Integrálny počet
Neurčitý integrál - 1.časť

Oľga Stašová

Ústav informatiky a matematiky
Fakulta elektrotechniky a informatiky
Slovenská technická univerzita

letný semester 2023/2024

Obsah prednášky

- **Primitívna funkcia a neurčitý integrál**
- **Všeobecné pravidlá integrovania funkcií**
- **Základné neurčité integrály**
- **Substitučná metóda**

Primitívna funkcia a neurčitý integrál

Primitívna funkcia a neurčitý integrál

- Funkcia $\mathbf{F(x)}$ sa nazýva **primitívnou funkciou** k funkcii $\mathbf{f(x)}$ na intervale $\langle \mathbf{a}, \mathbf{b} \rangle$, ak pre každé $\mathbf{x} \in \langle \mathbf{a}, \mathbf{b} \rangle$ platí

$$\mathbf{F}'(\mathbf{x}) = \mathbf{f}(\mathbf{x})$$

Primitívna funkcia a neurčitý integrál

- Funkcia $\mathbf{F}(\mathbf{x})$ sa nazýva **primitívnou funkciou** k funkcii $\mathbf{f}(\mathbf{x})$ na intervale $\langle \mathbf{a}, \mathbf{b} \rangle$, ak pre každé $\mathbf{x} \in \langle \mathbf{a}, \mathbf{b} \rangle$ platí

$$\mathbf{F}'(\mathbf{x}) = \mathbf{f}(\mathbf{x})$$

- Z definície vidíme, že **pojem primitívnej funkcie je opačný k pojmu derivácie**. Teda pri hľadaní primitívnej funkcie k funkcii $\mathbf{f}(\mathbf{x})$ si kladieme otázku:

  Ktorú funkciu musíme derivovať, aby výsledkom bola funkcia $\mathbf{f}(\mathbf{x})$?

Primitívna funkcia a neurčitý integrál

Príklad 1

Nájdite primitívnu funkciu k funkcii $\mathbf{f(x) = x^7}$.

Primitívna funkcia a neurčitý integrál

Príklad 1

Nájdite primitívnu funkciu k funkcii $\mathbf{f(x) = x^7}$.

Riešenie 1

Pri derivovaní $\mathbf{x^n}$ sa exponent znižuje o $\mathbf{1}$........$\mathbf{(x^n)' = nx^{n-1}}$, takže primitívna funkcia bude mať exponent o $\mathbf{1}$ vyšší ako funkcia $\mathbf{f(x)}$.

$$\mathbf{(x^8)' = 8x^7}$$

Primitívna funkcia a neurčitý integrál

Príklad 1

Nájdite primitívnu funkciu k funkcii $\mathbf{f(x) = x^7}$.

Riešenie 1

Pri derivovaní $\mathbf{x^n}$ sa exponent znižuje o $\mathbf{1}$........$\mathbf{(x^n)' = nx^{n-1}}$, takže primitívna funkcia bude mať exponent o $\mathbf{1}$ vyšší ako funkcia $\mathbf{f(x)}$.

$$\mathbf{(x^8)' = 8x^7}$$

Keďže $\mathbf{f(x) = x^7}$, tak musíme $\mathbf{x^8}$ vydeliť ešte konštantou $\mathbf{8}$.

$$\mathbf{\left(\frac{x^8}{8}\right)' = \frac{1}{8}(x^8)' = \frac{1}{8}8x^7 = x^7}$$

Primitívna funkcia k funkcii $\mathbf{f(x) = x^7}$ je funkcia $\mathbf{F(x) = \frac{x^8}{8}}$.

- Vo všeobecnosti platí, že **k danej funkcii existuje nekonečne veľa primitívnych funkcií**, ktoré sa navzájom líšia iba reálnou konštantou.

Primitívna funkcia a neurčitý integrál

- Vo všeobecnosti platí, že **k danej funkcii existuje nekonečne veľa primitívnych funkcií**, ktoré sa navzájom líšia iba reálnou konštantou.
- Ľubovoľnú primitívnu funkciu $\mathbf{F}(\mathbf{x})$ k funkcii $\mathbf{f} : \mathbf{I} \to \mathbf{R}$ na intervale $\mathbf{I}$ nazývame **neurčitým integrálom funkcie** $\mathbf{f}(\mathbf{x})$ na intervale $\mathbf{I}$ a označujeme

$$\int \mathbf{f}(\mathbf{x})\mathrm{d}\mathbf{x} = \mathbf{F}(\mathbf{x}) + \mathbf{C},$$

kde $\mathbf{x}$ v $\mathrm{d}\mathbf{x}$ označuje premennú, podľa ktorej sa integruje.

Primitívna funkcia a neurčitý integrál

- Vo všeobecnosti platí, že **k danej funkcii existuje nekonečne veľa primitívnych funkcií**, ktoré sa navzájom líšia iba reálnou konštantou.
- Ľubovoľnú primitívnu funkciu $\mathbf{F}(\mathbf{x})$ k funkcii $\mathbf{f} : \mathbf{I} \to \mathbf{R}$ na intervale $\mathbf{I}$ nazývame **neurčitým integrálom funkcie** $\mathbf{f}(\mathbf{x})$ na intervale $\mathbf{I}$ a označujeme
$$\int \mathbf{f}(\mathbf{x})\mathrm{d}\mathbf{x} = \mathbf{F}(\mathbf{x}) + \mathbf{C},$$
kde $\mathbf{x}$ v $\mathrm{d}\mathbf{x}$ označuje premennú, podľa ktorej sa integruje.
- Metódu, pomocou ktorej nájdeme k danej funkcii neurčitý integrál, nazývame **integrovanie**.

Všeobecné pravidlá integrovania funkcií

Všeobecné pravidlá integrovania funkcií

- Nasledujúce pravidlá integrovania

$$\begin{aligned}\int c\, f(x)\, \mathrm{d}x &= c \int f(x)\, \mathrm{d}x \\ \int (f(x) \pm g(x))\, \mathrm{d}x &= \int f(x)\, \mathrm{d}x \pm \int g(x)\, \mathrm{d}x\end{aligned}$$

- sú **dôsledkom pravidiel pre derivovanie funkcií**:

$$\begin{aligned}(c \cdot f(x))' &= c\, f'(x) \\ (f(x) \pm g(x))' &= f'(x) \pm g'(x)\end{aligned}$$

- a vyplýva z nich nasledujúci vzťah

$$\int (c_1\, f(x) \pm c_2\, g(x))\, \mathrm{d}x = c_1 \int f(x)\, \mathrm{d}x \pm c_2 \int g(x)\, \mathrm{d}x.$$

Základné neurčité integrály

Základné neurčité integrály

- **Integračné vzorce**:

1) $\int x^a \, \mathrm{d}x =$ $(x^a)' = ax^{a-1}$, kde $a \in \mathbf{R}$.

