PART 2

적분과 급수

-CALCULUS-

미분적분학

기초부터 응용까지

한빛아카데미
Hanbit Academy, Inc.

CALCULUS

미분적분학

기초부터 응용까지

CHAPTER 07

적분의 응용

한빛아카데미
Hanbit Academy, Inc.

Contents

CALCULUS

7.1 곡선 사이의 넓이

곡선 사이의 넓이

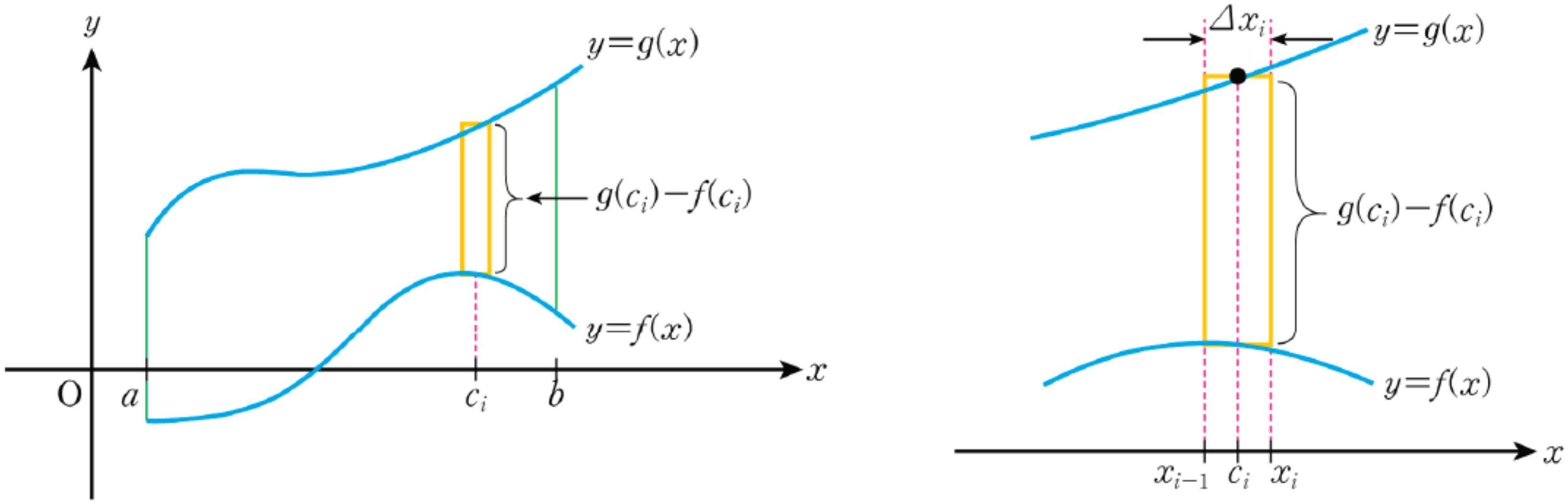
- **정적분의 개념으로 넓이를 구하는 과정**

  구간 나누기 : $a = x_0 < x_1 < \cdots < x_0 = b$

  소구간의 길이 : $\Delta x_i = x_i - x_{i-1}$ $(i = 1, 2, \cdots, n)$

  i번째 조각의 넓이 : $\Delta A_i \approx \{g(c_i) - f(c_i)\}\Delta x_i$, $c_i \in [x_{i-1}, x_i]$ $(i = 1, 2, \cdots, n)$

  넓이 : $A =$ $=$



(a) (b)

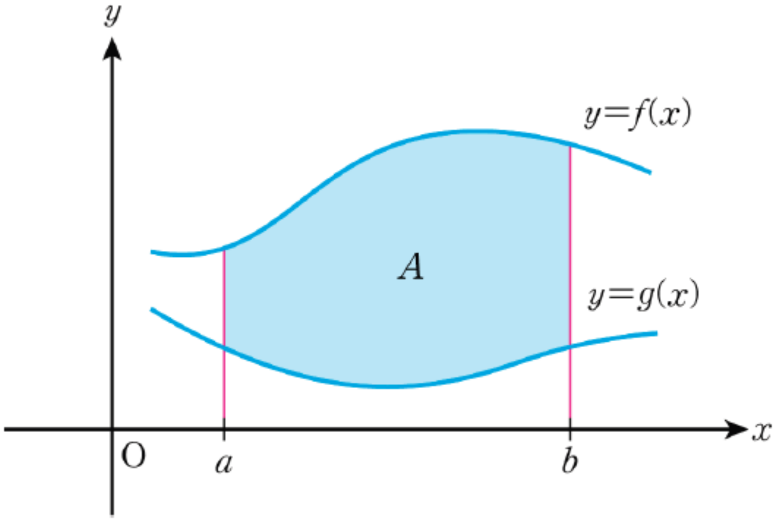
[그림 1] 가로 길이가 Δx_i인 직사각형으로 나눈 구간 $[a, b]$

곡선 사이의 넓이

정리 1 $g(x) \le f(x)$**일 때 두 곡선으로 둘러싸인 영역의 넓이**

구간 $a \le x \le b$에서 정의되는 두 함수 $y=f(x)$와 $y=g(x)$가 연속이고 $g(x) \le f(x)$일 때, 곡선 $y=f(x)$, $y=g(x)$와 직선 $x=a$, $x=b$로 둘러싸인 영역의 넓이 A는 다음과 같다.

$$A = \int_a^b \{f(x) - g(x)\}dx$$



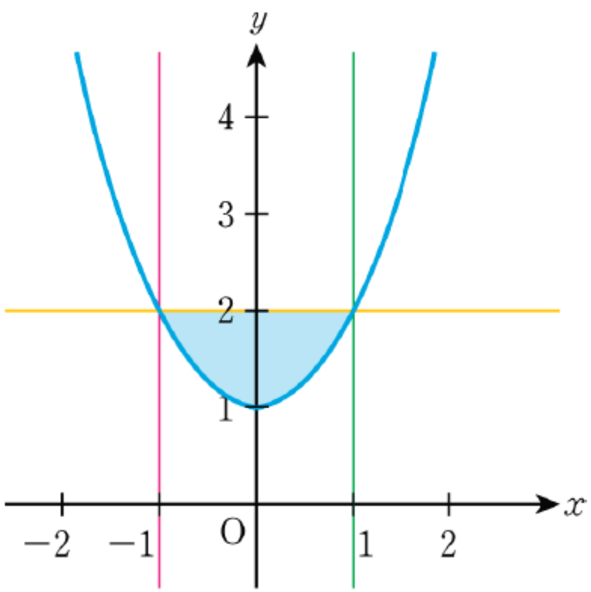
[그림 2] 두 곡선 $y=f(x)$, $y=g(x)$와 직선 $x=a$, $x=b$로 둘러싸인 영역

곡선 사이의 넓이

예제 1 **두 곡선 사이의 넓이**

$y=x^2+1$, $y=2$와 $x=-1$, $x=1$로 둘러싸인 영역의 넓이를 구하여라.

풀이 $-1 \le x \le 1$에서 $x^2+1 \le 2$이므로 $f(x)=2$, $g(x)=x^2+1$이라 두고 [정리 1]을 적용하면 $A=\int_{-1}^{1}\{2-(x^2+1)\}dx=\frac{4}{3}$이다.

