Домашнее Задание по ТРЯПу №5

Павливский Сергей Алексеевич , 873

07.10.2019

Задание 1.

1. L — конечный язык. Выполняется ли для него лемма о накачке?

Решение

Задание 2.

Будут ли регулярными следующие языки?

1. $L1 = \{a^{2017n+5} | n = 0, 1, ...\} \bigcap \{a^{503k+29} | k = 401, 402, ...\} \subseteq \{a^*\}$.

2. $L2 = \{a^{200n^2+1} | n = 1000, 1001, ...\} \subseteq \{a^*\}$.

Пусть $w = w_1 w_2 ... w_n, w_i \in \Sigma, w^R = w_n w_{n-1} ... w_1$.
Обозначим LR = $\{w^R | w \in L\}$ - обращение языка L.

3. SQ = $\{ww | w \in \Sigma^*\}$ — язык квадратов.

4. $\Sigma^*\ PAL, PAL = \{w | w = w^R\}$ — язык палиндромов.

Решение

1.

$a^{2017n+5} = a^5 a^{2017n} = a^5 (a^{2017})^n = a^5 a^* \in Reg$ (так как регулярность замкнута относительно операции конкатенации) , $n \in 0, 1, ...$

Аналогично $a^{503k+29} = a^2 9(a^{503})^k = a^2 9((a^{503})^{k_1} (a^{503})^{k_2}) inReg$ (так как регулярность замкнута относительно операции вычитания (вычитание - композиция пересечения и дополнения , относительно которых замкнута регулярность) относительнои конкатенации) , $k_1 \in \{0, 1, ...\}, k_2 \in \{0, 1, ..., 400\}$

Тогда , так как регулярность замкнута относительно операции пересечения , то L1 $\subset$ Reg ч.т.д.

2. Воспользуемся леммой о накачке для доказательства нерегулярности L2 .

Предположим противное . Пусть L2 регулярный . Тогда для него выполняются условия леммы о накачке . Тогда для некоторой константы p существует разбиение любого слова длиннее p на xyz , которое удовлетворяет условиям леммы .

По условию леммы |y| = k $\leqslant$ p .

Для того чтобы прийти к противоречию , найдем такое n и слово w = xyz, что $w = a^{200n^2+1}$, а для $xy^2z \nexists k : xy^2z = a^{200k^2+1}$. В качестве k рассмотрим n+1 :

$200n + 1^2$+1 = $200n^2$+$400n$+200+1 . Длина $a^{200n^2+1+400n+200}$ отличается от a^{200n^2+1} на 400n + 200 . При этом длина слово x^2z - минимальное по длине по xyz , получающееся накачкой y . При накачке длина слова увеличивается на y , которое как было сказано ранее по длине $\leqslant$ p . Тогда если p < 400n + 200, то не будет существовать требуемого представления для xy^2z. Но для каждого p существует слово , представимое в виде $a^{200{n_1}^2+1}$, где $n_1 > \frac{p-200}{400}$, которое и будет нарушать условие леммы. Противоречие . Значит L2 не $\subset$ Reg .

3. Предположим , что SQ регулярный . Тогда возьмем ww такое , что |ww| = 2p. По условию леммы существует разбиение ww на xyz . Так как |xy| $\leqslant$ p , то элементы y - это элементы w . Тогда xy^0z не полином (первая из двух ранее одинаковых частей слова изменилась , вторая нет) , т.е. $\notin$ SQ , что проти-

воречит предположению . Значит SQ не принадлежит Reg .

4. Пусть $\Sigma^* \ PAL \subset$ Reg . Тогда $\exists$ ДКА($\Sigma^* \ PAL$) . Тогда $\exists$ ДКА(PAL) , который получается из ДКА($\Sigma^* \ PAL$) всюду определением ДКА($\Sigma^* \ PAL$) и инвертированием принимаемости его состояний , т.к. PAL = $\overline{\Sigma^* \ PAL}$

Задание 3.

Покажите, что следующий язык удовлетворяет лемме о разрастании для регулярных языков, но сам регулярным не является: L = $\{ab^{2^i}|i > 0\} \cup \{b^j|j > 0\} \cup \{a^m b^n|m > 1, n > 0\}$.

Решение

Рассмотрим язык L' = $ab^{2^i}|i > 0$. Докажем его нерегулярность по лемме о накачке . Предположим противное , пусть он регулярный . Тогда существует представление $ab2^i$ = xyz , |y| $\leqslant$ p . Поступим аналогично доказательству в задаче 1 пункте 2 . Найдем такое слово $ab2^l$, что следующее после него по длине ab^{2^l} не может равняться следующему по накачке после xyz слову xy^2z . p = const , $ab^{2^l} \uparrow$, тогда $\exists l_1$: $|ab^{2^l}|$ - $|ab^{2^{l+1}}| > p$. То есть найдется слово w противоречащее условию леммы о накачке , то есть не удовлетворяет лемме о накачке , противоречие . Значит L' не $\subset$ Reg .

