Домашнее Задание по ТРЯПу №6

Павливский Сергей Алексеевич , 873

17.10.2019

Задание 1.

1. Пусть A — полный ДКА, распознающий язык L. Докажите, что

а) каждый левый язык Lq является подмножеством некоторого класса L-эквивалентности: x $\in$ Lq $\Rightarrow$ Lq $\subseteq$ [x].

б) для каждого класса эквивалентности [x] существует такое подмножество состояний $Q_x \subseteq Q_A$, что [x] = $\bigcup L_q$, q $\in Q_x$

в) если x $\in$ Lq, то Lp $\subseteq$ [x] тогда и только тогда, когда Rq = Rp (когда правые языки для состояний p и q совпадают).

Решение

1.а)

L_q это все слова приходящие в состояние q , тогда после приписывания слова z к слову из L_q будет приводить в одно и то же принимающее или не принимающее состояние . Тогда все слова из L_q при дописывании произвольного слова z принимаются A или не принимаются одновременно , то есть принадлежат одному некоторому классу L эквивалентности ч.т.д.

1.б)

Так как число состояний конечно , то для каждого состояния определим L_q . Рассмотрим некоторый класс эквивалентности [x] . Его слова оказываеются в некотором наборе состояний Q_x

. Объединение L_q по этим состояниям будет принадлежать [x] , из-за достижимости состояний словами из [x] . Если некоторый элемент , не принадлежащий объединению , пришедший в состояние q_1 . Тогда , по-факту , мы включили q_1 в Q_x и включили в объединение L_{q_1} , то есть на самом деле этот элемент входил в объединение ч.т.д.

1.в)

Возьмем y $\in L_p \subseteq$ [x] , тогда x $\sim$ y , а значит , т.к. $\forall$ z : xz $\in$ L $\Leftrightarrow$ yz $\in$ L , то $\Rightarrow R_p = R_q$.

В обратную сторону : если $R_p = R_q$, то берем y $\in L_p$ и x $\in L_q$, тогда $R_p = R_q \Rightarrow$ x $\sim$ y . Значит , $L_p \subseteq$ [x] .

Задание 2.

К языку L_1 добавили конечный язык R и получили язык L (L = $L_1 \bigcup$ R). Язык L оказался регулярным. Верно ли, что язык L_1 мог быть нерегулярным?

Решение

1.

Пусть L_1 не регулярный . Тогда для некоторого p для $\forall$ w : |w| $\geqslant$ p выполняется леммы о накачке . Тогда при объединении L_1 с конечным R возьмем $p_1 = \max$(p, max($|w_1$, w $\in$ R)) . Тогда для любого $w_2 : |w_2| \geqslant$ p1 будет выполняться отрицание леммы о накачке . Значит L_1 не не регулярный , то есть L_1 регулярный .

Задание 3.

Является ли регулярным язык L всех слов в алфавите $\{0, 1\}$, которые представляют числа в двоичной записи, дающие остаток два при делении на три (слово читается со старших разрядов)? Например, 001010 ($1010_2 = 10_{10} = 3 \times 3 + 1$) $\notin$ L, а 10001 ($10001_2 = 17_{10} = 5 \times 3 + 2$) $\in$ L.

Решение

Да . Докажем , что число классов эквивалентности конечно .

Остатки по модулю 3 будут классами эквивалентности . Пусть мы дописали слово z к слову x . Пусть $|z| = k \Rightarrow$ остаток по модулю 3 слова xz будет $x_1 * 2^k + z_1$; x_1, z_1 остатки по модулю 3 у чисел x, z соответственно . Тогда если $x \equiv y \pmod 3$, то $\forall$ z : xz $\in$ L $\Leftrightarrow$ yz $\in$ L, т.к. $x_1 * 2^k + z_1 \equiv y_1 * 2^k + z_1 \pmod 3$, в случае не сравнимости их по модулю приписывание z приведет их в разные остатки . Ясно , что любое число принадлежит какому-то нашему классу L-эквивалентности , поскольку для каждого числа мы можем найти остаток по модулю 3 . Количество классов эквивалентности конечно $\Rightarrow$ по теореме Майхилла-Нероуда L регулярен .

