1장 1차 미분방정식

1.1 기본적인 정의와 용어

미분방정식이란?

하나 또는 그 이상의 도함수가 포함된 방정식

$$y'' + 4y' + 6y = 2\cos x$$

$$(x+y)\,dx - y\,dy = 0 \quad \text{또는} \quad \frac{dy}{dx} = \frac{x+y}{y}$$

(1) 형태에 따른 분류

상미분방정식:

미분방정식에 포함된 도함수가 상도함수만을 포함하는 미분방정식

$$\boxed{\frac{dy}{dx} + 3y = e^x} \longrightarrow \text{상미분 방정식}$$

편미분방정식:

미분방정식에 포함된 도함수가 일부 또는 전부가 편도함수인 미분방정식

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 u}{\partial t} - 4\frac{\partial u}{\partial t} \longrightarrow \text{편미분 방정식}$$

(2) 차수에 따른 분류

미분방정식의 차수란?

미분방정식에 포함된 도함수의 최고차수

$$\frac{d^2y}{dx^2}+4\left(\frac{dy}{dx}\right)^3-y=xe^{-x} \Longrightarrow$$ 2차 상미분방정식

y의 2차 도함수가 최고차수!

y의 1차 도함수의 세제곱이므로 도함수의 차수는 1차!

$$x^3dy+(x+y)\,dx=0 \Longrightarrow$$

1차 상미분방정식 양변을 dx로 나누어 정리하면

$x^3\dfrac{dy}{dx}+(x+y)=0$ 이므로 1차

(3) 선형 또는 비선형에 따른 분류

선형미분방정식의 형태

$$a_n(x)\frac{d^n y}{dx^n}+a_{n-1}(x)\frac{d^{n-1}y}{dx^{n-1}}+\cdots+a_1(x)\frac{dy}{dx}+a_0(x)y=r(x)$$

<예>

$$x^3\frac{d^3y}{dx^3}+e^x\frac{d^2y}{dx^2}+3\frac{dy}{dx}+4xy=e^{-x}$$; 선형미분방정식

① y와 y의 도함수는 멱이 모두 1이다

② 미분방정식의 계수가 모두 x만의 함수이다.

$$y^2y''-3e^xy'=x^3$$; 비선형미분방정식

① y''의 계수가 x의 함수가 아니다.

$$\frac{d^2y}{dx^2}+(\cos x)y^2=0$$; 비선형미분방정식

① y의 멱이 2이다.

