

**ФЕДЕРАЛЬНОЕ АГЕНСТВО ПО ОБРАЗОВАНИЮ
ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ БЮДЖЕТНОЕ
ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО
ПРОФЕССИОНАЛЬНОГО ОБРАЗОВАНИЯ
«НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ ЯДЕРНЫЙ
УНИВЕРСИТЕТ МИФИ»
Обнинский институт атомной энергетики**

**Факультет естественных наук
Кафедра ПМ**

**ОТЧЕТ
по научной работе**

Исследование процессов восстановления.

Выполнил:

студент гр. М1-М11

подпись, дата

Харченко С.С.

Проверил:

к.ф.-м.н., доцент

подпись, дата

Чепурко А.Н.

Обнинск 2012

ОГЛАВЛЕНИЕ

ВВЕДЕНИЕ	3
ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ	4
ОСНОВНАЯ ЧАСТЬ	5
1 Анализ	5
1.1 Основы теории восстановления	5
1.2 Альтернирующие процессы восстановления	7
1.3 Метод конечных сумм	14
1.4 Средства разработки	15
2 Выполнение	16
РЕЗУЛЬТАТЫ	20
2.1 Результаты вычислений $H(t)$ для простых процессов восста- новлений	20
2.2 Результаты вычислений $K_x(t)$ для альтернирующих процессов восстановлений	25
ВЫВОД	27
ЛИТЕРАТУРА	28

ВВЕДЕНИЕ

Данный отчет по научной работе посвящен теории восстановления и моделированию процессов восстановления на компьютере.

Теория восстановления - это раздел теории вероятности, описывающий широкий круг явлений, связанных с отказом и восстановлением элементов какой-либо системы. Основными понятиями теории восстановления являются процесс восстановления и уравнение восстановления.

Под *процессом восстановления* мы понимаем последовательность неотрицательных, взаимно независимых случайных величин $\{X_n, n = 1, 2, \dots\}$, которые для $n \geq 2$ одинаково распределены. Процесс восстановления называется *запаздывающим*, если $F_1(t) \neq F(t)$, и соответственно *обычным*, если $F_1(t) = F(t)$.

Функцией восстановления называется функция вида $H_1(t) = E(N(t))$. В части анализа данная функция будет рассмотрена подробнее.

Теория восстановления, как было сказано ранее, относится к теории вероятности и позволяет произвести расчет необходимых запчастей для стабильной работы системы, следственно является актуальной и применимой на сегодняшний день.

ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ

В рамках научной работы передо мной были поставлены следующие задачи:

1. Изучить основы теории восстановления
2. Изучить альтернирующие процессы восстановления
3. Изучить моделирование случайных процессов
4. Изучить необходимые средства разработки для написания программы
5. Смоделировать процесс восстановления для случайных процессов распределенных по следующим законам:
 - Гамма распределение
 - Нормальное распределение
 - Распределение Вейбула-Гнеденко
6. Решить методом конечных сумм интегральное уравнение восстановления для вышеперечисленных процессов
7. Вычислить для альтернирующего процесса заданного по двум выбранным законам следующие коэффициенты:
 - нестационарный/стационарный коэффициент готовности
 - нестационарный/стационарный оперативный коэффициент готовности

ОСНОВНАЯ ЧАСТЬ

Как было сказано в введении, в данной работе будет вестись об основах моделирования процессов восстановления. В данной части будут рассмотрены математический аппарат и базовая теория необходимая для выполнения задачи. Так же будут рассмотрены средства разработки которые были использованы для написания программы отвечающей условиям поставленной задачи. Начнем с математической части работы.

1 Анализ

1.1 Основы теории восстановления

Сперва введем список основных обозначений:

X_k наработка после $(k - 1)$ -го восстановления

T_k момент k -ого восстановления

$N(t)$ считающий процесс восстановления

$F_1(t), F(t)$ функции распределения соответственно для X_1 и $X_k, k \geq 2$

$f_1(t), f(t)$ плотности распределения, соответствующие функциям F_1 и F

$H_1(t), H(t)$ $E(N(t))$, функция восстановления запаздывающего(обычного) процесса восстановления

$h_1(t), h(t)$ плотности восстановления

Данные обозначения для теории восстановления вводятся Байхельтом Франкеном для теории восстановления. Теперь перейдем непосредственно к рассмотрению основ теории восстановления.

Как было сказано еще в введении, процессы восстановления делятся на две группы: запаздывающие и обычные. Различие в них только от начального состояния при котором начинается моделирование. Особый интерес в моделировании процесса восстановления представляет собой *считающий процесс восстановления*:

$$N(t) = \max\{k : T_k \leq t\}, N(t) = 0 \text{ для } t < T_1. \quad (1)$$

Таким образом, для каждого момента t величина $N(t)$ означает случайное число восстановлений, произошедших за время $[0, t]$. Из выражения (1) немедленно следует, что неравенство $T_k \leq t$ выполняется тогда и только тогда, когда $N(t) \geq k$. Поэтому

$$F_k(t) = P(T_k \leq t) = P(N(t) \geq k), \quad (2)$$

причем функция распределения $F_k(t)$ величины T_k из-за независимости случайных величин X_k для $k \geq 1$ задается формулой

$$F_k(t) = F_1 * F^{*(k-1)}(t), t \geq 0, \quad (3)$$

где $F^{*(0)}(t) = 1$. Если существуют плотности $f_1(t) = F'_1(t)$ и $f(t) = F'(t)$, то соответствующие (3) плотности распределения имеют вид

$$f_k = f_1 * f^{*(k-1)}(t), t \geq 0. \quad (4)$$

Следующим важным понятием в теории восстановления является *функция восстановления* ($H(t) = E(N(t))$), определение которой было дано в введении. По определению математического ожидания:

$$H_1(t) = \sum_{k=1}^{\infty} F_1 * F^{*(k-1)}(t) = \sum_{k=1}^{\infty} P(N(t) \geq k).$$

Из соотношений (2) и (3) следует:

$$H_1(t) = \sum_{k=1}^{\infty} F_1 * F^{*(k-1)}(t). \quad (5)$$

Подставляя в (5) выражение:

$$F_1 * F^{*k}(t) = \int_0^t F_1 * F^{*(k-1)}(t-x) dF(x)$$

получим:

$$H_1(t) = F_1(t) + \sum_{k=1}^{\infty} \int_0^t F_1 * F^{*(k-1)}(t-x) dF(x).$$

Меняя порядок суммирования и интегрирования, получим для нее интегральное уравнение

$$H_1(t) = F_1(t) + \int_0^t H_1(t-x) dF(x). \quad (6)$$

Замена свертки $F_1 * F^{*(k)}(t)$ на $\int_0^t F^{*(k)}(t-x) dF_1(x)$ дает

$$H_1(t) = F_1(t) + \int_0^t H(t-x) dF_1(x), \quad (7)$$

где $H(t)$ - функция восстановления простого процесса восстановления. Согласно (6) функция $H(t)$ удовлетворяет интегральному уравнению

$$H(t) = F(t) + \int_0^t H(t-x) dF(x). \quad (8)$$

Соотношения (6)-(8) называются *уравнениями восстановления*. Они имеют единственное решение.

Если существуют плотности распределений, то из (6)-(8) получаются соответствующие уравнения

$$h_1(t) = \sum_{k=1}^{\infty} f_1 * f^{*(k-1)}, \quad (9)$$

$$h_1(t) = f_1(t) + \int_0^t h_1(t-x)f(x)dx, \quad (10)$$

$$h_1(t) = f_1(t) + \int_0^t h(t-x)f_1(x)dx, \quad (11)$$

$$h(t) = f(t) + \int_0^t h(t-x)f(x)dx. \quad (12)$$

Уравнения (6)-(8) и (10)-(12) решаются численными методами. В данной работе для решения данных уравнений применим метод конечных сумм.

1.2 Альтернирующие процессы восстановления

В предыдущей части мы рассматривали процессы восстановления для которых само время замены/восстановления пренебрежительно мало. В реальном мире такие процессы встречаются крайне редко. Поэтому введем вторую случайную величину - Y_i . Y_i - время затраченное на восстановление после i -го отказа. Моменты времени $T_1 = X_1$, $T_2 = X_1 + Y_1 + X_2, \dots$, в которые система отказывает, называют моментами отказов или моментами *θ -восстановлений*, а моменты времени $S_1 = X_1 + Y_1$, $S_2 = X_1 + Y_1 + X_2 + Y_2, \dots$, в которые заканчивается восстановление - моментами восстановления (или *1-восстановлениями*).

Введем понятие *альтернирующего процесса*. Если $\{X_n, n \geq 1\}$ и $\{Y_n, n \geq 1\}$ - две последовательности независимых одинаково распределенных неотрицательных случайных величин, то последовательность $\{(X_n, Y_n), n \geq 1\}$, так же как последовательность и последовательность $\{(Y_k, S_k), k \geq 1\}$, называется *альтернирующим процессом восстановления*. Так же, приведенный

выше, процесс восстановления можно эквивалентным образом описать процессом $\{Z(t), t \geq 0\}$ с помощью соотношения

$$Z(t) = \begin{cases} 0, & \text{если } t \in [T_x, S_k), \\ 1, & \text{в противном случае,} \end{cases} \quad (13)$$

поскольку реализации процесса $\{(X_n, Y_n)\}$ или $\{T_k, S_k\}$ взаимно однозначно определяются по реализациям процесса $\{Z(t)\}$. В дальнейшем будем рассматривать исключительно альтернирующие процессы восстановления в смысле приведенного определения. В этом случае $P(Z(+0) = 1) = 1$.

