$$\int_C \left(\frac{\sin 8z}{8z} + \frac{\cos z}{\sin z} + \frac{2z^4}{(z+2)^2} + (z-2)^2 \sin\left(\frac{12}{z-2}\right)\right) dz$$

$C: |z| = 3$ kladne orientovaná

$z_1 = 0$

$z = k\pi, k \in \mathbb{Z}$

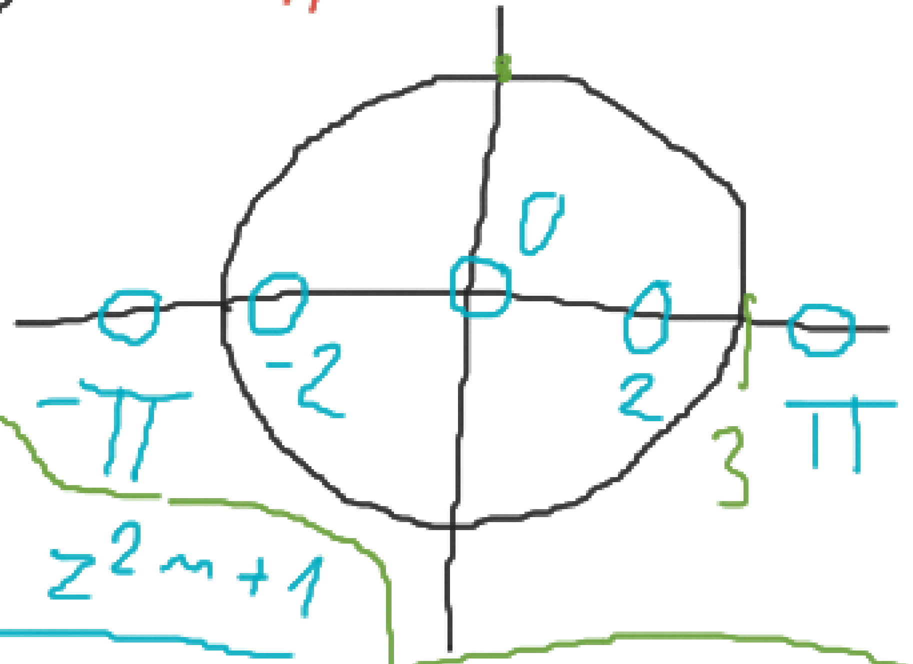
$z = \dots, -\pi, 0, \pi, \dots$

$z_2 = 0$

ostatné body neležia vnútri kruhu

$z_3 = -2$

$z_4 = 2$



2. spôsob riešenia

$$\sin z = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n z^{2n+1}}{(2n+1)!}$$

$$\frac{\sin 8z}{8z} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)!} (8z)^{2n+1-1}$$

$$\lim_{z \to 0} \frac{\sin 8z}{8z} = 1 =$$ konečné číslo $\Rightarrow$ $z = 0$ je odstrániteľný singulárny bod $\Rightarrow$ hlavná časť Laurentovho radu má 0 členov

$$\Rightarrow \operatorname{res}_{z=0} \frac{\sin 8z}{8z} = \boxed{0}$$

$\dfrac{\cos z}{\sin z}$ $\cos z = h(z)$, $\sin z = g(z)$

$z_2 = 0 = a$

1. $h(0) = \cos 0 = 1 \neq 0$
2. $g(0) = \sin 0 = 0$
3. $g'(0) = \cos 0 = 1 \neq 0$

splnené všetky 3 podmienky $\Rightarrow z_2 = 0$ je pól

$$\operatorname{res}_{z=0} \frac{\cos z}{\sin z} = \frac{h(a)}{g'(a)} = \frac{\cos 0}{\cos 0} = \frac{1}{1} = \boxed{1}$$

To, že je to pól sa dalo ukázať aj pomocou limity:

$$\lim_{z=0} \frac{\cos z}{\sin z} = \frac{\cos 0}{\sin 0} = \frac{1}{0} = \infty$$

toto platí v komplexnej analýze

Niektorí ste to počítali ako v REÁLNEJ ANALÝZE

$$\lim_{z \to 0^+} \frac{1}{0^+} = +\infty$$

$$\lim_{z \to 0^-} \frac{1}{0^-} = -\infty$$

a tak ste napísali, že limita neexistuje a je to teda PODSTATNE SINGULÁRNY BOD. Ale v komplexnej analýze existuje len JEDNO nekonečno a platí v nej: $-\infty = +\infty$

