Typy funkcii komplexnej premennej

Oľga Stašová

Ústav informatiky a matematiky
Fakulta elektrotechniky a informatiky
Slovenská technická univerzita

letný semester 2023/2024

Úvod

Pod pojmom **typy funkcií** rozumieme napr. funkcie mocninové, logaritmické, goniometrické,...

Definície jednotlivých typov **funkcií komplexnej premennej nie sú rovnaké** s definíciami **funkcií reálnej premennej**.

Vzhľadom na to: **niektoré vlastnosti rovnakého typu** funkcií reálnej a komplexnej premennej **sú rôzne** (a niektoré sú aj rovnaké).

Napr. **definičný obor logaritmickej funkcie**.

- V **R** funkcia $f(x) = ln(x)$, $x > 0$, $D(f) = (0, \infty)$
  (t.j. všetky **kladné** reálne čísla).
- V **C** funkcia $f(z) = ln(z)$, $z \neq 0$, $D(f) = C \setminus \{0\}$
  (t.j. všetky komplexné čísla okrem čísla $z = 0$).

Funkcia - injektívna, surjektívna, bijektívna

Definícia

Funkcia je ***injektívna*** *(prostá), ak:*

- *pre každý* ***obraz*** *($f(x)$ alebo $f(z)$)* $\exists$ *najviac jeden* ***vzor*** *(x alebo z).*

Definícia

Funkcia je ***surjektívna****, ak:*

- *pre každý* ***obraz*** *($f(x)$ alebo $f(z)$)* $\exists$ *aspoň jeden* ***vzor*** *(x alebo z).*

Definícia

Funkcia je ***bijektívna****, ak:*

- *je* ***injektívna*** *a zároveň* ***surjektívna****.*
- *pre každý* ***obraz*** *($f(x)$ alebo $f(z)$)* $\exists$ *práve jeden* ***vzor*** *(x alebo z).*

Injektívna funkcia

Definícia

Funkcia je **injektívna** *(prostá), ak:*

- *pre každý* **obraz** *($f(x)$ alebo $f(z)$)* $\exists$ *najviac jeden* **vzor** *(x alebo z)*
- $x_1 \neq x_2 \Rightarrow f(x_1) \neq f(x_2)$.

Pozn. V **R** sa používa premenná x a v **C** sa používa premenná z, ale **definícia injektívnosti, surjektívnosti a bijekcie je rovnaká** v **R** aj v **C**.

Ako dôkaz, že **funkcia nie je injektívna**, stačí nájsť také x_1 a x_2 z definičného oboru, pre ktoré platí: $x_1 \neq x_2$, **ale** $f(x_1) = f(x_2)$.

Mocninová funkcia reálnej premennej s prirodzeným exponentom

Definícia

Nech $n \in \mathbf{N}$. *Funkciu* $f : \mathbf{R} \longrightarrow \mathbf{R}$, $f(x) = x^n$ *nazývame:*
mocninová *funkcia reálnej premennej s* **prirodzeným** *exponentom.*

Táto funkcia

- je **injektívna**, keď

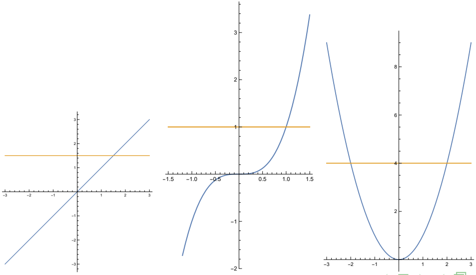
Mocninová funkcia reálnej premennej s prirodzeným exponentom

Definícia

Nech $n \in \mathbf{N}$. *Funkciu* $f : \mathbf{R} \longrightarrow \mathbf{R}$, $f(x) = x^n$ *nazývame:*
mocninová *funkcia reálnej premennej s* **prirodzeným** *exponentom.*

Táto funkcia

- je **injektívna**, keď n je nepárne.
- nie je **injektívna**, keď n je párne.