Základné neurčité integrály

- **Integračné vzorce**:

1) $\int x^a \, \mathrm{d}x =$ $(x^a)' = ax^{a-1}$, kde $a \in \mathbf{R}$.

1) $\int x^a \, \mathrm{d}x = \frac{x^{a+1}}{a+1} + C$, ak $a \in \mathbf{R} \setminus \{-1\}$.

Základné neurčité integrály

- **Integračné vzorce**:

1) $\int x^a \, \mathrm{d}x =$ $(x^a)' = ax^{a-1}$, kde $a \in \mathbf{R}$.

1) $\int x^a \, \mathrm{d}x = \frac{x^{a+1}}{a+1} + C$, ak $a \in \mathbf{R} \setminus \{-1\}$.

1) $\int x^7 \, \mathrm{d}x = \frac{x^8}{8} + C$,
$(\frac{x^8}{8})' = (\frac{1}{8}x^8)' = \frac{1}{8}(x^8)' = \frac{1}{8}8x^7 = x^7 \quad (C)' = 0.$

Základné neurčité integrály

- **Integračné vzorce**:

1) $\int x^a \, \mathrm{d}x =$ $(x^a)' = ax^{a-1}$, kde $a \in \mathbf{R}$.

1) $\int x^a \, \mathrm{d}x = \frac{x^{a+1}}{a+1} + C$, ak $a \in \mathbf{R} \setminus \{-1\}$.

1) $\int x^7 \, \mathrm{d}x = \frac{x^8}{8} + C$,
$(\frac{x^8}{8})' = (\frac{1}{8}x^8)' = \frac{1}{8}(x^8)' = \frac{1}{8}8x^7 = x^7 \quad (C)' = 0.$

2) $\int x^{-1} \, \mathrm{d}x = \int \frac{1}{x} \, \mathrm{d}x = \int \frac{\mathrm{d}x}{x} =$ Ktora funkcia má deriváciu $\frac{1}{x}$?

Základné neurčité integrály

- **Integračné vzorce**:

1) $\int x^a \, \mathrm{d}x =$ $\qquad$ $(x^a)' = ax^{a-1}$, kde $a \in \mathbf{R}$.

1) $\int x^a \, \mathrm{d}x = \frac{x^{a+1}}{a+1} + C$, ak $a \in \mathbf{R} \setminus \{-1\}$.

1) $\int x^7 \, \mathrm{d}x = \frac{x^8}{8} + C$,
$(\frac{x^8}{8})' = (\frac{1}{8}x^8)' = \frac{1}{8}(x^8)' = \frac{1}{8}8x^7 = x^7 \quad (C)' = 0.$

2) $\int x^{-1} \, \mathrm{d}x = \int \frac{1}{x} \, \mathrm{d}x = \int \frac{\mathrm{d}x}{x} =$ $\qquad$ Ktora funkcia má deriváciu $\frac{1}{x}$?

2) $\int \frac{1}{x} \, \mathrm{d}x = \ln|x| + C$.

Základné neurčité integrály

- **Integračné vzorce**:

1) $\int x^a \, \mathrm{d}x =$ $\quad (x^a)' = ax^{a-1}$, kde $a \in \mathbf{R}$.

1) $\int x^a \, \mathrm{d}x = \frac{x^{a+1}}{a+1} + C$, ak $a \in \mathbf{R} \setminus \{-1\}$.

1) $\int x^7 \, \mathrm{d}x = \frac{x^8}{8} + C$,
$(\frac{x^8}{8})' = (\frac{1}{8}x^8)' = \frac{1}{8}(x^8)' = \frac{1}{8}8x^7 = x^7 \quad (C)' = 0.$

2) $\int x^{-1} \, \mathrm{d}x = \int \frac{1}{x} \, \mathrm{d}x = \int \frac{\mathrm{d}x}{x} =$ $\quad$ Ktora funkcia má deriváciu $\frac{1}{x}$?

2) $\int \frac{1}{x} \, \mathrm{d}x = \ln|x| + C.$

3) $\int e^x \, \mathrm{d}x =$ $\quad$ Ktora funkcia má deriváciu e^x?

Základné neurčité integrály

- **Integračné vzorce**:

1) $\int x^a \, \mathrm{d}x =$ $(x^a)' = ax^{a-1}$, kde $a \in \mathbf{R}$.

1) $\int x^a \, \mathrm{d}x = \frac{x^{a+1}}{a+1} + C$, ak $a \in \mathbf{R} \setminus \{-1\}$.

1) $\int x^7 \, \mathrm{d}x = \frac{x^8}{8} + C$,
$(\frac{x^8}{8})' = (\frac{1}{8}x^8)' = \frac{1}{8}(x^8)' = \frac{1}{8}8x^7 = x^7 \quad (C)' = 0.$

2) $\int x^{-1} \, \mathrm{d}x = \int \frac{1}{x} \, \mathrm{d}x = \int \frac{\mathrm{d}x}{x} =$ Ktora funkcia má deriváciu $\frac{1}{x}$?

2) $\int \frac{1}{x} \, \mathrm{d}x = \ln|x| + C.$

3) $\int e^x \, \mathrm{d}x =$ Ktora funkcia má deriváciu e^x?

3) $\int e^x \, \mathrm{d}x = e^x + C.$

Základné neurčité integrály

- **Integračné vzorce**:

1) $\int x^a \, \mathrm{d}x =$ $\qquad (x^a)' = ax^{a-1}$, kde $a \in \mathbf{R}$.

1) $\int x^a \, \mathrm{d}x = \frac{x^{a+1}}{a+1} + C$, ak $a \in \mathbf{R} \setminus \{-1\}$.

