Rezíduá

Oľga Stašová

Ústav informatiky a matematiky
Fakulta elektrotechniky a informatiky
Slovenská technická univerzita

letný semester 2023/2024

Rezíduá

Rezídua **sa využívajú v mnohých praktických aplikáciách**, napr. pri transformáciách.

Transformácie budete preberať na predmete **Matematika 3**.

Pri transformáciách funkcie transformujeme (meníme **podľa nejakých pravidiel** a **za nejakých predpokladov**) na funkcie, s ktorými sa jednoduchšie pracuje.

- Niektoré diferenciálne rovnice vieme jednoduchšie a rýchlejšie vyriešiť pomocou Laplaceovej transformácie.
  Neznámou v diferenciálnej rovnici je funkcia.
  - Funkcie **reálnej** premennej sú Laplaceovsky transformované na funkcie **komplexnej** premennej. Rovnica je vyriešená v komplexnej analýze. Jej výsledok (funkcia **komplexnej** premennej) je spätne ztransformovaný **inverznou** Laplaceovou transformáciou na funkciu reálnej premennej, ktorá je výsledkom diferenciálnej rovnice, ktorú riešime.
- Niektoré diferenčné rovnice vieme jednoduchšie a rýchlejšie vyriešiť pomocou Z-transformácie.
  Neznámou v diferenčnej rovnici je postupnosť.

Rezíduá

Rezíduum

Nech $f : D(\subset \mathbf{C}) \to \mathbf{C}$ je analytická s výnimkou izolovaného singulárneho bodu $z = a$. Potom hodnotu $\frac{1}{2\pi i} \int_C f(z)\, dz$, kde C je jednoduchá, po častiach hladká uzavretá kladne orientovaná krivka, taká že $a \subset IntC$ (interior = vnútro krivky C); nazývame rezíduum funkcie $f(z)$ v bode $z = a$ a označujeme $res_{z=a}\, f(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_C f(z)\, dz$.

Rezíduá

Keď rozvinieme funkciu $f(z)$ v bode $z = a$ do Laurentovho radu na prstencovom okolí $O_r^\circ(a)$ (iný zápis P(a,0,r)) a použijeme nasledujúcu vetu

Veta z prednášky: Laurentove rady

Nech $f : P(a, r, R) \longrightarrow \mathbf{C}$ je analytická funkcia. Potom existuje **jediny** Laurentov rad, ktorý na $P(a, r, R)$ konverguje ku funkcií $f(z)$. Koeficienty Laurentovho radu majú tvar

$$c_n = \frac{1}{2\pi i} \int_C \frac{f(z)}{(z-a)^{n+1}} dz,\ n = 0, \pm 1, \pm 2, ...,$$

kde C je ľubovoľná jednoduchá, po častiach hladká, kladne orientovaná krivka, ktorá leží v $P(a, r, R)$ tak, že $a \in IntC$.

tak je vidieť, že platí:

$$res_{z=a} f(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_C f(z) dz = c_{-1},$$

kde c_{-1} je koeficient v Laurentovom rade funkcie $f(z)$ pri člene $(z-a)^{-1}$.

Výpočet rezídua v podstatne singulárnom bode

Rezíduum v podstatne singulárnom bode

Nech $z = a$ je podstatne singulárny bod funkcie f, potom $res_{z=a}f(z)$ vieme určiť **iba** z rozvoja funkcie f do Laurentovho radu v bode $z = a$ na nejakom prstencovom okolí $P(a, 0, r)$ a platí, že $res_{z=a}f(z) = c_{-1}$.

Príklad

Nájdite rezíduum funkcie $f : \mathbf{C} \setminus \{0\} \longrightarrow \mathbf{C}$, $f(z) = e^{-\frac{1}{z}}$.

