Komplexná analýza

- využitie v elektrotechnickej praxi (analytické funkcie, singulárne body, rezíduum, transformácie, mocninové rady, integrovanie v C.)

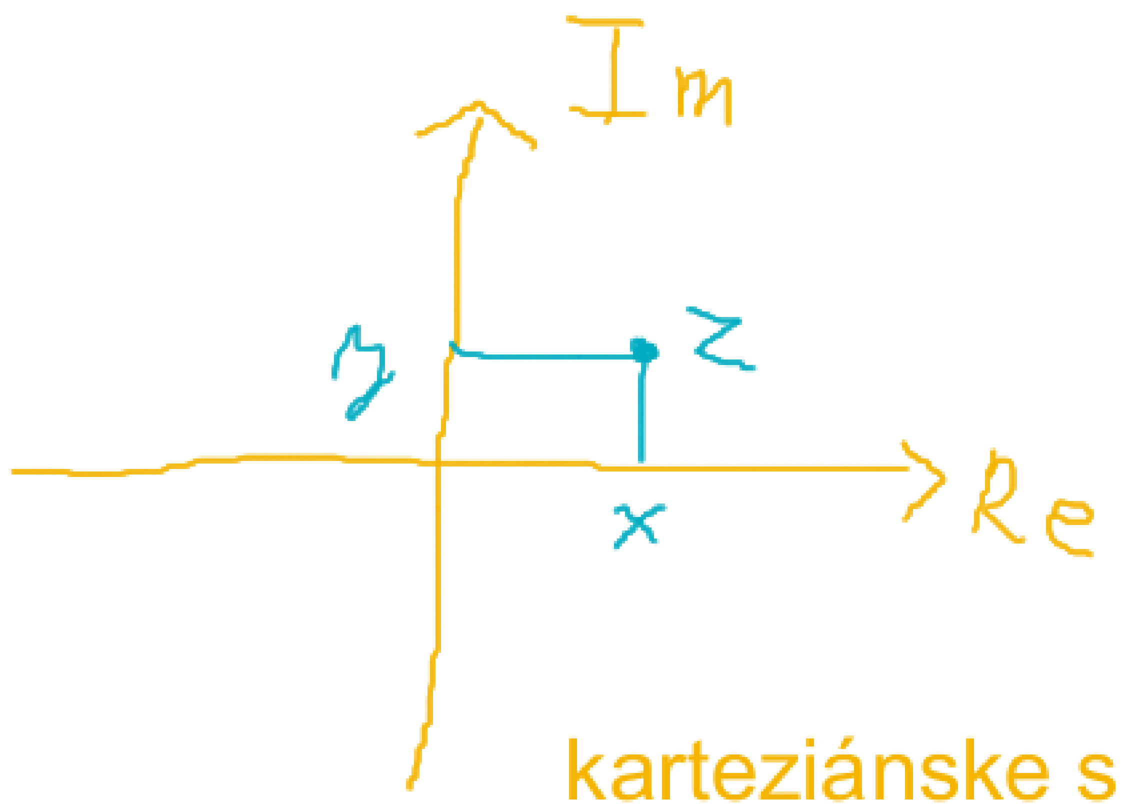
C - množina komplexných čísel
z - komplexné číslo

$z = x + i\,y$ - algebricky (algebraicky, kartézsky) tvar komplexného čísla (x a y sú reálne čísla)

