Integrálny počet
Neurčitý integrál - 2.časť

Oľga Stašová

Ústav informatiky a matematiky
Fakulta elektrotechniky a informatiky
Slovenská technická univerzita

letný semester 2022/2023

Obsah prednášky

- **Substitúcie pre goniometrické funkcie**
- **Využitie úprav pomocou goniometrických vzťahov**
- **Per partes**
- **Rozklad na parciálne zlomky**
- **Integrovanie racionálnych funkcií**

Substitúcie pre goniometrické funkcie

Ak máme integrovaný výraz, ktorý obsahuje **jeden alebo niekoľko** $\sin(\mathbf{x})$ a **v čitateli jeden** $\cos(\mathbf{x})$, tak sa použije substitúcia:

$$\begin{aligned} t &= \sin(x) \\ \mathrm{d}t &= \cos(x)\,\mathrm{d}x \\ \mathrm{d}x &= \frac{\mathrm{d}t}{\cos(x)} \end{aligned}$$

Ak máme integrovaný výraz, ktorý obsahuje **jeden alebo niekoľko** $\cos(\mathbf{x})$ a **v čitateli jeden** $\sin(\mathbf{x})$, tak sa použije substitúcia:

$$\begin{aligned} t &= \cos(x) \\ \mathrm{d}t &= -\sin(x)\,\mathrm{d}x \\ \mathrm{d}x &= \frac{\mathrm{d}t}{-\sin(x)} \end{aligned}$$

Substitúcie pre goniometrické funkcie

Príklad 1

Vypočítame integrál $\int \cos^5 x \, \mathrm{d}x$

Riešenie:

Substitúcie pre goniometrické funkcie

Príklad 1

Vypočítame integrál $\int \cos^5 x \, \mathrm{d}x$

Riešenie:

$$
\begin{aligned}
\int \cos^5 x \, \mathrm{d}x &= \int \cos^4 x \cos x \, \mathrm{d}x = \int (\cos^2 x)^2 \cos x \, \mathrm{d}x \\
&= \int (1 - \sin^2 x)^2 \cos x \, \mathrm{d}x = \left\{ \begin{array}{c} t = \sin x \\ \mathrm{d}t = \cos x \, \mathrm{d}x \\ \mathrm{d}x = \dfrac{\mathrm{d}t}{\cos x} \end{array} \right\} \\
&= \int (1 - t^2)^2 \cos x \frac{\mathrm{d}t}{\cos x}
\end{aligned}
$$

Substitúcie pre goniometrické funkcie

$$\int (1-t^2)^2 \cos x \frac{\mathrm{d}t}{\cos x} \quad = \quad \int (1-2t^2+t^4)\mathrm{d}t = t - 2\frac{t^3}{3} + \frac{t^5}{5} + C.$$

Po spätnej substitúcii dostávame výsledok

$$\int \cos^5 x \,\mathrm{d}x = \sin x - 2\frac{\sin^3 x}{3} + \frac{\sin^5 x}{5} + C.$$

Využitie úprav pomocou goniometrických vzťahov

$$\int \sin mx \cos nx \, \mathrm{d}x, \qquad \int \sin mx \sin nx \, \mathrm{d}x, \qquad \int \cos mx \cos nx \, \mathrm{d}x$$

prevedieme na jednoduché integrály pomocou trigonometrických vzťahov:

$$\sin\alpha \sin\beta = \frac{1}{2}\left(\cos(\alpha-\beta) - \cos(\alpha+\beta)\right),$$

$$\cos\alpha \cos\beta = \frac{1}{2}\left(\cos(\alpha-\beta) + \cos(\alpha+\beta)\right),$$

$$\sin\alpha \cos\beta = \frac{1}{2}\left(\sin(\alpha-\beta) + \sin(\alpha+\beta)\right).$$

Využitie úprav pomocou goniometrických vzťahov

Príklad 2

Vypočítame $\int \sin 2x \cos 5x \, \mathrm{d}x$.

Riešenie:

Použijeme uvedený vzorec pre $\alpha = 2x$ a $\beta = 5x$

$$\int \sin 2x \cos 5x \, \mathrm{d}x = \frac{1}{2} \int \left(\sin(-3x) + \sin 7x \right) \, \mathrm{d}x =$$

$$= \frac{1}{2} \int (-\sin 3x + \sin 7x) \, \mathrm{d}x = \frac{1}{6} \cos 3x - \frac{1}{14} \cos 7x + C.$$

Pre nepárnu funkciu platí: $\forall x \in D(f) : f(-x) = -f(x)$

$\sin x$ je nepárna funkcia. $\sin(-3x) = -\sin 3x$

Pre párnu funkciu platí: $\forall x \in D(f) : f(-x) = f(x)$

$\cos x$ je párna funkcia.

Využitie úprav pomocou goniometrických vzťahov

Príklad 3

Vypočítajte integrály:

a) $\int \sin^3 x \cos^2 x \, \mathrm{d}x =$

Využitie úprav pomocou goniometrických vzťahov

Príklad 3

Vypočítajte integrály:

a) $\int \sin^3 x \cos^2 x \, \mathrm{d}x = \int \sin x \sin^2 x \cos^2 x \, \mathrm{d}x =$

Využitie úprav pomocou goniometrických vzťahov

Príklad 3

Vypočítajte integrály:

a) $\int \sin^3 x \cos^2 x \, \mathrm{d}x = \int \sin x \sin^2 x \cos^2 x \, \mathrm{d}x =$
$\int \sin x (1 - \cos^2 x) \cos^2 x \, \mathrm{d}x =$

Využitie úprav pomocou goniometrických vzťahov

Príklad 3

Vypočítajte integrály:

a) $\int \sin^3 x \cos^2 x \,\mathrm{d}x = \int \sin x \sin^2 x \cos^2 x \,\mathrm{d}x =$
$\int \sin x (1 - \cos^2 x) \cos^2 x \,\mathrm{d}x =$

b) $\int \frac{1}{\cos x} \,\mathrm{d}x =$

Využitie úprav pomocou goniometrických vzťahov

Príklad 3

Vypočítajte integrály:

a) $\int \sin^3 x \cos^2 x \,\mathrm{d}x = \int \sin x \sin^2 x \cos^2 x \,\mathrm{d}x =$
$\int \sin x(1 - \cos^2 x) \cos^2 x \,\mathrm{d}x =$

b) $\int \frac{1}{\cos x} \,\mathrm{d}x = \int \frac{\cos x}{\cos^2 x} \,\mathrm{d}x =$