1) $\int x^7 \, \mathrm{d}x = \frac{x^8}{8} + C$,
$(\frac{x^8}{8})' = (\frac{1}{8}x^8)' = \frac{1}{8}(x^8)' = \frac{1}{8}8x^7 = x^7 \quad (C)' = 0.$

2) $\int x^{-1} \, \mathrm{d}x = \int \frac{1}{x} \, \mathrm{d}x = \int \frac{\mathrm{d}x}{x} =$ $\qquad$ Ktora funkcia má deriváciu $\frac{1}{x}$?

2) $\int \frac{1}{x} \, \mathrm{d}x = \ln|x| + C$.

3) $\int e^x \, \mathrm{d}x =$ $\qquad$ Ktora funkcia má deriváciu e^x?

3) $\int e^x \, \mathrm{d}x = e^x + C$.

4) $\int a^x \, \mathrm{d}x =$ $\qquad (a^x)' = a^x \ln a$, kde $a > 0$, $a \neq 1$.

Základné neurčité integrály

- **Integračné vzorce**:

1) $\int x^a \, \mathrm{d}x =$ $\qquad (x^a)' = a x^{a-1}$, kde $a \in \mathbf{R}$.

1) $\int x^a \, \mathrm{d}x = \frac{x^{a+1}}{a+1} + C$, ak $a \in \mathbf{R} \setminus \{-1\}$.

1) $\int x^7 \, \mathrm{d}x = \frac{x^8}{8} + C$,
$(\frac{x^8}{8})' = (\frac{1}{8} x^8)' = \frac{1}{8}(x^8)' = \frac{1}{8} 8x^7 = x^7 \quad (C)' = 0.$

2) $\int x^{-1} \, \mathrm{d}x = \int \frac{1}{x} \, \mathrm{d}x = \int \frac{\mathrm{d}x}{x} =$ $\qquad$ Ktora funkcia má deriváciu $\frac{1}{x}$?

2) $\int \frac{1}{x} \, \mathrm{d}x = \ln |x| + C.$

3) $\int e^x \, \mathrm{d}x =$ $\qquad$ Ktora funkcia má deriváciu e^x?

3) $\int e^x \, \mathrm{d}x = e^x + C.$

4) $\int a^x \, \mathrm{d}x =$ $\qquad (a^x)' = a^x \ln a$, kde $a > 0$, $a \neq 1$.

4) $\int a^x \, \mathrm{d}x = \frac{a^x}{\ln a} + C$, ak $a \in (0,1) \cup (1, \infty)$.

Základné neurčité integrály

5a) $\int \sin x \, \mathrm{d}x =$ $\qquad$ $(\cos x)' = -\sin x.$

Základné neurčité integrály

5a) $\int \sin x \, \mathrm{d}x =$ $\qquad$ $(\cos x)' = -\sin x.$

5a) $\int \sin x \, \mathrm{d}x = -\cos x + C.$

Základné neurčité integrály

5a) $\int \sin x \, \mathrm{d}x =$ $\qquad (\cos x)' = -\sin x.$

5a) $\int \sin x \, \mathrm{d}x = -\cos x + C.$

5b) $\int \sin(ax) \, \mathrm{d}x =$ $\qquad (\cos(ax))' = a(-\sin(ax)).$

Základné neurčité integrály

5a) $\int \sin x \, \mathrm{d}x =$ $\qquad (\cos x)' = -\sin x.$

5a) $\int \sin x \, \mathrm{d}x = -\cos x + C.$

5b) $\int \sin(ax) \, \mathrm{d}x =$ $\qquad (\cos(ax))' = a(-\sin(ax)).$

5b) $\int \sin(ax) \, \mathrm{d}x = \dfrac{-\cos(ax)}{a} + C.$

Základné neurčité integrály

5a) $\int \sin x \, \mathrm{d}x =$ $\qquad$ $(\cos x)' = -\sin x.$

5a) $\int \sin x \, \mathrm{d}x = -\cos x + C.$

5b) $\int \sin(ax) \, \mathrm{d}x =$ $\qquad$ $(\cos(ax))' = a(-\sin(ax)).$

5b) $\int \sin(ax) \, \mathrm{d}x = \dfrac{-\cos(ax)}{a} + C.$

6a) $\int \cos x \, \mathrm{d}x =$ $\qquad$ $(\sin x)' = \cos x.$

Základné neurčité integrály

5a) $\int \sin x \,\mathrm{d}x =$ $\qquad (\cos x)' = -\sin x.$

5a) $\int \sin x \,\mathrm{d}x = -\cos x + C.$

5b) $\int \sin(ax) \,\mathrm{d}x =$ $\qquad (\cos(ax))' = a(-\sin(ax)).$

5b) $\int \sin(ax) \,\mathrm{d}x = \dfrac{-\cos(ax)}{a} + C.$

6a) $\int \cos x \,\mathrm{d}x =$ $\qquad (\sin x)' = \cos x.$

6a) $\int \cos x \,\mathrm{d}x = \sin x + C.$

Základné neurčité integrály

5a) $\int \sin x \, \mathrm{d}x =$ $(\cos x)' = -\sin x.$

5a) $\int \sin x \, \mathrm{d}x = -\cos x + C.$

5b) $\int \sin(ax) \, \mathrm{d}x =$ $(\cos(ax))' = a(-\sin(ax)).$

5b) $\int \sin(ax) \, \mathrm{d}x = \dfrac{-\cos(ax)}{a} + C.$

6a) $\int \cos x \, \mathrm{d}x =$ $(\sin x)' = \cos x.$

6a) $\int \cos x \, \mathrm{d}x = \sin x + C.$

6b) $\int \cos(ax) \, \mathrm{d}x =$ $(\sin(ax))' = a \cos(ax).$

Základné neurčité integrály

5a) $\int \sin x \,\mathrm{d}x =$ $\qquad (\cos x)' = -\sin x.$

5a) $\int \sin x \,\mathrm{d}x = -\cos x + C.$

5b) $\int \sin(ax) \,\mathrm{d}x =$ $\qquad (\cos(ax))' = a(-\sin(ax)).$

5b) $\int \sin(ax) \,\mathrm{d}x = \dfrac{-\cos(ax)}{a} + C.$

6a) $\int \cos x \,\mathrm{d}x =$ $\qquad (\sin x)' = \cos x.$

6a) $\int \cos x \,\mathrm{d}x = \sin x + C.$

6b) $\int \cos(ax) \,\mathrm{d}x =$ $\qquad (\sin(ax))' = a\ \cos(ax).$

6b) $\int \cos(ax) \,\mathrm{d}x = \dfrac{\sin(ax)}{a} + C.$

Základné neurčité integrály

7) $\int \frac{1}{\cos^2 x}\,\mathrm{d}x =$ Ktora funkcia má deriváciu $\frac{1}{\cos^2 x}$?

