CALCULUS

미분적분학

기초부터 응용까지

CHAPTER 02

극한과 연속

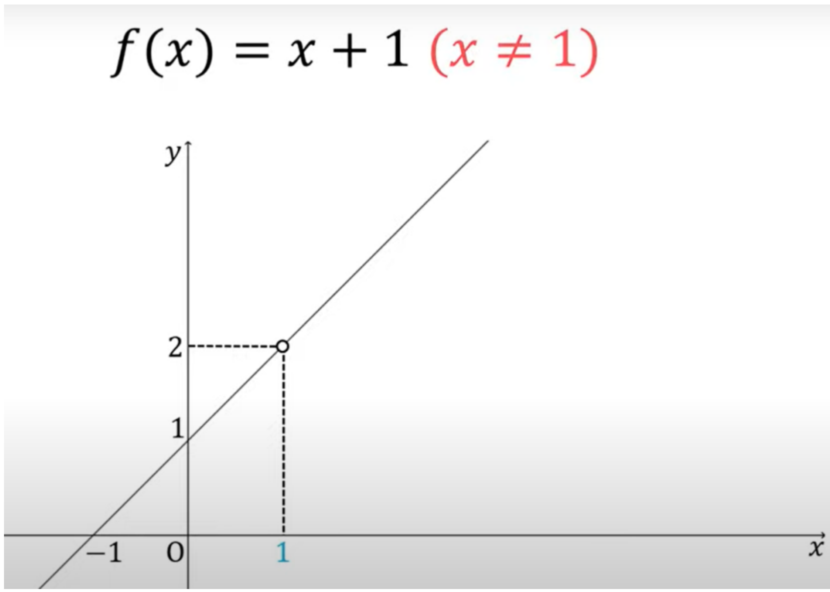
한빛아카데미
Hanbit Academy, Inc.

Contents

CALCULUS

2.1 극한의 의미와 성질

우리 주변에는 어떤 값에 한없이 가까워지거나 한없이 커지는 상태의 변화를 예측해야 하는 경우가 있다.



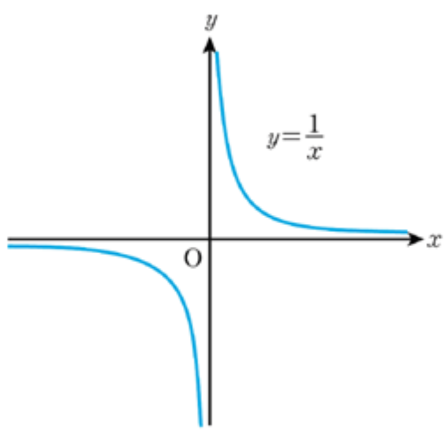
=존재 X

일때 -> 2

극한값

극한값 존재 <-> 우극한=좌극한 <-> 수렴

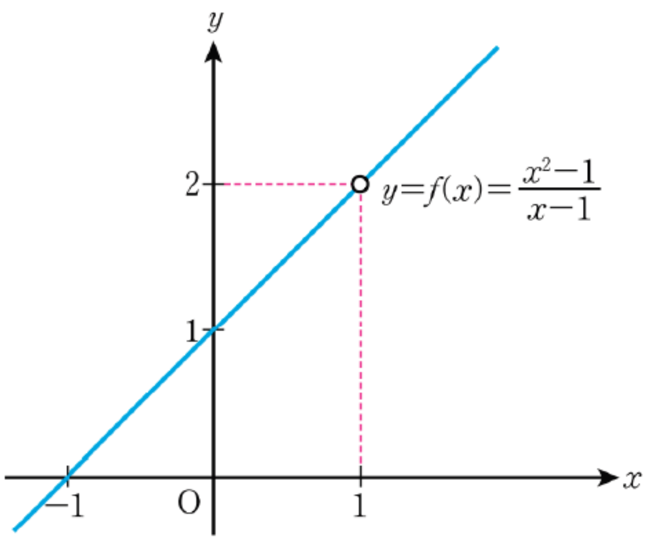
=



1. 극한의 직관적 의미

- ***L***
  - x가 a에 아주 가까이 갈 때 $f(x)$가 아주 가까이 가는 값 L

    : -> a 일때 $f(x)$ -> L



[그림 1] $f(x)=\dfrac{x^2-1}{x-1}$

[표 1] 함수 $f(x)=\dfrac{x^2-1}{x-1}$의 $x=1$ 근방에서의 변화

(a)

x	$\dfrac{x^2-1}{x-1}$
0.9	1.9
0.99	1.99
0.999	1.999
0.9999	1.9999
0.99999	1.99999

(b)

x	$\dfrac{x^2-1}{x-1}$
1.1	2.1
1.01	2.01
1.001	2.001
1.0001	2.0001
1.00001	2.00001

1. 극한의 직관적 의미

정의 1 좌극한과 우극한(한쪽극한)

(a) x가 a의 좌측에서 a에 아주 가까이 갈 때, $f(x)$가 L에 아주 가까이 가면 좌극한이 존재한다고 하고 $\lim_{x \to a-} f(x) = L$이라 표시한다.