Mocninová funkcia komplexnej premennej s prirodzeným exponentom

Definícia

Nech $n \in \mathbf{N}$. *Funkciu* $f : \mathbf{C} \longrightarrow \mathbf{C}$, $f(z) = z^n$ *nazývame:*
mocninová *funkcia komplexnej premennej s* **prirodzeným** *exponentom.*

Táto funkcia

- je **injektívna**, keď

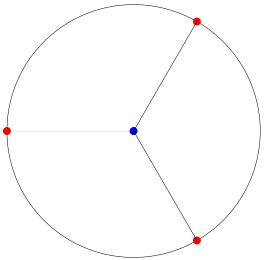
Mocninová funkcia komplexnej premennej s prirodzeným exponentom

Definícia

Nech $n \in \mathbf{N}$. *Funkciu* $f : \mathbf{C} \longrightarrow \mathbf{C}$, $f(z) = z^n$ *nazývame:*
mocninová *funkcia komplexnej premennej s* **prirodzeným** *exponentom.*

Táto funkcia

- je **injektívna**, keď $n = 1$, t.j. keď $f(z) = z$.
- nie je **injektívna**, keď $n > 1$.



$f : \mathbf{C} \longrightarrow \mathbf{C},\ f(z) = z^n$

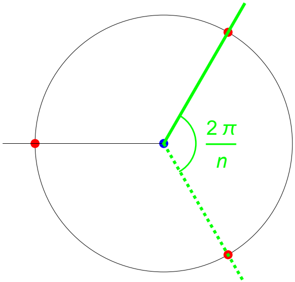
Táto funkcia, keď $n > 1$,

- nie je **injektívna** na **C**.
  ale
- je **injektívna** na $V_0 =$

$f : \mathbf{C} \longrightarrow \mathbf{C},\ f(z) = z^n$

Táto funkcia, keď $n > 1$,

- nie je **injektívna** na **C**.
  ale
- je **injektívna** na $V_0 = \{z \in \mathbf{C} \setminus \{0\}, -\dfrac{\pi}{n} < arg\, z \leq \dfrac{\pi}{n}\} \cup \{0\}$



$f : \mathbf{C} \longrightarrow \mathbf{C},\ f(z) = z^n$

Nech $w = f(z) = z^n$. Nech $w \in \mathbf{C}$ je ľubovoľné číslo.

- Ak $w = 0$, potom mu prislúcha číslo $z = 0 \in V_0$.
- Ak $w \neq 0$, potom z rovnice $z^n = w$ dostaneme

$$z_k = \sqrt[n]{|w|}\left(cos\frac{arg\,w + 2k\pi}{n} + i\,sin\frac{arg\,w + 2k\pi}{n}\right)$$

pre $k = 0, 1, 2, ..., n-1$. Potom pre $k = 0$ máme

$$z_0 = \sqrt[n]{|w|}\left(cos\frac{arg\,w}{n} + i\,sin\frac{arg\,w}{n}\right).$$

Pretože $w \neq 0$, tak

$$-\pi < arg\,w \leq \pi,$$
$$-\frac{\pi}{n} < \frac{arg\,w}{n} \leq \frac{\pi}{n},$$

t.j. $z_0 \in V_0$.

Ukázali sme, že funkcia $f_0 : V_0 \longrightarrow \mathbf{C}$, $f_0(z) = z^n$ je **surjekcia**.

$f_0 : V_0 \longrightarrow \mathbf{C}, \; f_0(z) = z^n$

Keďže funkcia $f_0 : V_0 \longrightarrow \mathbf{C}$, $f_0(z) = z^n$ je **injekcia** a aj **surjekcia**, tak je **bijekcia.**

K funkcii f_0 existuje **inverzná funkcia** f_0^{-1}.

Hlavná vetva n-tej odmocniny

Definícia

Nech $n \geq 2$ *a* $n \in \mathbf{N}$. *Potom inverznú funkciu k funkcii* $f_0 : V_0 \longrightarrow \mathbf{C}$, $f_0(z) = z^n$ *nazývame* **hlavnou vetvou n-tej odmocniny** *a označujeme* $f_0^{-1}(z) = (\sqrt[n]{z})_0,\ z \in \mathbf{C}$.

Pozn. Niektorí autori množinu všetkých riešení rovnice $w^n = z$ označujú symbolom

$$\sqrt[n]{z} = \sqrt[n]{|z|}\left(cos\frac{arg\,z + 2k\pi}{n} + i\,sin\frac{arg\,z + 2k\pi}{n}\right),\ k = 0, 1, ..., n-1$$

a nazývajú ju **n-tou odmocninou z komplexného čísla** z, ktorú uvažujú ako **viacznačnú funkciu**.

