7장 선형대수 :

행렬, 벡터, 행렬식, 선형연립방정식

- 가우스 소거법
- **역행렬**
- **Cramer 공식**

7.1 행렬의 정의와 기본연산

행렬의 표현

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix} \in \boldsymbol{R}^{m \times n}$$

행

열

또는 $A = (a_{ij}) \quad i = 1, 2, \cdots, m, \quad j = 1, 2, \cdots, n$

행 벡터와 열 벡터

행 벡터 : 행이 하나인 행렬

$$\boldsymbol{a} = (a_1, a_2, \cdots, a_n) \in \boldsymbol{R}^{1 \times n}$$

또는 $\boldsymbol{a} = (a_j), \quad j = 1, 2, \cdots, n$

열 벡터 : 열이 하나인 행렬

$$\boldsymbol{b} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix} \in \boldsymbol{R}^{n \times 1}$$

또는 $\boldsymbol{b} = (b_j), \quad j = 1, 2, \cdots, n$

주대각요소

정방행렬(Square Matrix) : 행과 열의 개수가 같은 행렬

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ & \vdots & & \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix} \in R^{n \times n} \longrightarrow$$ n차 정방행렬

주대각요소

행렬의 상등

동일한 크기를 가지는 두 행렬 $A = (a_{ij}),\quad B = (b_{ij})$

모든 i와 j에 대하여 $a_{ij} = b_{ij} \quad \forall i, j \longrightarrow A = B$

<예제>

$$A = \begin{pmatrix} 1 & x \\ y & -3 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 1 & y-2 \\ 3x-2 & -3 \end{pmatrix}$$

$$A = B \iff x = y - 2, \quad y = 3x - 2$$

$$\therefore x = 2,\ y = 4$$

행렬의 덧셈 및 뺄셈

$$\boldsymbol{A} = (a_{ij}) \in \boldsymbol{R}^{m \times n} \qquad \boldsymbol{B} = (b_{ij}) \in \boldsymbol{R}^{m \times n}$$

$$\boldsymbol{A} + \boldsymbol{B} \triangleq (a_{ij} + b_{ij}) \qquad i = 1,\, 2,\, \cdots,\, m,\;\; j = 1,\, 2,\, \cdots,\, n$$

$\longrightarrow$ 각 대응되는 요소들의 합과 차로 정의

행렬의 스칼라 곱

$$\boldsymbol{A} = (a_{ij}) \in \boldsymbol{R}^{m \times n}$$

$$k\boldsymbol{A} = (ka_{ij}) \qquad i = 1,\, 2,\, \cdots,\, m,\;\; j = 1,\, 2,\, \cdots,\, n$$

연산 법칙

$\boldsymbol{A} + \boldsymbol{B} = \boldsymbol{B} + \boldsymbol{A}$ $\longleftarrow$ 교환법칙 성립

$\boldsymbol{A} + (\boldsymbol{B} + \boldsymbol{C}) = (\boldsymbol{A} + \boldsymbol{B}) + \boldsymbol{C}$ $\longleftarrow$ 결합법칙 성립

$k\,(\boldsymbol{A} + \boldsymbol{B}) = k\,\boldsymbol{A} + k\,\boldsymbol{B}$ $\longleftarrow$ 배분법칙 성립

$(k_1 + k_2)\boldsymbol{A} = k_1\boldsymbol{A} + k_2\boldsymbol{A}$

행렬의 곱셈

$\boldsymbol{A} = (a_{ij}) \in \boldsymbol{R}^{m\times p}, \boldsymbol{B} = (b_{ij}) \in \boldsymbol{R}^{p\times n} \longleftarrow \boldsymbol{A}$의 열의 개수 $= \boldsymbol{B}$의 행의 개수