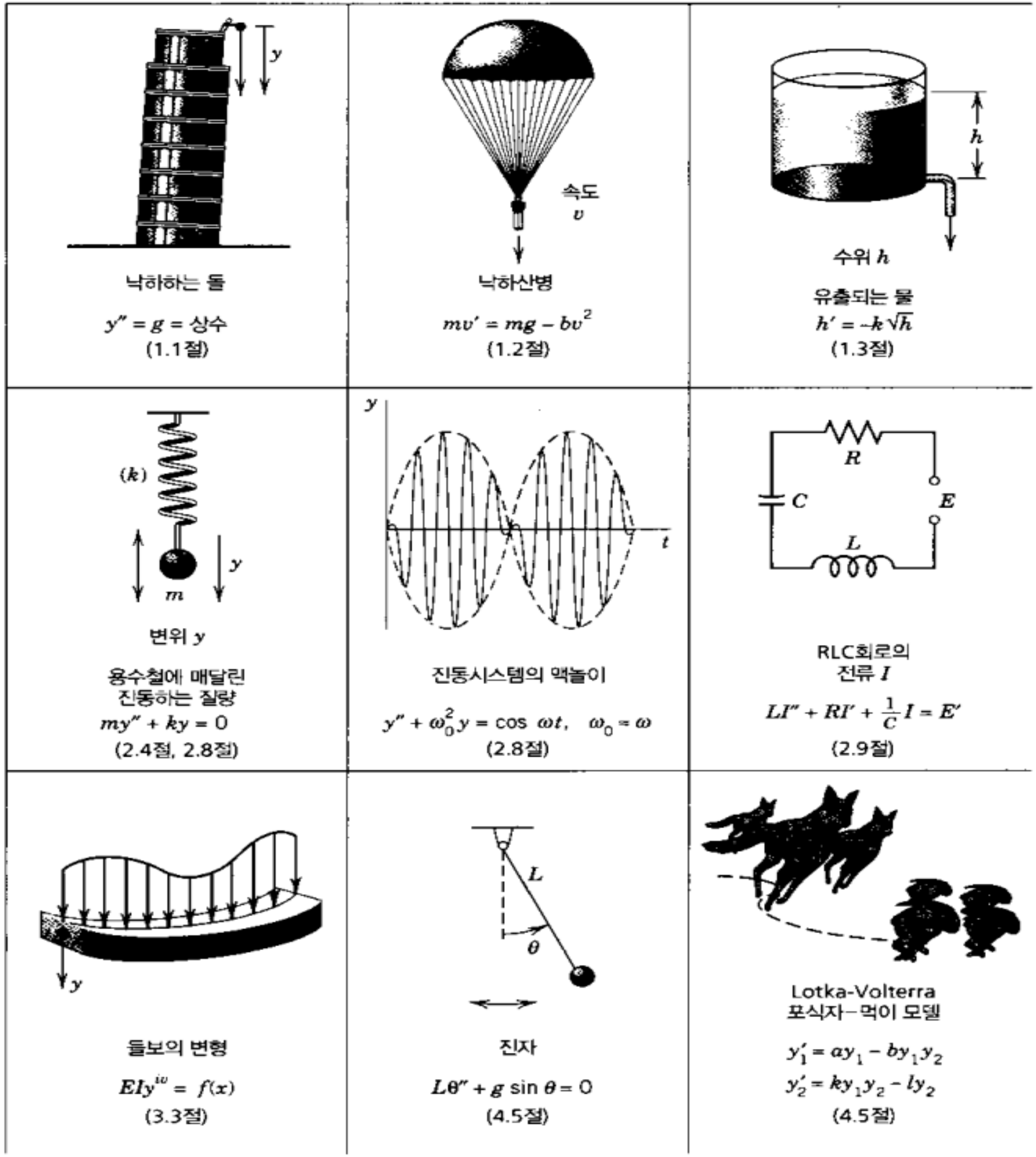


그림 2. 미분방정식의 몇 가지 응용

1.2 미분방정식의 해

n차 미분방정식 $F(x, y, y', \cdots, y^{(n)}) = 0$

해(Solution): 어떤 함수 $y = f(x)$재하여 차 도n수를 가지며
위의 미분방정식을 만족하는 경우 $y = f(x)$lution)라 정의

① 일반해(General Solution)와 특수해(Particular Solution)

$$y' + y = 2$$

- $y = ke^{-x} + 2$ (k는 상수) ; 일반해

  임의의 상수 k 포함되어 의 k 택에 따라 무수히 많은 해가 존재하는데 이를 일반해라 정의

- $y = e^{-x} + 2$ 또는 $y = -3e^{-x} + 2$; 특수해

  $=1$ k는 -3인 경우로서 특정한 조건 하에서 결정된 하나의 해

② 양함수해와 음함수해

양함수해: $y = f(x)$같이 독립변수와 종속변수가 분리된 형태의 해

음함수해: $f(x, y) = 0$이 독립변수와 종속변수가 통합된 형태의 해

$y'' - y = 0$; $y = e^{x} + 3e^{-x}$ (양함수해)

$e^{x} + 3e^{-x} - y = 0$ (음함수해)

$y' = \dfrac{x}{y}$; $x^{2} - y^{2} + 4 = 0$ (음함수해)

$y = \pm\sqrt{x^{2} + 4}$ (양함수해)

③ 특이해(Singular Solution)

미분방정식의 일반해에서 어떠한 상수를 선택한다하더라도 얻어질 수 없는 해

$$(y')^{2} - xy' + y = 0$$

일반해 $y = cx - c^{2}$

특수해 $y = x - 1$ ($c = 1$에 대응)

$y = 2x - 4$ ($c = 2$ 대응)

$y = \dfrac{1}{4}x^{2}$위의 방정식을 만족하므로 해가 되지만 어떤 를 선택하c라도 얻을 수 없으므로 특이해라 한다.

