6장 Laplace 변환

- 제1이동정리
- 제2이동정리
- 컨볼루션
- 주기함수의 라플라스 변환

6.3 이동정리

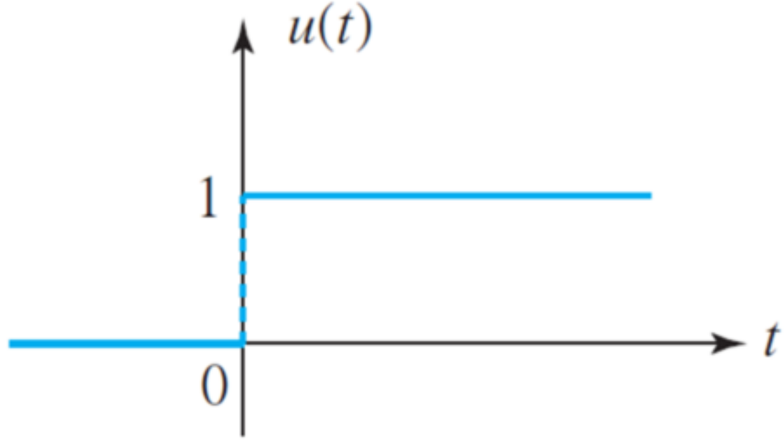
단위계단함수 $u(t)$

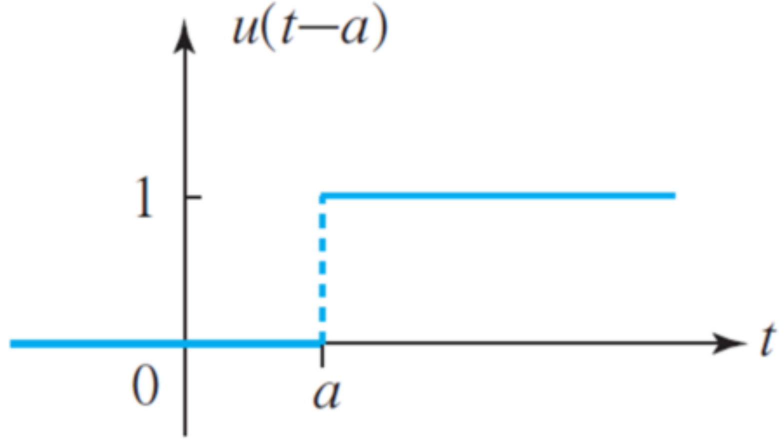
$$u(t)=\begin{cases}1, & t>0\\ 0, & t<0\end{cases}$$

$t=0$ 서는 정의되지 않는다.

$$u(t-a)=\begin{cases}1, & t>a\\ 0, & t<a\end{cases}$$

$t=a$ 서는 정의되지 않는다.

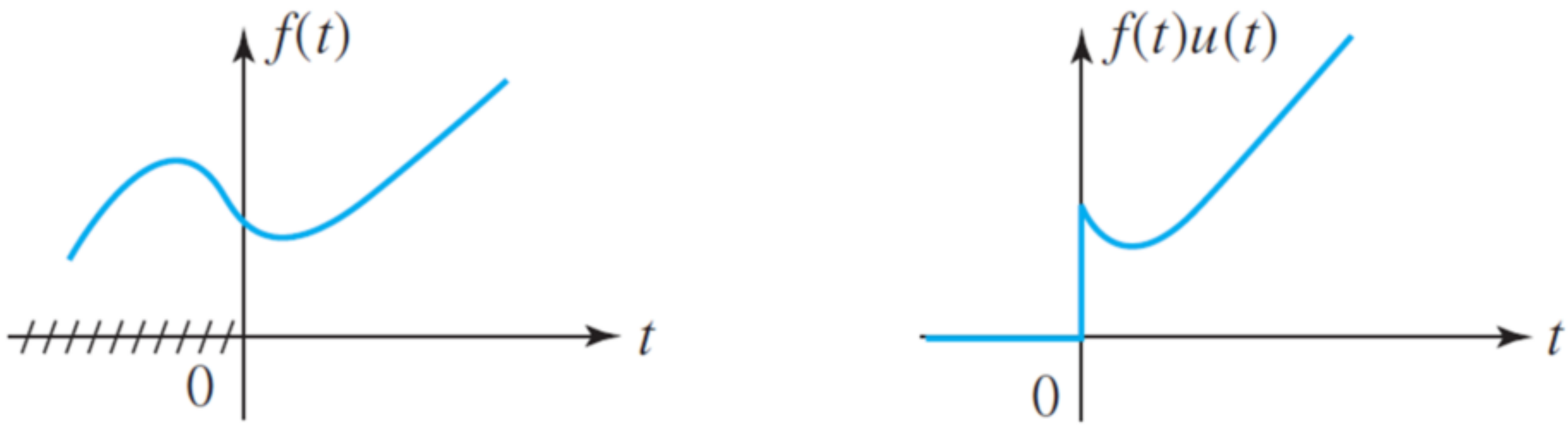




단위계단함수의 효과

$$f(t)\,u(t) = \begin{cases} f(t), & t > 0 \\ 0, & t < 0 \end{cases}$$

어떤 함수에 단위계단함수를 곱하면 t가 음이 되는 구간의 함숫값을 강제적으로 0으로 만드는 효과를 나타낸다.



