복합계 측정

복합계: 두개 이상의 큐비트로 이루어진 시스템

- 쉽게 말해서 두(개 이상의) 큐비트를 텐서곱해둔 상태라고 생각하면 편함

$|00\rangle$: 큐비트 둘다 0 $|01\rangle, |10\rangle$: 하나는 0, 하나는 1
$|11\rangle$: 〃 1

다음 상태에 대해 $P_0 \otimes I$ 연산자와 $I \otimes P_1$ 연산자의 동작을 설명하라.

$P_0 : |0\rangle\langle 0|$
$P_1 : |1\rangle\langle 1|$

$$|\psi\rangle = \frac{|01\rangle - |10\rangle}{\sqrt{2}}$$

$P_0 \otimes I$ 연산자 : 첫번째 비트를 0으로 프로젝션 → 첫번째 비트 0인거 빼고 사형 $|10\rangle$항 삭제

$\therefore P_0 \otimes I |\psi\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}|01\rangle$

$I \otimes P_1$ 연산자 : 두번째 비트를 1로 프로젝션 → 두번째 비트 1인거 빼고 삭제 $|10\rangle$ 삭제

$\therefore I \otimes P_1 |\psi\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}|01\rangle$

뭔가 하나를 사영측정하면 측정 안한 다른 비트도 상태가 결정된다는 뜻

계의 상태가 다음과 같다.

$$|\psi\rangle = \frac{1}{\sqrt{8}}|00\rangle + \sqrt{\frac{3}{8}}|01\rangle + \frac{1}{2}|10\rangle + \frac{1}{2}|11\rangle$$

(a) 측정을 통해 계가 $|\phi\rangle = |01\rangle$ 상태임을 발견할 확률은 얼마인가?

(b) 측정을 통해 첫 번째 큐비트가 $|0\rangle$ 상태임을 발견할 확률은 얼마인가? 측정 이후 계의 상태는 어떻게 되는가?

(a) $\langle 01|$ 곱했을때 살아남는거 $\sqrt{\frac{3}{8}}$, 보른규칙이란걸 따라보면 $\frac{3}{8}$
$|\langle \phi|\psi\rangle|^2$

(b) 첫번째 비트 $|0\rangle \longrightarrow P_0 \otimes I$ 연산자 사용 : 첫번째 1인거 다죽음 $(P_0 \otimes I|\psi\rangle)$

$\rightarrow \frac{1}{\sqrt{8}}|00\rangle + \sqrt{\frac{3}{8}}|01\rangle$ 이걸 얻을 확률 $Pr = \langle\psi|P_0 \otimes I|\psi\rangle$

$= \frac{1}{8} + \frac{3}{8} = \frac{1}{2}$

측정 이후 계 : $\sqrt{2}\left(\frac{1}{\sqrt{8}}|00\rangle + \sqrt{\frac{3}{8}}|01\rangle\right) = \frac{1}{2}|00\rangle + \frac{\sqrt{3}}{2}|01\rangle$

2큐비트 계의 상태가 다음과 같다.

$$|\phi\rangle = \frac{\sqrt{3}}{2}\underbrace{|00\rangle}_{|0\rangle\otimes|0\rangle} + \frac{1}{2}|11\rangle$$

첫 번째 큐비트에 Y 게이트를 적용했다. 이후 두 큐비트 모두에 대해 측정을 수행한다면 가능한 측정 결과는 무엇이며, 각 측정 결과에 대한 확률은 얼마인가?

Y게이트 $= \begin{bmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{bmatrix}$

$Y|0\rangle = i|1\rangle$ $\quad \begin{bmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ i \end{bmatrix}$

$Y|1\rangle = -i|0\rangle$ $\quad \begin{bmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -i \\ 0 \end{bmatrix}$

→ $Y \otimes I$ 라는 뜻. → 첫번째 큐비트만 계산됨

$$Y \otimes I|\psi\rangle = \frac{\sqrt{3}}{2}\Big(Y|0\rangle \otimes \underbrace{|0\rangle}_{\text{그대로}}\Big) + \frac{1}{2}\Big(Y|1\rangle \otimes |1\rangle\Big)$$

$$= \frac{\sqrt{3}}{2} i|10\rangle - \frac{1}{2} i|01\rangle$$

⇒ 얻을 수 있는 측정 결과 $|10\rangle$ or $|01\rangle$

① 10 확률 : $\frac{3}{4}$

② 01 확률 : $\frac{1}{4}$

측정의 일반화

측정 결과 m이 나올 확률을 일반화해서 나타낼 수 있다.

