PART 1

함수의 극한과 미분

-CALCULUS-

미분적분학

기초부터 응용까지

한빛아카데미
Hanbit Academy, Inc.

CALCULUS

미분적분학

기초부터 응용까지

CHAPTER 01

함수

한빛아카데미
Hanbit Academy, Inc.

Contents

CALCULUS

1.1 함수의 성질

1. 기초 함수 개념과 성질

- **함수 : 특정한 입력이 주어지면 거기에 따른 출력이 발생**

  독립변수 : 어떠한 효과를 관찰하기 위하여 실험적으로 조작되거나 혹은 통제된 변수

  종속변수 : 영향을 받는 변수

정의 1 함수

집합 X 의 각 원소 x 에 집합 Y 의 원소 y 가 오직 하나만 대응할 때 X 에서 Y 로의 **함수**function 또는 **사상**mapping이라고 한다. 함수의 기호는 다음과 같이 나타낸다.

$$f : X \to Y$$

이때, 집합 X를 함수 f 의 **정의역**domain, 집합 Y를 함수 f **의 공역**codomain이라 한다. 또한 $f(x)$를 f 에 의한 x 의 함숫값이라 하고 $y = f(x)$ 로 나타내며, X의 원소들의 상으로 이루어진 집합 $f(x) = \{f(x) | x \in X\}$는 Y 의 부분집합으로 함수 f 의 **치역**range이라 한다. 이때 x를 **독립변수**independent variable라 하고, y를 **종속변수**dependent variable라 한다.

1. 기초 함수 개념과 성질

- **함수의 표현**
  - $-2x^2 + 5y = 1$: 양함수 표현
  - $y = \ x^2 + \ $: 음함수 표현

2. 수직선 판정법

- **함수의 판단 여부**
  - 정의역에 속하는 임의의 x 값에서 y축에 평행한 수직선이 그래프와 만나는 점이 오직 한 개
    - x 값이 하나의 y 값에 대응 //

예제 1 **함수 판별**

다음 그래프가 함수가 되는지 판별하여라.

(a) $y = x^2$ 함수

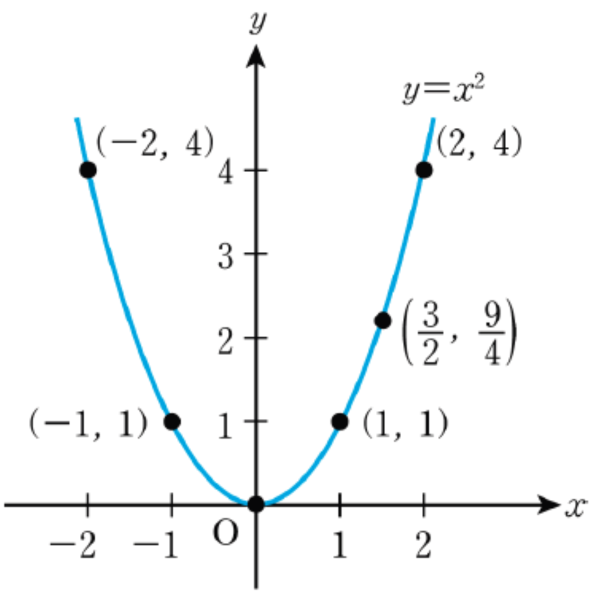
(b) $x^2 + y^2 = r^2$ 함수X

(c) $y^2 = 4px \ (p > 0)$ 함수X

2. 수직선 판정법

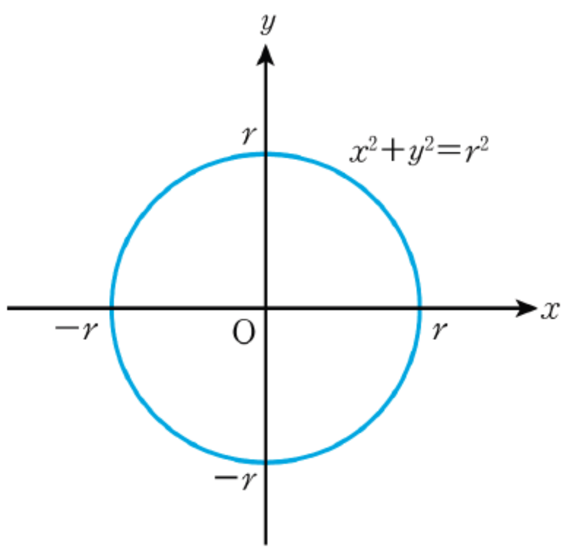
풀이

(a) 함수이다.



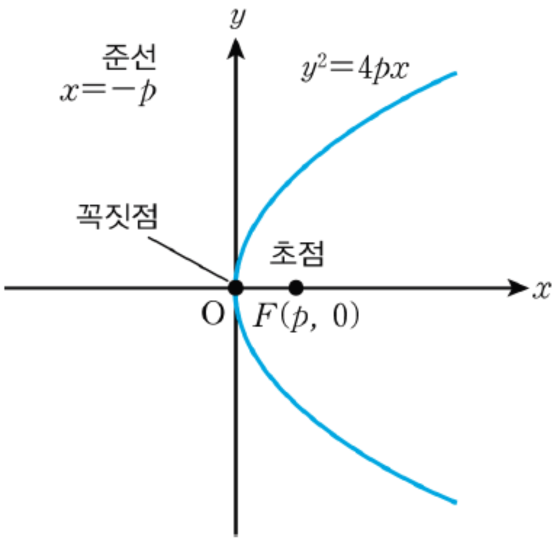
[그림 1] $y=x^2$

(b) 함수가 아니다.



[그림 2] $x^2+y^2=r^2$

(c) 함수가 아니다.



[그림 3] $y^2=4px\ (p>0)$

2. 수직선 판정법

정의 2 일대일 함수, 전사함수, 일대일 대응 함수, 항등함수

함수 $f: X \to Y$ 일 때

(a) **일대일 함수**one-to-one function 또는 **단사함수**injection란

임의의 $x_1, x_2 \in X$ 에 대하여 $x_1 \neq x_2$이면 $f(x_1) \neq f(x_2)$가 성립하는 함수이다.

(b) 공역과 치역이 일치하는 함수onto function 또는 **전사함수**surjection란

공역과 치역이 일치할 때, 즉 $Y = f(X)$가 성립하는 함수이다.

(c) **일대일 대응함수**one-to-one correspondence 또는 **전단사함수**bijection란

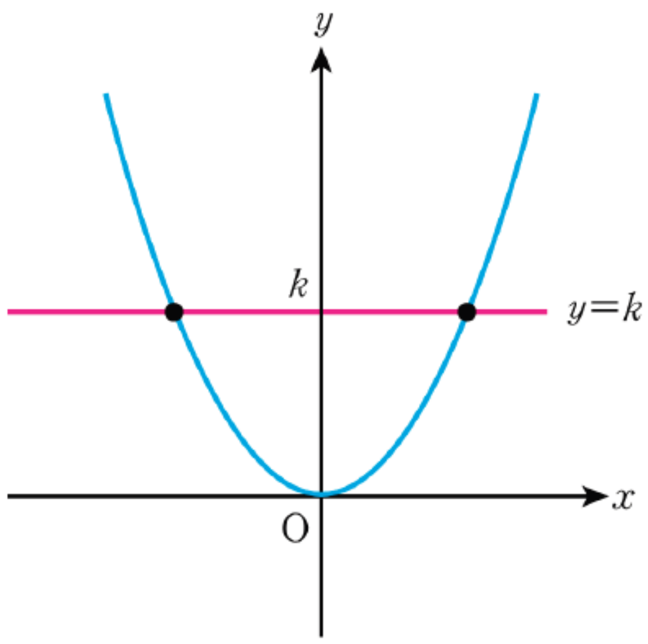
단사이고 전사인 함수이다.