(b) x가 a의 우측에서 a에 아주 가까이 갈 때, $f(x)$가 L에 아주 가까이 가면 우극한이 존재한다고 하고 $\lim_{x \to a+} f(x) = L$이라 표시한다.

정리 1 극한과 좌극한, 우극한의 관계

$\lim_{x \to a} f(x) = L$일 필요충분조건은 $\lim_{x \to a-} f(x) = L = \lim_{x \to a+} f(x)$이다.

- [정리1]에 의해 이면 의 극한이 존재하지 않음 즉 수렴하지 않는다.

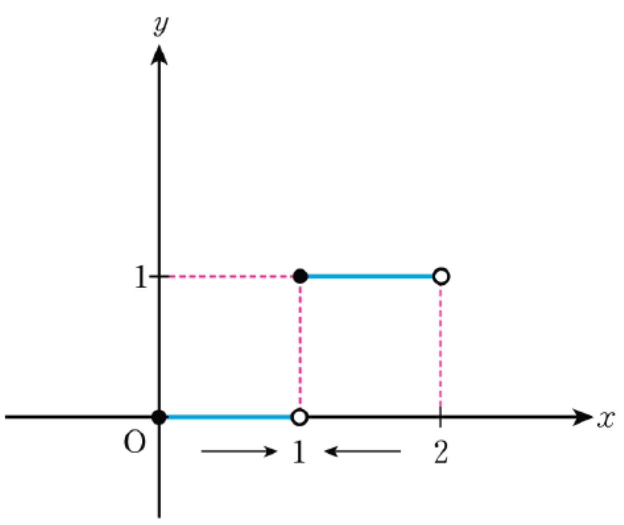
1. 극한의 직관적 의미

예제 1 **좌극한과 우극한 구하기**

가우스 함수 $[x]$(실수 x에 대하여 x보다 크지 않은 최대 정수를 대응시키는 함수)에 대하여 $\lim_{x \to 1-} [x]$와 $\lim_{x \to 1+} [x]$를 구하여라.

풀이

$x=1$에서의 좌극한은 $\lim_{x \to 1-} [x] = 0$이고, 우극한은 $\lim_{x \to 1+} [x] = 1$이다.



[그림 2] $\lim_{x \to 1} [x]$

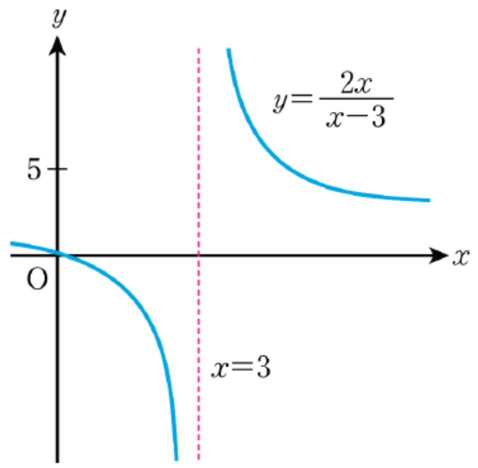
2. 극한의 엄밀한 정의

예제 9 **유리함수의 무한극한 구하기**

$\lim_{x\to 3-}\frac{2x}{x-3}$와 $\lim_{x\to 3+}\frac{2x}{x-3}$를 구하여라.

풀이

x가 3보다 큰 쪽에서 가까워지면 $\lim_{x\to 3+}\frac{2x}{x-3}=\infty$이고, x가 3보다 작은 쪽에서 가까워지면 $\lim_{x\to 3-}\frac{2x}{x-3}=-\infty$이다.



[그림 7] $f(x)=\frac{2x}{x-3}$

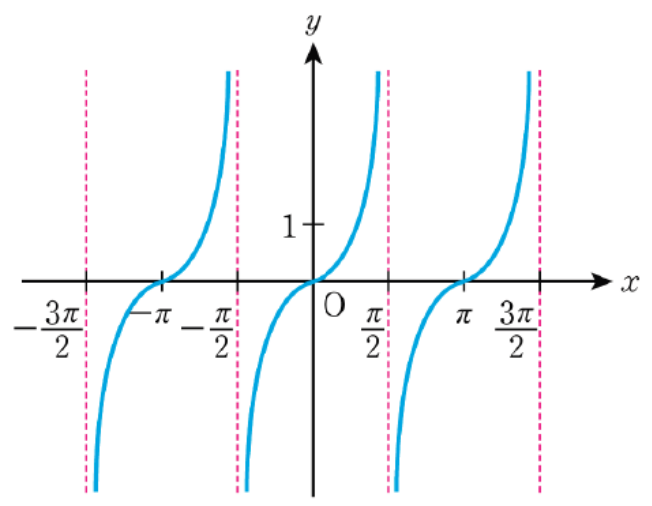
2. 극한의 엄밀한 정의

예제 10 **삼각함수의 무한극한 구하기**

$\lim_{x \to \frac{\pi}{2}-} \tan x$와 $\lim_{x \to \frac{\pi}{2}+} \tan x$를 구하여라.

