연산자: 어떤 함수를 다른 함수로 바꿔주는 수학적 규칙, 기호 문자 위에 ^ 표시로 연산자를 표시한다.

$\hat{A}$: 벡터를 다른 벡터로 바꿔주는 연산자, 켓벡터 -> 켓벡터 or 브라벡터 -> 브라벡터

대개의 경우 관심 대상은 큐비트가 존재하는 2차원 힐베르트 공간 C^2이다. 큐비트에 적용하는 연산자는 2 × 2 행렬로 표현할 수 있다.

$$A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \tag{3.18}$$

연산자를 계산 기저에 대한 행렬로 표현할 때 행렬 원소는 다음과 같은 배열 방식을 따르기로 한다.

$$A = \begin{pmatrix} \langle 0|A|0\rangle & \langle 0|A|1\rangle \\ \langle 1|A|0\rangle & \langle 1|A|1\rangle \end{pmatrix} \tag{3.19}$$

-> 여기서 <0|A|0> 과 같은 표현은 |0>에 연산자 A를 적용, 이후 <0|을 내적해준 것을 뜻하며, 입력이 0일 때 출력이 0일 확률값을 나타낸다.

Ex. 기저 상태 $|0\rangle = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$, $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$

$A|0\rangle = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a \\ c \end{pmatrix}$

$\langle 0|A|0\rangle = (1\ \ 0)\begin{pmatrix} a \\ c \end{pmatrix} = a$

에르미트: 자신을 전치시키고 켤레를 취해주기

-> 어떤 연산자 A가 있을 때 $A^{\dagger}$는 에르미트 켤레라고 말하며 전치 후 복소수 켤레를 취한 행렬이 된다.

연산자 $\hat{A}$에 대한 에르미트 수반 연산자는 $\hat{A}^{\dagger}$로 표현, 정의는 아래와 같다.

$$\langle a|\hat{A}^{\dagger}|b\rangle = \langle b|\hat{A}|a\rangle^{*}$$

-> 원래 연산자의 원소를 켤레하고 전치한 것을 이렇게 어렵게…. 표현을 한다고 한다.

얘들을 데리고 계산을 할 때는 다음 규칙들을 따른다.

$$(\alpha\hat{A})^\dagger = \alpha^* A^\dagger \tag{3.22}$$

$$(|\psi\rangle)^\dagger = \langle\psi| \tag{3.23}$$

$$(\langle\psi|)^\dagger = |\psi\rangle \tag{3.24}$$

$$(\hat{A}\hat{B})^\dagger = \hat{B}^\dagger\hat{A}^\dagger \tag{3.25}$$

$$(\hat{A}|\psi\rangle)^\dagger = \langle\psi|\hat{A}^\dagger \tag{3.26}$$

$$(\hat{A}\hat{B}|\psi\rangle)^\dagger = \langle\psi|\hat{B}^\dagger A^\dagger \tag{3.27}$$

에르미트 연산자: 어떤 연산자 $\hat{A}$가 $\hat{A} = \hat{A}^\dagger$일 때 에르미트 연산자이다.

-> 자기 자신을 전치하고 켤레를 취했을 때, 자기 자신과 똑같이 나온다.

-> 자신의 복소수 켤레와 자신이 같다 -> 실수

Ex. $\begin{pmatrix} 2 & i \\ -i & 3 \end{pmatrix}$ -전치-> $\begin{pmatrix} 2 & -i \\ i & 3 \end{pmatrix}$ -켤레-> $\begin{pmatrix} 2 & i \\ -i & 3 \end{pmatrix}$

해당 행렬은 에르미트 연산자로 쓰일 수 있으며 대각 행렬이 실수로 나타남을 알 수 있다.

그래서 이런 걸 써서 어디다가 씁니까?

-> 에르미트 연산자의 대각 원소는 항상 실수로 나타난다(측정 가능하다). 그래서 양자역학에서의 물리량들은 에르미트 연산자를 이용하여 나타낸다.

유니타리 연산자: 자신을 전치하고 켤레한 것과 자신의 역행렬이 같을 때 유니타리 연산자라고 하며 대문자 U를 사용하여 표현한다.

-> $U^\dagger = U^{-1}$

-> $U^\dagger U = UU^\dagger = I$

양자 상태의 시간 변화를 설명해주는 연산자

-> 벡터의 norm과 내적을 보존한다고 한다.

정규 연산자: $AA^\dagger = A^\dagger A$를 만족할 때

-> 에르미트 연산자와 유니타리 연산자는 정규 연산자

고유 벡터: λ가 어떤 복소수일 때 $\lambda|\psi\rangle = A|\psi\rangle$ 이 식을 만족하면 이 벡터를 연산자 A의 고유벡터라고 한다. 또, 이때의 복소수 λ를 **고윳값**이라고 한다.

-> 고윳값을 구하기 위하여 특성 방정식을 이용할 수 있다.

-> 고윳값을 구하면 고유 벡터를 구할 수 있는데, 각각의 고윳값마다 대응하는 벡터를 구하면 고유벡터를 구할 수 있게 된다. 이때 양자역학에서 만족해야 하는 정규화 조건이 사용된다.

-> 연산자의 고유 벡터가 각기 다른 고윳값을 가지면 비겹침 상태, 같은 경우가 있다면 겹침 상태라고 한다.

* 예제 3.6을 참고하면 더 와닿을 내용이다. 읽기만 해선 뭔소린지 모른다.

스펙트럼 분해: 연산자 A가 정규화되어 있을 때 특정한 기저를 선택하면 대각 행렬로 표현이 가능하다. 또, 이런 A는 그 자신의 고윳값들과 고유벡터들로 쪼갤 수 있다.

-> 연산자 A가 특정 기저 $|u_i\rangle$에 대해 스펙트럼 분해가 가능할 때,

$$A = \sum_{i=1}^{n} a_i |u_i\rangle\langle u_i|$$

이런 식으로 연산자를 나타낼 수 있다는 말. 소문자 a_i는 고윳값

그니까 연산자를 표현하는 다른 방식일 뿐이다. 표현이 뭔가 있어 보인다고 쫄 필요가 없다. 예제 보면 별거 아님….

* 이것도 예제를 꼭 보자.

대각합: 행렬로 연산자를 표현했을 때 대각 원소의 합

-> 외적 형태로 표현된 연산자는 기저 벡터에 대한 내적 값을 더하여 구할 수 있다.

$$Tr(A) = \sum_{i=1}^{n} \langle u_i|A|u_i\rangle$$