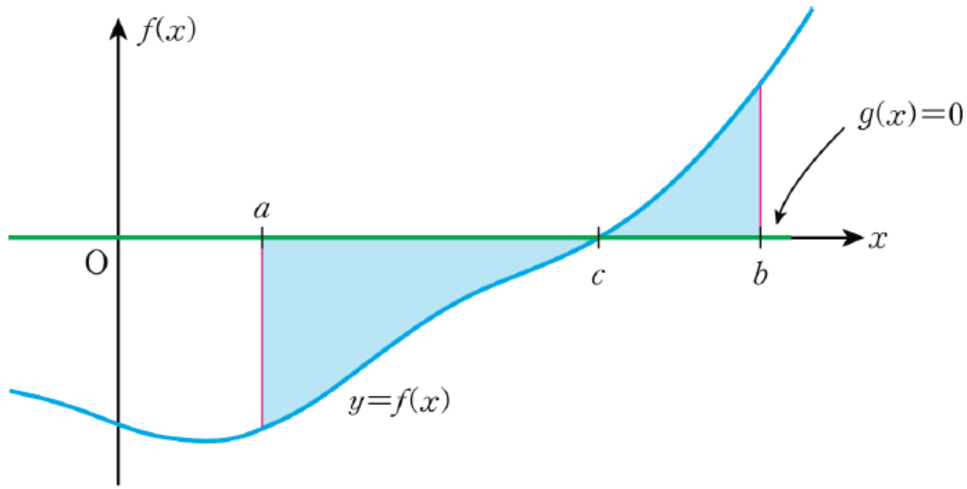


[그림 3] $y=x^2+1$, $y=2$와 $x=-1$, $x=1$로 둘러싸인 영역

곡선 사이의 넓이

- 구간 *a x b*
  - 어떤 *x* 값 $g(x) \le f(x)$
  - 다른 *x* 값 $g(x) \ge f(x)$
  - 이 경우의 넓이

$$A = \int_a^c \{g(x) - f(x)\}dx + \int_c^b \{f(x) - g(x)\}dx$$



[그림 4] 정적분 $\int_a^b \{g(x) - f(x)\}dx$ 이 음수가 되는 경우

- 절대값의 성질을 이용하여 다음 값이 표현

II = ,

,

곡선 사이의 넓이

정리 2 **두 곡선으로 둘러싸인 영역의 넓이**

구간 $a \leq x \leq b$에서 정의되는 두 함수 $y = f(x)$와 $y = g(x)$가 연속일 때 곡선 $y = f(x)$, $y = g(x)$와 직선 $x = a$, $x = b$로 둘러싸인 영역의 넓이 A는 다음과 같다.

$$A = \int_a^b |g(x) - f(x)| dx$$

곡선 사이의 넓이

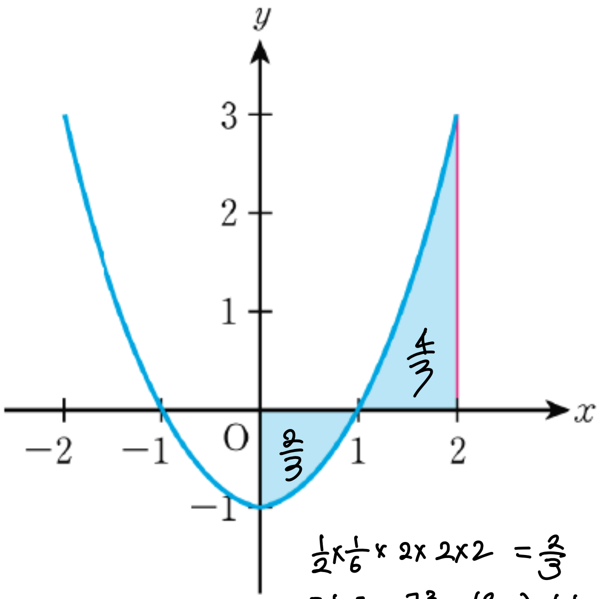
예제 2 **영역의 넓이**

$y=x^2-1$, $y=0$, $x=0$, $x=2$로 둘러싸인 영역의 넓이를 구하여라.

풀이

구간 $0 \le x \le 1$에 대해서는 $x^2-1 \le 0$이고, $1 \le x \le 2$에 대해서는 $0 \le x^2-1$이다. 영역의 넓이를 구하기 위해서는 두 구간으로 나누어 계산한다.

$$A=\int_0^2 |x^2-1|dx = \int_0^1 -(x^2-1)\,dx + \int_1^2 (x^2-1)\,dx = \frac{2}{3}+\frac{4}{3}=2$$



$\frac{1}{2}\times\frac{1}{6}\times 2\times 2\times 2 = \frac{2}{3}$

$\left[\frac{1}{3}x^3-x\right]_1^2 = \left(\frac{8}{3}-2\right)+\left(-\frac{1}{3}+1\right)$

$=\frac{4}{3}$

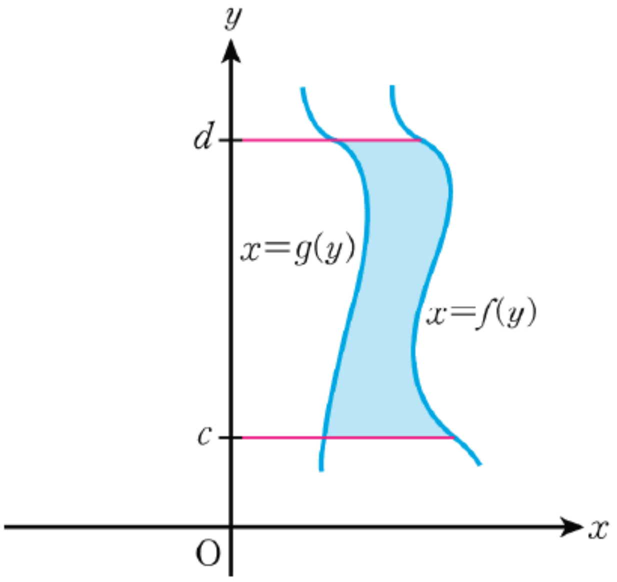
[그림 5] $y=x^2-1$, $y=0$, $x=0$, $x=2$로 둘러싸인 영역

곡선 사이의 넓이

정리 3 $g(y) \le f(y)$ **일 때 두 곡선으로 둘러싸인 영역의 넓이**

구간 $c \le y \le d$에서 정의되는 두 함수 $x = f(y)$와 $x = g(y)$가 연속이고 $g(y) \le f(y)$일 때, 곡선 $x = f(y)$, $x = g(y)$와 직선 $y = c$, $y = d$로 둘러싸인 영역의 넓이 A는 다음과 같다.

$$A = \int_c^d \{f(y) - g(y)\}dy$$



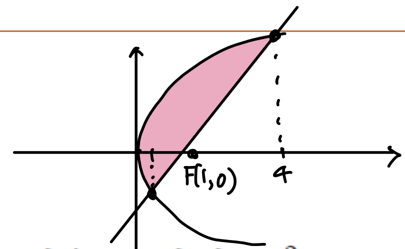
[그림 6] 곡선 $x = f(y)$, $x = g(y)$와 직선 $y = c$, $y = d$로 둘러싸인 영역

곡선 사이의 넓이

예제 3 **y축 구간에 대한 영역의 넓이** $x=\frac{3y+4}{4}$

포물선 $y^2=4x$와 직선 $4x-3y=4$로 둘러싸인 영역의 넓이를 계산하여라.

풀이



y^2-3y-4

$y=4,\ y=-1$

$x=4\quad x=\frac{1}{4}$

$(4,4),\ (\frac{1}{4},-1)$

$\int_{-1}^{4}\left(\frac{3y+4}{4}-\frac{y^2}{4}\right)dy$

$-\frac{1}{4}\int_{-1}^{4}(y^2-3y-4)\,dy$

$=\frac{125}{6}\times\frac{1}{4}=\frac{125}{24}$

$\left[\frac{1}{3}y^3-\frac{3}{2}y^2-4y\right]_{-1}^{4}=\left(\frac{64}{3}-\frac{48}{2}-16\right)-\left(-\frac{1}{3}-\frac{3}{2}+4\right)$

$=\frac{65}{3}-\frac{45}{2}-20=\frac{130-135}{6}-\frac{120}{6}$

$=-\frac{125}{6}$

두 곡선의 교점을 구하면, $y^2=3y+4$에서 $y=-1,\ 4$이므로, 교점의 좌표는 $(4,\ 4)$와 $\left(\frac{1}{4},\ -1\right)$이다.

이 영역을 x축에 수직으로 자른다면 포물선 때문에 $x=\frac{1}{4}$을 기준으로 영역의 아래쪽 경계가 두 개의 다른 곡선이 [그림 7]과 같이 된다. 따라서 영역을 두 부분으로 나누어 아래쪽 경계를 하나는 $y=-2\sqrt{x}$ 로, 다른 하나는 $4x-3y=4$로 정해야 하는데 이는 다소 번거롭다.

