PART 2

적분과 급수

-CALCULUS-

미분적분학

기초부터 응용까지

한빛아카데미
Hanbit Academy, Inc.

CALCULUS

미분적분학

기초부터 응용까지

CHAPTER 06

여러 가지 적분

한빛아카데미
Hanbit Academy, Inc.

Contents

CALCULUS

6.1 삼각함수의 적분

삼각함수의 적분

정리 1 **피적분함수가 $\int \sin^m x \cos^n x \, dx$ 인 경우**

(a) m 또는 n이 홀수일 때,

$\sin^2 x + \cos^2 x = 1$을 이용하여 치환적분하여 $\sin x$ 또는 $\cos x$에 대한 식으로 만들어 적분한다.

(b) m과 n이 모두 짝수일 때,

반각공식 $\sin^2 x = \dfrac{1 - \cos 2x}{2}$, $\cos^2 x = \dfrac{1 + \cos 2x}{2}$ 를 이용하여 적분한다.

삼각함수의 적분

예제 1 **사인함수의 거듭제곱이 홀수인 부정적분**

$\int \sin^{3} x \, dx$를 구하여라. 홀수

$\int (\sin^2 x) \sin x \, dx$

$\int (1-\cos^2 x) \sin x \, dx \quad \cos x = t \quad -\sin x = \frac{dt}{dx}$

$-\int (1-t^2)\, dt = -\left(-\frac{1}{3}t^3 + t\right) = \frac{1}{3}t^3 - t + C$

풀이

$\int \sin^3 x \, dx$는 피적분함수가 $\int \sin^m x \cos^n x \, dx$인 꼴이고 $m=3$, $n=0$이므로(m이 홀수), 이는 [정리 1]의 (a)의 경우에 해당한다. 따라서

$$\int \sin^3 x \, dx = \int \sin^2 x \sin x \, dx = -\int (1-\cos^2 x)(-\sin x)\, dx$$

이다. 이때 $t = \cos x$로 치환하면 $dt = -\sin x \, dx$이므로

$$\int \sin^3 x \, dx = -\int (1-t^2)\, dt = \frac{1}{3}t^3 - t + C = \frac{\cos^3 x}{3} - \cos x + C$$

삼각함수의 적분

예제 2 **사인함수와 코사인함수가 모두 짝수 거듭제곱인 부정적분**

$\int \sin^4 x \cos^4 x \, dx$를 구하여라.

$\sin^2 x$

$$\int\left(\frac{1-\cos 2x}{2}\right)^2\left(\frac{1+\cos 2x}{2}\right)^2 dx = \frac{1}{16}\int(\cos^4 2x - 2\cos^2 2x + 1)\,dx$$
$$= \frac{1}{16}\int\left(\left(\frac{1+\cos 4x}{2}\right)^2 - (1+\cos 4x) + 1\right)dx$$
$$= \frac{1}{16}\int\left(\frac{1}{4}(\cos^2 4x + 2\cos 4x + 1) - \cos 4x\right)$$
$$= \frac{1}{16}\int\left(\frac{1}{4}\cos^2 4x - \frac{1}{2}\cos 4x + \frac{1}{4}\right)$$
$$= \frac{1}{16}\int \frac{1}{8}(\cos 8x + 1) - \frac{1}{2}\cos 4x + \frac{1}{4})$$
$$= \frac{1}{16}\int \frac{1}{8}\cos 8x - \frac{1}{2}\cos 4x + \frac{3}{8} = \frac{1}{16}\left(\frac{3}{8}x - \frac{1}{8}\sin 4x + \frac{1}{64}\sin 8x\right)$$

풀이

$\int \sin^4 x \cos^4 x \, dx$는 피적분 함수가 $\int \sin^m x \cos^n x \, dx$인 꼴이고 $m=4$, $n=4$이므로(m과 n이 모두 짝수), [정리 1]의 (b)의 경우에 해당한다. 따라서 반각공식을 사용하면

$$\int \sin^4 x \cos^4 x \, dx$$
$$= \int\left(\frac{1-\cos 2x}{2}\right)^2\left(\frac{1+\cos 2x}{2}\right)^2 dx = \frac{1}{16}\int (1 - 2\cos^2 2x + \cos^4 2x)\, dx$$
$$= \frac{1}{16}\int\left[1-(1+\cos 4x)+\left(\frac{1+\cos 4x}{2}\right)^2\right]dx = \frac{1}{16}\int\left[(-\cos 4x) + \frac{1}{4}(1+2\cos 4x+\cos^2 4x)\right]dx$$
$$= \frac{1}{16}\int\left[\frac{1}{4} - \frac{1}{2}\cos 4x + \frac{1}{8}(1+\cos 8x)\right]dx = \frac{1}{16}\left(\frac{3}{8}x - \frac{1}{8}\sin 4x + \frac{1}{64}\sin 8x\right) + C$$

삼각함수의 적분

정리 2 **피적분함수가 $\int \tan^m x \sec^n x \, dx$ 인 경우** 참고만

(a) m이 홀수일 때, $\tan^2 x = \sec^2 x - 1$을 이용하여 치환적분하여 $\sec x$에 대한 식으로 만들어 적분한다.

