2장 2차 선형미분방정식

응용 분야 : 역학적, 전기적 진동의 파동, 열전도 등

2.1 2차 제차 선형상미분방정식

$$y'' + p(x)y' + q(x)y = u(x) \longrightarrow$$

계수

$u(x) = 0$: 제차(Homogeneous) 선형미분방정식

$u(x) \neq 0$: 비제차(Non homogeneous) 선형미분방정식

(1) 제차 미분방정식의 선형성

① y_1과 y_2 $y''+p(x)y'+q(x)y=0$

$\longrightarrow$ $y_1 + y_2$ 도 해가 된다.

$$\because \quad (y_1+y_2)''+p(x)(y_1+y_2)'+q(x)(y_1+y_2)$$

$$= \underbrace{(y_1''+p(x)y_1'+q(x)y_1)}_{0} + \underbrace{(y_2''+p(x)y_2'+q(x)y_2)}_{0} = 0$$

(1) y_1이 $y''+p(x)y'+q(x)y=0$라면

$\longrightarrow$ cy_1 (c는 상수)도 해가 된다.

$$\because \quad (cy_1)''+p(x)(cy_1)'+q(x)(cy_1) = c\underbrace{(y_1''+p(x)y_1'+q(x)y_1)}_{0} = 0$$

①과 ②를 통합하면

③ y_1과 y_2 $y''+p(x)y'+q(x)y=0$

$\longrightarrow$ $c_1y_1 + c_2y_2$ㄷ 해가 된다.(중첩의 원리 또는 선형성의 원리)

주어진 해에 어떤 상수를 더하거나 곱함으로서 추가적인 해를 얻을수있다.

Ex1) 제차 선형 미방 : 해의 중첩

함수 $y=\cos x$ 와 $y=\sin x$는 모든 x에 대해

제차 선형미방 $\boxed{y'' + y = 0}$ 의 해.

증명) $(\cos x)'' = -\cos x$ 대입

$y'' + y = -\cos x + \cos x = 0$

$y = \sin x$ 도 마찬가지.

$\Rightarrow$ $y_1 (= \cos x)$ $y_2 (= \sin x)$

$y = c_1 y_1 + c_2 y_2$ (중첩의 원리)

(선형성 〃)

예제 4) 초기값 문제

$$y'' + y = 0 \quad , \ y(0) = 3.0 \ , \ y'(0) = -0.5$$

sol) 1단계 : $y = c_1 \cos x + c_2 \sin x \rightarrow$ 일반해

2단계 : 특수해 $y' = -c_1 \sin x + c_2 \cos x$

초기값 $\cos 0 = 1 \ , \ \sin 0 = 0$

$y(0) = c_1 = 3.0 \qquad y'(0) = c_2 = -0.5$

$$\boxed{y = 3.0 \cos x - 0.5 \sin x}$$

2.2 상수계수를 가지는 2차 제차미분방정식

\- 상수 계수를 가지는 1차 미방 $y' + ky = 0$

$$\frac{dy}{dx} + ky = 0 \xrightarrow{\text{변수분리}} \frac{dy}{y} = -k\,dx$$

$$\ln|y| = -kx + c^* \longrightarrow \boxed{y = c e^{-kx}} \text{ 일반해,}$$

\- 2차 미방 $y'' + ay' + by = 0$

아이디어 이용

해 : $y = e^{\lambda x}$ λ : 상수

$$y' = \lambda e^{\lambda x}, \quad y'' = \lambda^2 e^{\lambda x}$$

대입 $\lambda^2 e^{\lambda x} + a\lambda e^{\lambda x} + b e^{\lambda x} = 0$

$$\underbrace{(\lambda^2 + a\lambda + b)}_{=0} e^{\lambda x} = 0$$

$$\boxed{\lambda^2 + a\lambda + b = 0 \quad \text{특성방정식.}}$$

$$\lambda_1 = \frac{1}{2}\left(-a + \sqrt{a^2 - 4b}\right)$$

$$\lambda_2 = \frac{1}{2}\left(-a - \sqrt{a^2 - 4b}\right)$$

$$y_1 = e^{\lambda_1 x}, \quad y_2 = e^{\lambda_2 x}$$

2.2 상수계수를 가지는 2차 제차미분방정식

$$y'' + ay' + by = 0 \quad (a, \ b: \text{ 임의의 상수})$$

해의 형태 가정; $y \triangleq e^{\lambda x}$, λ는 상수

$y = e^{\lambda x}$ 가 $y'' + ay' + by = 0$ 이 되기 위해서는 다음 관계가 성립해야 한다.