Через $N_0(t)$ обозначим случай число 0-восстановлений, а через $N_1(t)$ случайное число 1-восстановлений на интервале $(0, t]$. Очевидно, $N_0(t)$ и $N_1(t)$ являются считающими альтернирующими процессами, которые определяются функциями распределения $F(t)$ и $(G * F)(t)$, так что можно применять результаты разд. 1.1 - 1.6. Согласно формулам (1.2) и (1.3) справедливы соотношения

$$P(N_0(t) \geq k) = P(T_k \leq t) = F * (G * F)^{*(k-1)}(t); \quad (14)$$

$$P(N_1(t) \geq k) = P(S_k \leq t) = (F * G)^{*(k)}(t). \quad (15)$$

Отсюда средние значения 0- и 1-восстановлений на интервале задаются функциями восстановления

$$H_0(t) = E(N_0(t)) = \sum_{k=1}^{\infty} F * (G * F)^{*(k-1)}(t) \quad (16)$$

и

$$H_1(t) = E(N_1(t)) = \sum_{k=1}^{\infty} (F * G)^{*(k)}(t). \quad (17)$$

Особый интерес представляют вероятности $P(Z(t) = i, V_t^{(i)} > x), i = 1, 2$, где $V_t^{(1)}$ означает остаточную наработку, а $V_t^{(2)}$ - остаточное время восстановления. Очевидно $P(Z(t) = 1, V_t^{(1)} > x)$ означает вероятность того, что исправная к моменту t система не откажет на следующем интервале времени $(t, t + x]$. С учетом (13) по формуле полной вероятности получаем $P(Z(t) = 1, V_t^{(1)} > x) = P(t + x > X_1) + \sum_{k=1}^{\infty} P(S_k < t, t + x < S_k + X_{k+1}) = \bar{F}(t + x) + \sum_{k=1}^{\infty} \int_0^t P(t + x < u + X_{k+1}) d(F * G)^{*(k)}(u)$.

Из (17) следует

$$P(Z(t) = 1, V_t^{(1)} > x) = \bar{F}(t + x) + \int_0^t \bar{F}(t + x - u) dH_1(u). \quad (18)$$

Это так называемый *нестационарный коэффициент оперативной готовности* для альтернирующего процесса восстановления. *Нестационарный коэффициент готовности* определяется соотношением

$$K(t) = P(Z(t) = 1) = E(Z(t)). \quad (19)$$

Он равен вероятности того, что система работает в момент t . Если положить в соотношении (17) $x = 0$, то для этого частного случая

$$K(t) = \bar{F}(t) + \int_0^t \bar{F}(t-u) dH_1(u). \quad (20)$$

Нестационарный средний коэффициент готовности определяется соотношением

$$\check{K}(t) = \frac{1}{t} \int_0^t K(u) du.$$

Согласно (20) $K(t)$ можно представить в следующем виде:

$$\check{K}(t) = \frac{1}{t} \int_0^t \bar{F}(u) du + \frac{1}{t} \int_0^t (H_1(u) - (F * H_1)(u)) du. \quad (21)$$

$$K_x(t) = \int_0^t (1 - F(t+x-u)) dH_1 \quad (22)$$

$$K_x(t) = 1 - F(t+x) + \int_0^t K_x(t-u) f * g(u) du \quad (23)$$

Теорема. Пусть функция распределения $(F * G)(t)$ не является арифметической и пусть $\mu + \nu < \infty$, где $\mu = \int_0^\infty \bar{F}(u) du, \nu = \int_0^\infty \bar{G}(u) du$.

Тогда справедливы соотношения

$$K_x = \lim_{t \rightarrow \infty} P(Z(t) = 1, V_t^{(1)} > x) = \frac{1}{\mu + \nu} \int_0^\infty \bar{F}(u) du; \quad (24)$$

$$K = \lim_{t \rightarrow \infty} K(t) = \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{1}{t} \int_0^t K(u) du = \mu / (\mu + \nu). \quad (25)$$

K_x и K называются (*стационарным*) *коэффициентом оперативной готовности* и (*стационарным*) *коэффициентом готовности*.

Формулу (22) можно записать и так:

$$K_x = K(1 - F_R(x)). \quad (26)$$

Из соотношений (22) и (24) следует элементарная оценка для коэффициента оперативной готовности:

$$K_x \geq 1 - (x + \nu) / (\mu + \nu).$$

Полезные характеристики можно получить для процесса, описывающего состояние системы: $\{Z(t), t \geq 0\}$. Это прежде всего *суммарное время безоткатной работы* $U(t)$ и *суммарное время простоя* $D(t)$ за интервал $(0, t]$:

$$U(t) = \int_0^t Z(u)du, D(t) = t - U(t) = \int_0^t (1 - Z(u))du. \quad (27)$$

При изучении случайных величин $U(t)$ и $D(t)$ нередко привлекают также связанные с ними величины

$$B_1(t) = \min\{x : U(x) \geq t\}, B_2(t) = B_1(t) - t, \quad (28)$$

$B_1(t)$ задает случайный момент, в который суммарное время безоткатной работы достигает величины t , а $B_2(t)$ равняется времени простоя на интервале $(0, B_1(t)]$.

1.2.1 Модель совместного потока

Данная модель отличается от обычного альтернирующего процесса восстановления тем что 0-восстановления и 1-восстановления происходят в двух различных потоках, т.е. мы имеем не один процесс в котором чередуются 0 и 1 - восстановления, а два независимых процесса: 0-восстановлений и 1-восстановлений. Обозначим $\mu_{0,i}$ как i -ое 0-восстановление и $\mu_{1,i}$ - i -ое 1-восстановление.

Процесс 0-восстановлений $\mu_{0,i}, i = 0, 1, 2, \dots$ образован случайными величинами $\Delta_1, \Delta_2, \dots$, т.е. временами работы системы, при этом предполагается мгновенное восстановление:

$$\mu_{0,i} = \sum_{j=1}^i \Delta_j, j > 0, \mu_{0,0} = 0. \quad (29)$$

Аналогично ему процесс 1-восстановлений $\mu_{1,i}, i = 0, 1, 2, \dots$ образован случайными величинами $\epsilon_1, \epsilon_2, \dots$ - временами восстановлений работоспособности системы. Так же предполагается что отказы происходят мгновенно после восстановления системы:

$$\mu_{1,i} = \sum_{j=1}^i \epsilon_j, j > 0, \mu_{1,0} = 0. \quad (30)$$

Совместным потоком событий (0-, 1-восстановлений) называется совокупность двух потоков - потока отказов ($\mu_{0,i}, i = 0, 1, 2, \dots$) и потока восстановлений ($\mu_{1,i}, i = 0, 1, 2, \dots$).

Считающей функцией пар совместного потока событий называется

$$\xi_{t_0, t_1} = \sum_{i=0}^{\infty} I\{\mu_{0,i} \leq t_0; \mu_{1,i} \leq t_1\}. \quad (31)$$

Считающей функцией пар со сдвигом (числа отказов на 1) совместного потока событий называется

$$\xi_{t_0, t_1}^+ = \sum_{i=0}^{\infty} I\{\mu_{0,i+1} \leq t_0; \mu_{1,i} \leq t_1\}. \quad (32)$$

Ведущей функцией пар совместного потока событий называется функция

$$\Lambda(t_0, t_1) = M\xi_{t_0, t_1} = \sum_{i=0}^{\infty} F_{\mu_{0,i}, \mu_{1,i}}(t_0, t_1). \quad (33)$$

Ведущая функция пар со сдвигом совместного потока событий определяется аналогично считающей функции со сдвигом.

Интенсивностью потока пар совместного потока событий, при условии существования необходимых производных, называется

$$\omega(t_0, t_1) = \frac{\partial^2 \Lambda(t_0, t_1)}{\partial t_0 \partial t_1} = \sum_{i=0}^{\infty} f_{\mu_{0,i}, \mu_{1,i}}(t_0, t_1). \quad (34)$$

Свойства параметров совместного потока событий:

1. $\Lambda(t_0, t_1), \Lambda^+(t_0, t_1)$ - неубывающие функции по каждому аргументу.
2. $\lim_{t_0 \rightarrow \infty} \Lambda(t_0, t_1) = \lim_{t_0 \rightarrow \infty} \Lambda^+(t_0, t_1) = \Lambda_{\mu_0}(t_0) = \sum_{i=0}^{\infty} F_{\mu_{0,i}}(t_0)$ - функция восстановления автономного потока восстановлений
3. $\lim_{t_1 \rightarrow \infty} \Lambda(t_0, t_1) = 1 + \lim_{t_1 \rightarrow \infty} \Lambda^+(t_0, t_1) = \Lambda_{\mu_1}(t_1) = \sum_{i=0}^{\infty} F_{\mu_{1,i}}(t_1)$ - функция восстановления автономного потока отказов.
4. $\Lambda(0, t_1) = \Lambda(t_0, 0) = 1$.
5. $\Lambda^+(0, t_1) = 0; \Lambda^+(t_0, 0) = F_{\mu_{0,1}}(t_0)$.

Теорема. Коэффициент оперативной готовности равен

$$K_x(t) = \int_0^t \int_0^{t-x_1} \omega(x_1, x_2) P_{\Delta}(t + x - x_1 - x_2) dx_2 dx_1. \quad (35)$$

Следствие. Нестационарный коэффициент готовности:

$$K(t) = \int_0^t \int_0^{t-x_1} \omega(x_1, x_2) P_{\Delta}(t - x_1 - x_2) dx_2 dx_1. \quad (36)$$

Теорема.

$$K(t) = \int_0^t \int_0^{t-x_1} (\omega(x_1, x_2) - \omega^+(x_1, x_2)) dx_2 dx_1. \quad (37)$$

Следствие.

$$K(t) = \int_0^t \int_0^{t-x_1} \hat{\omega}(x_1, x_2) dx_2 dx_1, \quad (38)$$

$$\hat{\omega} = (\delta(t_0) - f(t_0))\delta(t_1) + \int_0^{t_0} \int_0^{t_1} f_{\Delta, \epsilon}(t_0 - x_0; t_1 - x_1) \hat{\omega}(x_0, x_1) dx_0 dx_1. \quad (39)$$

1.2.2 Модели неоднородных процессов

Неоднородный гамма-процесс (IGP)

Определение. Пусть $\{\tau_n\}$ - NHPP-процесс (неоднородный пуассоновский процесс) с интенсивностью $\lambda(t)$. Неоднородным гамма-процессом кратности k называется процесс, образованный точками потока $\{\tau_{kn}\}$, т.е. точками $\tau_k, \tau_{2k}, \tau_{3k}, \dots$

Предположим что наблюдается каждое k -ое событие и каждое k -ое событие есть ударная точка, т.е. отказ происходит только при возникновении каждого k -ого события. Таким образом IGP является практически разреженным NHPP-процессом, от которого остается каждая k — точка.