(d) **항등함수**identity function란

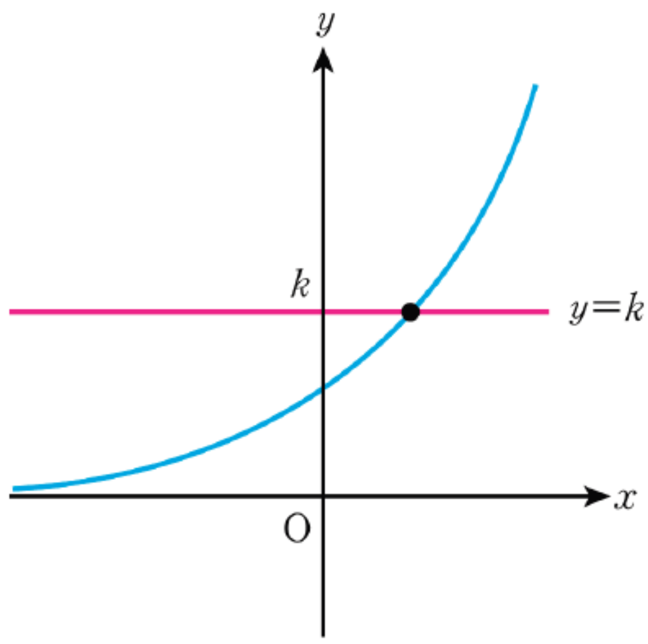
모든 $x \in X$ 에 대하여 $f(x) = x$ 가 성립하는 함수이다.

3. 수평선 판정법

- **일대일 함수 조건**
  - ▫ **그래프가 모든 수평선과 두 번 이상 만나지 않아야 함**



[그림 4] 일대일 함수가 아니다



[그림 5] 일대일 함수이다

3. 수평선 판정법

정의 3 함수의 연산

두 함수 f와 g의 정의역이 각각 X_1, $X_2 \subset \mathbb{R}$이라고 할 때, $f+g$, $f-g$, fg를 다음과 같이 정의한다.

모든 $x \in X_1 \cap X_2$에 대하여

(a) $(f+g)(x) = f(x) + g(x)$ (함수의 합)

(b) $(f-g)(x) = f(x) - g(x)$ (함수의 차)

(c) $(fg)(x) = f(x)g(x)$ (함수의 곱)

또한, $g(x) \neq 0$인 모든 $x \in X_1 \cap X_2$에 대하여

(d) $\left(\dfrac{f}{g}\right)(x) = \dfrac{f(x)}{g(x)}$ (함수의 몫)

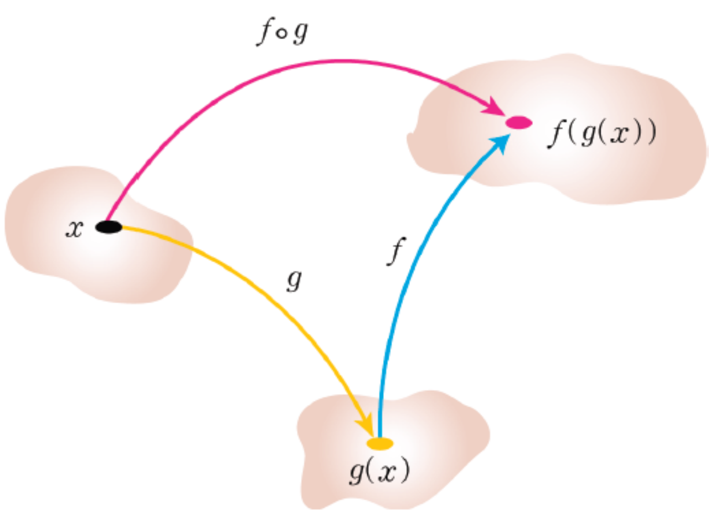
3. 수평선 판정법

정의 4 **합성함수**

두 함수 f와 g의 정의역이 각각 $X_1, X_2 \subset \mathbb{R}$이라고 할 때, $x \in X_2$, $g(x) \in X_1$에 대하여 **f와 g의 합성함수**composite function $f \circ g$는

$$(f \circ g)(x) = f(g(x))$$

로 정의하고, 이를 f와 g의 합성이라 한다.



[그림 6] 합성함수 $f \circ g$

3. 수평선 판정법

- 합성함수는 교환법칙이 성립하지 않음
  - $f \circ g \neq g \circ f$

예제 3 **합성함수**

두 함수 $f(x) = x^2 + 3$과 $g(x) = \sqrt{x-4}$에 대하여 합성함수 $f \circ g$와 $g \circ f$를 구하여라.

$f(g(x)) = f(\sqrt{x-4}) = (x-4)+3 = x-1 \ (x \geq 4)$

$g(f(x)) = g(x^2+3) = \sqrt{x^2-1} \ (-1 \leq x \leq 1)$

풀이

합성함수 정의를 이용하여 두 합성함수를 구해보면

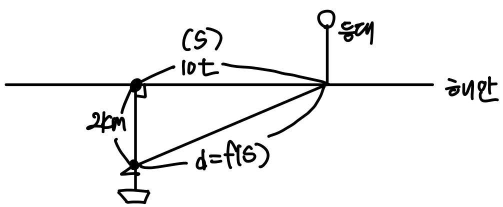
$(f \circ g)(x) = f(g(x)) = f(\sqrt{x-4}) = (\sqrt{x-4})^2 + 3 = x - 1$ (단, $x \geq 4$)이고,

$(g \circ f)(x) = g(f(x)) = g(x^2+3) = \sqrt{x^2-1}$ (단, $|x| \geq 1$)이다.

3. 수평선 판정법

예제 4 **합성함수의 응용**

해안선과 평행하게 10 km/h 의 속도로 움직이는 배가 있다. 이 배는 해안으로부터 2 km 떨어져 있고 정오에 등대를 지나갔다. 배가 정오에서부터 이동한 거리 s에 대한 배와 등대 사이 거리 $d = f(s)$ 함수를 구하고, 정오로부터 시간 t에 대한 s의 함수 $s = g(t)$를 구한 후 $f \circ g$ 함수의 의미를 말하여라.



풀이

$d^2 = s^2 + 2^2 = s^2 + 4 \Leftrightarrow d = f(s) = \sqrt{s^2+4}$ 이고 $s = g(t) = 10t$이다.

또 $(f \circ g)(t) = f(g(t)) = \sqrt{100t^2+4}$ 이다.

$f \circ g$ 함수의 의미는 배와 등대 사이 거리를 시간에 관한 함수로 표현한 것이다.

