2장 2차 선형미분방정식

2.5 오일러-코시 방정식

2.7 2차 비제차 미분방정식

미정계수법

2.10 매개변수변환법

2.5 오일러-코시 방정식

상수계수를 가지지 않는 2차 제차방정식의 일반해를 구하는 과정은

매우 어렵다. → 특별한 형태의 오일러-코시(Euler-Cauchy) 미분방정식의 해는 쉽

게 구할 수 있다.

$$x^2 y'' + axy' + by = 0 \quad (\, a \text{ 는 } b \text{ 상수})$$

→ 주어진 상수 a 와 b 와 미지의 함수 y(x)

$\boxed{x^2 y'' + axy' + by = 0}$ 형태의 상미분 방정식.

대입

기동제공
$$\begin{cases} y = x^m & \text{해 Idea} \\ y' = mx^{m-1} \\ y'' = m(m-1)x^{m-2} \end{cases}$$

$$x^2 m(m-1)x^{m-2} + axmx^{m-1} + bx^m = 0$$

$$\underbrace{x^m}_{\neq 0} \underbrace{\{m^2 + (a-1)m + b\}}_{= 0} = 0$$

$$\underline{m^2 + (a-1)m + b = 0}$$

$$\hookrightarrow \begin{cases} m_1 = \frac{1}{2}(1-a) + \sqrt{\frac{1}{4}(1-a)^2 - b} \\ m_2 = \frac{1}{2}(1-a) - \sqrt{\frac{1}{4}(1-a)^2 - b} \end{cases}$$

$$x^2 y'' + axy' + by = 0$$ (a 는 b 상수)

해의 형태 가정; $y \triangleq x^m$ (m은 상수)

$$y' = mx^{m-1},\ y'' = m(m-1)x^{m-2}$$

↓ 대입

$$x^2 m(m-1)x^{m-2} + axmx^{m-1} + bx^m = 0$$

$$x^m\{m^2 + (a-1)m + b\} = 0$$

$$\therefore\ m^2 + (a-1)m + b = 0$$ ← 특성방정식(2차 방정식)

특성방정식의 두 개의 근 m_1 , m_2

일반해 $y = c_1 x^{m_1} + c_2 x^{m_2}$

(1) 서로 다른 두 실근을 가지는 경우

$m^2 + (a - 1)m + b = 0 \longrightarrow$ 서로 다른 두 실근 $(m_1 \neq m_2)$

$y_1 = x^{m_1}$과 $y_2 = x^{m_2}$ 함수로 각각 해가 된다.

$\therefore$ 일반해 $y = c_1 x^{m_1} + c_2 x^{m_2}$

<예제> $x^2 y'' - 4xy' + 6y = 0$

특성방정식 $m^2 - 5m + 6 = (m - 2)(m - 3) = 0$

$m_1 = 2,\ m_2 = 3$ (서로 다른 두 실근)

일반해 $y = c_1 x^2 + c_2 x^3$

(1) 서로 다른 두 실근을 가지는 경우

$m_1 \neq m_2$ 이면 $y_1 = x^{m_1}$, $y_2 = x^{m_2}$

↳ $\boxed{y = c_1 x^{m_1} + c_2 x^{m_2}}$

Ex) E-C $x^2 y'' + 1.5 x y' - 0.5 y = 0$

$$m^2 + 0.5m - 0.5 = 0$$

$$(m+1)(m-0.5) = 0$$

$m_1 = 0.5$

$m_2 = -1$

$$y_1 = x^{0.5}, \quad y_2 = x^{-1} = \frac{1}{x}$$

$$y = c_1 y_1 + c_2 y_2 = c_1 x^{0.5} + c_2 \frac{1}{x}$$

$$= c_1 \sqrt{x} + \frac{c_2}{x}$$

(2) 중근을 가지는 경우

$$m^2 + (a - 1)m + b = 0 \longrightarrow \text{중근 } \left(m_1 = m_2 = \frac{1-a}{2}\right)$$

$y_1 = x^{\frac{1-a}{2}}$ 는 하나의 해가 된다.