④ 초기치 문제(Initial Value Problem)

$$F(x,\ y',\ \cdots,\ y^{(n)}) = 0$$ ← 미분방정식

$$y(x_0) = y_0,\ y'(x_0) = y_1,\ \cdots,\ y^{(n-1)}(x_0) = y_{n-1}$$ ← n개의 초기조건

; 위의 미분방정식을 만족하는 무수히 많은 해(일반해) 중에서
주어진 초기조건을 만족하는 특정한 해를 찾는 문제

$$y'' + 3y' + 2y = 0, \quad y(0) = 1, \quad y'(0) = 0$$

일반해

초기치 문제의 해

$$y = c_1 e^{-x} + c_2 e^{-2x} \xrightarrow[y(0)=1,\quad y'(0)=0]{\text{초기 조건 대입}} y = 2e^{-x} - e^{-2x}$$

$\frac{dy}{dx} = 3y$

$\frac{dy}{y} = 3dx$

$\ln|y| = 3x$

$y = e^{3x}$

다음의 초기값 문제를 풀어라

$y' = \frac{dy}{dx} = 3y$, $y(0) = 5.7$

$y' = 3y \rightarrow \frac{dy}{dx} = 3y \xrightarrow{\text{변수분리}} \frac{dy}{y} = 3\,dx$

양변 적미분 $\ln ky = 3x$

양변 exp $ky = e^{3x}$

$y(x) = ce^{3x} \rightarrow$ 일반해

초기조건 $y(0) = 5.7$ 대입 $y(0) = cy^0 = c = 5.7$

$y(x) = 5.7e^{3x} \rightarrow$ 특수 해.

EXAMPLE 5

Radioactivity. Exponential Decay(방사능 지수적 감쇠)

Given an amount of a radioactive substance, say, 0.5 g (gram), find the amount present at any later time.

EXAMPLE 5 (continued)

Step 1. Setting up a mathematical model of the physical process.

Denote by $y(t)$ the amount of substance still present at any time t. By the physical law, the time rate of change $y'(t) = dy/dt$ is proportional to $y(t)$. This gives the **first-order ODE**

(6)
$$\frac{dy}{dt} = -ky$$

where the constant k is positive, so that, because of the minus, we do get decay (as in [B] of Example 3).

The value of k is known from experiments for various radioactive substances (e.g., k = 1.4 · 10−11 sec−1, approximately, for radium 88Ra226).

EXAMPLE 5 (continued)

Step 1. ***(continued) Setting up a mathematical model of the physical process.***

Now the given initial amount is 0.5 g, and we can call the corresponding instant $t = 0$.

Then we have the **initial condition** $y(0) = 0.5$.

This is the instant at which our observation of the process begins. It motivates the term *initial condition* (which, however, is also used when the independent variable is not time or when we choose a t other than $t = 0$.).

Hence the mathematical model of the physical process is the **initial value problem**

(7) $$\frac{dy}{dx} = -ky, \qquad y(0) = 0.5$$

EXAMPLE 5 (continued)

Step 2. Mathematical solution.

As in (B) of Example 3 we conclude that the ODE (6) models exponential decay and has the general solution (with arbitrary constant c but definite given k)

(8) $$y(t) = ce^{-kt}.$$

We now determine c by using the initial condition. Since $y(0) = c$ from (8), this gives $y(0) = c = 0.5$. Hence the particular solution governing our process is (cf. Fig. 5)

