Integrálny počet
Určitý integrál

Oľga Stašová

Ústav informatiky a matematiky
Fakulta elektrotechniky a informatiky
Slovenská technická univerzita

letný semester 2023/2024

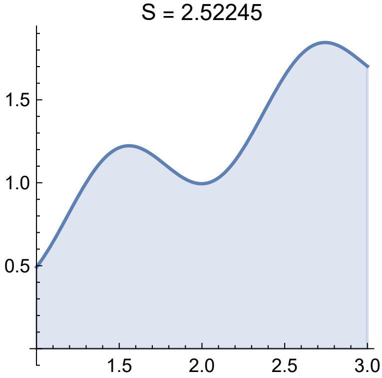
Obsah prednášky

- **Pojem** určitého integrálu
- **Vlastnosti** určitého integrálu
- **Metódy počítania** určitého integrálu

Pojem určitého integrálu

Pojem určitého integrálu

- **Určitý integrál** nezápornej funkcie $f(x)$ od bodu a po bod b **je rovný obsahu rovinnej oblasti** ohraničenej priamkami $x = a$, $x = b$, osou x a grafom funkcie $f(x)$.



Pojem určitého integrálu

- Bodmi $a = x_0 < x_1 < x_2 < \cdots < x_{n-1} < x_n = b$ rozdelíme **uzavretý interval** $\langle a, b\rangle$ na n **podintervalov** (resp. **deliacich intervalov**) $\langle x_{i-1}, x_i\rangle$. Podintervaly bývajú často všetky rovnaké. Avšak, ak sa na niektorom úseku graf funkcie mení rýchlo - je potrebné v tomto úseku podrobnejšie sledovať graf funkcie (voľba kratších podintervaloch). A naopak, ak sa na nejakom úseku graf funkcie mení pomaly, postačia na tomto úseku (dlhšie podintervaly.)

Pojem určitého integrálu

- Bodmi $a = x_0 < x_1 < x_2 < \cdots < x_{n-1} < x_n = b$ rozdelíme **uzavretý interval** $\langle a, b\rangle$ na n **podintervalov** (resp. **deliacich intervalov**) $\langle x_{i-1}, x_i\rangle$. Podintervaly bývajú často všetky rovnaké. Avšak, ak sa na niektorom úseku graf funkcie mení rýchlo - je potrebné v tomto úseku podrobnejšie sledovať graf funkcie (voľba kratších podintervaloch). A naopak, ak sa na nejakom úseku graf funkcie mení pomaly, postačia na tomto úseku (dlhšie podintervaly.)
- Označme dĺžku najdlhšieho podintervalu d. Toto číslo d sa nazýva aj **norma delenia**.

Pojem určitého integrálu

- Bodmi $a = x_0 < x_1 < x_2 < \cdots < x_{n-1} < x_n = b$ rozdelíme **uzavretý interval** $\langle a, b\rangle$ na n **podintervalov** (resp. **deliacich intervalov**) $\langle x_{i-1}, x_i\rangle$. Podintervaly bývajú často všetky rovnaké. Avšak, ak sa na niektorom úseku graf funkcie mení rýchlo - je potrebné v tomto úseku podrobnejšie sledovať graf funkcie (voľba kratších podintervaloch). A naopak, ak sa na nejakom úseku graf funkcie mení pomaly, postačia na tomto úseku (dlhšie podintervaly.)
- Označme dĺžku najdlhšieho podintervalu d. Toto číslo d sa nazýva aj **norma delenia**.
- V každom podintervale zvolíme **niektorý bod** p_i.

Pojem určitého integrálu

- Bodmi $a = x_0 < x_1 < x_2 < \cdots < x_{n-1} < x_n = b$ rozdelíme **uzavretý interval** $\langle a, b\rangle$ na n **podintervalov** (resp. **deliacich intervalov**) $\langle x_{i-1}, x_i\rangle$. Podintervaly bývajú často všetky rovnaké. Avšak, ak sa na niektorom úseku graf funkcie mení rýchlo - je potrebné v tomto úseku podrobnejšie sledovať graf funkcie (voľba kratších podintervaloch). A naopak, ak sa na nejakom úseku graf funkcie mení pomaly, postačia na tomto úseku (dlhšie podintervaly.)
- Označme dĺžku najdlhšieho podintervalu d. Toto číslo d sa nazýva aj **norma delenia**.
- V každom podintervale zvolíme **niektorý bod** p_i.
- V každom podintervale **nahradíme** príslušnú **časť plochy obdĺžnikom** so základňou dĺžky $(x_i - x_{i-1})$ a výškou $f(p_i)$.

Pojem určitého integrálu

- Bodmi $a = x_0 < x_1 < x_2 < \cdots < x_{n-1} < x_n = b$ rozdelíme **uzavretý interval** $\langle a, b\rangle$ na n **podintervalov** (resp. **deliacich intervalov**) $\langle x_{i-1}, x_i\rangle$. Podintervaly bývajú často všetky rovnaké. Avšak, ak sa na niektorom úseku graf funkcie mení rýchlo - je potrebné v tomto úseku podrobnejšie sledovať graf funkcie (voľba kratších podintervaloch). A naopak, ak sa na nejakom úseku graf funkcie mení pomaly, postačia na tomto úseku (dlhšie podintervaly.)
- Označme dĺžku najdlhšieho podintervalu d. Toto číslo d sa nazýva aj **norma delenia**.
- V každom podintervale zvolíme **niektorý bod** p_i.
- V každom podintervale **nahradíme** príslušnú **časť plochy obdĺžnikom** so základňou dĺžky $(x_i - x_{i-1})$ a výškou $f(p_i)$.
- **Sčítame obsahy** všetkých takýchto obdĺžnikov:

$$S = \sum_{i=1}^{n} f(p_i) \cdot (x_i - x_{i-1}).$$

Pojem určitého integrálu

- V každom podintervale zvolíme **niektorý bod** p_i.
- V každom podintervale **nahradíme** príslušnú **časť plochy obdĺžnikom** so základňou dĺžky $(x_i - x_{i-1})$ a výškou $f(p_i)$.
- **Sčítame obsahy** všetkých takýchto obdĺžnikov:

