Домашнее Задание по ТРЯПу №9

Павливский Сергей Алексеевич , 873

13.11.2019

Задание 1.

Верно ли, что язык L является КС-языком? В случае положительного ответа построить КС-грамматику или МП-автомат для данного языка.

1. L = $\{a^n b^m b^n c^m | n, m > 0\}$, $\Sigma = \{a, b\}$.

2. L = $\{w : |w|_a > |w|_b > |w|_c\}$, $\Sigma = \{a, b, c\}$.

Решение

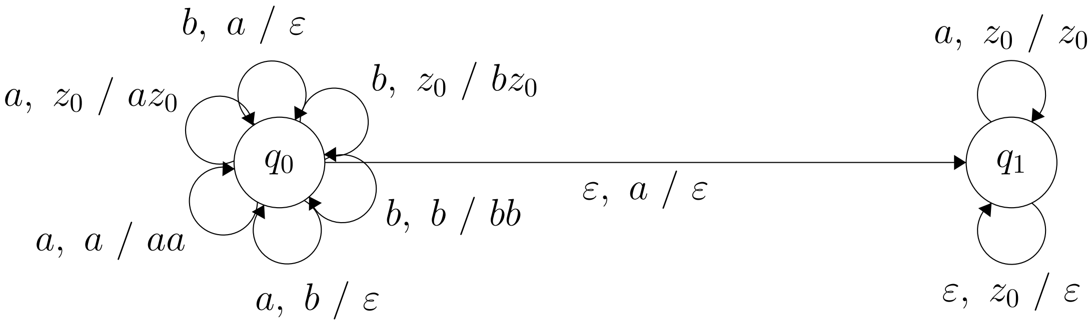
1.

Слово $a^n b^m b^n c^m$ очевидно равно слову $a^n b^n b^m c^m$, котрое в свою очередь равно конкатенации слов $a^n b^n$ и $b^m c^m$. Тогда язык L является конкатенацией языков $\{a^n b^n | n > 0\}$ над алфавитом a, b , и $\{b^m c^m | m > 0\}$ над алфавитом b , c , которые являются КС языками (доказывалось на семинаре) , а т.к. КС языки замкнуты относительно операции конкатенации (доказывалось на семинаре) , то и L ялвяется КС .

2.

Разобьем задачу на подзадачи :

Докажем , что язык $L_1 = \{w : |w|_a > |w|_b\}$ - КС язык . Это так , т.к. для него можно построить МП автомат :



Если $|w|_a > |w|_b$, то найдется такая позиция в слове i , что $\forall$ j : j $\geqslant$ i $\rightarrow$ w_j = a (буква на j-й позиции в слове w) . Собственно , первое состояние обрабатывает все символы до данной позиции i , соответствующей обрабатываемому слову (т.к. количество a и b до i одинаково , то к моменту обработки позиции i стек будет пуст) , а по букве , стоящей на позиции i и равной a , осуществляется переход во второе состояние , в котором обрабатываются оставшиеся позиции слова и в конце очищается стек , принимая слово w . Значит , т.к. для L_1 существует МП автомат , то L_1 КС язык .

Аналогичный строится автомат для языка $L_2 = \{w : |w|_b > |w|_c\}$, что так же означает , что он КС язык . Но тогда требуемый язык L = $L_1 \bigcap L_2$, а т.к. КС языки замкнуты относительно операции пересечения , то L КС язык .

Задание 2.

Докажите, что язык $\{wtw^R||w| = |t|\} \in \{a, b\}^*$ не является КС-языком.

Решение

Возьмем такое слово, что |w| = p , и при этом удовлетворяющие следующему условию : t не содержит пары подслов вида w_1 и w_1^R , расположенных второе через некоторое количество символов после первого ; ни одно из подслов не вляется обращением ни для одного подслова слова w_R , а также ни для одного подслова слова w (данные ограничения очевидно выполнимы , так как условие построения языка накладывает ограничение лишь на длину t , на его символы мы можем выбирать сами но при этом данные ограничения позволяют исключить случай перераспределения символов между словами w , t и w^R при накачке , то есть слова должны будут сохранять свою структуру , и не смогут попасть в язык L за счет обмена символами между соседними подсловами) . Тогда и $|w^R|$ и $|\mathrm{t}| = \mathrm{p}$. Но тогда все будет по аналогии с доказательством нерегулярности языка $a^n b^n c^n$: так как $|\mathrm{uyv}| \leqslant \mathrm{p}$, то uyv либо целиком принадлежит w , либо целиком w^R , либо целиком t (но в этих случаях при накачке длина одной из трех компонент меняется , а она должна оставаться равной длине остальных двух компонент , длина которых не меняется) , либо uyv лежит на границе двух составляющих слова , но не может пересекаться сразу со всеми тремя , так как длина одной составляющей уже p , а для пересечения 3 составляющих uyv должно содержать в себе хотя бы одну составляющую, и |uyv| , опять таки , $\leqslant$ p . Но в таком случае принадлежности только двум составляющим также выполняется отрицание леммы о накачки для КС языков , в точности по тем же причинам , что и для пересечения одной составляющей . Тогда для языка выполняется отрицание леммы о накачке для КС языков , т.е. язык не КС .

