Nutná podmienka konvergencie

Ak je rad $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ konvergentný $\Rightarrow$ $\lim_{n \to \infty} a_n = 0$

To znamená, že ak zelená podmienka neplatí, rad NIE JE konvergentný.
Ak zelená podmienka platí, tak rad MôŽE, ale NEMUSÍ byť konvergentný.

$$\sum_{n=1}^{\infty} \underbrace{\frac{n+2}{n+1}}_{a_n} \qquad \lim_{n \to \infty} \frac{n+2}{n+1} = \lim_{n \to \infty} \frac{\cancel{n}(1+\frac{2}{n})}{\cancel{n}(1+\frac{1}{n})} = \frac{1}{1} = 1 \neq 0$$

RAD $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n+2}{n+1}$ nie je konvergentný

Konvergovať k a znamená približovať sa (blížiť sa) k a.
Ak rad nekonverguje, tak diverguje (k $+\infty$ alebo k $-\infty$).

Ak rad nie je konvergentný, tak je divergentný.

ALTERNUJÚCI rad (rad so striedavými znamienkami)

Nech $a_n > 0$ pre $\forall n \in N^+$

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} a_n = a_1 - a_2 + a_3 - a_4 + a_5 - \ldots$$

Leibnitzovo kritérium konvergencie radu

Nech $a_n > 0$ pre $\forall n \in N^+$ a postupnosť $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ je klesajúca.

Potom ak $\lim\limits_{n \to \infty} a_n = 0 \Rightarrow$ rad $\sum\limits_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} a_n = a_1 - a_2 + a_3 - a_4 + \ldots$

je konvergentný.

To znamená, že NUTNÁ PODMIENKA KONVERGENCIE pre rad je pre ALTERNUJÚCI rad zároveň aj POSTAČUJÚCOU PODMIENKOU KONVERGENCIE.

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{1}{n+1} \quad \frac{1}{n+1} \to a_n$$

$\lim\limits_{n \to \infty} a_n = \lim\limits_{n \to \infty} \frac{1}{n+1} = 0 \Rightarrow$ rad (keďže je alternujúci) je konvergentný

Nech $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ a $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ sú také, že $|a_n| \leq b_n$ pre $\forall n \in N^+$.

Potom hovoríme, že $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ je MAJORANTNÝ RAD k radu $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$.

Zapisujeme to nasledovne $\sum_{n=1}^{\infty} a_n << \sum_{n=1}^{\infty} b_n$.

Porovnávacie kritérium

Nech $\sum_{n=1}^{\infty} a_n << \sum_{n=1}^{\infty} b_n$

Ak rad $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ konverguje $\Rightarrow$ rad $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ tiež konverguje.

dôsledok Porovnávacieho kritéria

Ak rad $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ diverguje $\Rightarrow$ rad $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ tiež diverguje.

DÔLEŽITÉ, ak rad $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ diverguje alebo rad $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ konverguje, nevyplýva z toho konvergencia/divergencia druhého radu.

Pri porovnávaciom kritériu používame na porovnávanie často:

konvergentné rady: $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$

divergentné rady: $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$

alebo rady z nich odvodené alebo geometrické rady.

geometrický rad $\sum_{n=1}^{\infty} a_1 \cdot q^{n-1}$

napr $5 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}$ alebo $\left(\frac{1}{3}\right)^n = \frac{1}{3} \cdot \left(\frac{1}{3}\right)^{n-1}$

alebo $2 \cdot 3^{n-1}$ alebo $7^n = 7 \cdot 7^{n-1}$

Ak $|q| < 1 \Rightarrow$ geometrický rad konverguje

Ak $|q| \geq 1 \Rightarrow$ geometrický rad diverguje

Ak rad $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$ konverguje $\Rightarrow$ rad $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ absolútne konverguje.

Ak rad $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ konverguje, ale rad $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$ diverguje $\Rightarrow$ rad $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$

konverguje len relatívne.

Pri príkladoch na cvičeniach budeme používať fakt, že $\sum_{n=1}^{\infty} a_n << \sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$

a teda podľa Porovnávacieho kritéria, keď konverguje rad $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$, tak konverguje aj rad $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ a konveguje absolútne.

D'Alamertovo kritérium

$$l = \lim_{n \to \infty} \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right|$$

Cauchyho(Košiho) odmocninové kritérium

$$l = \lim_{n \to \infty} \sqrt[n]{|a_n|}$$

$l < 1 \Rightarrow$ rad konverguje

$l > 1 \Rightarrow$ rad diverguje

$l = 1 \Rightarrow$ podľa tohto kritéria nevieme rozhodnúť o konvergencii/divergencii $\Rightarrow$

$\Rightarrow$ musíme použiť iné kritérium

Cauchyho (čítaj Košiho) integrálne kritérium

Nech rad má nezáporné členy a nech existuje spojitá, nerastúca funkcia f(x), taká že pre $\forall\ n > k$ platí $a_n = f(n)$, potom rad konverguje práve vtedy a len vtedy, keď integrá

$$\int_1^\infty f(x)$$

konverguje.

To, že integrál konverguje znamená to, že výsledok určitého integrálu je konečné číslo (teda výsledok nemôže byť $+\infty$ alebo ∞).

Ak výsledok určitého integrálu výjde $+\infty$ alebo $-\infty$, znamená to, že integrál diverguje a teda podľa Cauchyho integrálneho kritéria diverguje aj rad.