Základné neurčité integrály

7) $\int \frac{1}{\cos^2 x}\,\mathrm{d}x =$ Ktora funkcia má deriváciu $\frac{1}{\cos^2 x}$?

7) $\int \frac{1}{\cos^2 x}\,\mathrm{d}x = \tan x + C$.

Základné neurčité integrály

7) $\int \frac{1}{\cos^2 x}\,\mathrm{d}x =$ Ktora funkcia má deriváciu $\frac{1}{\cos^2 x}$?

7) $\int \frac{1}{\cos^2 x}\,\mathrm{d}x = \tan x + C.$

8) $\int \frac{1}{\sin^2 x}\,\mathrm{d}x =$ Ktora funkcia má deriváciu $\frac{1}{\sin^2 x}$?

Základné neurčité integrály

7) $\int \frac{1}{\cos^2 x}\,\mathrm{d}x =$ Ktora funkcia má deriváciu $\frac{1}{\cos^2 x}$?

7) $\int \frac{1}{\cos^2 x}\,\mathrm{d}x = \tan x + C.$

8) $\int \frac{1}{\sin^2 x}\,\mathrm{d}x =$ Ktora funkcia má deriváciu $\frac{1}{\sin^2 x}$?

8) $\int \frac{1}{\sin^2 x}\,\mathrm{d}x = -\operatorname{cotg} x + C.$

Základné neurčité integrály

9a) $\int \frac{1}{1+x^2}\,\mathrm{d}x =$ Ktora funkcia má deriváciu $\frac{1}{1+x^2}$?

Základné neurčité integrály

9a) $\int \frac{1}{1+x^2}\,\mathrm{d}x =$ Ktora funkcia má deriváciu $\frac{1}{1+x^2}$?

9a) $\int \frac{1}{1+x^2}\,\mathrm{d}x = \begin{cases} \operatorname{arctg} x + C, \\ -\operatorname{arccotg} x + C. \end{cases}$

Základné neurčité integrály

9a) $\int \frac{1}{1+x^2}\,\mathrm{d}x =$ Ktora funkcia má deriváciu $\frac{1}{1+x^2}$?

9a) $\int \frac{1}{1+x^2}\,\mathrm{d}x = \begin{cases} \operatorname{arctg} x + C, \\ -\operatorname{arccotg} x + C. \end{cases}$

9b) $\int \frac{1}{a^2+x^2}\,\mathrm{d}x = \frac{1}{a}\operatorname{arctg}\frac{x}{a} + C.$

Základné neurčité integrály

9a) $\int \frac{1}{1+x^2}\,\mathrm{d}x =$ Ktora funkcia má deriváciu $\frac{1}{1+x^2}$?

9a) $\int \frac{1}{1+x^2}\,\mathrm{d}x = \begin{cases} \operatorname{arctg} x + C, \\ -\operatorname{arccotg} x + C. \end{cases}$

9b) $\int \frac{1}{a^2+x^2}\,\mathrm{d}x = \frac{1}{a}\operatorname{arctg}\frac{x}{a} + C.$

10a) $\int \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{1-x^2}} =$ Ktora funkcia má deriváciu $\frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{1-x^2}}$?

Základné neurčité integrály

9a) $\int \frac{1}{1+x^2}\,\mathrm{d}x =$ Ktora funkcia má deriváciu $\frac{1}{1+x^2}$?

9a) $\int \frac{1}{1+x^2}\,\mathrm{d}x = \begin{cases} \operatorname{arctg} x + C, \\ -\operatorname{arccotg} x + C. \end{cases}$

9b) $\int \frac{1}{a^2+x^2}\,\mathrm{d}x = \frac{1}{a}\operatorname{arctg}\frac{x}{a} + C.$

10a) $\int \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{1-x^2}} =$ Ktora funkcia má deriváciu $\frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{1-x^2}}$?

10a) $\int \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{1-x^2}} = \begin{cases} \arcsin x + C \\ -\arccos x + C. \end{cases}$

Základné neurčité integrály

9a) $\int \frac{1}{1+x^2}\,\mathrm{d}x =$ Ktora funkcia má deriváciu $\frac{1}{1+x^2}$?

9a) $\int \frac{1}{1+x^2}\,\mathrm{d}x = \begin{cases} \operatorname{arctg} x + C, \\ -\operatorname{arccotg} x + C. \end{cases}$

9b) $\int \frac{1}{a^2+x^2}\,\mathrm{d}x = \frac{1}{a}\operatorname{arctg}\frac{x}{a} + C.$

10a) $\int \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{1-x^2}} =$ Ktora funkcia má deriváciu $\frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{1-x^2}}$?

10a) $\int \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{1-x^2}} = \begin{cases} \arcsin x + C \\ -\arccos x + C. \end{cases}$

10b) $\int \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{a^2-x^2}} = \arcsin\frac{x}{a} + C.$ **Tu nie je pred $\arcsin$ zlomok $\frac{1}{a}$ ako pred arctg**. Pozri **9b)**.

Základné neurčité integrály

11) $\int \frac{\mathrm{d}x}{1-x^2} = \frac{1}{2}\ln\left|\frac{1+x}{1-x}\right| + C.$

12) $\int \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{x^2+a}} = \ln\left|x + \sqrt{x^2+a}\right| + C.$

13) $\int \frac{f'(x)}{f(x)}\,\mathrm{d}x = \ln|f(x)| + C.$ **dôležitý vzorec**

Základné neurčité integrály - riešené príklady

$\int \mathbf{x^a}\,\mathrm{d}\mathbf{x} = \frac{\mathbf{x^{a+1}}}{\mathbf{a+1}} + \mathbf{C}$, **ak** $\mathbf{a} \in \mathbf{R} \setminus \{-\mathbf{1}\}$
$\int \mathbf{x^{-1}}\,\mathrm{d}\mathbf{x} = \int \frac{\mathbf{1}}{\mathbf{x}}\,\mathrm{d}\mathbf{x} = \ln|\mathbf{x}| + \mathbf{C}$.