$d^2 = s^2 + 4$
$d = f(s) = \sqrt{s^2+4}$
$s = g(t) = 10t$

$f(s) = \sqrt{s^2+4}$
$g(t) = 10t$
$f(g(t)) = \sqrt{100t^2+4}$

CALCULUS

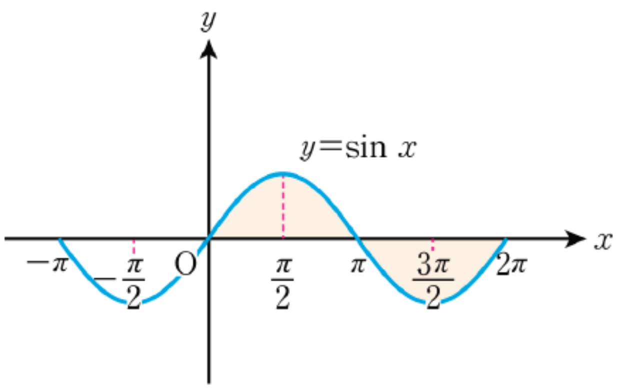
1.2 초월함수 *e*

- 다항식의 근으로 정의할 수 없는 함수
- 삼각함수, 지수함수, 로그함수, 역삼각함수 등

1. 삼각함수

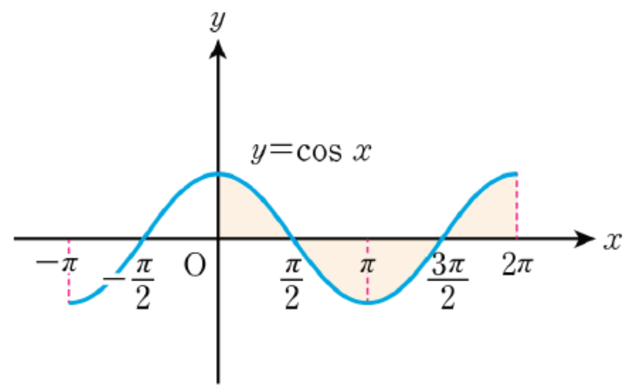
- **삼각함수의 그래프**

(a) $f(x) = \sin x$



[그림 1] $y = \sin x$

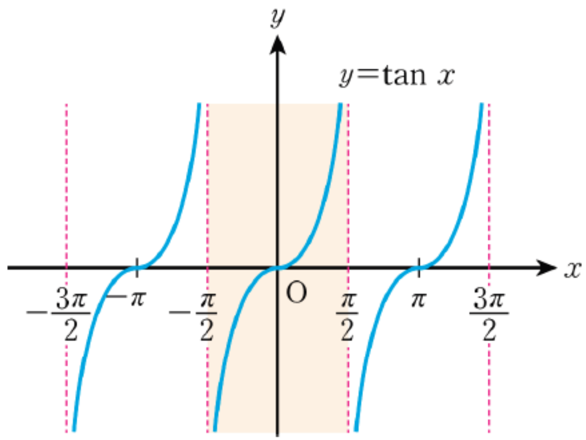
(b) $f(x) = \cos x$



[그림 2] $y = \cos x$

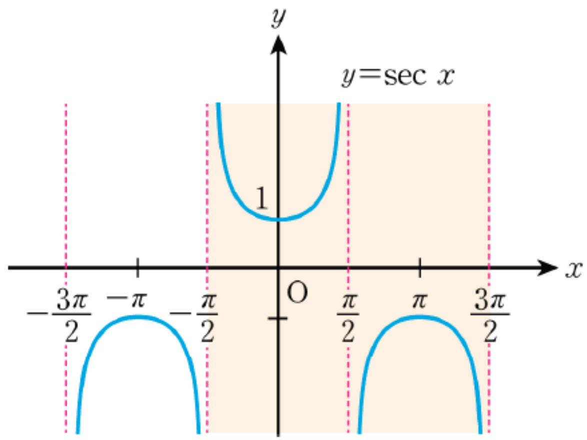
1. 삼각함수

(c) $f(x) = \tan x = \dfrac{\sin x}{\cos x}$



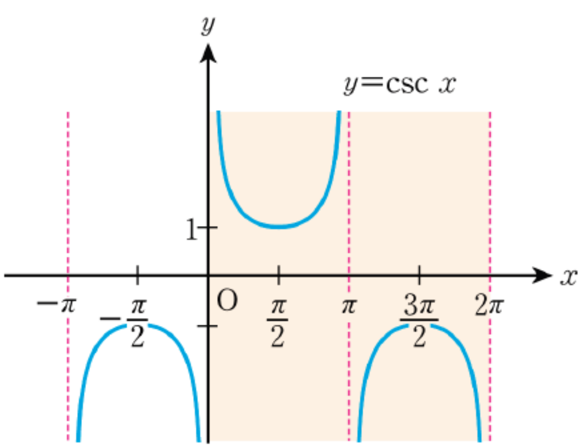
[그림 3] $y = \tan x$

(d) $f(x) = \sec x = \dfrac{1}{\underline{\cos x}}$ =0일때 발산



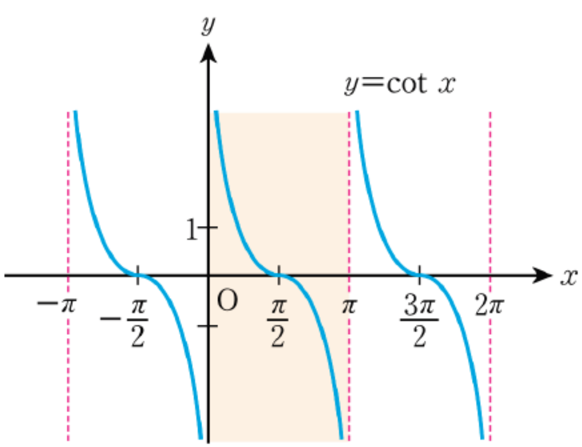
[그림 4] $y = \sec x$

(e) $f(x) = \csc x = \dfrac{1}{\underline{\sin x}}$=0일때 발산



[그림 5] $y = \csc x$ [1]

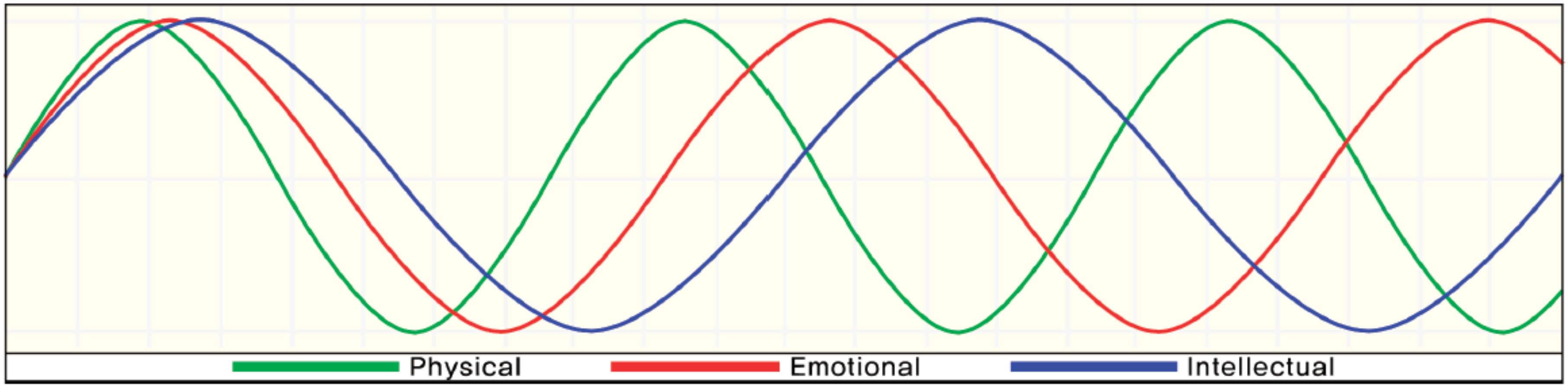
(f) $f(x) = \cot x = \dfrac{\cos x}{\sin x}$



[그림 6] $y = \cot x$

1. 삼각함수

- **삼각함수의 실생활 활용**
  - **바이오리듬**
    - 신체리듬 : 남성인자 23일 주기, 여성인자 28일 주기
    - 사인함수로 나타냄
    - $y = 100$, x는 자신이 살아온 날을 23으로 나눈 나머지