$$S = \sum_{i=1}^{n} f(p_i) \cdot (x_i - x_{i-1}).$$

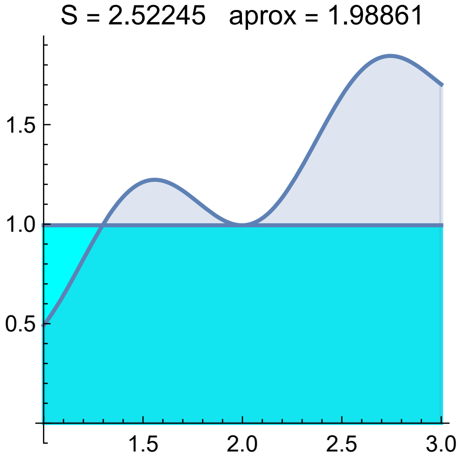
Pojem určitého integrálu

- V každom podintervale zvolíme **niektorý bod** p_i.
- V každom podintervale **nahradíme** príslušnú **časť plochy obdĺžnikom** so základňou dĺžky $(x_i - x_{i-1})$ a výškou $f(p_i)$.
- **Sčítame obsahy** všetkých takýchto obdĺžnikov:

$$S = \sum_{i=1}^{n} f(p_i) \cdot (x_i - x_{i-1}).$$

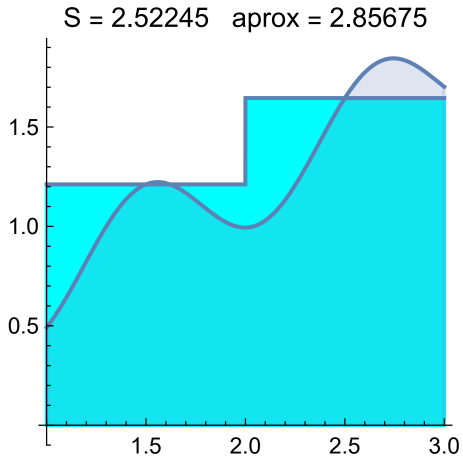
- Číslo S nazývame **integrálny súčet funkcie** f pre dané delenie d intervalu $\langle a, b\rangle$ s voľbou bodov $p_i \in \langle x_{i-1}, x_i\rangle$.

Integrálny súčet



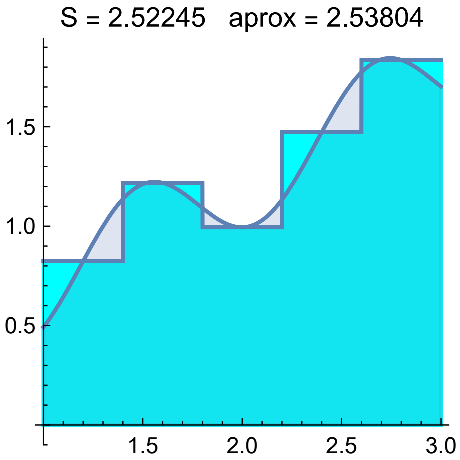
Obr.: Aproximácia obsahu oblasti, n=1

Integrálny súčet



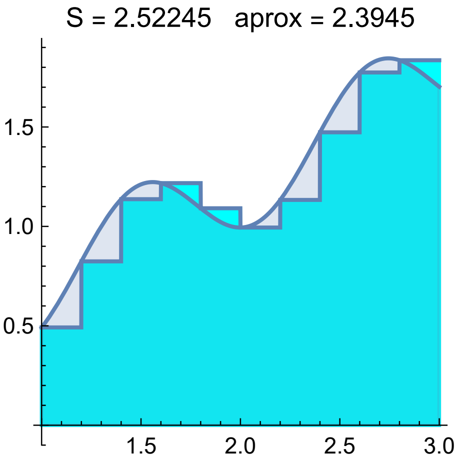
Obr.: Aproximácia obsahu oblasti, n=2

Integrálny súčet



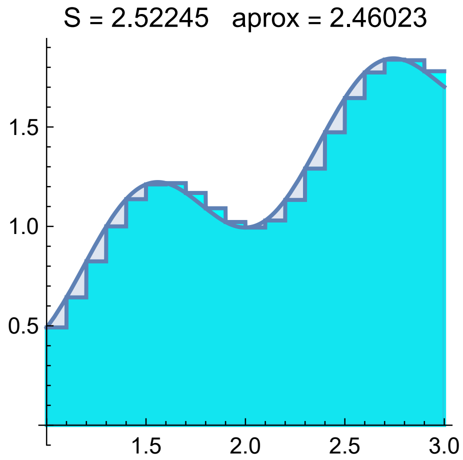
Obr.: Aproximácia obsahu oblasti, n=5

Integrálny súčet



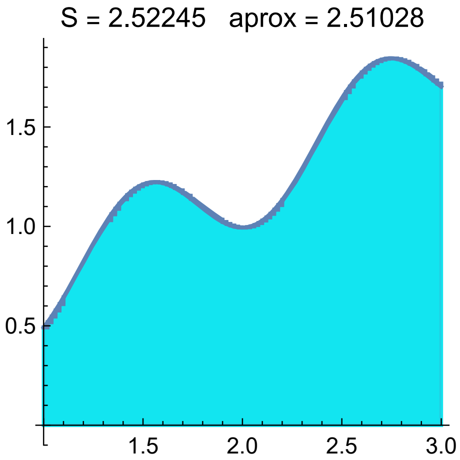
Obr.: Aproximácia obsahu oblasti, n=10

Integrálny súčet



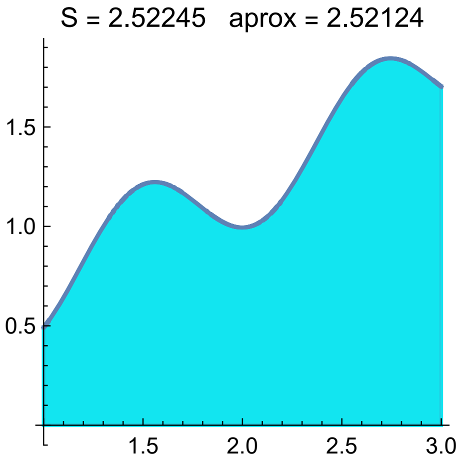
Obr.: Aproximácia obsahu oblasti, n=20

Integrálny súčet



Obr.: Aproximácia obsahu oblasti, n=100

Integrálny súčet



Obr.: Aproximácia obsahu oblasti, n=1000

Dolný integrálny súčet

- V každom podintervale **nahradíme** príslušnú **časť plochy obdĺžnikom** so základňou dĺžky $(x_i - x_{i-1})$ a výškou m_i.

Dolný integrálny súčet

- V každom podintervale **nahradíme** príslušnú **časť plochy obdĺžnikom** so základňou dĺžky $(x_i - x_{i-1})$ a výškou m_i.
- **Sčítame obsahy** všetkých takýchto obdĺžnikov:

$$D = \sum_{i=1}^{n} m_i \cdot (x_i - x_{i-1}), kde\, m_i = inf_{x \in (x_i - x_{i-1})} f(x).$$

Infimum je najväčšie dolné ohraničenie. Vo väčšine prípadov je pojem infimum rovnaký s pojmom **minimum**.