Vypočítajte integrály:

a) $\int x^{11}\,\mathrm{d}x =$

b) $\int \frac{1}{x^2}\,\mathrm{d}x =$

c) $\int \sqrt[5]{x^7}\,\mathrm{d}x =$

d) $\int \frac{1}{\sqrt[5]{x^2}}\,\mathrm{d}x =$

Základné neurčité integrály - riešené príklady

$\int \mathbf{x^a} \, \mathrm{d}\mathbf{x} = \frac{\mathbf{x^{a+1}}}{\mathbf{a+1}} + \mathbf{C}$, **ak a** $\in$ **R** $\setminus \{-\mathbf{1}\}$
$\int \mathbf{x}^{-\mathbf{1}} \, \mathrm{d}\mathbf{x} = \int \frac{\mathbf{1}}{\mathbf{x}} \, \mathrm{d}\mathbf{x} = \ln |\mathbf{x}| + \mathbf{C}$.

Vypočítajte integrály:

a) $\int x^{11} \, \mathrm{d}x =$

b) $\int \frac{1}{x^2} \, \mathrm{d}x = \int x^{-2} \, \mathrm{d}x =$

c) $\int \sqrt[5]{x^7} \, \mathrm{d}x = \int x^{\frac{7}{5}} \, \mathrm{d}x =$

d) $\int \frac{1}{\sqrt[5]{x^2}} \, \mathrm{d}x = \int \frac{1}{x^{\frac{2}{5}}} \, \mathrm{d}x = \int x^{\frac{-2}{5}} \, \mathrm{d}x =$

Základné neurčité integrály - riešené príklady

$\int \mathbf{x^a}\,\mathrm{d}\mathbf{x} = \frac{\mathbf{x^{a+1}}}{\mathbf{a+1}} + \mathbf{C}$, **ak** $\mathbf{a} \in \mathbf{R} \setminus \{-\mathbf{1}\}$

$\int \mathbf{x^{-1}}\,\mathrm{d}\mathbf{x} = \int \frac{\mathbf{1}}{\mathbf{x}}\,\mathrm{d}\mathbf{x} = \ln|\mathbf{x}| + \mathbf{C}.$

Vypočítajte integrály:

a) $\int x^{11}\,\mathrm{d}x = \dfrac{x^{12}}{12} + C$

b) $\int \frac{1}{x^2}\,\mathrm{d}x = \int x^{-2}\,\mathrm{d}x = \dfrac{x^{-1}}{-1} + C = -x^{-1} + C = \dfrac{-1}{x} + C$

c) $\int \sqrt[5]{x^7}\,\mathrm{d}x = \int x^{\frac{7}{5}}\,\mathrm{d}x = \dfrac{x^{\frac{12}{5}}}{\frac{12}{5}} + C = \dfrac{5}{12}x^{\frac{12}{5}} + C$

d) $\int \dfrac{1}{\sqrt[5]{x^2}}\,\mathrm{d}x = \int \dfrac{1}{x^{\frac{2}{5}}} = \int x^{\frac{-2}{5}}\,\mathrm{d}x = \dfrac{x^{\frac{3}{5}}}{\frac{3}{5}} + C = \dfrac{5}{3}x^{\frac{3}{5}} + C$

Základné neurčité integrály - riešené príklady

Príklad 2

Vypočítame integrály:

a) $\int (6x^5 - 2x^3 + 11x^2 + 3)\,\mathrm{d}x$

b) $\int \frac{3x^2+4x+2}{5x}\,\mathrm{d}x$

c) $\int (3\sin x - 2\cos x)\,\mathrm{d}x$

d) $\int \tan^2 x\,\mathrm{d}x$

e) $\int \operatorname{cotg} x\,\mathrm{d}x$

f) $\int (2^x - 3^{1-x})\,\mathrm{d}x$

g) $\int \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{5x^2-10}}$

h) $\int \frac{\mathrm{d}x}{4+4x^2}$

Základné neurčité integrály - riešené príklady

Riešenie:

a) Použijeme: $\int (\mathbf{c_1}\,\mathbf{f}(\mathbf{x}) \pm \mathbf{c_2}\,\mathbf{g}(\mathbf{x}))\,\mathrm{d}\mathbf{x} = \mathbf{c_1} \int \mathbf{f}(\mathbf{x})\,\mathrm{d}\mathbf{x} \pm \mathbf{c_2} \int \mathbf{g}(\mathbf{x})\,\mathrm{d}\mathbf{x}.$,

$$\begin{aligned} \int (6x^5 &- 2x^3 + 11x^2 + 3)\,\mathrm{d}x = \\ &= 6\int x^5\,\mathrm{d}x - 2\int x^3\,\mathrm{d}x + 11\int x^2\,\mathrm{d}x + 3\int x^0\,\mathrm{d}x = \\ &= 6\frac{x^6}{6} - 2\frac{x^4}{4} + 11\frac{x^3}{3} + 3\frac{x^1}{1} = x^6 - \frac{x^4}{2} + \frac{11}{3}x^3 + 3x + C. \end{aligned}$$

Základné neurčité integrály - riešené príklady

Riešenie:

a) Použijeme: $\int (\mathbf{c_1}\,\mathbf{f}(\mathbf{x}) \pm \mathbf{c_2}\,\mathbf{g}(\mathbf{x}))\,\mathrm{d}\mathbf{x} = \mathbf{c_1}\int \mathbf{f}(\mathbf{x})\,\mathrm{d}\mathbf{x} \pm \mathbf{c_2}\int \mathbf{g}(\mathbf{x})\,\mathrm{d}\mathbf{x}.$,

$$\begin{aligned}\int (6x^5 &- 2x^3 + 11x^2 + 3)\,\mathrm{d}x = \\ &= 6\int x^5\,\mathrm{d}x - 2\int x^3\,\mathrm{d}x + 11\int x^2\,\mathrm{d}x + 3\int x^0\,\mathrm{d}x = \\ &= 6\frac{x^6}{6} - 2\frac{x^4}{4} + 11\frac{x^3}{3} + 3\frac{x^1}{1} = x^6 - \frac{x^4}{2} + \frac{11}{3}x^3 + 3x + C.\end{aligned}$$

b) Použijeme: $\dfrac{\mathbf{A}+\mathbf{B}+\mathbf{C}}{\mathbf{D}} = \dfrac{\mathbf{A}}{\mathbf{D}} + \dfrac{\mathbf{B}}{\mathbf{D}} + \dfrac{\mathbf{C}}{\mathbf{D}}$.

