1. typ skúškového príkladu
Aplikácie určitého integrálu

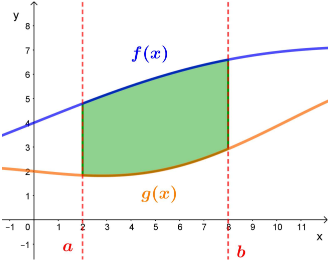
Oľga Stašová

Ústav informatiky a matematiky
Fakulta elektrotechniky a informatiky
Slovenská technická univerzita

letný semester 2023/2024

Obsah rovinnej oblasti

- **Obsah oblasti ohraničenej grafmi funkcií** $f(x) \geq g(x)$ v intervale$\langle a, b\rangle$ (t.j. ohraničenej aj priamkami $x = a$, $x = b$).



vypočítame pomocou integrálu

$$S = \int_a^b (f(x) - g(x))\,\mathrm{d}x.$$

Pre lepšie zapamätanie: $S = \int_a^b (horna(x) - dolna(x))\,\mathrm{d}x.$

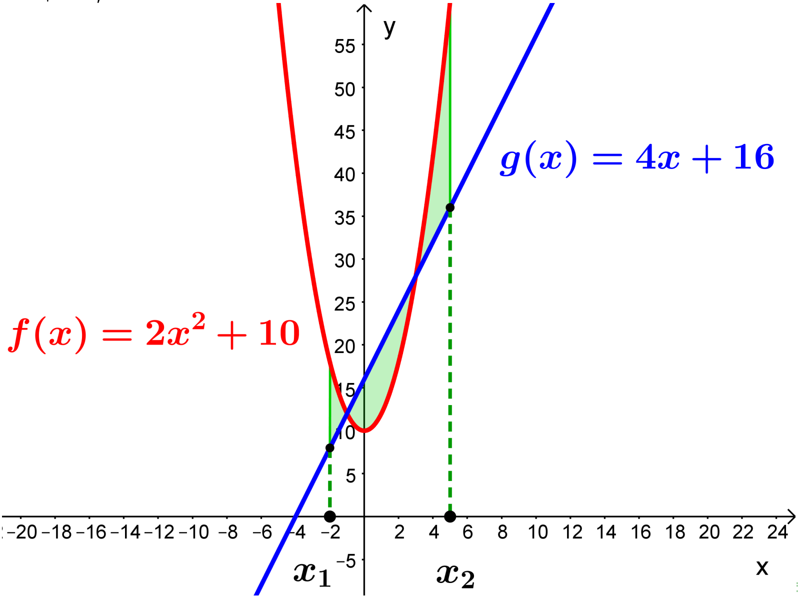
Obsah rovinnej oblasti

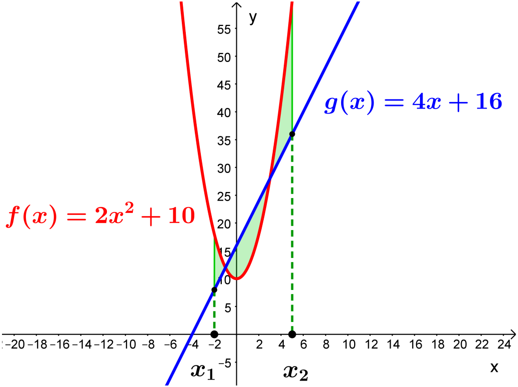
Ak je na niektorých intervaloch $f(x) \geq g(x)$ a na iných intervaloch $f(x) \leq g(x)$, tak potom obsah oblasti ohraničenej funkciami $f(x)$ a $g(x)$ vypočítame ako **súčet integrálov pre jednotlivé podintervaly**.
Nech $\langle a = x_0,\, x_1,\, x_2, ..., x_{n-1},\, x_n = b\rangle$, kde $x_1,\, x_2, ..., x_{n-1}$ sú priesečníky $f(x)\, a\, g(x)$. Potom

$$S = \sum_{k=1}^{k} \int_{x_{k-1}}^{x_k} (horna(x) - dolna(x))\,\mathrm{d}x,$$

kde $horna(x) \geq dolna(x)$ na každom podintervale.

Vypočítajte obsah oblasti ohraničenej krivkou $y = 2x^2 + 10$ a priamkami $y = 4x + 16$, $x = -2$ a $x = 5$.