Если $\tau_1 < \tau_2 < \dots < \tau_n$ - времена первых n - отказов IGP, то их совместная плотность распределения определяется следующим образом:

$$f_{\tau_1, \dots, \tau_n}(t_1, \dots, t_n) = \left[\prod_{i=1}^n \lambda(t_i) (\Lambda(t_i) - \Lambda(t_{i-1}))^{k-1} \right] \frac{e^{-\Lambda(t_n)}}{\Gamma^n(k)}. \quad (40)$$

$\Lambda(t)$ - среднее число ударных нагрузок к моменту времени t .

Свойства:

1. $\{\tau_n\}$ — $IGP(\alpha, \lambda(\cdot))$ -процесс, если $\Lambda(\tau_i) - \Lambda(\tau_{i-1})$; $i = 1, 2, \dots, n$ - независимы и имеют гамма-распределение $\Gamma(\alpha, 1)$.
2. $\Lambda(\tau_j) \sim \Gamma(\alpha j, 1)$
3. $\frac{\Lambda(\tau_j)}{\Lambda(\tau_n)} \sim Bt(\alpha j, \alpha(n - j))\tau_n$.

Определение. Если интенсивность потока выражается в виде

$$\lambda(t) = p \exp(\nu_1 z_1(t) + \nu_2 z_2(t) + \dots + \nu_p z_p(t)), \quad (41)$$

то IGP-процесс называется модулированным гамма-процессом.

Процесс восстановления с трендом (TRP)

Определение. Пусть $\lambda(t)$ - неотрицательная неслучайная функция, определенная на \mathbb{R}_+ и пусть $\Lambda(t) = \int_0^t \lambda(u)du$. Процесс τ_1, τ_2, \dots называется процессом восстановления с трендом TRP $(F, \lambda(\cdot))$, если $\Lambda(\tau_1), \Lambda(\tau_2), \dots$ является обычным процессом восстановления, т.е. $\Lambda(\tau_1), \Lambda(\tau_2) - \Lambda(\tau_1), \dots$ - независимые одинаково распределенные случайные величины с функцией распределения $F(x)$ и математическим ожиданием равным 1. Функция $\lambda(t)$ называется трендом процесса.

Интенсивность потока отказов $\lambda(t) = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{M(\xi[t, t+\Delta t] | H_t)}{\Delta t}$ не полностью описывает точечный процесс, следовательно, для такого рода характеристики необходимое более детальное описание.

Определение. Процесс интенсивности (стохастическая интенсивность) $\lambda_t, t \geq 0$, соответствующий обычному точечному процессу $\xi_t, t \geq 0$, определяется как предел

$$\lambda_t = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{P(\xi[t, t + \Delta t] = 1 | H_t)}{\Delta t} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{M(\xi[t, t + \Delta t] = 1 | H_t)}{\Delta t} \quad (42)$$

где $H_t = \{\xi_s : 0 \leq s < t\}$ - история точечного процесса на промежутке $[0; t)$, т.е. множество всех точечных событий на промежутке $[0; t)$.

Определение. Условная функция интенсивности (CIF), соответствующая обычному точечному процессу $\xi_t, t \geq 0$, определяется для каждого фиксированного t как предел

$$\lambda_t = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{P(\xi[t, t + \Delta t] = 1 | H(t))}{\Delta t} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{M(\xi[t, t + \Delta t] = 1 | H(t))}{\Delta t} \quad (43)$$

где $H(t)$ - реализация истории точечного процесса на промежутке $[0; t)$, т.е. множество всех точечных событий, которые произошли на промежутке $[0; t)$.

Интенсивность потока отказов можно рассматривать как математическое ожидание интенсивности процесса, усредненную по всему пространству возможных историй, т.е.

$$\lambda(t) = M\lambda_t \quad (44)$$

Определение. Пусть η - абсолютно непрерывная случайная наработка на отказ. Интенсивностью отказов называется функция

$$\lambda_\eta(t) = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{P(t < \eta \leq t + \Delta t | \eta > t)}{\Delta t} = \frac{f_\eta(t)}{1 - F_\eta(t)} \quad (45)$$

Свойства:

1. Для NHPP - процесса

$$\lambda_t = \lambda(t | H(t)) = \lambda_{\Delta_1}(t) = \lambda(t). \quad (46)$$

2. Для TRP - процесса

$$\lambda_t = \lambda(t|H(t)) = \lambda_\Delta(\Lambda(t) - \Lambda(\tau_{\xi_t}))\lambda(t). \quad (47)$$

3. Для обычного RP - процесса

$$\lambda_t = \lambda(t|H(t)) = \lambda_\Delta(t - \tau_{\xi_t}). \quad (48)$$

Теорема (УЗБЧ для TRP). Пусть $M\Lambda(\tau_1) = a < \infty$, $D\Lambda(\tau_1) = \sigma^2 < \infty$, тогда при $t \rightarrow \infty$ $\frac{\xi_t}{\Lambda(t)}$ сходится к $\frac{1}{a}$ почти наверное, т.е.

$$P(\lim_{t \rightarrow \infty} \frac{\xi_t}{\Lambda(t)} = \frac{1}{a}) = 1. \quad (49)$$

Теорема (Интегральная теорема для TRP). При $t \rightarrow \infty$, отношение $\frac{\gamma(t)}{\Lambda(t)} \rightarrow \frac{1}{a}$, где $a = M\Lambda(\tau_1)$.

Теорема(ЦПТ для TRP). Пусть $M\Lambda(\tau_1) = a < \infty$, $D\Lambda(\tau_1) = \sigma^2 < \infty$, тогда при $t \rightarrow \infty \forall \in \mathbb{R}$ вероятность

$$P(\frac{\xi_t - \frac{u}{a}}{\sqrt{\frac{u\sigma^2}{a^3}}} < x) \rightarrow \Phi(x). \quad (50)$$

Теорема (узловая теорема для TRP). Пусть распределение $\Lambda(\tau_1)$ не является арифметическим и $M\Lambda(\tau_1) = a$, $Q(x)$ - любая неотрицательная функция, определенная при положительных x , невозрастающая и интегрируемая в пределах $(0, \infty)$. Тогда выполняется соотношение

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \int_0^{\Lambda^{-1}(t)} Q(t - \Lambda(x))d\Upsilon(x) = \frac{1}{a} \int_0^\infty Q(x)dx. \quad (51)$$

В случае арифметического распределения $\Lambda(\tau_1)$ с шагом h выполняется соотношение

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^{\Lambda^{-1}(t+nh)} Q(t + nh - \Lambda(x))d\Upsilon(x) = \frac{h}{a} \sum_{k=0}^\infty Q(t + kh). \quad (52)$$

Теорема. Если $F(t)$ не является арифметическим распределением и $M\Lambda(\tau_1) = a$, то для любого действительного h выполняется соотношение

$$\lim_{t \rightarrow \infty} (\Upsilon(\Lambda^{-1}(u + h)) - \Upsilon(t)) = \frac{h}{a}. \quad (53)$$

Модель TRP-процесса достаточно нова и требует многочисленных исследований. Работы современных авторов посвящены оцениванию функции тренда процесса.

1.3 Метод конечных сумм

Метод конечных сумм применяется для решения уравнения Вольтера 2-го рода, которое имеет следующий вид

$$y(x) - \lambda \int_a^x K(x, s)y(s)ds = f(x). \quad (54)$$

Известно, что если ядро $K(x, s)$ есть непрерывная функция в области $R\{a \leq s \leq x \leq b\}$, в $f(x)$ непрерывна на отрезке $[a, b]$, то интегральное уравнение (13) имеет единственное решение при любом λ . Выберем одну из квадратурных формул Ньютона-Лейбница

$$\int_a^b F(x)dx \approx \sum_{j=0}^n A_j F(x_j), \quad (55)$$

где x_j - абсциссы точек отрезка $[a, b]$, а A_j - коэффициенты квадратурной формулы ($j = 0, 1, \dots, n$). Полагая в 13 $x = x_j$ и заменяя затем приближенно определенные интегралы конечными суммами, будем иметь

$$y_i - \lambda \sum_{j=0}^i A_j^{(i)} K_{ij} y_j = f_i \quad (i = 0, 1, \dots, n), \quad (56)$$

где $y_i = y(x_i)$, $K_{ij} = K(x_i, x_j)$, $f_i = f(x_i)$.

Получаем линейную систему с треугольной матрицей, что позволяет нам найти в итоге численное решение уравнения. Далее будет приведен код данного алгоритма и проверка его на тестовых данных.

1.4 Средства разработки

В качестве основного языка разработки был выбран *Objective-C*. **Objective-C** - компилируемый объектно-ориентированный язык программирования корпорации *Apple*, построенный на основе языка Си и парадигм *Smalltalk*. Так же при разработки использовались средства языков C и C++. Так как разработка велась на Objective-C, то программа разработана исключительно Mac OS X. **Mac OS X** — популярная проприетарная операционная система от Apple. Но основные алгоритмы были написаны с использованием стандартных C и C++, так что перенос данной программы под другие платформы не должен составить трудностей, разве что с настройками интерфейса так как

был использован стандартный инструмент *Xcode - Interface Builder*. **Xcode** — инструмент разработки приложений под *Mac OS X* и *Apple iOS*, разработанный компанией Apple. **Interface Builder** - средство разработки интерфейсов под *Mac OS X* и *Apple iOS*, разработанный компанией Apple.

Данный язык и среда разработки были выбраны для того чтобы научиться основам программирования под *Mac OS X*, и так же для последующего переноса ядра данной программы на мобильную платформу *Apple iOS*.

Так же для разработки были использованы следующие сторонние библиотеки:

OpenGL - — спецификация, определяющая независимый от языка программирования кросс-платформенный программный интерфейс для написания приложений, использующих двумерную и трёхмерную компьютерную графику.

FTGL - бесплатная Open Source кроссплатформенная C++ библиотека для рендеринга различных шрифтов в контексте OpenGL. **Рендеринг** - — термин в компьютерной графике, обозначающий процесс получения изображения по модели с помощью компьютерной программы.

Вот основные средства разработки которые использовались при создании программы, теперь перейдем к выполнению практического задания.

2 Выполнение

В данной части рассмотрим только реализацию алгоритма конечных сумм, так как для моделирования процесса восстановления используются различные алгоритмы генерации выборки.

