# Gaya Math

SoG

Juillet 2025

# Table des matières

# exercise[59]

**Énoncé**

Soit $n$ un entier naturel tel que $n \geq 2$.
Soit $E$ l'espace vectoriel des polynômes à coefficients dans $\mathbb{K}$ ($\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{K} = \mathbb{C}$) de degré inférieur ou égal à $n$.
On pose : $\forall P \in E,\ f(P) = P - P'$.

1. Démontrer que $f$ est bijectif de deux manières :
   (a) sans utiliser de matrice de $f$,
   (b) en utilisant une matrice de $f$.
2. Soit $Q \in E$. Trouver $P$ tel que $f(P) = Q$.
   *Indication :* si $P \in E$, quel est le polynôme $P^{(n+1)}$ ?
3. $f$ est-il diagonalisable ?

**Solution**

1. $f(E) \subset E$ :
   $\forall P \in E \setminus \{0\}$, $\deg(P - P') = ?$

   (a) $\ker f$.
   Si $P \in \ker f$ alors $P - P' = 0$. $\deg(P - P') = ?$
   (b) La matrice de $f$ dans $e$ est :

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & & 0 \\ & 1 & \ddots & \\ & & \ddots & -n \\ 0 & & & 1 \end{pmatrix}$$

2. Soit $P$ tel que $f(P) = Q$.
   écrire $P = Q + P'$ et calculer $P^{(n+1)}$
3. Quelles sont les valeurs propres de $f$ ? Qu'impliquerait la diagonalisabilité ?

## 0.1 exercise[60]

**Énoncé**

Soit la matrice $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}$ et $f$ l'endomorphisme de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ défini par : $f(M) = AM$.

1. Déterminer une base de $\ker f$.
2. $f$ est-il surjectif ?

**Énoncé (suite)**

3. Déterminer une base de $\operatorname{Im} f$.
4. A-t-on $\mathcal{M}_2(\mathbb{R}) = \ker f \oplus \operatorname{Im} f$ ?

**Solution**

1. Posons $M = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$.
   $f(M) = 0 \Rightarrow M = \begin{pmatrix} -2c & -2d \\ c & d \end{pmatrix}$
2. $\ker f \neq \{0\} \Rightarrow f$ non injectif.
   $f$ est un endomorphisme d'un espace de dimension finie donc $f$ non surjectif.
3. la formule du rang, comment sont les colonnes de la matrice ?
4. Décomposer $M$ dans la base de $\ker f$ et de Im

# Exercice 65

**Énoncé**

Soit $u$ un endomorphisme d'un espace vectoriel $E$ sur le corps $\mathbb{K}$ ($\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{K} = \mathbb{C}$).
On note $\mathbb{K}[X]$ l'ensemble des polynômes à coefficients dans $\mathbb{K}$.

1. Démontrer que : $\forall (P, Q) \in \mathbb{K}[X] \times \mathbb{K}[X],\ (PQ)(u) = P(u) \circ Q(u)$.
2. (a) Démontrer que : $\forall (P, Q) \in \mathbb{K}[X] \times \mathbb{K}[X],\ P(u) \circ Q(u) = Q(u) \circ P(u)$.
   (b) Démontrer que, pour tout $(P, Q) \in \mathbb{K}[X] \times \mathbb{K}[X]$ :
   $(P$ polynôme annulateur de $u) \Rightarrow (PQ$ polynôme annulateur de $u)$
3. Soit $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 2 \end{pmatrix}$.
   Écrire le polynôme caractéristique de $A$, puis en déduire que le polynôme $R = X^4 + 2X^3 + X^2 - 4X$ est un polynôme annulateur de $A$.

**Solution**

$$P_A(X) = \det \begin{pmatrix} X-1 & 1 \\ -2 & X-2 \end{pmatrix} = (X-1)(X-2) + 2 = X^2 - 3X + 4.$$

# Exercice 67

**Énoncé**

Soit la matrice

$$M = \begin{pmatrix} 0 & a & c \\ b & 0 & c \\ b & -a & 0 \end{pmatrix}$$

où $a, b, c$ sont des réels.
$M$ est-elle diagonalisable dans $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ ? $M$ est-elle diagonalisable dans $\mathcal{M}_3(\mathbb{C})$ ?

**Solution**

$$\chi_M(\lambda) = \lambda \left(\lambda^2 + ca - ba - bc\right)$$

— **Premier cas :** $ca - ba - bc < 0$.
— **Deuxième cas :** $ca - ba - bc = 0$.
— **Troisième cas :** $ca - ba - bc > 0$.