$$\begin{aligned}\int \frac{3x^2+4x+2}{5x}\,\mathrm{d}x &= \frac{3}{5}\int x\,\mathrm{d}x + \frac{4}{5}\int x^0\,\mathrm{d}x + \frac{2}{5}\int \frac{1}{x}\,\mathrm{d}x = \\ &= \frac{3}{10}x^2 + \frac{4}{5}x + \frac{2}{5}\ln|x| + C.\end{aligned}$$

Základné neurčité integrály - riešené príklady

Riešenie:

c)

$$\int (3\sin x - 2\cos x)\,\mathrm{d}x = -3\cos x - 2\sin x + C.$$

Riešenie:

c)

$$\int (3\sin x - 2\cos x)\,\mathrm{d}x = -3\cos x - 2\sin x + C.$$

d) Použijeme: $\sin^{\mathbf{2}}\mathbf{x} + \cos^{\mathbf{2}}\mathbf{x} = \mathbf{1} \Rightarrow \sin^{\mathbf{2}}\mathbf{x} = \mathbf{1} - \cos^{\mathbf{2}}\mathbf{x}.$

$\cos^{\mathbf{2}}\mathbf{x} = \mathbf{1} - \sin^{\mathbf{2}}\mathbf{x}.$

$$\int \tan^2 x\,\mathrm{d}x = \int \frac{\sin^2 x}{\cos^2 x}\,\mathrm{d}x =$$

Riešenie:

c)

$$\int (3\sin x - 2\cos x)\,\mathrm{d}x = -3\cos x - 2\sin x + C.$$

d) Použijeme: $\mathbf{\sin^2 x + \cos^2 x = 1 \Rightarrow \sin^2 x = 1 - \cos^2 x}$.

$\mathbf{\cos^2 x = 1 - \sin^2 x}$.

$$\begin{aligned}
\int \tan^2 x\,\mathrm{d}x &= \int \frac{\sin^2 x}{\cos^2 x}\,\mathrm{d}x = \int \frac{1-\cos^2 x}{\cos^2 x}\,\mathrm{d}x = \\
&= \int \left(\frac{1}{\cos^2 x} - \frac{\cos^2 x}{\cos^2 x}\right)\mathrm{d}x = \int \left(\frac{1}{\cos^2 x} - 1\right)\mathrm{d}x = \\
&= \tan x - x + C.
\end{aligned}$$

Základné neurčité integrály - riešené príklady

Riešenie:

c)

$$\int (3\sin x - 2\cos x)\,\mathrm{d}x = -3\cos x - 2\sin x + C.$$

d) Použijeme: $\sin^2 x + \cos^2 x = 1 \Rightarrow \sin^2 x = 1 - \cos^2 x.$
$\cos^2 x = 1 - \sin^2 x.$

$$\begin{aligned}\int \tan^2 x\,\mathrm{d}x &= \int \frac{\sin^2 x}{\cos^2 x}\,\mathrm{d}x = \int \frac{1-\cos^2 x}{\cos^2 x}\,\mathrm{d}x = \\ &= \int \left(\frac{1}{\cos^2 x} - \frac{\cos^2 x}{\cos^2 x}\right)\mathrm{d}x = \int \left(\frac{1}{\cos^2 x} - 1\right)\mathrm{d}x = \\ &= \tan x - x + C.\end{aligned}$$

e)

$$\int \operatorname{cotg} x\,\mathrm{d}x = \int \frac{\cos x}{\sin x}\,\mathrm{d}x = \int \frac{(\sin x)'}{\sin x}\,\mathrm{d}x = \ln|\sin x| + C.$$

Základné neurčité integrály - riešené príklady

Riešenie:

f) Použijeme: $\mathbf{3^{1-x} = 3^1 3^{-x} = 3\frac{1}{3^x} = 3\frac{1^x}{3^x} = 3\left(\frac{1}{3}\right)^x}$.

$$\int (2^x - 3^{1-x})\,\mathrm{d}x = \int 2^x\,\mathrm{d}x - 3\int \left(\frac{1}{3}\right)^x \mathrm{d}x = \frac{2^x}{\ln 2} - \frac{3}{\ln\frac{1}{3}}\left(\frac{1}{3}\right)^x + C$$

$$= \frac{2^x}{\ln 2} + \frac{3}{\ln 3}\left(\frac{1}{3}\right)^x + C.$$

Použili sme: $\ln\frac{\mathbf{1}}{\mathbf{3}} = \ln\mathbf{1} - \ln\mathbf{3} = \mathbf{0} - \ln\mathbf{3}$.

Riešenie:

g) Použijeme: $\sqrt{\mathbf{5x^2-10}} = \sqrt{\mathbf{5(x^2-2)}} = \sqrt{\mathbf{5}}\sqrt{\mathbf{x^2-2}}$.

$$\int \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{5x^2-10}} = \frac{1}{\sqrt{5}}\int \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{x^2-2}} = \frac{1}{\sqrt{5}} \ln\left|x+\sqrt{x^2-2}\right| + C.$$

Základné neurčité integrály - riešené príklady

Riešenie:

g) Použijeme: $\sqrt{\mathbf{5x^2 - 10}} = \sqrt{\mathbf{5(x^2 - 2)}} = \sqrt{\mathbf{5}}\sqrt{\mathbf{x^2 - 2}}$.

$$\int \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{5x^2 - 10}} = \frac{1}{\sqrt{5}} \int \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{x^2 - 2}} = \frac{1}{\sqrt{5}} \ln \left| x + \sqrt{x^2 - 2} \right| + C.$$

h)

$$\int \frac{\mathrm{d}x}{4 + 4x^2} = \frac{1}{4} \int \frac{\mathrm{d}x}{1 + x^2} = \frac{1}{4} \operatorname{arctg} x + C.$$

