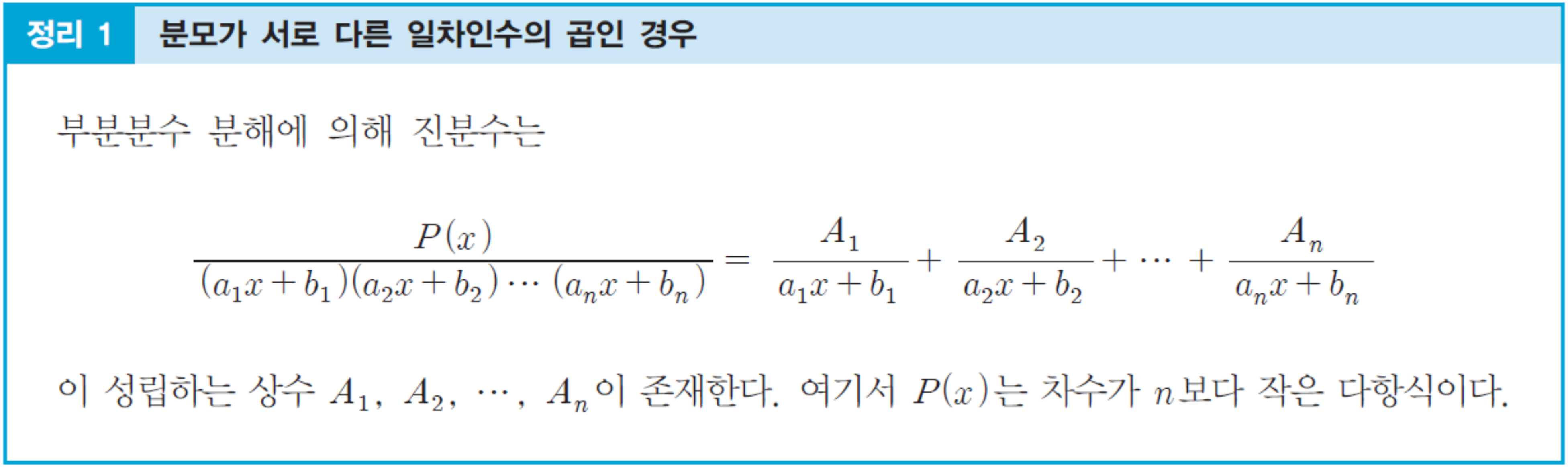
CALCULUS

6.3 유리함수의 적분

1. 부분함수를 이용한 유리함수의 적분

- 두 다항 함수 $f(x)$, $g(x)$의 비 ($g(x) \neq 0$)로 정의되는 유리함수의 적분
  - 분자의 차수가 분모의 차수보다 크거나 같은 경우

    $= q(x)+$
  - 는 진분수가 되고 진분수의 적분방법으로 해결



정리 1 **분모가 서로 다른 일차인수의 곱인 경우**

부분분수 분해에 의해 진분수는

$$\frac{P(x)}{(a_1x+b_1)(a_2x+b_2)\cdots(a_nx+b_n)} = \frac{A_1}{a_1x+b_1} + \frac{A_2}{a_2x+b_2} + \cdots + \frac{A_n}{a_nx+b_n}$$

이 성립하는 상수 A_1, A_2, $\cdots$, A_n이 존재한다. 여기서 $P(x)$는 차수가 n보다 작은 다항식이다.

1. 부분함수를 이용한 유리함수의 적분

예제 1 **분모가 서로 다른 일차인수의 곱인 경우**

$\int \frac{x}{x^2-1}\,dx$ 를 구하여라.