풀이

$\lim_{x \to \frac{\pi}{2}-} \tan x = \infty$이고, $\lim_{x \to \frac{\pi}{2}+} \tan x = -\infty$이다.



[그림 8] $f(x) = \tan x$

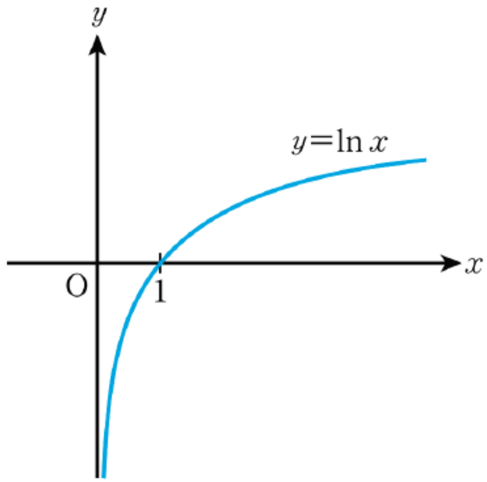
2. 극한의 엄밀한 정의

예제 11 **로그함수의 무한극한 구하기**

$\lim_{x \to 0+} \ln x$를 구하여라.

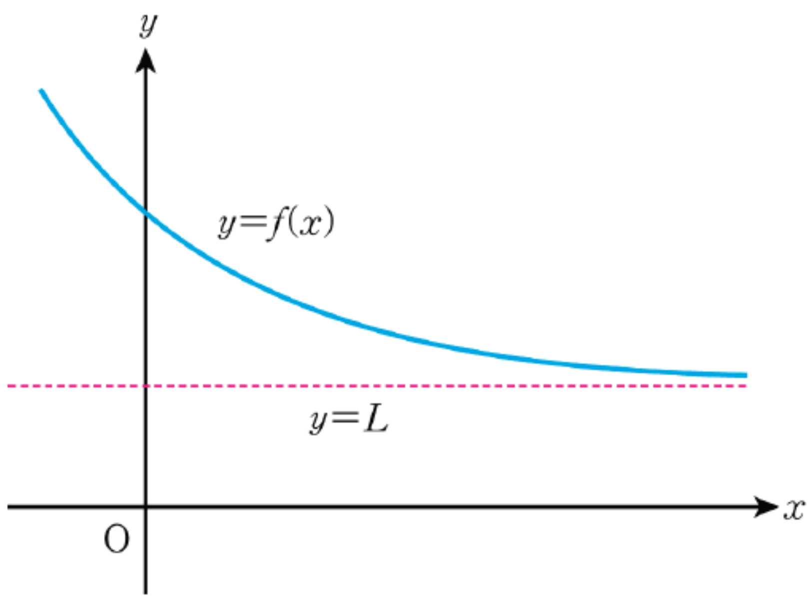
풀이

$\lim_{x \to 0+} \ln x = -\infty$이다.

