# Komplexná funkcia komplexnej premennej

Oľga Stašová

Ústav informatiky a matematiky
Fakulta elektrotechniky a informatiky
Slovenská technická univerzita

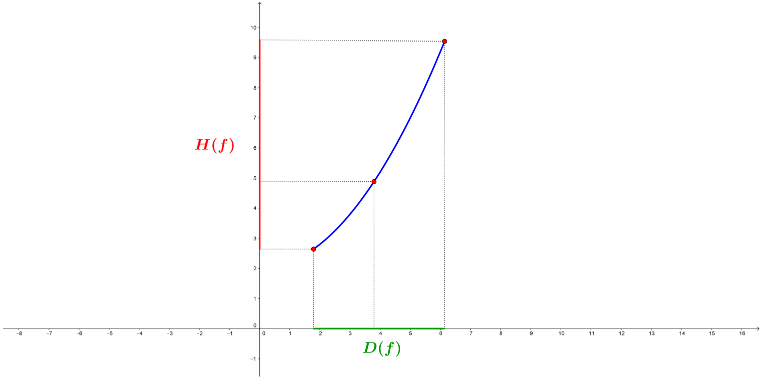
letný semester 2023/2024

# Obsah prednášky

- **Reálna funkcia reálnych premenných**
- **Komplexná funkcia komplexnej premennej**

# Reálna funkcia jednej reálnej premennej

**Reálna funkcia jednej reálnej premennej** $f : X \to Y$, $y = f(x)$ je zobrazenie množiny $X$ do množiny $Y$.
To znamená, že každému prvku $x \in X$ vieme **jednoznačne** priradiť prvok $y \in Y$ tak, že platí $f(x) = y$.
$x$ je nezávislá premenná (vzor),
$y$ je závislá premenná (funkčná hodnota, obraz).



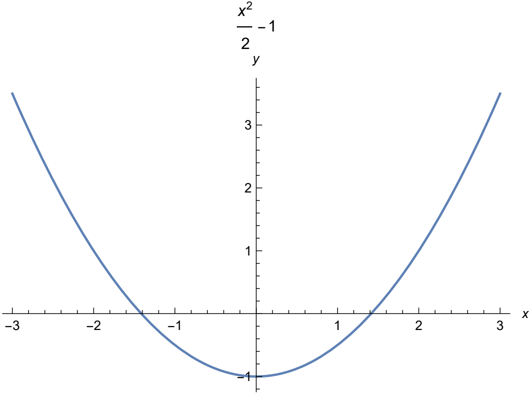
# Reálna funkcia jednej reálnej premennej

**Veta z predchádzajúceho slajdu:**
To znamená, že každému prvku $x \in X$ vieme **jednoznačne** priradiť prvok $y \in Y$ tak, že platí $f(x) = y$.

**Jednoznačne priradiť** znamená, že každému prvku $x \in X$ sa priradí **práve jeden** (presne jeden, jediný, matem. označenie $1!$) prvok $y \in Y$ a to podľa presne definovaného pravidla, v našom prípade je to pravidlo: $y = f(x)$.
Ak $f(x) = x^2 + 5$, tak prvku $x = 3$ priradíme prvok $y = 14$, lebo $f(3) = 3^2 + 5 = 14$.

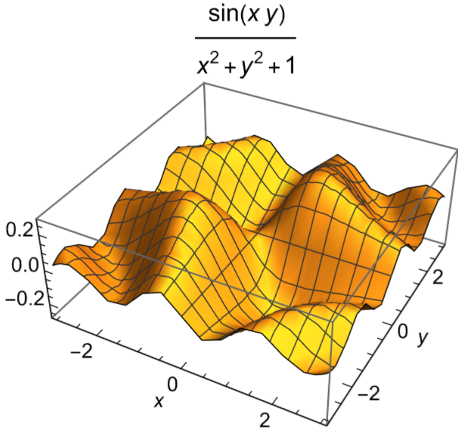
# Reálna funkcia jednej reálnej premennej $f : R \to R$