또 다른 해 y_2 결정하는 방법 $\longrightarrow$ 차수감소법(Reduction of Order)

$$y_2 = u(x)\,y_1(x)$$

$$y_2' = u'y_1 + uy_1'$$

$$y_2'' = u''y_1 + u'y_1' + u'y_1' + uy_1''$$

$$x^2 y'' + axy' + by = 0$$

$$u''x^2 y_1 + u'x(2xy_1' + ay_1) + u(x^2 y_1'' + axy_1' + by_1) = 0$$

y_1 　　　　　　　　 0

$$\therefore\ u''x^2 y_1 + u'xy_1 = 0$$

$$\longrightarrow\ u''x^2 + u'x = 0$$

변수 분리

$$\frac{u''}{u'} = -\frac{1}{x}$$

양변 적분

$$\int \frac{u''}{u'}\,dx = -\int \frac{1}{x}\,dx$$

$$\ln|u'| = -\ln x \longrightarrow u' = \frac{1}{x} \quad \therefore u = \ln x$$

$$\therefore\ y_2 = uy_1 = y_1 \ln x$$

(2) 중근을 가지는 경우

$m^2 + (a-1)m + b = 0 \rightarrow$ 중근

$m_1 = m_2 = \frac{1-a}{2}$

$\boxed{y_1 = x^{\frac{1-a}{2}}}$ ← 하나의 해.

다른해 y_2 결정하는 방법 → 차수 감소법.

$y_2 = u(x)\, y_1(x)$

$y_2' = u' y_1 + u y_1'$

$y_2'' = u'' y_1 + u' y_1' + u' y_1' + u y_1''$

대입 → $x^2 y'' + axy' + by = 0$

$u'' x^2 y_1 + u' x \underline{(2x y_1' + a y_1)} + u \underbrace{(x^2 y_1'' + axy_1' + by_1)}_{=0} = 0$

→ y_1

$\because \cancel{x}x\left(\frac{1-a}{x}\right) x^{\frac{-a-1}{2}} + a x^{\frac{1-a}{2}}$

$= (1-a)\, x^{\frac{1-a}{2}} + a x^{\frac{1-a}{2}}$

$= x^{\frac{1-a}{2}} = y_1$

$u'' x^2 y_1 + u' x y_1 = 0$

$\underbrace{(u'' x^2 + u' x)}_{=0}\, y_1 = 0$

변수분리 $\quad \frac{u''}{u'} = -\frac{1}{x}$

양변적분 $\quad \int \frac{u''}{u'}\, dx = -\int \frac{1}{x}\, dx$

$\ln|u'| = -\ln x \rightarrow u' = \frac{1}{x}$

$\therefore u = \ln x$

→ $\boxed{\begin{aligned} y_2 &= u y_1 \\ &= y_1 \ln x \end{aligned}}$

$\boxed{y = c_1 x^{\frac{1-a}{2}} + c_2 (\ln x)\, x^{\frac{1-a}{2}}}$

<예제> $x^2 y'' - 3xy' + 4y = 0$

특성방정식 $m^2 - 4m + 4 = (m-2)^2 = 0$, $m_1 = m_2 = 2$

일반해 $y = c_1 x^2 + c_2 x^2 \underline{\ln x}$

(3) 공액복소근을 가지는 경우

$$m^2 + (a-1)m + b = 0 \longrightarrow \text{복소근} \quad m_1 = p + iq,\ m_2 = p - iq$$

두 개의 근

$$y_1 = x^{m_1} = x^{p+iq} = x^p \cdot x^{iq} = x^p \cdot e^{iq\ln x}$$
$$= x^p\{\cos(q\ln x) + i\sin(q\ln x)\}$$
$$y_2 = x^{m_2} = x^{p-iq} = x^p \cdot x^{-iq} = x^p \cdot e^{-iq\ln x}$$
$$= x^p\{\cos(q\ln x) - i\sin(q\ln x)\}$$

y_1과 y_2 해이므로 중첩의 원리에 의해 y_3와 y_4도 해가 된다.

$$y_3 = \frac{1}{2}(y_1 + y_2) = x^p\cos(q\ln x)$$
$$y_4 = \frac{1}{2i}(y_1 - y_2) = x^p\sin(q\ln x)$$