풀이

분모가 $(x-1)(x+1)$ 로 인수분해되므로 주어진 유리함수를 부분분수로 분해하면

$$\frac{x}{(x-1)(x+1)} = \frac{A_1}{x-1} + \frac{A_2}{x+1}$$

이다. A_1, A_2 를 구하기 위해 양변에 $(x-1)(x+1)$ 를 곱하여 정리하면 $x = A_1(x+1) + A_2(x-1)$ 을 얻는다. 항등식이 성립하려면 $A_1 + A_2 = 1$, $A_1 - A_2 = 0$ 이 되어야 하고, 이 연립방정식을 풀면 $A_1 = \frac{1}{2}$, $A_2 = \frac{1}{2}$ 을 얻을 수 있다. 따라서

$$\frac{x}{(x-1)(x+1)} = \frac{A_1}{x-1} + \frac{A_2}{x+1} = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{x-1} + \frac{1}{x+1}\right)$$

이고, 주어진 적분은

$$\int \frac{x}{x^2-1}\,dx = \int \frac{1}{2}\left(\frac{1}{x-1} + \frac{1}{x+1}\right)dx$$
$$= \frac{1}{2}\int \frac{1}{x-1}\,dx + \frac{1}{2}\int \frac{1}{x+1}\,dx = \frac{1}{2}\ln|x-1| + \frac{1}{2}\ln|x+1| + C$$

1. 부분함수를 이용한 유리함수의 적분

예제 2 **분모가 서로 다른 일차인수의 곱인 경우**

$\int \frac{3x^2-7x-2}{x^3-x}dx$를 구하여라.

풀이 분모가 $x(x-1)(x+1)$로 인수분해되므로 주어진 유리함수를 부분분수로 분해하면

$$\frac{3x^2-7x-2}{x(x-1)(x+1)}=\frac{A_1}{x}+\frac{A_2}{x-1}+\frac{A_3}{x+1}$$

이다. A_1, A_2, A_3를 구하기 위해 양변에 $x(x-1)(x+1)$을 곱하여 정리하면

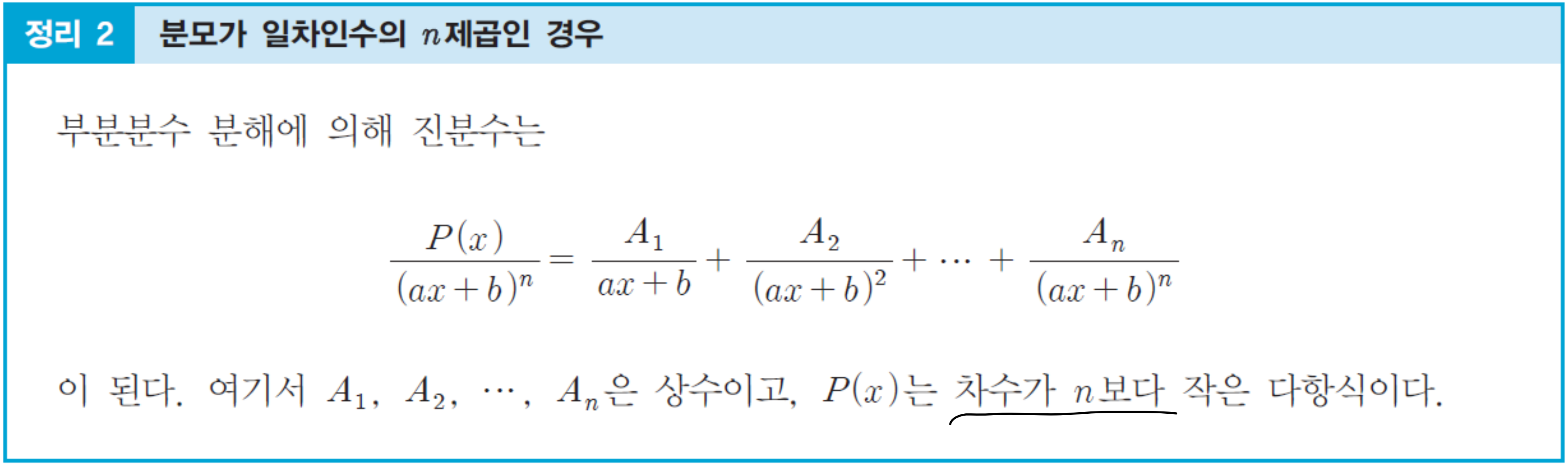
$$3x^2-7x-2=A_1(x-1)(x+1)+A_2x(x+1)+A_3x(x-1)$$