$$f(x) = \frac{x^2}{2} - 1$$

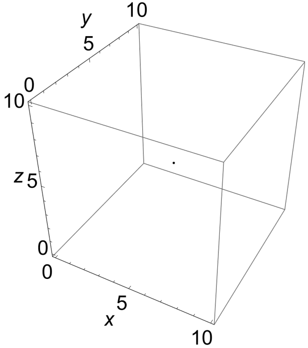


# Reálna funkcia 2 reálnych premenných $f : R^2 \to R$

$$f(x, y) = \frac{sin(x\,y)}{x^2 + y^2 + 1}$$



# Reálna funkcia 3 reálnych premenných $f : R^3 \to R$




Jednotlivým bodom A[x,y,z] priradíme hodnotu podľa nejakého predpisu napr. $f(x,y,z) = cos(x) + sin(y) + z^3$.
Zobrazujeme po rezoch, fixujeme jednu premennú napr. z:
f(x,y,-2), f(x,y,0),f(x,y,2),,,.

# Reálna funkcia 3 reálnych premenných $f : R^3 \to R$

**Aplikácie z praxe:** 3D teleso a funkciou je:

- teplota v jednotlivých bodoch.
- intenzita koncentrácie znečistenia v jednotlivých bodoch.
- intenzita šede (graylevel) v 3D obraze (medicínske aplikácie, radarové obrazy - detekcia chýb v priemyselných výrobkoch, v pilieroch mostov, hľadanie geologických ložísk, archeologických nálezísk).

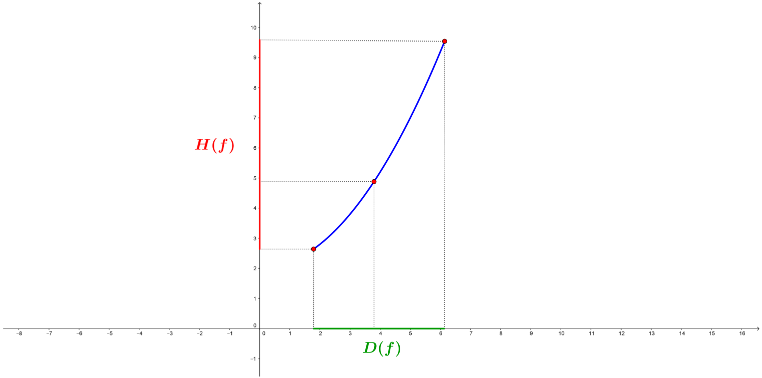
# Reálna funkcia reálnych premenných $f : R^m \to R^n$

**Aplikácie z praxe:**

- 3D farebný RGB obraz $f : R^3 \to R^3$ ($3$ farebné kanály RGB - red, green, blue).
- 3D farebný CMYK obraz $f : R^3 \to R^4$ ($4$ farebné kanály CMYK - cyan, magenta, yellow, karbon).
- Časovo-priestorové úlohy: $f : R^4 \to R$ 3D teleso v časovom intervale $f(x, y, z, t) =$ Funkcia reprezentuje napr.
    - šírenie tepla v telese v časovom intervale.
    - šírenie znečistenia vo vode v časovom intervale.
    - video pozostávajúce z 3D obrazov.

# Reálna funkcia jednej reálnej premennej

**Reálna funkcia jednej reálnej premennej** $f : X(\subset R) \to Y(\subset R)$,
$y = f(x)$ je zobrazenie množiny $X$ do množiny $Y$.
To znamená, že každému prvku $x \in X$ vieme **jednoznačne** priradiť prvok $y \in Y$ tak, že platí $f(x) = y$.
$x$ je nezávislá premenná (vzor),
$y$ je závislá premenná (funkčná hodnota, obraz).



# Komplexná funkcia komplexnej premennej $f : C \to C$

Komplexná funkcia komplexnej premennej $f : A\ (\subset C) \to C$, w=f(z) je zobrazenie množiny $A$ do množiny $C$. To znamená, že každému prvku $z \in A$ vieme priradiť:

- jeden prvok (hodnotu) $w \in C$ tak, že platí $f(z) = w$
  (v takom prípade $f$ nazývame **jednoznačná** funkcia) alebo
- viac prvkov (hodnôt)(môže ich byť aj $\infty$) $w \in C$ tak, že platí $f(z) = w$
  (v takom prípade $f$ nazývame **mnohoznačná** (viacznačná) funkcia).

