Домашнее задание 3 , Павливского Сергея , 873

1. Постройте полиномиальную сводимость языка 3-ВЫПОЛНИМОСТЬ (3-SAT) (выполнимые КНФ, в каждом конъюнкте не более 3 литералов) к языку РОВНО-3-ВЫПОЛНИМОСТЬ (выполнимые КНФ, в каждом конъюнкте в точности 3 литерала.

Решение :

Рассмотрим каждую исходную скобку . Упростим ее (свернем повторяющиеся в один , уберем тождества вида $x \vee \overline{x}$. Дальше рассмотрим каждую упрощенную скобку : если в ней 3 различных литерала , то добавляем ее в таком же виде в новую КНФ ; случай что скобка свернется в тождественную не рассматриваем ; если 1 различный литерал a (или отрицание чего-то , не имеет значения) , то добавим $(a \vee \overline{b} \vee \overline{c}) \wedge (a \vee b \vee \overline{c}) \wedge (a \vee \overline{b} \vee c) \wedge (a \vee b \vee c)$ в новую КНФ ; если есть 2 различных литерала a и b (ан-о предыдущему замечанию) , $(a \vee b \vee \overline{c}) \wedge (a \vee b \vee c)$. Полученная КНФ строится линейно от длины записи исходной КНФ (в один проход находим скобки , фиксируя элементы от открывающей скобки до закрывающий , делаем не более константы упрощений , и не более константы добавлений с преобразованиями) , то есть сводимость полиномиальная . Новая КНФ $\in$ РОФНО-3-ВЫПОЛНИМОСТЬ , так как по построению в ее каждой скобке повторяющихся литералов нет , и литералов ровно 3. Докажем корректность сводимости :

В одну сторону - если исходная КНФ была выполнима на некотором наборе , то и новая КНФ выполнима на том же наборе , так как содержит все те же составляющие в скобках , что и исходная формула, в которой они дают 1 , а значит дают 1 и в скобках новой КНФ , то есть обращают каждую скобку в единицу , то есть выполняют КНФ.

В другую сторону - если новая КНФ выполняется на некотором наборе , то в каждой скобке литералы из исходной КНФ обращаются в 1 на данном наборе (так как для выполнения КНФ все скобки должны обращаться в 1 по построению , а для каждой комбинации литералов присутствовавших в исходных скобках перебираются все возможные комбинации дополняющих литералов , то в одной из скобок комбинация дополняющих литералов обращается в 0 , то есть единица может браться только из литералов прежней скобки) . Но тогда на данном наборе выполняется и исходная КНФ .

Что и требовалось

2. Постройте сводимость языка ВЫПОЛНИМОСТЬ (SAT) к языку ПРОТЫКАЮЩЕЕ МНОЖЕСТВО. Перед этим проделайте пункты (i) и (ii) задачи 34 для иллюстрации и понимания происходящего.

Решение :

(i)

Построим семейство $A_\psi = \{\{x_1, \overline{x_1}\}, \{x_2, \overline{x_2}\}, \{x_3, \overline{x_3}\}, \{x_1, x_2, \overline{x_3}\}\}$. Тогда протыкающим множеством будет , например , $\{x_1, x_2, x_3\}$.

(ii)

Построим семейство $A_\varkappa = \{\{x_1, \overline{x_1}\}, \{x_2, \overline{x_2}\}, \{x_1, x_2\}, \{x_1, \overline{x_2}\}, \{\overline{x_1}\}\}$. Для пересечения с последним подмножеством в протыкающем множестве должен содержаться элемент $\overline{x_1}$. А так как пересечение всех остальных подмножеств пусто , то нужно еще как минимум 2 элемента в протыкающем множестве для пересечения со всеми множествами .

Основная задача :

Теперь покажем почему описанная сводимость работает . Если в исходной КНФ существует разрешающий набор и в ней k переменных, то в построенном семействе существует протыкающее множество мощности k (если переменная входит в разрешающий набор со значением 1 , то она входит в разрешающий набор без отрицания , иначе с отрицанием . Такой набор пересечет все подмножества , т.к. все подмножества вида $\{x_i, \overline{x_i}\}$ автоматически пересекаются из-за того что в протыкающем множестве есть каждый литерал lit с отрицанием или без , а остальные подмножества пересекутся , т.к. из-за выполнимости КНФ какой-то из литералов в каждом дизъюнкте обращается в 1 , а т.к. в протыкающем множестве все литералы обращаются в 1 и все переменные задействованы , то это литерал lit найдется в протыкающем множестве .