반면에 [그림 8]과 같이 문제의 영역을 x축과 수평으로 자르는 방법을 생각하면, y축에서의 구간은 $[-1,\ 4]$이고 오른쪽 경계는 $x=\frac{3y+4}{4}$, 왼쪽 경계는 $x=\frac{y^2}{4}$이므로 구하고자 하는 영역의 넓이의 근삿값은

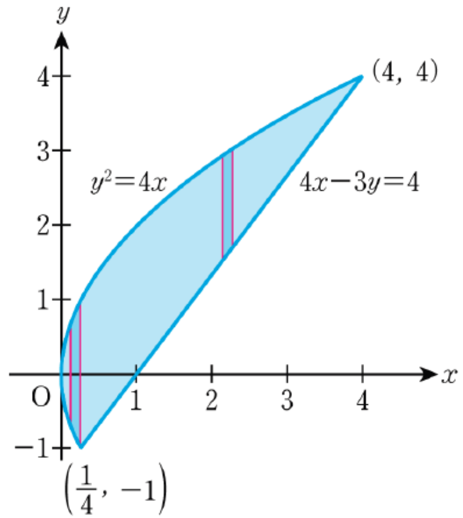
$$\Delta A\approx\left(\frac{3y+4}{4}-\frac{y^2}{4}\right)\Delta y$$이다.

곡선 사이의 넓이

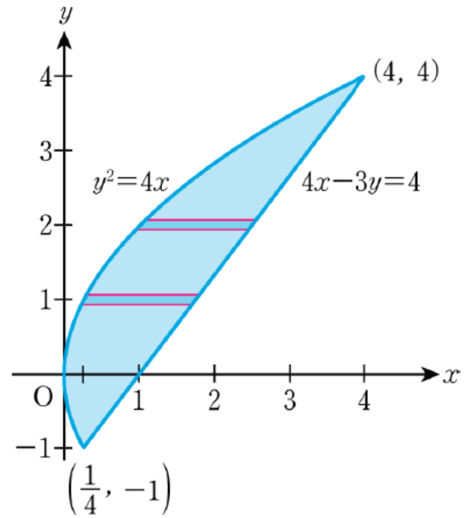
예제 3 y**축 구간에 대한 영역의 넓이**

포물선 $y^2 = 4x$와 직선 $4x - 3y = 4$로 둘러싸인 영역의 넓이를 계산하여라.

풀이



[그림 7] 영역을 x축에 수직으로 나눌 때, x에 대하여 적분



[그림 8] 영역을 x축과 수평으로 나눌 때, y에 대하여 적분

따라서 이 영역의 넓이는

$$A = \int_{-1}^{4}\left(\frac{3y+4}{4} - \frac{y^2}{4}\right)dy = \frac{1}{4}\int_{-1}^{4}(3y+4-y^2)dy$$

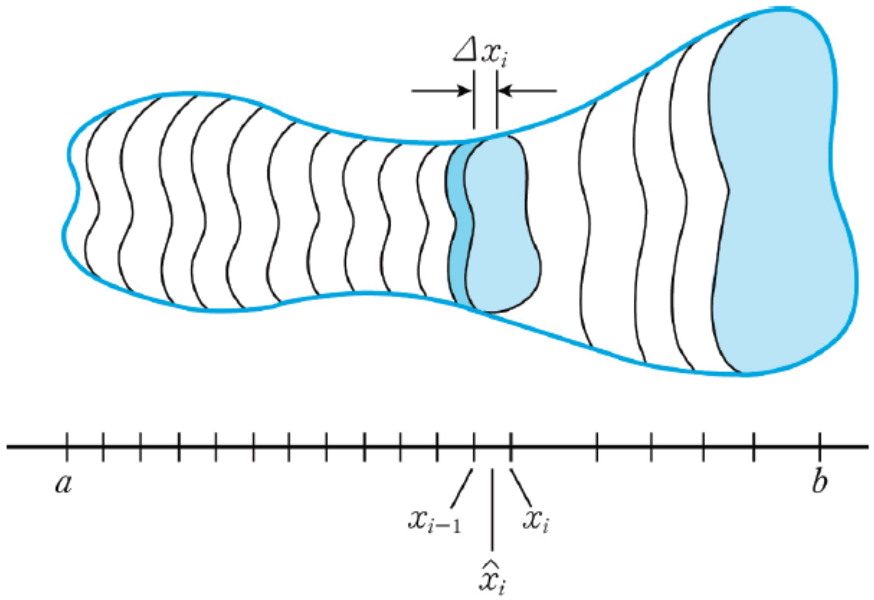
$$= \frac{1}{4}\left[\frac{3y^2}{2} + 4y - \frac{y^3}{3}\right]_{-1}^{4} = \frac{125}{24}$$

CALCULUS

7.2 입체의 부피

1. 입체의 부피 : 수직 절단면 이용

- **정적분의 개념으로 부피를 구하는 과정에 적용**
  - 직각기둥의 부피는 밑넓이 높이 : $V = A\,h$
  - 구간 $[a, b]$에 속하는 점 x에서의 단면의 넓이 $A(x)$를 안다고 가정
    - 구간 나누기 : $a = x_0 < x_1 < \cdots < x_n = b$
    - 소구간의 길이 : $\Delta x_i = x_i - x_{i-1}$ $(i = 1, 2, \cdots, n)$
    - 슬랩 : x축에 수직인 n개의 입체로 자름
    - $[x_{i-1}, x_i]$에서 $x_{i-1} < \ < x_i$
      - $\Delta V_i = A(\ )\,\Delta x_i$
      - $V \approx$
    - 분할의 크기를 0으로 접근하는 극한
      - $V =$



[그림 1] 너비(또는 가로의 길이)가 Δx_i인 수직 절단면으로 나눈 모양

1. 입체의 부피 : 수직 절단면 이용

정리 1 **절단면의 넓이를 이용한 입체의 부피**

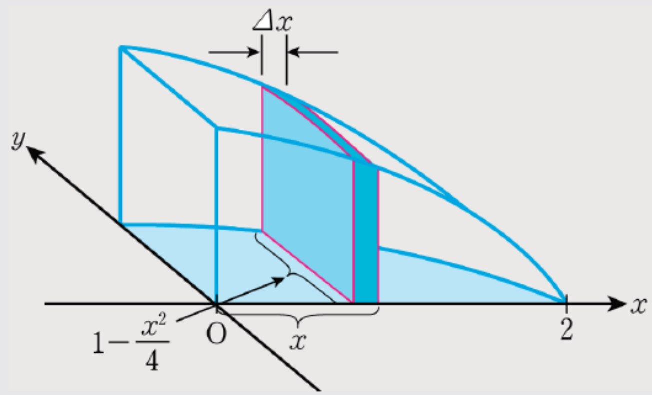
S를 $x=a$, $x=b$ 사이에 놓인 입체라고 할 때, x를 지나고 x축에 수직인 절단면의 넓이를 $A(x)$라고 하자. $A(x)$가 연속함수이면 입체의 부피 V는 다음과 같다.

$$V=\int_a^b A(x)dx$$

1. 입체의 부피 : 수직 절단면 이용

예제 1 **수직 절단면이 정사각형**

곡선 $y=1-\frac{x^2}{4}$, x축 및 y축으로 둘러싸인 제1사분면의 영역을 밑면으로 하는 입체가 있다. x축과 수직인 단면이 정사각형일 때 이 입체의 부피를 구하여라.



[그림 2] 절단면이 정사각형인 입체

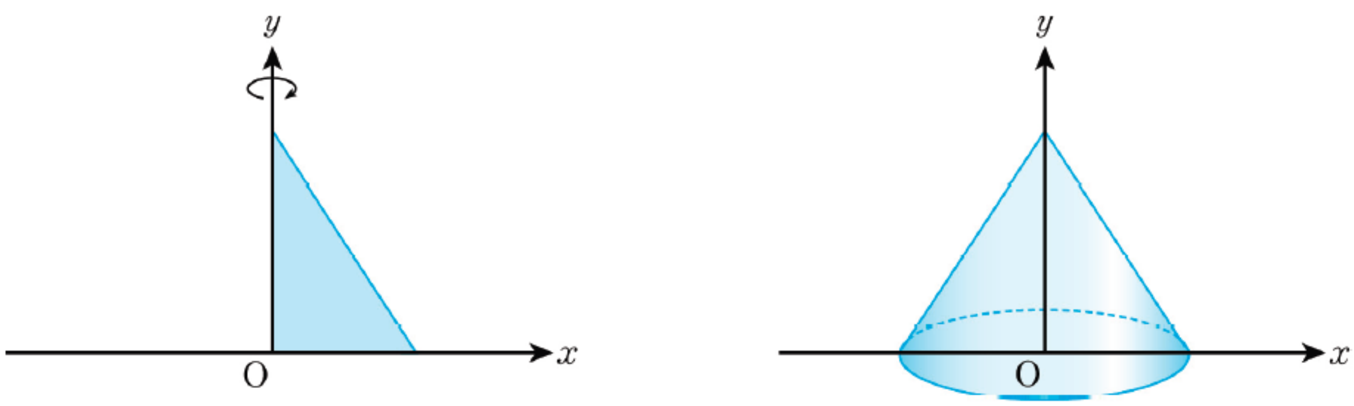
풀이

이 입체를 x축과 수직으로 동일하게 자르면 얇은 정사각형기둥 모양의 조각들의 부피와 거의 같은 조각들을 얻게 된다. 정사각형기둥 모양의 조각 하나의 높이는 Δx이고 밑면의 한 변의 길이는 $1-\frac{x^2}{4}\,(0 \le x \le 2)$이므로 부피는 $\left(1-\frac{x^2}{4}\right)^2 \Delta x$이다. 따라서 구하고자 하는 조각의 부피는 $\Delta V \approx \left(1-\frac{x^2}{4}\right)^2 \Delta x$로 근사시킬 수 있어