$$\Pr(m) = \langle\psi|M_m^\dagger M_m|\psi\rangle$$

-> 그게 이거

$$\Pr(m) = Tr(M_m^\dagger M_m \rho)$$

-> 계가 밀도 연산자로 표현되어 있을 땐 이걸 씀

측정 이후 계의 상태 - 측정을 해서 m을 얻었을 때, 계가 어떻게 변했냐

$$|\psi'\rangle = \frac{M_m|\psi\rangle}{\sqrt{\langle\psi|M_m^\dagger M_m|\psi\rangle}}$$

-> 새로운 계 ψ'

양의 연산자 값 측정(POVM)

위에서 $E_m = M_m^\dagger M_m$ 로 두고 E를 써서 표기하면 그게 POVM -> 다를게 하나도 없는 내용

$$\Pr(m) = \langle\psi|E_m|\psi\rangle$$

$$= Tr(E_m \rho)$$

어떤 양자계의 밀도 행렬이 다음과 같다.

$$\rho = \frac{5}{6}|0\rangle\langle 0| + \frac{1}{6}|1\rangle\langle 1|$$

이 계가 $|0\rangle$ 상태에 있을 확률은 얼마인가?

$Pr(m) = Tr(M_m^{\dagger} M_m \rho)$, $M_m = |0\rangle$

$= Tr(|0\rangle\langle 0|\rho) = \langle 0|\rho|0\rangle$

$= \langle 0|\left(\frac{5}{6}|0\rangle\langle 0| + \frac{1}{6}|1\rangle\langle 1|\right)|0\rangle$

$= \frac{5}{6}\langle 0|0\rangle\langle 0|0\rangle + \frac{1}{6}\langle 0|1\rangle\langle 1|0\rangle = \frac{5}{6}$

어떤 계의 밀도 연산자가 다음과 같다.

$$\rho = \frac{1}{3}|u_1\rangle\langle u_1| - i\frac{\sqrt{2}}{3}|u_1\rangle\langle u_2| + i\frac{\sqrt{2}}{3}|u_2\rangle\langle u_1| + \frac{2}{3}|u_2\rangle\langle u_2|$$

이 식의 $|u_i\rangle$ 정규 직교 기저 집합을 구성한다. 측정을 통해 계의 상태가 $|u_2\rangle$를 얻을 확률은 얼마인가?

$\underset{u_1}{\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}}, \underset{u_2}{\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}}$

$|u_2\rangle$를 얻고 싶음 → 사영 연산자 $P_{u_2} = |u_2\rangle\langle u_2|$

$Pr(|u_2\rangle) = Tr(|u_2\rangle\langle u_2|\rho)$

$= \langle u_2|\rho|u_2\rangle$

$= \frac{2}{3}$

어떤 계의 상태가 다음과 같다. $|\langle 0|\psi\rangle|^2$

해 코리간함

$$|\psi\rangle = \frac{2}{\sqrt{5}}|0\rangle + \frac{1}{\sqrt{5}}|1\rangle$$

이 상태에서 0과 1을 측정할 확률을 POVM 형식으로 서술하라.

0 측정하고싶음.

$$E_0 = |0\rangle\langle 0| = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{aligned}
Pr(0) &= \langle\psi| E_0 |\psi\rangle \\
&= \left(\frac{2}{\sqrt{5}}\langle 0| + \frac{1}{\sqrt{5}}\langle 1|\right)\left(|0\rangle\langle 0|\right)\left(\frac{2}{\sqrt{5}}|0\rangle + \frac{1}{\sqrt{5}}|1\rangle\right) \\
&= \left(\frac{2}{\sqrt{5}}\langle 0| + \frac{1}{\sqrt{5}}\langle 1|\right)\left(\frac{2}{\sqrt{5}}|0\rangle\underbrace{\langle 0|0\rangle}_{=1} + \frac{1}{\sqrt{5}}|0\rangle\underbrace{\langle 0|1\rangle}_{=0}\right) \\
&= \left(\frac{2}{\sqrt{5}}\langle 0| + \frac{1}{\sqrt{5}}\langle 1|\right)\frac{2}{\sqrt{5}}|0\rangle \\
&= \frac{4}{5}
\end{aligned}$$

00 01 10 11

→ 0로 첫번째 사영 → 00 01 생존

→ 1로 첫 〃 → 10 11

→ 0로 두 ~ → 00, 10

→ 1 〃 → 01, 11