$z$ je nezávislá premenná (vzor),
$w$ je závislá premenná (funkčná hodnota, obraz).
Množinu $A\ (\subset C)$ nazývame **definičný obor** funkcie $f$.

# Komplexná funkcia komplexnej premennej $f : C \to C$

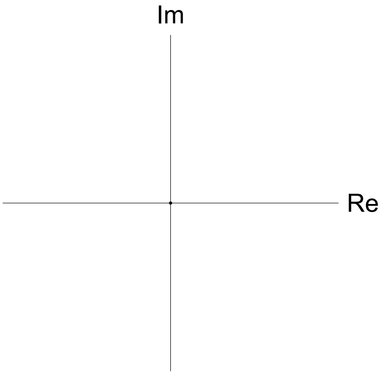
Komplexná funkcia komplexnej premennej $f : A\ (\subset C) \to C$, w=f(z)
Každému prvku $z \in A$ vieme priradiť:

- jeden prvok (hodnotu) $w \in C$ tak, že platí $f(z) = w$
  (v takom prípade $f$ nazývame **jednoznačná** funkcia) alebo
- viac prvkov (hodnôt) $w \in C$ tak, že platí $f(z) = w$
  (v takom prípade $f$ nazývame **mnohoznačná** (viacznačná) funkcia).

Príkladom **jednoznačnej** funkcie je napr. $f : C \to C$, $w = z^2$.
Príkladom **mnohoznačnej** funkcie je napr. $f : C \to C$, $w = \sqrt{z}$, ktorá každému $z = r(\cos\varphi + i\sin\varphi)$ $(r = |z|)$ priradí $2$ hodnoty:
$w_1 = \sqrt{r}(\cos\frac{\varphi}{2} + i\sin\frac{\varphi}{2})$ a $w_2 = \sqrt{r}(\cos\left(\frac{\varphi}{2} + \pi\right) + i\sin\left(\frac{\varphi}{2} + \pi\right))$.

# Komplexná funkcia komplexnej premennej $f : C \to C$

Komplexná funkcia komplexnej premennej $f : A\ (\subset C) \to C$, w=f(z).
Množinu $A\ (\subset C)$ nazývame **definičný obor** funkcie $f$.




Obr.: Komplexná rovina $C$. $A \subset C$

# Komplexná funkcia komplexnej premennej $f : C \to C$

Ak napíšeme komplexné čísla $z, w \in C$ v algebrickom tvare:
$z = x + iy, \quad x, y \in R$
$w = u + iv, \quad u, v \in R$
potom vieme vyjadriť funkciu $w$ nasledovne:

$$w = f(z) = f(x + iy) = u(x, y) + iv(x, y),$$

kde $u(x, y) = Re\, f(z)$, $v(x, y) = Im\, f(z)$, $u, v : R^2 \to R$.
Takýto tvar komplexnej funkcie sa používa pri riešení niektorých matematických (a aj odborných) úloh.

**Príklad:** Nájdite reálnu a imaginárnu časť funkcie $f : C \to C$, $w = z^2 + 5$
**Riešenie:** $z = x + iy$
$w = f(z) = f(x + iy) = z^2 + 5 = (x + iy)^2 + 5 = x^2 + 2xyi + i^2y^2 + 5 =$
$= (x^2 - y^2) + 5 + i2xy$ a z toho
$u(x, y) = x^2 - y^2 + 5$ a $v(x, y) = 2xy$.

# Teória pre funkcie reálnej a komplexnej premennej

V nasledujúcich prednáškach budeme často porovnávať teóriu (vety, definície):

- pre funkciu reálnej premennej $f : R \to R$

a

- pre funkciu komplexnej premennej $f : C \to C$.

**Symboly používané na označenie:**

$x$.....................reálna premenná
$f(x)$..................funkcia reálnej premennej
$z$.....................komplexna premenná
$f(z)$..................funkcia komplexnej premennej

Ďakujem za pozornosť.