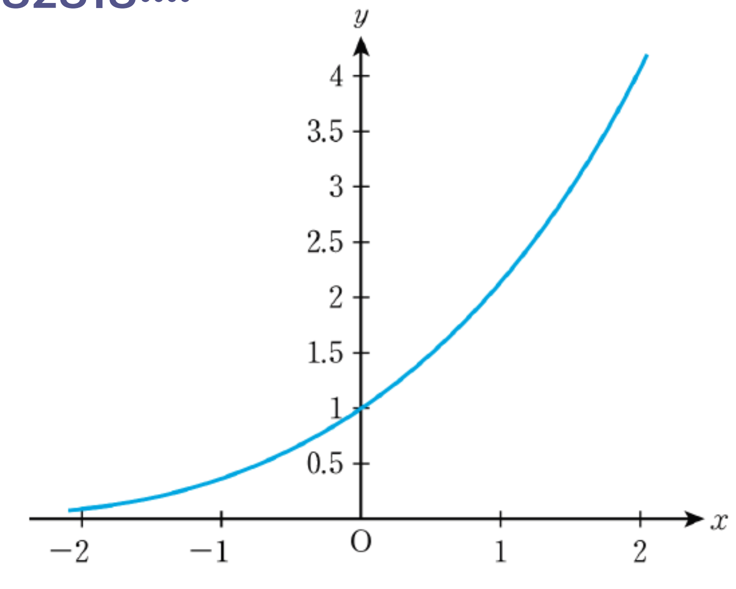
[그림 7] 남성의 바이오리듬을 나타내는 삼각함수

1. 삼각함수

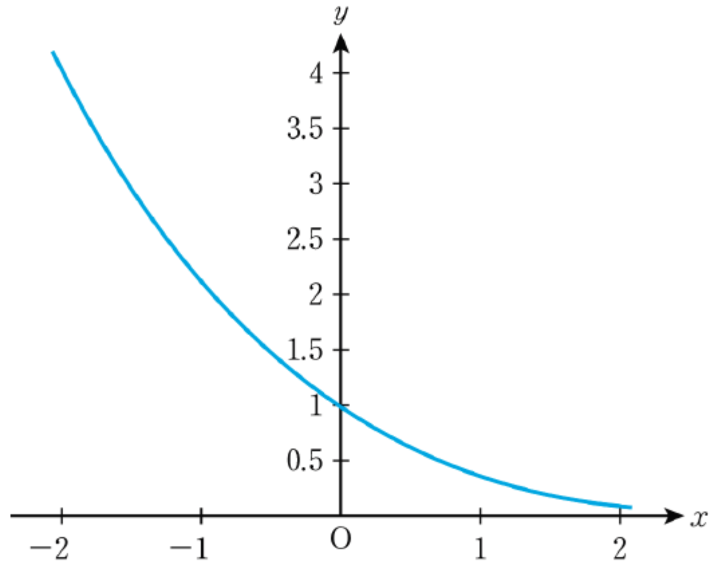
- 노이즈 캔슬링 작용 원리
  - 파동의 상쇄간섭의 원리 이용
    - 이어폰이나 전화기에서 외부환경의 소음도 같이 전달하는 경우
      - 위상이 반대인 삼각함수들의 값을 더하면
      - 소음과 위상이 반대가 되는 파동을 만들어 소음 제거

2. 지수함수

- $f(x) = a^x$
  - $a > 0$ (a는 임의의 실수)
    - a : 밑 , x : 지수
  - $f(x) = e^x$
    - 자연지수함수
    - $e \approx 2.7182818....$



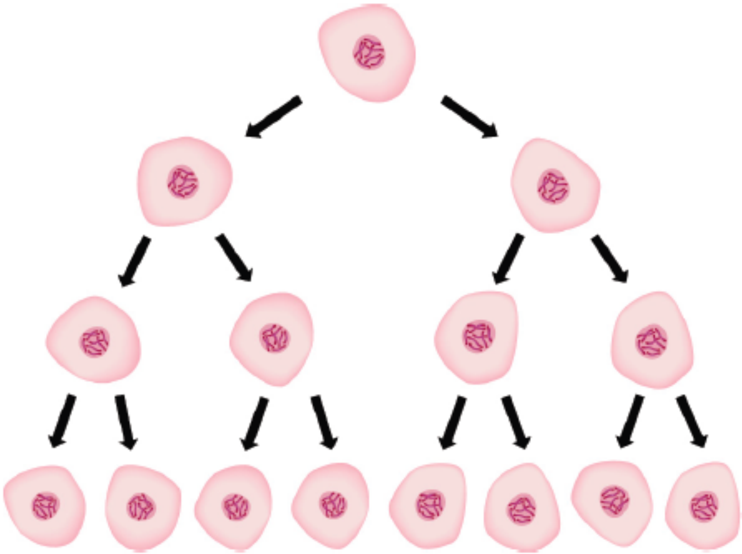
[그림 10] $y = a^x (a > 1)$



[그림 11] $y = a^x (0 < a < 1)$

2. 지수함수

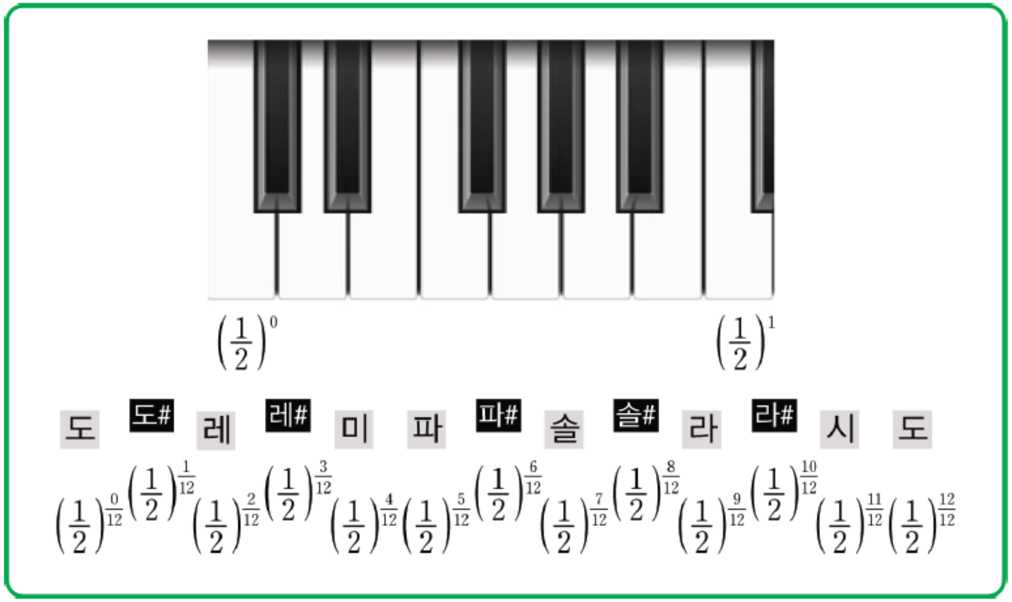
- **지수함수의 실생활 활용**
  - **세포 분열, 박테리아 증식**
    - 하나의 세포가 분열을 시작하면 기하급수적으로 증가
    - $y = 2^x$ 으로 분석



[그림 12] 세포 분열

2. 지수함수

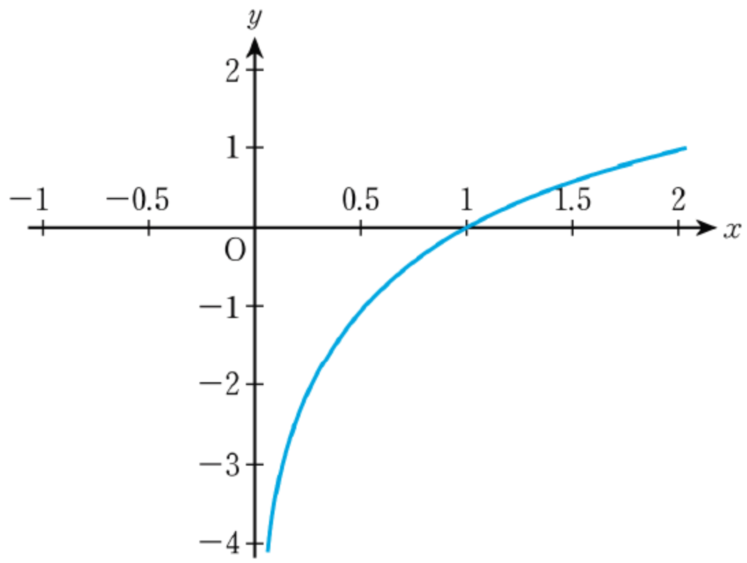
- **현의길이**
  - 한 옥타브 높은 음은 길이가 절반으로 줄어듬
    - 현의 길이는 건반하나하나마다 12분의 1씩 줄어듬
    - 낮은 도에서 높은 도까지 총 13개의 건반 음에 대응
      - 바흐가 처음 작품에 적용한 평균율을 따름
    - *x*개의 건반만큼 음이 올라가는 경우
      - **$y=$ ()** 의 식이 성립