Polynóm n-tého stupňa a racionálna funkcia

Definícia

Funkciu

$$P_n : \mathbf{C} \longrightarrow \mathbf{C},\ P_n(z) = c_n z^n + c_{n-1} z^{n-1} + ... + c_1 z + c_0,$$

kde $c_0, c_1, ..., c_n$ *sú komplexné čísla a* $n \in \mathbf{N}$ *nazývame* **polynóm n-tého stupňa komplexnej premennej z**.

Definícia

Podiel 2 polynómov nazývame **racionálna funkcia.**

Exponenciálna funkcia, funkcie sínus a kosínus

Definícia

Definujeme funkcie exp, cos a sin: **C** $\longrightarrow$ **C**

$$
\begin{aligned}
exp\, z &= e^z = 1 + \frac{z}{1!} + \frac{z^2}{2!} + \ldots + \frac{z^n}{n!} + \ldots = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!} \\
sin\, z &= z - \frac{z^3}{3!} + \frac{z^5}{5!} + \ldots + (-1)^n \frac{z^{2n+1}}{(2n+1)!} + \ldots = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{z^{2n+1}}{(2n+1)!} \\
cos\, z &= 1 - \frac{z^2}{2!} + \frac{z^4}{4!} + \ldots + (-1)^n \frac{z^{2n}}{(2n)!} + \ldots = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{z^{2n}}{(2n)!}
\end{aligned}
$$

Tieto rady konvergujú absolútne v $K = (0, \infty) =$ **C**.

Odvodenie Eulerovej formule: $e^{iz} = cos\, z + i\, sin\, z$

$$
\begin{aligned}
e^z &= 1 + \frac{z}{1!} + \frac{z^2}{2!} + ... + \frac{z^n}{n!} + ... = \\
e^{iz} &= 1 + \frac{iz}{1!} + \frac{i^2 z^2}{2!} + \frac{i^3 z^3}{3!} + \frac{i^4 z^4}{4!} + ... + \frac{i^n z^n}{n!} + ... = \\
&= 1 + \frac{iz}{1!} + \frac{-z^2}{2!} + \frac{-i\, z^3}{3!} + \frac{z^4}{4!} + ... + \frac{i^n z^n}{n!} + ... = \\
&= \left(1 - \frac{z^2}{2!} + \frac{z^4}{4!} + ... + (-1)^n \frac{z^{2n}}{(2n)!} + ...\right) + \\
&+ i\left(z - \frac{z^3}{3!} + \frac{z^5}{5!} + ... + (-1)^n \frac{z^{2n+1}}{(2n+1)!} + ...\right) = cos\, z + i\, sin\, z
\end{aligned}
$$

Vyjadrenie goniometrických funkcií pomocou exponenciálnej

$$e^{i(-z)} = e^{-iz} = cos\,(-z) + i\,sin\,(-z) = cos\,z - i\,sin\,z$$

$\mathbf{cos\,z}$ je **párna** funkcia.
Funkcia f sa nazýva **párna**, ak pre každé $x \in D(f)$ platí $-x \in D(f)$ a $f(x) = f(-x)$.
Preto $\mathbf{cos\,(-z) = cos\,z}$.

$\mathbf{sin\,z}$ je **nepárna** funkcia.
Funkcia f sa nazýva **nepárna**, ak pre každé $x \in D(f)$ platí $-x \in D(f)$ a $f(-x) = -f(x)$.
Preto $\mathbf{sin\,(-z) = -sin\,z}$.

Vyjadrenie goniometrických funkcií pomocou exponenciálnej

$e^{i(-z)} = e^{-iz} = cos\,(-z) + i\,sin\,(-z) = cos\,z - i\,sin\,z$

$$\begin{aligned} e^{iz} &= cos\,z + i\,sin\,z \quad I. \\ e^{-iz} &= cos\,z - i\,sin\,z \quad II. \\ e^{iz} + e^{-iz} &= 2cos\,z \qquad\qquad I. + II. \\ cos\,z &= \frac{e^{iz} + e^{-iz}}{2} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} e^{iz} &= cos\,z + i\,sin\,z \quad I. \\ e^{-iz} &= cos\,z - i\,sin\,z \quad II. \\ e^{iz} - e^{-iz} &= 2i\,sin\,z \qquad\qquad I. - II. \\ sin\,z &= \frac{e^{iz} - e^{-iz}}{2i} \end{aligned}$$