(1) 제1이동정리

$$\mathscr{L}\{f(t)\} = F(s) \xrightarrow{\text{제1이동정리}} \mathscr{L}\{e^{at}f(t)\} = F(s-a)$$

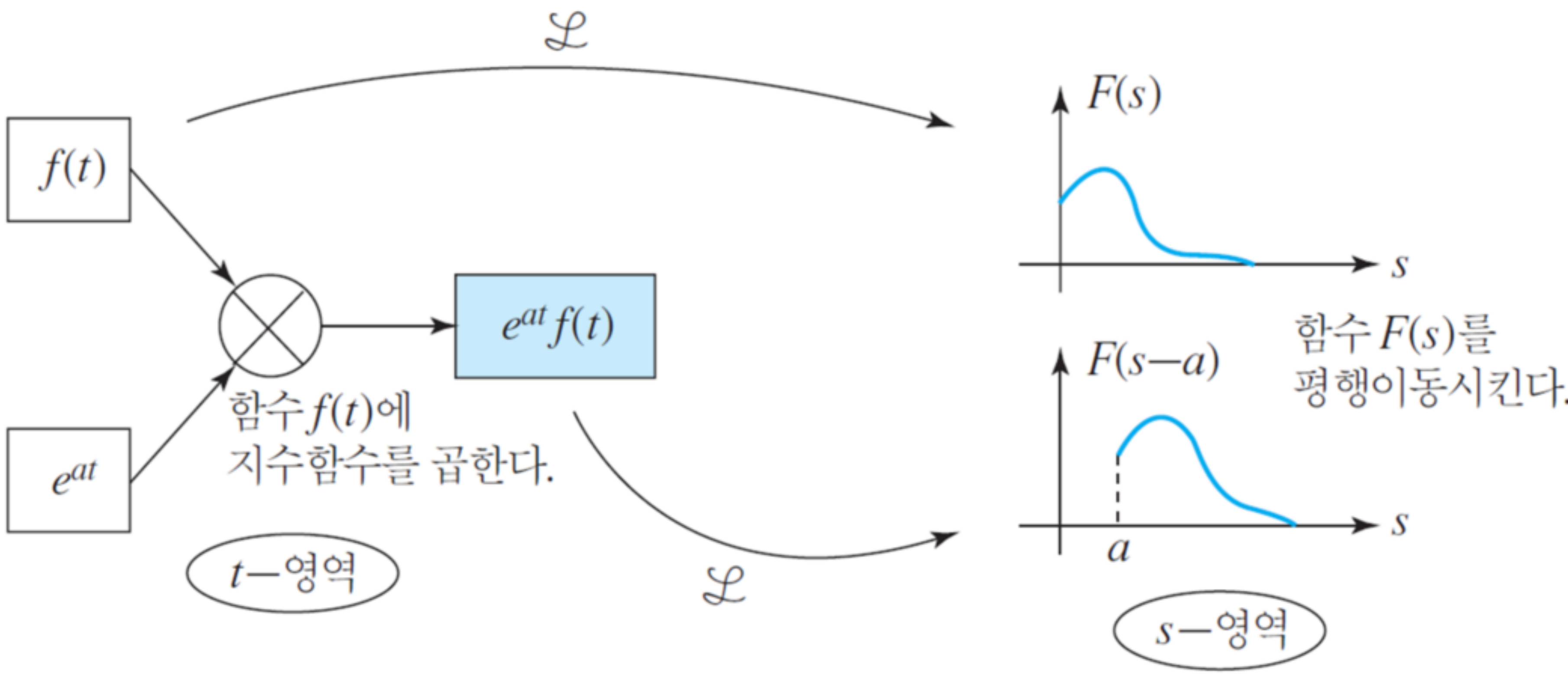
s축을 따라 a만큼 $F(s)$평행이동

$$\because \quad \mathscr{L}\{e^{at}f(t)\} = \int_0^{\infty} e^{at} f(t) e^{-st}\, dt$$

$$= \int_0^{\infty} f(t) e^{-(s-a)t}\, dt$$

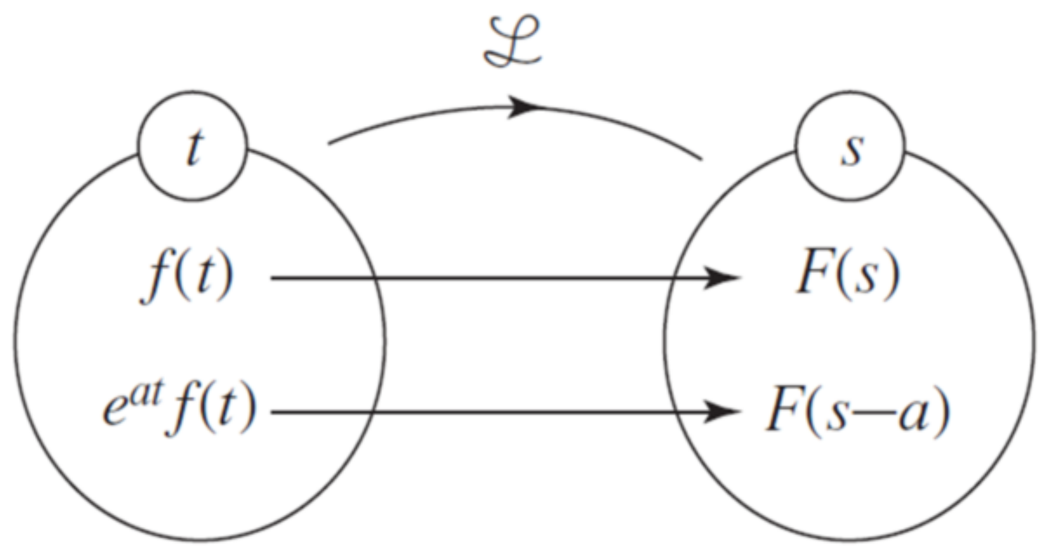
$$= F(s-a) \longleftarrow \text{Laplace 변환의 정의}$$