∴ 일반해 $\quad y = c_1 y_3 + c_2 y_4 = x^p\{c_1\cos(q\ln x) + c_2\sin(q\ln x)\}$

<예제> $x^2 y'' + 7xy' + 13y = 0$

특성방정식 $m^2 + 6m + 13 = 0$

$\longrightarrow \quad m_1 = -3 + 2i, \quad m_2 = -3 - 2i$

일반해 $y = x^{-3}\{c_1 \cos 2\ln x + c_2 \sin 2\ln x\}$

<특성근의 종류에 따른 일반해>

보조방정식의 근	해의 기저	일반해
서로 다른 실근 m_1, m_2	x^{m_1} x^{m_2}	$y = c_1 x^{m_1} + c_2 x^{m_2}$
중근 $\lambda_1 = \lambda_2 = \frac{1-a}{2}$	$x^{\frac{1-a}{2}}$ $(\ln x)\, x^{\frac{1-a}{2}}$	$y = c_1 x^{\frac{1-a}{2}} + c_2 (\ln x)\, x^{\frac{1-a}{2}}$
공액 복소근 $m_1 = p + iq$ $m_2 = p - iq$	$x^p \cos(q \ln x)$ $x^p \sin(q \ln x)$	$y = x^p \{c_1 \cos(q \ln x) + c_2 \sin(q \ln x)\}$

2.7 2차 비제차 미분방정식

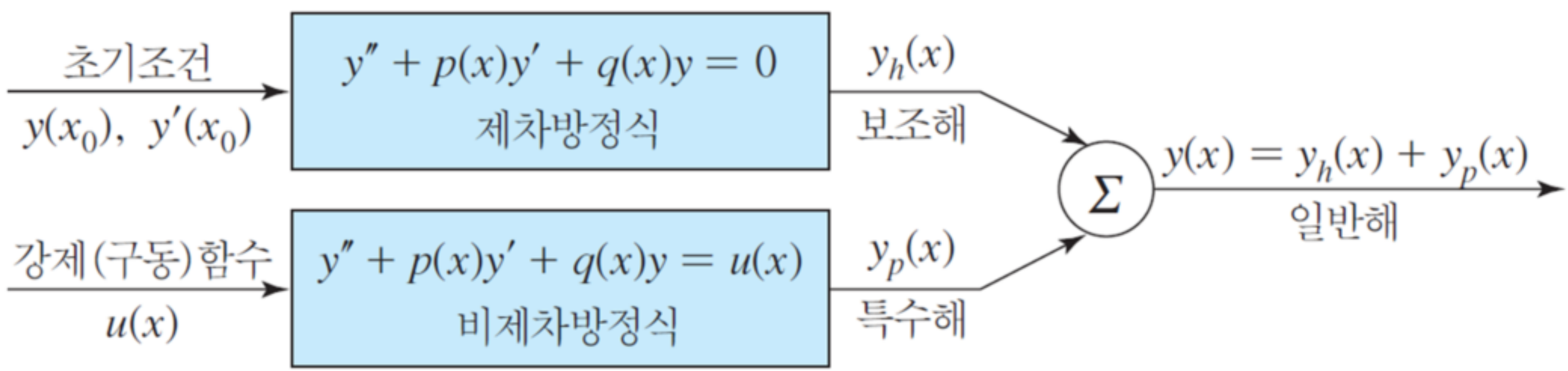
$$y''+p(x)y'+q(x)y=u(x)$$

<해법> ① $y''+p(x)y'+q(x)y=0$ 하는 보조해 를 구한 $y_h(x)$

② $y''+p(x)y'+q(x)y=u(x)$ 를 만족하는 특수해 를 구한 $y_p(x)$

③ 보조해와 특수해를 합하여 $y(x)=y_h(x)+y_p(x)$

④ 초기 조건이 주어져 있다면 초기조건을 ③에 대입하여 미지의 상수를 결정한다.



