2. typ skúškového príkladu
Univerzálne goniometrické substitúcie

Oľga Stašová

Ústav informatiky a matematiky
Fakulta elektrotechniky a informatiky
Slovenská technická univerzita

letný semester 2023/2024

Univerzálne goniometrické substitúcie

- Nazývajú sa **univerzálne**, lebo sa dajú použiť univerzálne, t.j. pri integrovaní každej racionálnej funkcie, v ktorej vystupujú **goniometrické** funkcie $\sin(\mathbf{x})$, $\cos(\mathbf{x})$, $\mathbf{tg}(\mathbf{x})$ a $\mathrm{cotg}(\mathbf{x})$ - stačí jedna z nich.
- Aj keď tieto metódy sú univerzálne, sú dosť komplikované a časovo náročné. Je potrebné pri nich dobre ovládať úpravy výrazov a pri nepozornosti sa dá ľahko pomýliť. Z tohoto dôvodu, ak je to možné, použite radšej inú metódu.
- Univerzálne goniometrické substitúcie sa používajú v prípadoch, kde nevieme použiť žiadnu z jednoduchších metód.
- **Sú dôležité - využitie na odborných predmetoch.** Častejšie sa používa prvá z nich: $\mathbf{t} = \mathbf{tg}\left(\frac{\mathbf{x}}{\mathbf{2}}\right)$.

1. univerzálna goniometrická substitúcia

$$
\begin{aligned}
t &= tg\left(\frac{x}{2}\right) \\
\operatorname{arctg}(t) &= \operatorname{arctg}\left(tg\left(\frac{x}{2}\right)\right) \\
\operatorname{arctg}(t) &= \frac{x}{2} \\
\frac{x}{2} &= \operatorname{arctg}(t) \\
x &= 2\operatorname{arctg}(t) \\
\mathrm{d}x &= 2\frac{1}{1+t^2}\mathrm{d}t = \frac{2\,\mathrm{d}t}{1+t^2}
\end{aligned}
$$

$$
\sin x = \frac{2t}{1+t^2}, \quad \cos x = \frac{1-t^2}{1+t^2}.
$$

2. univerzálna goniometrická substitúcia

$$\begin{aligned}
t &= tg(x) \\
\operatorname{arctg}(t) &= \operatorname{arctg}(tg(x)) \\
\operatorname{arctg}(t) &= x \\
x &= \operatorname{arctg}(t) \\
\mathrm{d}x &= \frac{1}{1+t^2}\mathrm{d}t = \frac{\mathrm{d}t}{1+t^2}
\end{aligned}$$

$$\sin^2 x = \frac{t^2}{1+t^2}, \quad \cos^2 x = \frac{1}{1+t^2}.$$

univerzálne goniometrické substitúcie - **skúška**

Na skúške Vám do zadania napíšem nasledujúce pomôcky.

$$t = tg\left(\frac{x}{2}\right) \quad \sin x = \frac{2t}{1+t^2}, \quad \cos x = \frac{1-t^2}{1+t^2}.$$

$$t = tg(x) \quad \sin^2 x = \frac{t^2}{1+t^2}, \quad \cos^2 x = \frac{1}{1+t^2}.$$

Vy sa musíte rozhodnúť, ktorú z týchto 2 substitúcií použijete (1. riadok alebo 2. riadok) a ostatné vzťahy si musíte odvodiť sami.

Kedy použiť ktorú univerzálnu goniometrickú substitúciu?

- Ak v racionálnej funkcii sú $\sin x$ a $\cos x$ (stačí jedno z nich), použijeme substitúciu $t = tg\left(\frac{x}{2}\right)$.
- Ak v racionálnej funkcii sú $\sin^2 x$ a $\cos^2 x$ (stačí jedno z nich), použijeme substitúciu $t = tg\, x$.
- Ak v racionálnej funkcii sú $\sin x$ a $\cos x$ (stačí jedno z nich) a aj $\sin^2 x$ a $\cos^2 x$ (stačí jedno z nich), tak každé $\sin^2 x$ a každé $\cos^2 x$ nahradíme $(\sin x)^2$ a $(\cos x)^2$ a použijeme substitúciu $t = tg\left(\frac{x}{2}\right)$.
- Ak sú v racionálnej funkcii okrem $\sin x$ a $\cos x$ aj $tg\, x$ a $\operatorname{cotg} x$, tak najskôr každé $tg\, x$ nahradíme $\frac{\sin x}{\cos x}$ a každé $\operatorname{cotg} x$ nahradíme $\frac{\cos x}{\sin x}$.
- Ak sú v racionálnej funkcii iba $tg\, x$ a $\operatorname{cotg} x$ (stačí jedno z nich), tak každé $tg\, x$ nahradíme t a každé $\operatorname{cotg} x$ nahradíme $\frac{1}{t}$ a použijeme substitúciu $t = tg\, x$.

2. typ skúškového príkladu

$$\int \frac{1}{\cos x - \sin x + 2}\, dx$$

Pomôcky: $t = \mathrm{tg}\left(\frac{x}{2}\right)$ $\quad \sin x = \frac{2t}{1+t^2}$ $\quad \cos x = \frac{1-t^2}{1+t^2}$

$t = \mathrm{tg}(x)$ $\quad \sin^2 x = \frac{t^2}{1+t^2}$ $\quad \cos^2 x = \frac{1}{1+t^2}$

$$\left|\begin{aligned} t &= \mathrm{tg}\left(\frac{x}{2}\right) \\ \mathrm{arctg}\, t &= \mathrm{arctg}\left(\mathrm{tg}\,\frac{x}{2}\right) \\ \frac{x}{2} &= \mathrm{arctg}\, t \\ x &= 2\,\mathrm{arctg}\, t \\ dx &= 2\cdot\frac{1}{1+t^2}\, dt \end{aligned}\right| = \int \frac{1}{\frac{1-t^2}{1+t^2} - \frac{2t}{1+t^2} + 2\cdot\frac{1+t^2}{1+t^2}}\, 2\cdot\frac{1}{1+t^2}\, dt =$$

$$= \int \frac{1}{\frac{1-t^2-2t+2+2t^2}{\cancel{1+t^2}}}\, \frac{2}{\cancel{1+t^2}}\, dt =$$

$$= \int \frac{2}{t^2-2t+3}\, dt = \int \frac{2}{(t-1)^2+2}\, dt = 2\cdot\frac{1}{\sqrt{2}}\,\mathrm{arctg}\left(\frac{t-1}{\sqrt{2}}\right) + C =$$

$$\frac{2}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}\sqrt{2}}{\sqrt{2}} = \sqrt{2}$$

$$\sqrt{2}\,\mathrm{arctg}\left(\frac{\mathrm{tg}\frac{x}{2} - 1}{\sqrt{2}}\right) + C$$

$$\int \frac{1}{t^2+a^2}\, dt = \frac{1}{\sqrt{a}}\,\mathrm{arctg}\,\frac{t}{\sqrt{a}} + C$$