В другую сторону :

Если существует протыкающее множество построенного семейства длины количество переменных , то каждая переменная входит в него в единственном экземпляре , так как подмножества $\{x_i, \overline{x_i}\}$ не пересекаются , а их ровно количество переменных . Тогда если взять в качестве разрешающего набора набор значений переменных , на котором все литералы протыкающего множества обращаются в 1 , то каждый дизъюнкт будет обращен в 1 хотя бы каким-либо из литералов , и вся исходная КНФ будет выполнима .

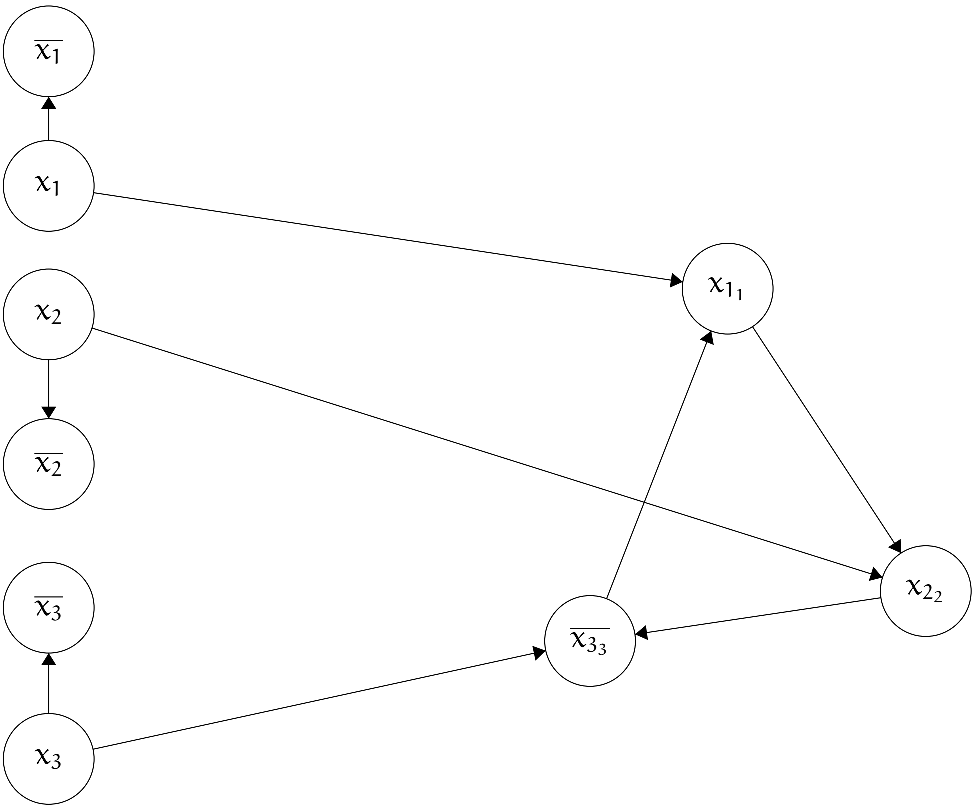
Что и требовалось

3. Постройте сводимость языка 3-ВЫПОЛНИМОСТЬ к языку ВЕРШИННОЕ ПОКРЫТИЕ (VERTEX-COVER). Перед этим проделайте пункты (i) и (ii) задачи 35 для иллюстрации и понимания происходящего.