Riešenie:

$$e^z = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!}, \quad \forall z \in \mathbf{C} \qquad Pozn. \left(z^{-1}\right)^n = z^{-1\cdot n} = z^{-n}$$

$$f(z) = e^{\frac{1}{z}} = e^{z^{-1}} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^{-n}}{n!}, \quad \forall z \in \mathbf{C} \setminus \{0\} = P(0, 0, \infty), \ (|z| > 0),$$

teda hlavná časť Laurentovho radu má nekonečne veľa členov
a to implikuje fakt, že bod $z = 0$ je podstatne singulárny bod.

Príklad - výpočet rezídua v podstatne singulárnom bode

Rezíduum v podstatne singulárnom bode

Nech $z = a$ je podstatne singulárny bod funkcie f, potom $res_{z=a} f(z)$ vieme určiť **iba** z rozvoja funkcie f do Laurentovho radu v bode $z = a$ na nejakom prstencovom okolí $P(a, 0, r)$ a platí, že $res_{z=a} f(z) = c_{-1}$.

Príklad

Nájdite rezíduum funkcie $f : \mathbf{C} \setminus \{0\} \longrightarrow \mathbf{C}$, $f(z) = e^{-\dfrac{1}{z}}$.

Riešenie:

$$f(z) = e^{\frac{1}{z}} = e^{z^{-1}} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^{-n}}{n!} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} z^{-n}, \quad \forall z \in \mathbf{C} \setminus \{0\},$$

Bod $z = 0$ je podstatne singulárny bod.
$res_{z=a} f(z) = c_{-1}$, kde c_{-1} je koeficient pri člene $z^{-1} \Rightarrow n = 1$, teda
$res_{z=a} f(z) = c_{-1} = \dfrac{1}{1!} = 1.$

Výpočet rezídua v póle

Veta

Nech $z = a$ je pól m-tého rádu funkcie f. Potom

$$res_{z=a} f(z) = \frac{1}{(m-1)!} \lim_{z\to a} \frac{d^{m-1}}{dz^{m-1}} \left[(z-a)^m f(z)\right].$$

Lemma

*Nech $z = a$ je jednoduchý pól (t.j. **pól 1. rádu**) funkcie f. Potom*

$$res_{z=a} f(z) = \lim_{z\to a} \left[(z-a) f(z)\right].$$

Veta

Nech sú funkcie g a h analytické v bode $z = a$.
Nech $h(a) \neq 0$, $g(a) = 0$ a $g'(a) \neq 0$.
Potom je bod $z = a$ jednoduchý pól funkcie $f = \dfrac{h}{g}$ a platí

$$res_{z=a} f(z) = \frac{h(a)}{g'(a)}.$$

Príklad - výpočet rezídua v póle

Príklad

Nájdite rezídua funkcie $f : \mathbf{C} \setminus \{0,1\} \longrightarrow \mathbf{C}$, $f(z) = \dfrac{z^3 + z^2 + 2}{z(z-1)^2}$.

Postup riešenia:

- Reziduá sa počítajú v singulárnych bodoch, takže **najskôr nájdeme všetky singulárne body**.
- **Potom určíme typ nájdených singulárnych bodov**, t.j., či sa jedná o odstrániteľný singulárny bod, pól alebo podstatne singulárny bod.
- Podľa typu singulárneho bodu zvolíme spôsob výpočtu rezídua.

Príklad - výpočet rezídua v póle

Príklad

Nájdite rezídua funkcie $f : \mathbf{C} \setminus \{0,1\} \longrightarrow \mathbf{C}$, $f(z) = \dfrac{z^3 + z^2 + 2}{z(z-1)^2}$.

Veta

Nech bod $z = a$ *je nulový bod m-tého rádu funkcie* $g(z)$
(t.j. $g(z) = (z-a)^m \Phi(z)$, $\Phi(a) \neq 0$
a Φ *je analytická funkcia definovaná na nejakom okolí* $O_r(a)$ *bodu* $z = a$*).*
Potom bod $z = a$ *je pól m-tého rádu funkcie* $f = \dfrac{h}{g}$*, kde* h *je analytická funkcia definovaná na* $O_r(a)$ *a* $h(a) \neq 0$.

Pozn. V príkladoch sa často vyskytuje $\Phi(z) = 1$.
Pozn. 2 Ak $m = 1$ hovoríme, že bod $z = a$ je jednoduchý pól.