Алгоритм конечных сумм был описан ранее в части анализа, так что здесь будет только приведена непосредственная реализация алгоритма и результат его тестирования на тестовых данных, которые взяты из источника [2] . Перейдем к реализации:

```
+(double*)solveEquationVolteraWithKernel:(SEL)kernel f:(
    SEL)f selectorTarget:(id)selTarget isStatic:(BOOL)
    isStatic withEndPoint:(double)point lambda:(double)
    lambda andStep:(double)h{

    //init kernel and f invocation
    NSInvocation* kernelInvocation = nil;
    NSInvocation* fInvocation = nil;
```



```

NSMethodSignature* sig1;
NSMethodSignature* sig2;
if(isStatic){
    Method method1 = class_getInstanceMethod(selTarget
        , kernel);
    Method method2 = class_getInstanceMethod(selTarget
        , f);
    struct objc_method_description* desc1 =
        method_getDescription(method1);
    if (desc1 == NULL || desc1->name == NULL)
        return nil;
    struct objc_method_description* desc2 =
        method_getDescription(method2);
    if (desc2 == NULL || desc2->name == NULL)
        return nil;
    sig1 = [NSMethodSignature signatureWithObjCTypes:
        desc1->types];
    sig2 = [NSMethodSignature signatureWithObjCTypes:
        desc2->types];
else{
    sig1 = [selTarget methodSignatureForSelector:
        kernel];
    sig2 = [selTarget methodSignatureForSelector:f];
}
    kernelInvocation = [NSInvocation
        invocationWithMethodSignature:sig1];
    fInvocation = [NSInvocation
        invocationWithMethodSignature:sig2];
    [fInvocation setTarget:selTarget];
    [kernelInvocation setTarget:selTarget];
    [kernelInvocation setSelector:kernel];
    [fInvocation setSelector:f];

    int numSteps = point/h;
    double x = 0, t = 0, Kij = 0;
    double* result = malloc(sizeof(double)*numSteps);
    [fInvocation setArgument:&x atIndex:2];
    [fInvocation invoke];

```

```

    [fInvocation getReturnValue:&result[0]];
    //NSLog(@"Result[0]: %f", result[0]);
    for(int i = 1; i < numSteps; ++i){
        x = i*h;
        //NSLog(@"X: %f", x);
        [fInvocation setArgument:&x atIndex:2];
        [fInvocation invoke];
        [fInvocation getReturnValue:&result[i]];
        //NSLog(@"result[i]: %f", result[i]);
        t = 0;
        [kernelInvocation setArgument:&x atIndex:2];
        [kernelInvocation setArgument:&t atIndex:3];
        [kernelInvocation invoke];
        [kernelInvocation getReturnValue:&Kij];
        //NSLog(@"Kij: %f", Kij);
        result[i] += lambda*Kij*h*result[0]/2.f;
        double s = 0;
        for(int j = 1; j < i; ++j){
            t=h*j;
            [kernelInvocation setArgument:&x atIndex:2];
            [kernelInvocation setArgument:&t atIndex:3];
            [kernelInvocation invoke];
            [kernelInvocation getReturnValue:&Kij];
            s+=Kij*result[j];
            //NSLog(@"Kij: %f", Kij);
        }
        s*=(h*lambda);
        //NSLog(@"S: %f", s);
        t = x;
        [kernelInvocation setArgument:&x atIndex:2];
        [kernelInvocation setArgument:&t atIndex:3];
        [kernelInvocation invoke];
        [kernelInvocation getReturnValue:&Kij];
        result[i] = (result[i]+s)/(1-lambda*h*Kij/2.);
        //ddsNSLog(@"result[i]: %f", result[i]);
    }
    return result;
}

```

Листинг 1. Реализация алгоритма конечных сумм.

В листинге 1 представлена реализация алгоритма конечных сумм на языке Objective-C. Данный метод универсальный, т.е. он максимально обобщен и принимает все необходимые параметры, в том числе и селекторы функций ядра и функции $f(x)$, необходимых для расчета. Осталось только проверить правильность работы данного алгоритма.

Правильность работы будем проверять на уравнении

$$y(x) - \int_0^x e^{-x-s} y(s) ds = 0.5(e^{-x} + e^{-3x}). \quad (57)$$

где $x \in [0, 1]$ с шагом $h = 0.2$.

После тестирования результаты полностью совпадают, в качестве доказательства приведу скриншот лога программы, результаты посчитанные вручную данным методом вы можете увидеть в источнике [1] где приведен пример на странице 300. Вот результаты вычисления программы в сравнении с результатами приведенными в [1]

Результаты тестирования метода конечных сумм					
x	0	0.2	0.4	0.6	0.8
y prog	1	0.820654	0.673111	0.551831	0.451831
y book	1	0.8206	0.6731	0.5518	0.4518

Рис. 1. Таблица сравнения расчетов производимых в программе и в книге.

Следовательно метод реализован правильно и может быть в дальнейшем использован для моделирования процессов восстановления. Под конец стоит привести скриншот программы.

На графике в зеленом спектре нарисованы смоделированные процессы восстановления для нормального распределения с заданными параметрами (в данном случае $m = 2\sigma = 0.25$). Красным нарисовано решения интегрального уравнения.

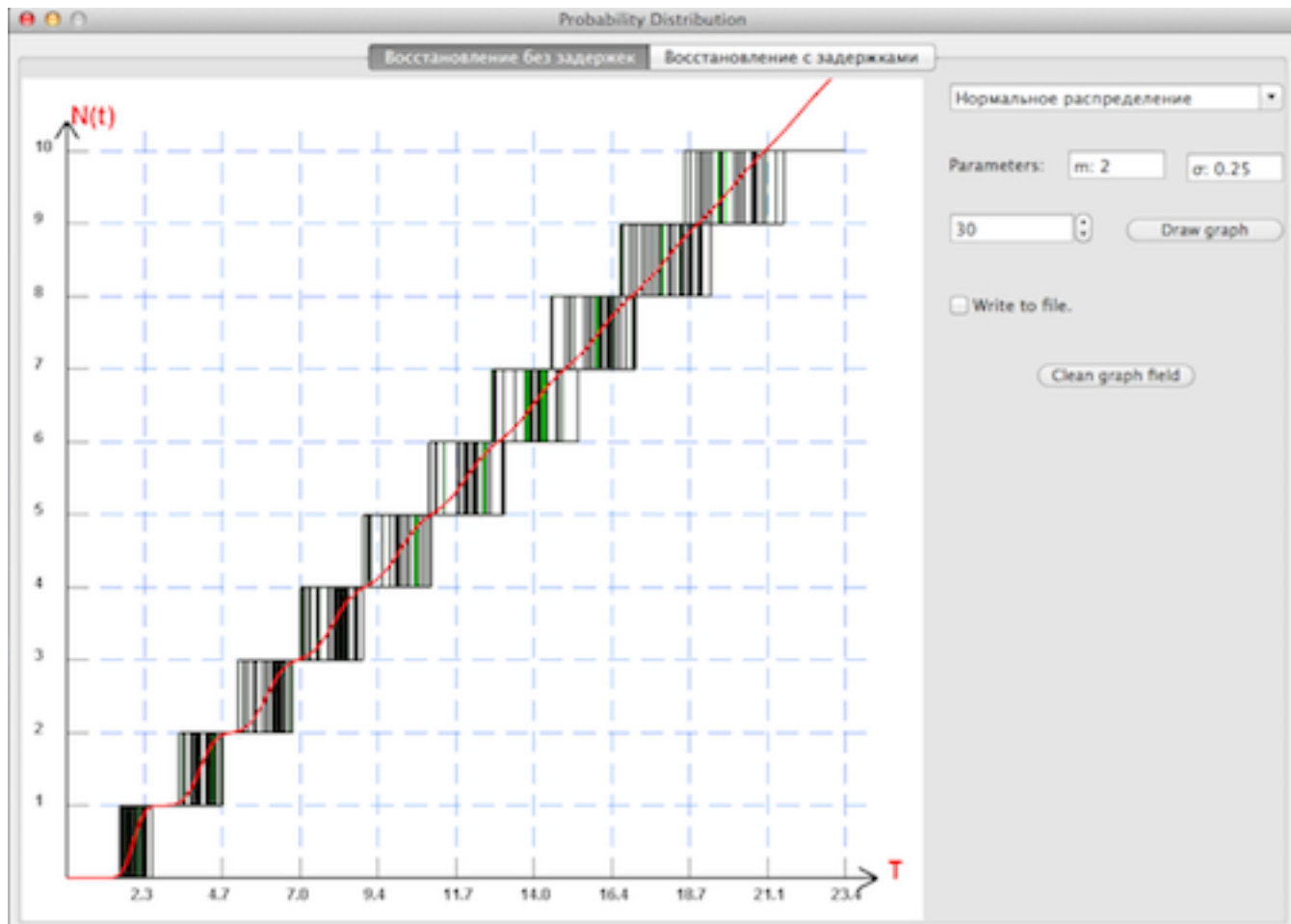


Рис. 2. Программа после вычислений.

РЕЗУЛЬТАТЫ

Далее будут приведены результаты расчетов для 1-ой и 2-ой частей, то есть для моделирования графики $H(t)$ для простых восстановлений без задержек, и графики $K_x(t)$ для альтернирующих процессов восстановлений.

