1장 1차 미분방정식

<미분방정식의 해법>

	미분방정식의 형태	해법
1.3	변수분리형 $\dfrac{dy}{dx} = f(x, y) = \dfrac{g(x)}{h(y)}$	x와 y의 변수로 각각 분리한 다음 양변을 적분한다.
	동차미분방정식 $M(x, y)\,dx + N(x, y)\,dy = 0$ $M(x, y)$와 $N(x, y)$는 동차함수	$y = ux$ 또는 $x = vy$로 치환하여 변수분리형으로 변환한다.
1.4	완전미분방정식 $M(x, y)\,dx + N(x, y)\,dy = 0$ $\dfrac{\partial M}{\partial y} = \dfrac{\partial N}{\partial x}$가 성립	$\dfrac{\partial f}{\partial x} = M(x, y)$, $\dfrac{\partial f}{\partial y} = N(x, y)$에서 어느 한 식을 적분한 후 다른 식과 비교하여 해를 구한다.
1.5	선형미분방정식 $\dfrac{dy}{dx} + p(x)\,y = q(x)$	적분인자 $\mu(x) = e^{\int p(x)\,dx}$를 구한 후 양변에 곱해 완전미분방정식 형태로 변환하여 해를 구한다.
	베르누이 방정식 $\dfrac{dy}{dx} + p(x)\,y = f(x)\,y^n$	변수치환 $u = y^{1-n}$을 통해 선형미분방정식의 형태로 변환한다.
	치환형 $\dfrac{dy}{dx} = f(ax + by + c)$	변수치환 $u = ax + by + c$를 통해 변수분리형 미분방정식으로 변환한다.

1.4 완전미분방정식

전미분(Exact Differential)

dz 다변수 함수의 모든 변수의 변화에 따라 변화하는 행태를 근사하는 양

$$z = f(x, y)$$

$$dz = \frac{\partial f}{\partial x} dx + \frac{\partial f}{\partial y} dy$$

$$M(x, y)dx + N(x, y)dy = 0$$

미분방정식

$$\frac{\partial f}{\partial x} dx + \frac{\partial f}{\partial y} dy = 0$$

전미분 dz

$$\Longleftrightarrow \quad dz = 0 \quad \Longleftrightarrow$$

$z = c$, 즉 $f(x, y) = c$ (c는 상수)

미분방정식의 해

완전미분방정식의 정의

미분형식 $M(x, y)dx + N(x, y)dy$ 함수 의 전 $f(x, y)$ 대응되는 경우

$$M(x, y)dx + N(x, y)dy = 0$$

을 완전미분방정식이라 정의한다.

완전미분방정식이기 위한 필요충분조건

$$M(x,\ y)\,dx + N(x,\ y)\,dy = \frac{\partial f}{\partial x}dx + \frac{\partial f}{\partial y}dy$$

$$M(x,\ y) = \frac{\partial f}{\partial x},\quad N(x,\ y) = \frac{\partial f}{\partial y}$$

$$\frac{\partial M}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right) = \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right) = \frac{\partial N}{\partial x}$$

$$\therefore\quad \frac{\partial M}{\partial y} = \frac{\partial N}{\partial x}$$

완전미분방정식의 해법

$$M(x,\ y)dx + N(x,\ y)dy = 0$$

$$M(x,\ y)\,dx + N(x,\ y)\,dy = \frac{\partial f}{\partial x}dx + \frac{\partial f}{\partial y}dy$$

① $\dfrac{\partial f}{\partial x} = M(x,\ y)$

② $\dfrac{\partial f}{\partial y} = N(x,\ y)$

Ex1) 완전상미분방정식

$$\cos(x+y)\,dx + (3y^2+2y+\cos(x+y))\,dy = 0$$

1단계) 완전미방 검사

$M = \cos(x+y) \rightarrow \dfrac{\partial M}{\partial y} = -\sin(x+y)$

$N = 3y^2+2y+\cos(x+y) \rightarrow \dfrac{\partial N}{\partial x} = -\sin(x+y)$

같으므로 완전미방임을 확인.

$$\therefore \quad \frac{\partial M}{\partial y} = \frac{\partial N}{\partial x}$$

2단계) $\dfrac{\partial u}{\partial x} = M(x,y) \rightarrow u = \int M\,dx + k(y)$

$\dfrac{\partial u}{\partial y} = N(x,y) \rightarrow u = \int N\,dy + L(x)$

$u = \int M\,dx + k(y) = \int \cos(x+y)\,dx + k(y)$

$= \sin(x+y) + k(y)$

구하기 위해 $\dfrac{\partial u}{\partial y} = N$ 이용

$\dfrac{\partial u}{\partial y} = \cos(x+y) + \dfrac{dk}{dy} = N = 3y^2+2y+\cos(x+y)$