Základné neurčité integrály - na prednáške alebo na domácu úlohu

Príklad 3

Vypočítajte zadané integrály:

a) $\int (x^2+1)\,\mathrm{d}x$

b) $\int \frac{(x^2+1)^2}{x^3}\,\mathrm{d}x = \int \frac{x^4+2x^2+1}{x^3}\,\mathrm{d}x =$

c) $\int \tan x\,\mathrm{d}x$

d) $\int \operatorname{cotg}^2 x\,\mathrm{d}x$

e) $\int e^x \left(1-\frac{e^{-x}}{x^2}\right)\,\mathrm{d}x = \int \left(e^x - \frac{1}{x^2}\right)\,\mathrm{d}x$

f) $\int \left(\sqrt{x\sqrt{x\sqrt{x}}} + \frac{1}{\sqrt{x}}\right)\,\mathrm{d}x = \int \left(x^{\frac{7}{8}} + x^{-\frac{1}{2}}\right)\,\mathrm{d}x$

g) $\int \frac{\mathrm{d}x}{x^2+9}$

h) $\int \frac{\mathrm{d}x}{\sin^2(x)\cos^2(x)} = \int \frac{\sin^2(x)+\cos^2(x)}{\sin^2(x)\cos^2(x)}\,\mathrm{d}x$

i) $\int 3^x \cdot 5^{2x}\mathrm{d}x = \int 3^x \cdot 25^x\mathrm{d}x = \int 75^x\mathrm{d}x =$

Substitučná metóda

Substitučná metóda

Táto metóda je odvodená od vzťahu pre deriváciu zloženej funkcie a jej princíp je v nasledujúcom tvrdení:

Substitučná metóda

Táto metóda je odvodená od vzťahu pre deriváciu zloženej funkcie a jej princíp je v nasledujúcom tvrdení:

Nech $\mathbf{F}$ *je primitívna funkcia k funkcii* $\mathbf{f}$*.*
Nech funkcia $\varphi(\mathbf{x})$ *je tá časť funkcie* $\mathbf{f}(\mathbf{x})$, *ktorú* **substituujeme** *(nahrádzame) premennou* $\mathbf{t}$*. Potom platí:*

$$\int f(\varphi(x)) \cdot \varphi^{'}(x)\,\mathrm{d}x = F(\varphi(x)) + C.$$

Substitučná metóda

Nech $\mathbf{F}$ *je primitívna funkcia k funkcii* $\mathbf{f}$*.*
Nech funkcia $\varphi(\mathbf{x})$ *je tá časť funkcie* $\mathbf{f}(\mathbf{x})$*, ktorú* **substituujeme** *(nahrádzame) premennou* $\mathbf{t}$*. Potom platí:*

$$\int f(\varphi(x)) \cdot \varphi^{'}(x)\,\mathrm{d}x = F(\varphi(x)) + C.$$

$$\begin{aligned} t &= \varphi(x) \\ t^{'}\,\mathrm{d}t &= \varphi^{'}(x)\,\mathrm{d}x \\ 1\,\mathrm{d}t &= \varphi^{'}(x)\,\mathrm{d}x \\ \mathrm{d}t &= \varphi^{'}(x)\,\mathrm{d}x \end{aligned}$$

$$\int f(x)\,\mathrm{d}x = \int f(\varphi(x)) \cdot \varphi^{'}(x)\,\mathrm{d}x = \int f(t)\,\mathrm{d}t = F(t) + C = F(\varphi(x)) + C.$$

Substitučná metóda sa používa v príkladoch, kde máme okrem zložitého **výrazu** (**ktorý chceme substituovať** = nahradiť premennou $\mathbf{t}$) **aj deriváciu tohto** zložitého **výrazu**.

Substitučná metóda - riešené príklady

Príklad 4

Vypočítame integrály:

a) $\int \frac{\mathrm{d}x}{3x+7}$

b) $\int (5-7x)^{21}\,\mathrm{d}x$

c) $\int \cos 2x\,\mathrm{d}x$

d) $\int \frac{\mathrm{d}x}{4+x^2}$

e) $\int \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{9-x^2}}$

f) $\int \cos^4 x \sin x\,\mathrm{d}x$

g) $\int \frac{\mathrm{d}x}{x \ln x}$

h) $\int 3x\sqrt{x^2+6}\,\mathrm{d}x$

Riešenie:

a)

$$\int \frac{\mathrm{d}x}{3x+7} = \left\{ \begin{array}{lcl} t = 3x+7 & & \\ \mathrm{d}t = 3\mathrm{d}x & \longrightarrow & \mathrm{d}x = \frac{\mathrm{d}t}{3} \\ \mathbf{A} = \mathbf{3B} & \longrightarrow & \mathbf{B} = \frac{\mathbf{A}}{\mathbf{3}} \end{array} \right\} =$$

$$= \int \frac{\mathrm{d}t}{3t} = \frac{1}{3}\int \frac{\mathrm{d}t}{t} = \frac{1}{3}\ln|t| = \frac{1}{3}\ln|3x+7| + C.$$

Dôležité: Keď po zintegrovaní dostanete výsledok s premennou $\mathbf{t}$, musíte ešte urobiť **spätnú substitúciu**, t.j. za každé $\mathbf{t}$ vo výsledku dosadiť výraz (s premennou $\mathbf{x}$), ktorý bol na začiatku riešenia príkladu nahradený premennou $\mathbf{t}$.)