(b) n이 짝수일 때, $\sec^2 x = \tan^2 x + 1$을 이용하여 치환적분하여 $\tan x$에 대한 식으로 만들어 적분한다.

(c) m이 짝수이고 n이 홀수일 때, 부분적분법을 이용하여 적분한다.

삼각함수의 적분

예제 4 **탄젠트함수의 거듭제곱이 홀수인 부정적분**

$\int \tan^5 dx$ 를 구하여라.

풀이

피적분함수가 $\int \tan^m x \sec^n x \, dx$ 인 꼴이고 $m=5$, $n=0$(m 이 홀수)이므로 [정리 2]의 (a)의 경우에 해당한다. 따라서

$$\int \tan^5 dx = \int \frac{\tan^4 x (\sec x \tan x)}{\sec x} dx = \int \frac{(\sec x - 1)^2 (\sec x \tan x)}{\sec x} dx$$

이다. 이때 $t = \sec x$ 로 치환하면 $dt = \sec x \tan x \, dx$ 이므로

$$\int \tan^5 dx = \int \frac{(\sec x - 1)^2 (\sec x \tan x)}{\sec x} dx = \int (t^3 - 2t + \frac{1}{t})\, dt$$

$$= \frac{1}{4}\sec^4 x - \sec^2 x + \ln|\sec x| + C$$

삼각함수의 적분

- **축소공식**
  - 거듭제곱 함수의 적분을 더 낮은 차수의 적분식으로 변형하는 공식
  - 삼각함수의 축소공식
    - = - +
    - = - +
    - = -
    - = -

삼각함수의 적분

정리 3 삼각함수의 곱을 합차로 바꾸는 공식

(a) $\sin\alpha\cos\beta = \dfrac{1}{2}\{\sin(\alpha+\beta)+\sin(\alpha-\beta)\}$

(b) $\cos\alpha\cos\beta = \dfrac{1}{2}\{\cos(\alpha+\beta)+\cos(\alpha-\beta)\}$

(c) $\sin\alpha\sin\beta = -\dfrac{1}{2}\{\cos(\alpha+\beta)-\cos(\alpha-\beta)\}$

$\sin\alpha\cos\beta = \frac{1}{2}\{\sin(\alpha+\beta)+\sin(\alpha-\beta)\}$

$\cos\alpha\cos\beta = \frac{1}{2}\{\cos(\alpha+\beta)+\cos(\alpha-\beta)\}$

$\sin\alpha\sin\beta = -\frac{1}{2}\{\cos(\alpha+\beta)-\cos(\alpha-\beta)\}$

삼각함수의 적분

예제 9 **곱을 합 또는 차로 변형**

다음 부정적분을 구하여라.

(a) $\int \underline{\sin 4x \cos 2x}\, dx$

$\frac{1}{2}\int (\sin 6x + \sin 2x)\, dx$

$\frac{1}{2}\left(-\frac{1}{6}\cos 6x - \frac{1}{2}\cos 2x\right)$

(b) $\frac{1}{2}\int \cos x\, \overline{\cos 2x \cos 3x}^{\,(\cos 5x + \cos x)}\, dx$

$\frac{1}{2}\int \cos^2 x + \cos 5x \cos x$

$\frac{1}{2}\int \frac{1}{2}(\cos 6x + \cos 4x) + \frac{1+\cos 2x}{2}$

$\frac{1}{4}\int \cos 6x + \cos 4x + \cos 2x + 1$

$\underline{\frac{1}{4}\left(\frac{1}{6}\sin 6x + \frac{1}{4}\sin 4x + \frac{1}{2}\sin 2x + x\right) + C}$

풀이

(a) 삼각함수 공식 $\sin\alpha\cos\beta = \frac{1}{2}\{\sin(\alpha+\beta)+\sin(\alpha-\beta)\}$에 의하여 적분은

$$\int \sin 4x \cos 2x\, dx = \frac{1}{2}\int (\sin 6x + \sin 2x)\, dx = -\frac{1}{12}\cos 6x - \frac{1}{4}\cos 2x + C$$

이다.

