(X_t^n = S_{[t/\Delta_t]})_{t \geq 0}$ approxime $(X_t)_{t \geq 0}$, la solution de l'équation différentielle considérée.

Annexe D

Marché en absence d'opportunité d'arbitrage

D.1 AOA

Une hypothèse fondamentale en modélisation des marchés financiers est : **l'absence d'opportunité d'arbitrage**

Il s'agit de considérer un marché dans lequel il n'est pas possible de gagner de l'argent à coup sûr partant d'un investissement nul.

Une conséquence directe de l'AOA est l'unicité des prix des produits dérivés, dans le sens où deux stratégies qui donnent le même flux à l'horizon dans tous les états du monde ont la même valeur à toute date intermédiaire.

D.2 Conséquences de l'AOA

On rappelle les définitions du zéro-coupon et du prix forward d'un titre :

Définition D.1 (Zéro-coupon)

Un zéro-coupon de maturité T noté $B(t, T)$, est la quantité d'argent à investir en t pour disposer d'exactement 1 € à la date T , sans flux intermédiaire.

Définition D.2 (Forward)

Un contrat à terme (forward) est un accord entre deux parties d'acheter ou de vendre un sous-jacent S à la date T , à un prix K fixé à l'avance ; tous les paiements ayant lieu en T .

Le strike K est le prix forward (ou à terme) de S en T , on le note en général $F_t(S, T)$: c'est le prix auquel on est prêt à acheter le sous-jacent S en T .

Les deux résultats suivants sont des conséquences directes de l'AOA :

Remarque D.1 (Prix forward)

Pour garantir la détention de S en T on peut :

- soit acheter S aujourd’hui (date t) et le garder jusqu’en T
- soit acheter le contrat forward. Pour pouvoir le payer en T , il faut investir $F_t(S, T)$ en zéro-coupon.

Les flux en T étant égaux, l’AOA nous dit que les prix en t sont égaux, donc :

$$F_t(S, T) B(t, T) = S_t$$

$$\boxed{F_t(S, T) = \frac{S_t}{B(t, T)}} \quad (\text{D.1})$$

Remarque D.2 (Parité Call-Put)

L’achat d’un call et la vente d’un put de mêmes caractéristiques assurent la détention de la valeur de l’actif à l’échéance et la vente du prix d’exercice :

$$S_T - K$$

Le même flux peut alors être obtenu en achetant le sous-jacent aujourd’hui et en remboursant $KB(t, T)$. Par AOA, on a :

$$\boxed{Call_t(T, K, S) - Put_t(T, K, S) = S_t - KB(t, T)}$$

Annexe E

Numéraire et probabilité risque-neutre associée

E.1 Définitions

Définition E.1 (Numéraire)

Tout actif dont le processus de prix est strictement positif peut être considéré comme un numéraire. Pour un tel choix, les autres actifs sont alors déterminés en quantité d'unité de ce numéraire.

Exemple E.1 (Numéraire du facteur d'accumulation)

Soit $\{S_t, t\}$, un processus de prix associé à un actif S . Considérons le facteur d'accumulation $\{\beta(t), t\}$ comme numéraire. Le prix en t du sous-jacent S associé à ce numéraire est : $\frac{S_t}{\beta(t)}$. De manière analogue, le prix d'un zéro-coupon de maturité T sous ce numéraire est : $\frac{B(t, T)}{\beta(t)}$

Exemple E.2 (Numéraire du zéro-coupon)

Le prix en t du sous-jacent S associé au numéraire du zéro-coupon est : $F_t(S, T)$

Définition E.2 (Probabilité risque-neutre associée à un numéraire)

On dit que \mathbb{P}_N est la mesure risque-neutre associée au numéraire $N(\cdot)$ si pour tout processus de prix $\{S_t, t\}$, le processus $\{\frac{S(t)}{N(t)}, t\}$ est une $\{\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P}_N\}$ -martingale.

Remarque E.1

Par abus de langage, lorsque le numéraire n'est pas précisé, il s'agit de la probabilité risque-neutre associée au numéraire facteur d'accumulation $\beta(t)$. Cette probabilité est en générale notée \mathbb{Q}

Proposition E.1

Soit N un numéraire, alors la mesure de probabilité \mathbb{P}_N définie par :

$$\mathbb{P}_N(A) := \frac{1}{N(0)} \int_A \frac{N(T)}{\beta(T)} d\mathbb{Q} \quad , \forall A \in \mathcal{F}_T$$

est risque-neutre pour N

Remarque E.2

Les mesures \mathbb{P}_N et \mathbb{Q} sont équivalentes, i.e. :

$$\mathbb{Q}(A) = 0 \Leftrightarrow \mathbb{P}_N(A) = 0$$

Et, on a :

$$\mathbb{Q}(A) = N(0) \int_A \frac{\beta(T)}{N(T)} d\mathbb{P}_N, \forall A \in \mathcal{F}_T$$

Remarque E.3

Soit $\{S_t, t\}$, un processus de prix associé à un actif S .