Dolný integrálny súčet

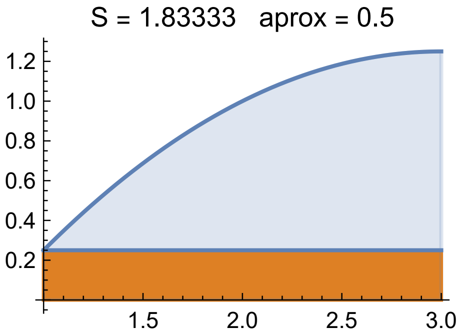
- V každom podintervale **nahradíme** príslušnú **časť plochy obdĺžnikom** so základňou dĺžky $(x_i - x_{i-1})$ a výškou m_i.
- **Sčítame obsahy** všetkých takýchto obdĺžnikov:

$$D = \sum_{i=1}^{n} m_i \cdot (x_i - x_{i-1}), kde\, m_i = inf_{x\in(x_i - x_{i-1})} f(x).$$

  Infimum je najväčšie dolné ohraničenie. Vo väčšine prípadov je pojem infimum rovnaký s pojmom **minimum**.

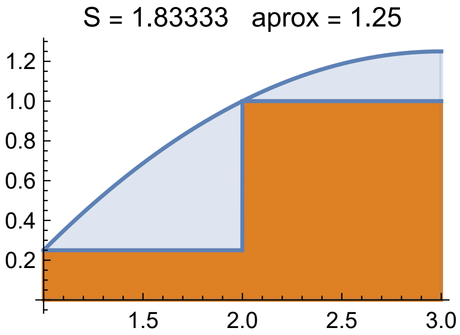
- Číslo D nazývame **dolný integrálny súčet funkcie** f.

Dolný integrálny súčet



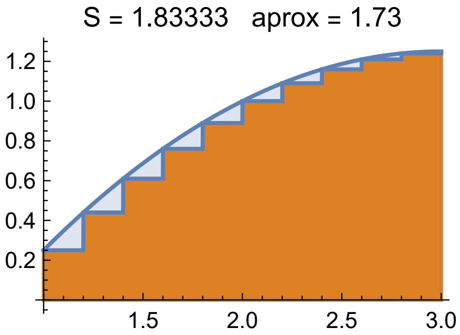
Obr.: Aproximácia plochy, n=1

Dolný integrálny súčet



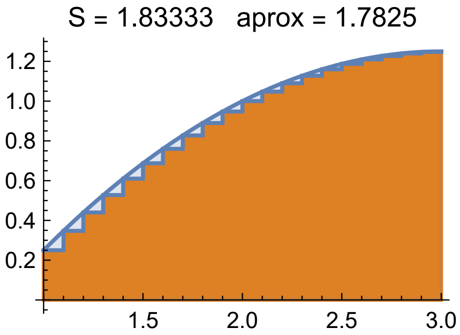
Obr.: Aproximácia plochy, n=2

dolný integrálny súčet



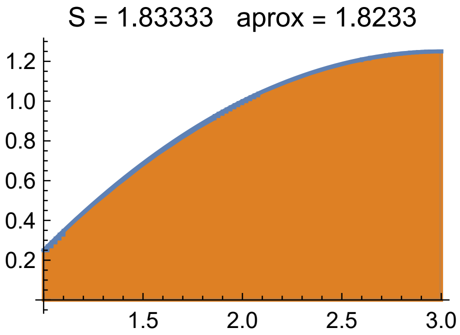
Obr.: Aproximácia plochy, n=10

Dolný integrálny súčet



Obr.: Aproximácia plochy, n=20

Dolný integrálny súčet



Obr.: Aproximácia plochy, n=100

Horný integrálny súčet

- V každom podintervale **nahradíme** príslušnú **časť plochy obdĺžnikom** so základňou dĺžky $(x_i - x_{i-1})$ a výškou M_i.

Horný integrálny súčet

- V každom podintervale **nahradíme** príslušnú **časť plochy obdĺžnikom** so základňou dĺžky $(x_i - x_{i-1})$ a výškou M_i.
- **Sčítame obsahy** všetkých takýchto obdĺžnikov:

$$H = \sum_{i=1}^{n} M_i \cdot (x_i - x_{i-1}), kde\, M_i = sup_{x \in (x_i - x_{i-1})} f(x).$$

Supremum je najmenšie horné ohraničenie. Vo väčšine prípadov je pojem supremum rovnaký s pojmom **maximum**.

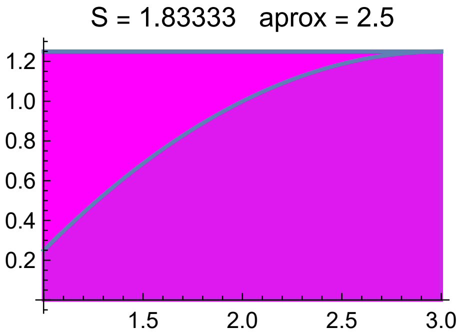
Horný integrálny súčet

- V každom podintervale **nahradíme** príslušnú **časť plochy obdĺžnikom** so základňou dĺžky $(x_i - x_{i-1})$ a výškou M_i.
- **Sčítame obsahy** všetkých takýchto obdĺžnikov:

$$H \; = \sum_{i=1}^{n} M_i \cdot (x_i - x_{i-1}), kde \, M_i = sup_{x \in (x_i - x_{i-1})} f(x).$$

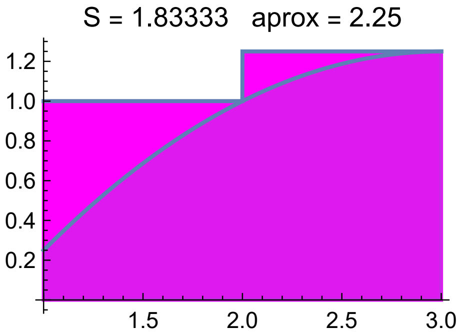
  Supremum je najmenšie horné ohraničenie. Vo väčšine prípadov je pojem supremum rovnaký s pojmom **maximum**.
- Číslo H nazývame **horný integrálny súčet funkcie** f.