(b) 삼각함수 공식 $\cos\alpha\cos\beta = \frac{1}{2}\{\cos(\alpha+\beta)+\cos(\alpha-\beta)\}$에 의하여 적분은

$$\int \cos x \cos 2x \cos 3x\, dx = \int \cos 3x \cos 2x \cos x\, dx = \frac{1}{2}\int (\cos 5x + \cos x)\cos x\, dx$$

$$= \frac{1}{2}\int (\cos 5x \cos x + \cos^2 x)\, dx = \frac{1}{2}\int \left[\frac{1}{2}(\cos 6x + \cos 4x) + \frac{1+\cos 2x}{2}\right] dx$$

$$= \frac{1}{24}\sin 6x + \frac{1}{16}\sin 4x + \frac{1}{8}\sin 2x + \frac{1}{4}x + C$$

삼각함수의 적분

예제 10 **삼각함수의 정적분**

$\int_{-\pi}^{\pi} \sin mx \sin nx \, dx$를 구하여라(단, m, n은 양의 정수).

풀이

만약 $m = n$이면

$$\int_{-\pi}^{\pi} \sin mx \sin nx \, dx = \int_{-\pi}^{\pi} \sin^2 mx \, dx = -\frac{1}{2}\int_{-\pi}^{\pi} [\cos 2mx - 1] \, dx$$

$$= -\frac{1}{2}\left[\frac{1}{2m}\sin 2mx - x\right]_{-\pi}^{\pi} = \pi$$

$(0-\pi)-(0+\pi)$

$(-2\pi \times \frac{1}{\pi}$

이고, 만약 $m \neq n$이면

$$\int_{-\pi}^{\pi} \sin mx \sin nx \, dx = -\frac{1}{2}\int_{-\pi}^{\pi} [\cos(m+n)x - \cos(m-n)x] \, dx$$

$$= -\frac{1}{2}\left[\frac{1}{m+n}\sin(m+n)x - \frac{1}{m-n}\sin(m-n)x\right]_{-\pi}^{\pi} = 0$$

이므로

$$\int_{-\pi}^{\pi} \sin mx \sin nx \, dx = \begin{cases} 0, & m \neq n \\ \pi, & m = n \end{cases}$$

6.2 무리함수의 적분

1. 삼각치환

정리 1 $\sqrt{a^2-x^2}$, $\sqrt{a^2+x^2}$, $\sqrt{x^2-a^2}$ **형태의 삼각치환**

(a) $\sqrt{a^2-x^2}$ $(a>0)$ 형태의 항을 포함하는 경우

$x=a\sin\theta$ $\left(-\frac{\pi}{2}\le\theta\le\frac{\pi}{2}\right)$로 치환하면 $\theta=\sin^{-1}\left(\frac{x}{a}\right)$이고,

$\sqrt{a^2-x^2}=\sqrt{a^2(1-\sin^2\theta)}=|a\cos\theta|=a\cos\theta$가 된다.

(b) $\sqrt{a^2+x^2}$ $(a>0)$ 형태의 항을 포함하는 경우

$x=a\tan\theta$ $\left(-\frac{\pi}{2}<\theta<\frac{\pi}{2}\right)$로 치환하면 $\theta=\tan^{-1}\left(\frac{x}{a}\right)$이고,

$\sqrt{a^2+x^2}=\sqrt{a^2(1+\tan^2\theta)}=|a\sec\theta|=a\sec\theta$가 된다.

(c) $\sqrt{x^2-a^2}$ $(a>0)$ 형태의 항을 포함하는 경우

$x=a\sec\theta$ $\left(0\le\theta<\frac{\pi}{2},\ \frac{\pi}{2}<\theta\le\pi\right)$로 치환하면 $\theta=\sec^{-1}\left(\frac{x}{a}\right)$이고,

$$\sqrt{x^2-a^2}=\sqrt{a^2(\sec^2\theta-1)}=|a\tan\theta|=\begin{cases}a\tan\theta, & 0\le\theta<\frac{\pi}{2}\\ -a\tan\theta, & \frac{\pi}{2}<\theta\le\pi\end{cases}$$ 가 된다.

1. 삼각치환

예제 1 $\sqrt{a^2-x^2}$ **형태의 삼각치환**

$\int \sqrt{9-x^2}\,dx$ 를 구하여라.

$a=3$

$x=3\sin\theta\left(-\frac{\pi}{2}\le\theta\le\frac{\pi}{2}\right)$, $1=3\cos\theta\times\frac{d\theta}{dx}$

$\theta=\sin^{-1}\left(\frac{x}{3}\right)$

$\sqrt{9-x^2}=\sqrt{9(1-\sin^2\theta)}=3\cos\theta$

$\int 3\cos\theta\times 3\cos\theta\,d\theta$

$=9\int\cos^2\theta\,d\theta$

$=\frac{9}{2}\int(1+\cos2\theta)\,d\theta$

$=\frac{9}{2}\left(\theta+\frac{1}{2}\sin2\theta\right)+C$ //

풀이

$x=3\sin\theta\left(-\frac{\pi}{2}\le\theta\le\frac{\pi}{2}\right)$로 치환하면 $dx=3\cos\theta\,d\theta$ 이고, $\sqrt{9-x^2}=3\cos\theta$ 이므로

$$\int\sqrt{9-x^2}\,dx=9\int\cos^2\theta\,d\theta=\frac{9}{2}\int(1+\cos2\theta)\,d\theta$$

$$=\frac{9}{2}\left(\theta+\frac{1}{2}\sin2\theta\right)+C=\frac{9}{2}(\theta+\sin\theta\cos\theta)+C$$

이다. 이때 $x=3\sin\theta$는 $-\frac{\pi}{2}\le\theta\le\frac{\pi}{2}$에서 역함수가 존재하므로 $\theta=\sin^{-1}\left(\frac{x}{3}\right)$이다.

