4장 연립상미분방정식

$$y'1 = a11y1 + a12y2, \qquad y'1 = -5y1 + 2y2$$

$$y'2 = a21y1 + a22y2, \qquad y'2 = 13y1 + \square y2$$

2 x 2 Matrix

$\mathbf{A} = [a_{jk}] = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix},$ for example, $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} -5 & \\ 13 & \frac{1}{2} \end{bmatrix}$

행벡터

$$\mathbf{v} = [v_1 \ \cdots \ v_n], \quad \text{thus if } n = 2, \ \mathbf{v} = [v_1 \ v_2]$$

열벡터

$$\mathbf{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}, \quad \text{thus if } n = 2, \ \mathbf{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}$$

상등

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix} \text{ and } \mathbf{B} = \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{bmatrix}$$

$\mathbf{A} = \mathbf{B}$

$a11 = b11, \quad a12 = b12$

$a21 = b21, \quad a22 = b22.$

덧셈

$$\mathbf{A} + \mathbf{B} = \begin{bmatrix} a_{11} + b_{11} & a_{12} + b_{12} \\ a_{21} + b_{21} & a_{22} + b_{22} \end{bmatrix}, \quad \mathbf{v} + \mathbf{x} = \begin{bmatrix} v_1 + x_1 \\ v_2 + x_2 \end{bmatrix}$$

곱셈

$$c_{jk} = \sum_{m=1}^{n} a_{jm} \quad {}_{m}$$

$$\begin{bmatrix} 9 & \\ -2 & \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 3 & 1 - \\ 0 & 2 \end{bmatrix} 4 = \begin{bmatrix} 9\cdot 1 + 3\cdot 2\cdot & \cdot - 9 + (4\cdot)3 \\ -5\cdot 2 + 1\cdot 0\ 2 & - \cdot(-2) + (4\cdot)0 \end{bmatrix},$$

$$= \begin{bmatrix} 15 & -21 \\ -2 & \end{bmatrix} \cdot 8$$

AB ≠ BA

미분

$$\mathbf{y}(t) = \begin{bmatrix} y_1(t) \\ y_2(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} e^{-2t} \\ \sin t \end{bmatrix} \quad \text{then} \quad \mathbf{y}'(t) = \begin{bmatrix} y_1'(t) \\ y_2'(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2e^{-2t} \\ \cos t \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{y}' = \begin{bmatrix} y_1' \\ y_2' \end{bmatrix} = \mathbf{A}\mathbf{y} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \end{bmatrix}, \quad \text{e.g.,} \quad \mathbf{y}' = \begin{bmatrix} -5 & 2 \\ 13 & \frac{1}{2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \end{bmatrix}$$

전치: 열을 행으로 행을 열로

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} a_1 & 1 \\ a_2 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -5 & & \\ {}_1 a & & \\ 1_2\, a & \frac{1}{2} 3 & \end{bmatrix}_{2\ 2} \quad {}^{2}_{1\ 1}\ a^{T} \ \mathbf{A} = \begin{bmatrix} 5 & & \\ \mathrm{i}\ {}^{2} & \mathrm{s} & \\ {}_{2} & & 2 \end{bmatrix} \begin{matrix} a_1 \\ a_2 \end{matrix} = \begin{bmatrix} - & 1 \\ & - \end{bmatrix}$$

역행렬

AA−1 = A−1A = I(단위행렬)

역행렬

행렬 **A가 역행렬을 갖지 않으면 A를 특이행렬(singular)**

$n = 2$ 경우

$$\mathbf{A}^{-1} = \frac{1}{\det \mathbf{A}} \begin{bmatrix} a_{22} & -a_{12} \\ -a_{21} & a_{11} \end{bmatrix},$$

A의 행렬식(determinant)

$$\det \mathbf{A} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}$$

고유값(Eigenvalues), 고유벡터(Eigenvectors)

정방 행렬 A를 선형 변환으로 봤을 때, 선형 변환 A에 의한 변환 결과가

자기 자신의 상수 배가 되는 0이 아닌 벡터를 고유벡터(eigenvector)라고 하고,

이 상수배 값을 고유값(eigenvalue)

$\mathbf{A} = [ajk]$ n x n 행렬

$$\mathbf{Ax} = \lambda\mathbf{x}$$

λ : 스칼라(scalar) (실수 또는 복소수)

x : 결정되어야 하는 벡터

모든 λ에 대해서 **x = 0는 한 개의 해가 된다**.