특수해 구하는 방법

- 미정 계수법
- 매개 변수 변환법
- 라플라스(Laplace) 변환법
- 미분 연산자 방법

미정계수법

특수해를 구하는 가장 일반적인 방법으로 외부에서 강제되는 함수 의 $u(x)$ 형태로부터 특수해를 유사한 형태로 가정하여 해를 구하는 방법

(선형인 경우만 적용 가능)

$y'' + 2y' = 3y$

$2k_1 + 4k_1x + \overset{2k_2}{\ } + 3k_1x^2 + 3k_2x + 3k_3 = 3x^2.$

$\hookrightarrow 3k_1x^2 + (3k_2 + 4k_1)x + (2k_2 + 3k_3 + 2k_1) = 3x^2$

<예제> $y'' + 2y' = 3y = 3x^2$ +인듯

강제함수 $u(x) = 3x^2$ (2차 다항 함수)

$\longrightarrow$ 특수해 $y_p(x) = k_1x^2 + k_2x + k_3$ (2차 다항 함수)로 가정!

k_1, k_2, k_3의 미정계수

$y_p(x)$를 미분하여 주어진 미분방정식에 대입하면

$$y_p' = 2k_1x + k_2, \quad y_p'' = 2k_1$$

$$3k_1x^2 + (4k_1 + 3k_2)x + (2k_1 + 2k_2 + 3k_3) = 3x^2$$

3 0 0

$$3k_1 = 3$$
$$4k_1 + 3k_2 = 0$$
$$2k_1 + 2k_2 + 3k_3 = 0$$

$$\therefore k_1 = 1, \quad k_2 = -\frac{4}{3}, \quad k_3 = \frac{2}{9}$$

$$\therefore \text{ 특수해 } y_p(x) = x^2 - \frac{4}{3}x + \frac{2}{9}$$

< $u(x)$에 따른 $y_p(x)$형태 >

$u(x)$		$y_p(x)$의 형태
다항함수	K	A
	$K_1 x + K_0$	$A_1 x + A_0$
	$K_2 x^2 + K_1 x + K_0$	$A_2 x^2 + A_1 x + A_0$
삼각함수	$K \sin x$	$A \sin x + B \cos x$
	$K \cos x$	$A \sin x + B \cos x$
	$K_1 \sin x + K_2 \cos x$	$A \sin x + B \cos x$
지수함수	Ke^{ax}	Ae^{ax}
기본함수의 결합	Kxe^{ax}	$(A_1 x + A_0) e^{ax}$
	$Kx^2 e^{ax}$	$(A_2 x^2 + A_1 x + A_0) e^{ax}$
	$Ke^{ax} \sin x$	$e^{ax}(A \sin x + B \cos x)$
	$Ke^{ax} \cos x$	$e^{ax}(A \sin x + B \cos x)$
	$Kx \sin x$	$(A_1 x + A_0) \sin x + (B_1 x + B_0) \cos x$
	$Kx \cos x$	$(A_1 x + A_0) \sin x + (B_1 x + B_0) \cos x$

Ex) $y'' + 3y' + 2y = 3x + e^{-4x}$

$$u(x) = u_1(x) + u_2(x)$$
$$= 3x + e^{-4x}$$

대입

$$y_p(x) = y_{p_1}(x) + y_{p_2}(x) = (A_1 x + A_0) + A e^{-4x}$$
$$y_p'(x) = A_1 - 4A e^{-4x}$$
$$y_p''(x) = 16A e^{-4x}$$

$$\cancel{(16Ae^{-4x}) + 2A_1 x + (2A_0 + 3A_1) = 3x + e^{-4x}}$$

$$(16Ae^{-4x}) + 3(A_1 - 4Ae^{-4x}) + 2(A_1 x + A_0 + Ae^{-4x})$$
$$= 3x + e^{-4x}$$

$$6Ae^{-4x} + 2A_1 x + (2A_0 + 3A_1) = 3x + e^{-4x}$$

$$6A = 1, \quad 2A_1 = 3, \quad 2A_0 + 3A_1 = 0$$

$$A = \frac{1}{6}, \quad A_1 = \frac{3}{2}, \quad A_0 = -\frac{9}{4}$$

$$\boxed{\therefore y_p(x) = \frac{3}{2}x - \frac{9}{4} + \frac{1}{6}e^{-4x}}$$

<예제> $y'' - 3y' + 2y = 3e^{-4x}$

강제함수 $u(x) = 3e^{-4x}$ $\longrightarrow$ 특수해 $y_p(x) = Ae^{-4x}$ 로 가정!

