Université Grenoble Alpes
MAP350 – L3 MI

DM et TP10 : Periodic C2 cubic interpolating splines

Etant donnée une suite de n points x_i $(n \geq 2)$ telle que

$$a = x_1 < x_2 < \cdots < x_n = b,$$

on considère l'ensemble E des fonctions de $C^2(\mathbb{R})$, périodiques, de période $T = b - a$, dont la restriction à chaque intervalle $[x_i, x_{i+1}]$ est un polynôme de degré 3.

On considère par ailleurs l'espace $\Pi_2^3 = \Pi_2^3(x_1, ..., x_n)$ des splines cubiques C^2 associées à cette famille de noeuds x_i. On rappelle que Π_2^3 est l'ensemble des fonctions de classe C^2 sur $[a, b]$ dont la restriction à chaque intervalle $[x_i, x_{i+1}]$, $i = 1, 2, ..., n-1$ est un polynôme de degré 3.

1. Vérifier que E est un espace vectoriel.

2. On considère le cas $n = 2$ avec $a = 0$ et $b = 1$. Expliciter l'espace E. Donner sa dimension et une base.

3. On se place désormais dans le cas général avec $n > 2$. Pour un élément $f \in E$, on note $\hat{f}$ sa restriction à l'intervalle $[a, b]$ et on considère l'ensemble $\hat{E} = \{\hat{f}\ ,\ f \in E\}$. Vérifier que $\hat{E}$ est un sous espace vectoriel de Π_2^3.

4. Soit $s \in \Pi_2^3$. Ecrire les conditions nécessaires et suffisantes pour que $s \in \hat{E}$.

5. On rappelle que tout élément s de Π_2^3 s'écrit de manière unique sous la forme

$$s(x) = \sum_{i=0}^{3} \alpha_i\, x^i + \sum_{i=2}^{n-1} \beta_i\, (x - x_i)_+^3\,, \quad x \in [a, b]$$

   ce qui définit l'isomorphisme $F : \big(\alpha_0, \ldots, \alpha_3, \beta_2, \ldots, \beta_{n-1}\big) \in \mathbb{R}^{n+2} \longmapsto s(x) \in \Pi_2^3$.

   a) Montrer que $\hat{E}$ est le noyau d'une application linéaire Φ de Π_2^3 dans $\mathbb{R}^3$.
   b) Ecrire la matrice de l'application linéaire $\varphi = \Phi \circ F : \mathbb{R}^{n+2} \to \mathbb{R}^3$, déterminer son rang et en déduire la dimension de $\hat{E}$.

Interpolation. – On considère maintenant une suite de n réels $y_1, y_2, ..., y_n$ et on souhaite interpoler les données (x_i, y_i), $i = 1, ..., n$ par une fonction de $\hat{E}$. Autrement dit, on cherche $\hat{f} \in \hat{E}$ tel que

$$\hat{f}(x_i) = y_i, \quad i = 1, 2, ..., n.$$

6. Les données y_i peuvent-elles toutes être choisies indépendamment ?

   On suppose désormais que les données y_i sont cohérentes au sens de la question précédente. On notera $x_{i+1} - x_i = h_i$, $i = 1, \ldots, n-1$. On propose de construire l'interpolant $\hat{f}$ selon une méthode semblable à celle des splines naturelles non uniformes développée dans l'annexe du cours.

7. Quelles sont les inconnues à déterminer.

8. Ecrire le système linéaire permettant de déterminer ces inconnues.

Implémentation. – Une courbe plane paramétrique $t \in [a,b] \mapsto m(t) \in \mathbb{R}^2$ est dite fermée périodique de classe C^2 si l'application m est de classe C^2 et si $m(a) = m(b)$, $m'(a) = m'(b)$, $m''(a) = m''(b)$.

9. Ecrire un script Python permettant de

   a) acquérir un polygone à la souris (Figure 1),

   b) fermer ce polygone en joignant le dernier point acquis au premier point (Figure 2),

   c) tracer la courbe spline paramétrée fermée périodique, cubique C^2, interpolant les sommets de ce polygone (Figure 3) pour la paramétrisation cordale.