시간영역에서 $f(t)$지수함수를 곱하는 것은 s-영역에서 $F(s)$를 평행이동시키는 것에 대응



$$\mathscr{L}\{e^{at}f(t)\} = F(s-a)$$

$$\Leftrightarrow \quad e^{at}f(t) = \mathscr{L}^{-1}\{F(s-a)\}$$



<예제> $f(t) = e^{5t}t^2$

$$\mathscr{L}\{e^{5t}t^2\} = \mathscr{L}\{t^2\}\Big|_{s=s-5} = \frac{2}{s^3}\Big|_{s=s-5} = \frac{2}{(s-5)^3}$$

<예제> $g(t) = e^{-t}\sin 2t$

$$\mathscr{L}\{e^{-t}\sin 2t\} = \mathscr{L}\{\sin 2t\}\Big|_{s=s+1} = \frac{2}{s^2+4}\Big|_{s=s+1} = \frac{2}{(s+1)^2+4}$$

<예제> $F(s) = \dfrac{1}{s^2+2s-8} = \dfrac{1}{(s+1)^2-9}$

$$\mathscr{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s^2+2s-8}\right\} = \mathscr{L}^{-1}\left\{\frac{1}{(s+1)^2-9}\right\}$$

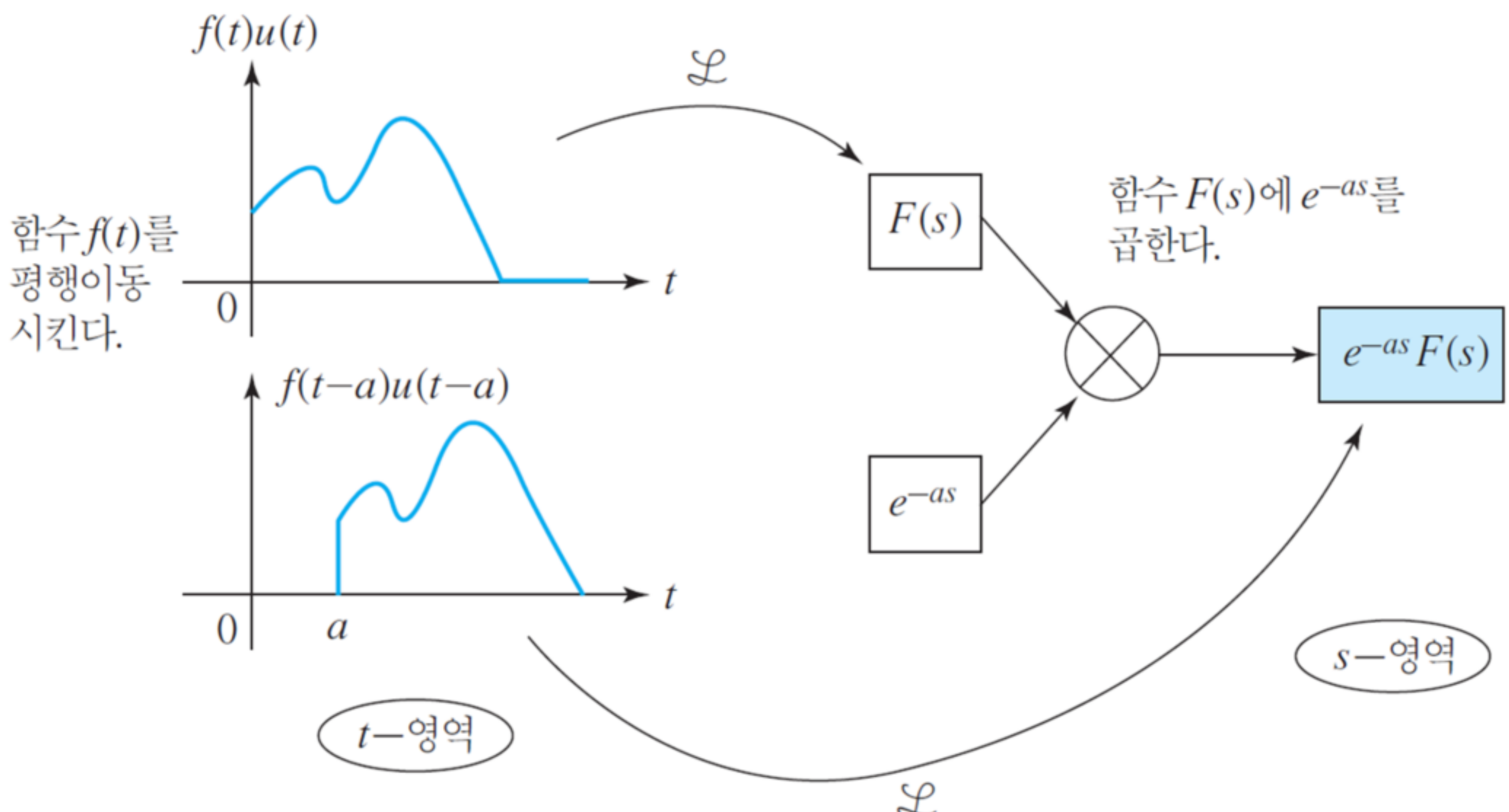
$$= \mathscr{L}^{-1}\left\{\frac{\frac{1}{3}\cdot 3}{(s+1)^2-9}\right\} = \frac{1}{3}\mathscr{L}^{-1}\left\{\frac{3}{(s+1)^2-9}\right\}$$