이고, 이 식에 $x=0$, $x=1$, $x=-1$을 각각 대입하면 $A_1=2$, $A_2=-3$, $A_3=4$가 된다. 따라서 적분은

$$\int \frac{3x^2-7x-2}{x^3-x}dx=\int\left(\frac{2}{x}-\frac{3}{x-1}+\frac{4}{x+1}\right)dx$$

$$=2\ln|x|-3\ln|x-1|+4\ln|x+1|+C$$

1. 부분함수를 이용한 유리함수의 적분



정리 2 **분모가 일차인수의 n제곱인 경우**

부분분수 분해에 의해 진분수는

$$\frac{P(x)}{(ax+b)^n} = \frac{A_1}{ax+b} + \frac{A_2}{(ax+b)^2} + \cdots + \frac{A_n}{(ax+b)^n}$$

이 된다. 여기서 A_1, A_2, $\cdots$, A_n은 상수이고, $P(x)$는 차수가 n보다 작은 다항식이다.

1. 부분함수를 이용한 유리함수의 적분

예제 3 **분모가 일차인수의 세제곱인 경우**

$\int \frac{x^2}{(x-1)^3}\,dx$를 구하여라.

풀이 분모가 일차인수 $x-1$의 3제곱인 경우이므로 주어진 유리함수를 부분분수로 분해하면

$$\frac{x^2}{(x-1)^3} = \frac{A_1}{x-1} + \frac{A_2}{(x-1)^2} + \frac{A_3}{(x-1)^3}$$

이다. A_1, A_2, A_3를 구하기 위해 양변에 $(x-1)^3$을 곱하여 정리하면

$$x^2 = A_1(x-1)^2 + A_2(x-1) + A_3 = A_1x^2 + (-2A_1 + A_2)x + (A_1 - A_2 + A_3)$$

이므로 $A_1 = 1$, $A_2 = 2$, $A_3 = 1$이다. 따라서 적분은

$$\int \frac{x^2}{(x-1)^3}\,dx = \int \left[\frac{1}{x-1} + \frac{2}{(x-1)^2} + \frac{1}{(x-1)^3}\right]dx = \ln|x-1| - \frac{4x-3}{2(x-1)^2} + C$$

1. 부분함수를 이용한 유리함수의 적분

예제 4 **분모가 일차인수의 제곱인 경우**

$\int \frac{x^3+x^2+3x+1}{x^2+2x+1}dx$를 구하여라.

$$\begin{array}{r|l} & x-1 \\ x^2+2x+1 & x^3+x^2+3x+1 \\ & x^3+2x^2+x \\ \hline & -x^2+2x+1 \\ & -x^2-2x-2 \\ \hline & 4x+3 \end{array}$$

$$(x-1)+\frac{4x+2}{x^2+2x+1}$$

$$\frac{1}{2}x^2-1+\int\frac{4x+2}{(x+1)^2}dx$$

$$\frac{a}{(x+1)}+\frac{b}{(x+1)^2}$$

$$\frac{ax+a+b}{(x+1)^2}=\frac{ax+(a+b)}{(x+1)^2} \quad a=4,\ b=-2$$

$$\int\frac{4}{(x+1)}-\frac{2}{(x+1)^2}$$

$$=4\ln|x+1|+\frac{2}{(x+1)}$$

풀이

분자의 차수가 분모의 차수보다 크므로 분자를 분모로 나누면

$$\frac{x^3+x^2+3x+1}{x^2+2x+1}=x-1+\frac{4x+2}{x^2+2x+1}$$

가 된다. 따라서 유리함수 $\frac{4x+2}{x^2+2x+1}$를 부분분수로 분해하면

$$\frac{4x+2}{x^2+2x+1}=\frac{4x+2}{(x+1)^2}=\frac{A_1}{x+1}+\frac{A_2}{(x+1)^2}$$