따라서

$$\int\sqrt{9-x^2}\,dx=\frac{9}{2}(\theta+\sin\theta\cos\theta)+C=\frac{9}{2}\sin^{-1}\left(\frac{x}{3}\right)+\frac{x}{2}\sqrt{9-x^2}+C$$

$$\int_{-3}^{3}\sqrt{9-x^2}\,dx=\left[\frac{9}{2}\sin^{-1}\left(\frac{x}{3}\right)+\frac{x}{2}\sqrt{9-x^2}\right]_{-3}^{3}=\frac{9}{2}\left(\frac{\pi}{2}+\frac{\pi}{2}\right)=\frac{9\pi}{2}$$

1. 삼각치환

예제 3 $\sqrt{a^2+x^2}$ **형태의 삼각치환**

$\displaystyle\int \frac{2}{(x^2+25)^{\frac{3}{2}}}\,dx$ 를 구하여라.

풀이

$x = 5\tan\theta \left(-\frac{\pi}{2} < \theta < \frac{\pi}{2}\right)$로 치환하면 $dx = 5\sec^2\theta\, d\theta$ 가 된다. $\sqrt{25+x^2} = \sqrt{25(1+\tan^2\theta)} = 5\sec\theta$ 이므로

$$\int \frac{2}{(x^2+25)^{\frac{3}{2}}}\,dx = \int \frac{2}{(5\sec\theta)^3}\,5\sec^2\theta\, d\theta = \frac{2}{25}\int \frac{1}{\sec\theta}\,d\theta = \frac{2}{25}\int \cos\theta\, d\theta = \frac{2}{25}\sin\theta + C$$

이다. 이때 $\tan\theta = \frac{x}{5}$ 에서 $\theta = \tan^{-1}\left(\frac{x}{5}\right)$ 이므로 $\sin\theta = \frac{x}{\sqrt{25+x^2}}$ 이다. 따라서

$$\int \frac{2}{(x^2+25)^{\frac{3}{2}}}\,dx = \frac{2x}{25\sqrt{25+x^2}} + C$$

1. 삼각치환

예제 6 $\sqrt{Ax^2+Bx+C}$ **형태의 삼각치환**

$$\int \frac{2x}{\sqrt{x^2+2x+26}}\,dx \text{를 구하여라.}$$

$\int \frac{2x+2}{\sqrt{x^2+2x+26}}dx - 2\int \frac{1}{\sqrt{x^2+2x+26}}dx$

$x^2+2x+26=t$

$2x+2=\frac{dt}{dx}$

$\int \frac{1}{\sqrt{t}}dt = 2t^{\frac{1}{2}}$

$= 2\sqrt{x^2+2x+26}+C_1$

$(x+1)^2+25$

$x+1=u$

$1=du/dx$

$\int \frac{1}{\sqrt{u^2+25}}du$ $u=5\tan\theta$

$du=5\sec^2\theta\, d\theta$

$\frac{1}{5\sqrt{\tan^2\theta+1}} \times 5\sec^2\theta\, d\theta$

$\frac{1}{\cancel{5}\sec\theta} \times \cancel{5}\sec^2\theta\, d\theta$

$\int \sec d\theta = \ln|\sec+\tan| + C_2$

풀이 적분을 $\int \frac{2x}{\sqrt{x^2+2x+26}}dx = \int \frac{2x+2}{\sqrt{x^2+2x+26}}dx - 2\int \frac{1}{\sqrt{x^2+2x+26}}dx$ 로 나누어서 계산한다. 첫 번째 항은 치환적분으로 $t=x^2+2x+26$, $dt=(2x+2)dx$ 이므로

$$\int \frac{2x+2}{\sqrt{x^2+2x+26}}dx = \int \frac{dt}{\sqrt{t}} = 2\sqrt{t}+C_1 = 2\sqrt{x^2+2x+26}+C_1$$

이다. 두 번째 항을 계산하기 위하여 $x^2+2x+26=(x+1)^2+25$에서 $u=x+1$로 두면 $du=dx$이므로

$$\int \frac{1}{\sqrt{x^2+2x+26}}dx = \int \frac{du}{\sqrt{u^2+25}}$$

가 된다. 삼각치환으로 $u=5\tan\theta\left(-\frac{\pi}{2}<\theta<\frac{\pi}{2}\right)$로 두면 $du=5\sec^2\theta\,d\theta$ 이고 $\sqrt{u^2+25}=5\sqrt{\tan^2\theta+1}=5\sec\theta$ 이다. 따라서

1. 삼각치환

예제 6 $\sqrt{Ax^2+Bx+C}$ **형태의 삼각치환**

$\displaystyle\int \frac{2x}{\sqrt{x^2+2x+26}}\,dx$를 구하여라.