Решение :

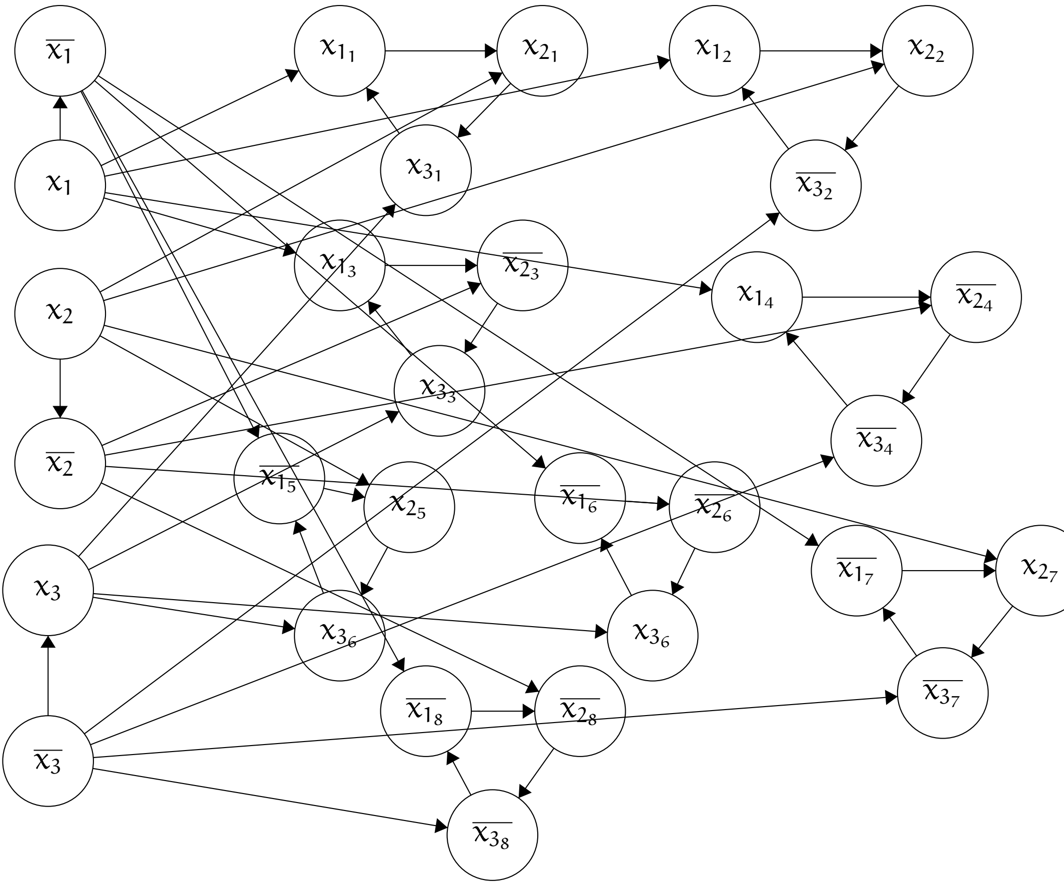
Стрелочки не надо учитывать , они автоматически ставятся построителем графа .

(i)



Тогда требуемым покрытием будет $\{x_1, x_2, x_3, x_{1_1}, x_{2_2}\}$.

(ii)



Заметим (хоть это и не просто на подобном рисунке) , что каждая вершина из вершин в парах соединена хотя бы с одной вершиной треугольника , и каждая вершина треугольника соединена с вершиной из пары . Тогда из четности нам не хватит $n + 2m$ вершин в покрытии .

Основная задача :

Тогда для покрытия ребер каждого треугольника нужно как минимум по две вершины из каждого треугольника , для покрытия ребра каждой пары нужно как мнимум по одной вершине из каждой пары 3-ВЫПОЛНИМОСТЬ сводится к РОВНО-3-ВЫПОЛНИМОСТЬ, как в первой задаче . Тогда достаточно свести РОВНО-3-ВЫПОЛНИМОС к ВЕРШИННОЕ ПОКРЫТИЕ . Данная сводимость обсуждалась на лекции :

Для каждой переменной строятся по две соединенные между собой вершины x и $\overline{x}$. Далее для каждого дизъюнкта строятся по 3 соединенные между собой (в треугольники) вершины , состоящие из литералов в данном дизъюнкте . Далее соединяются одноименные вершины между парами литералов и построенных треугольников , треугольники между не соединяются .

