Spojitosť $\lim\limits_{z\to z_0} f(z) = f(z_0)$

V nasledujúcich úlohach zistite, či je možné dodefinovať funkciu f(z) v bode z0, tak aby bola spojitá v tomto bode:

$f: \mathbb{C}\setminus\{0, 1+i\} \to \mathbb{C}$

$f(z) = \dfrac{z^3 - z^2 - iz^2 + iz - i + 1}{z^2 - z - iz}$ $\qquad z_0 = 1+i$

$1 = -1\cdot(-1) = -(i^2) = -i^2$

$$\lim_{z\to z_0} f(z) = \lim_{z\to 1+i} \frac{z^3 - z^2 - iz^2 + iz - i + 1}{z^2 - z - iz} = \frac{}{(1+i)^2 - (1+i) - i(1+i)} =$$

$$= \frac{}{\cancel{1} + \cancel{2i} + \cancel{i^2} - \cancel{1} - \cancel{i} - \cancel{i} - \cancel{i^2}} = \frac{}{0}$$

menovateľ sa pokúsime upraviť na tvar $A\cdot(z - z_0) = A(z-(1+i)) = A(z-1-i)$

Potom sa pokúsime upraviť čitateľ na tvar $B(z-1-i)$

$A\cdot C + B\cdot C = (A+B)C$

$$= \lim_{z\to 1+i} \frac{z^2(z-1-i) + i(z-1-i)}{z(z-1-i)} = \lim_{z\to 1+i} \frac{(z^2+i)\cancel{(z-1-i)}}{z\,\cancel{(z-1-i)}} = \lim_{z\to 1+i} \frac{z^2+i}{z} =$$

$$= \frac{(1+i)^2 + i}{1+i} = \frac{1 + 2i + \overbrace{i^2}^{-1} + i}{1+i} = \frac{3i}{1+i}\cdot\frac{1-i}{1-i} = \frac{3i - 3i^2}{1 - i^2} = \frac{3i - 3(-1)}{1-(-1)} = \frac{3i+3}{2}$$

konečnékomplexné číslo, t.j. rôzne od nekoneč

Funkcia sa dá dodefinovať, keď položíme $f(1+i) = \dfrac{3+3i}{2}$.

Zistite, či je možné dodefinovať funkciu f(z) v bode z0.

$f: \mathbb{C} \setminus \{4+i\} \to \mathbb{C}$ $\quad f(z) = \frac{z^2 - (3+2i)z - 6 + 7i}{z - 4 - i}$ $\quad z_0 = 4+i$

$a = 1 \quad b = -(3+2i) \quad c = -6+7i$

$$\lim_{z \to 4+i} \frac{z^2 - (3+2i)z - 6 + 7i}{z - 4 - i} = \frac{\quad}{4+i-4-i} = \frac{\quad}{0}$$

Aby sa dala funkcia dodefinovať, potrebuje upraviť čitateľ na tvar $B(z-4-i)$

$$z_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

Dostaneme 2 rôzne korene a ani jeden z nich nie je rovný $4+i$

$$= \frac{(4+i)^2 - (3+2i)(4+i) - 6 + 7i}{0} = \frac{a}{0} = \infty$$

Keďže nám výsledok vyšiel nekonečno (a nie nejaké konečné komplexné číslo), tak sa funkcia pre z0=4+i nedá dodefinovať.