$\dfrac{dk}{dy} = 3y^2+2y \rightarrow$ 적분 $k = y^3+y^2+c^*$

$u(x,y) = \sin(x+y) + y^3+y^2 = c \quad (\because du(x,y)=0)$

3단계) 음함수 해 $u(x,y)=c$ 에 대해 음함수 미분하고 검사.

$$\begin{cases} du = \dfrac{\partial u}{\partial x}dx + \dfrac{\partial u}{\partial y}dy \\ \quad = \cos(x+y)\,dx + (\cos(x+y)+3y^2+2y)\,dy \\ \quad = 0. \end{cases}$$

①을 적분하면 $\displaystyle\int \frac{\partial f}{\partial x}dx = \int M(x,\ y)\,dx$ x로 적분하므로 y의 함수는 상수로 취급된다.

$$\therefore f(x,\ y) = \int M(x,\ y)\,dx + h(y)$$ 적분상수

$f(x,\ y)$를 y로 편미분하여 ②와 비교하면 $h(y)$를 구할 수 있다.

완전미분방정식의 해 $f(x,\ y) = c$ (c는 상수)

<예제> $(x^3+y^3)\,dx + 3xy^2\,dy = 0$

$M(x,y) = x^3+y^3,\ N(x,y) = 3xy^2 \quad \therefore \dfrac{\partial M}{\partial y} = 3y^2,\ \dfrac{\partial N}{\partial x} = 3y^2$ 완전미분방정식

① $\dfrac{\partial f}{\partial x} = M(x,\ y) = x^3+y^3$ ② $\dfrac{\partial f}{\partial y} = N(x,\ y) = 3xy^2$

①을 적분하면 $f(x,\ y) = \displaystyle\int (x^3+y^3)\,dx = \frac{1}{4}x^4 + xy^3 + h(y)$ $h(y)$: 적분상수

②를 이용하면 $\dfrac{\partial f}{\partial y} = 3xy^2 + h'(y) = 3xy^2 \quad \therefore h'(y) = 0 \quad h(y) = c^*$ (c^* 는 상수)

$$\therefore\ f(x,\ y) = \frac{1}{4}x^4 + xy^3 + c^*$$

완전미분방정식의 해 $f(x,\ y) = c$ 즉 $\dfrac{1}{4}x^4 + xy^3 = c$ (c는 상수)

1.5 선형미분방정식

$$\frac{dy}{dx}+p(x)y=q(x) \quad \text{또는} \quad dy+\{p(x)y-q(x)\}dx=0$$

적분인자: 주어진 미분방정식이 완전미분방정식이 아닌 경우 적당한 함수 를 곱
하여 완 $\mu(x)$ 분방정식으로 변환할 수 있을 때 를 $\mu(x)$
적분인자라 정의한다.

$$dy+\{p(x)y-q(x)\}dx=0 \longrightarrow$$ 완전미분방정식이 아니다.

적분인자 $\mu(x)$ 곱하면

$$\mu(x)dy+\mu(x)\{p(x)y-q(x)\}dx=0$$

$$\frac{\partial}{\partial x}\mu(x)=\frac{\partial}{\partial y}\mu(x)\{p(x)y-q(x)\}$$ 완전미방이되기위한조건

$$\therefore \frac{\partial \mu(x)}{\partial x}=\mu(x)p(x)$$

양변을 적분하면

$$\int \frac{\partial \mu(x)}{\partial x}dx=\int \mu(x)p(x)dx \longrightarrow \ln|\mu|=\int p(x)dx$$

$\therefore$ 적분인자 $\mu(x)=e^{\int p(x)\,dx}$

$$\frac{dy}{dx}+p(x)y=q(x)$$

적분인자 $\mu(x)$ 양변에 곱하면

$$\mu(x)\frac{dy}{dx}+\mu(x)p(x)y=\mu(x)q(x) \qquad \therefore \frac{\partial\mu(x)}{\partial x}=\mu(x)p(x)$$

$$(\mu(x)y)'$$

$$\therefore\ (\mu(x)y)'=\mu(x)q(x) \longrightarrow \mu(x)y=\int\mu(x)q(x)\,dx$$

$$y=\frac{1}{\mu(x)}\int\mu(x)q(x)\,dx+\frac{c}{\mu(x)}$$ (c는 상수)

$h \triangleq \int p(x)\,dx$ 로 정의하면

$\therefore$ 적분인자 $\mu(x)=e^{\int p(x)\,dx}$

일반해 $$y(x)=e^{-\int p(x)\,dx}\int e^{\int p(x)\,dx}\cdot q(x)\,dx+ce^{-\int p(x)\,dx}$$

$$\therefore\ y(x)=e^{-h}\int e^{h}q(x)\,dx+ce^{-h}$$

<주의> 공식으로 기억하지 말고 적분인자 를 $\mu(x)$져 완전미분방정식으로 변환하는 과정을 충분히 이해하도록 하는 것이 중요하다.