$$y_p{}' = -4Ae^{-4x},\ y_p{}'' = 16Ae^{-4x}$$

$$16Ae^{-4x} - 3(-4Ae^{-4x}) + 2(Ae^{-4x}) = 3e^{-4x}$$

$$\therefore\ 30Ae^{-4x} = 3e^{-4x} \longrightarrow \therefore\ A = \frac{1}{10}$$

특수해 $y_p(x) = \dfrac{1}{10}e^{-4x}$

<참고>

① $u(x)$가 다항함수 $\longrightarrow$ y_p도 다항함수로 가정

$u(x)$ 가 sine 또는 cosine 함수

$\longrightarrow$ y_p는 sine과 cosine의 합으로 가정

③ $u(x)$가 지수함수 $\longrightarrow$ y_p도 크기가 다른 지수함수로 가정

$u(x)$ 가 기본함수의 결합 형태

$\longrightarrow$ 기본함수에 대한 y_p의 형태를 적절히 결합하여 가정

미정계수법에서의 중첩의 원리

강제함수 $u(x) = u_1(x) + u_2(x)$때 특수해 는 $y_p(x)$ $u_1(x)$ $u_2(x)$
각각에 대한 특수해 $y_{p1}(x)$ 오$y_{p2}(x)$ 형태로 결정된다.