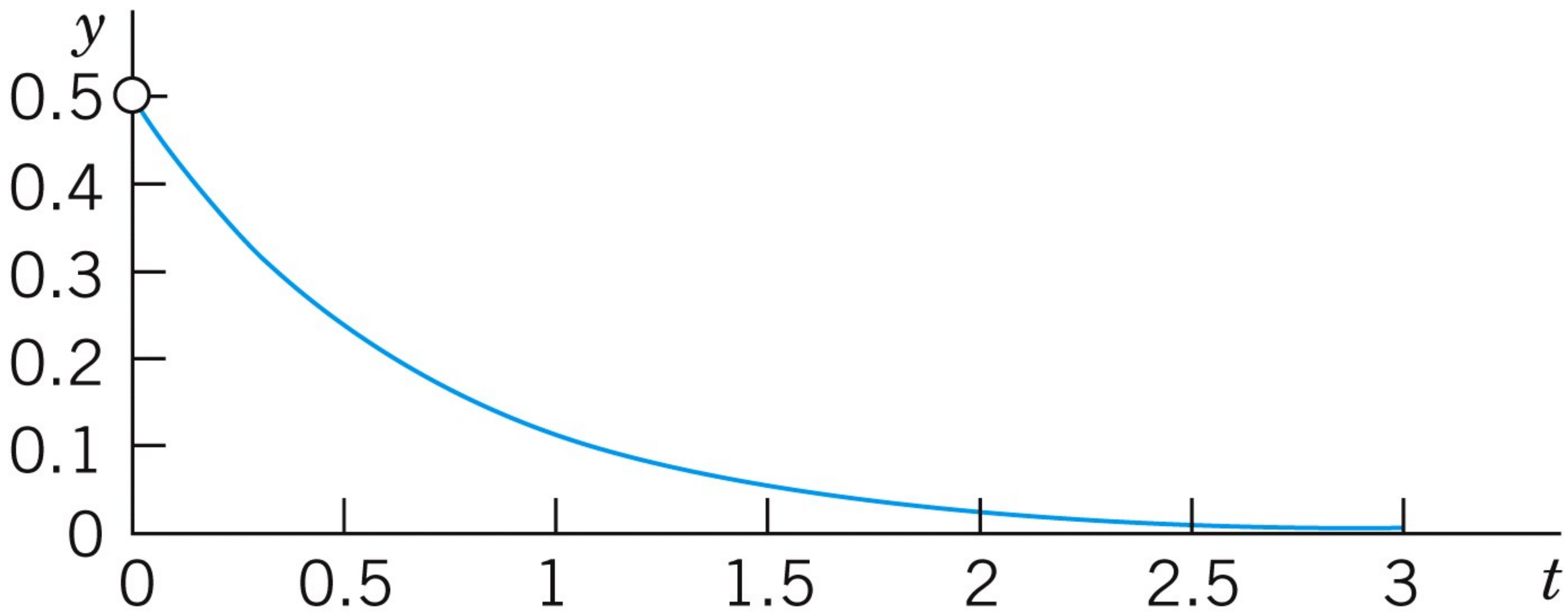
(9) $$y(t) = 0.5e^{-kt} \qquad (k > 0).$$

Always check your result—it may involve human or computer errors! Verify by differentiation (chain rule!) that your solution (9) satisfies (7) as well as $y(0) = 0.5$:

$$dy/dt = -0.5ke^{-kt} = -k \cdot 0.5e^{-kt} = -ky, \qquad y(0) = 0.5e^{0} = 0.5.$$

EXAMPLE 5 (continued)

Step 3. Interpretation of result. Formula (9) gives the amount of radioactive substance at time t. It starts from the correct initial amount and decreases with time because k is positive. The limit of y as $t \to \infty$ is zero.



<미분방정식의 해법>

	미분방정식의 형태	해법
1.3	변수분리형 $\dfrac{dy}{dx} = f(x,\ y) = \dfrac{g(x)}{h(y)}$	x와 y의 변수로 각각 분리한 다음 양변을 적분한다.
1.4	동차미분방정식 $M(x,\ y)\,dx + N(x,\ y)\,dy = 0$ $M(x,\ y)$와 $N(x,\ y)$는 동차함수	$y = ux$ 또는 $x = vy$로 치환하여 변수분리형으로 변환한다.
	완전미분방정식 $M(x,\ y)\,dx + N(x,\ y)\,dy = 0$ $\dfrac{\partial M}{\partial y} = \dfrac{\partial N}{\partial x}$가 성립	$\dfrac{\partial f}{\partial x} = M(x,\ y)$, $\dfrac{\partial f}{\partial y} = N(x,\ y)$에서 어느 한 식을 적분한 후 다른 식과 비교하여 해를 구한다.
1.5	선형미분방정식 $\dfrac{dy}{dx} + p(x)\,y = q(x)$	적분인자 $\mu(x) = e^{\int p(x)\,dx}$를 구한 후 양변에 곱해 완전미분방정식 형태로 변환하여 해를 구한다.
	베르누이 방정식 $\dfrac{dy}{dx} + p(x)\,y = f(x)\,y^n$	변수치환 $u = y^{1-n}$을 통해 선형미분방정식의 형태로 변환한다.
	치환형 $\dfrac{dy}{dx} = f(ax + by + c)$	변수치환 $u = ax + by + c$를 통해 변수분리형 미분방정식으로 변환한다.