$$= \frac{1}{3}e^{-t}\sinh 3t$$

(2) 제2이동정리

$$\mathcal{L}\{f(t)\} = F(s) \xrightarrow{\text{제2이동정리}} \mathcal{L}\{f(t-a)u(t-a)\} = e^{-as}F(s)$$

t축을 따라 a만큼 $f(t)$를 평행이동



t영역에서 $f(t)$를 a만큼 평행이동시키는 것은 s-영역에서 지수함수 e^{-as}를 $F(s)$에 곱하는 것에 상응한다.

$$\because \quad \mathcal{L}\{f(t-a)u(t-a)\} = \int_0^{\infty} f(t-a)u(t-a)e^{-st}\,dt$$

$$= \int_a^{\infty} f(t-a)e^{-st}\,dt$$

변수치환 $t - a = t^* \longrightarrow dt = dt^*,\ t \in [a, \infty) \to t^* \in [0, \infty)$

$$\int_a^{\infty} f(t-a)e^{-st}\,dt = \int_0^{\infty} f(t^*)e^{-s(t^*+a)}\,dt^*$$

$$= e^{-as}\int_0^{\infty} f(t^*)e^{-st^*}\,dt^* \quad = e^{-as}F(s)$$

$f(t)$의 Laplace 변환

t영역에서 $f(t)$만큼 a평행이동시키는 것은 -영역에서 s지수함수 를

에 곱 e^{-as} 것에 $F(s)$등한다.

$$\mathcal{L}\{f(t-a)u(t-a)\} = e^{-as}F(s) \iff f(t-a)u(t-a) = \mathcal{L}^{-1}\{e^{-as}F(s)\}$$

<예제>

$$g(t) = \sin t\, u(t - 2\pi)$$

$$\sin(t - 2\pi) = \sin t$$

주기가 2π인 주기함수

$$\mathscr{L}\{\sin t\, u(t-2\pi)\} = \mathscr{L}\{\sin(t-2\pi)u(t-2\pi)\}$$

$$= e^{-2\pi s}\,\mathscr{L}\{\sin(t-2\pi)\} = \frac{e^{-2\pi s}}{s^2+1}$$

<예제>

$$F(s) = \frac{e^{-3s}}{(s-1)^3}$$

$$\mathscr{L}^{-1}\left\{\frac{1}{(s-1)^3}\right\} = \mathscr{L}^{-1}\left\{\frac{1}{2}\frac{2}{(s-1)^3}\right\} = \frac{1}{2}\mathscr{L}^{-1}\left\{\frac{2}{(s-1)^3}\right\}$$

$$= \frac{1}{2}e^t\mathscr{L}^{-1}\left\{\frac{2}{s^3}\right\} = \frac{1}{2}t^2 \cdot e^t$$

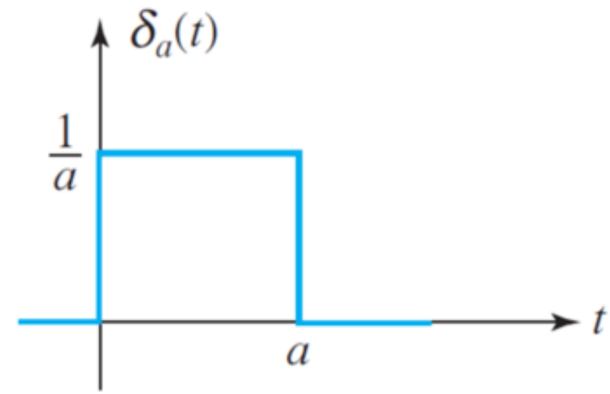
제2이동정리에 의해

$$\mathscr{L}^{-1}\left\{\frac{e^{-3s}}{(s-1)^3}\right\} = \frac{1}{2}(t-3)^2 e^{t-3}u(t-3)$$