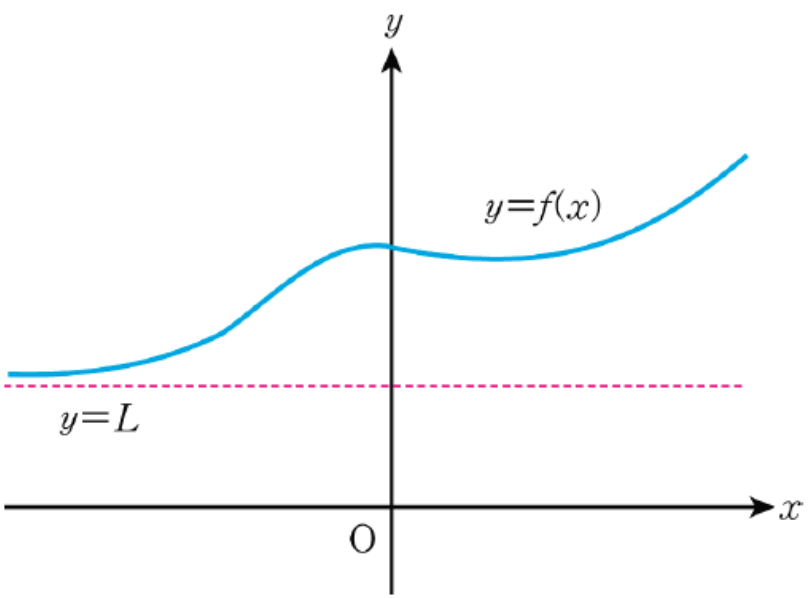


[그림 9] $f(x) = \ln x$

2. 극한의 엄밀한 정의



[그림 10] $\lim_{x \to +\infty} f(x) = L$



[그림 11] $\lim_{x \to -\infty} f(x) = L$

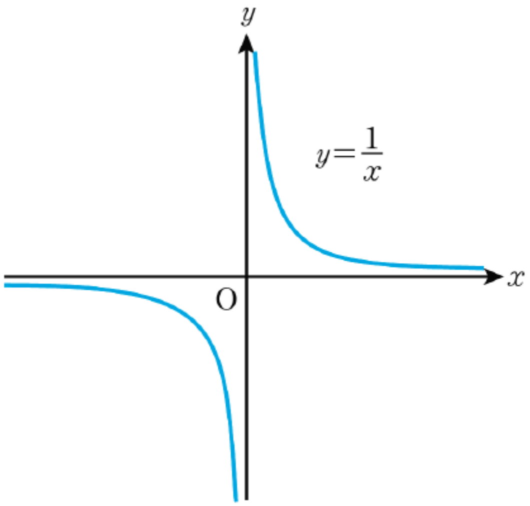
2. 극한의 엄밀한 정의

예제 13 **무한대에서의 극한**

$\lim_{x \to -\infty} \frac{1}{x}$과 $\lim_{x \to \infty} \frac{1}{x}$을 구하여라.

풀이

$\lim_{x \to -\infty} \frac{1}{x} = 0$이고 $\lim_{x \to \infty} \frac{1}{x} = 0$이다.



[그림 12] $f(x) = \frac{1}{x}$

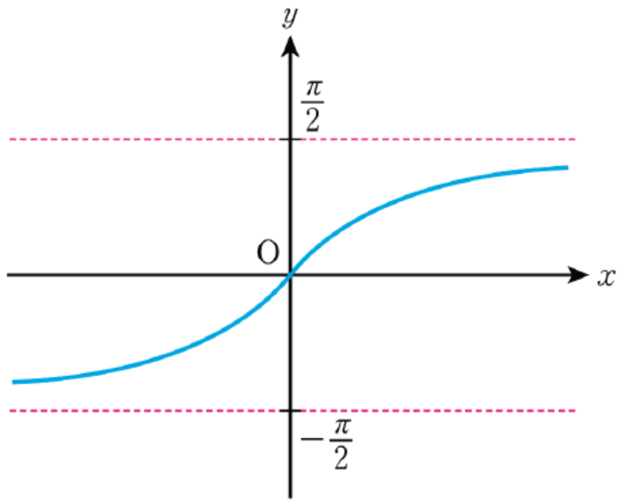
2. 극한의 엄밀한 정의

예제 14 **삼각함수 무한대에서의 극한**

$\lim_{x \to -\infty} \tan^{-1} x$와 $\lim_{x \to \infty} \tan^{-1} x$를 구하여라.

풀이

$\lim_{x \to -\infty} \tan^{-1} x = -\frac{\pi}{2}$이고 $\lim_{x \to \infty} \tan^{-1} x = \frac{\pi}{2}$이다.



[그림 13] $f(x) = \tan^{-1} x$

2. 극한의 엄밀한 정의

예제 15 **무한대 극한 구하기**

$\displaystyle\lim_{x\to\infty}\frac{2x^3-5x+3}{5x^3+4x^2+x}$ 을 구하여라.

풀이

$$\lim_{x\to\infty}\frac{2x^3-5x+3}{5x^3+4x^2+x}=\lim_{x\to\infty}\frac{2-\dfrac{5}{x^2}+\dfrac{3}{x^3}}{5+\dfrac{4}{x}+\dfrac{1}{x^2}}=\frac{2}{5}$$ 이다.

2. 극한의 엄밀한 정의

예제 17 **상대성이론 속 무한극한**

상대성 이론에서 속도 v인 입자의 질량 m은

$$m = \frac{m_0}{\sqrt{1-\frac{v^2}{e^2}}}$$

이다. 이때 m_0는 정지 상태의 입자의 질량이고, e는 빛의 속도이다. 속도 v가 빛의 속도 e의 좌극한으로 가까워지면 질량은 어떤 현상이 일어나는가?

풀이

$v \to e-$일 때 $\sqrt{1-\frac{v^2}{e^2}} \to 0$이므로 $\lim\limits_{v \to e-} m = \lim\limits_{v \to e-} \frac{m_0}{\sqrt{1-\frac{v^2}{e^2}}} = \infty$이다. 따라서 속도 v가 빛의 속도 e의 좌극한으로 가까워지면 질량은 무한으로 커지게 된다.