Využitie úprav pomocou goniometrických vzťahov

Príklad 3

Vypočítajte integrály:

a) $\int \sin^3 x \cos^2 x \, \mathrm{d}x = \int \sin x \sin^2 x \cos^2 x \, \mathrm{d}x =$
$\int \sin x (1 - \cos^2 x) \cos^2 x \, \mathrm{d}x =$

b) $\int \frac{1}{\cos x} \, \mathrm{d}x = \int \frac{\cos x}{\cos^2 x} \, \mathrm{d}x = \int \frac{\cos x}{1-\sin^2 x} \, \mathrm{d}x =$

c) $\int \sin 3x \cos 2x \, \mathrm{d}x$

d) $\int \cos 2x \cos 3x \, \mathrm{d}x$

e) $\int \sin 2x \sin 3x \, \mathrm{d}x$

aj s použitím nasledujúcich vzťahov (ak je to vhodné):

$$\sin\alpha \sin\beta = \frac{1}{2}\left(\cos(\alpha-\beta) - \cos(\alpha+\beta)\right),$$

$$\cos\alpha \cos\beta = \frac{1}{2}\left(\cos(\alpha-\beta) + \cos(\alpha+\beta)\right),$$

$$\sin\alpha \cos\beta = \frac{1}{2}\left(\sin(\alpha-\beta) + \sin(\alpha+\beta)\right).$$

Metóda per partes

B) **Metóda per partes (integrovanie po častiach)**:

Metóda per partes

B) **Metóda per partes (integrovanie po častiach)**:

Táto metóda je odvodená zo vzťahu pre **deriváciu súčinu funkcií** a spočíva v nasledovnom:

Metóda per partes

B) **Metóda per partes (integrovanie po častiach)**:

Táto metóda je odvodená zo vzťahu pre **deriváciu súčinu funkcií** a spočíva v nasledovnom:

Nech funkcie u *a* v *majú derivácie v intervale* $\mathbf{x} \in \langle \mathbf{a}, \mathbf{b} \rangle$. *Potom*

$$\int u'(x)v(x)\,\mathrm{d}x = u(x)v(x) - \int u(x)v'(x)\,\mathrm{d}x$$

v intervale $\mathbf{x} \in \langle \mathbf{a}, \mathbf{b} \rangle$.

Metóda per partes

$$\left(u(x)v(x)\right)' = u'(x)v(x) + u(x)v'(x)$$

$$\int \left(u(x)v(x)\right)' \,\mathrm{d}x = \int \left(u'(x)v(x) + u(x)v'(x)\right) \mathrm{d}x$$

$$u(x)v(x) = \int u'(x)v(x)\,\mathrm{d}x + \int u(x)v'(x)\,\mathrm{d}x$$

A = B + C

$$\int u'(x)v(x)\,\mathrm{d}x = u(x)v(x) - \int u(x)v'(x)\,\mathrm{d}x$$

B = A - C

Metóda per partes

$$\int u^{'}(x)v(x)\,\mathrm{d}x \quad = \quad u(x)v(x) - \int u(x)v^{'}(x)\,\mathrm{d}x$$

Metóda **Per partes** sa používa v príkladoch, kde integrovaný výraz vieme zapísať ako **súčin 2 funkcií**. A jednu funkciu vieme integrovať a druhú vieme derivovať.
Výber funkcií $u^{'}(x)$ a $v(x)$ sa môže zdať náročný. Väčšinou je však výber prirodzený - to znamená, že nie je možný žiadny iný. Po prepočítaní viacerých príkladov získate skúsenosť, ako rozdeliť integračný výraz a ktorú časť integrovať a ktorú derivovať.
Dôležité: Po použití per partes dostaneme na pravej strane nový integrál a ten musí byť jednoduchší ako pôvodný integrál. Výnimkou je **dvojkrokový per partes** napr. v príklade $\int e^{x}\sin(x)\,\mathrm{d}x$.

Metóda per partes - riešené príklady

Príklad 4

Vypočítame integrály:

a) $\int xe^x \,\mathrm{d}x$

b) $\int 3x \cos 5x \,\mathrm{d}x$

c) $\int 2x^3 \ln x \,\mathrm{d}x$

d) $\int x \cdot \operatorname{arctg} x \,\mathrm{d}x$

e) $\int \arcsin x \,\mathrm{d}x$

f) $\int (x^2 + 2x - 1) \sin 3x \,\mathrm{d}x$

g) $\int e^{-x} \sin x \,\mathrm{d}x$

h) $\int \sin(\ln x) \,\mathrm{d}x$

Metóda per partes - riešené príklady

Riešenie:

a)

$$\int xe^x \, dx \quad =$$

Metóda per partes - riešené príklady

Riešenie:

a)

$$\int xe^x \,\mathrm{d}x = \left\{ \begin{array}{cc} u' = e^x & v = x \\ u = e^x & v' = 1 \end{array} \right\} = xe^x - \int e^x.1 \,\mathrm{d}x = $$
$$= xe^x - e^x + C = (x-1)e^x + C.$$

Takto sa dajú integrovať: xe^x, $x\sin x$, $x\cos x$,
pretože e^x, $\sin x$, $\cos x$ sa integrovaním nestanú zložitejšie a x sa derivovaním zjednoduší na 1.
Tak isto sa dajú takto integrovať **z nich odvodené**: napr. $(x-7)e^{2x}$, $(2x+5)\sin 8x$, $\dfrac{x}{2}\cos(-3x)$,...