$\mathbf{x} \neq \mathbf{0}$에 대해서 성립하는 스칼라 *$\lambda$를* **A의***고유값(***eigenvalue)** 벡터 **x 를 고유값** *λ에 대응하는* **A의 고유벡터(eigenvector)**.

$$\mathbf{Ax} - \lambda\mathbf{x} = \mathbf{0}$$

$$(\mathbf{A} - \lambda\mathbf{I})\mathbf{x} = \mathbf{0}$$

$$(\mathbf{A} - \lambda\mathbf{I})\mathbf{x} = \mathbf{0} \tag{13}$$

으로 쓸 수 있다. 식 (13)은 n개의 미지수 $x_1, \cdots, x_n$(벡터 $\mathbf{x}$의 성분들)에 대한 n개의 선형대수방정식이다. 이 방정식들이 $\mathbf{x} \neq \mathbf{0}$인 해를 갖기 위해서는 계수행렬 $\mathbf{A} - \lambda\mathbf{I}$의 행렬식이 0이 되어야 한다. 이것은 선형대수에서 기본적인 사실로서 증명된다(7.7절의 정리 4). 이 장에서는 $n = 2$에 대해서만 이것이 필요하다. 그러면 식 (13)은

$$\begin{bmatrix} a_{11} - \lambda & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} - \lambda \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \tag{14}$$

이 되고, 성분으로 나타내면

$$\begin{aligned} (a_{11} - \lambda)x_1 + \quad a_{12}x_2 \quad &= 0 \\ a_{21}x_1 \quad + (a_{22} - \lambda)x_2 &= 0 \end{aligned} \tag{14*}$$

이다. 이제 $\mathbf{A} - \lambda\mathbf{I}$가 특이행렬이 되기 위한 필요충분조건은 $\mathbf{A}$의 **특성행렬식**(characteristic determinant)이라 부르는 행렬식 $\det(\mathbf{A} - \lambda\mathbf{I})$가 0이 되는 것이다(또한 일반적인 n에 대해서도 마찬가지다). 이것으로부터

$$\begin{aligned} \det(\mathbf{A} - \lambda\mathbf{I}) &= \begin{vmatrix} a_{11} - \lambda & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} - \lambda \end{vmatrix} \\ &= (a_{11} - \lambda)(a_{22} - \lambda) - a_{12}a_{21} \\ &= \lambda^2 - (a_{11} + a_{22})\lambda + a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21} = 0 \end{aligned} \tag{15}$$

을 얻는다. λ에 대한 이 2차 방정식을 행렬 $\mathbf{A}$의 **특성방정식**(characteristic equation)이라 부르며, 이것의 해가 $\mathbf{A}$의 고유값 λ_1과 λ_2이다. 먼저 이 값들을 결정하라. 그러고 나서 λ_1에

예제 1 고유값 문제

행렬

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} -4.0 & 4.0 \\ -1.6 & 1.2 \end{bmatrix} \tag{16}$$

64
48
$\overline{\quad 6}$

의 고유값과 고유벡터를 구하라.

$(\lambda - 1.2)(\lambda + 4)$

$\lambda^2 + 2.8 - 4.8 + 64 = \lambda^2 + 2.8 + 1.$

풀이. 특성방정식은 2차방정식

$$\det|\mathbf{A} - \lambda\mathbf{I}| = \begin{vmatrix} -4 - \lambda & 4 \\ -1.6 & 1.2 - \lambda \end{vmatrix} = \lambda^2 + 2.8\lambda + 1.6 = 0$$

4

이다. 이것은 해 $\lambda_1 = -2$와 $\lambda_2 = -0.8$을 갖는데, 이 값들은 $\mathbf{A}$의 고유값이 된다.

고유벡터는 식 (14*)로부터 얻을 수 있다. $\lambda = \lambda_1 = -2$에 대하여 식 (14*)로부터

$$\begin{aligned} (-4.0 + 2.0)x_1 + \quad 4.0x_2 \quad &= 0 \\ -1.6x_1 \quad + (1.2 + 2.0)x_2 &= 0 \end{aligned}$$

을 얻는다. 첫 번째 식의 한 개의 해는 $x_1 = 2$, $x_2 = 1$이다. 이 해는 두 번째 식도 역시 만족한다. (왜인가?) 따라서 $\lambda_1 = -2.0$에 대응하는 $\mathbf{A}$의 고유벡터는

$$\mathbf{x}^{(1)} = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix} \quad \text{이고, 마찬가지로} \quad \mathbf{x}^{(2)} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0.8 \end{bmatrix} \tag{17}$$

가 $\lambda_2 = -0.8$에 대응하는 $\mathbf{A}$의 고유벡터이며, $\lambda = \lambda_2$로 하여 식 (14*)로부터 얻을 수 있다. 이것을 증명하라. ■

4.1 공학적 응용에서 모델로서의 연립상미분방정식

예제 1 두 개의 탱크에서의 혼합문제

한 개의 탱크에서의 혼합문제는 한 개의 상미분방정식에 의해 모델링된다. 두 개의 탱크에 대해서도 모델링의 원리는 같으므로, 먼저 1.3절의 대응하는 예제 3을 재검토하는 것이 필요할 것이다. 이 모델은 2개의 1계 상미분방정식의 연립방정식이 된다.