Známe vzorce

$$\begin{aligned} e^{z_1+z_2} &= e^{z_1}e^{z_2}, \quad \forall z_1, z_2 \in \mathbf{C} \\ cos(z_1 \pm z_2) &= cos\, z_1 cos\, z_2 \mp sin\, z_1 sin\, z_2 \\ sin(z_1 \pm z_2) &= sin\, z_1 cos\, z_2 \pm cos\, z_1 sin\, z_2 \end{aligned}$$

Všimnite si, že vo vzorci pre **kosínus** je na pravej strane **vymenené** poradie znamienok.
Vo vzorci pre **sínus** je poradie znamienok na ľavej aj pravej strane **rovnaké**.

Posledné 2 vzorce sú veľmi dôležité pri impulzovej funkcii (odborné predmety aj MAT3).

Obor hodnôt exponenciálnej funkcie: **C**$\setminus\{0\}$

$z \in$ **C**, $z = x + iy, \quad x, y \in$ **R**
$e^z = e^{x+iy} = e^x e^{iy} = e^x(cos\, y + i\, sin\, y)$
Ak by existovalo také z, že $e^z = 0$, tak potom $e^x cos\, y = 0 \bigwedge e^x sin\, y = 0$.
Keďže $e^x \neq 0$, tak potom by muselo platiť: $cos\, y = 0 \bigwedge sin\, y = 0$ a také y neexistuje.
Preto obor hodnôt exponenciálnej funkcie je **C**$\setminus\{0\}$.

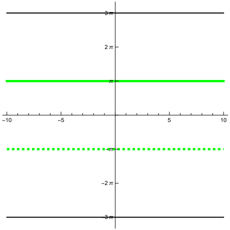
Exponenciálna funkcia má periodu $2\pi i$

$$\begin{aligned} e^{z+2k\pi i} &= e^z e^{2k\pi i} \\ &= e^z (cos\, 2k\pi + i\, sin\, 2k\pi) \\ &= e^z (cos\, 0 + i\, sin\, 0) \\ &= e^z e^{0i} = e^z. \end{aligned}$$

Exponenciálna funkcia má periodu $2\pi i$

$$e^{z+2k\pi i} = e^z e^{2k\pi i} = e^z$$

To $+2k\pi i$ vyjadruje posun vo vertikálnom smere.
To znamená, že hodnoty exponenciálnej funkcie sa periodicky opakujú o periodu 2π vo vertikálnom smere.
Definičný obor exponenciálnej funkcie $D(exp) = \mathbf{C}$ môžeme rozdeliť na pásy (rovnobežné s reálnou osou) so šírkou 2π.



Keďže **exponenciálna funkcia je** na **C** **periodická**,
tak **nie je** na **C** **injektívna**.

Exponenciálna funkcia je bijekcia na P_k

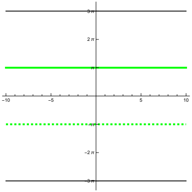
Exponenciálna funkcia je na $\mathbf{C}$ periodická s periodou $2\pi i$.
Definičný obor exponenciálnej funkcie $D(exp) = \mathbf{C}$ môžeme rozdeliť na pásy so šírkou $2\pi i$.

$$P_k = \{z \in \mathbf{C},\, (2k-1)\pi < Im\, z \leq (2k+1)\pi\},\ k \in \mathbf{Z}.$$

Funkcia

$$exp_k : P_k \longrightarrow \mathbf{C} \setminus \{0\},\ exp_k(z) = e^z$$

je injekcia pre každé $k \in \mathbf{Z}$.
Pozn. Dôkaz, že táto funkcia je surjekcia (a teda aj bijekcia) nájdete v pdf skripte: Komplexná analýza.



Logaritmická funkcia

Logaritmická funkcia (prirodzeného logaritmu) v **R:** Inverznú funkciu k funkcii $f : y = e^x$ označujeme ako $f^{-1} : x = e^y$ a zapisujeme ju ako $y = ln\, x$.