2. 극한의 엄밀한 정의

예제 18 **빗방울 속도**

시간이 t일 때 떨어지는 빗방울 속도 $v(t)$는

$$v(t) = v_0\left(1 - e^{-\frac{gt}{v_0}}\right)$$

이다. 여기서 g는 중력가속도, v_0는 빗방울 종단속도이다. 시간이 무한히 흐를 때 떨어지는 빗방울 속도는 어떻게 변화하는가?

풀이

$\lim\limits_{t\to\infty} v(t) = \lim\limits_{t\to\infty} v_0\left(1 - e^{-\frac{gt}{v_0}}\right) = v_0$이므로 시간이 무한히 흐를 때 떨어지는 빗방울 속도는 빗방울의 종단속도에 가까워진다.

3. 극한의 성질

정리 2 극한정리

n을 양의 정수, c를 임의의 상수라 하고, 두 함수 f, g가 점 $x=a$에서 유한인 극한값을 갖는다고 하자. 그러면 다음 성질을 만족한다.

(a) $\lim_{x\to a} c = c$

(b) $\lim_{x\to a} x = a$

(c) $\lim_{x\to a} c\,f(x) = c\lim_{x\to a} f(x)$ (상수배 법칙)

(d) $\lim_{x\to a}[f(x)\pm g(x)] = \lim_{x\to a} f(x) \pm \lim_{x\to a} g(x)$ (합, 차 법칙)

(e) $\lim_{x\to a}[f(x)g(x)] = \lim_{x\to a} f(x)\lim_{x\to a} g(x)$ (곱의 법칙)

(f) $\lim_{x\to a}\dfrac{f(x)}{g(x)} = \dfrac{\lim_{x\to a} f(x)}{\lim_{x\to a} g(x)}$ (단, $\lim_{x\to a} g(x)\neq 0$) (몫의 법칙)

(g) $\lim_{x\to a}[f(x)]^n = [\lim_{x\to a} f(x)]^n$ (거듭제곱의 법칙)

(h) $\lim_{x\to a}\sqrt[n]{f(x)} = \sqrt[n]{\lim_{x\to a} f(x)}$ (단, n이 짝수일 때 $\lim_{x\to a} f(x) > 0$) (제곱근의 법칙)

3. 극한의 성질

예제 19 **극한정리를 이용한 극한값 구하기**

극한정리를 이용하여 $\lim_{x \to 2} \sqrt[5]{\dfrac{x^3 - 2x + 5}{x^2 - 2}}$ 를 구하여라.

풀이

[정리 2]의 성질을 적용해서 극한값을 구해보면 다음과 같다.

$$\lim_{x \to 2} \sqrt[5]{\frac{x^3 - 2x + 5}{x^2 - 2}} = \sqrt[5]{\lim_{x \to 2} \frac{x^3 - 2x + 5}{x^2 - 2}} \quad \text{(정리 (h)에 의해)}$$

$$= \sqrt[5]{\frac{\lim_{x \to 2}(x^3 - 2x + 5)}{\lim_{x \to 2}(x^2 - 2)}} \quad \text{(정리 (f)에 의해)}$$

$$= \sqrt[5]{\frac{\lim_{x \to 2} x^3 - 2\lim_{x \to 2} x + \lim_{x \to 2} 5}{\lim_{x \to 2} x^2 - \lim_{x \to 2} 2}} \quad \text{(정리 (c), (d)에 의해)}$$

$$= \sqrt[5]{\frac{8 - 4 + 5}{4 - 2}} = \sqrt[5]{\frac{9}{2}} \quad \text{(정리 (a), (b), (g)에 의해)}$$

3. 극한의 성질

예제 20 **극한정리를 사용할 수 없는 극한**

$\lim_{x \to 2} \frac{x^3 - 8}{x - 2}$ 을 구하여라.

풀이

$x \to 2$ 일 때 분모의 극한값이 0이므로 극한정리를 적용할 수 없다. $\lim_{x \to 2} \frac{x^3 - 8}{x - 2}$ 의 극한값은 분자를 인수분해한 후 분모를 제거해서 구해야 한다. 따라서

$$\lim_{x \to 2} \frac{x^3 - 8}{x - 2} = \lim_{x \to 2} \frac{(x-2)(x^2+2x+4)}{x-2} = \lim_{x \to 2} (x^2+2x+4) = 12$$

3. 극한의 성질

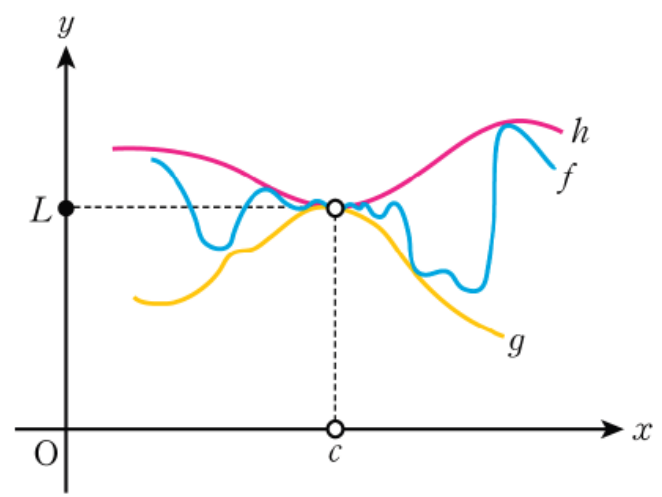
두 함수가 어떤 점에서 같은 극한을 갖고 , 어떤 함수가 두 함수사이에서
값을 가지면 그 함수도 똑 같은 값의 극한을 갖는다 .