# Exercice 68

**Énoncé**

Soit la matrice

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}.$$

1. Montrer que $A$ est diagonalisable de quatre manières :
   (a) sans calcul,
   (b) en calculant directement le déterminant $\det(\lambda I_3 - A)$ et en déterminant les sous-espaces propres,
   (c) en utilisant le rang de la matrice,
   (d) en calculant $A^2$.
2. On note $f$ l'endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ dont la matrice dans la base canonique est $A$. Trouver une base orthonormée dans laquelle la matrice de $f$ est diagonale.

**Solution**

1. (a)

$$\chi_A(\lambda) = \det(\lambda I_3 - A) = \lambda^2(\lambda - 3).$$

**Solution (suite)**

$$E_3(A) = \text{Vect}\left(\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}\right), \quad E_0(A) = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : x - y + z = 0\}.$$

(b) $\dim E_0(A) = ?$.

(c) Calcul de $A^2$ :

$$A^2 = 3A,$$

2. Une base orthonormée de $E_3(f)$ est

$$u = \frac{1}{\sqrt{3}}(1, -1, 1).$$

Deux vecteurs orthogonaux de $E_0(f)$ sont

$$(1, 1, 0), \quad (1, -1, -2).$$

En les normalisant, on pose

$$v = \frac{1}{\sqrt{2}}(1, 1, 0), \quad w = \frac{1}{\sqrt{6}}(1, -1, -2).$$

# Exercice 69

**Énoncé**

On considère la matrice

$$A = \begin{pmatrix} 0 & a & 1 \\ a & 0 & 1 \\ a & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

où $a$ est un réel.

1. Déterminer le rang de $A$.
2. Pour quelles valeurs de $a$, la matrice $A$ est-elle diagonalisable ?

**Solution**

1. Calcul du rang de $A$.

$$\det A = a(a+1).$$

**Premier cas :** $a \neq 0$ et $a \neq -1$
Alors $\det A \neq 0$ donc $A$ est inversible.
Donc $\text{rg}(A) = 3$.

**Solution (suite)**

**Deuxième cas :** $a = 0$
$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$
On remarque que les deux premières lignes sont colinéaires, donc $\mathrm{rg}(A) = 2$.
**Troisième cas :** $a = -1$
$$A = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$
Les deux premières colonnes de $A$ sont non colinéaires, donc $\mathrm{rg}(A) \geq 2$.
En calculant le déterminant : $\det A = a(a+1) = (-1)(0) = 0$, donc $A$ n'est pas inversible.
Donc $\mathrm{rg}(A) = 2$.

2. Étude de la diagonalisabilité de $A$

On note $\chi_A(X)$ le polynôme caractéristique de $A$. On a :
$$\chi_A(X) = (X - a - 1)(X + a)(X + 1).$$
Les racines sont donc $a + 1$, $-a$, et $-1$.
On étudie les cas où ces racines sont égales ou distinctes :
- **Premier cas :** $a \neq 1$, $a \neq -2$ et $a \neq -\frac{1}{2}$.
  Les trois racines sont distinctes, donc $A$ possède trois valeurs propres distinctes.
  $\Rightarrow$ $A$ est diagonalisable.
- **Deuxième cas :** $a = 1$.
  Alors $\chi_A(X) = (X - 2)(X + 1)^2$.
  $A$ est diagonalisable si et seulement si $\dim E_{-1} = 2$, i.e. $\mathrm{rg}(A + I_3) = 1$.
  $$A + I_3 = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix} \Rightarrow \mathrm{rg}(A + I_3) = 1.$$
  Donc $\dim E_{-1} = 2$, $A$ est diagonalisable.
- **Troisième cas :** $a = -2$.
  Alors $\chi_A(X) = (X + 1)^2(X - 2)$.
  $$A + I_3 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 2 & 1 & -1 \\ 2 & 1 & -1 \end{pmatrix} \Rightarrow \mathrm{rg}(A + I_3) = 2.$$
  Donc $\dim E_{-1} = 1 < 2$.
  Or $-1$ est de multiplicité 2 dans $\chi_A$.
  $\Rightarrow$ $A$ n'est pas diagonalisable.

**Solution (suite)**

— **Quatrième cas :** $a = -\frac{1}{2}$.
Alors $\chi_A(X) = \left(X + \frac{1}{2}\right)^2 (X+1)$.

$$A + \frac{1}{2} I_3 = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & -1 \\ -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & -1 \\ -\frac{1}{2} & 1 & \frac{1}{2} \end{pmatrix} \Rightarrow \operatorname{rg}\left(A + \frac{1}{2} I_3\right) = 2.$$

Donc $\dim E_{-\frac{1}{2}} = 1 < 2$, et $-\frac{1}{2}$ est de multiplicité 2 dans $\chi_A$.
$\Rightarrow A$ n'est pas diagonalisable.

