

Limita, nekonečno a spojitost'

Ol'ga Stašová

Ústav informatiky a matematiky
Fakulta elektrotechniky a informatiky
Slovenská technická univerzita

letný semester 2023/2024

Vlastná a nevlastná limita

- Fakt, že funkcia f má v bode z_0 limitu a zapisujeme nasledovne:

$$\lim_{z \rightarrow z_0} f(z) = a.$$

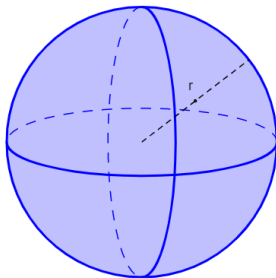
- Ak bod $z_0 \neq \infty$, tak hovoríme o **limite vo vlastnom bode**, v opačnom prípade hovoríme o **limite v nevlastnom bode**.
- Ak hodnota limity $a \neq \infty$, tak hovoríme o **vlastnej limite**, v opačnom prípade hovoríme o **nevlastnej limite**.
- Ak má funkcia f v bode z_0 vlastnú limitu (t.j. $a \neq \infty$), hovoríme, že v bode z_0 konverguje alebo je **konvergentná**, v opačnom prípade v bode z_0 diverguje alebo je **divergentná**.

Nekonečno v komplexnej analýze

Ku množine všetkých konečných komplexných čísel je pridané **jedno** nekonečné komplexné číslo, ktoré označujeme ∞ a nazývame **nekonečno**. Túto množinu označujeme $\overline{C} = C \cup \{\infty\}$.

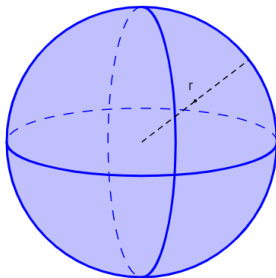
Rozšírená aritmetika:

$$\forall a \in C : -\infty = \infty, \quad a \pm \infty = \infty, \quad \frac{a}{0} = \infty \text{ pre } a \neq 0.$$



Obr.: Znázornenie množiny $\overline{C} = C \cup \{\infty\}$.

Znázornenie množiny $\overline{C} = C \cup \{\infty\}$.



Obvod gule (circumference of the sphere) v ekvatoriálnej rovine reprezentuje zakrivenú reálnu os (curved real axis).

Predo-zadný (front-back) obvod gule reprezentuje zakrivenú imaginárnu os.

Predný (front) priesečník týchto 2 obvodov (osi - axes) reprezentuje priesečník reálnej a komplexnej osi, t.j. bod $z = 0 + 0i$.

Zadný (back) priesečník týchto 2 obvodov reprezentuje **jediné nekonečno** (∞) v C .

Pravidlá pre limity

Limita **zachováva algebraické operácie**, t.j. ak $\lim_{z \rightarrow z_0} f(z) = F$ a

$\lim_{z \rightarrow z_0} g(z) = G$, tak

$$\lim_{z \rightarrow z_0} (f \pm g)(z) = F \pm G,$$

$$\lim_{z \rightarrow z_0} (f \cdot g)(z) = F \cdot G,$$

$$\lim_{z \rightarrow z_0} \left(\frac{f}{g} \right) (z) = \frac{F}{G}, \quad ak \quad g, G \neq 0.$$

Spojitosť funkcie

Funkcia $f(z)$ definovaná v niektorom okolí bodu z_0 **je spojitá v bode** z_0 , **ak** $\lim_{z \rightarrow z_0} f(z) = f(z_0)$, **pričom** $f(z_0) \neq \infty$.

- Ak je funkcia spojitá v bode z_0 , **musí byť** v tomto bode aj definovaná.
- Ak má funkcia limitu v bode z_0 , **môže ale nemusí byť** v tomto bode definovaná.