<예제>

$$x\frac{dy}{dx}+2y=3 \longrightarrow \frac{dy}{dx}+\frac{2}{x}y=\frac{3}{x}$$

$$p(x)=\frac{2}{x},\quad q(x)=\frac{3}{x}$$

적분인자 $\mu(x)=e^{\int p(x)x}=e^{\int \frac{2}{x}dx}=x^2$

x^2을 주어진 미분방정식의 양변에 곱하면

$$x^2\frac{dy}{dx}+2xy=3x \longrightarrow (x^2y)'=3x$$

$$x^2y=\int 3xdx+c=\frac{3}{2}x^2+c \quad (c\text{는 상수})$$

$$\therefore y=\frac{3}{2}+\frac{c}{x^2}$$

1.5 치환법에 의한 미분방정식의 해법

(1) 베르누이(Bernoulli) 방정식

$$\frac{dy}{dx} + p(x)\,y = f(x)\,y^{n}$$

$n = 0,\ 1 \longrightarrow$ 선형미분방정식

$n \geq 2 \longrightarrow$ 비선형미분방정식

변수치환법 $u(x) \triangleq [y(x)]^{1-n}$; 비선형미분방정식 $\longrightarrow$ 선형미분방정식

<예제> $xy' + y = \dfrac{1}{y^2} \longrightarrow y' + \dfrac{1}{x}y = \dfrac{1}{x}y^{-2}$

$$p(x) = \frac{1}{x},\ f(x) = \frac{1}{x},\ n = -2$$

변수치환법 $u \triangleq y^3 \xrightarrow{\text{미분}} u' = 3y^2 y' = 3y^2\left(-\dfrac{1}{x}y + \dfrac{1}{x}y^{-2}\right)$

$$\therefore \frac{du}{dx} = \frac{3}{x}(-y^3 + 1) = -\frac{3}{x}(u-1)$$

변수분리를 하면 $\dfrac{du}{u-1} = -\dfrac{3}{x}dx \longrightarrow \displaystyle\int \frac{du}{u-1} = -\int \frac{3}{x}dx$

$$\ln|u-1| = -3\ln|x| + c^* = -\ln x^3 + \ln c \qquad (c > 0\text{인 상수})$$

$$\therefore\ u - 1 = \frac{c}{x^3} \longrightarrow y^3 = 1 + cx^{-3}$$

<미분방정식의 해법>

미분방정식의 형태	해법
변수분리형 $\frac{dy}{dx} = f(x, y) = \frac{g(x)}{h(y)}$	x와 y의 변수로 각각 분리한 다음 양변을 적분한다.
동차미분방정식 $M(x, y)\,dx + N(x, y)\,dy = 0$ $M(x, y)$와 $N(x, y)$는 동차함수	$y = ux$ 또는 $x = vy$로 치환하여 변수분리형으로 변환한다.
완전미분방정식 $M(x, y)\,dx + N(x, y)\,dy = 0$ $\frac{\partial M}{\partial y} = \frac{\partial N}{\partial x}$가 성립	$\frac{\partial f}{\partial x} = M(x, y)$, $\frac{\partial f}{\partial y} = N(x, y)$에서 어느 한 식을 적분한 후 다른 식과 비교하여 해를 구한다.
선형미분방정식 $\frac{dy}{dx} + p(x)\,y = q(x)$	적분인자 $\mu(x) = e^{\int p(x)\,dx}$를 구한 후 양변에 곱해 완전미분방정식 형태로 변환하여 해를 구한다.
베르누이 방정식 $\frac{dy}{dx} + p(x)\,y = f(x)\,y^n$	변수치환 $u = y^{1-n}$을 통해 선형미분방정식의 형태로 변환한다.
치환형 $\frac{dy}{dx} = f(ax + by + c)$	변수치환 $u = ax + by + c$를 통해 변수분리형 미분방정식으로 변환한다.