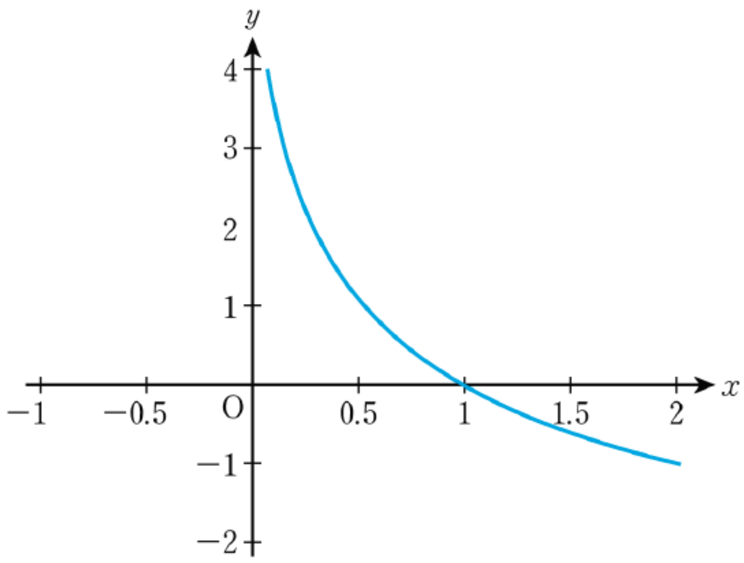
[그림 13] 현의 길이

3. 로그함수

- $x = a^y$일 때 $y = \log_a x$ ($a > 0$, $a \neq 1$, $x > 0$)
  - a : 밑
  - x : 진수
- $f(x) = \log_e x = \ln x$
  - 자연로그함수
  - $e \approx 2.7182818\cdots$



[그림 14] $y = \log_a x \ (a > 1)$

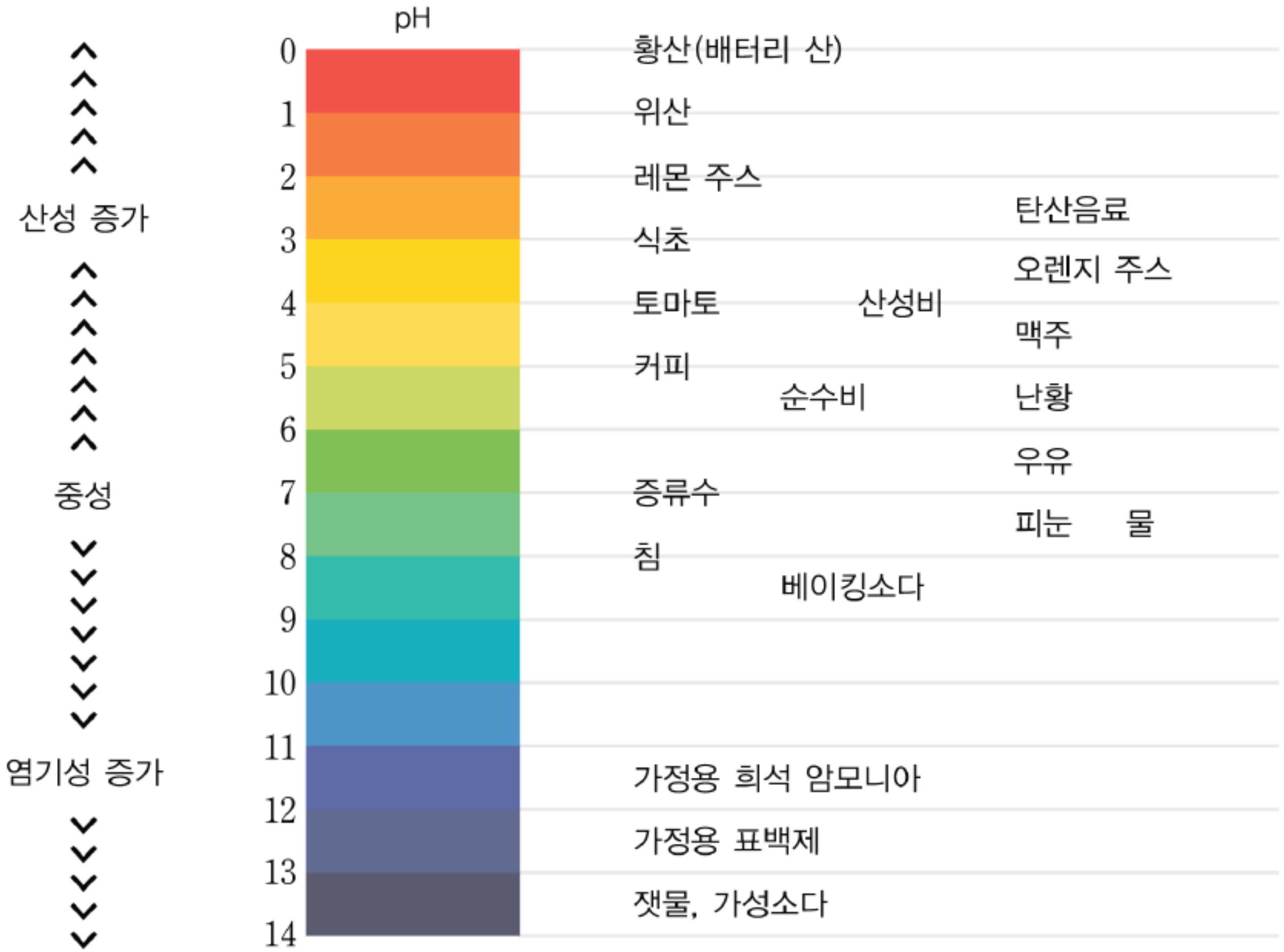


[그림 15] $y = \log_a x \ (0 < a < 1)$

3. 로그함수

- 로그함수의 실생활 활용
  - pH
    - 물의산성이나 알칼리성의 정도를 나타내는 수치
    - 수소 이온 농도의 지수
    - 물(수용액)은 수소이온(H^+)과 수산이온(OH^-) 공존
      - 중성 : H^+ 농도와 OH^- 농도가 동일한 경우
      - 산성 : H^+ 쪽이 많은 경우
      - 알칼리성 : OH^- 쪽이 많은 경우
      - $[H^+]$값이 정해지면 $[OH^-]$값이 자동적으로 결정
    - $pH = \log\ = -\log [H^+]$

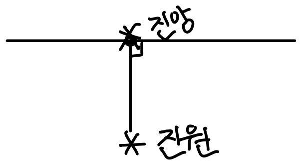
3. 로그함수



[그림 16] 산성, 중성, 염기성 실생활 예제

3. 로그함수

- 지진
  - **규모 : 진원에서 방출된 지진 에너지의 크기를 나타내는 척도**
    - 지진계에 기록된 지진파의 진폭을 이용하여 계산
      - 장소에 관계없는 절대적인 개념의 크기
      - 미국의 12등급 수정 메르칼리진도 계급(MM scale) 가장 많이 사용
      - 진원 : 지구 내부에서 최초로 발생된 지점
      - 진앙 : 진원에서 수직으로 연결된 지표면 위의 지점



  - $M = \log A$
    - M : 지진의 규모 , A : 지진파의 최대 진폭
  - $\log E = 11.8 + 1.5M$
    - E : 규모가 M인 에너지의 크기
    - 규모가 커지면 에너지의 크기는 10배씩 증가

3. 로그함수

[표 1] 지진 강도에 따른 현상

규모	현상
9 이상	지역을 완전히 파괴함
7～8.9	건물 대부분이 무너지고 다리가 부서지며 산사태가 발생함
6～6.9	건물에 부분적인 붕괴와 함께 큰 피해를 입힘
5～5.9	건물에 벽의 균열과 같은 작은 피해를 입힘
3～4.9	실내의 물건들이 흔들림
1～2.9	지진계에 의해서만 탐지가 가능함