$$V=\int_0^2\left(1-\frac{x^2}{4}\right)^2 dx=\int_0^2\left(1-\frac{x^2}{2}+\frac{x^4}{16}\right)dx=\left[x-\frac{x^3}{6}+\frac{x^5}{80}\right]_0^2=\frac{16}{15}$$

2. 입체의 부피 : 원판법

- 입체가 놓인 직선에 수직인 단면의 넓이를 아는 입체의 부피를 구하는 방법
  - 단면의 넓이를 간단히 계산할 수 있는 회전체
    - 회전축 : 어느 한 직선을 중심으로 회전이 된 기준



[그림 4] 직각삼각형을 높이에 해당하는 변을 중심으로 회전

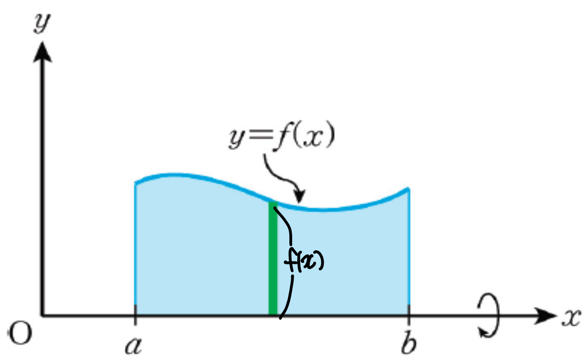
2. 입체의 부피 : 원판법

정리 2 원판법

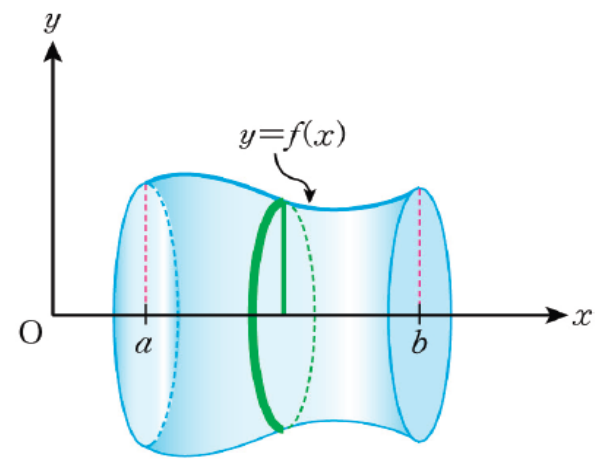
함수 $y=f(x)$가 $a \le x \le b$에서 연속이라고 하자. $y=f(x)$, $x=a$, $x=b$, x축으로 둘러싸인 영역을 x축을 회전축으로 생긴 회전체의 부피는

$$V=\int_a^b \pi\{f(x)\}^2\,dx$$

이다.



(a) 평면의 영역



(b) 회전체

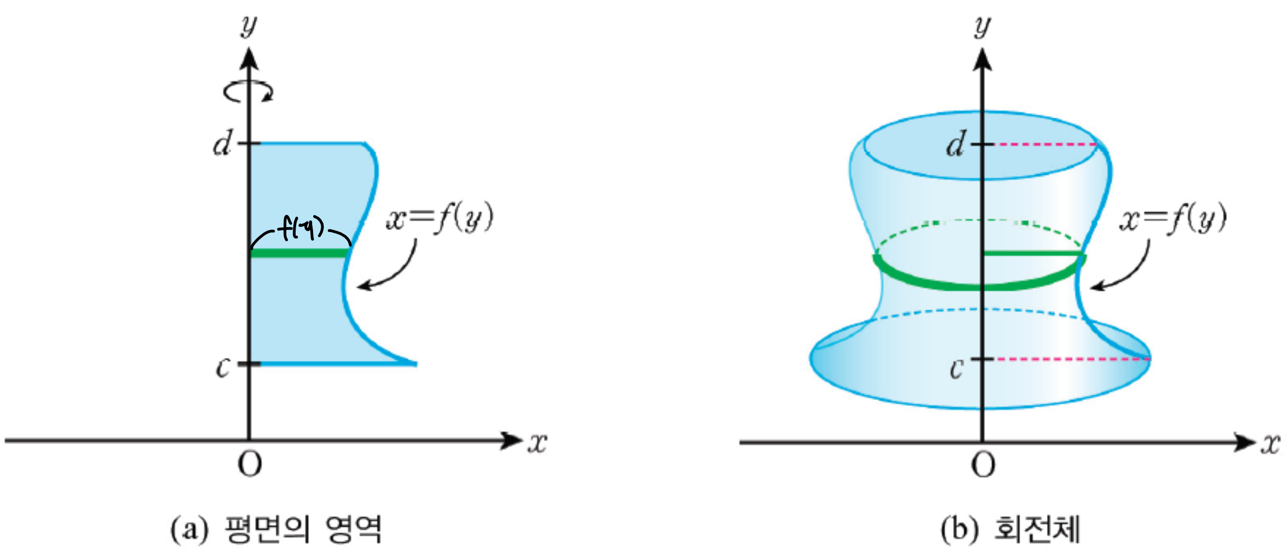
[그림 5] 회전축이 x 축인 경우, 원판법

2. 입체의 부피 : 원판법

- **회전축을 y축으로 한 경우**
  - 영역이 y축과 에 의해 주어질 경우 회전체의 부피

$$V =$$

- **단면의 모양이 원판과 같으므로 원판법이라 부름**



[그림 6] 회전축이 y 축인 경우, 원판법

2. 입체의 부피 : 원판법

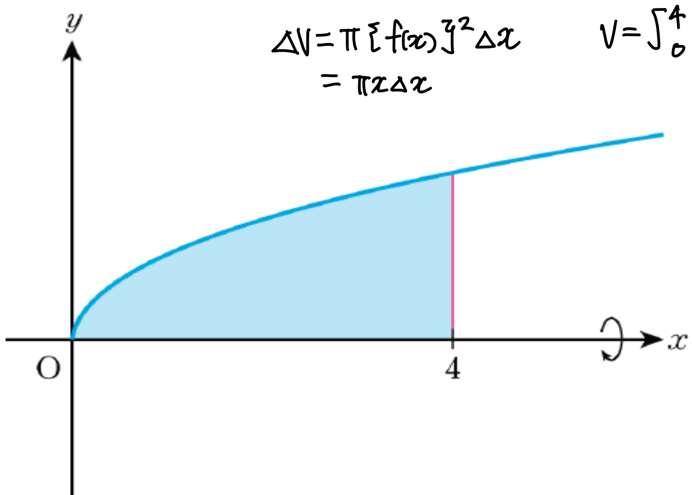
예제 3 **x 축이 회전축**

$y=\sqrt{x}$, x축 및 직선 $x=4$에 둘러싸인 영역을 x축을 회전축으로 회전시켰을 때 생기는 입체의 부피를 구하여라.