정리 3 **조임정리**squeeze theorem **또는 샌드위치 정리**

함수 f, g, h가 $x \neq c$인 점 c를 포함하는 열린구간에 있는 모든 x에 대하여,

$g(x) \leq f(x) \leq h(x)$이고 $\lim_{x \to c} g(x) = \lim_{x \to c} h(x) = L$이면

$\lim_{x \to c} f(x) = L$이다.



[그림 14] 조임정리(샌드위치 정리)

3. 극한의 성질

예제 21 **조임정리를 이용한 극한값 구하기**

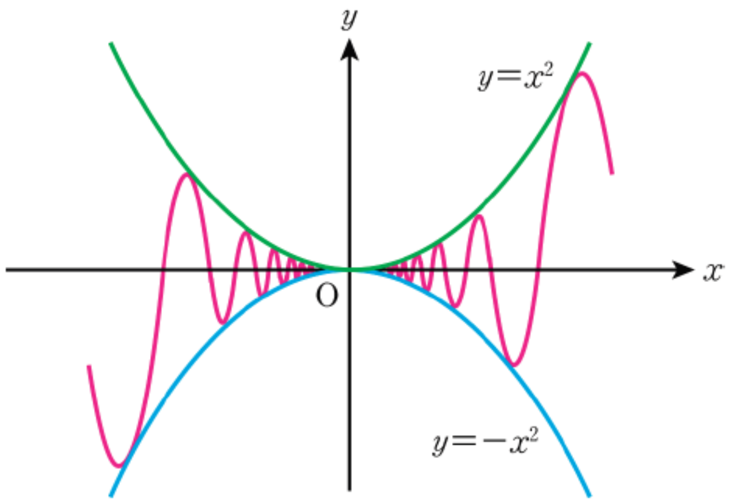
$\lim_{x \to 0} x^2 \sin\left(\frac{1}{x}\right)$을 구하여라.

풀이

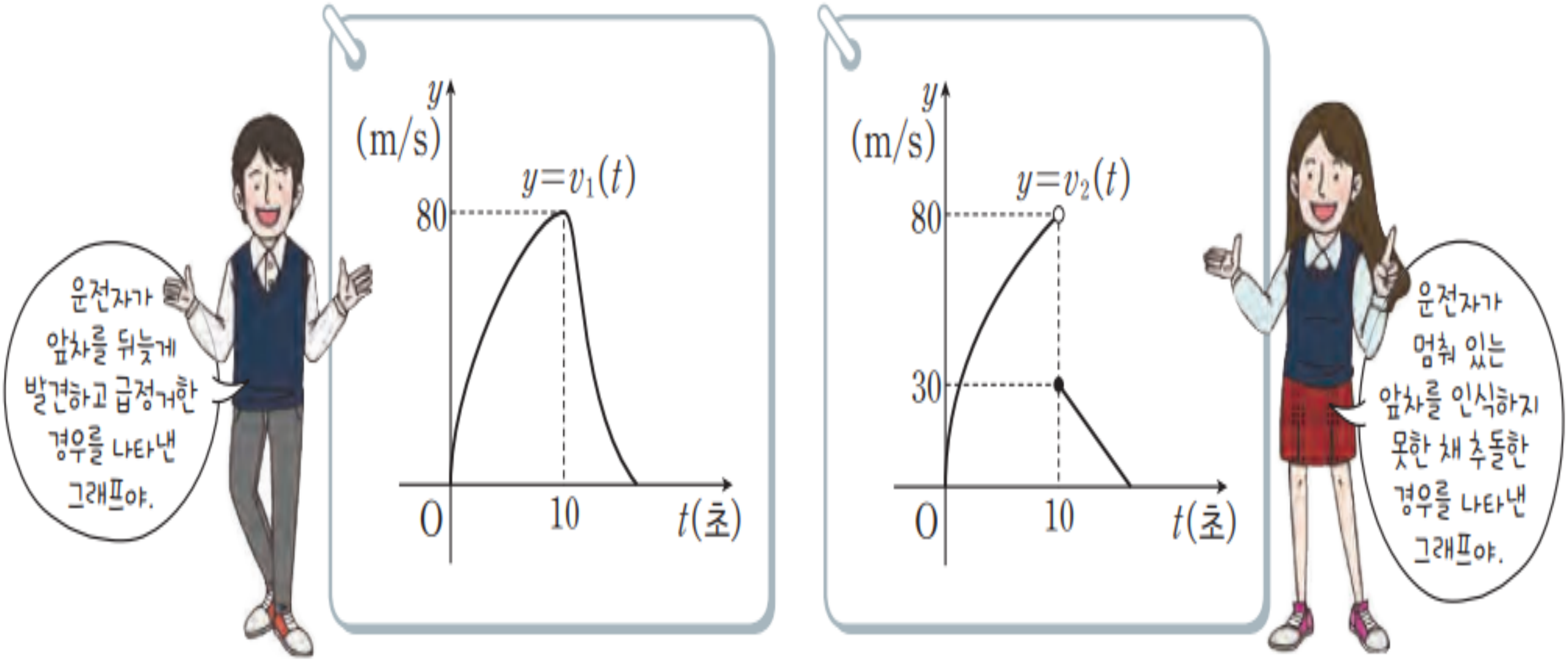
모든 $x(\neq 0)$에 대하여 $-1 \leq \sin\left(\frac{1}{x}\right) \leq 1$이다. 또한 x^2을 모든 식에 곱하여도 부등식의 변화는 없으므로

