

TP9 : Smoothing splines

A smoothing spline allows to satisfy a compromise between the fidelity to noisy observations and the smoothness of a fitting spline. Precisely, given a set of data points (u_k, z_k) , $k = 1, \dots, N$, with $u_1 < u_2 < \dots < u_N$, where the observations z_k are assumed to be noisy, we consider a sequence of spline knots

$$x_1 < x_2 < \dots < x_n$$

such that $\{u_k\}_{1 \leq k \leq N} \subset [x_1, x_n]$, and the space $S[x_1, x_n]$ of the natural splines associated with these knots. We then consider the optimization problem

$$\min_{s \in S[x_1, x_n]} E_{0,2}(s) \quad (1)$$

with

$$E_{0,2}(s) = \sum_{k=1}^N \left(z_k - s(u_k) \right)^2 + \rho \int_{x_1}^{x_n} \left[s''(t) \right]^2 dt \quad (2)$$

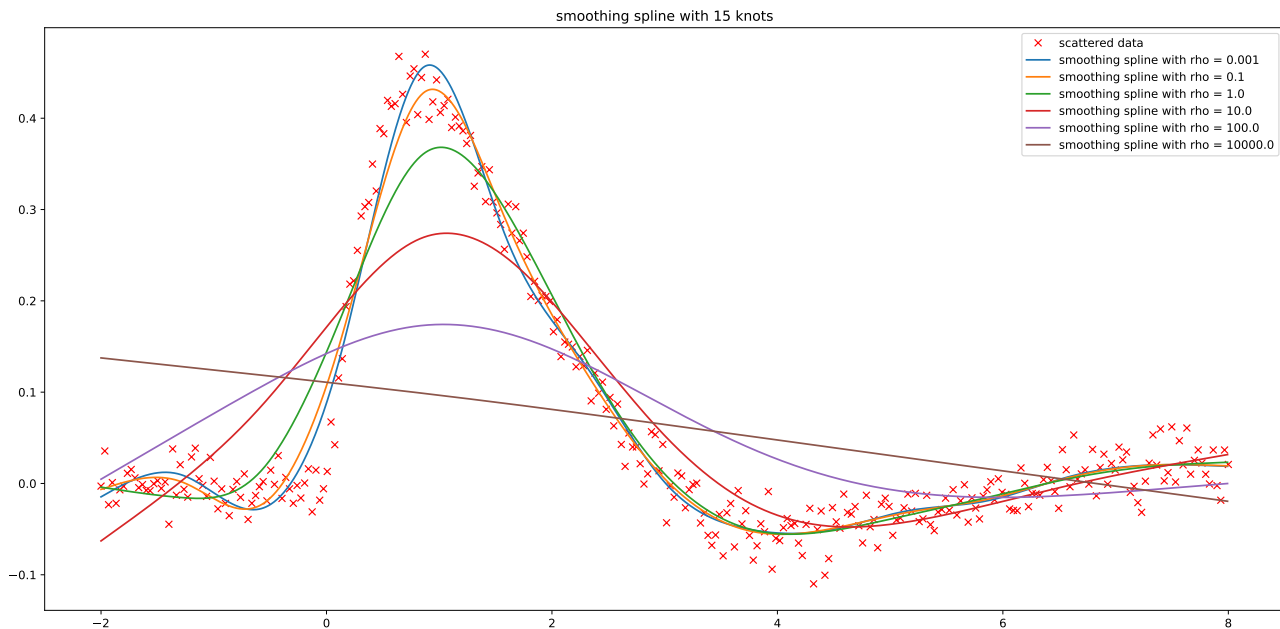
where $\rho \in \mathbb{R}^+$ is a smoothing parameter that controls the tradeoff between data fidelity and smoothness of the function. With reasonable assumptions, this minimization problem admits a unique solution $\hat{s} \in S[x_1, x_n]$ which is called a *smoothing spline*.

Exercise 1

Récupérer le fichier `data.txt` contenant les données (u_k, z_k) de la figure ci-dessous. Ces données seront ensuite récupérées avec la commande

```
(uk, zk) = np.loadtxt('data.txt')
```

Implémenter la méthode du cours (cas général) permettant de déterminer la spline de lissage pour différentes valeurs du paramètre ρ . On considérera le cas des splines uniformes (noeuds équidistants).



Le compte rendu de ce TP consistera en un fichier Python dont le nom sera `TP9_NOM1_NOM2.py`. L'exécution de ce script devra permettre de reproduire directement la figure ci-dessus avec les mêmes données numériques (nombre de noeuds de la spline et même valeurs de ρ).