$\boldsymbol{C} = \boldsymbol{AB} \in \boldsymbol{R}^{m\times n}$

$$\underbrace{\underset{i\text{번째 행}}{\begin{pmatrix} \\ \boxed{a_{i1} \quad a_{i2} \quad \cdots \quad a_{ip}} \\ \\ \end{pmatrix}}}_{\substack{\boldsymbol{A}\\(m\times p)}} \underbrace{\underset{j\text{번째 열}}{\begin{pmatrix} \boxed{\begin{matrix} b_{1j} \\ b_{2j} \\ \vdots \\ b_{pj} \end{matrix}} \end{pmatrix}}}_{\substack{\boldsymbol{B}\\(p\times n)}} = \underbrace{\underset{(i,\, j)\text{—요소}}{\begin{pmatrix} \\ \boxed{c_{ij}} \\ \\ \end{pmatrix}}}_{\substack{\boldsymbol{C}\\(m\times n)}}$$

$$c_{ij} = a_{i1}\, b_{1j} + a_{i2} b_{2j} + \cdots + a_{ip}\, b_{pj} = \sum_{k=1}^{p} a_{ik}\, b_{kj}$$

연산법칙

$AB \neq BA$ ⟶ 교환법칙 성립않는다.

$A(BC) = (AB)C$ ⟶ 결합법칙 성립

$A(B+C) = AB + AC$ ⟶ 배분법칙 성립

행렬의 곱셈에서는 교환법칙이 성립되지 않기 때문에 곱하는 순서에 주의해야 한다.

$A = B$ ⟶ $CA = CB$ (O)

$CA = BC$ (X)

행렬의 거듭제곱

$A \in R^{n \times n}$; 정방행렬

$$A^n \triangleq \underbrace{A \cdot A \cdots A}_{n\text{개}}$$

$A^0 = I_n$; 단위행렬 ⟶ 주대각선요소만 1이고 나머지 요소가 모두 0인 행렬

행렬 다항식

$$p(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0 x^0$$

$$\begin{aligned} p(\boldsymbol{A}) &\triangleq a_n \boldsymbol{A}^n + a_{n-1} \boldsymbol{A}^{n-1} + \cdots + a_1 \boldsymbol{A} + \boldsymbol{A}^0 \\ &= a_n \boldsymbol{A}^n + a_{n-1} \boldsymbol{A}^{n-1} + \cdots + a_1 \boldsymbol{A} + \boldsymbol{I} \end{aligned}$$

<예제>

$$\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix} \in \boldsymbol{R}^{2 \times 2}$$

$$\boldsymbol{A}^2 = \boldsymbol{A} \cdot \boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 9 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1^2 & 0 \\ 0 & 3^2 \end{pmatrix}$$

$$\boldsymbol{A}^3 = \boldsymbol{A}^2 \cdot \boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 9 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 27 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1^3 & 0 \\ 0 & 3^3 \end{pmatrix}$$

$$\therefore \ \boldsymbol{A}^n = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 3^n \end{pmatrix}$$

특수행렬

(1) 전치행렬(Transpose Matrix)

주어진 행렬에서 행과 열을 서로 바꾸어 놓은 행렬

$$\boldsymbol{A} = (a_{ij}) \in \boldsymbol{R}^{m\times n} \qquad i = 1, 2, \cdots, m, \;\; j = 1, 2, \cdots, n$$

$$\boldsymbol{A}^T = (a_{ji}) \in \boldsymbol{R}^{n\times m} \longrightarrow \boldsymbol{A}\text{의 전치행렬}$$

$$\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{pmatrix} \in \boldsymbol{R}^{2\times 3}, \qquad \boldsymbol{A}^T = \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 2 & 5 \\ 3 & 6 \end{pmatrix} \in \boldsymbol{R}^{3\times 2}$$

성질

(1) $(\boldsymbol{A}^T)^T = \boldsymbol{A}$	(전치의 전치)
(2) $(\boldsymbol{A} + \boldsymbol{B})^T = \boldsymbol{A}^T + \boldsymbol{B}^T$	(합의 전치)
(3) $(\boldsymbol{AB})^T = \boldsymbol{B}^T\boldsymbol{A}^T$	(곱의 전치)
(4) $(k\boldsymbol{A})^T = k\boldsymbol{A}^T$	(스칼라 곱의 전치)