$-x^2 \leq x^2 \sin\left(\frac{1}{x}\right) \leq x^2$이다. $\lim_{x \to 0}(-x^2) = 0 = \lim_{x \to 0} x^2$이므로

조임정리에 의해 $\lim_{x \to 0} x^2 \sin\left(\frac{1}{x}\right) = 0$이다.



[그림 15] $f(x) = x^2 \sin\left(\frac{1}{x}\right)$

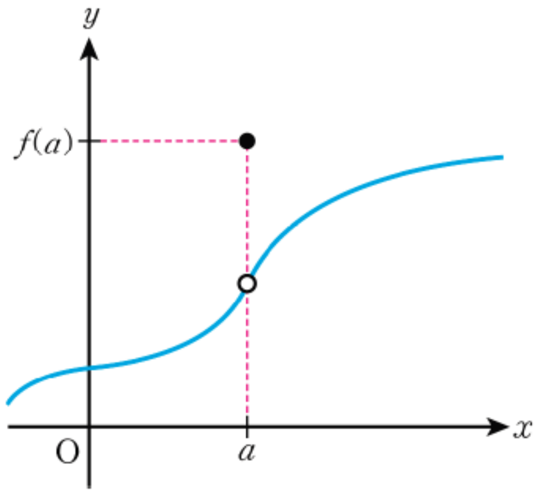

운전자가 앞차를 뒤늦게 발견하고 급정거한 경우를 나타낸 그래프야.
y (m/s)
$y=v_1(t)$
80
0
10
t(초)
y (m/s)
$y=v_2(t)$
80
30
0
10
t(초)
운전자가 멈춰 있는 앞차를 인식하지 못한 채 추돌한 경우를 나타낸 그래프야.

CALCULUS

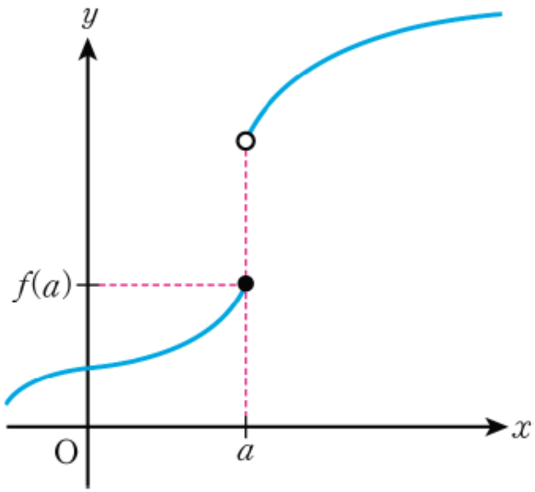
2.2 연속

연속함수

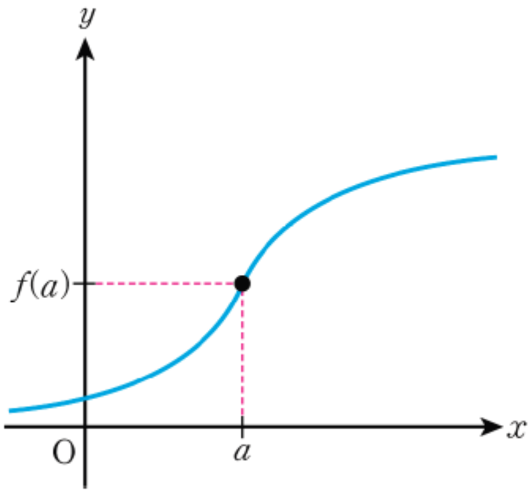
- 연속함수
  - 어떤 함수의 그래프가 끊어짐이 없이 연결된 경우 [그림 3]
  - [그림 1] : 극한값이 존재하지 않음
  - [그림 2] : 함수값과 극한값이 다름



[그림 1]



[그림 2]



[그림 3]

연속함수

정의 1 연속함수

함수 f가 점 a를 포함하는 열린구간에서 정의될 때 다음 (a), (b), (c)는 동치이다.