그림 78의 탱크 T_1과 T_2에는 초기에 각각 물 100 gal이 들어있다. T_1에는 순수한 물만 들어있는 반면에 T_2에는 150 lb의 비료가 용해되어 있다. 액체를 분당 2 gal의 속도로 순환시키며 잘 휘저으면(혼합용액을 균질하게 유지하기 위해) T_1내의 비료의 양 $y_1(t)$와 T_2 내의 비료의 양 $y_2(t)$는 시간 t에 따라 변한다. T_1 내의 비료의 양이 T_2 내에 남아있는 비료의 양의 적어도 반이 되기 위해서는 얼마나 오랫동안 액체를 순환시켜야 하는가?

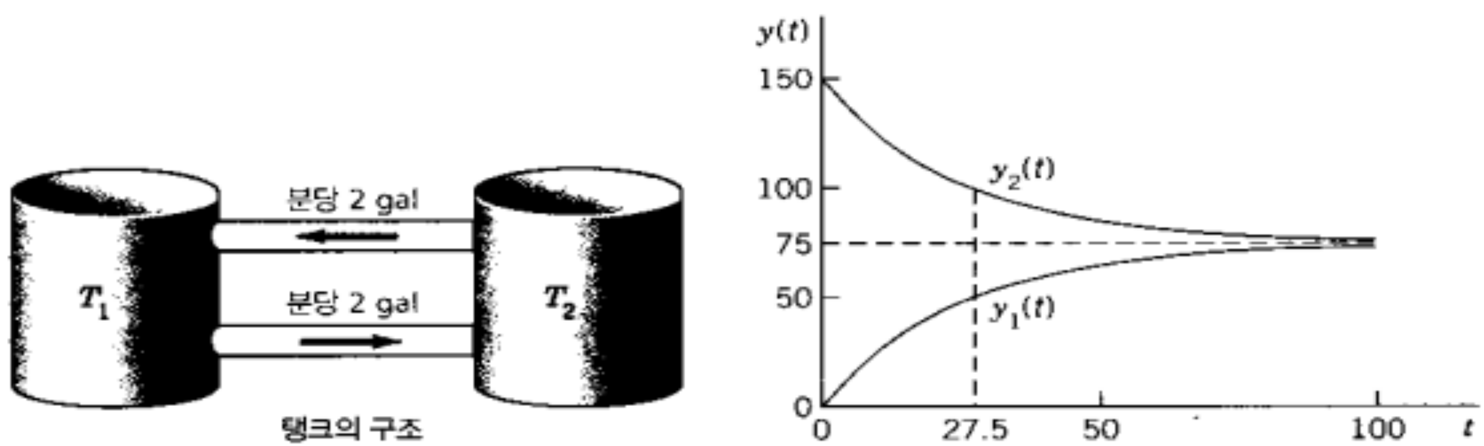

그림 78. 탱크 T_1(아래 곡선)과 T_2 내의 비료 함량

4.1 공학적 응용에서 모델로서의 연립상미분방정식

예제 1) 공학적 응용에서 모델로서의 연립 상미분 방정식

두개의 탱크에서의 혼합문제

Step 1. 모델 설정

탱크 T_1 $y_1(t)$의 시간에 대한 변화율 $y_1'(t)$

탱크 T_2 $y_2(t)$의 " " $y_2'(t)$

T_1 : y_1' = 분당 유입량 − 분당 유출량 $= \frac{2}{100} y_2 - \frac{2}{100} y_1$

T_2 : y_2' = " − " $= \frac{2}{100} y_1 - \frac{2}{100} y_2$

→ 1계 상미방 연립 방정식

$$y_1' = -0.02 y_1 + 0.02 y_2$$

$$y_2' = 0.02 y_1 - 0.02 y_2$$

행렬

$$\mathbf{y}' = \begin{bmatrix} y_1' \\ y_2' \end{bmatrix}, \quad \mathbf{y} = \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{A} = \begin{bmatrix} -0.02 & 0.02 \\ 0.02 & -0.02 \end{bmatrix}$$

$$\boxed{\mathbf{y}' = \mathbf{A}\mathbf{y}}$$

step 2. 일반해

단일 상미방에 대해 t에 대한 지수 벡터함수

$$\mathbf{y} = \mathbf{x} e^{\lambda t}$$

λ : A의 고유값

$$\mathbf{y}' = \lambda \mathbf{x} e^{\lambda t} = A \mathbf{x} e^{\lambda t}$$

x : 고유값 λ에 대응하는 A의 고유벡터.