Riešenie: Bod $z = 0$ je jednoduchý pól a bod $z = 1$ je pól 2. rádu funkcie f.

Príklad - výpočet rezídua v póle

Príklad

Nájdite rezídua funkcie $f : \mathbf{C} \setminus \{0,1\} \longrightarrow \mathbf{C}$, $f(z) = \dfrac{z^3+z^2+2}{z(z-1)^2}$.

Riešenie: Bod $z=0$ je jednoduchý pól a bod $z=1$ je pól 2. rádu funkcie f.

$$res_{z=a} f(z) = \lim_{z\to a} \left[(z-a)f(z)\right]$$

$$res_{z=0} f(z) = \lim_{z\to 0} \left[z\frac{z^3+z^2+2}{z(z-1)^2}\right] = \lim_{z\to 0}\left[\frac{z^3+z^2+2}{(z-1)^2}\right] = \frac{2}{1} = 2$$

$$res_{z=a} f(z) = \frac{1}{(m-1)!}\lim_{z\to a}\frac{d^{m-1}}{dz^{m-1}}\left[(z-a)^m f(z)\right].$$

$$res_{z=1} f(z) = \lim_{z\to 1}\frac{d}{dz}\left[(z-1)^2\frac{z^3+z^2+2}{z(z-1)^2}\right] = \lim_{z\to 1}\frac{d}{dz}\left[\frac{z^3+z^2+2}{z}\right] =$$

$$= \lim_{z\to 1}\frac{d}{dz}\left[z^2+z+2z^{-1}\right] = \lim_{z\to 1}\left[2z+1-2z^{-2}\right] = \lim_{z\to 1}\left[2z+1-\frac{2}{z^2}\right] = 1$$

Príklad - výpočet rezídua v póle

Veta

Nech sú funkcie g a h analytické v bode $z = a$.
Nech $h(a) \neq 0, \quad g(a) = 0, \quad g'(a) \neq 0$.
Potom je bod $z = a$ jednoduchý pól funkcie $f = \dfrac{h}{g}$ a $res_{z=a} f(z) = \dfrac{h(a)}{g'(a)}$.

Príklad

Nájdite rezídua funkcie $f : \mathbf{C} \setminus \{(2k+1)\frac{\pi}{2},\ k \in \mathbf{Z}\} \longrightarrow \mathbf{C},\ f(z) = tg\, z$ v bode $a = \dfrac{\pi}{2}$.

Riešenie: $f(z) = tg\, z = \dfrac{\sin z}{\cos z}$

$$\sin\frac{\pi}{2} = 1 \neq 0, \qquad \cos\frac{\pi}{2} = 0, \qquad \cos' z|_{z=\frac{\pi}{2}} = -\sin\frac{\pi}{2} = -1 \neq 0.$$

$$res_{z=a} f(z) = \frac{h(a)}{g'(a)} \Rightarrow res_{z=\frac{\pi}{2}} tg\, z = \frac{\sin\frac{\pi}{2}}{-\sin\frac{\pi}{2}} = \frac{1}{-1} = -1.$$

Cauchyho veta o rezíduách (CVR)

Veta

*Nech $D \subset$ **C** je jednoducho súvislá oblasť.*
Nech C je jednoduchá, po častiach hladká uzavretá krivka taká, že $C \subset D$.
*Nech $f : D(\subset$ **C**$) \longrightarrow$ **C** je analytická funkcia* **s výnimkou konečného počtu izolovaných singulárnych bodov** $z_1, z_2, ..., z_n$ *ležiacich vo vnútri krivky C.*

- *Potom, ak krivka C je kladne orientovaná, tak*

$$\int_C f(z)dz = \ 2\pi i \sum_{k=1}^{n} res_{z=z_k} f(z).$$

- *Potom, ak krivka C je záporne orientovaná, tak*

$$\int_C f(z)dz = -2\pi i \sum_{k=1}^{n} res_{z=z_k} f(z).$$

Príklad - Cauchyho veta o rezíduách (CVR)