Logaritmická funkcia v **C:**

Definícia

Inverznú funkciu k bijekcii

$$exp_0 : P_0 \longrightarrow \mathbf{C} \setminus \{0\},\ exp_0(z) = e^z$$

nazývame **hlavná vetva logaritmu** *a označujeme*

$$ln : \mathbf{C} \setminus \{0\} \longrightarrow P_0,\ ln\, z = w \Leftrightarrow z = exp_0(w) = e^w.$$

Logaritmická funkcia

Exponenciálny tvar komplexného čísla je $z = |z|e^{i\varphi}$, $\varphi = arg\, z$.

$$\begin{aligned} ln\, z &= ln(|z|e^{i\varphi}), \qquad ln(AB) = lnA + lnB \\ &= ln|z| + ln\, e^{i\varphi}, \qquad ln(e^A) = A \\ &= ln|z| + i\varphi, \\ &= ln|z| + i\, arg\, z, \quad \forall z \in \mathbf{C} \setminus \{0\} \end{aligned}$$

Príklad

Vypočítajte funkčnú hodnotu $ln(5+5i)$.

Riešenie: Použijeme vzorec: $ln\, z = ln|z| + i\, arg\, z$.
$|5+5i| = \sqrt{5^2+5^2} = \sqrt{50} = \sqrt{25 \cdot 2} = \sqrt{25}\sqrt{2} = 5\sqrt{2}$,
$arg\, z = \varphi = \dfrac{\pi}{4}$
$ln(5+5i) = ln\, 5\sqrt{2} + i\dfrac{\pi}{4}$

Logaritmická funkcia

Definícia

Niektorí autori namiesto hlavnej vetvy logaritmu definujú viacznačnú funkciu

$$ln(z) = \{ln\, z + 2k\pi i,\ k \in \mathbf{Z}\}.$$

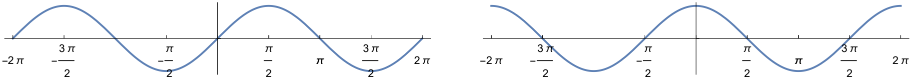
Vlastnosti funkcii sínus a kosínus v komplexnej analýze

Definícia

Nasledujúce vlastnosti platia rovnako ako v reálnej analýze.

$$\begin{aligned} sin\, z &= 0 \Leftrightarrow z = k\pi,\ k \in \mathbf{Z} \\ cos\, z &= 0 \Leftrightarrow z = (2k+1)\frac{\pi}{2},\ k \in \mathbf{Z} \end{aligned}$$

Funkcie $f(z) = sin\, z$ *a* $g(z) = cos\, z$ **sú periodické s periodou** 2π *a teda* **nie sú injektívne** *na* **C**.



Obr.: Grafy funkcii v reálnej analýze: f(x)=sin(x)(vľavo), g(x)=cos(x)(vpravo).

Vlastnosti funkcii sínus a kosínus v komplexnej analýze

Definícia

Nech

$$\begin{aligned} Q_k &= \{Z \in \mathbf{C}, -\frac{\pi}{2} + k\pi < Re\, z \leq \frac{\pi}{2} + k\pi\},\ k \in \mathbf{Z} \\ S_k &= \{Z \in \mathbf{C}, \qquad k\pi < Re\, z \leq (k+1)\pi\},\ k \in \mathbf{Z} \end{aligned}$$

potom **zúžené funkcie**

$$\begin{aligned} sin|_{Q_k} &: \quad Q_k \longrightarrow \mathbf{C},\ sin|_{Q_k}(z) = \frac{e^{iz} - e^{-iz}}{2i} \\ cos|_{S_k} &: \quad S_k \longrightarrow \mathbf{C},\ cos|_{S_k}(z) = \frac{e^{iz} + e^{-iz}}{2} \end{aligned}$$

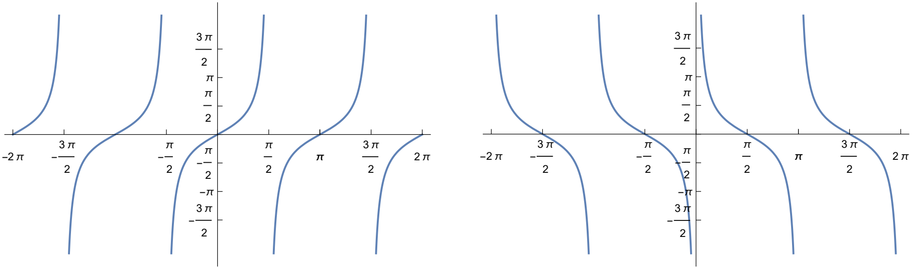
sú bijekcie *pre každé* $k \in \mathbf{Z}$.