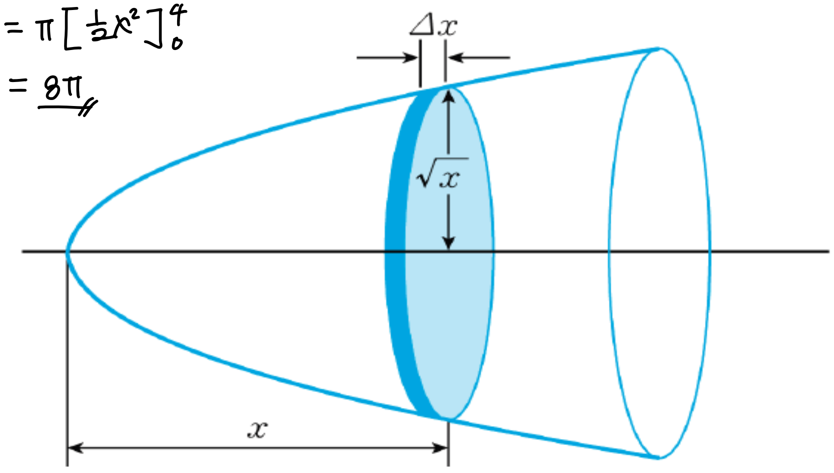
풀이 x 축에 수직인 단면의 반지름이 $\sqrt{x}$ $(0 \le x \le 4)$이므로 한 조각의 부피는 $\Delta V \approx \pi(\sqrt{x})^2 \Delta x$이다. 따라서 이 입체의 부피는 $V = \pi \int_0^4 x\,dx = \pi\left[\frac{x^2}{2}\right]_0^4 = 8\pi$이다.

$\Delta V = \pi\{f(x)\}^2 \Delta x$
$= \pi x \Delta x$

$V = \int_0^4 \pi x\,dx = \pi\left[\frac{1}{2}x^2\right]_0^4$
$= 8\pi$



(a) 평면의 영역



(b) 회전체

[그림 7] 회전축이 x 축인 경우

3. 입체의 부피 : 와셔법

와셔

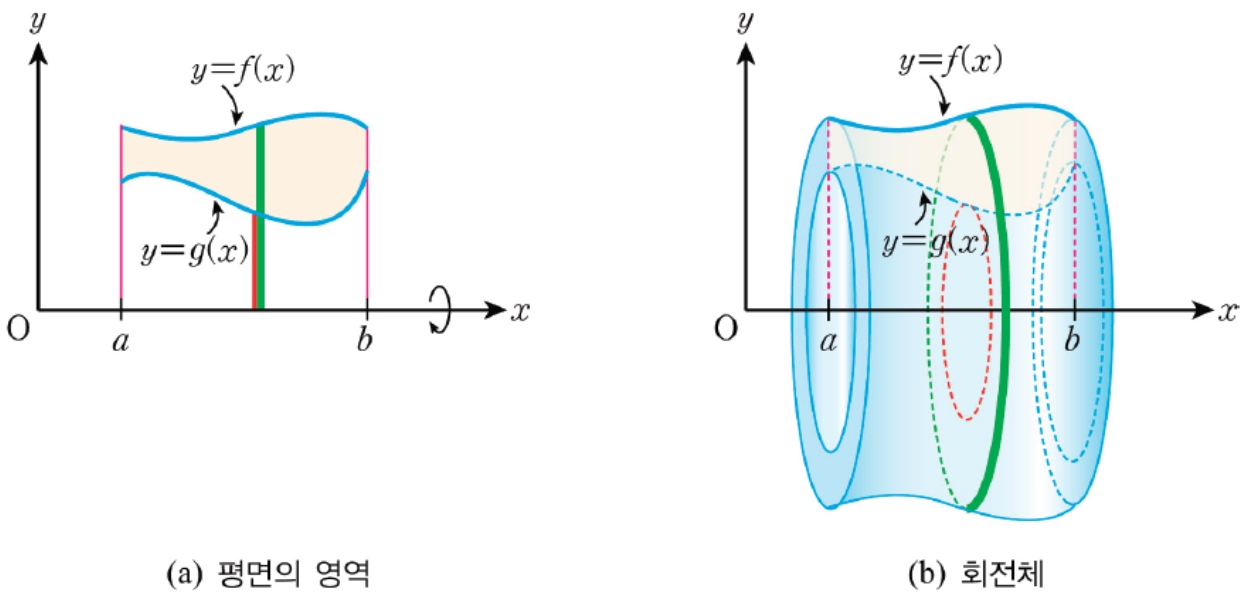
- **회전축에 수직인 단면의 반지름이 회전축으로부터 떨어진 두 함수로 주어지면 회전체를 얇게 잘랐을 때 가운데 구멍이 있는 원판**
- 단면의 넓이를 결정하는 반지름 : 두 함숫값의 차이
- $A(x) = \{\ -\ \}$

  $\pi\{f^2(x)-g^2(x)\}$
- 한 조각의 부피

  $\{\ -\ \}\ \Delta x$

  $\pi\{f^2(x)-g^2(x)\}\,dx$
- 회전체의 부피

  $V = \pi\int[\{f(x)\}^2-\{g(x)\}^2]\,dx$



[그림 9] 회전축이 x 축인 경우, 와셔법

3. 입체의 부피 : 와셔법

- 회전축이 y축인 경우
- 단면의 넓이

  $A(y) = \{ - \}$

  $\pi\{f^2(y)-g^2(y)\}$

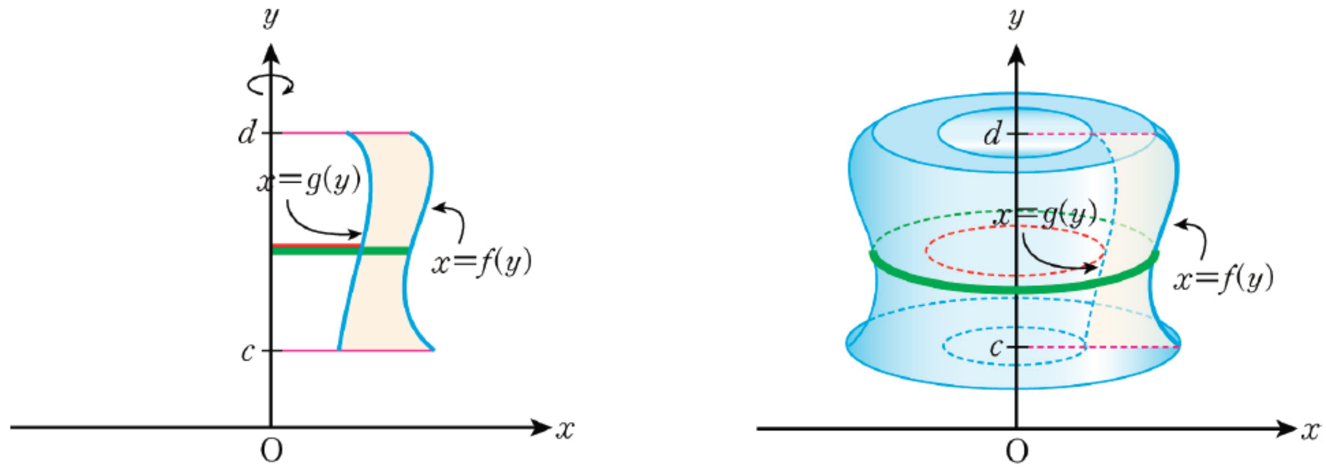
- 한 조각의 부피

  $\{ - \}\,\Delta y$

  $\pi\{f^2(y)-g^2(y)\}dy$

- 회전체의 부피

  $V = \pi\int\{f^2(y)-g^2(y)\}dy$



(a) 평면의 영역 (b) 회전체

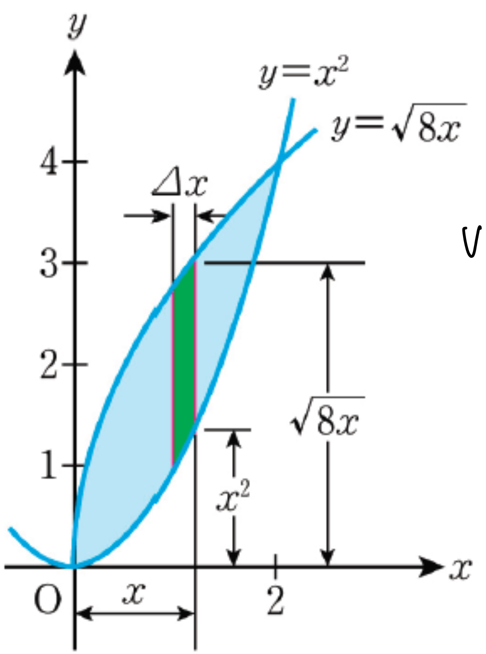
[그림 10] 회전축이 y축인 경우, 와셔법

3. 입체의 부피 : 와셔법

예제 5 y 축이 회전축

곡선 $y=x^2$과 $y^2=8x$로 둘러싸인 영역을 x축을 회전축으로 회전시켰을 때 생기는 입체의 부피를 구하여라.