Тогда если в исходной КНФ был разрешающий набор , то берем из парных вершин ту , литерал которой на разрешающем наборе обращается в 1 . Каждый треугольник соединен хотя бы одним ребром с одной из выбранных парных вершин . Тогда также в покрытие добавим те любые 2 вершины , у которых третья вершина соединена с выбранной парной вершиной . Любой треугольник очевидно покрыт, ребра в парных вершинах тоже покрыты , ребра из не выбранных парных вершин могут вести только в выбранные вершины треугольника по построению , значит все покрыто .

В другую сторону : если в новом графе есть вершинное покрытие , то оно хотя мощности $n+2m$ (для каждой пары хотя бы одна вершина , для каждого треугольника хотя бы две вершины) , а оно ровно $n+2m$. Тогда оно может быть только таким , то есть в каждой паре у нас выбрано по одному литералу , переменные не повторяются , и если взять выполняющий набор , на котором эти литералы обращаются в 1 , то , так как каждый треугольник соответствует некоторому дизъюнкту , и множество треугольников покрывает множество дизъюнктов , и в каждом треугольнике есть хотя бы по одному литералу обращающемуся в 1 , то и все дизъюнкты обращаются в 1 , т.е. набор выполняется .

Что и требовалось

4. Постройте сводимость языка РОВНО-3-ВЫПОЛНИМОСТЬ к языку КЛИКА (CLIQUE). Перед этим проделайте пункты (i) и (ii) задачи 36 для иллюстрации и понимания происходящего.

Решение :

(i)

Так как граф для $\widetilde{G_\psi}$ состоит из трех не соединенных между собой вершин , а требуется клика размера 1 , то просто берем любую вершину (например , клику x_1) .

(ii)

В клике каждая вершина соединена с каждой . В графе $\widetilde{G_\varkappa}$ 8 троек вершин , соответствующих дизъюнктам , то по принципу Дирихле в Клику размера 8 будет включена хотя бы одна пара вершин x_i и $\overline{x_i}$, что противоречит построению .

Основная задача :

Если исходная КНФ выполнима , то для каждого дизъюнкта существует литерал принадлежащий ему и обращающийся в 1 на выполняющем наборе . Тогда из каждой дизъюнктной тройки вершин в графе возьмем по вершине соответствующей , обращающему соответствующий дизъюнкт в 1 , литералу . Это будет требуемой кликой, так как по определению разрешающего набора там не может быть пары x_i и $\overline{x_i}$, а все остальные вершины графа соединены , то есть и все выбранные вершины будут соединены , т.е. это будет клика размера количество дизъюнктов .

В обратную сторону , если в построенном графе существует клика размера количества дизъюнктов , то все эти вершины в разных дизъюнктах и среди них нет пары x_i и $\overline{x_i}$, по построению графа. Тогда каждую переменную возьмем со значением , при котором дизъюнкт содержащий данную переменную в клике обращается в 1. Противоречий не будет , так как никакая переменная не входит в набор одновременно со своим отрицанием . Тогда этот набор будет выполняющим , т.к. на нем в каждом дизъюнкте найдется литерал обращающийся в 1 , значит и каждый дизъюнкт обращается в 1 , т.е. КНФ выполняется .

Что и требовалось

5. Постройте сводимость языка 3-ВЫПОЛНИМОСТЬ к языку max-2-ВЫПОЛНИМОСТЬ (max-2-SAT). Перед этим проделайте пункты (i) и (ii) задачи 37 для иллюстрации и понимания происходящего.

Решение :

max-2-SAT - 2-КНФ (КНФ, в каждый дизъюнкт которой входит не более двух литералов) и число k такое, что существует набор значений, при котором истинны хотя бы k дизъюнктов.

(i)

$\psi(x_1, x_2, x_3) = (x_1 \vee x_2 \vee \overline{x_3})$

Формула и так РОВНО-3-КНФ , так что просто строим $\tilde{\psi} = x_1 \wedge x_2 \wedge \overline{x_3} \wedge y \wedge (\overline{x_1} \vee x_3) \wedge (\overline{x_1} \vee \overline{x_2}) \wedge (\overline{x_2} \vee x_3) \wedge (x_1 \vee \overline{y}) \wedge (x_2 \vee \overline{y}) \wedge (\overline{x_3} \vee \overline{y})$. Если построить таблицу истинности для дизъюнктов от переменных x_1, x_2, x_3, y (которую лень загонять в тех) , то можно узреть что $q = 7$. Тогда , т.к. $k = 1$, то $kq = 7$.