Horný integrálny súčet



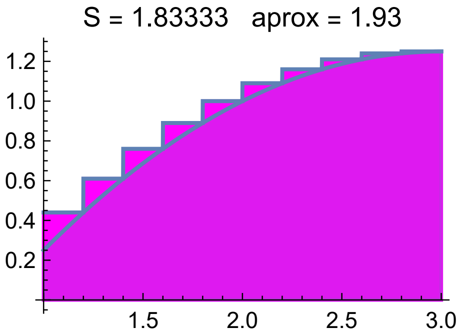
Obr.: Aproximácia plochy, n=1

Horný integrálny súčet



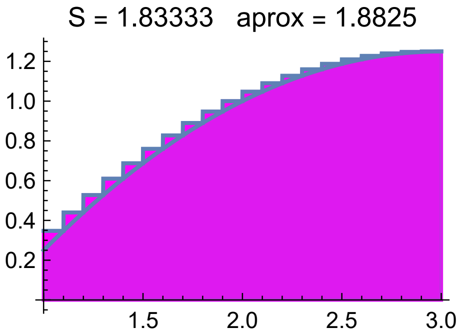
Obr.: Aproximácia plochy, n=2

Horný integrálny súčet



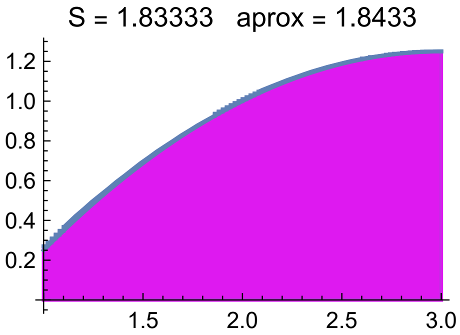
Obr.: Aproximácia plochy, n=10

Horný integrálny súčet



Obr.: Aproximácia plochy, n=20

Horný integrálny súčet



Obr.: Aproximácia plochy, n=100

Pojem určitého integrálu

- Dostávame tak **aproximáciu** (približnú hodnotu) **hľadaného obsahu**.

Pojem určitého integrálu

- Dostávame tak **aproximáciu** (približnú hodnotu) **hľadaného obsahu**.
- Z obrázkov je vidieť, že ak zhustíme deliace body, hodnota integrálneho súčtu sa viac priblíži skutočnej hodnote.

Pojem určitého integrálu

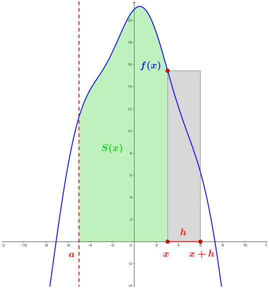
- Dostávame tak **aproximáciu** (približnú hodnotu) **hľadaného obsahu**.
- Z obrázkov je vidieť, že ak zhustíme deliace body, hodnota integrálneho súčtu sa viac priblíži skutočnej hodnote.
- Preto celý postup opakujeme tak, že dĺžka d podintervalu sa bude blížiť k nule. Takto **limitnou hodnotou aproximácie** S **bude hľadaný obsah**.

Pojem určitého integrálu

- Dostávame tak **aproximáciu** (približnú hodnotu) **hľadaného obsahu**.
- Z obrázkov je vidieť, že ak zhustíme deliace body, hodnota integrálneho súčtu sa viac priblíži skutočnej hodnote.
- Preto celý postup opakujeme tak, že dĺžka d podintervalu sa bude blížiť k nule. Takto **limitnou hodnotou aproximácie S bude hľadaný obsah**.
- Tento teoretický postup je však **pre všeobecnú funkciu f ťažko realizovateľný**. Preto hľadáme iný spôsob, ako vypočítať takýto obsah.

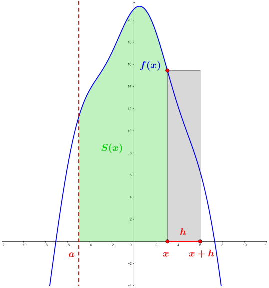
Pojem určitého integrálu

- Označme $S(x)$ obsah plochy pod grafom funkcie f v intervale $\langle a, x\rangle$.



Pojem určitého integrálu

- Označme $S(x)$ obsah plochy pod grafom funkcie f v intervale $\langle a, x\rangle$.



- Všimnime si zmenu $S(x+h) - S(x)$ pre číslo h blízke k nule. Táto sa približne rovná obsahu obdĺžnika so stranami dĺžok h a $f(x)$, teda $S(x+h) - S(x) \approx h \cdot f(x)$.

Pojem určitého integrálu

- $S(x+h) - S(x) \approx h \cdot f(x)$.
- Preto

$$\lim_{h \to 0} \frac{S(x+h) - S(x)}{h} = f(x).$$

Pojem určitého integrálu

- $S(x+h) - S(x) \approx h \cdot f(x)$.
- Preto

$$\lim_{h\to 0} \frac{S(x+h) - S(x)}{h} = f(x).$$

- Výraz na ľavej strane je **derivácia funkcie** $S(x)$ v bode x, takže dostávame dôležitý fakt

$$S'(x) = f(x),$$

z ktorého vyplýva, že S je primitívna funkcia k funkcii f v intervale $\langle a, b\rangle$.

Pojem určitého integrálu

- $S(x+h) - S(x) \approx h \cdot f(x)$.
- Preto
$$\lim_{h \to 0} \frac{S(x+h) - S(x)}{h} = f(x).$$
- Výraz na ľavej strane je **derivácia funkcie** $S(x)$ v bode x, takže dostávame dôležitý fakt
$$S'(x) = f(x),$$
z ktorého vyplýva, že S je primitívna funkcia k funkcii f v intervale $\langle a, b \rangle$.
- **Hľadaný obsah sa rovná rozdielu** $S(b) - S(a)$.

Newtonov-Leibnizov vzorec

- Na predchádzajúcich slajdoch sme približne opísali proces integrácie spojitej funkcie $f(x)$ na intervale $\langle a, b\rangle$, ktorý popisuje nasledujúca veta.

Hlavná veta integrálneho počtu

Nech $\mathbf{f}(\mathbf{x})$ je spojitá funkcia na intervale $\langle a, b\rangle$.

a) Potom $\mathbf{f}(\mathbf{x})$ má primitívnu funkciu na $\langle a, b\rangle$.

b) Ak $\mathbf{F}(\mathbf{x})$ je primitívna funkcia k $\mathbf{f}(\mathbf{x})$ na $\langle a, b\rangle$, potom

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = [F(x)]_a^b = F(b) - F(a).$$

Posledný vzťah sa nazýva **Newtonov - Leibnizov vzorec**.

Je to veľmi dôležitý vzorec. Jeho použitie bude na písomke aj skúške.

Pojem určitého integrálu

- Pri samotnom výpočte postupujeme tak, že **najskôr nájdeme niektorú primitívnu funkciu** F k funkcii f (výraz v strede Newtonovho-Leibnizovho vzorca) **a potom dosadíme krajné body intervalu a odčítame** (výraz na pravej strane).