2.1 Результаты вычислений $H(t)$ для простых процессов восстановления

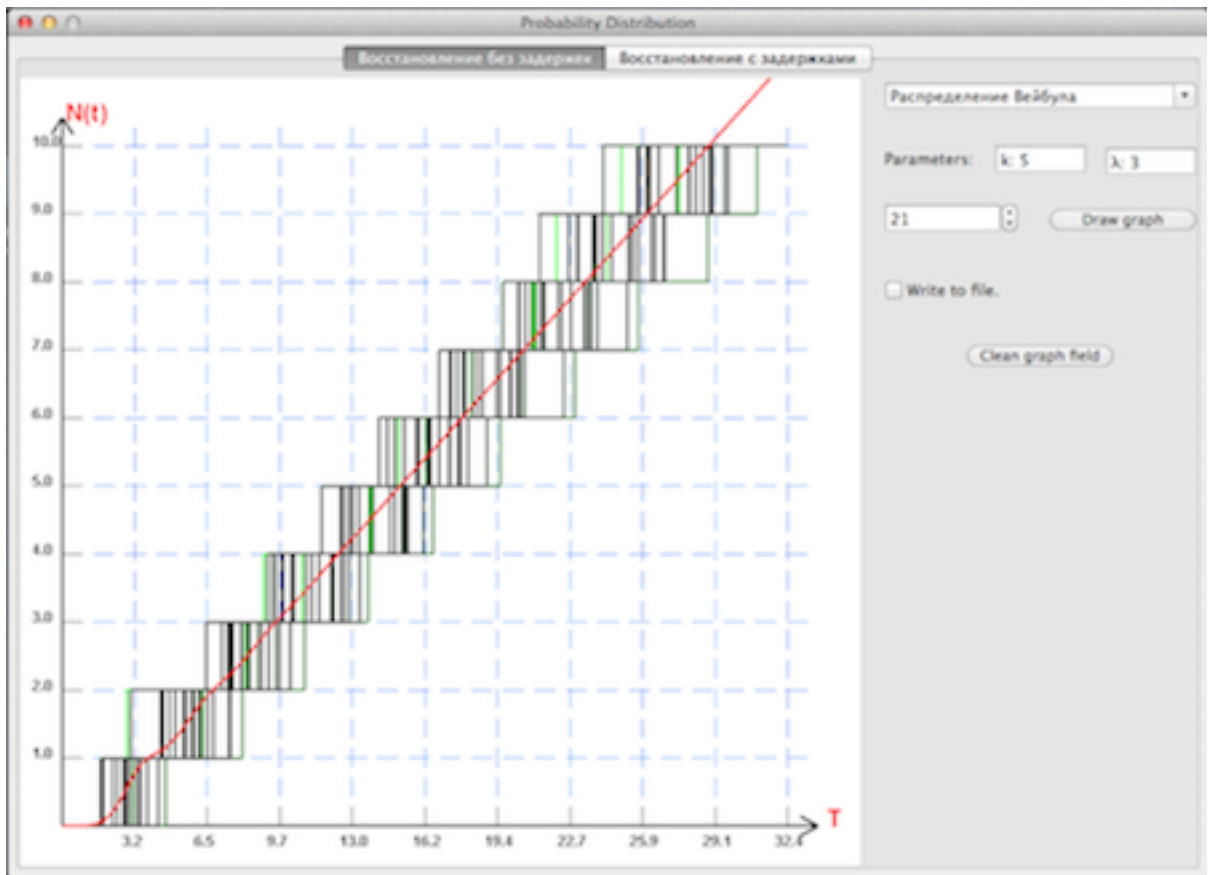


Рис. 3-1. Распределение Вейбула с параметрами $k = 5$, $\lambda = 3$.

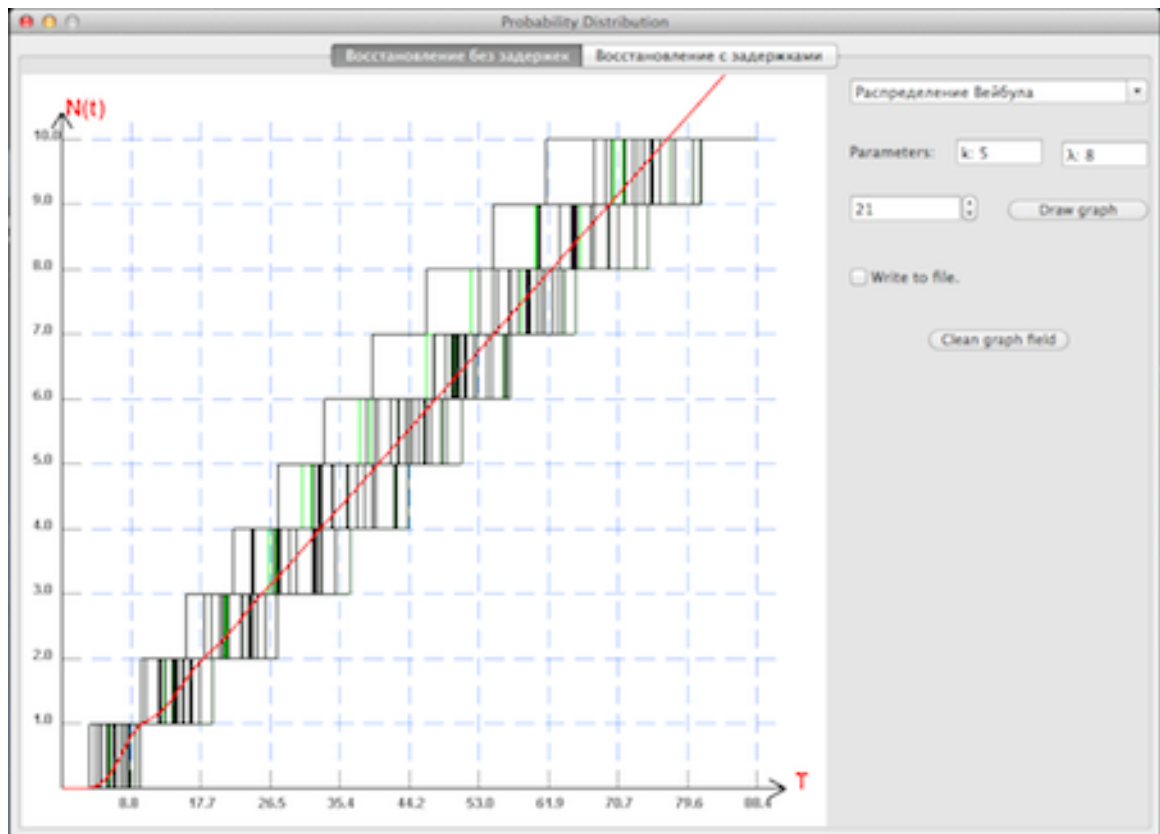


Рис. 3-2. Распределение Вейбула с параметрами $k = 5$, $\lambda = 8$.

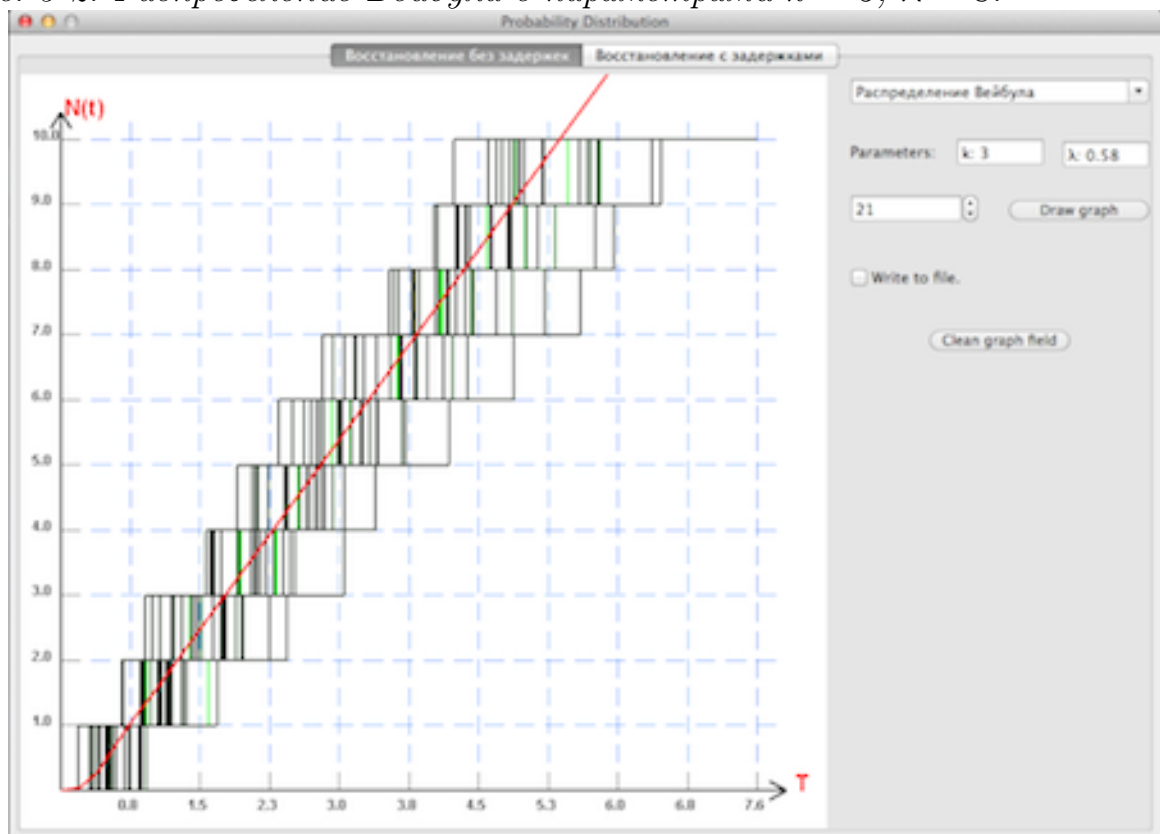


Рис. 3-3. Распределение Вейбула с параметрами $k = 3$, $\lambda = 0.58$.