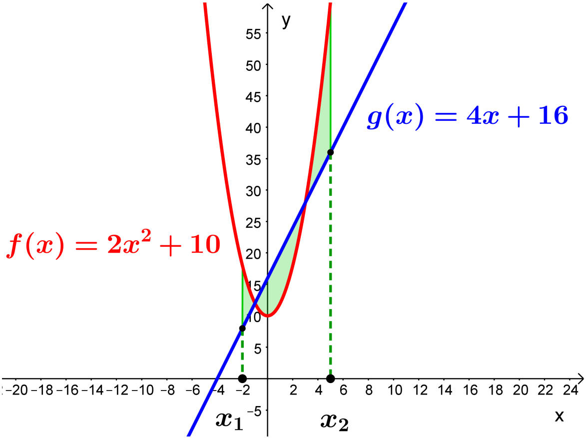




Vypočítame priesečníky funkcii $f(x)$ a $g(x)$.

$$\begin{aligned} f(x) &= g(x) \\ 2x^2 + 10 &= 4x + 16 \\ 2x^2 - 4x - 6 &= 0 \\ x^2 - 2x - 3 &= 0 \\ (x+1)(x-3) &= 0 \end{aligned}$$

$$x = -1 \quad x = 3.$$



Obsah oblasti vypočítame ako súčet integrálov

$$S = \int_{-2}^{-1} (2x^2 + 10 - (4x + 16))\,\mathrm{d}x + \int_{-1}^{3} (4x + 16 - (2x^2 + 10))\,\mathrm{d}x$$

$$+ \int_{3}^{5} (2x^2 + 10 - (4x + 16))\,\mathrm{d}x.$$

Objem rotačného telesa

Objem rotačného telesa, ktoré vznikne rotáciou rovinnej oblasti ohraničenej grafmi funkcií $f \geq g \geq 0$ (a priamkami $x = a$, $x = b$) v intervale $\langle a, b \rangle$ okolo osi x vypočítame pomocou integrálu

$$V = \pi \int_a^b \left(f^2(x) - g^2(x)\right) \mathrm{d}x.$$

Pre lepšie zapamätanie: $V = \pi \int_a^b (horna^2(x) - dolna^2(x)) \,\mathrm{d}x$.

Objem **rotačného** telesa, ktoré vznikne **rotáciou**...vo vzorci vystupuje π**.**

Dĺžka krivky

Dĺžku rovinnej krivky, ktorá je grafom funkcie f, ktorá má spojitú deriváciu v intervale $\langle a, b\rangle$ vypočítame pomocou integrálu

$$D = \int\limits_a^b \sqrt{1 + (f'(x))^2}\,\mathrm{d}x.$$

Vypočítajte dĺžku krivky: $f(x) = \frac{2}{3}\sqrt{x^3} + \frac{9}{4} \quad x \in \langle 1, 3 \rangle$

$$l = \int_a^b \sqrt{1 + (f'(x))^2}\, dx \qquad f(x) = \frac{2}{3} x^{\frac{3}{2}} + \frac{9}{4}$$

$$f'(x) = \frac{2}{3}\cdot\frac{3}{2} x^{\frac{1}{2}} = \sqrt{x}$$

$$(f'(x))^2 = (\sqrt{x})^2 = x$$

$$l = \int_1^3 \sqrt{1+x}\, dx \; \left| \begin{array}{l} t = 1 + x \\ dt = dx \\ x_1 = 1 \longrightarrow t_1 = 1 + 1 = 2 \\ x_2 = 3 \longrightarrow t_2 = 1 + 3 = 4 \end{array} \right| = \int_2^4 \sqrt{t}\, dt = \int_2^4 t^{\frac{1}{2}} dt$$

$$= \left[\frac{t^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}} \right]_2^4 = \frac{2}{3}\left[t^{\frac{3}{2}}\right]_2^4 = \frac{2}{3}\left(4^{\frac{3}{2}} - 2^{\frac{3}{2}}\right) = \frac{2}{3}\left(\sqrt{4\cdot4\cdot4} - \sqrt{2\cdot2\cdot2}\right) =$$

$$= \frac{2}{3}\left(\sqrt{64} - \sqrt{8}\right) = \frac{2}{3}\left(8 - 2\sqrt{2}\right) \; j \qquad \sqrt{8} = \sqrt{4\cdot2} = \sqrt{4}\cdot\sqrt{2} = 2\sqrt{2}$$