$$y' = \lambda e^{\lambda x}, \ y'' = \lambda^2 e^{\lambda x}$$

$$\lambda^2 e^{\lambda x} + a\lambda e^{\lambda x} + b e^{\lambda x} = 0$$

$$e^{\lambda x}(\lambda^2 + a\lambda + b) = 0$$

$$\therefore \lambda^2 + a\lambda + b = 0 \longleftarrow \text{특성 방정식}$$

특성방정식의 두 개의 해를 λ_1, λ_2라 하면

$$y_1 = e^{\lambda_1 x}, \quad y_2 = e^{\lambda_2 x}$$

는 각각 해가 되므로 중첩의 원리에 의해 일반해는 다음과 같다.

$$y = c_1 y_1 + c_2 y_2 = c_1 e^{\lambda_1 x} + c_2 e^{\lambda_2 x}$$

특성방정식은 2차 방정식이므로 판별식에 따라 해의 종류가 다르다.

① $a^2 - 4ac > 0$이면 서로 다른 두 실근 $\lambda_1 \neq \lambda_2$

② $a^2 - 4ac = 0$이면 중근 $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda^*$

③ $a^2 - 4ac < 0$이면 공액복소근 $\lambda_1 = p + iq,\ \lambda_2 = p - iq$

(1) 특성방정식이 서로 다른 두 실근을 가지는 경우

$\lambda^2 + a\lambda + b = 0 \longrightarrow$ 서로 다른 두 실근 $\lambda_1 \mp \lambda_2$

$y_1 = e^{\lambda_1 x}$ $y_2 = e^{\lambda_2 x}$ 수로 각각 해가 된다.

$$\therefore\ y = c_1 e^{\lambda_1 x} + c_2 e^{\lambda_2 x}$$

<예제> $y'' + 4y' + 3y = 0$

특성방정식 $\lambda^2 + 4\lambda + 3 = 0,\quad (\lambda + 1)(\lambda + 3) = 0$

$\therefore\ \lambda_1 = -1,\quad \lambda_2 = -3$ (서로 다른 두 실근)

일반해 $y = c_1 e^{-x} + c_2 e^{-3x}$

61페이지 예제2)

Ex) 초기값 $y'' + y' - 2y = 0$, $y(0) = 4$, $y'(0) = -5$

$$\lambda^2 + \lambda - 2 = 0$$

$$\begin{cases} \lambda_1 = \frac{1}{2}(-1 + \sqrt{9}) = 1 \\ \lambda_2 = \frac{1}{2}(-1 - \sqrt{9}) = -2 \end{cases}$$