Pojem určitého integrálu

- Pri samotnom výpočte postupujeme tak, že **najskôr nájdeme niektorú primitívnu funkciu** F k funkcii f (výraz v strede Newtonovho-Leibnizovho vzorca) **a potom dosadíme krajné body intervalu a odčítame** (výraz na pravej strane).
- Neurčitý a určitý integrál sú vo svojej podstate rôzne matematické objekty. Zatiaľ čo **neurčitý integrál** je funkcia (reprezentuje množinu funkcií líšiacich sa len o reálnu konštantu C), určitý integrál je číslo.

Pojem určitého integrálu

- Pri samotnom výpočte postupujeme tak, že **najskôr nájdeme niektorú primitívnu funkciu** F k funkcii f (výraz v strede Newtonovho-Leibnizovho vzorca) **a potom dosadíme krajné body intervalu a odčítame** (výraz na pravej strane).
- Neurčitý a určitý integrál sú vo svojej podstate rôzne matematické objekty. Zatiaľ čo **neurčitý integrál** je funkcia (reprezentuje množinu funkcií líšiacich sa len o reálnu konštantu C), určitý integrál je číslo.
- To, čo ich spája (okrem slova integrál v ich názvoch), je skutočnosť, že **určitý integrál sa dá vyjadriť pomocou neurčitého integrálu**.

Pojem určitého integrálu

Príklad 1

Vypočítajme: a) $\int\limits_1^4 x \, \mathrm{d}x$, b) $\int\limits_1^4 x^2 \, \mathrm{d}x$, c) $\int\limits_{-1}^1 x^2 \, \mathrm{d}x$, d) $\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \sin x \, \mathrm{d}x$.

Pojem určitého integrálu

Príklad 1

Vypočítajme: a) $\int\limits_1^4 x\,\mathrm{d}x$, b) $\int\limits_1^4 x^2\,\mathrm{d}x$, c) $\int\limits_{-1}^1 x^2\,\mathrm{d}x$, d) $\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \sin x\,\mathrm{d}x$.

Riešenie:

a)

$$\int\limits_1^4 x\,\mathrm{d}x = \left[\frac{x^2}{2}\right]_1^4 = \frac{4^2}{2} - \frac{1^2}{2} = \frac{15}{2}.$$

b)

$$\int\limits_1^4 x^2\,\mathrm{d}x = \left[\frac{x^3}{3}\right]_1^4 = \frac{4^3}{3} - \frac{1^3}{3} = \frac{63}{3}.$$

Pojem určitého integrálu

c)

$$\int_{-1}^{1} x^2 \, dx = \left[\frac{x^3}{3}\right]_{-1}^{1} = \frac{1^3}{3} - \frac{(-1)^3}{3} = \frac{2}{3}.$$

d)

$$\int_{0}^{\frac{\pi}{2}} \sin x \, dx = [-\cos x]_0^{\frac{\pi}{2}} = (-\cos\frac{\pi}{2}) - (-\cos 0) = -0 - (-1) = 1.$$

Vlastnosti určitého integrálu

Vlastnosti určitého integrálu - dôležité vzorce

- Ak $a \leq b$, tak definujeme

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = -\int_b^a f(x)\,\mathrm{d}x.$$

Vlastnosti určitého integrálu - dôležité vzorce

- Ak $a \leq b$, tak definujeme

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = -\int_b^a f(x)\,\mathrm{d}x.$$

- Ak funkcie sú spojité v intervaloch, v ktorých integrujeme, platí

$$\int_a^a f(x)\,\mathrm{d}x = 0,$$

Vlastnosti určitého integrálu - dôležité vzorce

- Ak $a \leq b$, tak definujeme

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = -\int_b^a f(x)\,\mathrm{d}x.$$

- Ak funkcie sú spojité v intervaloch, v ktorých integrujeme, platí

$$\int_a^a f(x)\,\mathrm{d}x = 0, \qquad \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = \int_a^c f(x)\,\mathrm{d}x + \int_c^b f(x)\,\mathrm{d}x,$$

Vlastnosti určitého integrálu - dôležité vzorce

- Ak $a \leq b$, tak definujeme

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = -\int_b^a f(x)\,\mathrm{d}x.$$

- Ak funkcie sú spojité v intervaloch, v ktorých integrujeme, platí

$$\int_a^a f(x)\,\mathrm{d}x = 0, \qquad \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = \int_a^c f(x)\,\mathrm{d}x + \int_c^b f(x)\,\mathrm{d}x,$$

$$\int_a^b (c_1 \cdot f(x) + c_2 \cdot g(x))\,\mathrm{d}x = c_1 \int_a^b f(x)\mathrm{d}x + c_2 \int_a^b g(x)\mathrm{d}x, \qquad c_1, c_2 \in \mathbf{R}$$

Vlastnosti určitého integrálu dôležité vzorce

- Ak f je spojitá **párna** funkcia, tak

$$\int_{-a}^{a} f(x)\,\mathrm{d}x = 2\int_{0}^{a} f(x)\,\mathrm{d}x.$$

Vlastnosti určitého integrálu dôležité vzorce

- Ak f je spojitá **párna** funkcia, tak

$$\int_{-a}^{a} f(x)\,\mathrm{d}x = 2\int_{0}^{a} f(x)\,\mathrm{d}x.$$

- Ak f je spojitá **nepárna** funkcia, tak

$$\int_{-a}^{a} f(x)\,\mathrm{d}x = 0.$$

Vlastnosti určitého integrálu dôležité vzorce

- Ak f je spojitá **párna** funkcia, tak

$$\int_{-a}^{a} f(x)\,\mathrm{d}x = 2\int_{0}^{a} f(x)\,\mathrm{d}x.$$

- Ak f je spojitá **nepárna** funkcia, tak

$$\int_{-a}^{a} f(x)\,\mathrm{d}x = 0.$$

- Ak f je spojitá **periodická** funkcia s periódou p a $a \in \mathbf{R}$, tak

$$\int_{0}^{p} f(x)\,\mathrm{d}x = \int_{a}^{a+p} f(x)\,\mathrm{d}x.$$

Veta o strednej hodnote pre určitý integrál

- Ak f je spojitá funkcia v intervale $\langle a, b\rangle$, tak existuje také číslo $c \in \langle a, b\rangle$, že platí

$$\int\limits_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = f(c)(b-a).$$

Hodnota $f(c)$ v tomto vzťahu sa volá stredná hodnota integrálu $\int\limits_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$ a táto veta sa nazýva: **Veta o strednej hodnote pre určitý integrál**.