- Sous \mathbb{Q} , $\{\frac{S_t}{\beta(t)}, t\}$ est une $\{\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{Q}\}$ -martingale
- Sous \mathbb{P}_N , $\{\frac{S_t}{\beta(t)}, t\}$ est une $\{\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P}_N\}$ -martingale

Exemple E.3 (Probabilité forward-neutre)

On considère le numéraire du zéro-coupon de maturité T

La probabilité risque neutre associée à ce numéraire est :

$$\begin{aligned} \mathbb{P}_T(A) &= \frac{1}{B(0,T)} \int_A \frac{B(T,T)}{\beta(T)} d\mathbb{Q} \\ &= \frac{1}{B(0,T)} \int_A \frac{1}{\beta(T)} d\mathbb{Q}, \forall A \in \mathcal{F}_T \end{aligned}$$

\mathbb{P}_T est appelée **probabilité T-forward**.

Ainsi $F_t(S,T) = \frac{S_t}{B(t,T)}$ est une $\{\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P}_T\}$ -martingale

Exemple E.4 (Numéraire associé à un actif)

Soit S un actif. On considère $S(\cdot)$ comme numéraire. Alors, le prix de l'actif sous ce numéraire est naturellement 1. La probabilité risque-neutre associée à ce numéraire est :

$$\mathbb{P}_s(A) = \frac{1}{S(0)} \int_A \frac{S(T)}{\beta(T)} d\mathbb{Q}, \forall A \in \mathcal{F}_T$$

E.2 Changement de numéraire

Soient N un numéraire, S , le prix d'un actif et \mathbb{P}_N probabilité risque-neutre associée à N .

\mathbb{P}_N admet une densité de Radon-Nikodym par rapport à \mathbb{Q} , et on a :

$$\frac{d\mathbb{P}_N}{d\mathbb{Q}} = \frac{N(T) \beta(t)}{N(t) \beta(T)}$$

Soit M , un autre numéraire, on a la formule de changement de numéraire pour tout flux $\phi(S_T)$ \mathcal{F}_t -mesurable :

$$N(T) \mathbb{E}_{\mathbb{P}_N} [M(T) \phi(S_T) / \mathcal{F}_t] = M(T) \mathbb{E}_{\mathbb{P}_M} [N(T) \phi(S_T) / \mathcal{F}_t] \quad (\text{E.1})$$

Prix en t d'un flux $\phi(S_T)$ en T

Soit $\phi(S_T)$ un flux engendré par un produit dérivé en T
Alors la valeur du produit aujourd'hui est :

$$\mathbb{E}_{\mathbb{Q}} \left[\frac{\beta(t)}{\beta(T)} \phi(S_T) / \mathcal{F}_t \right] \quad (\text{E.2})$$

Remarque E.4 (Important)

Pour évaluer les prix de certains contrats, il sera parfois nécessaire de changer de numéraire. Un changement de numéraire correspondant à un changement de probabilité, la règle de Bayes donnée à la proposition A.2 p. 93 reste encore valable.

Bibliographie

- [1] D. Brigo & F. Mercurio - *Interest Rate Models Theory and Practice* - Springer Finance, 2001
- [2] L. Martellini & P. Priaulet - *Produits de Taux d'Intérêt* - Economica, 2004
- [3] D. Lamberton & B. Lapeyre - *Introduction au Calcul Stochastique Appliqué à la Finance* - Ellipses, 1997
- [4] P. Wilmott - *Derivatives : The Theory and Practice of Financial Engineering* - University, 1998
- [5] A. Brace, M. Musiela & E. Schlögl - *A Simulation Algorithm Based on Measure Relationships in the Lognormal Market Models* - December 1998
- [6] S. Shreve - *Stochastic Calculus and Finance* - University of Illinois, Juillet 1997
- [7] A. Ruttiens - *Futures, Swaps, Options : Les produits financiers dérivés*. Edipro, 2006
- [8] JM. Dalbarade - *Mathématiques des Marché Financiers* - Eska, 2005
- [9] F. Riva - *Applications Financières sous Excel en Visual Basic* - Economica, 2005