Metóda per partes - riešené príklady

Riešenie:

b)

$$\int 3x \cos 5x \, \mathrm{d}x \quad =$$

Metóda per partes - riešené príklady

Riešenie:

b)

$$\begin{aligned}
\int 3x\cos 5x\,\mathrm{d}x &= \left\{ \begin{array}{cc} u' = \cos 5x & v = 3x \\ u = \frac{\sin 5x}{5} & v' = 3 \end{array} \right\} = \\
&= \frac{3}{5}x\sin 5x - \int 3\frac{\sin 5x}{5}\,\mathrm{d}x = \\
&= \frac{3}{5}x\sin 5x - \frac{3}{5}\int \sin 5x\,\mathrm{d}x = \\
&= \frac{3}{5}x\sin 5x + \frac{3}{25}\cos 5x + C.
\end{aligned}$$

Metóda per partes - riešené príklady

Riešenie:

c)

$$\int 2x^3 \ln x \, \mathrm{d}x \quad =$$

Metóda per partes - riešené príklady

Riešenie:

c)

$$\begin{aligned}\int 2x^3 \ln x \, \mathrm{d}x &= \left\{ \begin{array}{cc} u' = 2x^3 & v = \ln x \\ u = \frac{x^4}{2} & v' = \frac{1}{x} \end{array} \right\} = \\ &= \frac{x^4}{2} \ln x - \int \frac{x^4}{2} \frac{1}{x} \, \mathrm{d}x = \\ &= \frac{x^4}{2} \ln x - \frac{1}{2} \int x^3 \, \mathrm{d}x = \frac{x^4}{2} \ln x - \frac{x^4}{8} + C.\end{aligned}$$

Typ: $x^n \ln x$ a **z toho odvodené** $(x^n + x^m) \ln x^s$.

Metóda per partes - riešené príklady

Riešenie:

d)

$$\int x \operatorname{arctg} x \,\mathrm{d}x \quad =$$

Metóda per partes - riešené príklady

Riešenie:

d)

$$\begin{aligned}
\int x \operatorname{arctg} x \, dx &= \left\{ \begin{array}{ll} u' = x & v = \operatorname{arctg} x \\ u = \frac{x^2}{2} & v' = \frac{1}{1+x^2} \end{array} \right\} = \\
&= \frac{x^2}{2} \operatorname{arctg} x - \frac{1}{2} \int \frac{x^2}{1+x^2} \, dx = \\
&= \frac{x^2}{2} \operatorname{arctg} x - \frac{1}{2} \int \frac{x^2+1-1}{1+x^2} \, dx = \\
&= \frac{x^2}{2} \operatorname{arctg} x - \frac{1}{2} \left(\int 1 \, dx - \int \frac{dx}{1+x^2} \right) = \\
&= \frac{x^2}{2} \operatorname{arctg} x - \frac{1}{2} (x - \operatorname{arctg} x) + C.
\end{aligned}$$

Metóda per partes - riešené príklady

Riešenie:

e) Metódu PP môžeme použiť aj vtedy, ak integrovaná funkcia nie je súčinom dvoch funkcií. Vtedy za druhý činiteľ považujeme konštantu 1

$$\begin{aligned}
\int \arcsin x \, \mathrm{d}x &= \left\{ \begin{array}{ll} u' = 1 & v = \arcsin x \\ u = x & v' = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} \end{array} \right\} = \\
&= x \arcsin x - \int \frac{x}{\sqrt{1-x^2}} \, \mathrm{d}x \left\{ \begin{array}{c} t = 1 - x^2 \\ \mathrm{d}t = -2x \, \mathrm{d}x \\ \mathrm{d}x = \frac{\mathrm{d}t}{-2x} \end{array} \right\} \\
&= x \arcsin x + \frac{1}{2} \int \frac{\mathrm{d}t}{\sqrt{t}} = \\
&= x \arcsin x + \sqrt{1-x^2} + C, \quad x \in (-1, 1).
\end{aligned}$$

Takto sa dajú integrovať: $\ln(x)$, $\operatorname{arctg}(x)$, $\operatorname{arccotg}(x)$, $\arccos(x)$.

Metóda per partes - riešené príklady

Riešenie:

f) V tomto príklade budeme musieť použiť metódu per partes opakovane dvakrát.

$$\begin{aligned}
&\int (x^2+2x-1)\sin 3x \,\mathrm{d}x = \\
= \;& \left\{ \begin{array}{cc} u' = \sin 3x & v = x^2+2x-1 \\ u = -\frac{1}{3}\cos 3x & v' = 2x+2 \end{array} \right\} = \\
= \;& -\frac{1}{3}(x^2+2x-1)\cos 3x + \frac{2}{3}\int (x+1)\cos 3x \;\mathrm{d}x = \\
= \;& \left\{ \begin{array}{cc} u' = \cos 3x & v = x+1 \\ u = \frac{1}{3}\sin 3x & v' = 1 \end{array} \right\} = \\
= \;& -\frac{1}{3}(x^2+2x-1)\cos 3x + \frac{2}{3}\left(\frac{1}{3}(x+1)\sin 3x - \frac{1}{3}\int \sin 3x \,\mathrm{d}x\right) = \\
= \;& -\frac{1}{3}(x^2+2x-1)\cos 3x + \frac{2}{3}\left(\frac{1}{3}(x+1)\sin 3x + \left(\frac{1}{3}\right)^2 \cos 3x\right) + C = \\
= \;& \left(-\frac{x^2}{3} - \frac{2x}{3} + \frac{11}{27}\right)\cos 3x + \frac{2}{9}(x+1)\sin 3x + C.
\end{aligned}$$

Metóda per partes - riešené príklady

Riešenie:

g) V tomto príklade použijeme **dvojkrokový per partes**, čo nám umožní vyjadriť hľadaný integrál pomocou neho samého.

$$
\begin{aligned}
\int e^{-x} \sin x \, \mathrm{d}x &= \left\{ \begin{array}{ll} u' = \sin x & v = e^{-x} \\ u = -\cos x & v' = -e^{-x} \end{array} \right\} = \\
&= -e^{-x} \cos x - \int e^{-x} \cos x = \\
&= \left\{ \begin{array}{ll} u' = \cos x & v = e^{-x} \\ u = \sin x & v' = -e^{-x} \end{array} \right\} = \\
&= -e^{-x} \cos x - \left(e^{-x} \sin x + \int e^{-x} \sin x \, \mathrm{d}x \right) = \\
&= -e^{-x} (\cos x + \sin x) - \int e^{-x} \sin x \, \mathrm{d}x.
\end{aligned}
$$

Pri prvom per partes je jedno, ktorú funkciu sa rozhodneme derivovať a ktorú integrovať. Obidve možnosti sú rovnocenné.
Pri druhom per partes musíme derivovať **rovnaký typ funkcie**, aký sme derivovali v prvom per partes (exponenciálnu alebo goniometrickú).