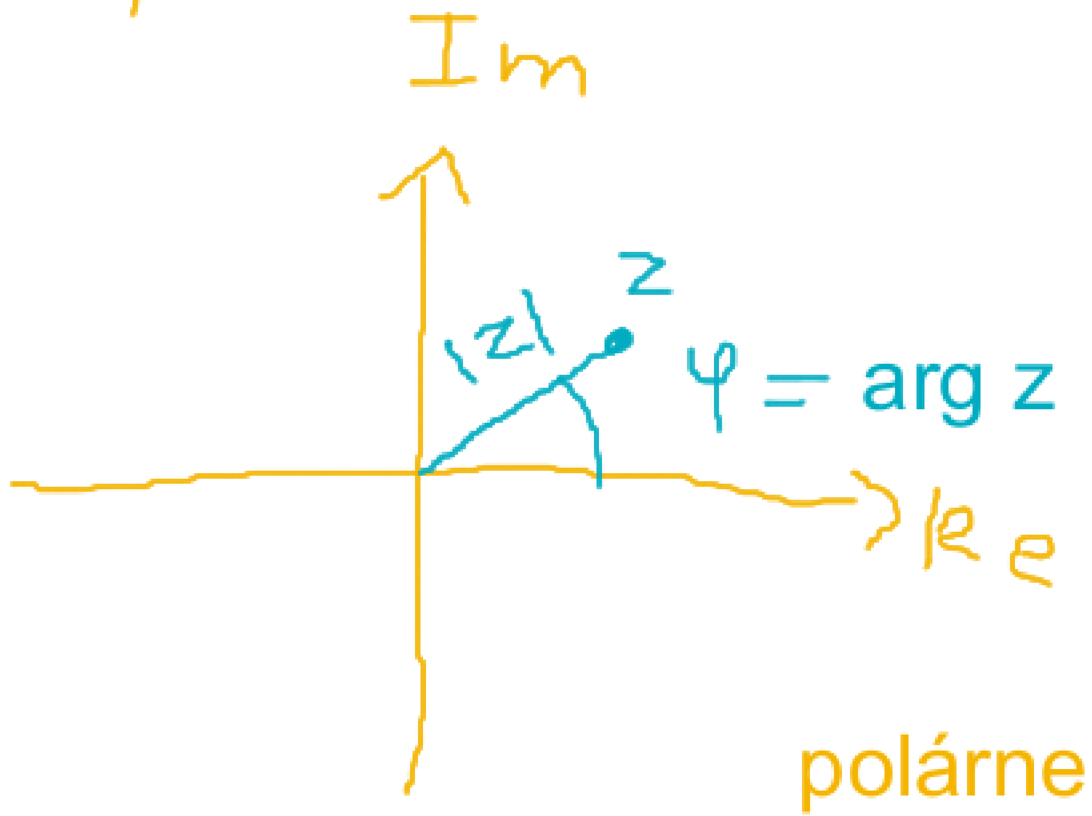
i - imaginárna jednotka $i = \sqrt{-1}$

modul (absolútna hodnota) z $|z| = \sqrt{x^2 + y^2}$

x - reálna časť komplexného čísla
y - imaginárna časť komplexného čísla
komplexná jednotka je číslo z, pre ktoré: $|z| = 1$



karteziánske súradnice



polárne súradnice

$i = \sqrt{-1}$, $i^2 = \sqrt{-1}\sqrt{-1} = -1$, $i^3 = i^2 \cdot i = -i$, $i^4 = i^2 i^2 = -1 \cdot (-1) = 1$

i $\quad i^2 = -1 \quad i^3 = -i \quad i^4 = 1$

$i^5 = i \quad i^6 = -1 \quad i^7 = -i \quad i^8 = 1$

$i^{4k+1} = i \quad i^{4k+2} = -1 \quad i^{4k+3} = -i \quad i^{4k} = 1 \quad k \in Z$

$i^{41} = i \quad i^{42} = -1 \quad i^{43} = -i \quad i^{44} = 1$

sčitovanie a násobenie komplexných čísel

$z_1 = x_1 + i y_1$

$z_2 = x_2 + i y_2$

$z_1 + z_2 = x_1 + x_2 + i(y_1 + y_2)$

$z_1 \cdot z_2 = (x_1 + i y_1)(x_2 + i y_2) =$

$= x_1 x_2 + i(x_2 y_1 + x_1 y_2) + \overset{-1}{i^2} y_1 y_2$

$z = x + i\,y$

ak $y = 0$, tak z nazývame rýdzo reálne číslo

ak $x = 0$, tak z nazývame rýdzo imaginárne číslo

$\bar{z} = x - i\,y$ $\bar{z}$ je komplexné združené číslo ku komplexnému číslu z

argument (amplitúda) komplexného čísla- uhol medzi kladným smerom reálnej osi a vektorom $|z|$