(2) 대칭행렬과 교대행렬

대칭행렬

$\boldsymbol{A} \in \boldsymbol{R}^{n \times n}$에 대하여 $\boldsymbol{A}^T = \boldsymbol{A}$ 를 만족하는 행렬

$$a_{ji} = a_{ij} \qquad i, j = 1, 2, \cdots, n$$

$\longrightarrow$ 주대각요소를 기준으로 대칭구조

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 4 & -1 \\ 4 & 2 & 7 \\ -1 & 7 & 3 \end{pmatrix} \qquad a_{12}=a_{21}, \quad a_{13}=a_{31}, \quad a_{32}=a_{23}$$

교대행렬

$\boldsymbol{A} \in \boldsymbol{R}^{m \times n}$에 대하여 $\boldsymbol{A}^T = -\boldsymbol{A}$를 만족하는 행렬

$$a_{ji} = -a_{ij} \qquad i, j = 1, 2, \cdots, n$$

$\longrightarrow$ $i = j$일 때 $a_{ii} = -a_{ii}$ 를 만족해야 하므로

$a_{ii} = 0 \quad (i = 1, 2, \cdots, n)$, 주대각요소가 0인 반대칭 구조

$$\mathrm{A} = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 2 \\ 1 & 0 & 3 \\ -2 & -3 & 0 \end{pmatrix}$$

$a_{11} = a_{22} = a_{33} = 0$

$a_{12} = -a_{21}, \quad a_{13} = -a_{31}, \quad a_{32} = -a_{23}$

(3) 삼각행렬

주대각선 아래의 모든 요소가 0이거나 주대각선 위의 모든 요소가 0이 되는 정방행렬

상삼각행렬	하삼각행렬	대각행렬	영행렬
$\begin{pmatrix} 1 & 4 & 5 \\ 0 & 2 & 6 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 4 & 2 & 0 \\ 5 & 6 & 3 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

기본 행연산

연립방정식의 해를 구하기 위한 기본적인 대수조작

① 임의의 두 방정식의 위치를 서로 교환한다.

② 어떤 한 방정식에 0이 아닌 상수를 곱한다.

③ 어떤 한 방정식에 0이 아닌 상수를 곱하여 다른 방정식에 더한다.

⇕

행렬의 기본 행연산

① 임의의 두 행을 서로 교환한다.

② 한 행에 0이 아닌 상수를 곱한다.

③ 한 행에 0이 아닌 상수를 곱하여 다른 행에 더한다.

행렬의 기본 행연산은 연립방정식을 풀기 위한 체계적인 과정이다.

⟶ Gauss 소거법

Gauss 소거법

$$
\underbrace{\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ & \vdots & & \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}}_{A \in \boldsymbol{R}^{m \times n}} \underbrace{\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}}_{\boldsymbol{x} \in \boldsymbol{R}^{n \times 1}} = \underbrace{\begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix}}_{\boldsymbol{b} \in \boldsymbol{R}^{m \times 1}} \quad \Longleftrightarrow \quad \boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{b}
$$

확장행렬 : 계수행렬 $\boldsymbol{A}$에 $\boldsymbol{b}$를 첨가한 행렬

$$
\tilde{A} = \left(\begin{array}{cccc:c} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} & b_2 \\ & \vdots & \cdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} & b_m \end{array}\right) \in \boldsymbol{R}^{m \times (n+1)}
$$

가우스 소거법은 행렬의 기본 행연산을 통해 확장행렬 $\tilde{A}$의 계수행렬 $\boldsymbol{A}$를 상삼각행렬로 만들어 나가면서 연립방정식의 해를 구하는 방법이다.

① $\tilde{A}$의 주대각요소 $a_{11} \neq 0$을 주축(Pivot)으로 하여 a_{11}의 아래 요소들을 모두 0으로 만든다. 만일 $a_{11} = 0$이면 행교환을 통해 a_{11}이 0이 되지 않도록 한다.

② ①에서 얻어진 행렬에서 두 번째 주대각요소를 주축으로 아래 요소들을 모두 0으로 만든다.

③ 위의 과정을 모든 주대각요소까지 계속한 후 역방향 대입을 통해 연립방정식의 해를 구한다.