$$y_p(x) = y_{p1}(x) + y_{p2}(x)$$

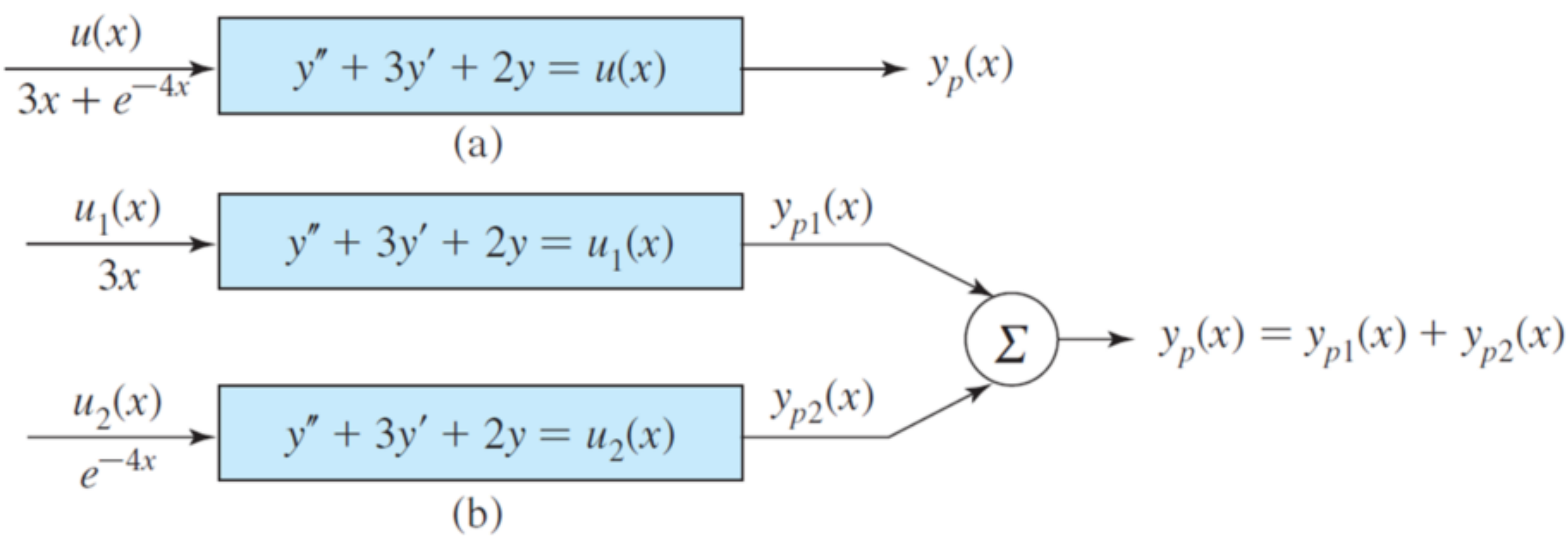
<예제> $y'' + 3y' + 2y = 3x + e^{-4x}$

$u_1(x) = 3x \longrightarrow y_{p1}(x) = A_1 x + A_0$

$u_2(x) = e^{-4x} \longrightarrow y_{p2}(x) = Ae^{-4x}$

특수해

$y_p(x) = (A_1 x + A_0) + Ae^{-4x}$ 가정!



u(x)=u1(x)+u2(x)인 경우 특수해

미정계수법에서의 곱의 원리

가정한 특수해의 형태가 주어진 미분방정식의 보조해와 중복이 되는 경우는 특수해에 대한 가정을 독립변수 x를 곱함으로써 수정해야 한다. 수정하여 가정한 특수해가 또 다시 보조해와 중복된다면 중복되지 않을 때까지 x를 곱하여 특수해의 가정을 수정한다.

<예제> $y'' + 4y' + 4y = 3e^{-2x}$

특성방정식 $\lambda^2 + 4\lambda + 4 = (\lambda + 2)^2 = 0 \qquad \therefore \lambda_1 = \lambda_2 = -2$

보조해 $y_h(x) = c_1 e^{-2x} + c_2 x e^{-2x}$

강제함수 $u(x) = 3e^{-2x} \longrightarrow$ 특수해 $y_p = Ke^{-2x}$

$\xrightarrow{\text{수정}}$ 수정된 특수해 $y_p = Kxe^{-2x}$ (보조해와 중복)

$\xrightarrow{\text{수정}}$ 수정된 특수해 $y_p(x) = Kx^2 e^{-2x}$ (또 다시 보조해와 중복)

$\therefore$ 수정된 특수해 $y_p(x) = Kx^2 e^{-2x}$

<미정계수법에서의 중요 원리>

$$y'' + p(x)y' + q(x)y = u(x)$$

선형 2차 비제차 미분방정식

규칙	$u(x)$의 형태	$y_p(x)$의 형태
중첩의 원리	$u(x)$가 기본함수들의 합 $u(x) = \sum_k u_k(x)$	$y_p(x)$는 각 $u_k(x)$의 형태에 대응되는 특수해의 $y_{pk}(x)$의 합으로 가정 $y_p(x) = \sum_k y_{pk}(x)$
곱의 원리	$u(x)$가 보조해와 일부 또는 전부 중복	먼저 $u(x)$에 대응되는 특수해의 형태를 가정한 후 보조해와 중복되지 않을 때까지 x를 곱하여 $y_p(x)$를 수정하여 가정

★ 특수해 불가능 경우

Date No

$$y'' + 3y' + 2y = 3e^{-x}$$

$$\rightarrow y_p(x) = Ae^{-x}$$

$$y_p'(x) = -Ae^{-x}$$

$$y_p''(x) = Ae^{-x}$$

대입

$$\underbrace{Ae^{-x} + 3(-Ae^{-x}) + 2(Ae^{-x})}_{0 \cdot e^{-x}} = 3e^{-x}$$

$$0 \cdot e^{-x} = 3e^{-x}$$

특수해 불가능.

2.10 매개변수변환법

특수해를 구하기 위한 또 다른 방법 $\longrightarrow$ 차수감소법의 개념을 확장

($u(x)$형태가 복잡한 경우 적용 가능)

$$y'' + p(x)y' + q(x)y = u(x)$$

보조해 $y_h(x) = c_1y_1(x) + c_2y_2(x)$

특수해의 가정 $y_p(x) = v_1(x)y_1(x) + v_2(x)y_2(x)$ $v_1(x)$, $v_2(x)$ 미지의 함수

$y_p(x)$가 특수해가 되도록 미지의 함수 , $v_1(x)$ 결 $v_2(x)$

$$y_p' = v_1'y_1 + v_1y_1' + v_2'y_2 + v_2y_2'$$

[조건 1] $v_1'y_1 + v_2'y_2 = 0 \longrightarrow y_p'(x) = v_1y_1' + v_2y_2'$

$$y_p''(x) = (v_1'y_1' + v_1y_1'') + (v_2'y_2' + v_2y_2'')$$

$y_p,\ y_p',\ y_p''$를 미분방정식에 대입하여 v_1과 v_2에 대해 정리!