Pozri slajd 15.

Nasledujúce vlastnosti platia rovnako ako v reálnej analýze.

$$tg : \mathbf{C} \setminus \{(2k+1)\frac{\pi}{2},\, k \in \mathbf{Z}\} \longrightarrow \mathbf{C},\; tg\, z = \frac{sin\, z}{cos\, z}$$

$$cotg : \mathbf{C} \setminus \{k\pi,\, k \in \mathbf{Z}\} \longrightarrow \mathbf{C},\; cotg\, z = \frac{cos\, z}{sin\, z} = \frac{1}{tg\, z}$$



Obr.: Grafy funkcii v reálnej analýze: f(x)=tg(x)(vľavo), g(x)=cotg(x)(vpravo).

Vlastnosti funkcii tangens a kotangens v komplex. analýze

Definícia

Nasledujúce vlastnosti platia rovnako ako v reálnej analýze.

$$\begin{aligned} tg\, z &= 0 \Leftrightarrow z = k\pi,\ k \in \mathbf{Z} \\ cotg\, z &= 0 \Leftrightarrow z = (2k+1)\frac{\pi}{2},\ k \in \mathbf{Z} \end{aligned}$$

Funkcie $f(z) = tg\, z$ *a* $g(z) = cotg\, z$ **sú periodické** **s periodou** π *a teda* **nie sú injektívne** *na* **C**.

Pozn. Funkcie $f(z) = sin\, z$ a $g(z) = cos\, z$ sú periodické **s periodou** 2π .

Vlastnosti funkcii tangens a kotangens v komplex. analýze

Definícia

Nech

$$\begin{aligned} Q_k^0 &= \{Z \in \mathbf{C}, -\frac{\pi}{2} + k\pi < Re\, z < \frac{\pi}{2} + k\pi\},\ k \in \mathbf{Z} \\ S_k^0 &= \{Z \in \mathbf{C}, \qquad k\pi < Re\, z < (k+1)\pi\},\ k \in \mathbf{Z} \end{aligned}$$

potom **zúžené funkcie**

$$\begin{aligned} tg|_{Q_k^0} &: Q_k^0 \longrightarrow \mathbf{C},\ tg|_{Q_k^0}(z) = \frac{sin\ z}{cos\ z} \\ cotg|_{S_k^0} &: S_k^0 \longrightarrow \mathbf{C},\ cotg|_{S_k^0}(z) = \frac{cos\ z}{sin\ z} \end{aligned}$$

sú bijekcie *pre každé* $k \in \mathbf{Z}$.

Pozn. Množiny Q_k a Q_k^0 a množiny S_k a S_k^0 sa líšia len 2. znamienkom nerovnosti.

Hyperbolické funkcie v komplexnej analýze

$$cosh\, z = \frac{e^z + e^{-z}}{2}, \qquad sinh\, z = \frac{e^z - e^{-z}}{2},$$

$$cos\, z = \frac{e^{iz} + e^{-iz}}{2}, \qquad sin\, z = \frac{e^{iz} - e^{-iz}}{2i},$$

$$cos\,(iz) = \frac{e^{iiz} + e^{-iiz}}{2} = \frac{e^{-z} + e^{z}}{2} = \frac{e^z + e^{-z}}{2} = cosh\, z,$$

$$cosh\,(iz) = \frac{e^{iz} + e^{-iz}}{2} = cos\, z,$$

$$sin\,(iz) = \frac{e^{iiz} - e^{-iiz}}{2i} = \frac{e^{-z} - e^{z}}{2i}\frac{i}{i} = i\frac{e^z - e^{-z}}{2} = i\, sinh\, z,$$

$$sinh\,(iz) = \frac{e^{iz} - e^{-iz}}{2} = i\, sin\, z.$$

Cyklometrické funkcie v komplexnej analýze

Pre inverzné funkcie ku goniometrickým funkciám komplexnej premennej platia **rovnaké pravidlá ako v reálnej analýze**.