이고, $(x+1)^2$을 곱하면 $4x+2=A_1(x+1)+A_2$를 얻는다. 이 등식을 풀면 $A_1=4$, $A_2=-2$이다. 그러므로 주어진 적분은

$$\int\frac{x^3+x^2+3x+1}{x^2+2x+1}dx=\int\left[x-1+\frac{4}{x+1}-\frac{2}{(x+1)^2}\right]dx=\frac{x^2}{2}-x+4\ln|x+1|+\frac{2}{x+1}+C$$

1. 부분함수를 이용한 유리함수의 적분

정리 3 **분모가 서로 다른 이차인수의 곱인 경우**

부분분수 분해에 의해 진분수는

$$\frac{P(x)}{(a_1x^2+b_1x+c_1)(a_2x^2+b_2x+c_1)\cdots(a_nx^2+b_nx+c_n)}$$
$$=\frac{A_1x+B_1}{a_1x^2+b_1x+c_1}+\frac{A_2x+B_2}{a_2x^2+b_2x+c_2}+\cdots+\frac{A_nx+B_n}{a_nx^2+b_nx+c_n}$$

이 된다. 여기서 A_i, B_i, $i=1, 2, \cdots, n$은 상수이고, $P(x)$는 차수가 $2n$보다 작은 다항식이다.

1. 부분함수를 이용한 유리함수의 적분

예제 5 **분모가 일차인수와 이차인수의 곱인 경우**

$\int \frac{2-x}{x^3-1}\,dx$를 구하여라.

풀이 분모가 $(x^2+x+1)(x-1)$로 인수분해되므로 주어진 유리함수를 부분분수로 분해하면

$$\frac{2-x}{x^3-1} = \frac{A_1x+B_1}{x^2+x+1} + \frac{A_2}{x-1}$$

이다. 따라서 A_1, A_2, B_1을 구하기 위해 양변에 $(x^2+x+1)(x-1)$을 곱하여 정리하면 $2-x=(A_1x+B_1)(x-1)+A_2(x^2+x+1)$을 얻는다. 이때 항등식의 계수를 비교해보면 $A_1+A_2=0$, $-A_1+B_1+A_2=-1$, $A_2-B_1=2$이므로 $A_1=-\frac{1}{3}$, $A_2=\frac{1}{3}$, $B_1=-\frac{5}{3}$이다. 따라서 적분은

$$\begin{aligned}\int \frac{2-x}{x^3-1}\,dx &= -\frac{1}{3}\int \frac{x+5}{x^2+x+1}\,dx + \frac{1}{3}\int \frac{1}{x-1}\,dx \\ &= -\frac{1}{6}\int \frac{2x+1}{x^2+x+1}\,dx - \frac{3}{2}\int \frac{1}{x^2+x+1}\,dx + \frac{1}{3}\int \frac{1}{x-1}\,dx\end{aligned}$$

1. 부분함수를 이용한 유리함수의 적분

예제 5 **분모가 일차인수와 이차인수의 곱인 경우**

$\int \frac{2-x}{x^3-1}\,dx$를 구하여라.

풀이

먼저 부정적분 $\int \frac{1}{x^2+x+1}\,dx$를 계산해보면

$$\int \frac{1}{x^2+x+1}\,dx = \frac{4}{3}\int \frac{1}{1+\left[\frac{2}{\sqrt{3}}\left(x+\frac{1}{2}\right)\right]^2}\,dx = \frac{2}{\sqrt{3}}\tan^{-1}\left[\frac{2}{\sqrt{3}}\left(x+\frac{1}{2}\right)\right]+C$$

따라서 적분은

$$\begin{aligned}\int \frac{2-x}{x^3-1}\,dx &= -\frac{1}{6}\int \frac{2x+1}{x^2+x+1}\,dx-\frac{3}{2}\int \frac{1}{x^2+x+1}\,dx+\frac{1}{3}\int \frac{1}{x-1}\,dx\\ &= -\frac{1}{6}\ln|x^2+x+1|-\sqrt{3}\tan^{-1}\left[\frac{2}{\sqrt{3}}\left(x+\frac{1}{2}\right)\right]+\frac{1}{3}\ln|x-1|+C\end{aligned}$$

1. 부분함수를 이용한 유리함수의 적분

예제 6 **분모가 서로 다른 이차인수의 곱인 경우**

$\int_0^1 \frac{x^2+3x}{(x^2+2)(x^2+1)}dx$ 를 구하여라.