풀이

$$\int \frac{1}{\sqrt{x^2+2x+26}}\,dx = \int \frac{du}{\sqrt{u^2+25}} = \int \frac{5\sec^2\theta}{5\sec\theta}\,d\theta = \int \sec\theta\,d\theta = \ln|\sec\theta+\tan\theta| + C_2$$

$$= \ln\left|\frac{\sqrt{u^2+5^2}}{5} + \frac{u}{5}\right| + C_2 = \ln\left|\sqrt{x^2+2x+26}+x+1\right| - \ln 5 + C_2$$

$$= \ln\left|\sqrt{x^2+2x+26}+x+1\right| + C_3$$

이므로

$$\int \frac{2x}{\sqrt{x^2+2x+26}}\,dx = 2\sqrt{x^2+2x+26} + C_1 - 2\ln\left|\sqrt{x^2+2x+26}+x+1\right| - 2C_3$$

$$= 2\sqrt{x^2+2x+26} - 2\ln\left|\sqrt{x^2+2x+26}+x+1\right| + C$$

2. 다양한 형태의 무리함수의 치환적분

- 2이상인 양의 정수 n에 대하여 피적분함수가 를 포함하는 경우
  - = t 로 치환하여 적분식 변형

예제 8 $\sqrt[n]{ax+b}$ 를 포함하는 무리함수 적분

$\int (x-1)\sqrt[3]{2x+3}\,dx$ 를 구하여라.

풀이

$\sqrt[3]{2x+3}=t$ 로 치환하면 $x=\dfrac{t^3-3}{2}$, $dx=\dfrac{3}{2}t^2dt$이므로

$$\int (x-1)\sqrt[3]{2x+3}\,dx=\int\left(\frac{t^3-5}{2}\right)t\left(\frac{3}{2}t^2\right)dt=\frac{1}{4}\int(3t^6-15t^3)dt=\frac{3}{112}(8x-23)(2x+3)^{\frac{4}{3}}+C$$

CALCULUS

6.3 유리함수의 적분

1. 부분함수를 이용한 유리함수의 적분

- 두 다항 함수 $f(x)$, $g(x)$의 비 ($g(x) \neq 0$)로 정의되는 유리함수의 적분
  - 분자의 차수가 분모의 차수보다 크거나 같은 경우

    $= q(x)+$

  - 는 진분수가 되고 진분수의 적분방법으로 해결

정리 1 **분모가 서로 다른 일차인수의 곱인 경우**

부분분수 분해에 의해 진분수는

$$\frac{P(x)}{(a_1x+b_1)(a_2x+b_2)\cdots(a_nx+b_n)} = \frac{A_1}{a_1x+b_1} + \frac{A_2}{a_2x+b_2} + \cdots + \frac{A_n}{a_nx+b_n}$$

이 성립하는 상수 A_1, A_2, $\cdots$, A_n이 존재한다. 여기서 $P(x)$는 차수가 n보다 작은 다항식이다.

1. 부분함수를 이용한 유리함수의 적분

예제 1 **분모가 서로 다른 일차인수의 곱인 경우**

$\displaystyle\int \frac{x}{x^2-1}\,dx$ 를 구하여라.

풀이

분모가 $(x-1)(x+1)$ 로 인수분해되므로 주어진 유리함수를 부분분수로 분해하면

$$\frac{x}{(x-1)(x+1)} = \frac{A_1}{x-1} + \frac{A_2}{x+1}$$

이다. A_1, A_2를 구하기 위해 양변에 $(x-1)(x+1)$를 곱하여 정리하면 $x = A_1(x+1)+A_2(x-1)$을 얻는다. 항등식이 성립하려면 $A_1+A_2=1$, $A_1-A_2=0$이 되어야 하고, 이 연립방정식을 풀면 $A_1=\frac{1}{2}$, $A_2=\frac{1}{2}$을 얻을 수 있다. 따라서

$$\frac{x}{(x-1)(x+1)} = \frac{A_1}{x-1} + \frac{A_2}{x+1} = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{x-1}+\frac{1}{x+1}\right)$$

이고, 주어진 적분은

$$\begin{aligned}\int \frac{x}{x^2-1}\,dx &= \int \frac{1}{2}\left(\frac{1}{x-1}+\frac{1}{x+1}\right)dx \\ &= \frac{1}{2}\int \frac{1}{x-1}\,dx + \frac{1}{2}\int \frac{1}{x+1}\,dx = \frac{1}{2}\ln|x-1| + \frac{1}{2}\ln|x+1| + C\end{aligned}$$

1. 부분함수를 이용한 유리함수의 적분

예제 2 **분모가 서로 다른 일차인수의 곱인 경우**

$\int \frac{3x^2-7x-2}{x^3-x}\,dx$ 를 구하여라.