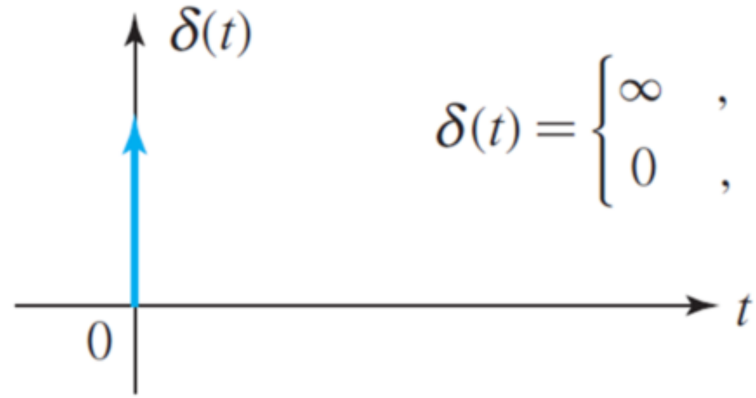
임펄스(델타)함수 $\delta(t)$

$$\delta(t) \triangleq \lim_{a \to 0} \delta_a(t)$$

$$= \frac{1}{a}u(t) - \frac{1}{a}u(t-a)$$



$a \to 0$



$$\delta(t) = \begin{cases} \infty \quad , & t = 0 \\ 0 \quad , & t \neq 0 \end{cases}$$

$$\mathscr{L}\{\delta_a(t)\} = \frac{1}{a}\mathscr{L}\{u(t)\} - \frac{1}{a}\mathscr{L}\{u(t-a)\}$$

$$= \frac{1}{a}\left\{\frac{1}{s} - \frac{1}{s}e^{-as}\right\} = \frac{1-e^{-as}}{as}$$

$\delta(t)$의 Laplace 변환

$$\mathscr{L}\{\delta(t)\} \triangleq \lim_{a \to 0} \mathscr{L}\{\delta_a(t)\} = \lim_{a \to 0} \frac{1-e^{-as}}{as}$$

$$= \lim_{a \to 0} \frac{se^{-as}}{s} = 1 \longleftarrow \text{로피탈 정리}$$

$$\mathscr{L}\{\delta(t-a)\} = \mathrm{e}^{-as}\mathscr{L}\{\delta(t)\} = \mathrm{e}^{-as} \longleftarrow \text{제2이동정리}$$

6.5 컨볼루션(합성곱) 이론

$$f(t) * g(t) = \int_{-\infty}^{\infty} f(\tau)g(t-\tau)d\tau$$

$$f(t) * g(t) = \int_{-\infty}^{\infty} f(\tau)g(t-\tau)d\tau$$

④ ③ ② ①

컨볼루션 이라는 것은 두개의 함수 f, g 가 있을 때, ① 적분변수 τ 에 대해서 ② 하나의 함수를 반전(reverse)하고 시간 t 만큼 전이(shift)시킨 후에, ③ 다른 하나의 함수와 곱한 결과를 ④ 전체 구간에서 적분하는 것을 의미함

$$f(t) * g(t) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x)g(x-t)dx$$

④ ③ ② ①

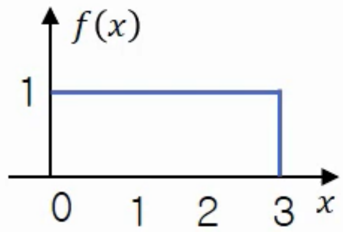
① 변수 τ 대신에 x ② 시간 t 만큼 전이(shift) ③ 곱셈 ④ 덧셈

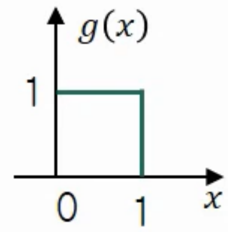
$$f(t) * g(t) = \underbrace{\int_{-\infty}^{\infty}}_{③} f(x)g(\underbrace{x-t}_{①})dx$$

②

	기본 수식	수식 해석	컨볼루션 수식 적용	데이터 관점에서의 해석
곱셈	$3 \times 1 = 3$ $3 \times 0 = 0$ $3 \times 2 = 6$	원본 데이터 $\boxed{3} \times 1 = 3$ $\boxed{3} \times 0 = 0$ $\boxed{3} \times 2 = 6$ 변화	$f(x)$ $g(x-t)$ $\boxed{3} \times 1 = 3$ $\boxed{3} \times 0 = 0$ $\boxed{3} \times 2 = 6$ ②	데이터 관점에서 곱셈 연산은 원본 데이터 또는 입력 데이터에 변화(variation)를 주어 출력 데이터를 만들어 내는 역할을 수행함
덧셈	$1 + 2 = 3$	$\left(\frac{1+2}{2}\right) \times 2$ 평균	$1 + 2 = 3$ ③ $\int_{-\infty}^{\infty}$	데이터 관점에서 덧셈 연산은 데이터의 평균(mean)을 구한다는 의미를 내포하고 있음