Задание 3.

Верно ли, что если язык L^* является КС-языком, то и язык L является КС-языком?

Определим операцию подстановки языков $L_1, L_2, ..., L_k$ над алфавитом Σ в язык M над алфавитом $\triangle$ k $= \{1, 2, ..., k\}$.

В результате подстановки получается язык σ (M) =

$$\bigcup_{w \in M} L_{w_1} \cdot L_{w_2} \cdot \ldots \cdot L_{w_{|w|}} \tag{1}$$

то есть вместо букв каждого слова из М мы подставляем соответствующие языки и получаем язык L_w. Объединение по всем w ∈ M языков L_w является языком σ (M).

Решение

Это , очевидно , верно , так как для задача распознавания итерации языка эквивалентна задаче многократного распознавания самого языка . Тогда если существует МП автомат для L^* , то достаточно просто заканчивать обработку слова после первой обработки слова из языка . Тогда из состояния , которое является связующим в склеенных автоматах L и L делаем прием по пустому стеку , а все дальнейшие переходы убираем .

Задание 4.

Докажите, что КС-языки замкнуты относительно операции подстановки. То есть при подстановки КС-языков $L_1, L_2, ..., L_k$ в КС язык М получается КС-язык σ(M).

Определим операцию Pref, которая ставит слову w в соответствие множество его префиксов Pref(w) = $\{x|\exists y : xy = w\}$, а языку ставит в соответствие множество префиксов слов из языка: Pref(L) = $\{x|\exists y : xy \in L\}$.

Решение

Рассмотрим грамматику G = $(V_N, \{a_1, a_2, \ldots, a_n\}$, P, S). Пусть $G_i = (V_{N_i}, V_{T_i}, P_i, S_i)$ — грамматика, порождающая множество $f(a_i)$ для каждого i, 1 ⩽ i ⩽ n. Без потери общности предполагаем, что все нетерминальные словари попарно не пересекаются. Построим новую грамматику: G'= (V_N', V_T', P', S), где V_N'= V_N

$\cup \bigcup_{i=1}^{n} V_{N_i}$, $V'_T = \bigcup_{i=1}^{n} V_{T_i}$. Пусть h — подстановка $h(a_i) = \{S_i\}$ для $1 \leqslant$ i $\leqslant$ n и h(A)=$\{A\}$ для любого A $\in V_N$; P'= $\bigcup_{n}^{i=1} P_i \cup$ $\{$A $\to$ h(a) | A $\to$ a $\in P\}$. Ясно, что грамматика G' является контекстно-свободной, возможно, с правилами вида A $\to \varepsilon$. Очевидно, что f(L(G)) = L(G') ч.т.д.

Задание 5.

Докажите, что КС-языки префиксно замкнуты, т. е. для любого КС-языка L справедливо Pref(L) $\in$ CFL.

Решение

Для МП автомата , распознающего КС язык L уберем все переходы , которые не могут давать слова из языка (сделаем автомат не всюду определенным , что , очевидно , можно сделать не нарушая его корректности) . Не теряя общности , пусть исходный автомат принимал по пустому стеку . Тогда из всех состояний сделаем ε - переходы в новое состояние , прежний переход , который обнулял стек уберем , и сделаем переходы , очищающие стек и зануляющие его из нового состояния в само себя . Тогда можно будет получить все возможные префиксы , так как если мы оказываемся в некотором состоянии , то часть слова , которую мы обработали является преффиксом некоторого слова из языка , так как в самом начале мы оставили только переходы , которые реализуют некоторое слово из языка . Но тогда для любого префикса любого слова из языка мы окажемся с некотором состоянии МП автомата , а тогда можно сделать ε переход в конечное состояние , обнулить стек и , соответственно , принять данный префикс . Так как новое состояние умеет только очищать стек , то оно не может породить новый префикс , а значит приниматься будут только суффиксы , порождаемые исходным МП автоматом , т.е. язык Pref(L) . Доказано включение в обе стороны , то есть МП автомат , конструкция которого описана , распознает язык Pref(L) , а значит для языка Pref(L) существует распознающий его МП автомат , т.е. Pref(L) КС язык . Значит если L КС язык , то и Pref(L) также КС язык , т.е. КС языки префиксно замкнуты ч.т.д.