<예제>

피봇

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 2 & 9 \\ 2 & 4 & -3 & 1 \\ 3 & 6 & -5 & 0 \end{array}\right) \text{ 확장행렬 } \longleftarrow \begin{cases} x_1 + x_2 + 2x_3 = 9 \\ 2x_1 + 4x_2 - 3x_3 = 1 \\ 3x_1 + 6x_2 - 5x_3 = 0 \end{cases}$$

↓ ① 1행에 −2를 곱하여 2행에 더한다.

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 2 & 9 \\ 0 & 2 & -7 & -17 \\ 3 & 6 & -5 & 0 \end{array}\right) \xrightarrow[\text{3행에 더한다.}]{\text{1행에 −3을 곱하여}} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 2 & 9 \\ 0 & 2 & -7 & -17 \\ 0 & 3 & -11 & -27 \end{array}\right)$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 2 & 9 \\ 0 & 2 & -7 & -17 \\ 0 & 3 & -11 & -27 \end{array}\right)$$

2행에 $-\frac{3}{2}$를 곱하여 3행에 더한다

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 2 & 9 \\ 0 & 2 & -7 & -17 \\ 0 & 0 & -\frac{1}{2} & -\frac{3}{2} \end{array}\right) \Longleftrightarrow \begin{aligned} x_1 + x_2 + 2x_3 &= 9 \\ 2x_2 - 7x_3 &= -17 \\ -\frac{1}{2}x_3 &= -\frac{3}{2} \end{aligned}$$

피봇

상삼각행렬

역방향 대입(Backward Substitution)

$$\therefore x_3 = 3 \longrightarrow 2x_2 - 7\times 3 = -17$$

$$\therefore x_2 = 2 \longrightarrow x_1 + 2 + 2\times 3 = 9$$

$$\therefore x_1 = 1$$

Gauss-Jordan 소거법

Gauss 소거법에 주대각요소의 아래뿐만 아니라 위에 있는 요소들까지 기본 행연산을 통해 0으로 만드는 것이며, 계속 반복하면 궁극적으로 주어진 행렬이 단위행렬이 된다.

행렬식과 역행렬

(1) 행렬식의 정의와 계산

$A \in R^{n\times n}$ 정방행렬 $\longrightarrow$ A 의 행렬식 $\triangleq$ $\det(A)$ 또는 $|A|$

$$= \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ & \vdots & & \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

2차 행렬식

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} \in R^{2\times 2} \longrightarrow \det(A) = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}$$

<예제>

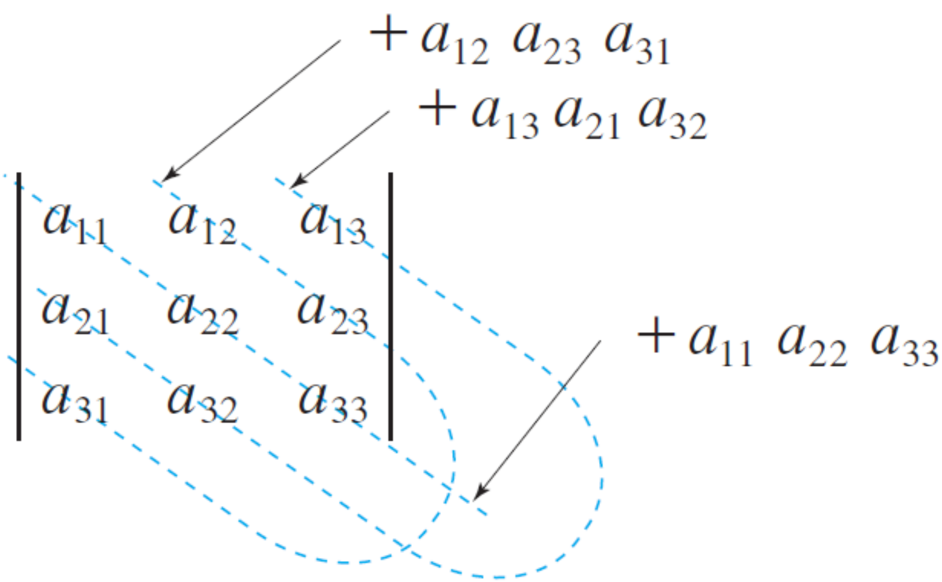
$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} \in R^{2\times 2} \longrightarrow \det(A) = \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{vmatrix} = 4 - 6 = -2$$