(ii)

Например , на наборе (1, 1, 0, 1) (видно из таблицы истинности) .

Основная задача :

Из таблицы истинности видно , что для любого набора переменных x_1, x_2, x_3 мы можем выбрать значение для y такое , что выполнится ровно 7 дизъюнктов .

Тогда если исходная РОВНО-3-КНФ из n дизъюнктов выполнима , то выбрав для каждого дизъюнкта свой y получим $7n$ выполненных дизъюнктов в новой КНФ .

Если исходная КНФ не выполнима . Тогда какой то из исходных дизъюнктов не выполняется , значит в соответствующей ему 2-КНФ не более 6 выполняющихся дизъюнктов , т.е. во всей преобразованной 3-КНФ не более $7n - 1$ 2-дизъюнктов .

Что и требовалось

6. Покажите, что если $3 - \mathrm{COLOR}$ лежит в $\mathcal{P}$, то за полиномиальное время можно не только определить, допускает ли граф раскраску, но и найти саму эту раскраску (если она есть). Обратите внимание, что на вход проверяющей 3-раскрашиваемость процедуры нельзя подавать частично окрашенные графы, спрашивая, можно ли дораскрасить оставшиеся вершины до полной правильной раскраски.

Решение :

Задача построения раскраски графа в 3 цвета сводима по Тьюрингу к задаче распознавания окрашиваемости графа в 3 цвета , т.е. к 3-COLOUR (в качестве оракула берем МТ распознающую 3-COLOUR , обходим все вершины в некотором порядке , на каждой итерации подаем оракулу граф с рассматриваемой вершиной окрашенной в один из 3 цветов , в одном из этих трех случаев оракул гарантированно выдаст ответ : "Да !"на вопрос окрашиваемости поданного графа в 3 цвета , на этом можно и остановится , так как для выбранного цвета для выбранной вершины будет существовать раскраска остальных вершин , которые найдем аналогичным образом . Тогда если 3-COLOUR $\in$ P , то вычислений не более чем $3 \cdot poly(|w|) = poly(|w|)$, т.е. и граф раскрашивается за полином .

Что и требовалось

7. Покажите, что построенная при сводимости CIRCUIT-SAT к 3-CNF формула равновыполнима с исходной.

Решение :

Обозначим результат каждого узла с логической операцией $(\vee, \wedge, \neg)$ за соответствующий y_i . Запишем систему уравнений вида $y_j \equiv ...$ (в правой части эквивалентности логическое выражение не более чем от двух переменных из набора $\{\{x_i\} \cup \{y_k\}\}$. Так как вычисления в булевой схеме нисходящие , то y_i зависит только от входного набора и ранее вычисленных y_j . Все эти равенства занесем в различные скобки , которые запихнем в конъюнкцию , в конце еще сделаем отдельно конъюнкцию с y_n (выход схемы) , раскроем эквиваленцию по логическому закону и получим 3-CNF . Запись системы уравнений - полином , переписывание в конъюнкцию скобок с эквивалентностями- полином , преобразование внутри каждого дизънкта эквивалентности - полином $\rightarrow$ сводимость полиномиальная .

Из эквивалентности преобразования эквивалентности нам достаточно доказать равновыполнимость исходной схемы и конъюнкции скобок с эквивалентностями .

Из построения , корректность в одну сторону очевидна (если выполнима схема) : и вправду , логическое выражение , за которое обозначили y_i эквивалентно самому же логическому выражению , т.е. все скобки дают 1 ; т.к. схема выполнима , то и $y_n = 1 \rightarrow$ вся конъюнкция дает 1 .

Если выполнима формула , то $y_n = 1$, значит на выходе схема выдает 1 , т.е. она выполнима .

Что и требовалось

8. Постройте NP-сертификат простоты числа $p = 3911$, $g = 13$. Простыми в рекурсивном построении считаются только числа 2, 3, 5.

Решение :

Да пошел этот ОВАИТК лесом