일반해) $y = c_1 e^{x} + c_2 e^{-2x}$

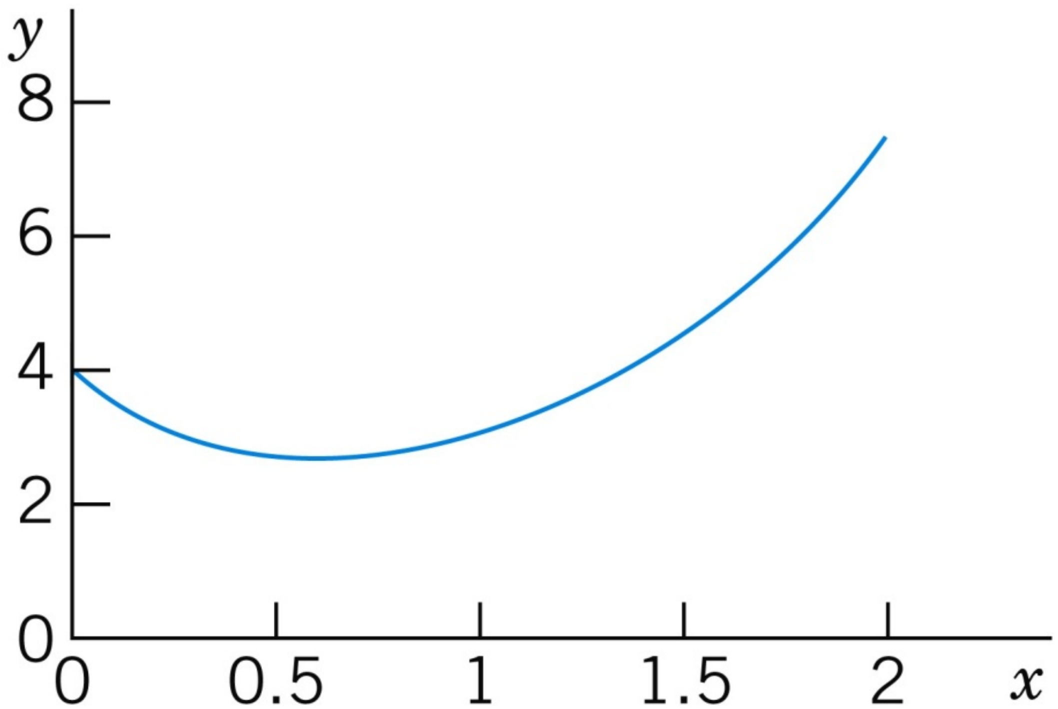
특수해) $y'(x) = c_1 e^{x} - 2c_2 e^{-2x}$

$$\left.\begin{aligned} y(0) &= c_1 + c_2 = 4 \\ y'(0) &= c_1 - 2c_2 = -5 \end{aligned}\right] \quad \begin{aligned} c_1 &= 1 \\ c_2 &= 3 \end{aligned}$$

$$\boxed{\therefore\ y = e^{x} + 3e^{-2x}}$$

$y = ex + 3e{-}2x$

$e^{x} + 3e^{-2x}$



(2) 특성방정식이 중근을 가지는 경우

$$\lambda^2 + a\lambda + b = 0 \longrightarrow$$ 중근 $\lambda_1 = \lambda_2 = -\frac{a}{2}$

$y_1 = e^{-\frac{a}{2}x}$ 는 하나의 해가 된다.

또 다른 해 y_2 결정하는 방법 $\longrightarrow$ 차수감소법(Reduction of Order)

$$y'' + ay' + by = 0$$

y_1 을 한 해라고 가정하고 y_2 를 다음과 같이 가정

$y_2 = u(x)y_1(x)$, $u(x)$는 임의의 함수

$\longrightarrow$ y_2가 또 다른 해가 되도록 함수 $u(x)$ 를!

$$y_2' = u'y_1 + uy_1'$$

$$y_2'' = u''y_1 + 2u'y_1' + uy_1''$$

$\longrightarrow$ y_2, y_2', y_2'' $y'' + ay' + by = 0$ 에 대입하여 u'', u', u

$$u''y_1 + u'(2y_1' + ay_1) + u\underbrace{(y_1'' + ay_1' + by_1)}_{0} = 0$$

$$u''y_1 + u'(2y_1{}' + ay_1) = 0$$

$\Big\downarrow$ $u' \triangleq w$ 치환

$$w' + \left(\frac{2y_1{}' + ay_1}{y_1}\right)w = 0$$

$\Big\downarrow$ 변수 분리

$$\frac{dw}{w} = \left(-\frac{2y_1{}'}{y_1} - a\right)dx$$

$\Big\downarrow$ 적분

$$\ln|w| = -2\ln|y_1| - \int a\,dx$$

$$\therefore w = \frac{1}{y_1{}^2}e^{-\int a\,dx}$$

$\Big\downarrow$ $w = u'$ 관계

$$y_2 = uy_1 = y_1\int w\,dx = xy_1$$

∴ 특성방정식이 중근을 가지는 경우 $y_1 = e^{-\frac{a}{2}x}$ $y_2 = xe^{-\frac{a}{2}x}$

(x가 한번 곱해진다)

<예제> $y'' + 4y' + 4y = 0$

특성방정식 $\lambda^2 + 4\lambda + 4 = 0$

$(\lambda + 2)^2 = 0 \qquad \therefore\ \lambda_1 = \lambda_2 = -2$ (중근)

일반해 $y = c_1 e^{-2x} + c_2 x e^{-2x}$

62페이지 예제4)