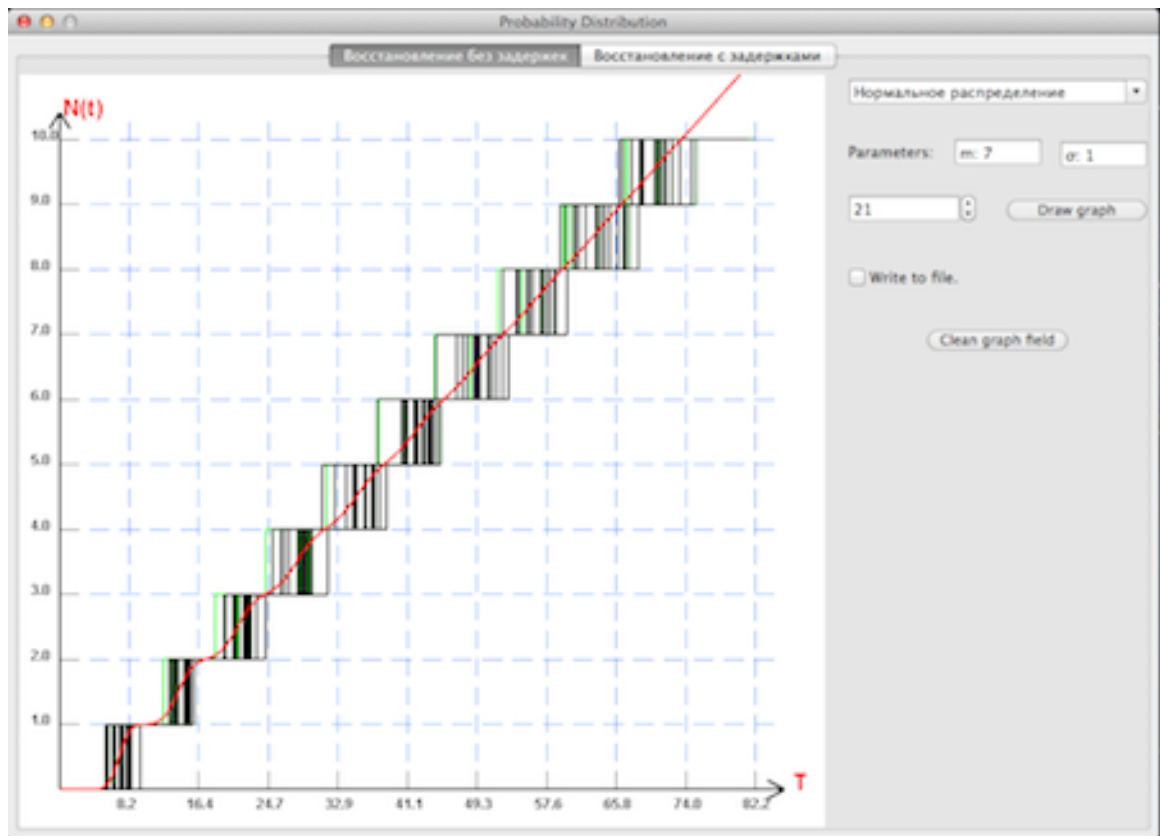


Рис. 3-4. Нормальное распределение с параметрами $m = 7$, $\sigma = 1$.

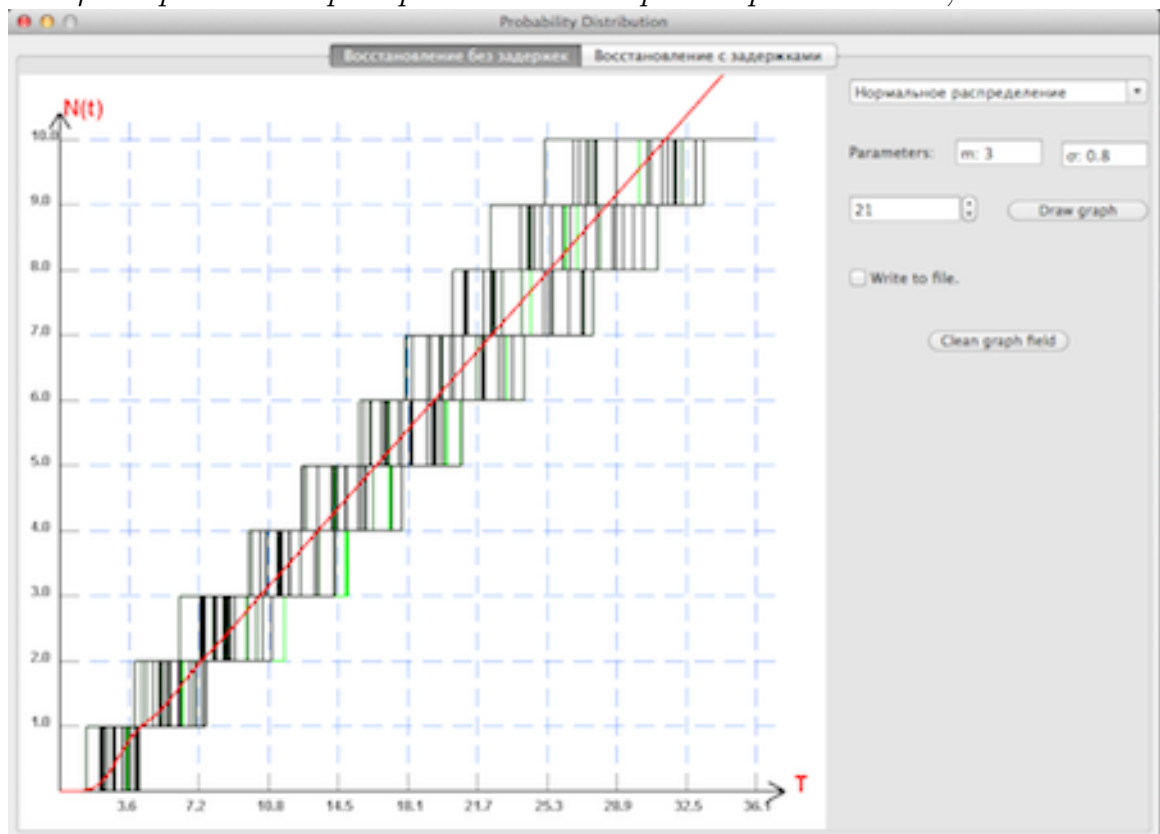


Рис. 3-5. Нормальное распределение с параметрами $m = 3$, $\sigma = 0.8$.

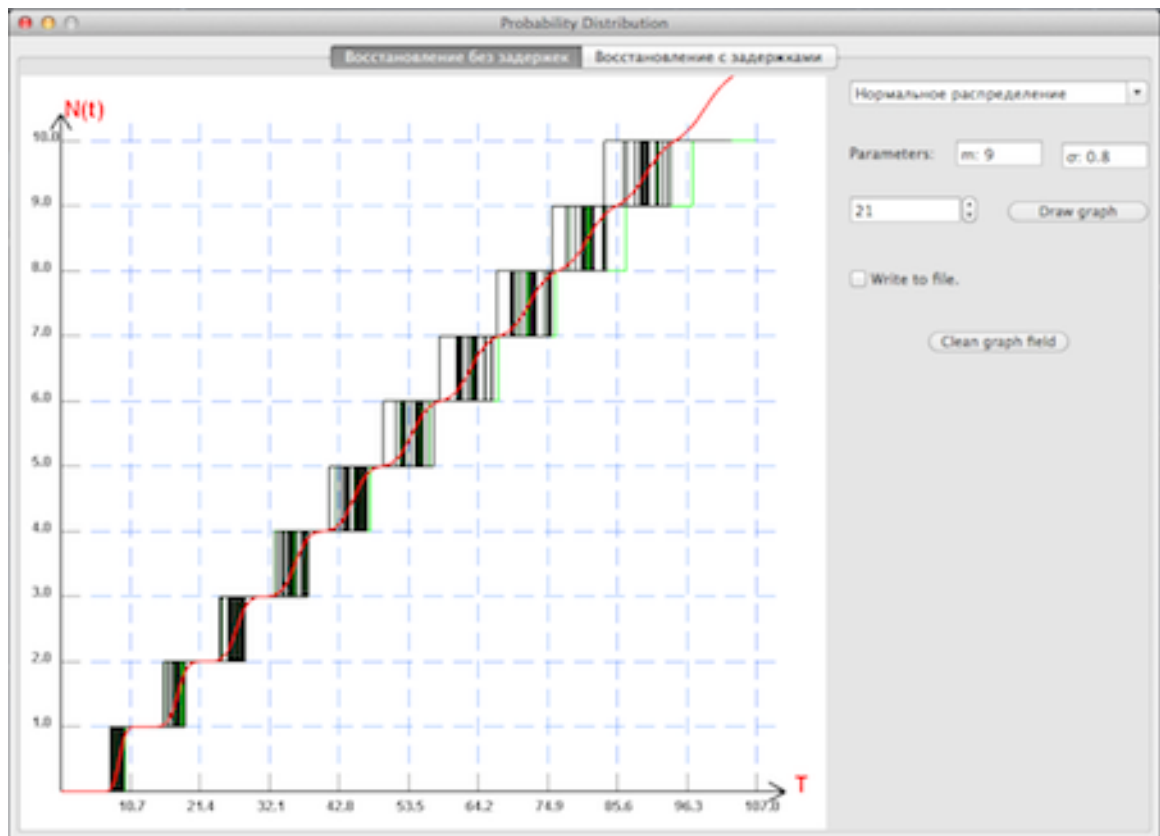


Рис. 3-6. Нормальное распределение с параметрами $m = 9$, $\sigma = 0.8$.

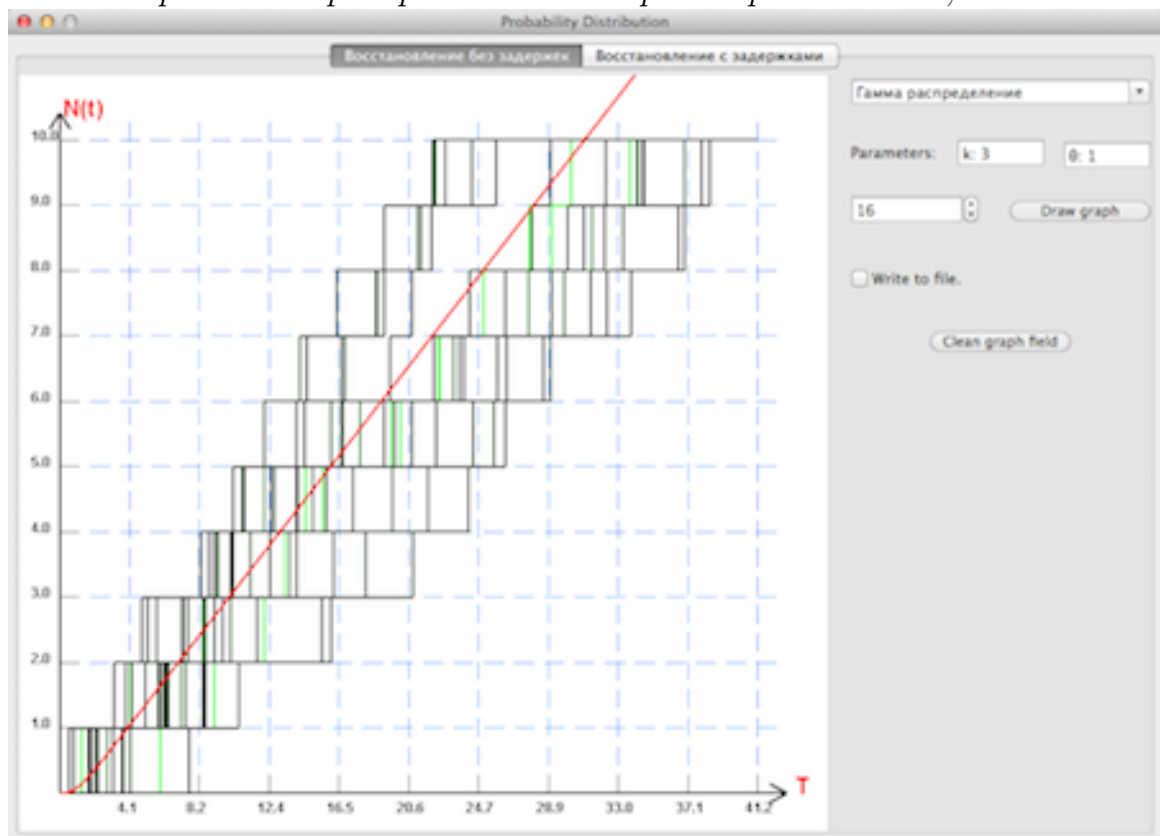


Рис. 3-7. Гамма распределение с параметрами $k = 3$, $\theta = 1$.