Dôsledky vety o strednej hodnote

- Dôsledkom *Vety o strednej hodnote* sú dva vzťahy, ktoré sa používajú na **odhady integrálov** (alebo iných hodnôt), ktoré je ťažké alebo nemožné presne vypočítať:

Dôsledky vety o strednej hodnote

- Dôsledkom *Vety o strednej hodnote* sú dva vzťahy, ktoré sa používajú na **odhady integrálov** (alebo iných hodnôt), ktoré je ťažké alebo nemožné presne vypočítať:

  Ak pre všetky $x \in \langle a, b \rangle$ *platí* $f(x) \leq g(x)$, *tak*

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x \leq \int_a^b g(x)\,\mathrm{d}x.$$

Dôsledky vety o strednej hodnote

- Dôsledkom *Vety o strednej hodnote* sú dva vzťahy, ktoré sa používajú na **odhady integrálov** (alebo iných hodnôt), ktoré je ťažké alebo nemožné presne vypočítať:

  Ak pre všetky $x \in \langle a, b \rangle$ *platí* $f(x) \le g(x)$, *tak*

  $$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x \le \int_a^b g(x)\,\mathrm{d}x.$$

  Ak pre všetky $x \in \langle a, b \rangle$ *platí* $m \le f(x) \le M$, *tak*

  $$m(b-a) \le \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x \le M(b-a).$$

Predmetom matematiky na Fei
je len Riemannov integrál,
ale existujú aj iné typy integrálov.
(Pozri 2_Úvod_integrály.pdf.)

Podmienky integrovateľnosti - Riemannov integrál

- **Nutná podmienka integrovateľnosti**
  Ak je funkcia $\mathbf{f(x)}$ riemannovsky integrovateľná na intervale $\langle \mathbf{a}, \mathbf{b} \rangle$, tak potom je na intervale $\langle \mathbf{a}, \mathbf{b} \rangle$ ohraničená.
  To znamená, že ak funkcia **nie je ohraničená**, potom **nie je integrovateľná**.
  A ak funkcia je ohraničená, tak potom **môže ale nemusí** byť integrovateľná.

- **Prvá postačujúca podmienka integrovateľnosti**
  Ak je funkcia $\mathbf{f(x)}$ spojitá na intervale $\langle \mathbf{a}, \mathbf{b} \rangle$, tak potom je na intervale $\langle \mathbf{a}, \mathbf{b} \rangle$ riemannovsky integrovateľná.
- **Druhá postačujúca podmienka integrovateľnosti**
  Ak je funkcia $\mathbf{f(x)}$ po častiach spojitá na intervale $\langle \mathbf{a}, \mathbf{b} \rangle$, tak potom je na intervale $\langle \mathbf{a}, \mathbf{b} \rangle$ riemannovsky integrovateľná.

Podmienky integrovateľnosti - Riemannov integrál

- **Druhá postačujúca podmienka integrovateľnosti**
  Ak je funkcia $\mathbf{f}(\mathbf{x})$ po častiach spojitá na intervale $\langle \mathbf{a}, \mathbf{b} \rangle$, tak potom je na intervale $\langle \mathbf{a}, \mathbf{b} \rangle$ riemannovsky integrovateľná.
- Nech funkcia $\mathbf{f}(\mathbf{x})$ je na intervale $\langle \mathbf{a}, \mathbf{b} \rangle$ po častiach spojitá funkcia. Označme jej body nespojitosti $c_1, c_2, ..., c_n$,
  $a < c_1 < c_2 < ... < c_n < b$. Potom je funkcia $\mathbf{f}(\mathbf{x})$ spojitá (a teda aj integrovateľná) na každom z intervalov
  $(a, c_1), (c_1, c_2), ..., (c_{n-1}, c_n), (c_n, b)$ a platí:

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = \int_a^{c_1} f(x)\,\mathrm{d}x + \int_{c_1}^{c_2} f(x)\,\mathrm{d}x + ... + \int_{c_n}^{b} f(x)\,\mathrm{d}x.$$

- **Druhá postačujúca podmienka integrovateľnosti**
  Ak je funkcia $\mathbf{f}(\mathbf{x})$ po častiach spojitá na intervale $\langle \mathbf{a}, \mathbf{b} \rangle$, tak potom je na intervale $\langle \mathbf{a}, \mathbf{b} \rangle$ riemannovsky integrovateľná.
- Nech funkcia $\mathbf{f}(\mathbf{x})$ je na intervale $\langle \mathbf{a}, \mathbf{b} \rangle$ po častiach spojitá funkcia. Označme jej body nespojitosti $c_1, c_2, ..., c_n$, $a < c_1 < c_2 < ... < c_n < b$. Potom je funkcia $\mathbf{f}(\mathbf{x})$ spojitá (a teda aj integrovateľná) na každom z intervalov $(a, c_1), (c_1, c_2), ..., (c_{n-1}, c_n), (c_n, b)$ a platí:

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = \int_a^{c_1} f(x)\,\mathrm{d}x + \int_{c_1}^{c_2} f(x)\,\mathrm{d}x + ... + \int_{c_n}^{b} f(x)\,\mathrm{d}x.$$

Metódy počítania určitého integrálu

Metódy počítania určitého integrálu

Priame integrovanie:

Metódy počítania určitého integrálu

Priame integrovanie:

Príklad 2

Vypočítame $\int_1^4 (3x^2 - 5x)\,\mathrm{d}x$.

Metódy počítania určitého integrálu

Priame integrovanie:

Príklad 2

Vypočítame $\int\limits_1^4 (3x^2 - 5x)\,\mathrm{d}x$.

Riešenie:

Výpočet môžeme uskutočniť priamo

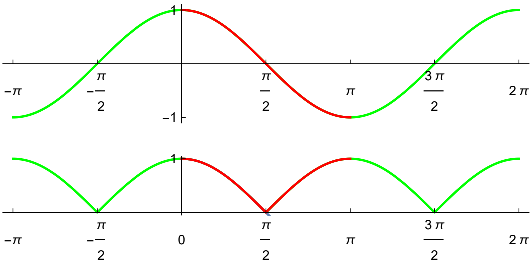
$$\int\limits_1^4 (3x^2 - 5x)\,\mathrm{d}x = \left[x^3 - 5\frac{x^2}{2}\right]_1^4 = \left(4^3 - 5\frac{4^2}{2}\right) - \left(1^3 - 5\frac{1^2}{2}\right) =$$

$$= \left(64 - 5\frac{16}{2}\right) - \left(1 - 5\frac{1}{2}\right) = \frac{51}{2}.$$

Metódy počítania určitého integrálu

Príklad 3

Vypočítame $\int\limits_0^{\pi} |\cos x| \, \mathrm{d}x.$



Obr.: Grafy funkcii $f(x) = \cos x$ a $g(x) = |\cos x|$.