1.3 변수분리형 방정식

미분방정식을 적당한 대수조작에 의해 와 의 함수 x 로 y 변수분리가 가능한 형태의 미분방정식

<해법>

$$\frac{dy}{dx} = f(x, y)$$

$$\Big\downarrow \text{ 대수조작}$$

$$\frac{dy}{dx} = f(x, y) = \frac{g(x)}{h(y)}$$

$$\Big\downarrow \text{ 변수분리}$$

$$h(y)\,dy = g(x)\,dx$$

$$\Big\downarrow \text{ 양변 적분}$$

$$\int h(y)\,dy = \int g(x)\,dx + c$$

$$x^2 y' = y^2 + 1 \xrightarrow{\text{대수조작}} y' = \frac{y^2+1}{x^2}$$

$$y' = \frac{y^2+1}{x^2} \xrightarrow{\text{변수분리}} \frac{dy}{y^2+1} = \frac{dx}{x^2}$$

$$\frac{dy}{y^2+1} = \frac{dx}{x^2} \xrightarrow{\text{적분}} \int \frac{dy}{y^2+1} = \int \frac{dx}{x^2}$$

$$\int \frac{dy}{y^2+1} = \int \frac{dx}{x^2} \xrightarrow{\text{일반해}} \tan^{-1} y = -\frac{1}{x} + c$$

$$\tan^{-1} y = -\frac{1}{x} + c \quad \text{또는} \quad y = \tan\left(-\frac{1}{x} + c\right)$$