컨볼루션 수식에서 원본 데이터 또는 입력 데이터에 변화를 주어서, 그 변화된 값들의 평균을 구한다는 의미

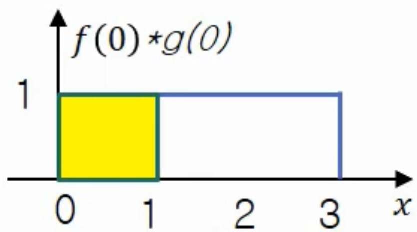
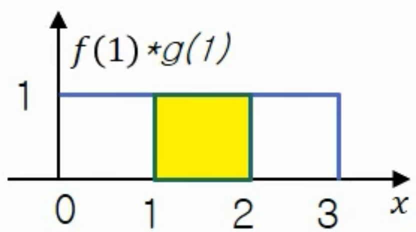
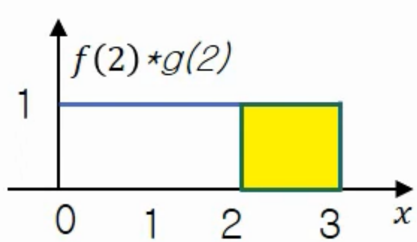




$$f(t) * g(t) = \underbrace{\int_{-\infty}^{\infty}}_{③} f(x)g(x \underbrace{-\, t}_{①})dx$$

②

시간의 변화(t = 0, 1, 2)에 따른 컨볼루션 연산 과정

시간 t	$f(t) * g(t)$	컨볼루션 연산
t = 0		$f(0) * g(0) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x)g(x-0)\,dx$ $= \int_{0}^{1} f(x)g(x-0)\,dx = \int_{0}^{1} 1 \cdot 1\,dx = 1$
t = 1		$f(1) * g(1) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x)g(x-1)\,dx$ $= \int_{1}^{2} f(x)g(x-1)\,dx = \int_{1}^{2} 1 \cdot 1\,dx = 1$
t = 2		$f(2) * g(2) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x)g(x-2)\,dx$ $= \int_{2}^{3} f(x)g(x-2)\,dx = \int_{2}^{3} 1 \cdot 1\,dx = 1$

시간 흐름에 따라 g(x-t)를 이동시켜 원본 데이터 f(x)를 다양한 변화를 주는 것

시간에 따른 이동 -> 곱셈 -> 덧셈

$$f(t) * g(t) = \underbrace{\int_{-\infty}^{\infty}}_{③} \underbrace{f(x)g}_{②}\underbrace{(x-t)}_{①}dx$$

데이터 관점에서
컨볼루션(Convolution) 개념

해석 1	시간의 흐름에 따라 데이터 $g(x)$가 이동하면서, 입력 데이터 $f(x)$ 를 평균적으로 얼마나 변하 시키는지 나타내는 것을 컨볼루션(Convolution)으로 정의 할 수 있음
해석 2	시간의 흐름에 따라 움직이는 데이터 $g(x)$에 의해서, 입력 데이터 $f(x)$가 평균적으로 얼마나 변하는지 나타내는 것을 컨볼루션(Convolution)으로 정의 할 수 있음

$$f(t) * g(t) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x)g(x-t)dx \rightarrow \underset{f(x)}{\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 3 \\ 3 & 0 & 1 & 2 \\ 2 & 3 & 0 & 1 \end{bmatrix}} * \underset{g(x)}{\begin{bmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & 2 \end{bmatrix}}$$

f, g 모두 이산데이터(discrete data)이기 때문에 적분(∫)이 아닌 시그마(∑)로 표기해야 하지만, 컨볼루션 개념에서 알아본 수식과의 일관성을 위해 적분 형식을 그대로 사용함

시간 t	컨볼루션 연산	컨볼루션 연산 결과	컨볼루션 연산 과정
t = 0	$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 3 \\ 3 & 0 & 1 & 2 \\ 2 & 3 & 0 & 1 \end{bmatrix} * \begin{bmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & 2 \end{bmatrix} \rightarrow$	$\begin{bmatrix} 15 & \\ & \end{bmatrix}$	1*2 + 2*0 + 3*1 + 0*0 + 1*1 + 2*2 + 3*1 + 0*0 + 1*2 = 15
t = 1	스트라이드(시간에 따른 이동간격) $\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 3 \\ 3 & 0 & 1 & 2 \\ 2 & 3 & 0 & 1 \end{bmatrix} * \begin{bmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & 2 \end{bmatrix} \rightarrow$	$\begin{bmatrix} 15 & 16 \\ & \end{bmatrix}$	2*2 + 3*0 + 0*1 + 1*0 + 2*1 + 3*2 + 0*1 + 1*0 + 2*2 = 16
t = 2	$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 3 \\ 3 & 0 & 1 & 2 \\ 2 & 3 & 0 & 1 \end{bmatrix} * \begin{bmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & 2 \end{bmatrix} \rightarrow$	$\begin{bmatrix} 15 & 16 \\ 6 & \end{bmatrix}$	0*2 + 1*0 + 2*1 + 3*0 + 0*1 + 1*2 + 2*1 + 3*0 + 0*2 = 6

