Домашнее задание номер 1 , Павливского Сергея , 873

0. Разберитесь с тем, как проводятся оценки в конце доказательства нижней оценки для задачи проверки слова на палиндром.

1. Докажите, что если машине Тьюринга разрешить сдвигаться только налево или направо, но не оставаться на месте, то время работы вырастет в постоянное число раз.

Решение :

Остановку на месте можно заменить на сдвиг влево и вправо с сохранением состояния . Тогда в худшем случае , когда весь алгоритм состоял из остановок на месте , и производилось k операций , то после замены количество операций будет $2k$. В случае отсутствия остановок , количество операций не изменится . Все остальные случаи зависимости количества операций от количества остановок будут из монотонности лежать в промежутке $(k\ ;\ 2k)$. Итак , для $\forall\ k$ операций в исходном алгоритме , в преобразованном алгоритме их будет $\leqslant 2k$, то есть количество (аналогично , время работы) изменится в const раз ч.т.д.

2. Найдите явное аналитическое выражение для производящей функции чисел BR_{4n+2} правильных скобочных последовательностей длины $4n+2$ (ответ в виде суммы ряда не принимается).

Решение :

Как известно , $Cat(z) = \dfrac{1-\sqrt{1-4z}}{2z}$. Также заметим , что если есть многочлен $f(x)$, то $f_1(x) = \frac{f(x)-f(-x)}{2}$ - это одночлены нечетных степеней.

Тогда возьмем $Cat_1(z) = \dfrac{\dfrac{1-\sqrt{1-4z}}{2z} + \dfrac{1-\sqrt{1+4z}}{2z}}{2}$.

Так как $Cat(z)$ эквивалентен $G(z) = \sum\limits_{n=0}^{\infty} C_n \cdot z^n$, то после подстановки в конструкцию вида $f_1(x)\ Cat(z)$ преобразовалось в $Cat_1(z) = \sum\limits_{n=0}^{\infty} C_{2n+1} \cdot z^{2n+1}$.

Почти то что надо , но степени z не подряд идущие .

Но заметим , что $\mathrm{Cat}_1(\sqrt{z}) = \sum\limits_{n=0}^{\infty} C_{2n+1} \cdot z^{\frac{2n+1}{2}} = \sqrt{z} \cdot \sum\limits_{n=0}^{\infty} C_{2n+1} \cdot z^n$.

Отлично , тогда итоговой производящей функцией будет :

$$G(z) = \frac{\mathrm{Cat}_1(\sqrt{(z)})}{\sqrt{z}} = \frac{\frac{1-\sqrt{1-4\sqrt{z}}}{2\sqrt{z}} + \frac{1-\sqrt{1+4\sqrt{z}}}{2\sqrt{z}}}{\frac{2}{\sqrt{z}}} = \frac{2-\sqrt{1-4\sqrt{z}}-\sqrt{1+4\sqrt{z}}}{4z}.$$

3. Оцените трудоемкость рекурсивного алгоритма, разбивающего исходную задачу размера n на три задачи размером $\lceil \frac{n}{\sqrt{3}} \rceil - 5$, используя для этого $10\frac{n^3}{\log n}$ операций.

Решение :

В силу криворукости с расписыванием реккурент воспользуемся третьим случаем мастер теоремы :

$a = 3$, $b = \sqrt{3}$, $f(n) = 10\frac{n^3}{\log n}$. $f(n) = 10\frac{n^3}{\log n} = \Omega\left(n^c\right)$, где $c = 2.1 > \log_b a$;

$3 \cdot f(\frac{n}{b}) \leqslant k \cdot f(n)$, $k = 0.1$, $n \to \infty$ (так как $f(n)$ возрастает , причем не будет органичено $\mathrm{const} \cdot f(n)$) .

Значит , $T(n) = \Theta(f(n)) = \Theta(\frac{n^3}{\log n})$.

4. Функция натурального аргумента $S(n)$ задана рекурсией:

$$S(n) = \begin{cases} 100 & , n \leq 100 \\ S(n-1) + S(n-3) & , n > 100 \end{cases}$$

Оцените число рекурсивных вызовов процедуры $S(\cdot)$ при вычислении $S(10^{12})$.