$\varphi = \operatorname{Arg} z, \quad \operatorname{Arg} z = \{ \arg z + 2k\pi,\ k \in \mathbb{Z} \}$

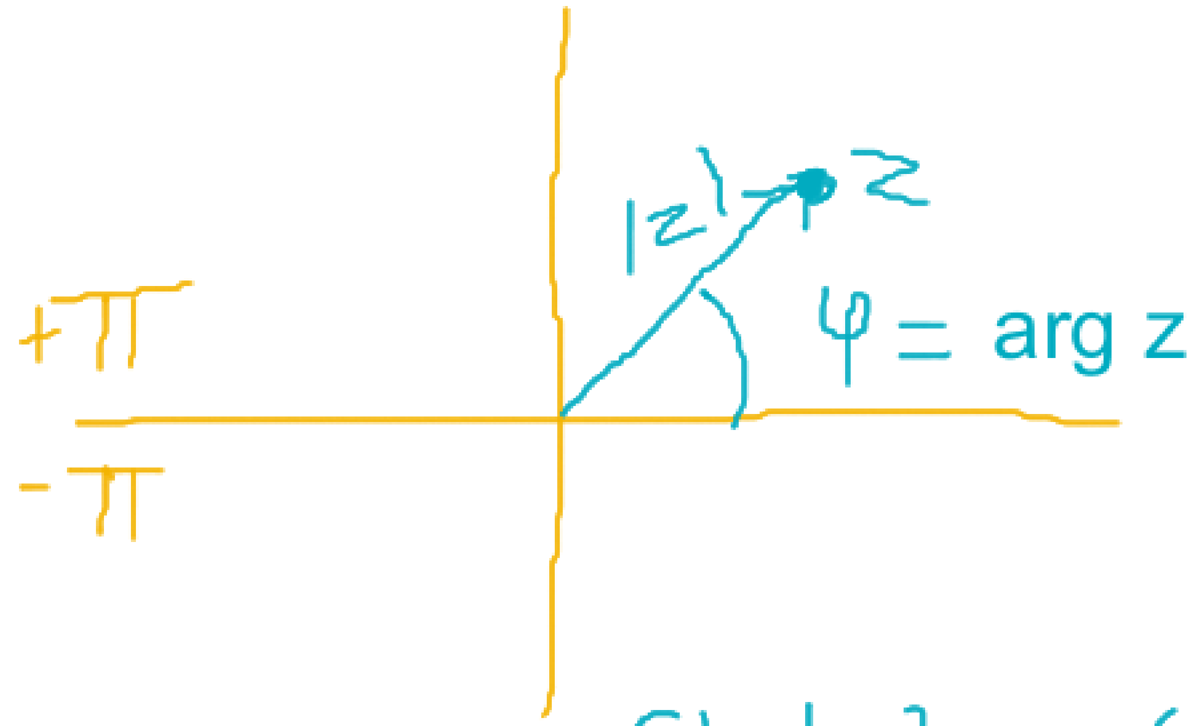
To znamená, že pre z vieme nájsť nekonečne veľa hodnôt jeho argumentu, preto používame funkciu arg: $\mathbb{C} \setminus \{0\} \to (-\pi, \pi\rangle$; ktorú nazývame

hlavná hodnota (alebo hlavná vetva) argumentu z

Uvedomme si, že hlavná hodnota argumentu je nespojitá na zápornej časti reálnej osi.

Ak sa z "približuje" k zápornej časti reálnej osi "zhora", tak sa arg z "približuje" ku hodnote π.

Ak sa z "približuje" k zápornej časti reálnej osi "zdola", tak sa arg z "približuje" ku hodnote $-\pi$.