Substitučná metóda - riešené príklady

Riešenie:

b)

$$
\begin{aligned}
\int (5-7x)^{21}\,\mathrm{d}x &= \left\{ \begin{array}{lll} t = 5-7x & & \\ \mathrm{d}t = -7\mathrm{d}x & \longrightarrow & \mathrm{d}x = \frac{\mathrm{d}t}{-7} \end{array} \right\} = \\
&= \int \frac{t^{21}\mathrm{d}t}{-7} = -\frac{1}{7}\int t^{21}\mathrm{d}t = -\frac{1}{7}\frac{t^{22}}{22} = \\
&= -\frac{(5-7x)^{22}}{154} + C.
\end{aligned}
$$

Substitučná metóda - riešené príklady

Riešenie:

c)

$$\begin{aligned}
\int \cos 2x \, \mathrm{d}x &= \left\{ \begin{array}{lcl} t = 2x & & \\ \mathrm{d}t = 2\mathrm{d}x & \longrightarrow & \mathrm{d}x = \frac{\mathrm{d}t}{2} \end{array} \right\} = \\
&= \int \frac{\cos t \, \mathrm{d}t}{2} = \frac{1}{2} \int \cos t \, \mathrm{d}t = \frac{1}{2} \sin t = \\
&= \frac{1}{2} \sin 2x + C = \sin x \cos x + C.
\end{aligned}$$

Substitučná metóda - riešené príklady

Riešenie:

d)

$$
\begin{aligned}
\int \frac{\mathrm{d}x}{4+x^2} &= \left\{ \frac{1}{4+x^2} = \frac{1}{4(1+\frac{x^2}{4})} = \frac{1}{4}\cdot\frac{1}{1+\left(\frac{x}{2}\right)^2} \right\} = \\
&= \frac{1}{4}\int \frac{\mathrm{d}x}{1+\left(\frac{x}{2}\right)^2} \left\{ \begin{array}{lcr} t = \frac{x}{2} & & \\ \mathrm{d}t = \frac{1}{2}\mathrm{d}x & \longrightarrow & \mathrm{d}x = 2\mathrm{d}t \end{array} \right\} = \\
&= \frac{1}{4}\int \frac{2\mathrm{d}t}{1+t^2} = \frac{2}{4}\operatorname{arctg} t + C = \\
&= \frac{1}{2}\operatorname{arctg}\frac{x}{2} + C.
\end{aligned}
$$

Substitučná metóda - riešené príklady

Riešenie:

e)

$$\begin{aligned}
\int \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{9-x^2}} &= \left\{ \frac{1}{\sqrt{9-x^2}} = \frac{1}{\sqrt{9(1-\frac{x^2}{9})}} = \frac{1}{3}\cdot\frac{1}{\sqrt{1-\left(\frac{x}{3}\right)^2}} \right\} = \\
&= \frac{1}{3}\int \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{1-\left(\frac{x}{3}\right)^2}} = \left\{ \begin{array}{lcl} t = \frac{x}{3} & & \\ \mathrm{d}t = \frac{1}{3}\mathrm{d}x & \longrightarrow & \mathrm{d}x = 3\mathrm{d}t \end{array} \right\} \\
&= \frac{1}{3}\int \frac{3\mathrm{d}t}{\sqrt{1-t^2}} = \frac{3}{3}\int \frac{\mathrm{d}t}{\sqrt{1-t^2}} = \\
&= \arcsin t + C = \arcsin \frac{x}{3} + C.
\end{aligned}$$

Substitučná metóda - zle zvolená substitúcia

Riešenie: Dobre zvolená substitúcia = po nahradení výrazu pomocou premennej t a úpravách sa tam už nevyskytuje žiadne x.

f)

$$\int \cos^4 x \sin x \, \mathrm{d}x =$$

Substitučná metóda - zle zvolená substitúcia

Riešenie: Dobre zvolená substitúcia = po nahradení výrazu pomocou premennej t a úpravách sa tam už nevyskytuje žiadne x.

f)

$$\int \cos^4 x \sin x \, \mathrm{d}x =$$

$$\int \cos^4 x \sin x \, \mathrm{d}x = \left\{ \begin{array}{c} \overbrace{t = \cos^4 x}^{\textit{zle}} \\ \mathrm{d}t = 4\cos^3 x(-\sin x)\,\mathrm{d}x \\ \mathrm{d}x = \frac{\mathrm{d}t}{4\cos^3 x(-\sin x)} \end{array} \right\} = \int \frac{t \sin x \, \mathrm{d}t}{4\cos^3 x(-\sin x)}$$

$$= \left\{ \begin{array}{c} \overbrace{t = \cos x}^{\textit{dobre}} \\ \mathrm{d}t = (-\sin x)\,\mathrm{d}x \end{array} \right\}$$

$$= -\int t^4 \, \mathrm{d}t = -\frac{t^5}{5} + C = -\frac{\cos^5 x}{5} + C.$$

Substitučná metóda - riešené príklady

Riešenie:

g)

$$\int \frac{\mathrm{d}x}{x \ln x} = \left\{ \begin{array}{c} t = \ln x \\ \mathrm{d}t = \frac{1}{x}\mathrm{d}x \end{array} \right\} = \int \frac{\mathrm{d}t}{t} = \ln|t| + C = \ln|\ln x| + C,$$

Riešenie:

h)

$$\int 3x\sqrt{x^2+6}\,\mathrm{d}x = \left\{\begin{array}{c} t = x^2+6 \\ \mathrm{d}t = 2x\mathrm{d}x \\ \mathrm{d}x = \dfrac{\mathrm{d}t}{2x} \end{array}\right\} = \frac{3}{2}\int \sqrt{t}\,\mathrm{d}t = \frac{3}{2}\int t^{\frac{1}{2}}\,\mathrm{d}t =$$

$$= \frac{3}{2}\frac{t^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}} + C = t^{\frac{3}{2}} + C = (x^2+6)^{\frac{3}{2}} + C.$$

Substitučná metóda - na prednáške alebo na domácu úlohu

Príklad 5

Vypočítajte integrály:

a) $\int (2x+5)(x^2+5x)^7 \, \mathrm{d}x$

b) $\int (x+3)\sqrt{x^2+6x+1} \, \mathrm{d}x$

c) $\int \frac{\sin(\ln x)}{x} \, \mathrm{d}x$

d) $\int x e^{1-x^2} \, \mathrm{d}x$

e) $\int \frac{x}{x+16} \, \mathrm{d}x$

f) $\int \frac{x}{x^2+16} \, \mathrm{d}x$

g) $\int \frac{x}{x^4+16} \, \mathrm{d}x$

h) $\int \frac{e^{\sqrt{x+1}}}{\sqrt{x+1}} \, \mathrm{d}x$

i) $\int \frac{x}{4+3x^2} \, \mathrm{d}x$

j) $\int \frac{x}{(x^2+1)^3} \, \mathrm{d}x$

k) $\int e^x \operatorname{cotg} e^x \, \mathrm{d}x$

Ďakujem za pozornosť.