3. 로그함수

- **소리**
  - **데시벨(dB) : 소리의 크기를 나타내는 단위**
    - **dB = 10log**
      - = $10^{-12}W/m^2$: 표준음
      - *I* : 소리의크기

[표 2] 소리 종류에 따른 데시벨

소리의 종류	I	$\frac{I}{I_0}$	$10\log\frac{I}{I_0}$
표준음	10^{-12}	$\frac{10^{-12}}{10^{-12}}=1$	0 dB
일상적인 대화의 소리	10^{-6}	$\frac{10^{-6}}{10^{-12}}=10^6$	60 dB
번잡한 도시의 소음	10^{-5}	$\frac{10^{-5}}{10^{-12}}=10^7$	70 dB
기차의 경적 소리	10^0	$\frac{10^0}{10^{-12}}=10^{12}$	120 dB

CALCULUS

1.3 쌍곡선함수

쌍곡선 함수

- 현수선이나 이상적인 파도, 양 끝에 매달린 전화선을 나타내는 함수
  - 실체가 점진적으로 흡수되거나 소멸되는 경우 등 다양한 응용분야에서 나타나는 함수
  - 예 : 빛, 속도, 전기, 방사능

정의 1 쌍곡선함수 hyperbolic trigonometric function

모든 실수 $x \in (-\infty, \infty)$에 대하여 다음과 같이 정의한다.

(a) $\sinh x = \dfrac{e^{x} - e^{-x}}{2}$

(b) $\cosh x = \dfrac{e^{x} + e^{-x}}{2}$

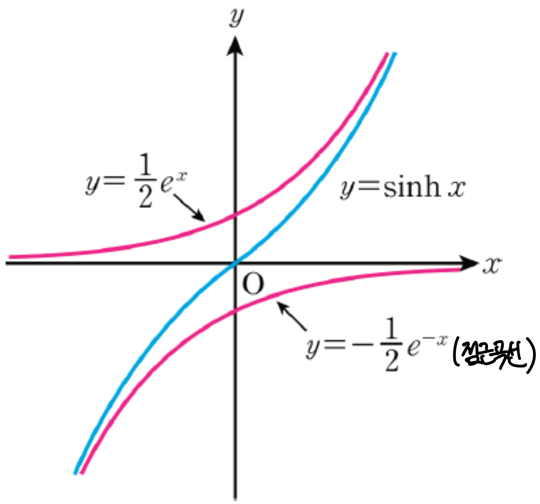
(c) $\tanh x = \dfrac{\sinh x}{\cosh x}$

(d) $\operatorname{csch} x = \dfrac{1}{\sinh x}$

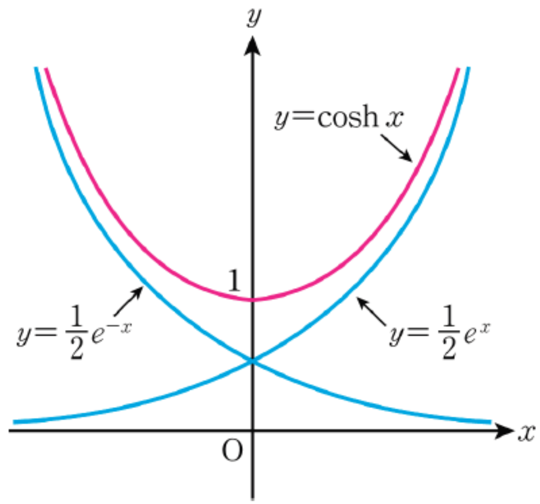
(e) $\operatorname{sech} x = \dfrac{1}{\cosh x}$

(f) $\coth x = \dfrac{\cosh x}{\sinh x}$

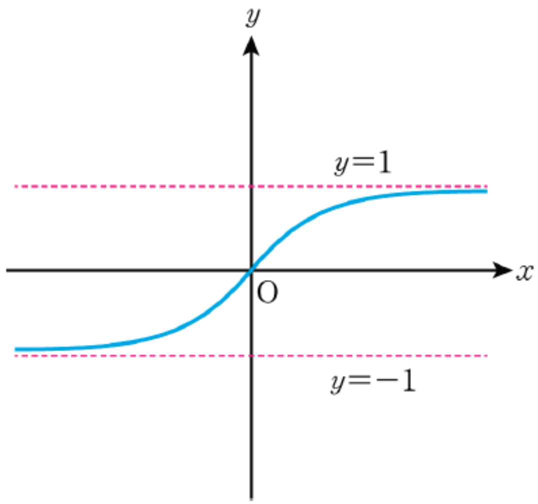
쌍곡선 함수



[그림 1] $y=\sinh x$



[그림 2] $y=\cosh x$



[그림 3] $y=\tanh x$

정리 1 쌍곡선함수의 성질

쌍곡선함수에 대하여 다음 성질이 성립한다.

(a) $\sinh(-x) = -\sinh x$ (기함수) (b) $\cosh(-x) = \cosh x$ (우함수)

(c) $\cosh^2 x - \sinh^2 x = 1$ (d) $1 - \tanh^2 x = \operatorname{sech}^2 x$

$\cosh x + \sinh x = e^x$

$\cosh x - \sinh x = e^{-x}$

$\cosh^2 x - \sinh^2 x = 1$

$\cosh^2 x - \sinh^2 x = 1$

$\Rightarrow 1 - \frac{\sinh^2 x}{\cosh^2 x} = \frac{1}{\cosh^2 x}$

$\Rightarrow 1 - \tanh^2 x = \operatorname{sech}^2 x$

$\frac{\cosh^2 x}{\sinh^2 x} - 1 = \frac{1}{\sinh^2 x}$

$\coth^2 x - 1 = \operatorname{csch}^2 x$

쌍곡선 함수

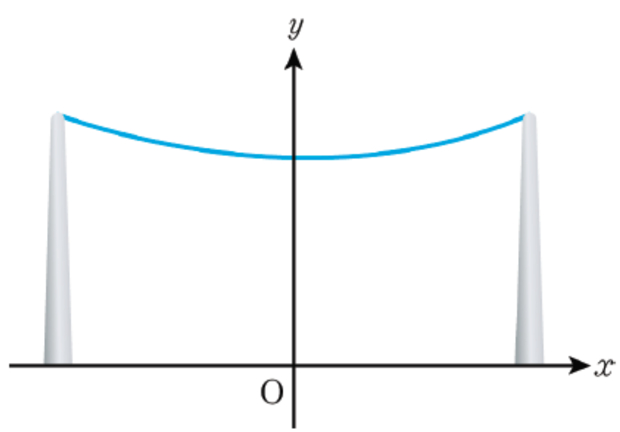
- 쌍곡선함수의 실생활 활용
  - 현수선
    - 무겁고 유연하게 휘어진 전선(전화,전력)이 같은 높이의 두 점에 걸쳐 있을 경우
    - 곡선의 방정식
      - $y = f(x) = c + \cosh(\ )$ (단, $a > 0$, c는 상수)

쌍곡선 함수

- 이상적인 바다의 파도
  - 수심이 d인 바다에 길이가 L인 파도가 속도 v로 움직일 경우
  - 파도의 속도
    - $v(d) =$ ($g = 9.8$)

쌍곡선 함수

- **두 장대 꼭대기에 매달려 있는 전화선**
  - $y = f(x)$ = cosh( ) $\frac{e^x + e^{-x}}{2}$
    - : 전화의 선밀도
    - : 중력가속도
    - : 가장 낮은 지점에서의 장력



[그림 4] 두 장대 꼭대기에 매달린 전화선

CALCULUS

1.4 역함수, 역삼각함수와 역쌍곡선함수

1. 역함수

- **역함수 관계에 있는 두 함수는 $y = x$에 대칭**
  - 역함수를 구할 때 y와 x를 바꾼 후 y에 대하여 풀어냄

정의 1 역함수

함수 f가 X에서 Y로 대응되는 함수, 즉 $f: X \to Y$일 때 함수 $g: Y \to X$가 존재하여

(a) 모든 $y \in Y$에 대하여 $f(g(y)) = y$이고

(b) 모든 $x \in X$에 대하여 $g(f(x)) = x$가 성립할 때

g를 f의 역함수, f를 g의 **역함수**inverse function라고 하고 $g = f^{-1}$, $f = g^{-1}$로 표시한다.