풀이

분모가 $x(x-1)(x+1)$ 로 인수분해되므로 주어진 유리함수를 부분분수로 분해하면

$$\frac{3x^2-7x-2}{x(x-1)(x+1)} = \frac{A_1}{x} + \frac{A_2}{x-1} + \frac{A_3}{x+1}$$

이다. A_1, A_2, A_3 를 구하기 위해 양변에 $x(x-1)(x+1)$ 을 곱하여 정리하면

$$3x^2-7x-2 = A_1(x-1)(x+1) + A_2x(x+1) + A_3x(x-1)$$

이고, 이 식에 $x=0$, $x=1$, $x=-1$ 을 각각 대입하면 $A_1=2$, $A_2=-3$, $A_3=4$ 가 된다. 따라서 적분은

$$\int \frac{3x^2-7x-2}{x^3-x}\,dx = \int \left(\frac{2}{x} - \frac{3}{x-1} + \frac{4}{x+1} \right) dx$$

$$= 2\ln|x| - 3\ln|x-1| + 4\ln|x+1| + C$$

1. 부분함수를 이용한 유리함수의 적분

정리 2 **분모가 일차인수의 n제곱인 경우**

부분분수 분해에 의해 진분수는

$$\frac{P(x)}{(ax+b)^n} = \frac{A_1}{ax+b} + \frac{A_2}{(ax+b)^2} + \cdots + \frac{A_n}{(ax+b)^n}$$

이 된다. 여기서 A_1, A_2, $\cdots$, A_n은 상수이고, $P(x)$는 차수가 n보다 작은 다항식이다.

1. 부분함수를 이용한 유리함수의 적분

예제 3 **분모가 일차인수의 세제곱인 경우**

$\int \frac{x^2}{(x-1)^3}\,dx$를 구하여라.

풀이 분모가 일차인수 $x-1$의 3제곱인 경우이므로 주어진 유리함수를 부분분수로 분해하면

$$\frac{x^2}{(x-1)^3} = \frac{A_1}{x-1} + \frac{A_2}{(x-1)^2} + \frac{A_3}{(x-1)^3}$$

이다. A_1, A_2, A_3를 구하기 위해 양변에 $(x-1)^3$을 곱하여 정리하면

$$x^2 = A_1(x-1)^2 + A_2(x-1) + A_3 = A_1x^2 + (-2A_1 + A_2)x + (A_1 - A_2 + A_3)$$

이므로 $A_1 = 1$, $A_2 = 2$, $A_3 = 1$이다. 따라서 적분은

$$\int \frac{x^2}{(x-1)^3}\,dx = \int \left[\frac{1}{x-1} + \frac{2}{(x-1)^2} + \frac{1}{(x-1)^3}\right]dx = \ln|x-1| - \frac{4x-3}{2(x-1)^2} + C$$

1. 부분함수를 이용한 유리함수의 적분

예제 4 **분모가 일차인수의 제곱인 경우**

$\int \frac{x^3+x^2+3x+1}{x^2+2x+1}\,dx$를 구하여라.

풀이

분자의 차수가 분모의 차수보다 크므로 분자를 분모로 나누면

$$\frac{x^3+x^2+3x+1}{x^2+2x+1} = x-1+\frac{4x+2}{x^2+2x+1}$$

가 된다. 따라서 유리함수 $\frac{4x+2}{x^2+2x+1}$를 부분분수로 분해하면

$$\frac{4x+2}{x^2+2x+1} = \frac{4x+2}{(x+1)^2} = \frac{A_1}{x+1}+\frac{A_2}{(x+1)^2}$$

이고, $(x+1)^2$을 곱하면 $4x+2 = A_1(x+1)+A_2$를 얻는다. 이 등식을 풀면 $A_1 = 4$, $A_2 = -2$이다. 그러므로 주어진 적분은

$$\int \frac{x^3+x^2+3x+1}{x^2+2x+1}\,dx = \int \left[x-1+\frac{4}{x+1}-\frac{2}{(x+1)^2}\right]dx = \frac{x^2}{2}-x+4\ln|x+1|+\frac{2}{x+1}+C$$

1. 부분함수를 이용한 유리함수의 적분

정리 3 **분모가 서로 다른 이차인수의 곱인 경우**

부분분수 분해에 의해 진분수는

$$\frac{P(x)}{(a_1x^2+b_1x+c_1)(a_2x^2+b_2x+c_1)\cdots(a_nx^2+b_nx+c_n)}$$
$$=\frac{A_1x+B_1}{a_1x^2+b_1x+c_1}+\frac{A_2x+B_2}{a_2x^2+b_2x+c_2}+\cdots+\frac{A_nx+B_n}{a_nx^2+b_nx+c_n}$$

이 된다. 여기서 A_i, B_i, $i=1,\ 2,\ \cdots,\ n$은 상수이고, $P(x)$는 차수가 $2n$보다 작은 다항식이다.