Metóda per partes - riešené príklady

Ak označíme hľadaný integrál symbolom $I = \int e^{-x} \sin x \, \mathrm{d}x$, tak sme dostali rovnicu $I = -e^{-x}(\cos x + \sin x) - I$, z ktorej vypočítame

$$\begin{aligned} 2I &= -e^{-x}(\cos x + \sin x) + C \\ I &= -\frac{1}{2}e^{-x}(\cos x + \sin x) + C. \end{aligned}$$

Metóda per partes - riešené príklady

Riešenie:

h) V tomto príklade opäť použijeme **dvojkrokový per partes**, aby sme vyjadrili hľadaný integrál pomocou neho samého.

$$\begin{aligned}\int \sin(\ln x)\,\mathrm{d}x &= \left\{\begin{array}{cc} u'=1 & v=\sin(\ln x) \\ u=x & v'=\cos(\ln x)\frac{1}{x}\end{array}\right\} = \\ &= x\sin(\ln x) - \int \cos(\ln x)\,\mathrm{d}x = \\ &= \left\{\begin{array}{cc} u'=1 & v=\cos(\ln x) \\ u=x & v'=-\sin(\ln x)\frac{1}{x}\end{array}\right\} = \\ &= x\sin(\ln x) - \left(x\cos(\ln x) + \int \sin(\ln x)\,\mathrm{d}x\right).\end{aligned}$$

Po úprave, pri označení $I = \int \sin(\ln x)\,\mathrm{d}x$, dostávame riešenie

$$I = \frac{1}{2}x\left(\sin(\ln x) - \cos(\ln x)\right) + C.$$

Metóda per partes - domáca úloha

Príklad 5

Vypočítajte zadané integrály:

a) $\int x \sin x \, \mathrm{d}x$

b) $\int x^2 e^{3x} \, \mathrm{d}x$ per partes 2krát

c) $\int x \ln(x^2) \, \mathrm{d}x$

d) $\int \arctan(x) \, \mathrm{d}x$

e) $\int \ln(x^2+1) \, \mathrm{d}x$

f) $\int e^{2x} \cos x \, \mathrm{d}x$ dvojkrokový per partes

g) $\int x^2 \cdot 3^x \, \mathrm{d}x$ per partes 2krát

h) $\int x \operatorname{arccotg}(x) \, \mathrm{d}x$

i) $\int \ln(x) \, \mathrm{d}x$

j) $\int \sin(2x) \cos(3x) \, \mathrm{d}x$ dvojkrokový per partes alebo $\sin\alpha\cos\beta = \frac{1}{2}\left(\sin(\alpha-\beta)+\sin(\alpha+\beta)\right)$

Rozklad na parciálne zlomky

Veľmi dôležitá metóda. Bude sa používať na predmete MAT3 vo všetkých transformáciách a aj v niekoľkých odborných predmetoch, v ktorých sa používa Laplaceova transformácia.

Rozklad na parciálne zlomky

Na parciálne zlomky rozkladáme len **rýdzo racionálne funkcie**.

Racionálna funkcia je podiel 2 polynómov $\dfrac{P(x)}{Q(x)}$.

Ak stupeň polynómu $P(x)$ je menší ako stupeň polynómu $Q(x)$
(matematicky zapísané $st(P(x)) < st(Q(x))$),
tak je táto funkcia **rýdzo racionálna**.

$P(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \ldots + a_2 x^2 + a_1 x + a_0$
Stupeň polynómu je najvyšší exponent x. $\quad st(P(x)) = n$

$P(x) = -2x^5 + \dfrac{7}{11} x^3 - 8 \qquad st(P(x)) = 5$
$P(x) = 4x + 7 \qquad st(P(x)) = 1$
$P(x) = 7 \qquad st(P(x)) = 0$, pretože $7 = 7 \cdot 1 = 7 \cdot x^0$.

a_0 sa nazýva **absolútny člen** polynómu.

Rozklad na parciálne zlomky

Ak funkcia **nie je** rýdzo racionálna, t.j. $st(P(x)) \geq st(Q(x))$, tak ju pomocou delenia polynómov prevedieme na **súčet polynómu a rýdzo racionálnej funkcie**.

$$P(x) : Q(x) = R(x) + \frac{S(x)}{Q(x)}.$$

Ak $st(P(x)) = st(Q(x))$, tak polynóm $R(x)$ je konštanta, t.j. $st(R(x)) = 0$.

$$\frac{2x^2 + 10x + 4}{x^2 + 5x} = \frac{2(x^2 + 5x)}{x^2 + 5x} + \frac{4}{x^2 + 5x} = 2 + \frac{4}{x^2 + 5x}$$

Ak $st(P(x)) - st(Q(x)) = N$, tak $st(R(x)) = N$.
Polynóm $S(x)$ je zvyšok po delení $P(x) : Q(x)$ a teda $st(S(x)) < st(Q(x))$.

$R(x)$ je polynóm a $\dfrac{S(x)}{Q(x)}$ je rýdzo racionálna funkcia.

Rozklad na parciálne zlomky

$$\frac{\textbf{čitateľ}}{\textbf{menovateľ}}$$

1) Pri rozklade na parciálne zlomky najskôr **rozložíme menovateľ na súčin koreňových činiteľov**.
$x^4 - 1 = (x^2+1)(x^2-1)$ Nestačí takýto rozklad.
Musí to byť **úplný rozklad**. $x^4 - 1 = (x^2+1)(x+1)(x-1)$
$x^3 - x^2 - 6x = x(x^2 - x - 6) = x(x-3)(x+2)$, ale
$x^3 + x^2 + 6x = x(x^2 + x + 6)$, pretože diskriminant je záporný, neexistujú ďalšie 2 korene v reálnych číslach.
$x_{1,2} = \dfrac{-b \pm \sqrt{D}}{2a}$, kde diskriminant $D = b^2 - 4ac$.