# Exercice 70

**Énoncé**

Soit

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_3(\mathbb{C}).$$

1. Déterminer les valeurs propres et les vecteurs propres de $A$. $A$ est-elle diagonalisable ?
2. Soit $(a, b, c) \in \mathbb{C}^3$ et $B = aI_3 + bA + cA^2$, où $I_3$ désigne la matrice identité d'ordre 3.
   Déduire de la question 1. les éléments propres de $B$.

**Solution**

1.
$$\chi_A(X) = X^3 - 1 \quad \Rightarrow \quad \operatorname{Sp}(A) = \{1, j, j^2\},$$

$$E_1(A) = \ker(A - I_3) = \operatorname{Vect}\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}\right),$$

$$E_j(A) = \ker(A - jI_3) = \operatorname{Vect}\left(\begin{pmatrix} 1 \\ j^2 \\ j \end{pmatrix}\right),$$

$$E_{j^2}(A) = \ker(A - j^2 I_3) = \operatorname{Vect}\left(\begin{pmatrix} 1 \\ j \\ j^2 \end{pmatrix}\right).$$

2.
$$P = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & j^2 & j \\ 1 & j & j^2 \end{pmatrix}, \quad D = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & j & 0 \\ 0 & 0 & j^2 \end{pmatrix}.$$

**Solution (suite)**

On a alors :

$$A = PDP^{-1} \quad \Rightarrow \quad B = aI_3 + bA + cA^2 = P(aI_3 + bD + cD^2)P^{-1}.$$
$$= P \cdot \mathrm{diag}(Q(1), Q(j), Q(j^2)) \cdot P^{-1}.$$

**Premier cas :** les valeurs $Q(1), Q(j), Q(j^2)$ sont toutes distinctes.

**Deuxième cas :** deux valeurs propres égales parmi les trois.

**Troisième cas :** $Q(1) = Q(j) = Q(j^2)$.

# Exercice 71

**Énoncé**

Soit $P$ le plan d'équation $x + y + z = 0$ et $D$ la droite d'équation $x = \frac{y}{2} = \frac{z}{3}$.

1. Vérifier que $\mathbb{R}^3 = P \oplus D$.
2. Soit $p$ la projection vectorielle de $\mathbb{R}^3$ sur $P$ parallèlement à $D$.
   Soit $u = (x, y, z) \in \mathbb{R}^3$.
   Déterminer $p(u)$ et donner la matrice de $p$ dans la base canonique de $\mathbb{R}^3$.
3. Déterminer une base de $\mathbb{R}^3$ dans laquelle la matrice de $p$ est diagonale.

**Solution**

1. $1 + 2 + 3 \neq 0$.
   $\dim D + \dim P = 1 + 2 = 3 = \dim \mathbb{R}^3$.
2. Par définition $u - p(u) \in D$.
   Donc il existe $\alpha \in \mathbb{R}$ tel que :
   $$u - p(u) = \alpha(1, 2, 3) \Rightarrow p(u) = (x - \alpha,\ y - 2\alpha,\ z - 3\alpha).6(x + y + z). \quad (1)$$
   $$p(u) = \frac{1}{6}(5x - y - z,\ -2x + 4y - 2z,\ -3x - 3y + 3z).$$
   $$A = \frac{1}{6}\begin{pmatrix} 5 & -1 & -1 \\ -2 & 4 & -2 \\ -3 & -3 & 3 \end{pmatrix}.$$
3. :
   $$e'_1 = (1, 2, 3), \quad e'_2 = (1, -1, 0), \quad e'_3 = (0, 1, -1).$$

# Exercice 72

**Énoncé**

Soit $n$ un entier naturel non nul.
Soit $f$ un endomorphisme d'un espace vectoriel $E$ de dimension $n$, et soit $e = (e_1, \dots, e_n)$ une base de $E$.
On suppose que $f(e_1) = f(e_2) = \cdots = f(e_n) = v$, où $v$ est un vecteur donné de $E$.

1. Donner le rang de $f$.
2. $f$ est-il diagonalisable ? (Discuter en fonction du vecteur $v$.)

**Solution**

1. 
2. $<$ Si $f$ non nul $\chi_f(X) = X^{n-1}(X - \lambda)$ avec $\lambda \neq 0$. **Premier sous-cas :** $\lambda \neq 0$
   **Deuxième sous-cas :** $\lambda = 0$

# Exercice 73 algèbre

**Énoncé**

On pose $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 4 & -1 \end{pmatrix}$.

1. Déterminer les valeurs propres et les vecteurs propres de $A$.
2. Déterminer toutes les matrices qui commutent avec la matrice $\begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 0 & -2 \end{pmatrix}$.
   En déduire que l'ensemble des matrices qui commutent avec $A$ est $\mathrm{Vect}(I_2, A)$.