풀이 $y^2=8x$는 $y=\sqrt{8x}$로 나타낼 수 있다. 두 곡선의 교점이 $x=0$, $x=2$이고, x축에 수직인 단면의 넓이는 $\pi\{(\sqrt{8x})^2-(x^2)^2\}=\pi(8x-x^4)\ (0\le x\le 2)$이므로 이 입체의 부피는



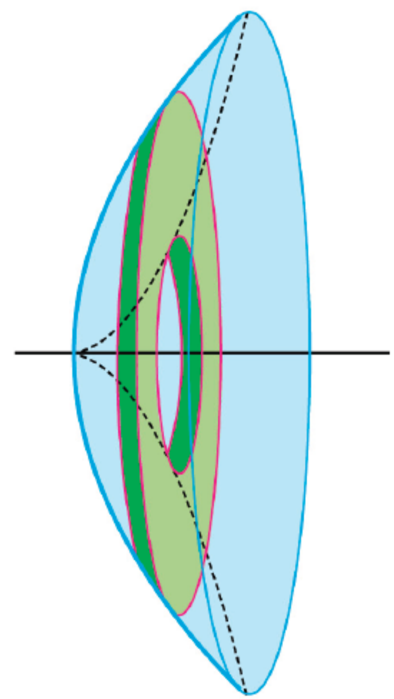
(a) 평면의 영역

$$V=\pi\int_0^2(8x-x^4)\,dx=\pi\left[4x^2-\frac{x^5}{5}\right]_0^2=\frac{48}{5}\pi$$

$V=\pi\int_0^2 (8x-x^4)\,dx$

$\left[-\frac{1}{5}x^5+4x^2\right]_0^2$

$-\frac{32}{5}+\frac{80}{5}=\frac{48}{5}\pi$



(b) 회전체

[그림 11] 회전축이 x 축인 경우

4. 입체의 부피 : 원주각법(외각법)

- 회전체의 외각을 이용하는 방법
  - 원통사이의 입체의 부피

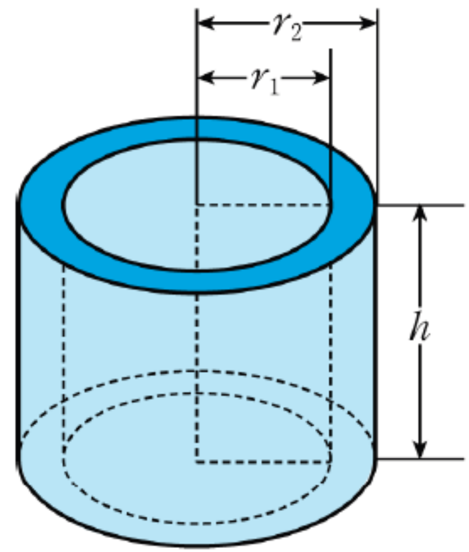
    V = (밑면의 넓이)(높이)

    = (-) = (+)(-) $(\pi r_2^2 - \pi r_1^2)h = \pi(r_2 - r_1)(r_2 + r_1)h$

    = () (-)

    - 원통껍질의 두께 : - , = $r_2 - r_1$

    - V = (반지름이 인 원의 원둘레)(높이)(두께)
  - 입체의 높이 : $f(x)$, 반지름 : x , 두께 : Δx
    - $\Delta V = x f(x) \Delta x$
    - 극한을 취하면 회전체의 부피
    - $V = 2\pi \int x f(x) dx$



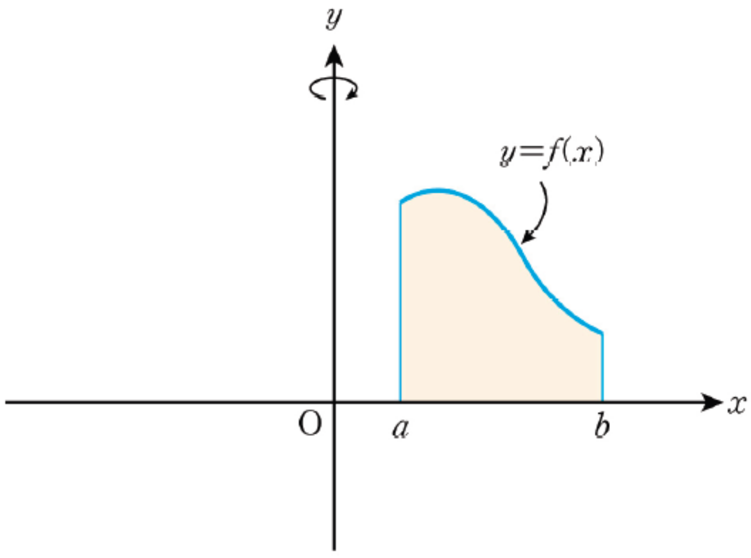
[그림 13] 구멍이 있는 원기둥

4. 입체의 부피 : 원주각법(외각법)

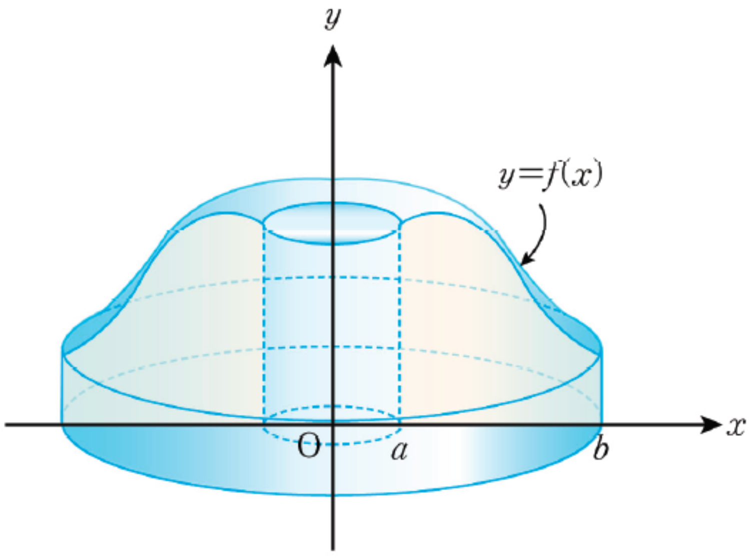
정리 3 **원주각법**

$a \le x \le b$에서 $y = f(x) > 0$와 x축으로 둘러싸인 영역을 y축을 회전축으로 회전시켰을 때 생기는 입체도형의 부피는 다음과 같다.

$$V = 2\pi \int_a^b x f(x)\, dx$$



(a) 평면의 영역



(b) 회전체

[그림 14] 회전체의 중간에 구멍이 있는 경우, 원주각법

4. 입체의 부피 : 원주각법(외각법)

예제 7 **원판법과 비교, 원주각법 선택**

곡선 $y=\dfrac{1}{\sqrt{x}}$, $x=4$, $x=1$, x축으로 둘러싸인 영역을 y축을 회전축으로 회전시켰을 때 생기는 입체의 부피를 외각을 이용하는 방법으로 구하여라.

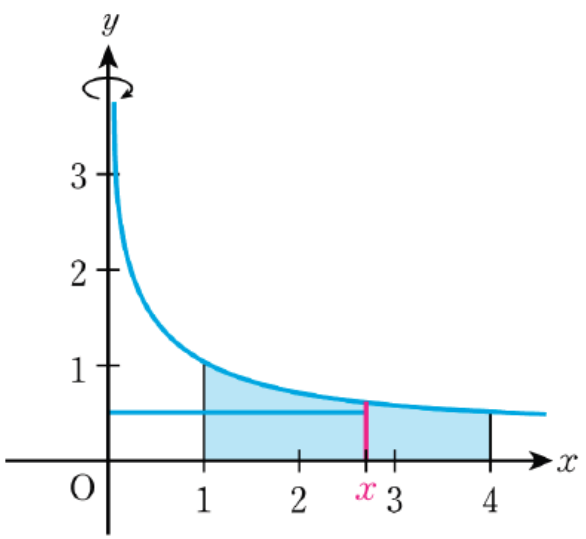
풀이

외각의 높이는 $\dfrac{1}{\sqrt{x}}$, 회전축과 외각 사이의 거리는 x이므로

$$V=2\pi\int_1^4 x\left(\frac{1}{\sqrt{x}}\right)dx=2\pi\int_1^4\sqrt{x}\,dx=2\pi\left[\frac{2}{3}x^{\frac{3}{2}}\right]_1^4=\frac{28}{3}\pi$$

이다.