Rozklad na parciálne zlomky

$$\frac{\textbf{čitateľ}}{\textbf{menovateľ}}$$

2) **Do čitateľa dávame o stupeň nižší polynóm ako je v menovateli.**

$$\frac{polyn\acute{o}m}{(x-3)(x+2)} = \frac{A}{x-3} + \frac{B}{x+2}$$

$$\frac{polyn\acute{o}m}{(x-5)(x^2+x+6)} = \frac{A}{x-5} + \frac{Bx+C}{x^2+x+6}$$

$$\frac{polyn\acute{o}m}{x(x^4+1)} = \frac{A}{x} + \frac{Bx^3+Cx^2+Dx+E}{x^4+1}$$

3) **Aj keď polynóm v menovateli neobsahuje všetky členy (niektoré majú nulový koeficient), v čitateli píšeme všetky členy.**

Rozklad na parciálne zlomky

4) **Ak je nejaká zátvorka v menovateli na n-tú, tak ju n-krát zopakujeme. Najskôr umocnenú na prvú, potom na druhú,... a na koniec na n-tú.**
5) **Stupeň v čitateli nad zátvorkou závisí iba od stupňa polynómu v zátvorke (bez ohľadu na koľkú je tá zátvorka umocnená).**

$$\frac{polyn\acute{o}m}{(x+7)(x^2+4)^3} = \frac{A}{x+7} + \frac{Bx+C}{x^2+4} + \frac{Dx+E}{(x^2+4)^2} + \frac{Fx+G}{(x^2+4)^3}$$

$$\begin{aligned}\frac{polyn\acute{o}m}{x^3(2x-1)^4} &= \frac{Ax^2+Bx+C}{x^3} \\ &+ \frac{D}{2x-1} + \frac{E}{(2x-1)^2} + \frac{F}{(2x-1)^3} + \frac{G}{(2x-1)^4}\end{aligned}$$

Rozklad na parciálne zlomky

4) **Zlomok môžeme použiť aj v upravenom tvare:**

$$\frac{Ax^2+Bx+C}{x^3}=\frac{Ax^2}{x^3}+\frac{Bx}{x^3}+\frac{C}{x^3}=\frac{A}{x}+\frac{B}{x^2}+\frac{C}{x^3}$$

Dajú sa použiť 2 rovnocenné verzie.

a)

$$\frac{polynóm}{x^3(2x-1)^4} = \frac{Ax^2+Bx+C}{x^3} + \frac{D}{2x-1}+\frac{E}{(2x-1)^2}+\frac{F}{(2x-1)^3}+\frac{G}{(2x-1)^4}$$

b)

$$\frac{polynóm}{x^3(2x-1)^4} = \frac{A}{x}+\frac{B}{x^2}+\frac{C}{x^3} + \frac{D}{2x-1}+\frac{E}{(2x-1)^2}+\frac{F}{(2x-1)^3}+\frac{G}{(2x-1)^4}$$

Rozklad na parciálne zlomky

Príklad 6

Rozložte na parciálne zlomky:

a) $\dfrac{1}{x^2 - 4}$

Rozklad na parciálne zlomky

Príklad 6

Rozložte na parciálne zlomky:

a) $$\frac{1}{x^2-4} = \frac{A}{x+2} + \frac{B}{x-2} =$$

Rozklad na parciálne zlomky

Príklad 6

Rozložte na parciálne zlomky:

a) $\dfrac{1}{x^2-4} = \dfrac{A}{x+2} + \dfrac{B}{x-2} =$

b) $\dfrac{5x^2-17x+12}{x^3-4x^2+4x}$

Rozklad na parciálne zlomky

Príklad 6

Rozložte na parciálne zlomky:

a) $\dfrac{1}{x^2-4} = \dfrac{A}{x+2} + \dfrac{B}{x-2} =$

b) $\dfrac{5x^2-17x+12}{x^3-4x^2+4x} = \dfrac{5x^2-17x+12}{x(x^2-4x+4)} =$

Rozklad na parciálne zlomky

Príklad 6

Rozložte na parciálne zlomky:

a) $$\frac{1}{x^2-4} = \frac{A}{x+2} + \frac{B}{x-2} =$$

b) $$\frac{5x^2-17x+12}{x^3-4x^2+4x} = \frac{5x^2-17x+12}{x(x^2-4x+4)} = \frac{5x^2-17x+12}{x(x-2)^2} =$$

Rozklad na parciálne zlomky

Príklad 6

Rozložte na parciálne zlomky:

a) $\dfrac{1}{x^2-4} = \dfrac{A}{x+2} + \dfrac{B}{x-2} =$

b) $\dfrac{5x^2-17x+12}{x^3-4x^2+4x} = \dfrac{5x^2-17x+12}{x(x^2-4x+4)} = \dfrac{5x^2-17x+12}{x(x-2)^2} =$
$\dfrac{A}{x} + \dfrac{B}{x-2} + \dfrac{C}{(x-2)^2} =$

Rozklad na parciálne zlomky

Príklad 6

Rozložte na parciálne zlomky:

a) $\dfrac{1}{x^2-4} = \dfrac{A}{x+2} + \dfrac{B}{x-2} =$

b) $\dfrac{5x^2-17x+12}{x^3-4x^2+4x} = \dfrac{5x^2-17x+12}{x(x^2-4x+4)} = \dfrac{5x^2-17x+12}{x(x-2)^2} =$
$\dfrac{A}{x} + \dfrac{B}{x-2} + \dfrac{C}{(x-2)^2} =$

c) $\dfrac{x^3-3x^2-3x-10}{(x-1)^2(x^2+4)}$

Rozklad na parciálne zlomky

Príklad 6

Rozložte na parciálne zlomky:

a) $\dfrac{1}{x^2-4} = \dfrac{A}{x+2} + \dfrac{B}{x-2} =$

b) $\dfrac{5x^2-17x+12}{x^3-4x^2+4x} = \dfrac{5x^2-17x+12}{x(x^2-4x+4)} = \dfrac{5x^2-17x+12}{x(x-2)^2} =$
$\dfrac{A}{x} + \dfrac{B}{x-2} + \dfrac{C}{(x-2)^2} =$

c) $\dfrac{x^3-3x^2-3x-10}{(x-1)^2(x^2+4)} = \dfrac{A}{x-1} + \dfrac{B}{(x-1)^2} + \dfrac{Cx+D}{x^2+4} =$

Rozklad na parciálne zlomky

Príklad 7

Rozložte na parciálne zlomky:

d) $\dfrac{2x-3}{x^3+2x^2-x-2}$

Ak máme polynóm, ktorý má koeficient 1 pred x s najvyšším exponentom, tak delitele koeficientu pred x^0 sú kandidátmi na korene polynómu. Tie delitele môžu byť s kladnými aj zápornými znamienkami.

Kandidát na koreň znamená, že môže byť koreňom, ale nemusí ním byť.