Решение :

$S(n) = S(n-1) + 0 \cdot S(n-2) + S(n-3)$

Решаем характеристическое уравнение :

$x^3 - x^2 - 1 = 0$

Решения из Вольфрама :

$x_{1,2,3} = 1.4656; -0.23 \pm 0.79i$

$x_{2,3} = \sqrt{0.23^2 + 0.79^2} < 1$

Тогда общее решение :

$x = c_1x_1^n + c_2x_2^n + c_3x_3^n$ эквивалентно $x = c_1x_1$ при $n \to \infty$ (т.к. $x_{2,3} < 1$). Тогда $S(n) = \Theta(1.46^n)$ (не учитываем , что строго говоря , мы считаем как если бы шли не до 100 а до 1 , но это лишь уменьшит ассимптотику , но сохранит экспоненциальную зависимость) . То есть $S(10^{12}) \approx 1.46^{10^{12}}$

5. (Доп). Оцените как можно точнее высоту дерева рекурсии для рекуррентности $T(n) = T(n - \lfloor\sqrt{n}\rfloor) + T(\lfloor\sqrt{n}\rfloor) + \Theta(n)$.

Решение :

Рассмотрим последовательность рекурсивных вызовов процедуры

$T(n - \lfloor\sqrt{n}\rfloor)$. Будем считать , что алгоритм останавливается на T(1). Найдем такую f(n) , что она с хорошей точностью оценивает высоту поддерева рекурсивных вызовов процедуры $T(n - \lfloor\sqrt{n}\rfloor)$. Заметим , что, с увеличением n , f(n) увеличивается на 1 в случае , если предыдущий рассмотренный n был очередным полным квадратом , или если при умножении на 4 и прибавлении 1 становился полным квадратом(первое видно из того , что после прохождения полного квадрата при извлечении квадратного корня и округлении вниз мы получаем одно и то же число до попадания в следующий квадратный корень, а по индукции $T(n - \lfloor\sqrt{n}\rfloor)$ переводит нас в такое T(k), что из него до T(1) доходим за f(n) - 1 , где f(n) - текущая рассматриваемая высота дерева; второе условие равносильно тому , что $n - \lfloor\sqrt{n}\rfloor$- это полный квадрат , а $(n+1) - \lfloor\sqrt{n+1}\rfloor)$ - уже большее число, а так как мы уже знаем , что высота дерева увеличивается при переходе через полный квадрат , то $n - \lfloor\sqrt{n}\rfloor$ будет за 1 операцию доходить до числа , соответствующего меньшей высоте дерева , а $(n+1) - \lfloor\sqrt{n+1}\rfloor)$ - за 2) . Отсюда , по индукции следует , что последнее число дающее высоту дерева вызовов t - это число $\lfloor\frac{(k+1)^2}{4}\rfloor$ (действительно , $\frac{(k+1)^2}{4} - \frac{k+1}{2} = \frac{k^2-1}{4}$, что как раз соответствует нашему граничному условию) . Тогда $\frac{k^2}{4} < n \leqslant \frac{(k+1)^2}{4}$, где k - высота дерева. Тогда $k = \lceil\sqrt{4n} - 1\rceil$. Это и будет высотой дерева рекурсии для всего T(n) , так как высота определяется реккурентой , совершающей наибольшее число операций , а значит делающей наименьшие шаги в уменьшении аргумента , чему и соответствует составляющая $T(n - \lfloor\sqrt{n}\rfloor)$.

6. Назовем треугольник почти правильным, если его все его углы попадают в диапазон $60^\circ \pm 1^0$. Постройте на плоскости множество M из n точек такое, что число $R(n)$ почти правильных треугольников с вершинами в M было асимптотически как можно большим.