Но L' = L $\bigcap$ abb^* . Если бы L был регулярным , то из замкнутости регулярности относительно операции пересечения бы следовало , что L' также регулярный . Но L' не регулярный , как было показано раньше . Значит L не регулярный ч.т.д.

Докажем , что данный язык удовлетворяет лемме о накачке . Возьмем p = 2 . Если в слове нет ни одной буквы a , то возьмем x = ε, y = b, z = остаток слова . Тогда слово разрастается в слова из $\{b^j|j > 0$. Если в слове одна буква a , то возьмем x = ε , y = a , z = остаток слова . Тогда слово разрастается в слова из $\{b^j|j > 0$ (если i = 0) или из $\{a^m b^n|m > 1, n > 0\}$ (если

$i \geqslant 1$) . Если в слове несколько букв a , то возьмем x = a , y = a , z = остаток слова . Тогда слово разрастается в слова из $\{a^m b^n | m > 1, n > 0\}$. То есть во всех случаях выполняются условия леммы о накачке ч.т.д.

Задание 4.

Пусть R регулярный язык. Верно ли, что F тоже регулярный язык, если

а) F $\bigcap$ R — регулярный язык;

б) языки F $\bigcap$ R и F $\bigcap \overline{R}$ являются регулярными?

Решение

а)
Нет , $\sqsupset R = a^* \subset Reg$.

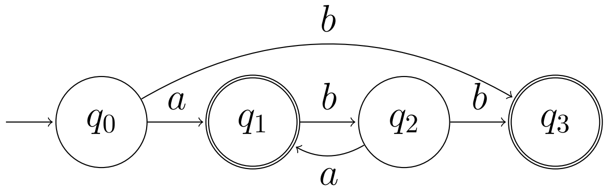
F = $\{a^*\} \bigcup \{a^i b^i | i \geqslant 0\}$

F $\bigcap$ R = $a^* \in$ Reg
Аналогично задаче 3 ,
$\{a^*\} \bigcup \{a^i b^i | i \geqslant 0\} \notin$ Reg ($\{a^i b^i | i \geqslant 0\} \notin$ Reg , $\{a^i b^i | i \geqslant 0\} = \{a^*\} \bigcup \{a^i b^i | i \geqslant 0\} \bigcap \{ab^*\}$, $\{ab^*\} \in$ Reg) .

б) $F \bigcap R \bigcup F \bigcap \overline{R} = F \bigcap \Sigma^* = F$
т.к. регулярность замкнута относительно объединения , то F $\subset$ Reg , т.е. да .

Задание 5.

Язык L распознаётся автоматам, заданным диаграммой:



1. Построить ДКА с минимальным числом состояний, который распознаёт язык L.

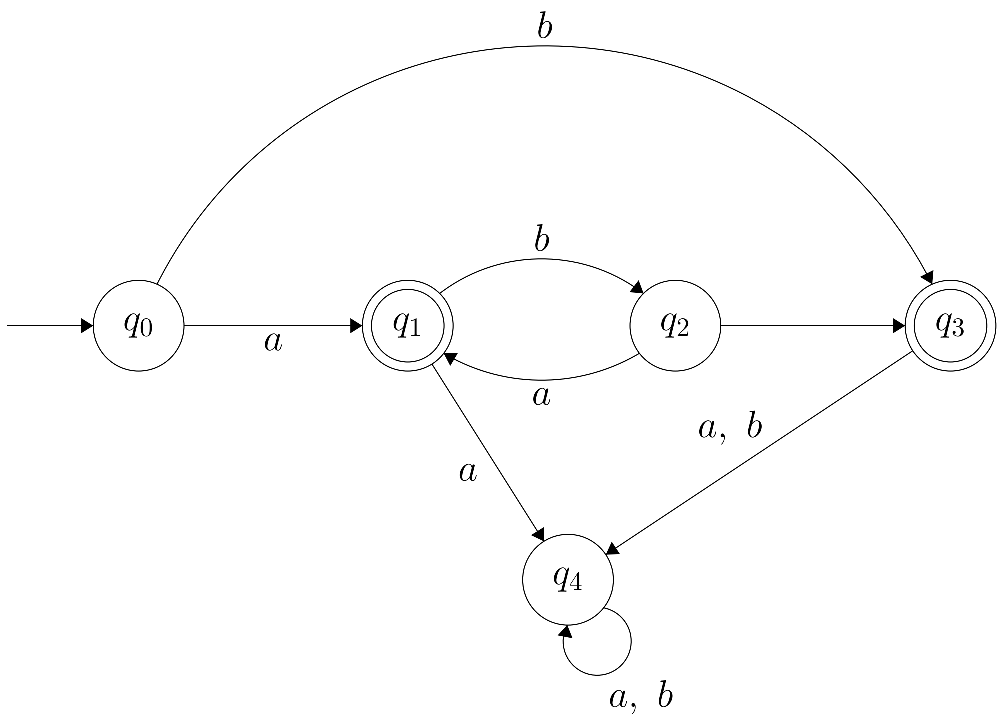
2. Построить минимальный ДКА для языка $\overline{L}$.