Polynóm v menovateli x^3+2x^2-x-2 má pred x^3 koeficient 1 a pred x^0 koeficient -2. Teda kandidáti na korene sú: ± 1 a ± 2.
Vyskúšame dosadiť číslo 1 za každé x v polynóme x^3+2x^2-x-2. Dostaneme $1^3+2\cdot 1^2-1-2$ a to sa rovná $1+2-1-2=0$. Keďže výsledok je 0, 1 je koreňom polynómu.

Rozklad na parciálne zlomky

Príklad 8

Rozložte na parciálne zlomky:

d) $\dfrac{2x-3}{x^3+2x^2-x-2}$

Keďže $x = 1$ je koreňom, tak **Hornerovou schémou** alebo vydelením polynómov $(x^3+2x^2-x-2):(x-1)$ dostaneme výsledok x^2+3x+2 a ten sa dá ešte rozložiť na $(x+1)(x+2)$.

$$\frac{2x-3}{x^3+2x^2-x-2} = \frac{A}{x-1} + \frac{B}{x+1} + \frac{C}{x+2} =$$

Integrovanie racionálnych funkcií

Integrovanie racionálnych funkcií

Racionálnou funkciou rozumieme **podiel dvoch polynómov**.

Integrovanie racionálnych funkcií

Racionálnou funkciou rozumieme **podiel dvoch polynómov**.

a) **Integrovanie polynómov**

Integrovanie racionálnych funkcií

Racionálnou funkciou rozumieme **podiel dvoch polynómov**.

a) **Integrovanie polynómov**

Príklad 9

Vypočítame $\int (5x^7 - 12x^3 + 3x^2 - 9)\,\mathrm{d}x$.

Integrovanie racionálnych funkcií

Racionálnou funkciou rozumieme **podiel dvoch polynómov**.

a) **Integrovanie polynómov**

Príklad 9

Vypočítame $\int (5x^7 - 12x^3 + 3x^2 - 9)\,\mathrm{d}x$.

Riešenie:

$$\begin{aligned}\int (5x^7 &- 12x^3 + 3x^2 - 9)\,\mathrm{d}x = \\ &= 5\int x^7\,\mathrm{d}x - 12\int x^3\,\mathrm{d}x + 3\int x^2\,\mathrm{d}x - 9\int 1\,\mathrm{d}x = \\ &= \frac{5}{8}x^8 - 3x^4 + x^3 - 9x + C.\end{aligned}$$

Integrovanie racionálnych funkcií

b) **Integrovanie rýdzo racionálnych funkcií**

Integrovanie racionálnych funkcií

b) **Integrovanie rýdzo racionálnych funkcií**
Každú rýdzo racionálnu funkciu môžeme vyjadriť v tvare súčtu elementárnych zlomkov. Preto k integrovaniu rýdzo racionálnych funkcií stačí vedieť integrovať všetky 4 typy elem. zlomkov.

Integrovanie racionálnych funkcií

b) **Integrovanie rýdzo racionálnych funkcií**
Každú rýdzo racionálnu funkciu môžeme vyjadriť v tvare súčtu elementárnych zlomkov. Preto k integrovaniu rýdzo racionálnych funkcií stačí vedieť integrovať všetky 4 typy elem. zlomkov.

1) Integrál prvého typu zlomkov zintegrujeme podľa

$$\int \frac{f^{'}(x)}{f(x)}\,\mathrm{d}x = ln|f(x)| + C$$

$$\int \frac{a}{x-r}\,\mathrm{d}x = a\int \frac{1}{x-r}\,\mathrm{d}x = a\ln|x-r| + C.$$

Integrovanie racionálnych funkcií

b) **Integrovanie rýdzo racionálnych funkcií**

Každú rýdzo racionálnu funkciu môžeme vyjadriť v tvare súčtu elementárnych zlomkov. Preto k integrovaniu rýdzo racionálnych funkcií stačí vedieť integrovať všetky 4 typy elem. zlomkov.

1) Integrál prvého typu zlomkov zintegrujeme podľa

$$\int \frac{f^{'}(x)}{f(x)}\,\mathrm{d}x = ln|f(x)| + C$$

$$\int \frac{a}{x-r}\,\mathrm{d}x = a\int \frac{1}{x-r}\,\mathrm{d}x = a\ln|x-r| + C.$$

Príklad 10

Vypočítame $\int \frac{3}{2-5x}\,\mathrm{d}x$.

Integrovanie racionálnych funkcií

b) **Integrovanie rýdzo racionálnych funkcií**

Každú rýdzo racionálnu funkciu môžeme vyjadriť v tvare súčtu elementárnych zlomkov. Preto k integrovaniu rýdzo racionálnych funkcií stačí vedieť integrovať všetky 4 typy elem. zlomkov.

1) Integrál prvého typu zlomkov zintegrujeme podľa

$$\int \frac{f^{'}(x)}{f(x)}\,\mathrm{d}x = ln|f(x)| + C$$

$$\int \frac{a}{x-r}\,\mathrm{d}x = a\int \frac{1}{x-r}\,\mathrm{d}x = a\ln|x-r| + C.$$

Príklad 10

Vypočítame $\int \frac{3}{2-5x}\,\mathrm{d}x$.

Riešenie:

$$\int \frac{3}{2-5x}\,\mathrm{d}x = -\frac{3}{5}\int \frac{\mathrm{d}x}{x-\frac{2}{5}} = -\frac{3}{5}\ln\left|x-\frac{2}{5}\right| + C.$$

Integrovanie racionálnych funkcií

2) Integrál druhého typu zlomkov Pre $n > 1$

$$\int \frac{a}{(x-r)^n}\,\mathrm{d}x \overset{(t=x-r)}{=} a\int t^{-n}\mathrm{d}t = a\frac{t^{-n+1}}{-n+1}+C = \frac{a}{(1-n)(x-r)^{n-1}}+C.$$

Integrovanie racionálnych funkcií

2) Integrál druhého typu zlomkov Pre $n > 1$

$$\int \frac{a}{(x-r)^n}\,\mathrm{d}x \overset{(t=x-r)}{=} a\int t^{-n}\mathrm{d}t = a\frac{t^{-n+1}}{-n+1}+C = \frac{a}{(1-n)(x-r)^{n-1}}+C.$$

Príklad 11

Vypočítame $\int \frac{8}{(2x+3)^4}\,\mathrm{d}x$.