$\boxed{\lambda \mathbf{x} = A \mathbf{x}}$ A 의 고유값과 고유벡터

고유값은 특성방정식의 해

$$\det(A - \lambda I) = \begin{vmatrix} -0.02 - \lambda & 0.02 \\ 0.02 & -0.02 - \lambda \end{vmatrix}$$

$$= (-0.02 - \lambda)^2 - 0.02^2$$

$$= \lambda(\lambda + 0.04) = 0 \Rightarrow \begin{cases} \lambda_1 = 0 \\ \lambda_2 = -0.04 \end{cases}$$

고유값

$\mathbb{A}\mathbf{x} = \lambda\mathbf{x} \rightarrow \mathbb{A}\mathbf{x} - \lambda\mathbf{x} = \mathbb{O}$ (영벡터)

$(\mathbb{A} - \lambda\mathbb{I})\mathbf{x} = \mathbb{O}$

$$\begin{bmatrix} a_{11}-\lambda & a_{12} \\ a_{21} & a_{22}-\lambda \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\underbrace{(a_{11}-\lambda)}_{-0.02}x_1 + \underbrace{a_{12}}_{0.02}x_2 = 0$$

$$\underbrace{a_{21}}_{0.02}x_1 + \underbrace{(a_{22}-\lambda)}_{-0.02}x_2 = 0$$

$\lambda_1 = 0$

$\lambda_2 = -0.04$

$-0.02x_1 + 0.02x_2 = 0 \longrightarrow x_1 = x_2$

$\lambda_1 = 0$

$0.02x_1 + (-0.02-0)x_2 = 0 \rightarrow x_1 = x_2$

$(-0.02+0.04)x_1 + 0.02x_2 = 0 \rightarrow x_1 = -x_2$

$\lambda_1 = -0.04$

$0.02x_1 + (-0.02+0.04)x_2 = 0 \rightarrow x_1 = -x_2$

고유벡터 $\mathbf{x}^{(1)} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$ $\quad \mathbf{x}^{(2)} = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix}$

일반해

$$\boxed{\begin{aligned} \mathbf{y} &= c_1\mathbf{x}^{(1)}e^{\lambda_1 t} + c_2\mathbf{x}^{(2)}e^{\lambda_2 t} \\ &= c_1\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} + c_2\begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix}e^{-0.04t} \end{aligned}}$$

step 3. 초기 조건 $y_1(0)=0$, $y_2(0)=150$

$$\mathbf{y}(0) = c_1\begin{bmatrix}1\\1\end{bmatrix} + c_2\begin{bmatrix}1\\-1\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}c_1+c_2\\c_1-c_2\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}0\\150\end{bmatrix}$$

$$\left.\begin{aligned} c_1+c_2 &= 0 \\ c_1-c_2 &= 150 \end{aligned}\right\} \rightarrow \left\{\begin{aligned} c_1 &= 75 \\ c_2 &= -75 \end{aligned}\right.$$

$$\mathbf{y} = 75\begin{bmatrix}1\\1\end{bmatrix} - 75\begin{bmatrix}1\\-1\end{bmatrix}e^{-0.04t}$$

탱크 T_1 : $y_1 = 75 - 75e^{-0.04t}$

T_2 : $y_2 = 75 + 75e^{-0.04t}$

step 4. T_1이 전체 비료의 양의 $1/3 = 50lb$ 포함하면

T_1이 T_2 내의 비료의 양의 반 포함.

$$y_1 = 75 - 75e^{-0.04t} = 50$$

$e^{-0.04t} = \frac{1}{3}$ $\quad e^{0.04t} = 3 \quad 0.04t = \ln 3$

$$t = (\ln 3)/0.04 = \underline{\underline{27.5}}$$

이정도 시간동안 순환해야.

연립미분방정식은 6장에서 학습하는 Laplace변환을 이용하면 보다 쉽게 해를 구할 수 있다.