Задание 4.

Опишите классы эквивалентности Майхилла-Нероуда для языка L. В случае конечности множества классов, постройте минимальный полный ДКА, распознающий L. L = а) SQ = $\{ ww \mid w \in \Sigma* \}$; б) $\Sigma^* a \Sigma^*$.

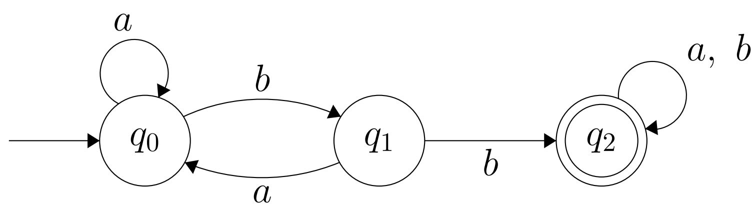
Решение

а)

Каждый класс эквивалентности состоит из одного слова . Пусть класс эквивалентности состоит из двух слов $w_1 \neq w_2$. Тогда при z = $w_2 \Rightarrow w_2 w_2 \in$ L , $w_1 w_2 \in$ L . А так как число слов в алфавите количество , то число классов эквивалентности бесконечное количество $\Rightarrow$ по критерию регулярности L не регулярный .

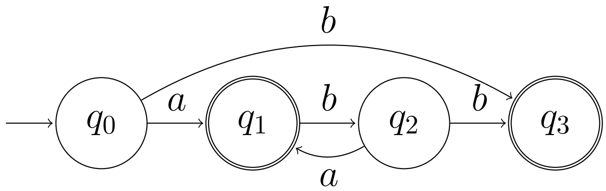
б)

Скажем , что язык L разбивает на три класса эквивалентности : [a] = b^*a^n, [b] = b^*, [ab] = $\Sigma^*ab\Sigma^*$. Если к слову |ab| приписать какое-то слово z , то полученное слово будет принадлежать языку L , потому что исходное слово из |ab| $\in$ L. Если к словам x, y из |a| приписать слово z, которое $\in$ L , то и xz и yz будут принадлежать языку . Если приписать слово z , которое не принадлежит языку и начинается на a , то оба слова xz, yz не будут принадлежать языку , если z начинается с b , то оба слова xz, yz будут принадлежать языку (на стыке слов образуется пара ab) . Берем два слова x, y из |b|, тогда при приписывании слова z , только от принадлежности этого слова языку L , зависит принадлежность слов xz, yz языку L. Возьмем z = a , приписываем к ab $\in$ [ab], ba $\in$ [a] и b $\in$ [b], aba $\in$ L, aa $\notin$ L, bb $\notin$ L . z = b приписываем к ba $\in$ [a] и b $\in$ [b], тогда bab $\in$ L, bb $\notin$ [b]. Также ясно , что мы каждое слово можем поместить в какой-либо класс эквивалентности , потому что если слово не содержит подслово ab , то оно имеет вид b^*a^* , а это описывается объединением множеств b^* и b^*a^n . Тогда ДКА :



Задание 5.

Автомат A заданн диаграммой:



1. Постройте праволинейную грамматику для языка L(A).
2. Постройте регулярное выражение для языка L(A).

Решение

2.
Воспользуемся методом Бржозовского :
Система :
1.
$R_0 = \mathrm{a}R_1 + \mathrm{b}R_3$
$R_1 = \mathrm{b}R_2 + \varepsilon$
$R_2 = \mathrm{a}R_1 + \mathrm{b}R_3$
$R_3 = \varepsilon$
2.
$R_2 = \mathrm{a}R_1 + \mathrm{b}$
$R_1 = \mathrm{b}(\mathrm{a}R_1 + \mathrm{b}) + \varepsilon = \mathrm{ba}R_1 + \mathrm{bab} + \varepsilon$
Тогда по теореме Ардена :
$R_1 = (ba)^*(\mathrm{bab} + \varepsilon)$
$R_0 = \mathrm{a}(ba)^*(\mathrm{bab} \mid \varepsilon) \mid \mathrm{b}$ - требуемое Р.В.