Комментарий. Иными словами, нужно построить M*, для которого выполняется неравенство:* $R(n) \geq \mathrm{const} \cdot n^\alpha$*, где* α *нельзя было бы увеличить, а* const *должна быть как можно больше. Для этого вам может понадобиться рекурсия.*

7. Пусть n — натуральное число. Рассмотрим уравнение $2x+3y=n$:

1) решить уравнение в **целых** числах (алгоритм Евклида),

2) пусть a_n — число **натуральных** решений этого уравнения для данного n:

2а) найти производящую функцию последовательности $\{a_n\}$,

2б) найти асимптотику числа решений.

Решение :

1) $2x+3y=n$

$$\begin{cases} 2\cdot 1+3\cdot 0=2 \\ 2\cdot 0+3\cdot 1=3 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 2\cdot 1+3\cdot 0=2 \\ 2\cdot 0+3\cdot 1-2\cdot 1-3\cdot 0=1 \end{cases}$$

$1=2\cdot(-1)+3\cdot 1$

$$\begin{cases} x=-n+3k \\ y=n-2k \end{cases}, k\in\mathbb{Z}$$

2а, 2б)

Рассмотрим произведение $(x^2+x^4+x^6+\ldots)\cdot(x^3+x^6+x^9+\ldots)$

Заметим , что коэффициенты имеют вид $2k_1$ и $3k_2$, $k_1, k_2 \in \mathbb{N}$ соответственно , т.е. после перемножения коэффициент перед x^n в точности совпадает с количеством натуральных решений требуемого Диофантова уравнения . Для каждого $2k_1$ решений не более 1 , при этом если оно есть , то $(n-2k_1) \bmod 3 = 0$.

Тогда верхняя граница на $2k_1$ - это $n-3$. Нижняя граница определяется остатком $n \bmod 3$:

- $n \bmod 3 = 0 \rightarrow$ нижняя граница 2 (так как $n - 2$ кратно 3) ;

Аналогично , при остатке 1 нижняя граница 4 , при остатке 0 нижняя граница 6 .

Тогда из каждого промежутка вида [нижняя граница ; $n - 3$] нам удовлетворяет только элементы , номера которых по модулю 3 равны 1 . Т.е. в промежутках их $\lfloor \frac{n-9}{3} \rfloor$, $\lfloor \frac{n-7}{3} \rfloor$, $\lfloor \frac{n-5}{3} \rfloor$ соответственно остаткам по возрастанию . Тогда итоговая ассимптотика числа решений $\Theta(n)$.

Производящая функция :

$(x^2+x^4+x^6+\ldots)\cdot(x^3+x^6+x^9+\ldots) = x^5\cdot(1+x^2+x^4+\ldots)\cdot(1+x^3+x^6+\ldots) = \frac{x^5}{(1-x^2)\cdot(1-x^3)}$.

8. (Задача о замощении домино) Имеются различные клетчатые таблички — нужно подсчитать число способов замостить ими большое поле из клеток без пробелов и наложений.

Разрешено использовать таблички: чёрный квадрат 2×2, белый квадрат 2×2, серый прямоугольник 2×1 с возможностью поворота. Поле представляет собой полосу $2\times n$. Найдите ассимптотику числа замощений и явную формулу для него.

Решение :

Смотрим на конец доски : можем в него поставить черный квадрат , белый или два вертикальных прямоугольника - тогда делаем то же самое от T(n - 2) ; или поставить один вертикальный - тогда делаем T(n - 1) . Тогда T(n) = 3T(n - 2) + T(n - 1) . Характеристическое уравнение :

$x^2 = x + 3$
$x = \frac{1\pm\sqrt{13}}{2}$

$T(n) = C_1(\frac{1+\sqrt{13}}{2})^n + C_2(\frac{1-\sqrt{13}}{2})^n$

$C_1 + C_2 = 0$
$\frac{C_1+C_2}{2} + \frac{\sqrt{(}C_1-C_2)}{2} = 1$

$C_1 = \frac{\sqrt{13}}{2}$
$C_2 = -\frac{\sqrt{13}}{2}$

$T(n) = \frac{\sqrt{13}}{2}(\frac{1+\sqrt{13}}{2})^n - \frac{\sqrt{13}}{2}(\frac{1-\sqrt{13}}{2})^n$