(a) f가 a에서 연속이다. 함수 f(x)가 x=a에서 정의되어 있다.

(b) $\lim_{x \to a} f(x) = f(a)$이다.

(c) 임의의 $\varepsilon > 0$에 대하여 적당한 $\delta > 0$가 존재하여 $|x-a| < \delta$이면 $|f(x) - f(a)| < \varepsilon$이 성립한다. 극한값

연속함수

정리 1 연속함수의 성질

n을 양의 정수, c를 임의의 상수, f와 g를 $x=a$에서 연속인 함수라 하면,

(a) cf도 $x=a$에서 연속이다.

(b) $f \pm g$도 $x=a$에서 연속이다.

(c) fg도 $x=a$에서 연속이다.

(d) $\dfrac{f}{g}$도 $x=a$에서 연속이다(단, $g(a) \neq 0$일 때).

(e) $(f)^n$도 $x=a$에서 연속이다.

(f) $\sqrt[n]{f}$도 $x=a$에서 연속이다(단, n이 짝수일 때 $f(a)>0$).

연속함수

예제 1 **함수의 연속성**

모든 실수에서 함수 $f(x)=\dfrac{x^2+4x+3}{x+1}$ 의 연속성을 조사하여라.

풀이

함수 $f(x)$는 $x \neq -1$ 일 때 $f(x)=\dfrac{x^2+4x+3}{x+1}=\dfrac{(x+3)(x+1)}{(x+1)}=x+3$ 이고, $x=-1$ 일 때 정의되지 않는 함수이다. 따라서 $x=-1$ 에서 불연속이고, 그 이외의 점에서는 연속인 함수이다.

불연속점에서 함숫값을 극한값과 일치시켜 줄때 불연속점 제거

예제 2 **제거가능 불연속함수**

함수 $f(x)=\dfrac{x^2+4x+3}{x+1}$ 을 모든 실수에서 연속이 되도록 정의하여라.

풀이

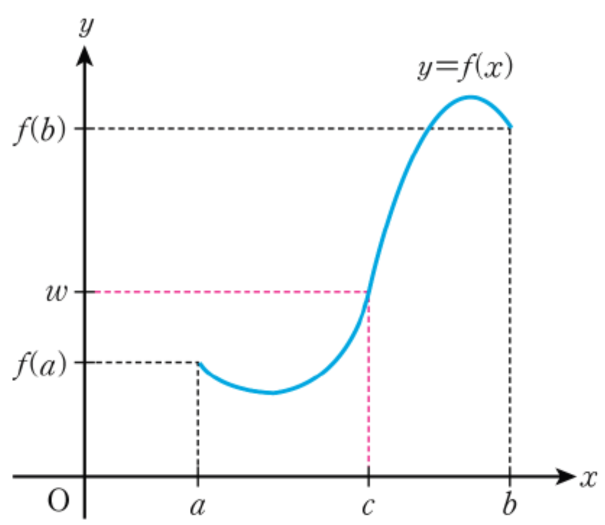
함수 $f(x)=\begin{cases} \dfrac{x^2+4x+3}{x+1}, & x \neq -1 \\ L, & x=-1 \end{cases}$ 로 생각해보자. 불연속점에서 함숫값을 극한값으로 정의하면 불연속점을 제거할 수 있다. $x=-1$ 에서 극한값을 생각해보면 $\lim\limits_{x\to-1}\dfrac{x^2+4x+3}{x+1}=\lim\limits_{x\to-1}(x+3)=2$ 이므로 $L=2$ 라 하자. 그러면 함수 $f(x)$는 모든 실수에서 연속함수이다.

사잇값 정리=중간값 정리

구간에 정의된 실수값 연속함수가 임의의 두 함수값 사이의 모든 수를 함수값으로 포함한다

정리 3 사잇값 정리

함수 f가 닫힌구간 $[a, b]$에서 연속이고 w가 $f(a)$와 $f(b)$ 사이의 임의의 수라고 하면 $f(c) = w$를 만족하는 점 c가 a와 b 사이에 반드시 존재한다.



[그림 5] 사잇값 정리

최대, 최소 정리

정리 5 **최대, 최소 정리**

함수 f가 닫힌구간 $[a,\ b]$에서 연속이면 f는 $[a,\ b]$에서 최댓값과 최솟값을 가진다.

CALCULUS

미분적분학

기초부터 응용까지

Q & A

수고하셨습니다.