Je to v prednaškovom materialy 16_limita_nekonecno_spojitost a v pdf Komplex_analyza na str. 9 v kapitole 3.2 Nekonečno.

$$\frac{2z^4 = h(z)}{(z+2)^2}$$

$z=-2$ je nulový bod 2. rádu a keďže $h(-2) = 2\cdot(-2)^4 \neq 0 \Rightarrow$

$z=-2$ pól 2. rádu

Dalo sa to ukázať aj pomocou limity:

$$\lim_{z\to -2} \frac{2z^4}{(z+2)^2} = \frac{2(-2)^4}{(-2+2)^2} = \frac{32}{0} = \infty$$

Rezíduum sa vypočíta pomocou vzorca

$$\operatorname*{res}_{z=a} f(z) = \frac{1}{(m-1)!} \lim_{z\to a} \frac{d^{m-1}}{dz^{m-1}} \left[(z-a)^m f(z) \right]$$

m = 2, lebo je to pól 2. rádu

$$\operatorname*{res}_{z=-2} \frac{1}{(2-1)!} \lim_{z\to -2} \frac{d^{2-1}}{dz^{2-1}} \left[\cancel{(z-(-2))^2} \frac{2z^4}{\cancel{(z+2)^2}} \right] = \lim_{z\to -2} \frac{d}{dz}\left(2z^4\right)$$

$$= \lim_{z\to -2} 8z^3 = 8\cdot(-2)^3 = 8(-8) = \boxed{-64}$$

$$(z-2)^2 \sin\left(\frac{12}{z-2}\right)$$

$z = 2$

použijeme vzorec

$$\sin z = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{z^{2n+1}}{(2n+1)!}$$

$$= (z-2)^2 \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)!} \left(\frac{12}{z-2}\right)^{2n+1} = (z-2)^2 \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n \, 12^{2n+1}}{(2n+1)!} (z-2)^{-2n-1}$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} \underbrace{\frac{(-1)^n \, 12^{2n+1}}{(2n+1)!}}_{c_{-2n+1}} (z-2)^{-2n+1}$$

hlavná časť Laurentovho radu má nekonečne veľa členov, takže je to PODSTATNE singulárny bod

$$-2n+1 = -1$$

$$n = 1$$

$$c_{-1} \left(\begin{matrix} \text{pre} \\ n=1 \end{matrix}\right) = \frac{(-1)^1 \, 12^{2 \cdot 1 + 1}}{(2 \cdot 1 + 1)!} = \frac{-12^3}{3!} = \frac{-12^3}{6} = \boxed{-288}$$

$$(z-2)^2 \sin\left(\frac{12}{z-2}\right)$$

$z=2$

Niektorí študenti sa pokúsili zistiť druh (typ) singulárneho bodu pomocou limity.

ohraničená

$$\lim_{z\to 2} (z-2)^2 \sin\left(\frac{12}{z-2}\right) = 0$$ = konečné číslo => z = 2 je odstrániteľný singulárny bod

$$\Downarrow$$

$$\operatorname{res}_{z=2} (z-2)^2 \sin\left(\frac{12}{z-2}\right) = 0$$

toto platí v reálnej analýze a NEPLATÍ v komplexnej analýze, lebo sinus NIE JE OHRANIČENÝ v komplexnej analýze.

Nech z = a i a nech a ide do nekonečna

$i^2 = -1$ $\quad a \to \infty$

$$\sin z = \frac{e^{iz} - e^{-iz}}{2i} = \frac{e^{iai} - e^{-iai}}{2i} = \frac{e^{-a} - e^{a}}{2i} = \frac{e^{-\infty} - e^{\infty}}{2i}$$

neohraničené

Keďže nikde na prednáške nebolo upozornenie na to, tak som aj za toto NESPRÁVNE riešenie dala toľko bodov, ako keby bolo správne.

$$\oint_C f(z)\,dz = 2\pi i \left(\text{súčet rezídui pre singul. body, ktoré ležia vnútri kruhu.}\right)$$

$$= 2\pi i\,(0 + 1 - 64 - 288)$$

$$= 2\pi i\,(-351) = -702\pi i$$