1. 역함수

예제 1 **역함수 구하기**

함수 $y=2x+1$의 역함수를 구하여라.

풀이

역함수는 $y=x$에 대칭이므로 x와 y를 바꾸면 $x=2y+1$이 되고 역함수는 $y=\dfrac{x-1}{2}$이다.

2. 역삼각함수

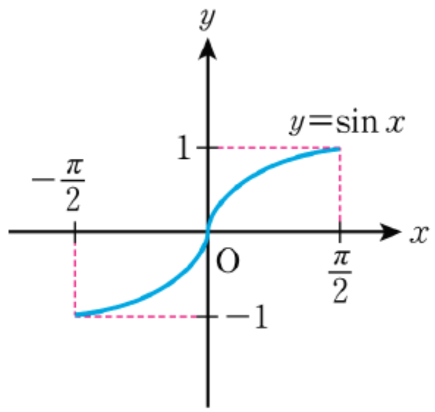
- $y = x^2$ 은 실수 전체에서 일대일 대칭이 아님
  - 역함수가 존재하지 않음
  - 정의역을 $x \geq 0$으로 제한 시키면 일대일 대응
    - 역함수를 구할 수 있음

정의 2 **역사인함수** arcsine function

$y = \sin x$ 의 정의역을 $\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$ 로 제한하면 일대일 함수가 되고 역함수가 존재한다. **역사인함수**는 다음과 같이 정의한다.

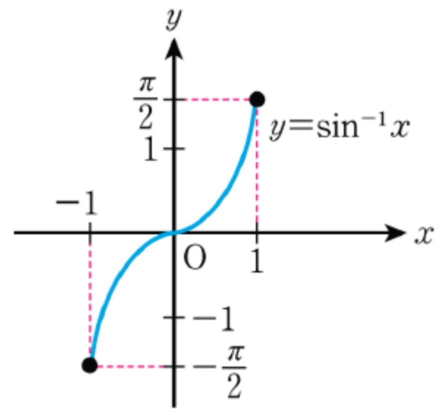
$$y = \arcsin x \text{ (아크사인)} \iff \sin y = x, \text{ 정의역 : } -1 \leq x \leq 1, \text{ 치역 : } -\frac{\pi}{2} \leq y \leq \frac{\pi}{2}$$

2. 역삼각함수



[그림 2] $y=\sin x$

↳ 공학에서, 사이즈가 크고 복잡



[그림 3] $y=\sin^{-1}x$

예제 6 역사인함수의 값 구하기

$\sin^{-1}\left(\frac{1}{2}\right)$을 구하여라.

$\sin\square=\frac{1}{2}$ (정의역 $-\frac{\pi}{2}\leq x\leq\pi$)

$\square=\frac{\pi}{6}$

풀이

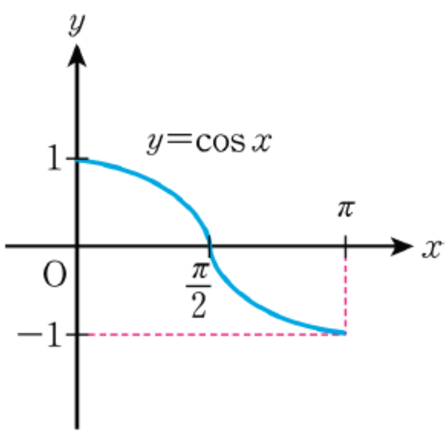
$\sin^{-1}\left(\frac{1}{2}\right)=x$ 로 두면 x 의 범위는 $-\frac{\pi}{2}\leq x\leq\frac{\pi}{2}$ 이다. 역함수의 정의에 의해 $\sin x=\frac{1}{2}$ 이고, 주어진 범위 내에서 $x=\frac{\pi}{6}$ 가 된다. 그러므로 $\sin^{-1}\left(\frac{1}{2}\right)=\frac{\pi}{6}$ 이다.

2. 역삼각함수

정의 3 **역코사인함수** arccosine function

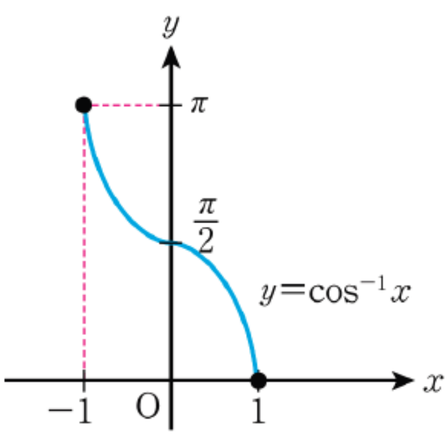
$y = \cos x$ 의 정의역을 $[0,\ \pi]$ 로 제한하면 일대일 함수가 되고, 역함수가 존재한다. **역코사인함수**는 다음과 같이 정의한다.

$$y = \operatorname{arc}\cos x \text{ (아크코사인)} \Leftrightarrow \cos y = x, \text{ 정의역 : } -1 \le x \le 1, \text{ 치역 : } 0 \le y \le \pi$$



[그림 4] $y = \cos x$

↳ 공학에서, 사이즈가 작고 단순
우함수의 성질을 이용하면 유용해짐.



[그림 5] $y = \cos^{-1}x$

2. 역삼각함수

예제 8 역코사인함수 값 구하기

$\cos^{-1}\left(-\frac{1}{2}\right)$ 을 구하여라.

$\cos\square = -\frac{1}{2}$ (정의역 $0 \le x \le \pi$)

$\square = \frac{2}{3}\pi$

풀이

$\cos^{-1}\left(-\frac{1}{2}\right) = x$ 로 두면 x의 범위는 $0 \le x \le \pi$ 이다. 역함수의 정의에 의해 $\cos x = -\frac{1}{2}$ 이고 주어진 범위 내에서 $x = \frac{2}{3}\pi$ 이다. 그러므로 $\cos^{-1}\left(-\frac{1}{2}\right) = \frac{2}{3}\pi$ 이다.

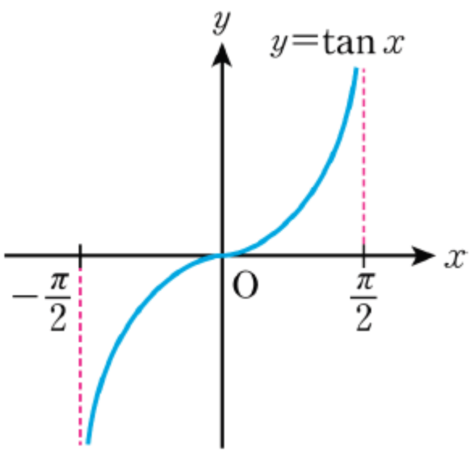
2. 역삼각함수

정의 4 **역탄젠트함수**arctangent function

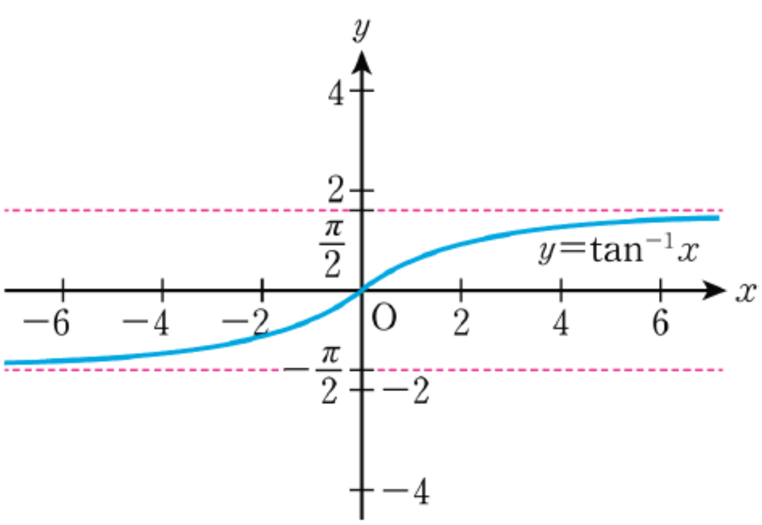
$y=\tan x$의 정의역을 $\left(-\dfrac{\pi}{2}, \dfrac{\pi}{2}\right)$로 제한하면 일대일 함수가 되고 역함수가 존재한다.