Príklad

Vypočítajte

$$\int_C \frac{1}{(z-1)^2(z^2+1)}dz,$$

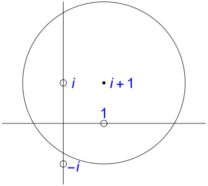
kde $C : \varphi : \langle 0, 2\pi \rangle \longrightarrow \mathbf{C}$, $\varphi(t) = 1 + 2\cos t + i(1 + 2\sin t)$ *je kladne orientovaná.*

Riešenie: $\varphi(t) = stred + polomer(\cos t + i \sin t)$

$\varphi(t) = 1 + 2\cos t + i(1 + 2\sin t) = 1 + i + 2(\cos t + i \sin t)$

menovateľ $= (z-1)^2(z-i)(z+i)$, singulárné body: $z = 1$, $z = i$, $z = -i$.

Vnútri krivky C ležia z nich iba $z = 1$ a $z = i$.



$\int_C f(z) = 2\pi i(res_{z=1} f(z) + res_{z=i} f(z))$

Príklad - Cauchyho veta o rezíduách (CVR)

$$\int_C \frac{1}{(z-1)^2(z^2+1)}dz = \int_C \frac{1}{(z-1)^2(z+i)(z-i)}dz,$$

Veta

Nech bod $z = a$ je nulový bod m-tého rádu funkcie $g(z)$
(t.j. $g(z) = (z-a)^m\Phi(z)$, $\Phi(a) \neq 0$
a Φ je analytická funkcia definovaná na nejakom okolí $O_r(a)$ bodu $z = a$).
Potom bod $z = a$ je pól m-tého rádu funkcie $f = \dfrac{h}{g}$, kde h je analytická funkcia definovaná na $O_r(a)$ a $h(a) \neq 0$.

Vnútri krivky C ležia iba singulárne body $z = 1$ a $z = i$.

Bod $z = 1$ je nulový bod 2. rádu a zároveň aj pól 2. rádu.
Bod $z = i$ je jednoduchý nulový bod a zároveň aj jednoduchý pól.
Pozn. jednoduchý $=$ 1. rádu.

Príklad - výpočet rezídua v póle

$$\int_C \frac{1}{(z-1)^2(z^2+1)}dz = \int_C \frac{1}{(z-1)^2(z+i)(z-i)}dz,$$

Bod $z = i$ je jednoduchý pól a bod $z = 1$ je pól 2. rádu funkcie f.

$$res_{z=a} f(z) = \frac{1}{(m-1)!} \lim_{z\to a} \frac{d^{m-1}}{dz^{m-1}} \left[(z-a)^m f(z)\right].$$

$$res_{z=1} f(z) = \lim_{z\to 1} \frac{d}{dz}\left[(z-1)^2 \frac{1}{(z-1)^2(z^2+1)}\right] = \lim_{z\to 1} \frac{d}{dz}\left[\frac{1}{(z^2+1)}\right] =$$

$$= \lim_{z\to 1} \frac{-2z}{(z^2+1)^2} = \frac{-2}{(1^2+1)^2} = \frac{-2}{4} = \frac{-1}{2}.$$

$$res_{z=a} f(z) = \lim_{z\to a} \left[(z-a) f(z)\right]$$

$$res_{z=i} f(z) = \lim_{z\to i} \left[(z-i)\frac{1}{(z-1)^2(z+i)(z-i)}\right] =$$

$$\lim_{z\to i} \left[\frac{1}{(z-1)^2(z+i)}\right] = \left[\frac{1}{(i-1)^2(i+i)}\right] = \left[\frac{1}{(i^2-2i+1)2i}\right] = \frac{1}{-4i^2} = \frac{1}{4}$$

$$\int_C f(z) = 2\pi i(res_{z=1} f(z) + res_{z=i} f(z)) = 2\pi i\left(\frac{-1}{2} + \frac{1}{4}\right) = -\frac{\pi i}{2}.$$

Ďakujem za pozornosť.