Integrovanie racionálnych funkcií

2) Integrál druhého typu zlomkov Pre $n > 1$

$$\int \frac{a}{(x-r)^n}\,\mathrm{d}x \overset{(t=x-r)}{=} a\int t^{-n}\mathrm{d}t = a\frac{t^{-n+1}}{-n+1}+C = \frac{a}{(1-n)(x-r)^{n-1}}+C.$$

Príklad 11

Vypočítame $\int \frac{8}{(2x+3)^4}\,\mathrm{d}x$.

Riešenie:

$$\begin{aligned}\int \frac{8}{(2x+3)^4}\,\mathrm{d}x &= 8\int \frac{\mathrm{d}x}{2^4(x+\frac{3}{2})^4} \overset{(t=x+\frac{3}{2})}{=} \frac{1}{2}\int t^{-4}\,\mathrm{d}t = \\ &= \frac{1}{2}\cdot\frac{t^{-3}}{-3}+C = -\frac{1}{6(x+\frac{3}{2})^3}+C.\end{aligned}$$

Integrovanie racionálnych funkcií

3) Tretí typ zlomku $\frac{ax+b}{x^2+px+q}$, kde $p^2-4q<0$, integrujeme nasledovne:

Integrovanie racionálnych funkcií

3) Tretí typ zlomku $\frac{ax+b}{x^2+px+q}$, kde $p^2-4q<0$, integrujeme nasledovne:

1) Algebraickými úpravami **rozdelíme zlomok na dva zlomky**, ktorých menovatele sú zhodné s menovateľom pôvodného zlomku. **Čitateľ prvého je lineárna funkcia**, ktorá je číselným násobkom derivácie menovateľa **a čitateľ druhého je číslo**:

$$\frac{ax+b}{x^2+px+q}=\frac{\frac{a}{2}(2x+p)}{x^2+px+q}+\frac{b-\frac{ap}{2}}{x^2+px+q}.$$

Integrovanie racionálnych funkcií

3) Tretí typ zlomku $\frac{ax+b}{x^2+px+q}$, kde $p^2 - 4q < 0$, integrujeme nasledovne:
1) Algebraickými úpravami **rozdelíme zlomok na dva zlomky**, ktorých menovatele sú zhodné s menovateľom pôvodného zlomku. **Čitateľ prvého je lineárna funkcia**, ktorá je číselným násobkom derivácie menovateľa **a čitateľ druhého je číslo**:

$$\frac{ax+b}{x^2+px+q} = \frac{\frac{a}{2}(2x+p)}{x^2+px+q} + \frac{b - \frac{ap}{2}}{x^2+px+q}.$$

2) Prvý zlomok integrujeme podľa

$$\int \frac{f'(x)}{f(x)}\,\mathrm{d}x = ln|f(x)| + C$$

$$\int \frac{\frac{a}{2}(2x+p)}{x^2+px+q}\,\mathrm{d}x = \frac{a}{2}\int \frac{2x+p}{x^2+px+q}\,\mathrm{d}x = \frac{a}{2}\ln(x^2+px+q) + C.$$

Integrovanie racionálnych funkcií

3) Tretí typ zlomku $\frac{ax+b}{x^2+px+q}$, kde $p^2 - 4q < 0$, integrujeme nasledovne:
1) Algebraickými úpravami **rozdelíme zlomok na dva zlomky**, ktorých menovatele sú zhodné s menovateľom pôvodného zlomku. **Čitateľ prvého je lineárna funkcia**, ktorá je číselným násobkom derivácie menovateľa **a čitateľ druhého je číslo**:

$$\frac{ax+b}{x^2+px+q} = \frac{\frac{a}{2}(2x+p)}{x^2+px+q} + \frac{b - \frac{ap}{2}}{x^2+px+q}.$$

2) Prvý zlomok integrujeme podľa

$$\int \frac{f'(x)}{f(x)}\,\mathrm{d}x = ln|f(x)| + C$$

$$\int \frac{\frac{a}{2}(2x+p)}{x^2+px+q}\,\mathrm{d}x = \frac{a}{2}\int \frac{2x+p}{x^2+px+q}\,\mathrm{d}x = \frac{a}{2}\ln(x^2+px+q) + C.$$

3) Integrál druhého zlomku úpravami a substitúciou prevedieme na $\int \frac{\mathrm{d}t}{t^2+a^2}$.

Integrovanie racionálnych funkcií

Príklad 12

Vypočítame integrál $\int \frac{3x-1}{x^2+4x+10}\,\mathrm{d}x$

Integrovanie racionálnych funkcií

Príklad 12

Vypočítame integrál $\int \frac{3x-1}{x^2+4x+10}\,\mathrm{d}x$

Riešenie: Najskôr upravíme integrovaný zlomok na súčet dvoch zlomkov

$$\frac{3x-1}{x^2+4x+10} = \frac{\frac{3}{2}(2x+4)}{x^2+4x+10} + \frac{-7}{x^2+4x+10}.$$

Počítame prvý integrál

$$\frac{3}{2}\int \frac{2x+4}{x^2+4x+10}\,\mathrm{d}x = \frac{3}{2}\ln(x^2+4x+10) + C =$$

Počítame druhý integrál

$$\int \frac{-7}{x^2+4x+10}\,\mathrm{d}x = -7\int \frac{\mathrm{d}x}{(x+2)^2+6} = -\frac{7}{\sqrt{6}}\operatorname{arctg}\frac{x+2}{\sqrt{6}} + C$$

Integrovanie racionálnych funkcií

Výsledok je súčtom obidvoch integrálov:

$$\int \frac{3x-1}{x^2+4x+10}\,\mathrm{d}x = \frac{3}{2}\ln(x^2+4x+10) - \frac{7}{\sqrt{6}}\operatorname{arctg}\frac{x+2}{\sqrt{6}} + C.$$

Integrovanie racionálnych funkcií

4) Integrály zo zlomkov štvrtého typu $\frac{ax+b}{(x^2+px+q)^n}$ pre $n > 1$ sa počítajú zložitou rekurentnou metódou (*pozn.* takéto typy príkladov nebudeme počítať).

Integrovanie racionálnych funkcií

Príklad 13

Vypočítame integrál $\int \frac{4x^3-14x^2+28x-7}{(x-2)^2(x^2-2x+5)}\,\mathrm{d}x$.

Integrovanie racionálnych funkcií

Príklad 13

Vypočítame integrál $\int \frac{4x^3-14x^2+28x-7}{(x-2)^2(x^2-2x+5)}\,\mathrm{d}x$.