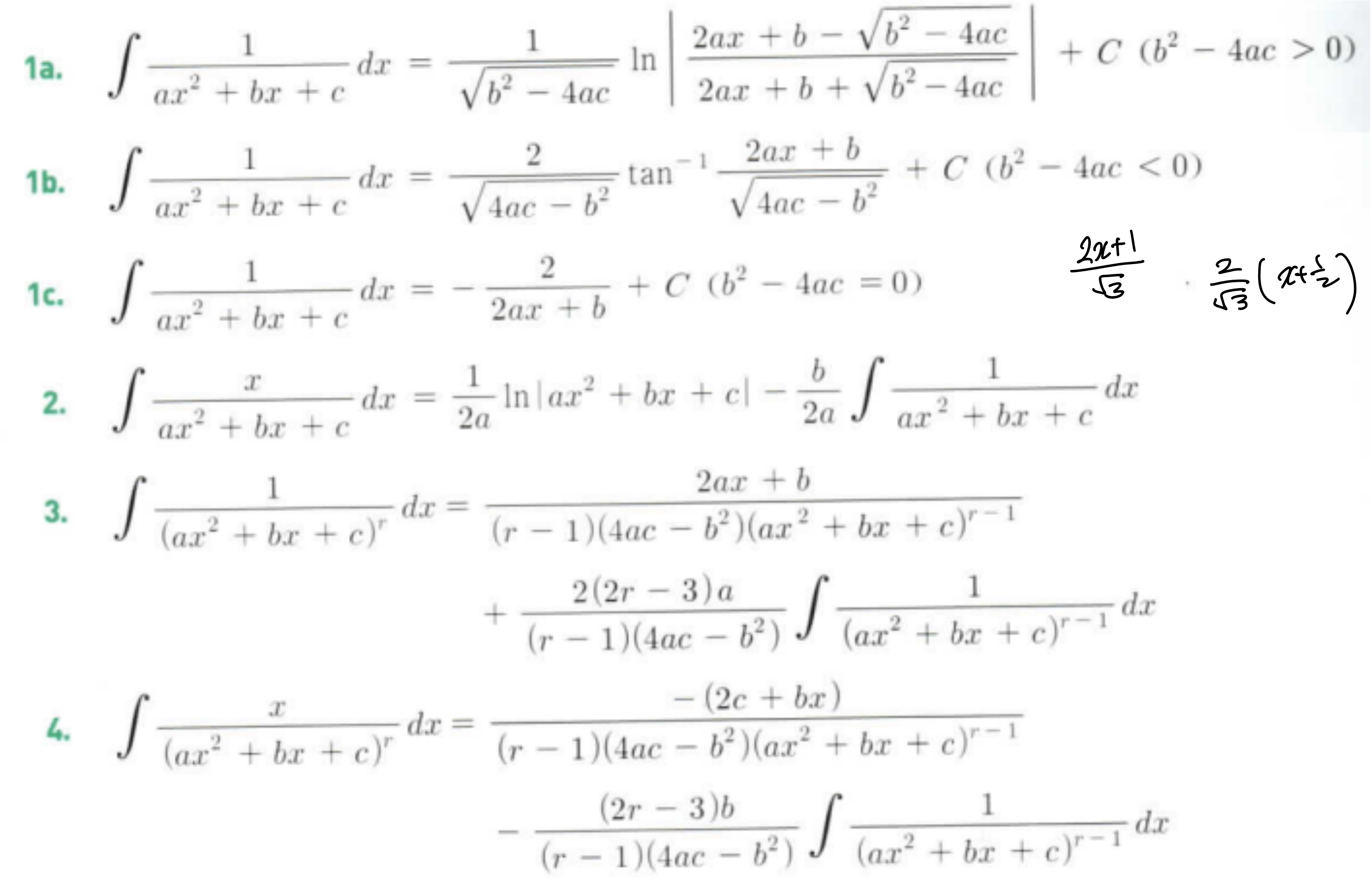
풀이

주어진 유리함수를 부분분수로 분해하면

$$\frac{x^2+3x}{(x^2+2)(x^2+1)} = \frac{A_1x+B_1}{x^2+2} + \frac{A_2x+B_2}{x^2+1}$$

이므로 A_1, B_1, A_2, B_2를 구하기 위해 양변에 $(x^2+2)(x^2+1)$을 곱하여 정리하면 $x^2+3x = (A_1x+B_1)(x^2+1)+(A_2x+B_2)(x^2+2)$이고 $A_1=-3$, $B_1=2$, $A_2=3$, $B_2=-1$이다. 따라서 적분은

$$\begin{aligned}\int_0^1 \frac{x^2+3x}{(x^2+2)(x^2+1)}dx &= \int_0^1 \frac{-3x+2}{x^2+2}dx + \int_0^1 \frac{3x-1}{x^2+1}dx \\ &= -\frac{3}{2}\int_0^1 \frac{2x}{x^2+2}dx + \int_0^1 \frac{2}{x^2+2}dx + \frac{3}{2}\int_0^1 \frac{2x}{x^2+1}dx - \int_0^1 \frac{1}{x^2+1}dx \\ &= -\frac{3}{2}\left[\ln|x^2+2|\right]_0^1 + \sqrt{2}\left[\tan^{-1}\left(\frac{x}{\sqrt{2}}\right)\right]_0^1 + \frac{3}{2}\left[\ln|x^2+1|\right]_0^1 - \left[\tan^{-1}x\right]_0^1 \\ &= 3\ln 2 - \frac{3}{2}\ln 3 + \sqrt{2}\tan^{-1}\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right) - \frac{\pi}{4}\end{aligned}$$



