20150073 김경만

Answer to Problem 2

Exercise 4.4.1 and 4.4.2

(a) $h(x) = 2x+1 \bmod 32$,

	3	1	4	1	5	9	2	6	5
	0	0	0	0	0	1	0	0	0
	0	0	1	0	1	0	0	1	1
	1	0	0	0	0	0	1	1	0
	1	1	0	1	1	1	0	0	1
	1	1	1	1	1	1	1	1	1
tail len:	0	0	0	0	0	0	0	0	0

distinct element : 1개

(b) $h(x) = 3x+7 \bmod 32$

	3	1	4	1	5	9	2	6	5
	1	0	1	0	1	0	0	1	1
	0	1	0	1	0	0	1	1	0
	0	0	0	0	1	0	1	0	1
	0	1	1	1	1	1	0	0	1
	0	0	1	0	0	0	1	1	0
tail len:	4	1	0	1	1	1	0	0	1

distinct element: $2^4 = 16$개

(c) $h(x) = 4x \bmod 32$

	3	1	4	1	5	9	2	6	5
	0	0	1	0	1	0	0	1	1
	1	0	0	0	0	0	1	1	0
	1	1	0	1	1	1	0	0	1
	0	0	0	0	0	0	0	0	0
	0	0	0	0	0	0	0	0	0
tail len:	2	2	4	2	2	2	3	3	2

distinct element: $2^4 = 16$개

a는 홀수가 되어야 한다. a가 짝수라면, b가 홀수일때 항상 tail length=0, b가 짝수일때 항상 tail length ≠0 가 되어 b에 영향을 받기때문이다. 이러면 tail length가 골고루 분포하지 않게된다

Exercise 4.5.3

	3	1	4	1	3	4	2	1	2
X_i.value	2	3	2	2	1	1	2	1	1

Exercise 4.6.1

(a) k=5 , 이 point가 size2인 bucket의 endpoint이므로 정확히 $\underbrace{1+1}_{\text{size 1 bucket}}+\underbrace{1}_{\text{endpoint}} = 3$개의 1이 있음을 알 수 있다. 정확히 값을 estimate 했다. ($1+1+\frac{2}{2}=3$ 도 가능)

(b) k=15 이 point는 size 4인 bucket의 endpoint이므로 마찬가지로 정확하게 1의 개수를 estimate 할수있다 $\underbrace{1+1}_{\text{size1}} + \underbrace{2}_{\text{size2}}+\underbrace{4}_{\text{size4}}+\underbrace{1}_{\text{endpoint}} = 9$개의 1이 있으며 정확하다 ($1+1+2+4+\frac{4}{2}=10$ 도 가능)

만약 endpoint 임을 고려하지 않고 포함된 bucket의 size를 2로 나눠 계산한다면 교과서 안처럼 (a)는 3개로 정답과 차이가 없고 (b)는 10개로 정답과 1개의 차이가 난다

20150073 김경만

Answer to Problem 3

Exercise 8.2.1

algorithm	worst case off-line	on-line	Competitive ratio
- 스키 바로사기	하루 탈때, 10\$	100\$	1/10
- 하루 빌리고 사기	2일 탈때, 20\$	110\$	2/11
- 2일 빌리고 사기	3일 탈때, 30\$	120\$	1/4
⋮	⋮	⋮	⋮
- 9일 빌리고 사기	10일 탈때, 100\$	190\$	10/19
- 10일 빌리고 사기	11일 탈때, 100\$	200\$	1/2

이므로 on-line algorithm으로는 9일째까지는 빌려서 타다가 10일째가되면 사서 타는것이다

이때 competitive ratio가 최소 10/19로 가능한 best solution이다

Exercise 8.3.3

우선, 가능한 perfect matching은 단 한가지 경우로 {(1,c), (2,b), (3,d), (4,a)} 이다.

1) $\overline{1a}$, 또는 $\overline{3b}$가 첫번째 순서로 오면 greedy algorithm에 의해 선택되므로 perfect matching이 안된다.

2) $\overline{1c}$, 또는 $\overline{4a}$가 첫번째 순서로 오면 $\overline{1a}$가 언제나오던 적어도 한 node는 짝이 있으므로 greedy algorithm에 의해 matching이 되지 않는다. 하지만, $\overline{3b}$가 $\overline{2b}$와 $\overline{3d}$보다 먼저나오면 perfect matching이 되지않는다. $\frac{\overline{1c}}{\overline{4a}}$, $\overline{3b}$ 4 : 4!, $\frac{\overline{1c}}{\overline{4a}}$ ① $\overline{3b}$ 3 : 2×3!, $\frac{\overline{1c}}{\overline{4a}}$ ② $\overline{3b}$ ② : 2!×2!=4, 총 24+12+4=40개이므로 각 $\overline{1c}$, $\overline{4a}$ 시작에다 $\underbrace{5!}_{\text{전체경우}} - \underbrace{40}_{\text{perfect 안되는 경우 제외}} = 80$개의 perfect matching order가 있다. 총 2×80=160개.

3) 마지막으로 $\overline{2b}$, $\overline{3d}$가 첫번째로 오면 $\overline{3b}$가 언제나오던 신경쓸 필요가 없으며 $\overline{1a}$가 $\overline{1c}$, $\overline{4a}$보다 먼저 나오는 경우만 제외하면 항상 perfect matching 이된다. 그러므로 2)와 같이 160개가 있다. 그러므로 perfect matching이 되는 order는 6! 중에 총 320개이다.

∴ 320개

Exercise 8.4.1

(a) greedy algorithm은 query에 대해 bid한 Advertiser를 아무나 고른다.

따라서 $\begin{array}{cccccc} x & x & y & y & z & z \\ \hline C & C & B & B & X & X \end{array}$ A만 남은 budget, z는 A가 bid안했으므로 일때 reverue는 4이다

B와 C는 x와 y 모두 bid했고 각 budget을 2개씩 가지고있으므로 query의 앞 4개인 x x y y 가 항상 다 팔리게 되어있다. (A가 살수 있으나, 안 팔릴 일은 없다)

따라서 최소 한 4개의 query는 assign 된다.

(b) queries: $\begin{array}{cccc} x & x & z & z \\ \hline C & C & X & X \end{array}$ 일때, 앞 x를 C가 가져간다면, budget을 모두 사용하여 z는 어디에도 assign 되지 않는다 ⇒ 4개중 2개가 assign 된다.

optimum off-line algorith: $\begin{array}{cccc} x & x & z & z \\ \hline A & B & C & C \end{array}$ ⇒ 모두 assign 된다.

그러므로 off-line의 half만큼 assign 되었다.

Scanned with CamScanner