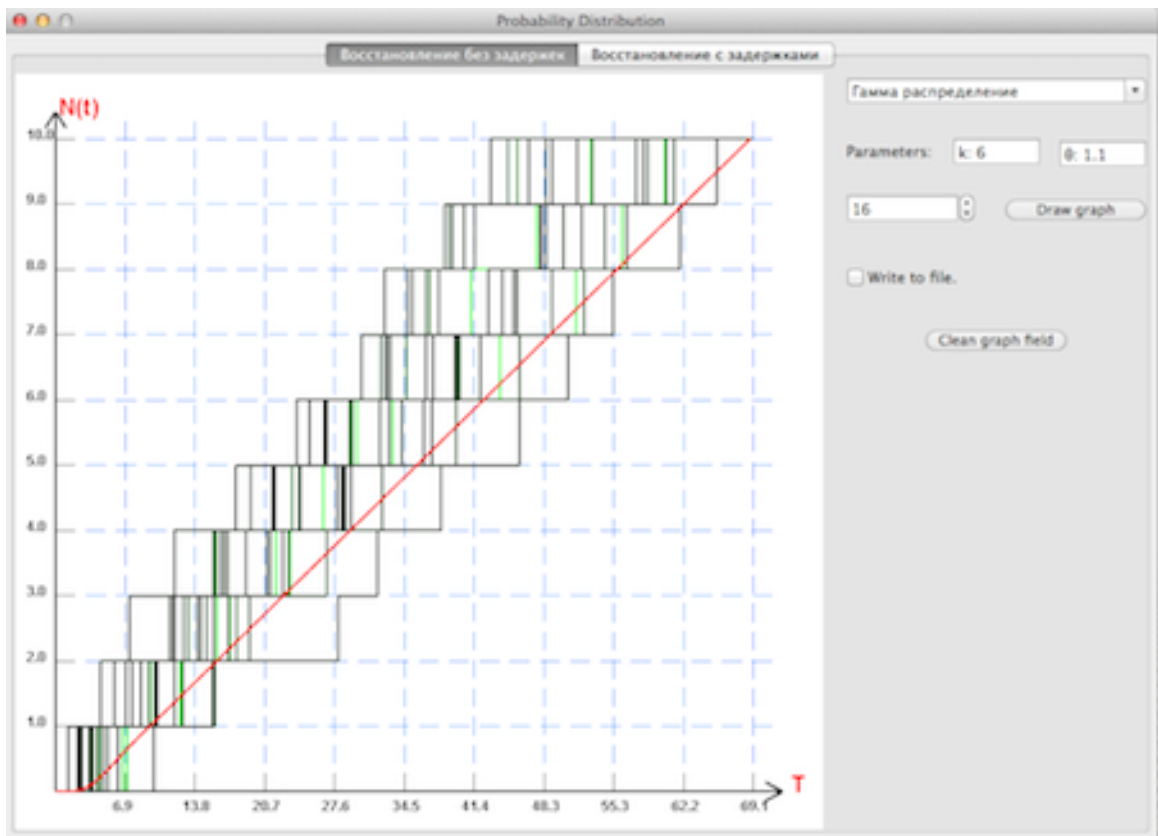


Рис. 3-8. Гамма распределение с параметрами $k = 6$, $\theta = 1.1$.

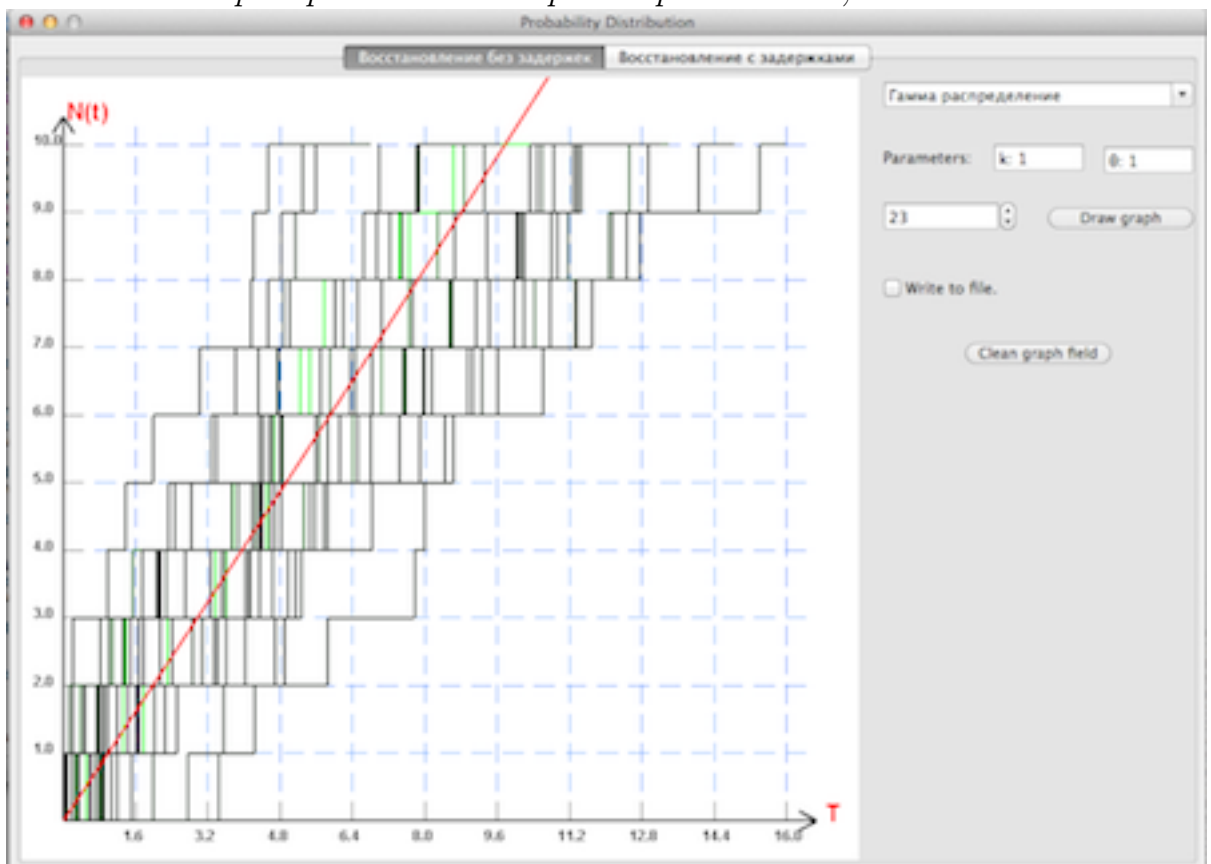


Рис. 3-9. Гамма распределение с параметрами $k = 1$, $\theta = 1$.

2.2 Результаты вычислений $K_x(t)$ для альтернирующих процессов восстановлений

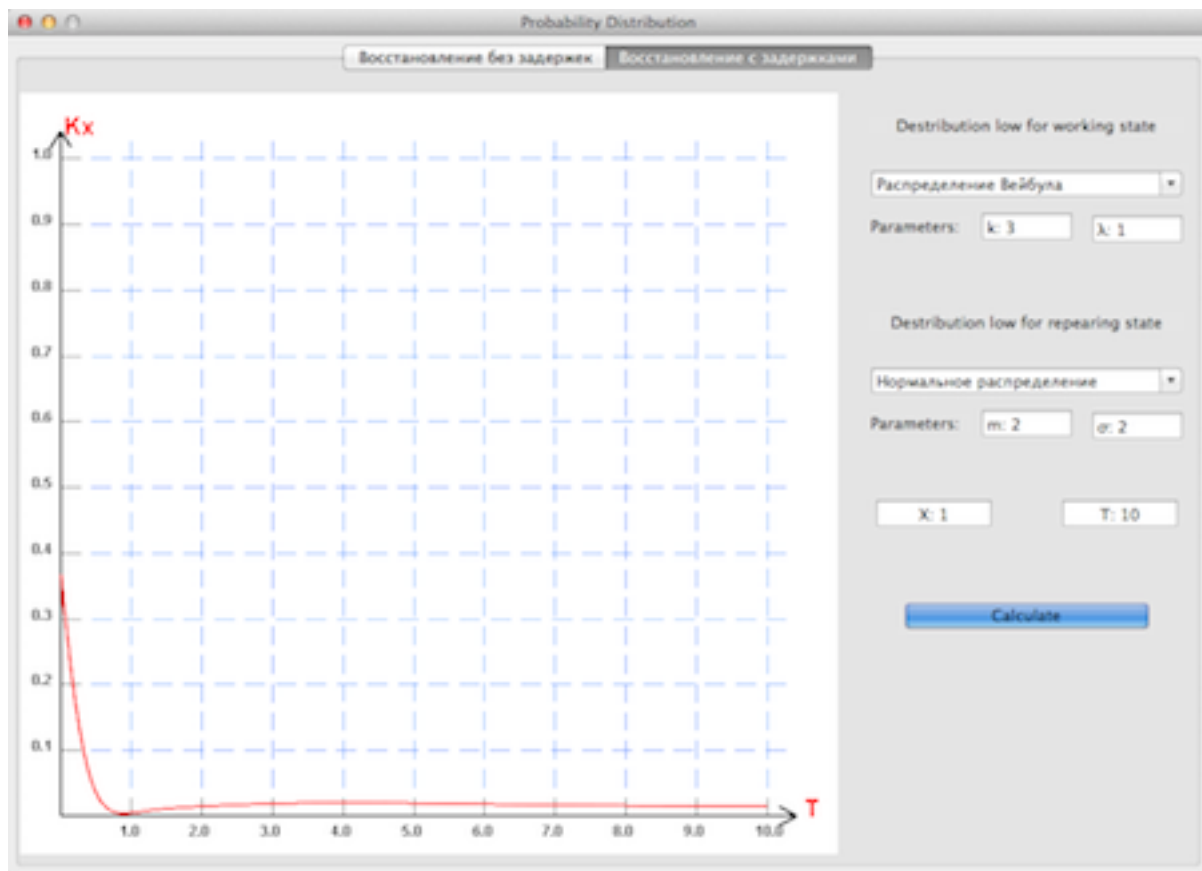


Рис. 4-1. F : Распределение Вейбула $(3,1)$, G : Нормальное распределение $(2,2)$ при $x = 1$