초기값

Ex) $y'' + y' + 0.25y = 0$, $y(0) = 3.0$, $y'(0) = -3.5$

$$\lambda^2 + \lambda + 0.25 = (\lambda + 0.5)^2 = 0$$

$$\lambda = -0.5$$

$$y = (c_1 + c_2 x)e^{-0.5x}$$

$$y' = c_2 e^{-0.5x} - 0.5(c_1 + c_2 x)e^{-0.5x}$$

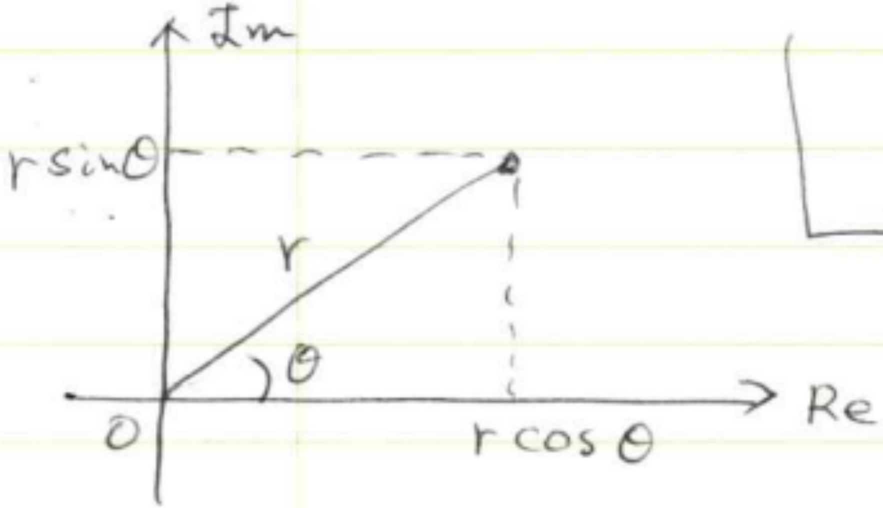
$$y(0) = c_1 = 3.0$$

$$y'(0) = c_2 - 0.5c_1 = -3.5 \Rightarrow c_2 = -2$$

$$\boxed{\therefore\ y = (3 - 2x)e^{-0.5x}}$$

(3) 특성방정식이 복소근을 가지는 경우

☆ 복소수 $z = x + iy$, $i = \sqrt{-1}$



$x = r\cos\theta$, $y = r\sin\theta$

$$z = r\cos\theta + ir\sin\theta$$
$$= r(\cos\theta + i\sin\theta)$$
$$= re^{i\theta}$$

오일러(Euler) 공식 ☆ $\boxed{e^{i\theta} = \cos\theta + i\sin\theta}$

(3) 특성방정식이 복소근을 가지는 경우

$$\lambda^2 + a\lambda + b = 0 \longrightarrow \text{복소근} \quad \lambda_1 = p + iq, \ \ \lambda_2 = p - iq$$

두 개의 근 $\quad y_1 = e^{\lambda_1 x} = e^{(p+iq)x} = e^{px} \cdot e^{iqx}$

$$= e^{px}(\cos qx + i\sin qx)$$

$$y_2 = e^{\lambda_2 x} = e^{(p-iq)x} = e^{px} \cdot e^{-iqx}$$

$$= e^{px}(\cos qx - i\sin qx)$$

y_1과 y_2가 해이므로 중첩의 원리에 의해 y_3와 y_4도 해가 된다.

$$y_3 = \frac{1}{2}(y_1 + y_2) = e^{px}\cos qx$$

$$y_4 = \frac{1}{2i}(y_1 - y_2) = e^{px}\sin qx$$

∴ 일반해 $\quad y = c_1 y_3 + c_2 y_4 = e^{px}(c_1\cos qx + c_2\sin qx)$

<예제> $y'' + y' + y = 0$

특성방정식 $\lambda^2 + \lambda + 1 = 0$

$$\lambda_1 = -\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}, \quad \lambda_2 = -\frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2} \quad \left(p = -\frac{1}{2}, \ q = \frac{\sqrt{3}}{2} \right)$$

일반해 $$y = e^{-\frac{1}{2}x}\left(c_1 \cos\frac{\sqrt{3}}{2}x + c_2 \sin\frac{\sqrt{3}}{2}x \right)$$

<특성근의 종류에 따른 일반해>

특성 방정식의 근	해의 기저	일반해
서로 다른 실근 λ_1, λ_2	$e^{\lambda_1 x}$ $e^{\lambda_2 x}$	$y = c_1 e^{\lambda_1 x} + c_2 e^{\lambda_2 x}$
중근 $\lambda_1 = \lambda_2 = -\frac{1}{2}a$	$e^{-\frac{1}{2}ax}$ $xe^{-\frac{1}{2}ax}$	$y = c_1 e^{-\frac{1}{2}ax} + c_2 xe^{-\frac{1}{2}ax}$
공액 복소근 $\lambda_1 = p + iq$ $\lambda_2 = p - iq$	$e^{px}\cos qx$ $e^{px}\sin qx$	$y = e^{px}(c_1 \cos qx + c_2 \sin qx)$