$$\longrightarrow v_1\underbrace{(y_1'' + py_1' + qy_1)}_{0} + v_2\underbrace{(y_2'' + py_2' + qy_2)}_{0} + v_1'y_1' + v_2'y_2' = u$$

[조건 2] $\underline{v_1' y_1' + v_2' y_2' = u}$

$$\begin{pmatrix} y_1 & y_2 \\ y_1' & y_2' \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v_1' \\ v_2' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ u \end{pmatrix}$$

$$\Big\downarrow \text{Cramer 공식}$$

$$v_1' = \frac{\begin{vmatrix} 0 & y_2 \\ u & y_2' \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} y_1 & y_2 \\ y_1' & y_2' \end{vmatrix}} = \frac{-y_2 u}{y_1 y_2' - y_2 y_1'} = -\frac{y_2 u}{W} \qquad v_2' = \frac{\begin{vmatrix} y_1 & 0 \\ y_1' & u \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} y_1 & y_2 \\ y_1' & y_2' \end{vmatrix}} = \frac{y_1 u}{y_1 y_2' - y_2 y_1'} = \frac{y_1 u}{W}$$

$W(y_1, y_2) \triangleq y_1 y_2' - y_2 y_1'$; y_1 으 y_2 Wronskian이라 부른다.

$$\therefore \quad v_1 = -\int \frac{y_2 u}{W} dx, \quad v_2 = \int \frac{y_1 u}{W} dx$$

$\therefore$ 특수해 $$y_p(x) = -y_1 \int \frac{y_2 u}{W} dx + y_2 \int \frac{y_1 u}{W} dx$$

<예제> $y'' - 4y = 4e^{-x}$

특성방정식 $\lambda^2 - 4 = (\lambda + 2)(\lambda - 2) = 0 \longrightarrow \lambda_1 = 2,\ \lambda_2 = -2$

보조해 $y_h(x) = c_1 e^{2x} + c_2 e^{-2x} \qquad \therefore\ y_1(x) = e^{2x},\quad y_2(x) = e^{-2x}$

$$W = \begin{vmatrix} y_1 & y_2 \\ y_1' & y_2' \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} e^{2x} & e^{-2x} \\ 2e^{2x} & -2e^{-2x} \end{vmatrix} = -4$$

$$v_1 = -\int \frac{y_2 u}{W} dx = \frac{1}{4} \int e^{-2x} (4e^{-x}) dx = -\frac{1}{3} e^{-3x}$$

$$v_2 = \int \frac{y_1 u}{W} dx = -\frac{1}{4} \int e^{2x} (4e^{-x}) dx = -e^{x}$$

특수해 $y_p(x) = v_1 y_1 + v_2 y_2 = -\frac{1}{3} e^{-3x} e^{2x} - e^{x} \cdot e^{-2x}$

$$\therefore\ y_p(x) = -\frac{4}{3} e^{-x}$$

예제) 초기치 문제

$$y'' + p(x)y' + q(x)y = u(x)$$

$$y(x_0) = K_0, \quad y'(x_0) = K_1$$

<해법> ① 보조해 $y_h(x)$를 구한다.

② 특수해 $y_p(x)$를 구한다.

③ 일반해 $y(x) = y_h(x) + y_p(x)$를 구한다.

④ 주어진 초기조건을 $y(x)$에 대입하여 미지의 상수를 결정한다.

<예제> $y'' + 4y = \sin 3x, \quad y(0) = 1, \quad y'(0) = \dfrac{2}{5}$

$$\therefore \; y(x) = \cos 2x + \frac{1}{2}\sin 2x - \frac{1}{5}\sin 3x$$