Limita

pomocné pojmy

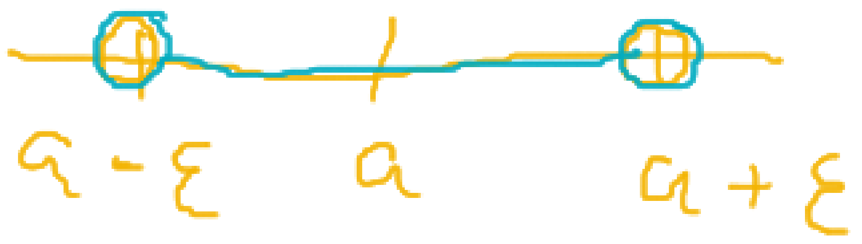
okolie bodu v R

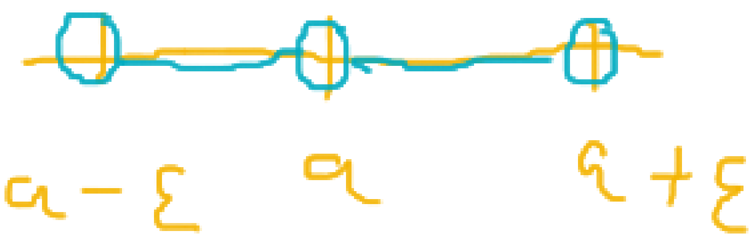
Nech $a \in R, a \neq \infty$

$O_\varepsilon(a) = \{x \in R : |x - a| < \varepsilon$ ε-okolie bodu a

$O^\circ_\varepsilon(a) = O_\varepsilon(a) \setminus \{a\} =$ ε – prstencové okolie bodu a

$= \{x \in R : 0 < |x - a| < \varepsilon\}$





okolie bodu v C

Nech $a \in C, a \neq \infty$

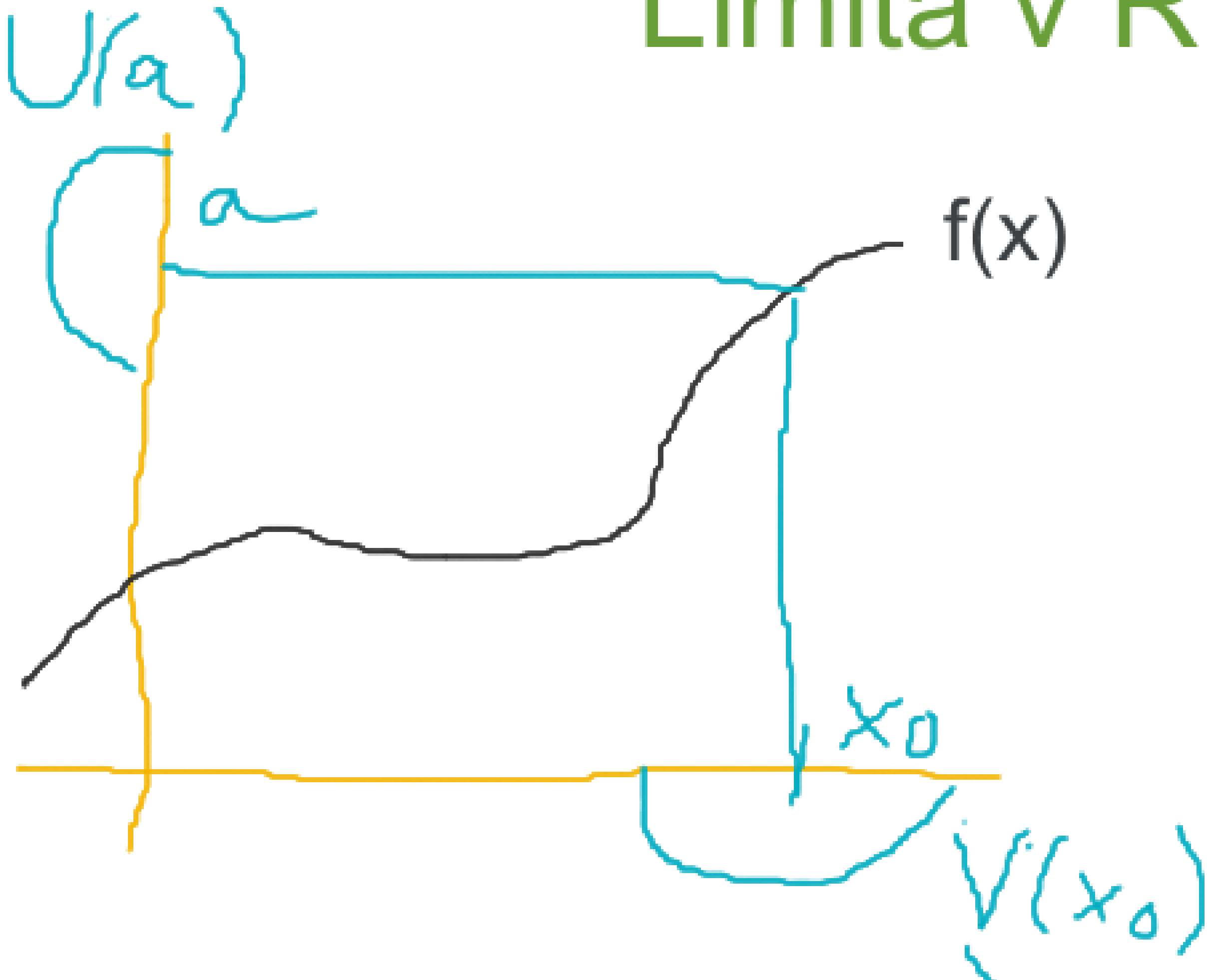
$O_\varepsilon(a) = \{z \in C : |z - a| < \varepsilon$