합성곱(Convolution)의 정의

asterisk(애스터리스크)

$$f(t) * g(t) \triangleq \int_0^t f(\tau) g(t-\tau) d\tau$$ ← 매우 복잡한 연산

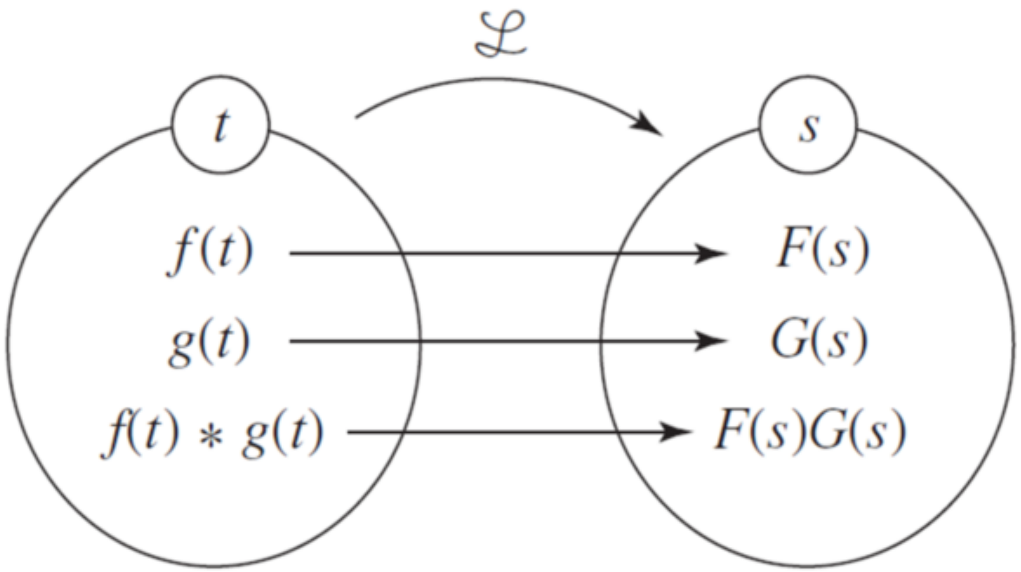
$$\mathscr{L}\{f(t)\} = F(s)$$

$$\mathscr{L}\{g(t)\} = G(s)$$

⟶ $$\mathscr{L}\{f(t) * g(t)\} = F(s)G(s)$$

$$\mathscr{L}^{-1}\{F(s)G(s)\} = f(t) * g(t)$$

⟶ 합성곱은 매우 복잡한 연산이므로 $f(t) * g(t)$하려면
의 La $F(s)G(s)$ 변환을 계산함으로써 간접적으로 계산 가능



<예제>

$$F(s) = \frac{1}{(s+1)(s+2)}$$

$$\mathscr{L}^{-1}\left\{\frac{1}{(s+1)(s+2)}\right\} = \mathscr{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s+1} \cdot \frac{1}{s+2}\right\}$$

$$= e^{-t} * e^{-2t} = \int_0^t e^{-\tau} e^{-2(t-\tau)}\, d\tau$$

$$= e^{-2t} \int_0^t e^{\tau}\, d\tau = e^{-t} - e^{-2t}$$

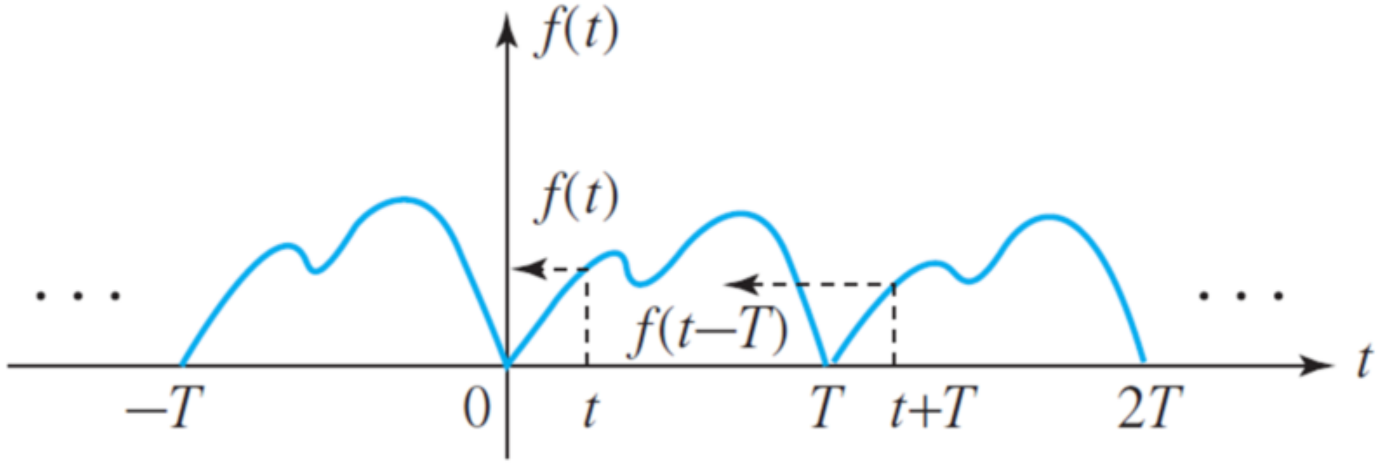
주기함수의 Laplace 변환

주기함수

$$f(t+T)=f(t), \quad \forall t$$

T 주기(period)

n을 정수라 하면 $\quad f(t+nT)=f(t), \quad \forall t$



주기함수의 Laplace 변환

$$f(t+T) = f(t), \quad \forall t$$

$$\mathcal{L}\{f(t)\} = \int_0^\infty f(t)\,e^{-st}\,dt$$

$$= \int_0^T f(t)\,e^{-st}\,dt + \int_T^{2T} f(t)\,e^{-st}\,dt + \int_{2T}^{3T} f(t)\,e^{-st}\,dt + \cdots$$