Metódy počítania určitého integrálu

Príklad 4

Vypočítame $\int\limits_0^{\pi} |\cos x| \, \mathrm{d}x$.

Metódy počítania určitého integrálu

Príklad 4

Vypočítame $\int\limits_0^{\pi} |\cos x| \, \mathrm{d}x$.

Riešenie:

Pretože funkcia $\cos x$ mení v bode $\frac{\pi}{2}$ intervalu integrácie znamienko, integrál vypočítame ako súčet integrálov.

$$\int\limits_0^{\pi} |\cos x| \, \mathrm{d}x = \int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \cos x \, \mathrm{d}x + \int\limits_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} (-\cos x) \, \mathrm{d}x =$$

$$= [\sin x]_0^{\frac{\pi}{2}} - [\sin x]_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} = \left(\sin \frac{\pi}{2} - \sin 0\right) - \left(\sin \pi - \sin \frac{\pi}{2}\right) = 2.$$

Metódy počítania určitého integrálu

Metóda per partes pre určité integrály:

Nech funkcie u a v majú spojité derivácie v intervale $\langle a, b\rangle$. Potom platí

$$\int_a^b u'(x)v(x)\,\mathrm{d}x = [u(x)v(x)]_a^b - \int_a^b u(x)v'(x)\,\mathrm{d}x.$$

Metódy počítania určitého integrálu

Metóda per partes pre určité integrály:

Nech funkcie u a v majú spojité derivácie v intervale $\langle a, b\rangle$. Potom platí

$$\int_a^b u'(x)v(x)\,\mathrm{d}x = [u(x)v(x)]_a^b - \int_a^b u(x)v'(x)\,\mathrm{d}x.$$

Príklad 5

Metódou per partes vypočítame určitý integrál

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} x\cos x\,\mathrm{d}x.$$

Metódy počítania určitého integrálu

Riešenie:

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} x \cos x \, \mathrm{d}x =$$

Metódy počítania určitého integrálu

Riešenie:

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} x\cos x\,\mathrm{d}x = \left\{\begin{array}{cc} u' = \cos x & v = x \\ u = \sin x & v' = 1 \end{array}\right\} = [x\sin x]_0^{\frac{\pi}{2}} - \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin x\,\mathrm{d}x =$$

$$= \frac{\pi}{2} - 0 - [-\cos x]_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{\pi}{2} + [\cos x]_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{\pi}{2} + 0 - 1 = \frac{\pi}{2} - 1$$

Metódy počítania určitého integrálu

Substitučná metóda pre určité integrály:

$$\int_a^b f(\varphi(x))\varphi'(x)\,\mathrm{d}x = (t = \varphi(x)) = \int_{t=\varphi(a)}^{t=\varphi(b)} f(t)\,\mathrm{d}t.$$

Metódy počítania určitého integrálu

Substitučná metóda pre určité integrály:

$$\int\limits_a^b f(\varphi(x))\varphi'(x)\,\mathrm{d}x = (t = \varphi(x)) = \int\limits_{t=\varphi(a)}^{t=\varphi(b)} f(t)\,\mathrm{d}t.$$

- Tento vzťah platí, ak φ' je spojitá funkcia v intervale $\langle a, b\rangle$ a f je spojitá funkcia v obore hodnôt funkcie φ.

Metódy počítania určitého integrálu

Substitučná metóda pre určité integrály:

$$\int\limits_a^b f(\varphi(x))\varphi'(x)\,\mathrm{d}x = (t = \varphi(x)) = \int\limits_{t=\varphi(a)}^{t=\varphi(b)} f(t)\,\mathrm{d}t.$$

- Tento vzťah platí, ak φ' je spojitá funkcia v intervale $\langle a, b\rangle$ a f je spojitá funkcia v obore hodnôt funkcie φ.
- Uvedomme si, že hranice integrálu na pravej strane vzniknú dosadením hraníc pôvodnej premennej x do vzťahu medzi novou a starou premennou $t = \varphi(x)$.

Metódy počítania určitého integrálu

Príklad 6

Substitučnou metódou vypočítajme určitý integrál: $\int\limits_0^6 2x\sqrt{1+x^2}\,\mathrm{d}x.$

Metódy počítania určitého integrálu

Príklad 6

Substitučnou metódou vypočítajme určitý integrál: $\int\limits_0^6 2x\sqrt{1+x^2}\,\mathrm{d}x$.

Riešenie:

$$\int\limits_0^6 2x\sqrt{1+x^2}\,\mathrm{d}x \quad =$$

Metódy počítania určitého integrálu

Príklad 6

Substitučnou metódou vypočítajme určitý integrál: $\int\limits_0^6 2x\sqrt{1+x^2}\,\mathrm{d}x$.

Riešenie:

$$\int\limits_0^6 2x\sqrt{1+x^2}\,\mathrm{d}x = \left\{\begin{array}{l} t = 1+x^2 \\ \mathrm{d}t = 2x\,\mathrm{d}x \\ t_1 = 1+0^2 = 1 \\ t_2 = 1+6^2 = 37 \end{array}\right\} =$$

Metódy počítania určitého integrálu

Príklad 6

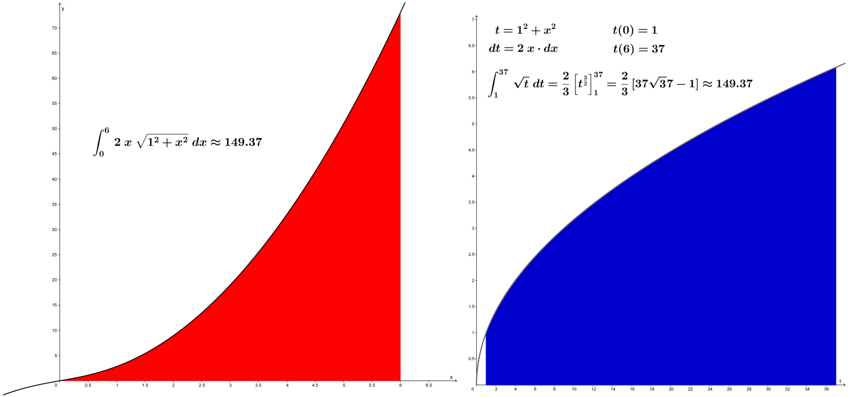
Substitučnou metódou vypočítajme určitý integrál: $\int_0^6 2x\sqrt{1+x^2}\,\mathrm{d}x$.