$O^\circ_\varepsilon(a) = O_\varepsilon(a) \setminus \{a\} =$

$= \{z \in C : 0 < |z - a| < \varepsilon\}$

Bod b sa nazýva HROMADNÝ BOD množiny E, ak $\forall \varepsilon > 0, O^\circ_\varepsilon(b) \cap E \neq \emptyset$

Limita v R



okolie bodu x_0

Táto podmienka je tu kvôli tomu, že limita existuje aj v bodoch, v ktorých funkcia nie je definovaná. Môže to platiť aj v bode x_0 ,ale nemusí to v ňom platiť.

Funkcia f(x) je definovaná v okolí bodu x_0 .

Funkcia f(x) má limitu v bode x_0 rovnú a, ak k ľubovoľnému U(a) exituje také, V(x_0), že pre $\forall x \in V(x_0)$, $x \neq x_0$ platí: $f(x) \in U(a)$.

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = a \Leftrightarrow \forall U(a) \, \exists V(x_0)$$

$$\forall x \in V(x_0), x \neq x_0, f(x) \in U(a)$$

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = a \Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0,$$

$$\forall x: 0 < |x - x_0| < \delta \Rightarrow |f(x) - a| < \varepsilon$$

Limita v C

$$\lim_{z \to z_0} f(z) = a \Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0,$$

$$\forall z: 0 < |z - z_0| < \delta \Rightarrow |f(z) - a| < \varepsilon$$

Jediný rozdiel v definícii: namiesto x (reálne číslo) píšeme z (komplexné číslo), ale v R je okolie interval a v C je okolie kruh.

$$\lim_{z \to z_0} f(z) = a$$

Ak a = b + i c

$f(z) = f(x + iy) = u(x,y) + iv(x,y)$

$z_0 = x_0 + i y_0$

potom platí nasledujúca veta:

$$\lim_{z \to z_0} f(z) = a = b + ic \iff \lim_{(x,y) \to (x_0,y_0)} u(x,y) = b$$

$$\lim_{(x,y) \to (x_0,y_0)} v(x,y) = c$$

Ak $\lim_{z \to z_0} f(z) = a$, potom $\lim_{z \to z_0} |f(z)| = |a|$ a ak $a \neq 0$, $a \neq \infty$,

potom aj $\lim_{z \to z_0} \arg f(z) = \arg a$