**Solution**

1. $\chi_A = (X-3)(X+2)$, donc $\mathrm{Sp}(A) = \{-2, 3\}$.
   $AX = 3X$ et $AX = -2X \Rightarrow$
   $$E_3 = \mathrm{Vect}\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}\right) \quad \text{et} \quad E_{-2} = \mathrm{Vect}\left(\begin{pmatrix} 1 \\ -4 \end{pmatrix}\right).$$
2. Soit $N = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$.
   $D = \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 0 & -2 \end{pmatrix}$ $ND = DN \Rightarrow$

**Solution (suite)**

$$\begin{cases} -2b = 3b \\ 3c = -2c \end{cases}$$

$A = PDP^{-1}$

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -4 \end{pmatrix}, \quad D = \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 0 & -2 \end{pmatrix}.$$

$$AM = MA \iff P^{-1}MP = \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & d \end{pmatrix} \iff M = P\begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & d \end{pmatrix}P^{-1}.$$

# Exercice 74 algèbre

**Énoncé**

1. On considère la matrice $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.
   (a) Justifier sans calcul que $A$ est diagonalisable.
   (b) Déterminer les valeurs propres de $A$ puis une base de vecteurs propres associés.
2. On considère le système différentiel :

$$\begin{cases} x' = x + 2z \\ y' = y \\ z' = 2x + z \end{cases} \qquad x, y, z \text{ désignant trois fonctions de la variable } t,$$

   dérivables sur $\mathbb{R}$.
   En utilisant la question 1. et en le justifiant, résoudre ce système.

**Solution**

1.

$$\chi_A(\lambda) = (\lambda - 1)(\lambda + 1)(\lambda - 3)$$

$$E_1 = \mathrm{Vect}\left(\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}\right), \quad E_{-1} = \mathrm{Vect}\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}\right), \quad E_3 = \mathrm{Vect}\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}\right)$$

On pose donc la base propre :

$$e_1' = (0, 1, 0), \quad e_2' = (1, 0, -1), \quad e_3' = (1, 0, 1)$$

La base $e' = (e_1', e_2', e_3')$ est une base de vecteurs propres de $A$.

**Solution (suite)**

2.
$$X'(t) = AX(t) \iff P^{-1}X' = DP^{-1}X$$

On pose :

$$X_1(t) = \begin{pmatrix} x_1(t) \\ y_1(t) \\ z_1(t) \end{pmatrix} = P^{-1}X(t)$$

On résout :

$$\begin{cases} x_1(t) = ae^{t} \\ y_1(t) = be^{-t} \\ z_1(t) = ce^{3t} \end{cases} \qquad \text{avec } (a,b,c) \in \mathbb{R}^3$$

On remonte à $X(t) = PX_1(t)$, ce qui donne :

$$\boxed{\begin{cases} x(t) = be^{-t} + ce^{3t} \\ y(t) = ae^{t} \\ z(t) = -be^{-t} + ce^{3t} \end{cases} \qquad \text{avec } (a,b,c) \in \mathbb{R}^3}$$

# Exercice 75 algèbre

**Énoncé**

On considère la matrice $A = \begin{pmatrix} -1 & -4 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$.

1. Démontrer que $A$ n'est pas diagonalisable.
2. On note $f$ l'endomorphisme de $\mathbb{R}^2$ canoniquement associé à $A$.
   Trouver une base $(v_1, v_2)$ de $\mathbb{R}^2$ dans laquelle la matrice de $f$ est de la forme
   $$\begin{pmatrix} a & b \\ 0 & c \end{pmatrix}.$$
   On donnera explicitement les valeurs de $a, b, c$.
3. En déduire la résolution du système différentiel
   $$\begin{cases} x' = -x - 4y \\ y' = x + 3y \end{cases}$$

**Solution**

1.
$$\chi_A(X) = (X-1)^2 \Rightarrow \mathrm{Sp}A = \{1\}$$

2.
$$E_1(A) = \mathrm{Vect}\left(\begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix}\right)$$

On choisit :

$$v_1 = (2, -1), \quad v_2 = (-1, 0)$$

la matrice de $f$

$$T = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

et la matrice de passage est :

$$P = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}, \quad A = PTP^{-1}$$

3.
$$X' = AX \iff Y' = TY$$

ou :

$$\begin{cases} a'(t) = a(t) + b(t) \\ b'(t) = b(t) \end{cases}$$

De solution générale :

$$\begin{cases} b(t) = \mu e^t \\ a(t) = \lambda e^t + \mu t e^t \end{cases} \quad \text{avec } (\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2$$

$X = PY$ donne :

$$\begin{cases} x(t) = ((2\lambda - \mu) + 2\mu t)e^t \\ y(t) = (-\lambda + \mu t)e^t \end{cases} \quad \text{avec } (\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2$$