Riešenie:

$$\int_0^6 2x\sqrt{1+x^2}\,\mathrm{d}x = \left\{\begin{array}{l} t = 1+x^2 \\ \mathrm{d}t = 2x\,\mathrm{d}x \\ t_1 = 1+0^2 = 1 \\ t_2 = 1+6^2 = 37 \end{array}\right\} = \int_1^{37} \sqrt{t}\,\mathrm{d}t = \frac{2}{3}\left[t^{3/2}\right]_1^{37} =$$

$$= \frac{2}{3}(37\sqrt{37}-1) \approx 149.37$$

Metódy počítania určitého integrálu



Obr.: **Substitučná metóda pre určité integrály** - funkcia a aj hranice integrálu sa zmenili, ale obsah ohraničenej plochy zostal rovnaký.

Metódy počítania určitého integrálu

Príklad 7

Substitučnou metódou vypočítajme určité integrály

$$\text{a)} \int_{-2}^{-1} \frac{\mathrm{d}x}{x^2 + 4x + 5}, \qquad \text{b)} \int_0^{\frac{\pi}{4}} \tan^3 x \, \mathrm{d}x.$$

Metódy počítania určitého integrálu

Príklad 7

Substitučnou metódou vypočítajme určité integrály

$$\text{a)} \int_{-2}^{-1} \frac{\mathrm{d}x}{x^2+4x+5}, \qquad \text{b)} \int_{0}^{\frac{\pi}{4}} \tan^3 x \, \mathrm{d}x.$$

Riešenie:

a)

$$\int_{-2}^{-1} \frac{\mathrm{d}x}{x^2+4x+5} =$$

Metódy počítania určitého integrálu

Príklad 7

Substitučnou metódou vypočítajme určité integrály

$$\text{a)} \int_{-2}^{-1} \frac{\mathrm{d}x}{x^2+4x+5}, \qquad \text{b)} \int_{0}^{\frac{\pi}{4}} \tan^3 x \,\mathrm{d}x.$$

Riešenie:

a)

$$\int_{-2}^{-1} \frac{\mathrm{d}x}{x^2+4x+5} = \int_{-2}^{-1} \frac{\mathrm{d}x}{(x+2)^2+1} =$$

Metódy počítania určitého integrálu

Príklad 7

Substitučnou metódou vypočítajme určité integrály

$$\text{a)} \int_{-2}^{-1} \frac{\mathrm{d}x}{x^2+4x+5}, \qquad \text{b)} \int_{0}^{\frac{\pi}{4}} \tan^3 x \,\mathrm{d}x.$$

Riešenie:

a)

$$\int_{-2}^{-1} \frac{\mathrm{d}x}{x^2+4x+5} = \int_{-2}^{-1} \frac{\mathrm{d}x}{(x+2)^2+1} = \left\{ \begin{array}{l} t = x+2 \\ \mathrm{d}t = \mathrm{d}x \\ t_1 = -2+2 = 0 \\ t_2 = -1+2 = 1 \end{array} \right\} = \int_0^1 \frac{\mathrm{d}t}{t^2+1} =$$

$$= [\arctan\, t]_0^1 = \arctan\, 1 - \arctan\, 0 = \frac{\pi}{4} - 0 = \frac{\pi}{4}$$

Metódy počítania určitého integrálu

$$\int_0^{\frac{\pi}{4}} \tan^3 x \,\mathrm{d}x \;=$$

Metódy počítania určitého integrálu

$$\int_0^{\frac{\pi}{4}} \tan^3 x \, \mathrm{d}x = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{\sin^3 x}{\cos^3 x} \, \mathrm{d}x =$$

Metódy počítania určitého integrálu

$$\int_0^{\frac{\pi}{4}} \tan^3 x \,\mathrm{d}x = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{\sin^3 x}{\cos^3 x} \,\mathrm{d}x = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{\sin x \sin^2 x}{\cos^3 x} \,\mathrm{d}x =$$

Metódy počítania určitého integrálu

$$\int_0^{\frac{\pi}{4}} \tan^3 x \, \mathrm{d}x = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{\sin^3 x}{\cos^3 x} \, \mathrm{d}x = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{\sin x \sin^2 x}{\cos^3 x} \, \mathrm{d}x = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{\sin x (1 - \cos^2 x)}{\cos^3 x} \, \mathrm{d}x$$

$$=$$

Metódy počítania určitého integrálu

$$
\begin{aligned}
\int_0^{\frac{\pi}{4}} \tan^3 x \,\mathrm{d}x &= \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{\sin^3 x}{\cos^3 x}\,\mathrm{d}x = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{\sin x \sin^2 x}{\cos^3 x}\,\mathrm{d}x = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{\sin x(1-\cos^2 x)}{\cos^3 x}\,\mathrm{d}x \\
&= \left\{ \begin{array}{l} t = \cos x \\ \mathrm{d}t = -\sin x \,\mathrm{d}x \\ t_1 = \cos 0 = 1 \\ t_2 = \cos \frac{\pi}{4} = \frac{\sqrt{2}}{2} \end{array} \right\} = \int_1^{\frac{\sqrt{2}}{2}} -\frac{1-t^2}{t^3}\,\mathrm{d}t = \int_1^{\frac{\sqrt{2}}{2}} \left(-t^{-3} + \frac{1}{t}\right) \\
&= \left[\frac{1}{2t^2} + \ln t\right]_1^{\frac{\sqrt{2}}{2}} = \left(1 + \ln\frac{\sqrt{2}}{2} - \left(\frac{1}{2} + \ln 1\right)\right) \\
&= \frac{1}{2} + \ln\frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{1}{2} + \ln\sqrt{2} - \ln 2 = \frac{1}{2} + \ln 2^{\frac{1}{2}} - \ln 2 \\
&= \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\ln 2 - \ln 2 = \frac{1}{2} - \frac{1}{2}\ln 2.
\end{aligned}
$$

Metódy počítania určitého integrálu

Príklad 8

Vypočítajte integrály:

a) $\int\limits_0^1 \frac{\mathrm{d}x}{(2x+1)^3} = \frac{2}{9}$

b) $\int\limits_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos x}{\sin^2 x}\,\mathrm{d}x = \sqrt{2} - 1$

c) $\int\limits_0^{\ln 2} x e^x \,\mathrm{d}x = 2\ln 2 - 1$

d) $\int\limits_9^4 \frac{1-\sqrt{x}}{\sqrt{x}}\,\mathrm{d}x = 3$

Ďakujem za pozornosť.