1. 부분함수를 이용한 유리함수의 적분

예제 5 **분모가 일차인수와 이차인수의 곱인 경우**

$\int \frac{2-x}{x^3-1}\,dx$를 구하여라.

풀이 분모가 $(x^2+x+1)(x-1)$로 인수분해되므로 주어진 유리함수를 부분분수로 분해하면

$$\frac{2-x}{x^3-1} = \frac{A_1x+B_1}{x^2+x+1} + \frac{A_2}{x-1}$$

이다. 따라서 A_1, A_2, B_1을 구하기 위해 양변에 $(x^2+x+1)(x-1)$을 곱하여 정리하면 $2-x=(A_1x+B_1)(x-1)+A_2(x^2+x+1)$을 얻는다. 이때 항등식의 계수를 비교해보면 $A_1+A_2=0$, $-A_1+B_1+A_2=-1$, $A_2-B_1=2$이므로 $A_1=-\frac{1}{3}$, $A_2=\frac{1}{3}$, $B_1=-\frac{5}{3}$이다. 따라서 적분은

$$\begin{aligned}\int \frac{2-x}{x^3-1}\,dx &= -\frac{1}{3}\int \frac{x+5}{x^2+x+1}\,dx + \frac{1}{3}\int \frac{1}{x-1}\,dx \\ &= -\frac{1}{6}\int \frac{2x+1}{x^2+x+1}\,dx - \frac{3}{2}\int \frac{1}{x^2+x+1}\,dx + \frac{1}{3}\int \frac{1}{x-1}\,dx\end{aligned}$$

1. 부분함수를 이용한 유리함수의 적분

예제 5 **분모가 일차인수와 이차인수의 곱인 경우**

$\displaystyle\int \frac{2-x}{x^3-1}\,dx$를 구하여라.

풀이

먼저 부정적분 $\displaystyle\int \frac{1}{x^2+x+1}\,dx$를 계산해보면

$$\int \frac{1}{x^2+x+1}\,dx = \frac{4}{3}\int \frac{1}{1+\left[\frac{2}{\sqrt{3}}\left(x+\frac{1}{2}\right)\right]^2}\,dx = \frac{2}{\sqrt{3}}\tan^{-1}\left[\frac{2}{\sqrt{3}}\left(x+\frac{1}{2}\right)\right]+C$$

따라서 적분은

$$\begin{aligned}\int \frac{2-x}{x^3-1}\,dx &= -\frac{1}{6}\int \frac{2x+1}{x^2+x+1}\,dx - \frac{3}{2}\int \frac{1}{x^2+x+1}\,dx + \frac{1}{3}\int \frac{1}{x-1}\,dx \\ &= -\frac{1}{6}\ln|x^2+x+1| - \sqrt{3}\tan^{-1}\left[\frac{2}{\sqrt{3}}\left(x+\frac{1}{2}\right)\right] + \frac{1}{3}\ln|x-1| + C\end{aligned}$$

1. 부분함수를 이용한 유리함수의 적분

예제 6 **분모가 서로 다른 이차인수의 곱인 경우**

$\displaystyle\int_0^1 \frac{x^2+3x}{(x^2+2)(x^2+1)}dx$ 를 구하여라.

풀이

주어진 유리함수를 부분분수로 분해하면

$$\frac{x^2+3x}{(x^2+2)(x^2+1)} = \frac{A_1x+B_1}{x^2+2} + \frac{A_2x+B_2}{x^2+1}$$

이므로 A_1, B_1, A_2, B_2를 구하기 위해 양변에 $(x^2+2)(x^2+1)$을 곱하여 정리하면 $x^2+3x=(A_1x+B_1)(x^2+1)+(A_2x+B_2)(x^2+2)$이고 $A_1=-3$, $B_1=2$, $A_2=3$, $B_2=-1$이다. 따라서 적분은

$$\begin{aligned}\int_0^1 \frac{x^2+3x}{(x^2+2)(x^2+1)}dx &= \int_0^1 \frac{-3x+2}{x^2+2}dx + \int_0^1 \frac{3x-1}{x^2+1}dx \\ &= -\frac{3}{2}\int_0^1 \frac{2x}{x^2+2}dx + \int_0^1 \frac{2}{x^2+2}dx + \frac{3}{2}\int_0^1 \frac{2x}{x^2+1}dx - \int_0^1 \frac{1}{x^2+1}dx \\ &= -\frac{3}{2}\left[\ln|x^2+2|\right]_0^1 + \sqrt{2}\left[\tan^{-1}\left(\frac{x}{\sqrt{2}}\right)\right]_0^1 + \frac{3}{2}\left[\ln|x^2+1|\right]_0^1 - \left[\tan^{-1}x\right]_0^1 \\ &= 3\ln 2 - \frac{3}{2}\ln 3 + \sqrt{2}\tan^{-1}\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right) - \frac{\pi}{4}\end{aligned}$$