Под минимальным ДКА понимается полный ДКА, распознающий L, с минимально возможным числом состояний.

Решение

2.

Для того чтобы построить ДКА , сначала сделаем его всюду определенным :



Разобьем состояния на группы :

F = q_1, q_3

Q - F $= q_0, q_2$

Отдельная группа - Дьявольская Вершина q_4 , назовем группу из нее Tr $= q_4$

Далее , согласно алгоритму , разобьем начальные группы на группы , одинаковые переходы из элементов которых ведут в элементы одинаковых групп

(q_1, a) $\in$ Tr

$(q_3, a) \in$ Tr

(q_1, b) $\in$ Q - F

(q_3, b) $\in$ Tr

Так как элементы q1 и q3 по b переходят в элементы разных групп , то мы их делаем элементами разных групп . Пусть F_1 = q1 ; F_2 = q3 .

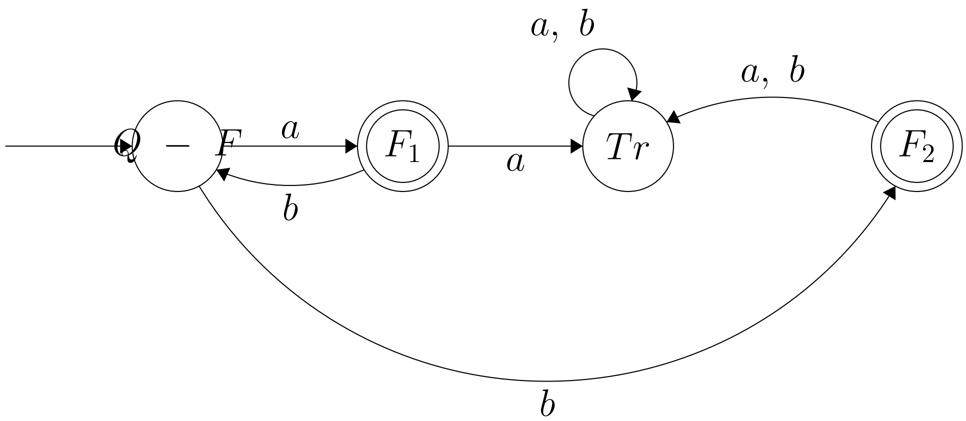
(q0, a) $\in$ F1

(q2, a) $\in$ F1

(q0, b) $\in$ F2

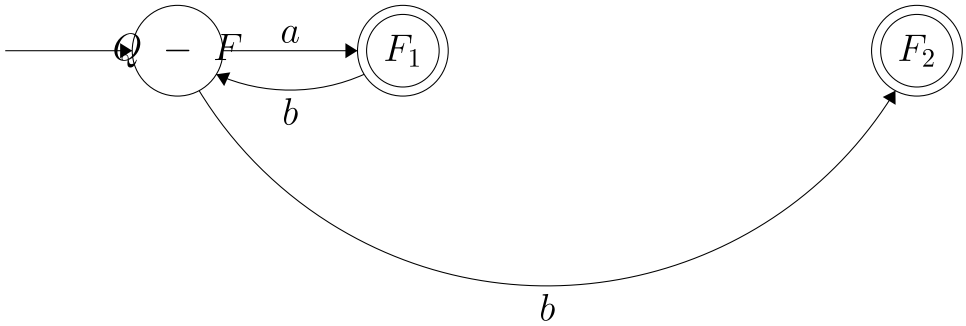
(q2, b) $\in$ F2

Значит они остаются в одной группе . На основании этого строим требуемый ДКА :



1.

ДКА с минимальным числом состояний получается из минимального удалением состояния Tr , которое нужно исключительно для всюдуопределенности . Тогда ДКА с минимальным числом состояний :


$Q - F$
a
F_1
b
F_2
b