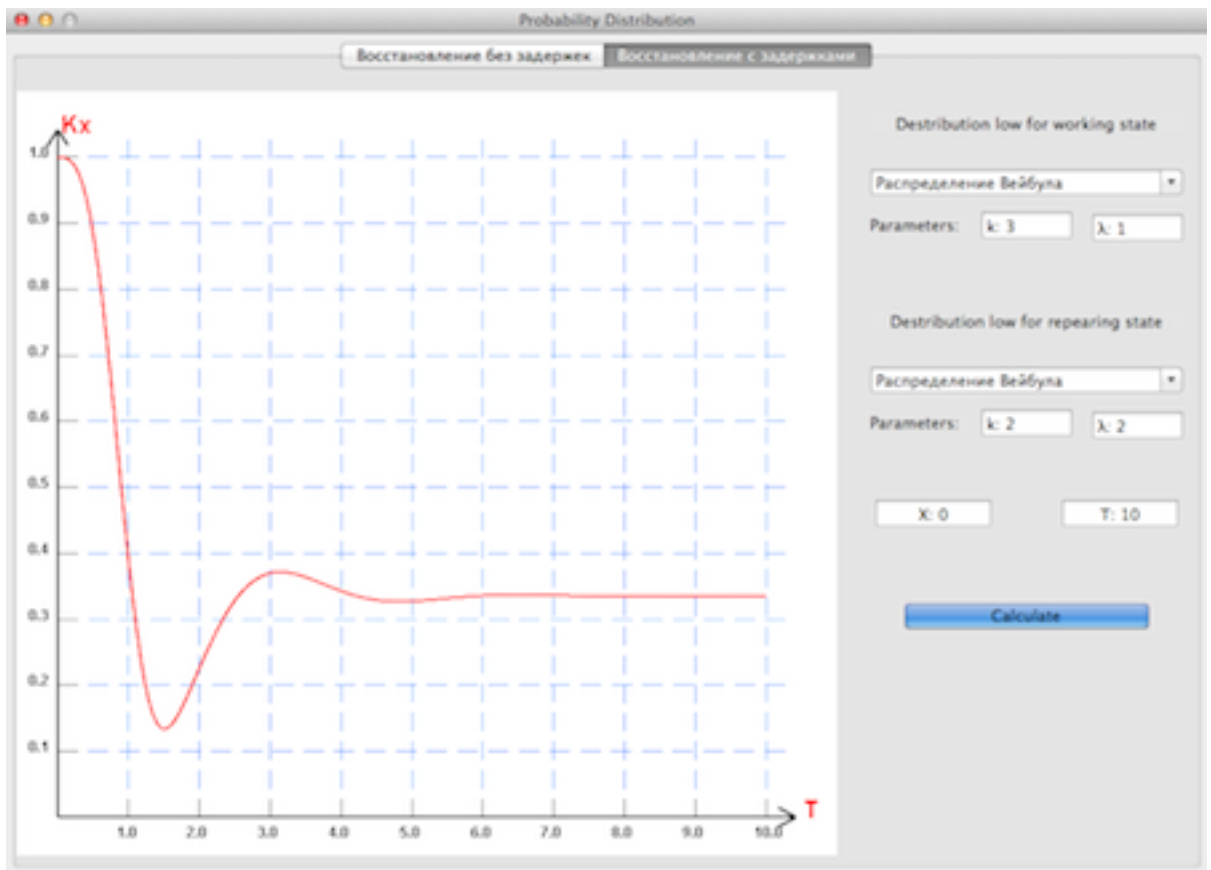


Рис. 4-2. F : Распределение Вейбула $(3,1)$, G : Распределение Вейбула $(2,2)$. при $x = 0$

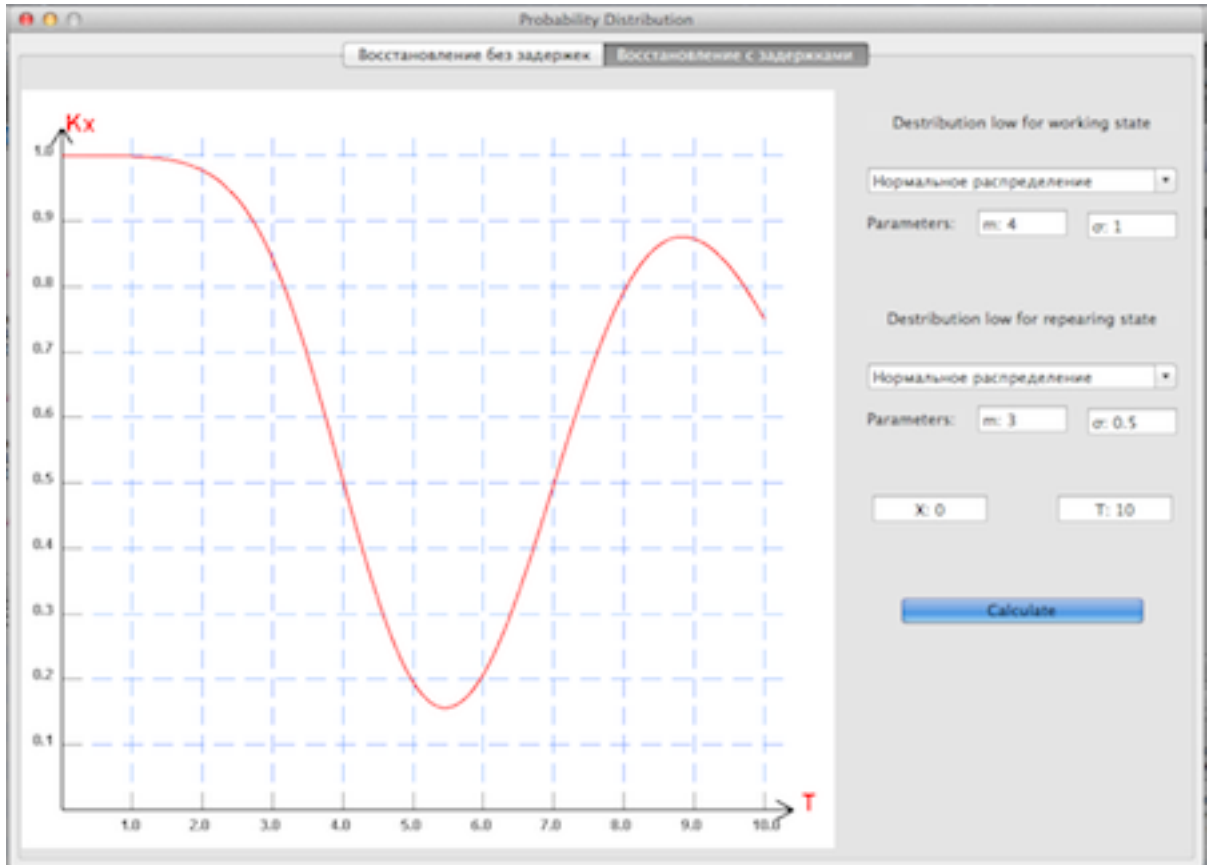


Рис. 4-3. F : Нормальное распределение $(4,1)$, G : Нормальное распределение $(3,0.5)$. при $x = 0$

ВЫВОД

В ходе двусеместрового изучения теории восстановления были изучены основы теории восстановления и основы альтернирующих процессов восстановления. Так же было выполнено практическое задания для моделирования данных процессов, т.е. было создано два блока программы для каждого отдельного задания на семестр.

Первый блок осуществлял расчет процесса восстановления для трех, приведенных в постановке задач, распределений. То есть он моделировал процесс восстановления и выводил его в сравнении с численным решением уравнения восстановления. Для численного решения данного интегрального уравнения использовался метод конечных сумм. В данном отчете приведен один из результатов такого вычисления, как видно из графика, уравнение восстановления достаточно точно аппроксимирует полученный набор процессов восстановления. Так же для данного блока были проведены отдельные расчеты для метода конечных сумм, что помогло выявить некоторые ошибки в реализации алгоритма и впоследствии их исправить.

Для второго блока был произведен анализ новой теории, и выведена формула для 1-восстановлений $H_1(t)$. Далее был разработан второй блок программы в котором считались коэффициенты перечисленные в постановки задачи.

В итоге получилась программа реализующая два блока поставленных задач на каждый семестр. Первый блок был так же немного переделан для адаптации со вторым, но основной функционал был оставлен. Так же была изучена теория необходимая для реализации данной программы.

ЛИТЕРАТУРА

1. Ф. Байхельт, П. Франкен Надежность и техническое обслуживание. Математический подход: пер с нем. М.: "Радио и радиосвязь 1988
2. Н. В. Копченова, И. А. Марон Вычислительная математика в примерах и задачах: учебное пособие. Издание второе, стереотипное. М.: "Лань 2008
3. Д. Р. Кокс, В. Л. Смит Теория восстановления. М.: "Советское радио 1967
4. В. И. Вайнштейн, Представление N - кратных сверток функций распределения в виде рядов и нахождение функции восстановления для некоторых моделей процессов восстановления, М.: электронный журнал "Исследовано в России 2005