1a. $$\int \frac{1}{ax^2+bx+c}\,dx = \frac{1}{\sqrt{b^2-4ac}}\ln\left|\frac{2ax+b-\sqrt{b^2-4ac}}{2ax+b+\sqrt{b^2-4ac}}\right| + C \quad (b^2-4ac>0)$$

1b. $$\int \frac{1}{ax^2+bx+c}\,dx = \frac{2}{\sqrt{4ac-b^2}}\tan^{-1}\frac{2ax+b}{\sqrt{4ac-b^2}} + C \quad (b^2-4ac<0)$$

1c. $$\int \frac{1}{ax^2+bx+c}\,dx = -\frac{2}{2ax+b} + C \quad (b^2-4ac=0)$$

2. $$\int \frac{x}{ax^2+bx+c}\,dx = \frac{1}{2a}\ln|ax^2+bx+c| - \frac{b}{2a}\int \frac{1}{ax^2+bx+c}\,dx$$

3. $$\int \frac{1}{(ax^2+bx+c)^r}\,dx = \frac{2ax+b}{(r-1)(4ac-b^2)(ax^2+bx+c)^{r-1}} + \frac{2(2r-3)a}{(r-1)(4ac-b^2)}\int \frac{1}{(ax^2+bx+c)^{r-1}}\,dx$$

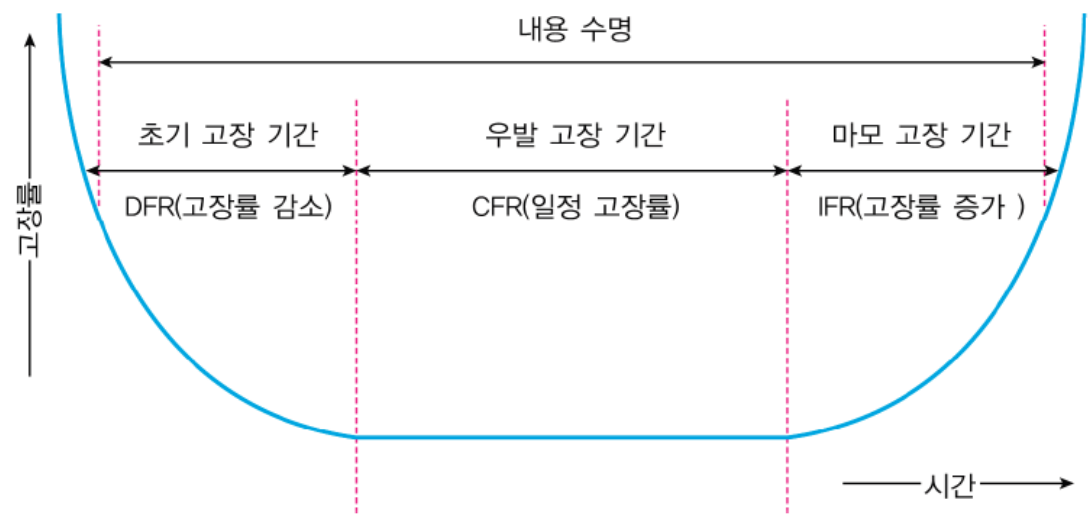
4. $$\int \frac{x}{(ax^2+bx+c)^r}\,dx = \frac{-(2c+bx)}{(r-1)(4ac-b^2)(ax^2+bx+c)^{r-1}} - \frac{(2r-3)b}{(r-1)(4ac-b^2)}\int \frac{1}{(ax^2+bx+c)^{r-1}}\,dx$$

CALCULUS

6.4 특이적분

특이적분

- **욕조곡선:시스템,** 제품 등을 사용하기 시작하여 폐기할 때까지의 고장 발생 상태를 도시한 곡선
  - **변화율이 시간의 경과에 따라 높은 값에서 점점 감소하다가 일정한 값을 유지한 후 다시 높아지는 그래프 모양**
    - **곡선은 제품의 수명을 나타내는 함수로 제품의 평균 고장비율을 나타냄**
    - **$k > 0$ 일 때 전자제품의 수명** $\int_0^\infty kxe^{-kx}dx$



[그림 1] 전자제품의 수명

CALCULUS

미분적분학

기초부터 응용까지

Q & A

수고하셨습니다.