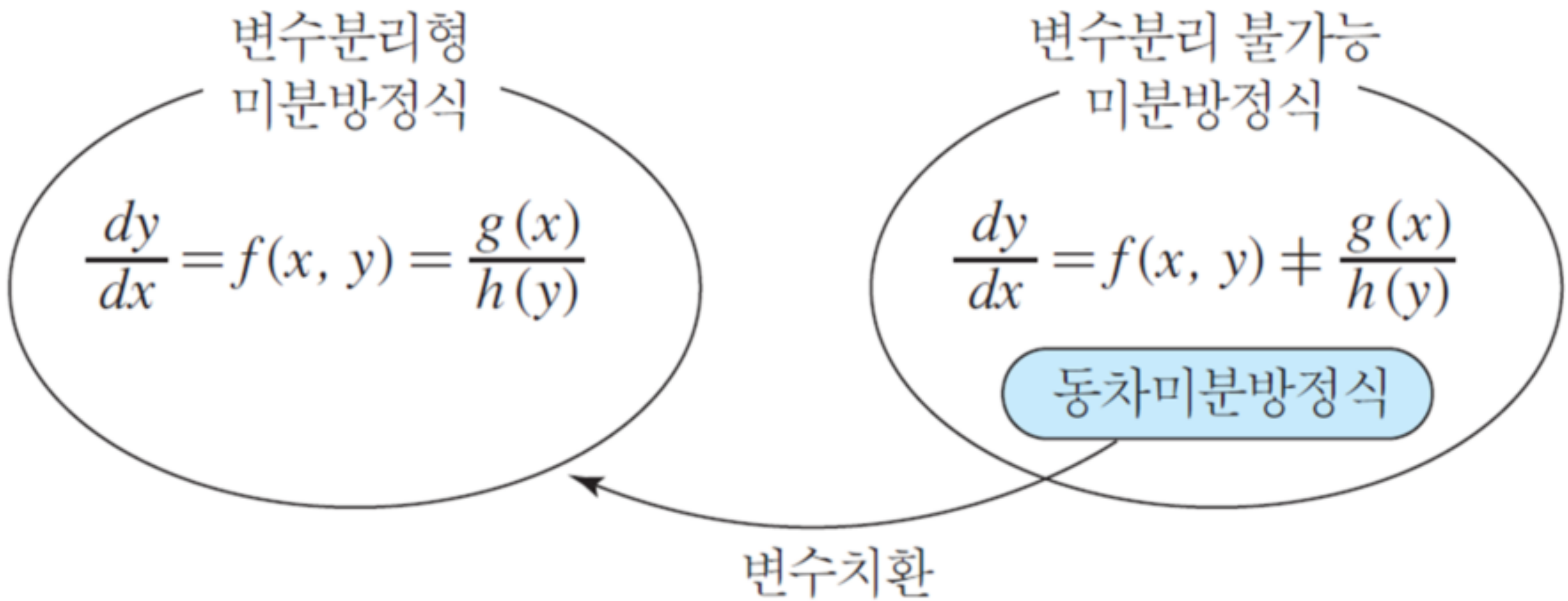
$$\frac{dy}{dx} = \frac{y^2+1}{x^2}$$

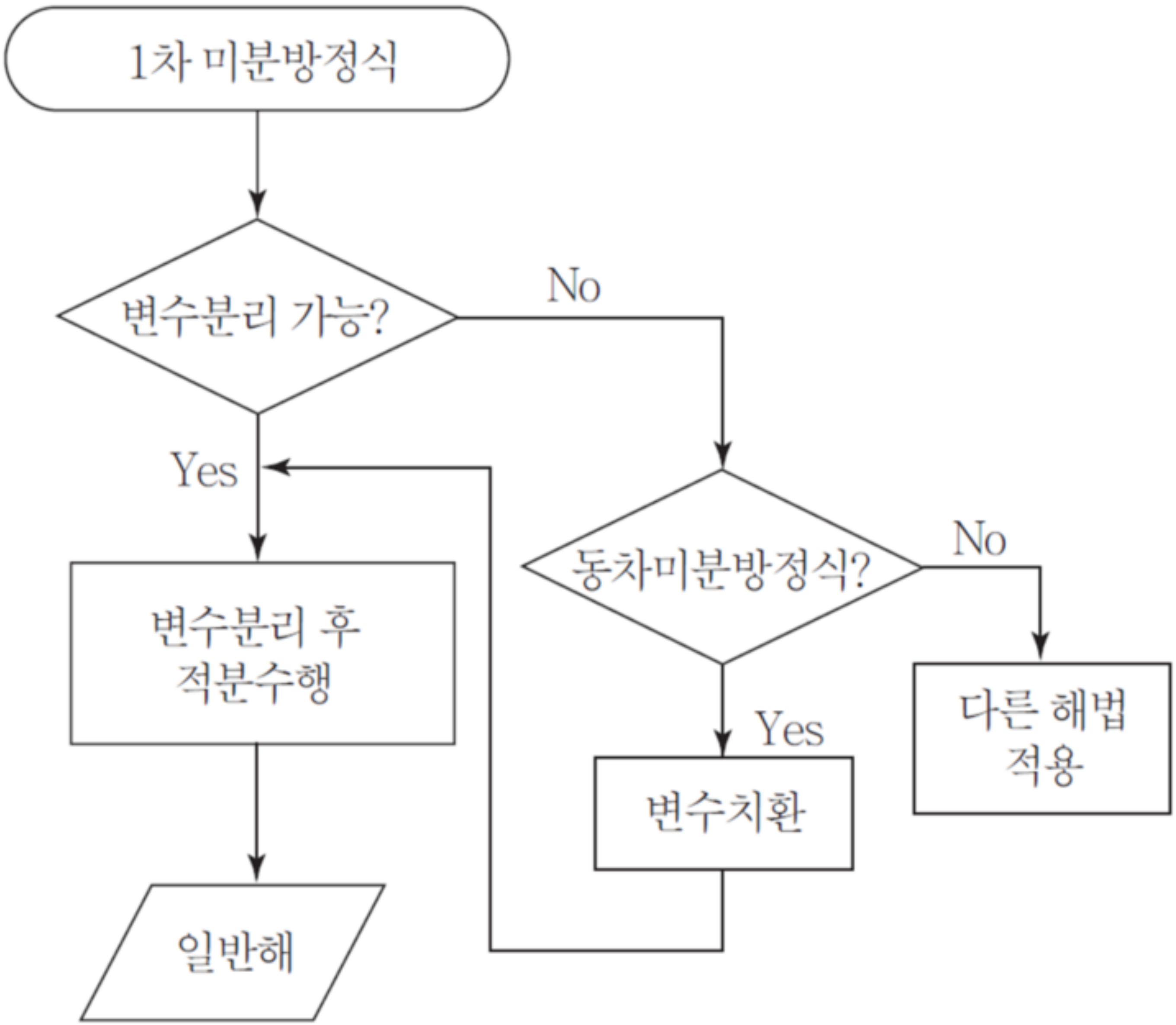
$$\frac{dy}{y^2+1} = \frac{1}{x^2}dx \qquad \int \frac{1}{y^2+1}dy = \int \frac{1}{x^2}dx$$

$$= \tan^{-1} y = -\frac{1}{x} + C \qquad \therefore y = \tan\left(-\frac{1}{x} + C\right)$$