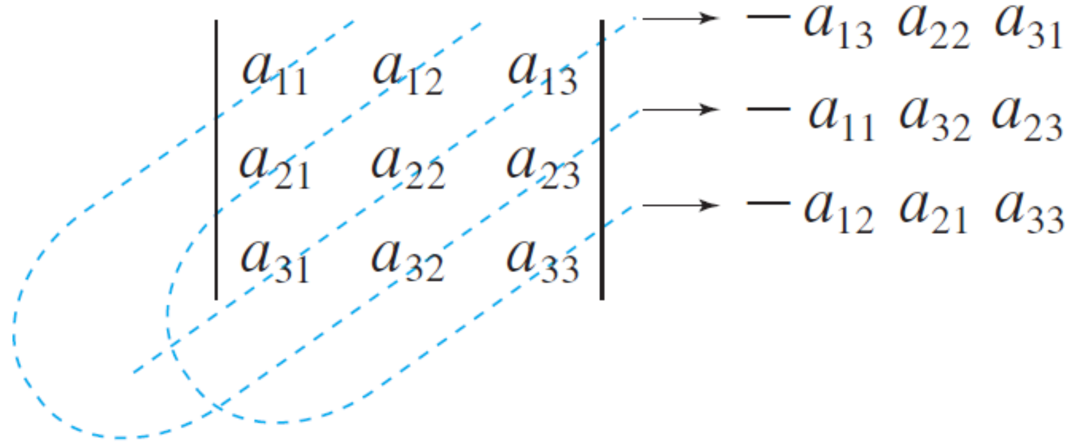
3차 행렬식

$$A=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} \in R^{3\times 3} \longrightarrow \det(A)=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$$

$$=a_{11}a_{22}a_{33}+a_{12}a_{23}a_{31}+a_{13}a_{21}a_{32}$$

$$-a_{13}a_{22}a_{31}-a_{12}a_{21}a_{33}-a_{11}a_{32}a_{23}$$





공식에 의한 역행렬 계산

$$A^{-1} \triangleq \frac{\mathrm{adj}(A)}{\det(A)} = \frac{A\text{의 수반행렬}}{A\text{의 행렬식}}$$

$$\mathrm{adj}(A) = \begin{pmatrix} C_{11} & C_{12} & \cdots & C_{1n} \\ C_{21} & C_{22} & \cdots & C_{2n} \\ & \vdots & & \\ C_{n1} & C_{n2} & \cdots & C_{nn} \end{pmatrix}^T \qquad C_{ij} = (-1)^{i+j} M_{ij}$$

<예제>

$A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in R^{2\times 2}$ 의 역행렬 구하기

$$C_{11} = M_{11} = d, \quad C_{12} = -M_{12} = -c, \quad C_{21} = -M_{21} = -b, \quad C_{22} = M_{22} = a$$

$$\therefore \quad \mathrm{adj}(A) = \begin{pmatrix} d & -c \\ -b & a \end{pmatrix}^T = \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}$$

$$\det(\boldsymbol{A}) = \begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = ad - bc$$

$$\boldsymbol{A}^{-1} = \frac{\operatorname{adj}(\boldsymbol{A})}{\det(\boldsymbol{A})} = \frac{1}{ad-bc}\begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}, \qquad ad - bc \mp 0$$

Cramer 공식

선형연립방정식의 해를 행렬식 계산만으로 구할 수 있는 유용한 공식

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ & \vdots & & \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix} \quad \Longleftrightarrow \quad \boldsymbol{Ax} = \boldsymbol{b}$$

$$x_j = \frac{\det(\boldsymbol{A}_j)}{\det(\boldsymbol{A})} \qquad j = 1, 2, \cdots, n$$