Riešenie:

1) Integrovanú rýdzo racionálnu funkciu rozložíme na elementárne zlomky

$$\frac{4x^3-14x^2+28x-7}{(x-2)^2(x^2-2x+5)} = \frac{2}{x-2} + \frac{5}{(x-2)^2} + \frac{2x-3}{x^2-2x+5}.$$

Integrovanie racionálnych funkcií

Príklad 13

Vypočítame integrál $\int \frac{4x^3-14x^2+28x-7}{(x-2)^2(x^2-2x+5)}\,\mathrm{d}x$.

Riešenie:

1) Integrovanú rýdzo racionálnu funkciu rozložíme na elementárne zlomky

$$\frac{4x^3-14x^2+28x-7}{(x-2)^2(x^2-2x+5)} = \frac{2}{x-2} + \frac{5}{(x-2)^2} + \frac{2x-3}{x^2-2x+5}.$$

2) Integrujeme prvý integrál

$$\int \frac{2}{x-2}\,\mathrm{d}x = 2\ln|x-2| + C.$$

3) Integrujeme druhý integrál

$$\int \frac{5}{(x-2)^2}\,\mathrm{d}x = -\frac{5}{x-2} + C.$$

Integrovanie racionálnych funkcií

4) Podobne ako v predchádzajúcom príklade integrujeme tretí integrál

$$
\begin{aligned}
\int \frac{2x-3}{x^2-2x+5}\,\mathrm{d}x &= \int \left(\frac{2x-2}{x^2-2x+5} - \frac{1}{x^2-2x+5} \right) \mathrm{d}x = \\
&= \ln(x^2-2x+5) - \int \frac{\mathrm{d}x}{(x-1)^2+4} = \\
&= \ln(x^2-2x+5) - \frac{1}{2}\operatorname{arctg}\left(\frac{x-1}{2}\right) + C.
\end{aligned}
$$

5) Sčítame všetky vypočítané integrály

$$
\int \frac{4x^3-14x^2+28x-7}{(x-2)^2(x^2-2x+5)}\,\mathrm{d}x =
$$

$$
= 2\ln|x-2| - \frac{5}{x-2} + \ln(x^2-2x+5) - \frac{1}{2}\operatorname{arctg}\left(\frac{x-1}{2}\right) + C.
$$

Integrovanie racionálnych funkcií

c) **Integrovanie racionálnych funkcií**

Integrovanie racionálnych funkcií

c) **Integrovanie racionálnych funkcií**

Každá racionálna funkcia sa dá vyjadriť ako súčet polynóma a rýdzo racionálnej funkcie.

Integrovanie racionálnych funkcií

c) Integrovanie racionálnych funkcií

Každá racionálna funkcia sa dá vyjadriť ako súčet polynóma a rýdzo racionálnej funkcie.

Príklad 14

Vypočítame integrál $\int \frac{x^8+11x^6+15x^4+3x^3+12x^2-18x+27}{x^5+9x^3}\,\mathrm{d}x$.

Integrovanie racionálnych funkcií

c) Integrovanie racionálnych funkcií

Každá racionálna funkcia sa dá vyjadriť ako súčet polynóma a rýdzo racionálnej funkcie.

Príklad 14

Vypočítame integrál $\int \frac{x^8+11x^6+15x^4+3x^3+12x^2-18x+27}{x^5+9x^3}\,\mathrm{d}x$.

Riešenie:

1) Funkciu **rozložíme na súčet polynóma a rýdzo racionálnej funkcie**. Rozklad menovateľa na súčin je $x^3(x^2+9)$:

$$\frac{x^8+11x^6+15x^4+3x^3+12x^2-18x+27}{x^5+9x^3} =$$

$$= x^3+2x+\frac{1}{x}-\frac{2}{x^2}+\frac{3}{x^3}-\frac{4x-5}{x^2+9}.$$

Integrovanie racionálnych funkcií

2) Integrál polynóma je jednoduchý $\int (x^3 + 2x)\,\mathrm{d}x = \frac{x^4}{4} + x^2 + C$.

Integrovanie racionálnych funkcií

2) Integrál polynóma je jednoduchý $\int (x^3 + 2x)\,\mathrm{d}x = \frac{x^4}{4} + x^2 + C$.
3) Integrály prvých troch zlomkov sú jednoduché, integrál posledného je

$$\int \frac{4x-5}{x^2+9}\,\mathrm{d}x = 2\int \frac{2x}{x^2+9}\,\mathrm{d}x - 5\int \frac{\mathrm{d}x}{x^2+9} = 2\ln(x^2+9) - \frac{5}{3}\operatorname{arctg}\frac{x}{3} + C.$$

Integrovanie racionálnych funkcií

2) Integrál polynóma je jednoduchý $\int (x^3 + 2x)\,\mathrm{d}x = \frac{x^4}{4} + x^2 + C$.
3) Integrály prvých troch zlomkov sú jednoduché, integrál posledného je

$$\int \frac{4x-5}{x^2+9}\,\mathrm{d}x = 2\int \frac{2x}{x^2+9}\,\mathrm{d}x - 5\int \frac{\mathrm{d}x}{x^2+9} = 2\ln(x^2+9) - \frac{5}{3}\operatorname{arctg}\frac{x}{3} + C.$$

4) Výsledok je súčtom všetkých integrálov

$$\int \frac{x^8 + 11x^6 + 15x^4 + 3x^3 + 12x^2 - 18x + 27}{x^5 + 9x^3}\,\mathrm{d}x =$$

$$= \frac{x^4}{4} + x^2 + \ln|x| + \frac{2}{x} - \frac{3}{2x^2} - 2\ln(x^2+9) + \frac{5}{3}\operatorname{arctg}\frac{x}{3} + C.$$

Integrovanie racionálnych funkcií

Príklad 15

Vypočítajte integrály (Satko, str.60/pr.2 c), d), e), h)):

a) $\int \frac{x^3-2x^2+9}{x^2-x-2}\,\mathrm{d}x$

b) $\int \frac{x}{x^3-3x+2}\,\mathrm{d}x$

c) $\int \frac{x^2+x+12}{x^3+7x^2+11x+5}\,\mathrm{d}x$ jeden koreň menovateľa je $x=-1$

d) $\int \frac{7-x}{x^3-x^2+3x+5}\,\mathrm{d}x$ jeden koreň menovateľa je $x=-1$

Ďakujem za pozornosť.