참고 이 문제에서 만약 와셔법을 사용한다면, y축의 구간을 두 부분으로 나누어 계산해야 하는 번거로움이 생긴다.



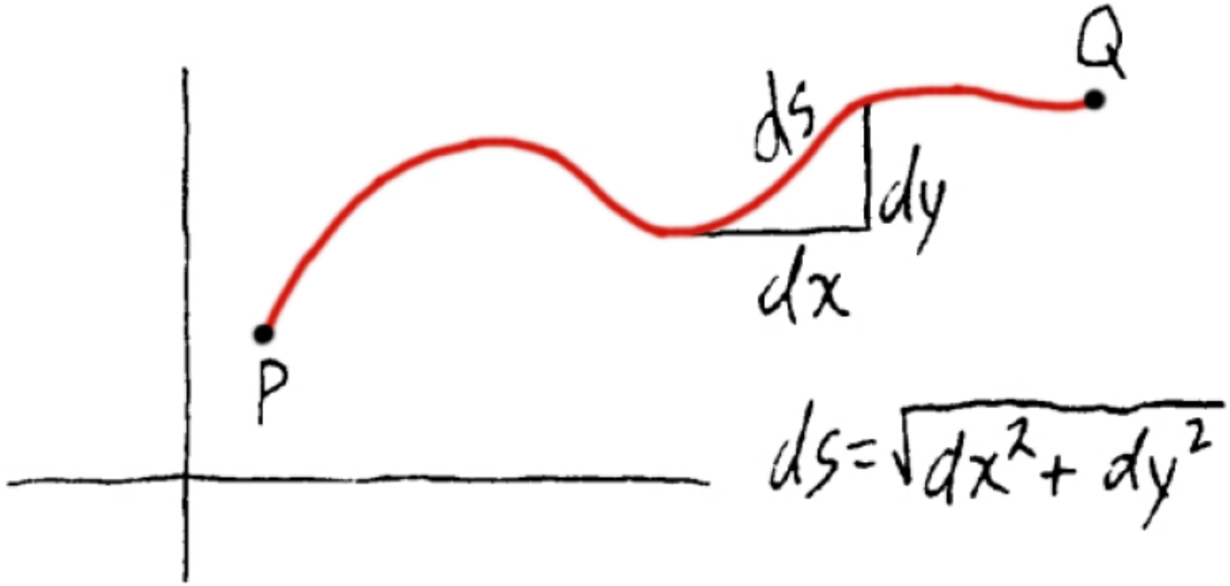
[그림 16] 평면의 영역

CALCULUS

7.3 곡선의 길이와 회전체 곡면의 넓이

호의 길이

곡선 위의 두 점 P 와 Q 사이의 호의 길이 s 를 구해보자.



[그림 6-17]

P부터 Q까지의 호의 길이는 이러한 작은 길이 ds의 합

매개변수 방정식

- **매개변수** : 변수를 하나 더 할당.
  - 평면상의 **한 점은 x축의 좌표와 y축의 좌표로 이루어지는 한 쌍의 실수로 표현**
    - 새로운 독립변수를 가져와서 이 점의 각 좌표를 결정
    - 예) 반지름이 a인 원 : $x^2 + y^2 = a^2$
      - 삼각함수의 공식을 이용하여 **새 변수 t를 도입** $x = a$, $y = a$
    - 매개변수 t 로 나타내어지는 방정식을 **매개변수 방정식**

정의 1 **매끄러운 곡선**

매개변수 방정식 $x = f(t)$, $y = g(t)$ $(a \le t \le b)$에 의하여 결정되어지는 평면곡선이 **매끄럽다** smooth라는 것은 구간 $[a, b]$에서 f'과 g'이 연속인 함수로서 존재하고 구간 (a, b)에서 $f'(t)$와 $g'(t)$가 동시에 0이 되는 t가 존재하지 않음을 의미한다. 즉

$$\{f'(t)\}^2 + \{g'(t)\}^2 \neq 0$$

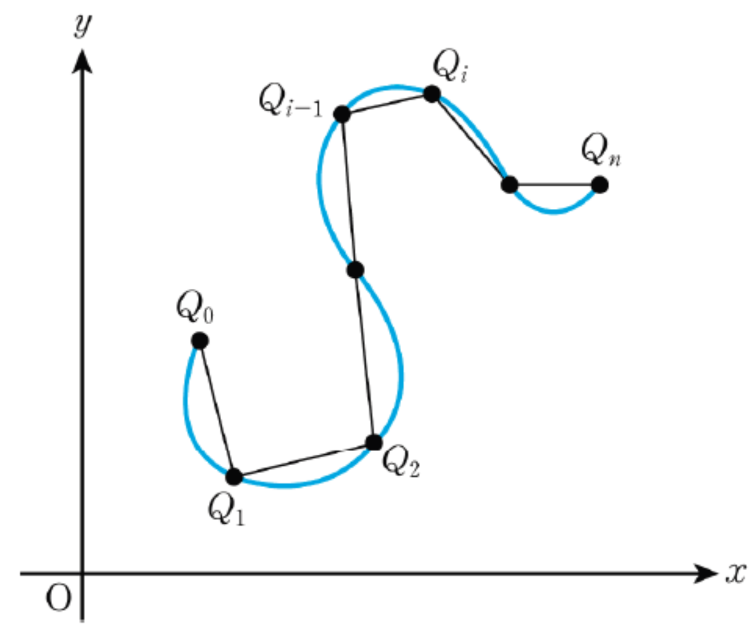
을 의미한다.

매개변수 방정식

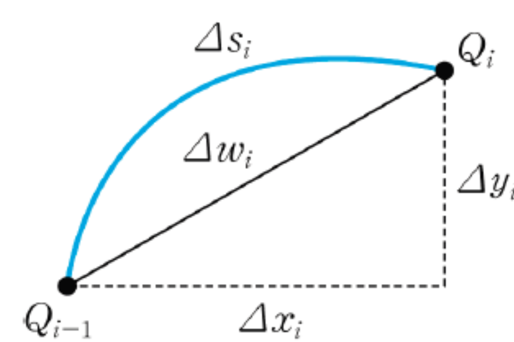
- **매개변수 방정식** $x = f(t)\,,\,y = g(t)\ (atb\ )$
- **평면곡선의 길이**
  - 구간 $[a\,,\,b]$를 $a = t_0 < t_1 < \cdots < t_n = b$ 로 분할
    - $Q_i = (f(t_i), g(t_i))$
  - 선분의 값 $w_i =$

    $=$
  - 미분의 평균값 정리 이용
  - ,
    - = -
  - 곡선 한 부분의 길이의 근사
  - $\Delta w_i =$

    $=$



[그림 1] 곡선의 분할



[그림 2] 분할된 곡선의 i번째 구간

매개변수 방정식

정리 1 매개변수 방정식으로 표현된 곡선의 길이

매끄러운 곡선의 매개변수 방정식이 $x = f(t)$, $y = g(t)$ $(a \le t \le b)$라 하자. f'과 g'이 주어진 구간에서 연속이고 t가 증가함에 따라 곡선은 한 번만 그려진다고 하면, 곡선의 길이는

$$L = \int_a^b \sqrt{\{f'(t)\}^2 + \{g'(t)\}^2}\, dt = \int_a^b \sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2}\, dt$$

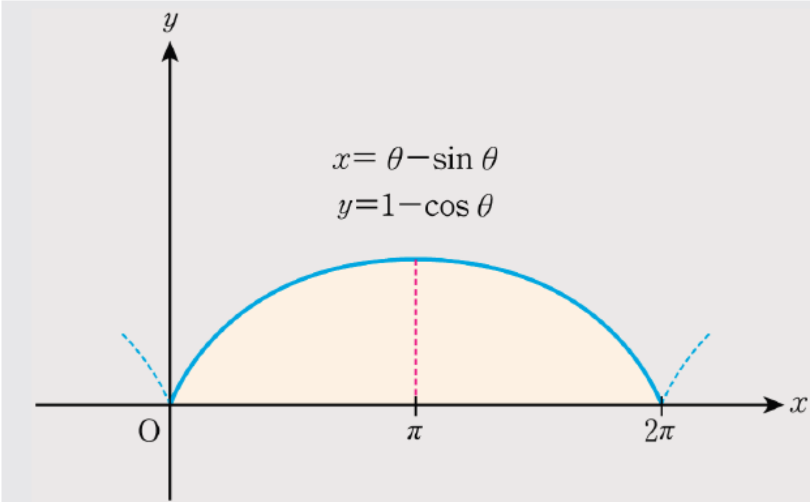
이다.