변수치환 $t = t^* + T$

변수치환 $t = t^* + 2T$

$$\int_T^{2T} f(t)\,e^{-st}\,dt = \int_0^T f(t^* + T)\,e^{-s(t^* + T)}\,dt^* = e^{-sT}\int_0^T f(t^*)\,e^{-st^*}\,dt^*$$

$$\int_{2T}^{3T} f(t)\,e^{-st}\,dt = \int_0^T f(t^* + 2T)\,e^{-s(t^* + 2T)}\,dt^* = e^{-2sT}\int_0^T f(t^*)\,e^{-st^*}\,dt^*$$

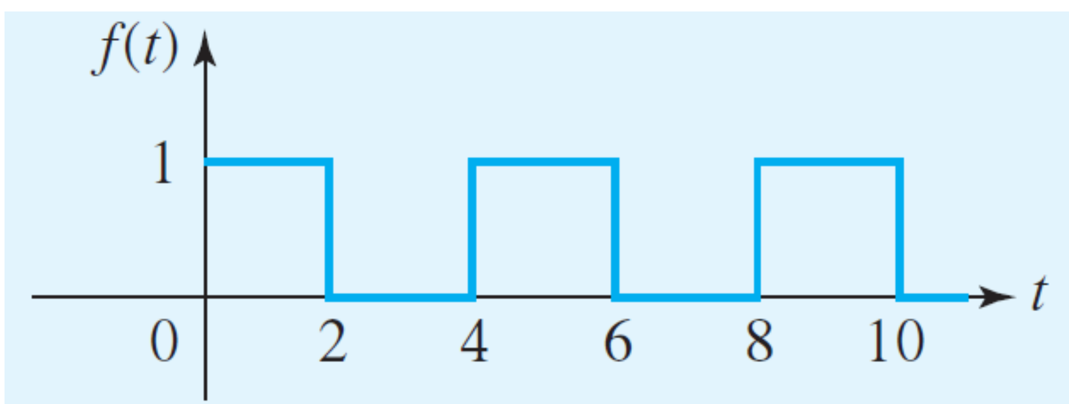
$$\cdots$$

$$\therefore \quad \mathcal{L}\{f(t)\} = \int_0^T f(t)e^{-st}\,dt\,(1+e^{-sT}+e^{-2sT}+\cdots)$$
$$= \frac{1}{1-e^{-sT}}\int_0^T f(t)e^{-st}\,dt$$

주기 T인 주기함수의 Laplace 변환은 $f(t)e^{-st}$ ㅣ 동안만 적분하여 $\frac{1}{1-e^{-sT}}$곱하면 된다.

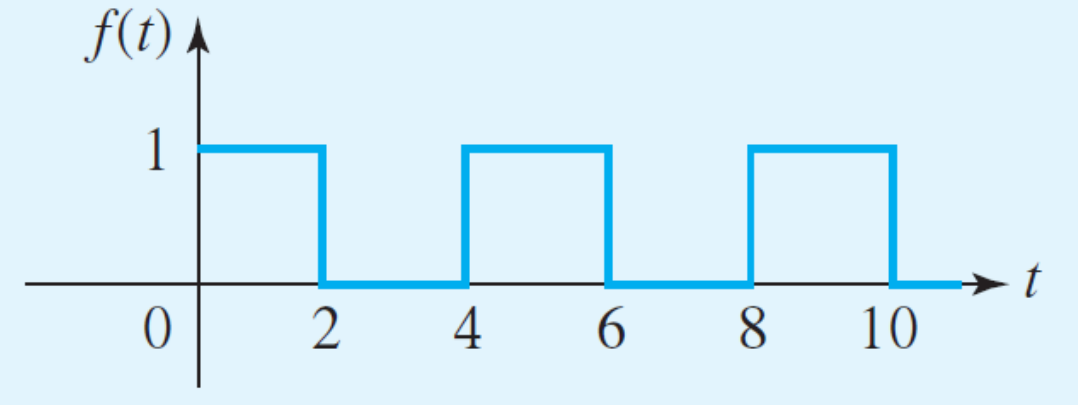
<예제>

$$f(t) = \begin{cases} 1, & 0 \le t < 2 \\ 0, & 2 \le t < 4 \end{cases}, \quad T = 4$$



<예제>

$$f(t)=\begin{cases}1, & 0\le t<2\\ 0, & 2\le t<4\end{cases}, \quad T=4$$



$$\int_0^4 f(t)\,e^{-st}\,dt=\int_0^2 e^{-st}\,dt=-\frac{1}{s}e^{-st}\Big|_0^2=-\frac{1}{s}e^{-2s}+\frac{1}{s}$$

$$\therefore\quad \mathscr{L}\{f(t)\}=\frac{1}{1-e^{-4s}}\int_0^4 f(t)\,e^{-st}\,dt$$

$$=\frac{1-e^{-2s}}{(1-e^{-4s})\,s}$$

$$=\frac{1}{s(1+e^{-2s})}$$