동차미분방정식

변수분리가 되지 않는 1차 미분방정식 중에서 동차 미분방정식이라는 특별한 형태로 주어진 미분방정식은 **변수치환**을 거쳐 변수분리형으로 변환 가능.





변수 분리를 통한 1차 미분방정식 해법

동차함수의 정의

$f(x, y)$ 차수 의 n차함수 $\Longleftrightarrow$ $f(tx, ty) = t^n f(x, y)$

① $f(x, y) = x^2 + y^2 + 4$

$$f(tx, ty) = (tx)^2 + (ty)^2 + 4 = t^2 x^2 + t^2 y^2 + 4 \neq t^2 f(x, y)$$

$\therefore$ $f(x, y)$는 동차함수가 아니다. 비동차(Non Homogeneous)

② $f(x, y) = x^4 - x^2 y^2 + 8y^4$

$$f(tx, ty) = (tx)^4 - (tx)^2 (ty)^2 + 8(ty)^4$$

$$= t^4 (x^4 - x^2 y^2 + 8y^4) = t^4 f(x, y)$$

$\therefore$ $f(x, y)$는 차수 4의 동차함수이다. 동차(Homogeneous)

동차미분방정식의 정의

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{M(x, y)}{N(x, y)} \quad \text{또는} \quad M(x, y)\,dx + N(x, y)\,dy = 0$$

$N(x, y)$ $M(x, y)$차함수인 경우 위의 미분방정식을 동차미분방정식이라 정의

동차미분방정식의 해법

변수치환 $y = ux$치환하여 동차미분방정식을 변수분리형으로 변환

$$y' = u'x + u \cdot 1 = u'x + u$$

<예제> $y' = \dfrac{y-x}{y+x}$

$M(x, y) = y - x,\ \ N(x, y) = -y - x$ 는 각각 차수 1의 동차 함수 $\longrightarrow$ 동차미분방정식

$M(tx, ty) = ty - tx = t^1(y-x)$

$N(tx, ty) = -ty - tx$
$= t^1(-y-x)$

$$y' = \frac{y-x}{y+x} = \frac{\left(\dfrac{y}{x}\right) - 1}{\left(\dfrac{y}{x}\right) + 1} \xrightarrow[y' = u'x + u]{y = ux} \boxed{u'x + u = \frac{u-1}{u+1}}$$

↓ 변수 분리 → 다음슬라이드

$$\boxed{\frac{u+1}{u^2+1}\,du = -\frac{1}{x}\,dx}$$

$\xleftarrow{\text{적분}}$

$\frac{1}{2}\int \frac{2u}{u^2+1} + \int \frac{1}{u^2+1}$

$$\int \frac{u+1}{u^2+1}\,du = -\int \frac{1}{x}\,dx$$

↓ 일반해

$$\frac{1}{2}\ln(u^2+1) + \tan^{-1}u = -\ln|x| + c$$

$u = \dfrac{y}{x}$ 대입 $\longrightarrow$

$$\frac{1}{2}\ln\left(\frac{y^2}{x^2} + 1\right) + \tan^{-1}\left(\frac{y}{x}\right) = -\ln|x| + c$$

$$u'x + u = \frac{u-1}{u+1}$$

$$\frac{du}{dx}x + u = \frac{u-1}{u+1}$$

$$(du \cdot x) + (u \cdot dx) = \frac{u-1}{u+1}dx$$

$$(du \cdot x) = \frac{(u-1)dx - u(u+1)dx}{u+1}$$

$$= \frac{(-u^2-1)}{u+1}dx$$

$$\therefore \frac{u+1}{u^2+1}du = -\frac{1}{x}dx$$