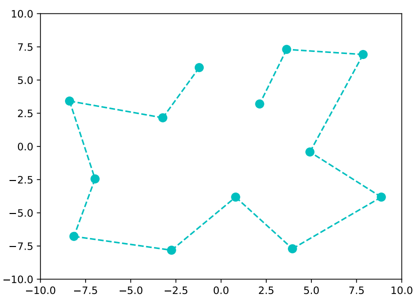


Figure 1

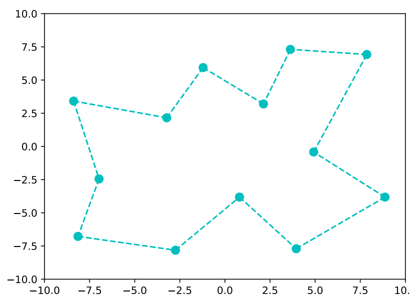


Figure 2

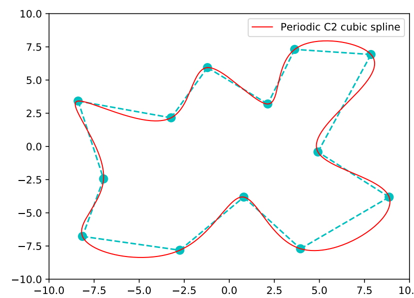
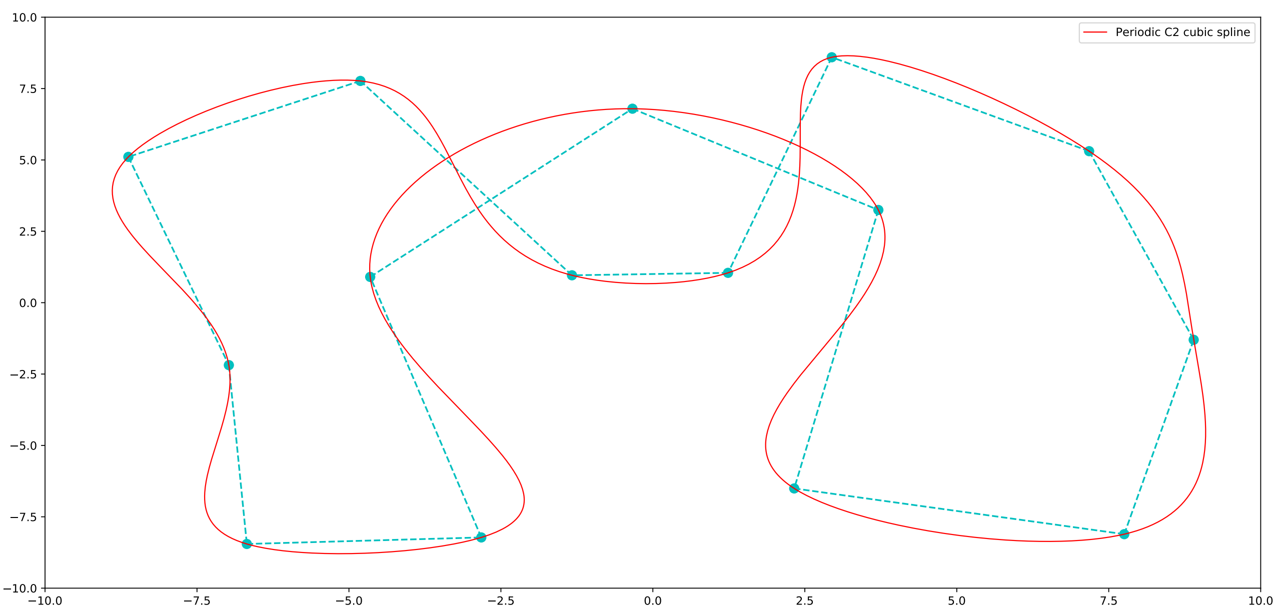


Figure 3



Le compte rendu de cette partie TP (càd de la question 9) consistera en un seul fichier Python dont le nom sera `TP10_NOM1_NOM2.py` Ce script Python contiendra en entête (et donc en commentaire) les noms NOM1 et NOM2 des éléments du binôme. Ce script sera envoyé dans un mail dont le sujet sera `TP10_NOM1_NOM2`. L'exécution de ce script devra permettre d'exécuter l'ensemble des 3 opérations a), b), c) définies dans la question 9 ci-dessus.