1a. $$\int \frac{1}{ax^2+bx+c}\,dx = \frac{1}{\sqrt{b^2-4ac}}\ln\left|\frac{2ax+b-\sqrt{b^2-4ac}}{2ax+b+\sqrt{b^2-4ac}}\right| + C \quad (b^2-4ac>0)$$

1b. $$\int \frac{1}{ax^2+bx+c}\,dx = \frac{2}{\sqrt{4ac-b^2}}\tan^{-1}\frac{2ax+b}{\sqrt{4ac-b^2}} + C \quad (b^2-4ac<0)$$

1c. $$\int \frac{1}{ax^2+bx+c}\,dx = -\frac{2}{2ax+b} + C \quad (b^2-4ac=0)$$

$\frac{2x+1}{\sqrt{3}}$ $\cdot$ $\frac{2}{\sqrt{3}}\left(x+\frac{1}{2}\right)$

2. $$\int \frac{x}{ax^2+bx+c}\,dx = \frac{1}{2a}\ln|ax^2+bx+c| - \frac{b}{2a}\int \frac{1}{ax^2+bx+c}\,dx$$

3. $$\int \frac{1}{(ax^2+bx+c)^r}\,dx = \frac{2ax+b}{(r-1)(4ac-b^2)(ax^2+bx+c)^{r-1}} + \frac{2(2r-3)a}{(r-1)(4ac-b^2)}\int \frac{1}{(ax^2+bx+c)^{r-1}}\,dx$$

4. $$\int \frac{x}{(ax^2+bx+c)^r}\,dx = \frac{-(2c+bx)}{(r-1)(4ac-b^2)(ax^2+bx+c)^{r-1}} - \frac{(2r-3)b}{(r-1)(4ac-b^2)}\int \frac{1}{(ax^2+bx+c)^{r-1}}\,dx$$