Bijekcia $sin|_{Q_0}$ má inverznú funkciu

$$arcsin : \mathbf{C} \longrightarrow Q_0 = \{z \in \mathbf{C},\, -\frac{\pi}{2} < Re\, z \leq \frac{\pi}{2}\},\, arcsin\, z = w \Leftrightarrow z = sin\, w.$$

Bijekcia $cos|_{S_0}$ má inverznú funkciu

$$arccos : \mathbf{C} \longrightarrow S_0 = \{z \in \mathbf{C},\, 0 < Re\, z \leq \pi\},\, arccos\, z = w \Leftrightarrow z = cos\, w.$$

Bijekcia $tg|_{Q_0^0}$ má inverznú funkciu

$$arctg : \mathbf{C} \longrightarrow Q_0^0 = \{z \in \mathbf{C},\, -\frac{\pi}{2} < Re\, z < \frac{\pi}{2}\},\, arctg\, z = w \Leftrightarrow z = tg\, w.$$

Bijekcia $cotg|_{S_0^0}$ má inverznú funkciu

$$arccotg : \mathbf{C} \longrightarrow S_0^0 = \{z \in \mathbf{C},\, 0 < Re\, z < \pi\},\, arccotg\, z = w \Leftrightarrow z = cotg\, w.$$

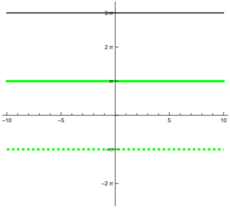
Toto na MAT2 nebude, ale na odborných predmetov môže byť.

$$
\begin{aligned}
arcsin\, z &= -i\, ln\left(iz + \sqrt{1 - z^2}\right), \forall z \in \mathbf{C}, \\
arccos\, z &= -i\, ln\left(z + \sqrt{z^2 - 1}\right), \forall z \in \mathbf{C}, \\
arctg\, z &= \frac{i}{2} ln \frac{i + z}{i - z}, \forall z \in \mathbf{C}, \\
arcotg\, z &= \frac{i}{2} ln \frac{z - i}{z + i}, \forall z \in \mathbf{C}.
\end{aligned}
$$

Mocninová funkcia so všeobecným exponentom z^a

Definičný obor exponenciálnej funkcie $D(exp) = \mathbf{C}$ môžeme rozdeliť na pásy so šírkou $2\pi i$:

$$P_k = \{z \in \mathbf{C},\ (2k-1)\pi < Im\, z \leq (2k+1)\pi\},\ k \in \mathbf{Z}.$$



Definícia

Nech $a, z \neq 0$ sú komplexné čísla. Funkciu

$$f : \mathbf{C} \setminus \{0\} \longrightarrow C,\ f(z) = exp_0(a\, ln\, z)$$

nazývame **hlavná vetva (hodnota) mocniny so všeobecným exponentom**.

Mocninová funkcia so všeobecným exponentom z^a

Definícia

Nech $a, z \neq 0$ *sú komplexné čísla. Funkciu*

$$f : \mathbf{C} \setminus \{0\} \longrightarrow C,\ f(z) = exp_0(a\, ln\, z)$$

nazývame **hlavná vetva (hodnota) mocniny so všeobecným exponentom**.

$$\begin{aligned} P_k &= \{z \in \mathbf{C},\ (2k-1)\pi < Im\, z \leq (2k+1)\pi\},\ k \in \mathbf{Z}, \\ P_0 &= \{z \in \mathbf{C},\ -\pi < Im\, z \leq \pi\}. \end{aligned}$$

Použijeme nasledujúce vzorce:

$$A = e^{ln\, A}, \qquad ln\, D^E = E\, ln\, D.$$

$$z^a = e^{ln\, z^a} = e^{a\, ln\, z}.$$

Mocninová funkcia so všeobecným exponentom $z^a = e^{\ln z^a} = e^{a \ln z}$.

Príklad

Vypočítajte hodnotu 2^{1-i}.

Použijeme vzorce: $e^{z_1+z_2} = e^{z_1} e^{z_2}$

$$e^{i\varphi} = \cos\varphi + i \sin\varphi.$$

$$\begin{aligned}
2^{1-i} &= e^{\ln 2^{1-i}} = e^{(1-i)\ln 2} = e^{\ln 2 - i \ln 2} = e^{\ln 2 + i(-\ln 2)} \\
&= e^{\ln 2} e^{i(-\ln 2)} = 2\, e^{i(-\ln 2)} \\
&= 2\,(\cos(-\ln 2) + i \sin(-\ln 2)) \\
&= 2\,(\cos(\ln 2) - i \sin(\ln 2)).
\end{aligned}$$

Ďakujem za pozornosť.