역탄젠트함수는 다음과 같이 정의한다.

$$y=\arctan x\ (\text{아크탄젠트}) \Leftrightarrow \tan y = x\ ,\quad \text{정의역}\ :\ -\infty < x < \infty,\quad \text{치역}\ :\ -\frac{\pi}{2} < y < \frac{\pi}{2}$$



[그림 6] $y=\tan x$



[그림 7] $y=\tan^{-1}x$

2. 역삼각함수

예제 10 **역탄젠트함수 값 구하기**

$\tan^{-1}(-1)$을 구하여라.

$\tan\square = -1$ (정의역 $-\frac{\pi}{2} \le x \le \frac{\pi}{2}$)

$\square = -\frac{\pi}{4}$

풀이

$\tan^{-1}(-1) = x$ 로 두면 x의 범위는 $-\frac{\pi}{2} < x < \frac{\pi}{2}$ 이다. 역함수의 정의에 의해 $\tan x = -1$이고 주어진 범위에서 $x = -\frac{\pi}{4}$ 이다. 그러므로 $\tan^{-1}(-1) = -\frac{\pi}{4}$ 이다.

2. 역삼각함수

정의 5　역코시컨트함수, 역시컨트함수, 역탄젠트함수

역코시컨트함수 : $y = \operatorname{arccsc} x \Leftrightarrow \csc y = x$

정의역 : $x \in (-\infty, -1] \cup [1, \infty)$, 치역 : $y \in \left[-\frac{\pi}{2}, 0\right) \cup \left(0, \frac{\pi}{2}\right]$

$y = \operatorname{arccsc} x$(아크코시컨트)는 역함수 기호를 사용하여 $y = \csc^{-1} x$로 표기한다.

역시컨트함수 : $y = \operatorname{arcsec} x \Leftrightarrow \sec y = x$

정의역 : $x \in (-\infty, -1] \cup [1, \infty)$, 치역 : $y \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right) \cup \left(\frac{\pi}{2}, \pi\right]$

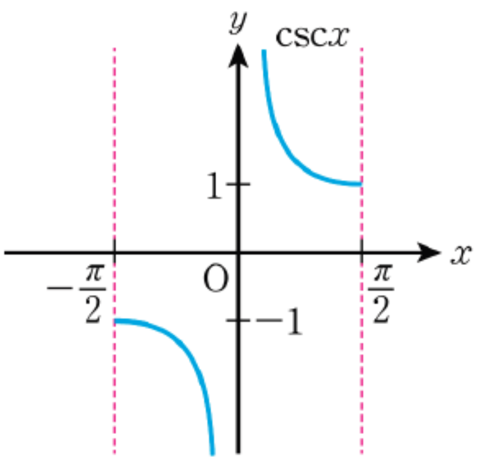
$y = \operatorname{arcsec} x$(아크시컨트)는 역함수 기호를 사용하여 $y = \sec^{-1} x$로 표기한다.

역코탄젠트함수 : $y = \operatorname{arccot} x \Leftrightarrow \cot y = x$

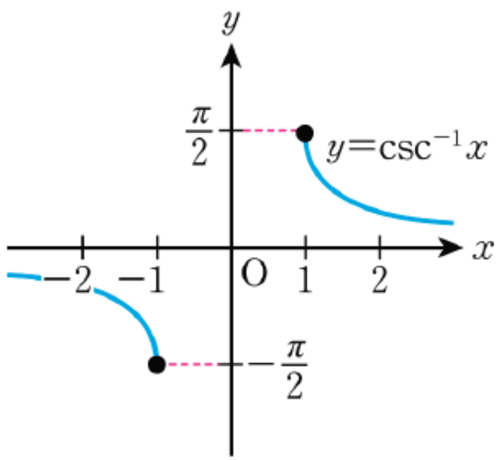
정의역 : $x \in (-\infty, \infty)$, 치역 : $y \in (0, \pi)$

$y = \operatorname{arccot} x$(아크코탄젠트)는 역함수 기호를 사용하여 $y = \cot^{-1} x$로 표기한다.

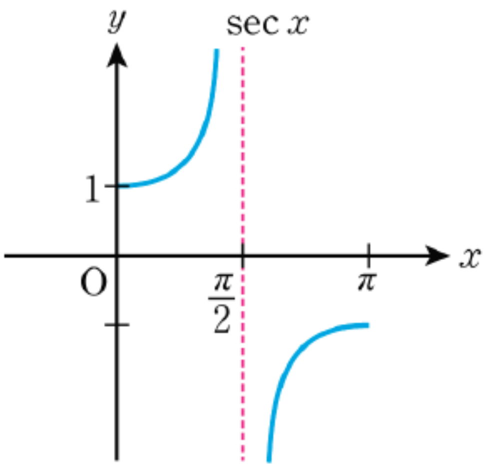
2. 역삼각함수



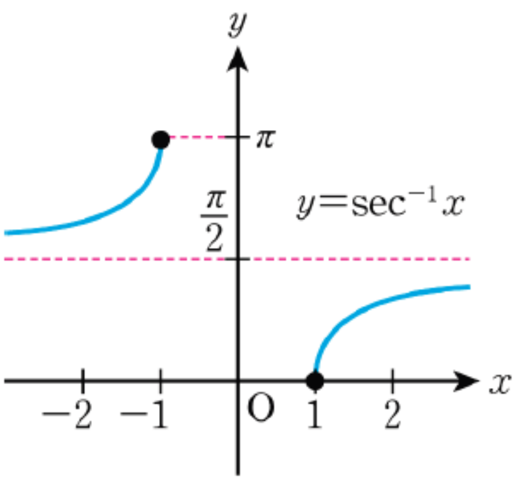
[그림 8] $y = \csc x$



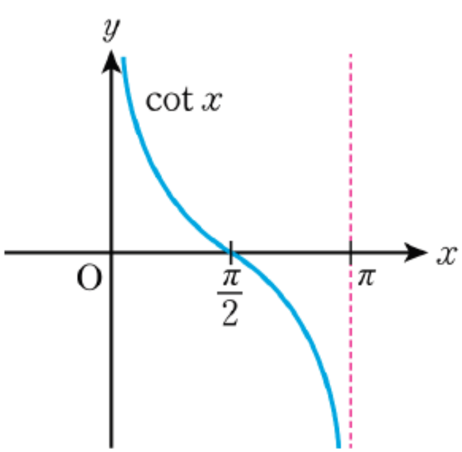
[그림 9] $y = \csc^{-1}x$



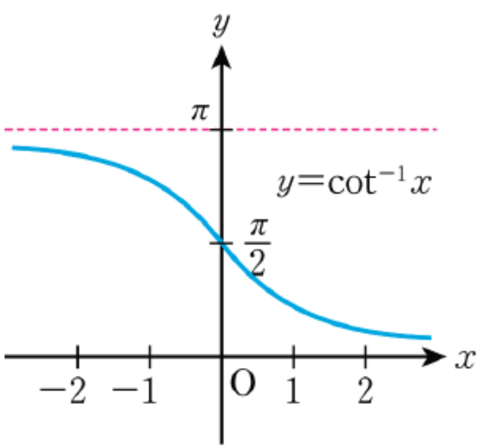
[그림 10] $y = \sec x$



[그림 11] $y = \sec^{-1}x$



[그림 12] $y = \cot x$



[그림 13] $y = \cot^{-1}x$

CALCULUS

미분적분학

기초부터 응용까지

Q & A

수고하셨습니다.