$\boldsymbol{A}_j$ ≙ 계수행렬 $\boldsymbol{A}$의 j번째 열을 $\boldsymbol{b}$의 성분으로 대체한 행렬

$$= \begin{pmatrix} a_{11} & a_{21} & \cdots & b_1 & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & b_2 & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots & & \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & b_n & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

j번째 열

<예제>

$$\begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ -2 & 3 & 4 \\ -5 & 5 & 6 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \Longleftrightarrow \quad \boldsymbol{A}\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$$

$$\det(\boldsymbol{A}) = \begin{vmatrix} 2 & 0 & 1 \\ -2 & 3 & 4 \\ -5 & 5 & 6 \end{vmatrix} = 2C_{11} + C_{13} = 2\begin{vmatrix} 3 & 4 \\ 5 & 6 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} -2 & 3 \\ -5 & 5 \end{vmatrix} = 1$$

$$\boldsymbol{A}_1 = \begin{pmatrix} \boxed{\begin{matrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{matrix}} & \begin{matrix} 0 \\ 3 \\ 5 \end{matrix} & \begin{matrix} 1 \\ 4 \\ 6 \end{matrix} \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{A}_2 = \begin{pmatrix} \begin{matrix} 2 \\ -2 \\ -5 \end{matrix} & \boxed{\begin{matrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{matrix}} & \begin{matrix} 1 \\ 4 \\ 6 \end{matrix} \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{A}_3 = \begin{pmatrix} \begin{matrix} 2 \\ -2 \\ -5 \end{matrix} & \begin{matrix} 0 \\ 3 \\ 5 \end{matrix} & \boxed{\begin{matrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{matrix}} \end{pmatrix}$$

$$\det(\boldsymbol{A}_1) = -7, \quad \det(\boldsymbol{A}_2) = -25, \quad \det(\boldsymbol{A}_3) = 15$$

$$x_3 = \frac{\det(\boldsymbol{A}_3)}{\det(\boldsymbol{A})} = 15$$

고유값과 고유벡터

정의 $A \in R^{n \times n},\ x \in R^{n \times 1}$

$Ax = \lambda x$를 만족하는 스칼라 를 고λ값, 영이 아닌 벡터 $x \neq O$ 에 λ한 고유벡터라 정의한다.

$$\text{고유값} = \{ \lambda \mid Ax = \lambda x,\ A \in R^{n \times n},\ x \in R^{n \times 1} \}$$

$$\text{고유벡터} = \{ x \neq O \mid Ax = \lambda x \}$$

특성방정식 $Ax = \lambda x \implies Ax - \lambda I x = (A - \lambda I)x = O$

① $\det(A - \lambda I) \neq 0 \longrightarrow x = O$ (유일한 해)

② $\det(A - \lambda I) = 0 \longrightarrow x \neq O$

$\therefore\ \det(A - \lambda I) = 0 \longleftarrow$ 특성방정식

$\longleftarrow$ λ에 대한 n차의 다항식

<예제>

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 8 & -1 \end{pmatrix}$$ 의 고윳값과 고유벡터 구하기

특성방정식 $$\det(A - \lambda I) = \begin{vmatrix} 3-\lambda & 0 \\ 8 & -1-\lambda \end{vmatrix} = (\lambda - 3)(\lambda + 1) = 0$$

$$\therefore \lambda_1 = 3, \lambda_2 = -1$$

① $\lambda_1 = 3$에 대한 고유벡터 $\boldsymbol{x}_1 \triangleq (x_1, x_2)^T \in \boldsymbol{R}^{2\times 1}$

$$\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}_1 = \lambda_1 \boldsymbol{x}_1 \Longleftrightarrow \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 8 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = 3\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$$

$$8x_1 - 4x_2 = 0$$

$$\therefore \boldsymbol{x}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

$3x_1$ $8x_1 - x_2 = 3x_2.$

② $\lambda_2 = -1$에 대한 고유벡터 $\boldsymbol{x}_2 \triangleq (y_1, y_2)^T \in \boldsymbol{R}^{2\times 1}$

$$\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}_2 = \lambda_2 \boldsymbol{x}_2 \Longleftrightarrow \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 8 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} = -\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}$$

$y_1 = 0$, $y_2 =$ 임의의 값

$$\therefore \boldsymbol{x}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

한 학기 수고 많았습니다.!

기말고사 12월7일 오후 2시

시험 범위 : 5장 6장 7장