- 함수 $y = f(x)$ ($\cancel{a x b}$ $a \le x \le b$) 일 때, 매개변수 방정식 $x = t$, $y = f(t)$
  - 곡선의 길이 $L = \cancel{dx}$ $\int_a^b \sqrt{1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2}\, dx$
- 함수 $x = g(y)$ ($\cancel{c y d}$ $c \le y \le d$) 일 때, 매개변수 방정식 $x = g(t)$, $y = t$
  - 곡선의 길이 $L = \cancel{dy}$ $\int_c^d \sqrt{1+\left(\frac{dx}{dy}\right)^2}\, dy$

매개변수 방정식

예제 1 **파선** cycloid**의 길이**

반지름의 길이가 1인 원에 의해 만들어지는 파선의 매개변수 방정식은 $x=\theta-\sin\theta$, $y=1-\cos\theta$이다. 한 아치$(0\le\theta\le 2\pi)$의 길이를 구하여라.



[그림 3] 파선

풀이 $\dfrac{dx}{d\theta}=1-\cos\theta$, $\dfrac{dy}{d\theta}=\sin\theta$ 이므로 곡선의 길이는

(1-cos)((1-cos)+(1+cos))

$$L=\int_a^b\sqrt{\left(\frac{dx}{d\theta}\right)^2+\left(\frac{dy}{d\theta}\right)^2}\,d\theta=\int_0^{2\pi}\sqrt{(1-\cos\theta)^2+\sin^2\theta}\,d\theta=\int_0^{2\pi}\sqrt{2(1-\cos\theta)}\,d\theta$$

(1-cos)(1+cos)

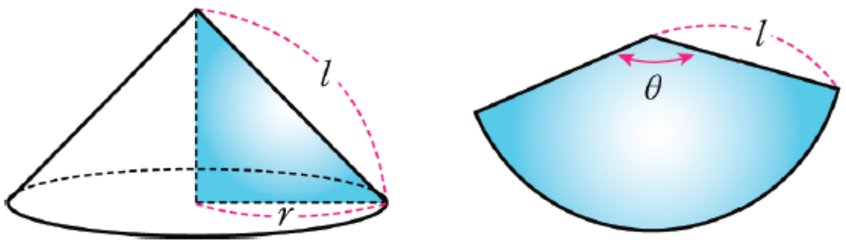
$$=\int_0^{2\pi}\sqrt{4\sin^2\left(\frac{\theta}{2}\right)}\,d\theta=2\int_0^{2\pi}\sin\frac{\theta}{2}\,d\theta=\left[-4\cos\frac{\theta}{2}\right]_0^{2\pi}=8$$

cos π

매개변수 방정식

원뿔의 옆면의 넓이

- 반지름의 길이 r, 모선의 길이 l
- 중심각 = (rad)
- 옆면의 넓이 l $l^2\theta$



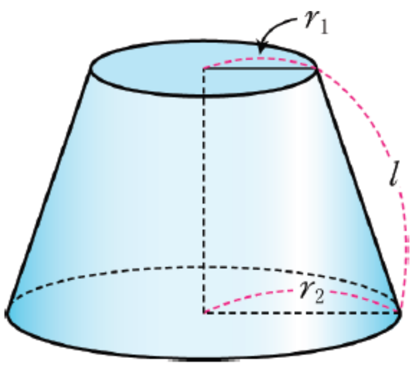
[그림 5] 원뿔

원뿔대

- 밑면의 반지름의 길이 r_2, 윗면의 반지름의 길이 r_1 ,옆면의 길이 l
- 옆면의 넓이
  - $A=2\pi$ () $l = 2\pi$ (반지름의 평균)(옆면의 길이)

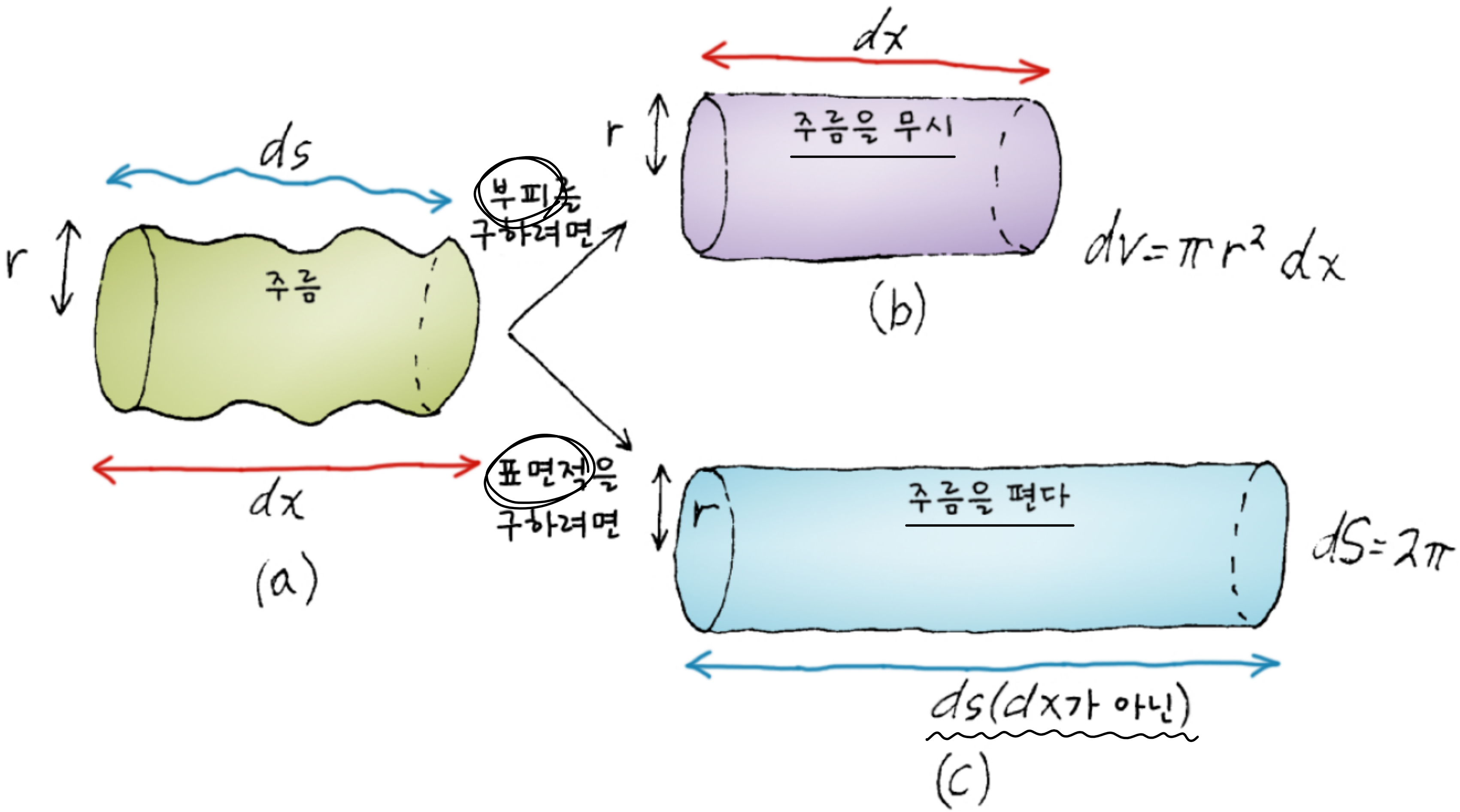
$\frac{r_1+r_2}{2}$ l

$= 2\pi\left(\frac{r_1+r_2}{2}\right) l$



[그림 6] 원뿔대

일반적인 형태의 표면적(겉넓이)



원통의 표면적

→ 접혀진 면적이므로 다 반영해서 펴줘야 한다

CALCULUS

미분적분학

기초부터 응용까지

Q & A

수고하셨습니다.