V niektorej literatúre je používaná funkcia hlavnej hodnoty argumentu takto: $\mathbb{C} \setminus \{0\} \to \langle 0, 2\pi)$

Dôležitý vzorec

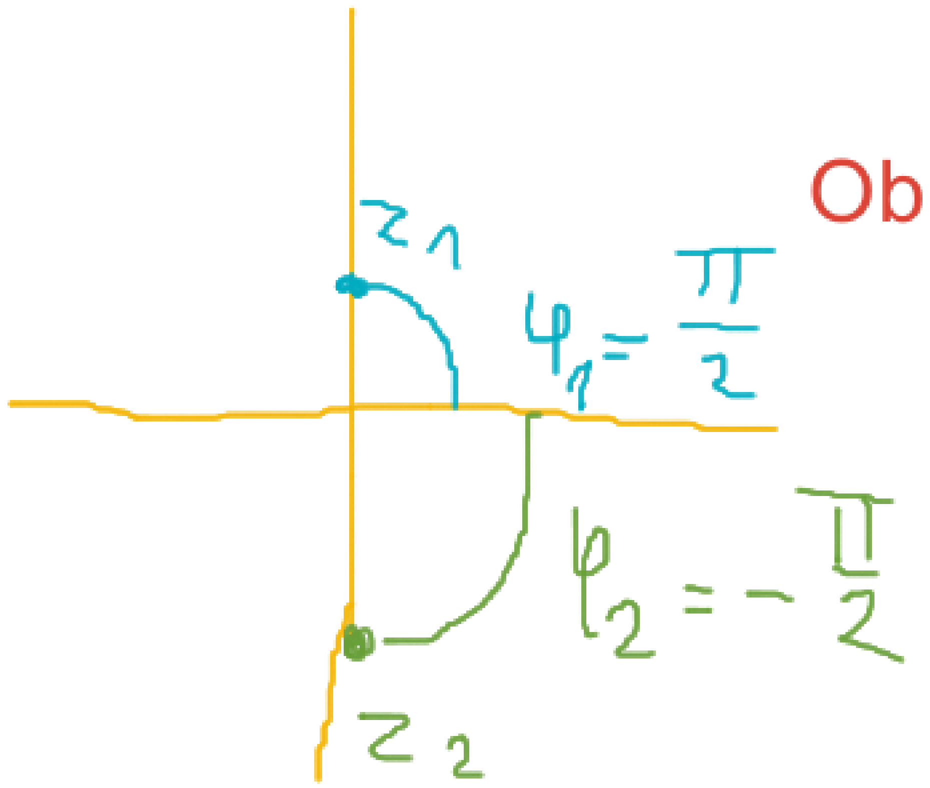
$$\arg z = \begin{cases} \operatorname{arctg}\left(\frac{y}{x}\right) & \text{pre } x > 0 \\ \operatorname{arctg}\left(\frac{y}{x}\right) + \pi & \text{pre } x < 0,\ y \geq 0 \\ \operatorname{arctg}\left(\frac{y}{x}\right) - \pi & \text{pre } x < 0\ \ y < 0 \end{cases}$$

toto platí pre: $-\pi < \arg z \leq \pi$ a $-\frac{\pi}{2} < \operatorname{arctg}\left(\frac{y}{x}\right) \leq \frac{\pi}{2}$

ak x = 0, určíme hodnotu arg z z grafu

Z grafu vieme ľahko vyčítať aj hodnoty: $0, \pm\frac{\pi}{4}, \pm\frac{3}{4}\pi, \pi$

Obidve možnosti zistenia arg z (z grafu alebo podľa vzorca) sú rovnocenné.



Trigonometrický (goniometrický) tvar komplexného čísla

$$z = |z|(\cos\varphi + i\sin\varphi)$$

$$|z| = \sqrt{x^2+y^2}$$
$$z = x + iy$$
$$\varphi = \arg z$$

Eulerova formula

$$e^{i\varphi} = \cos\varphi + i\sin\varphi$$

Exponenciálny tvar komplexného čísla

$$z = |z|\,e^{i\varphi}$$

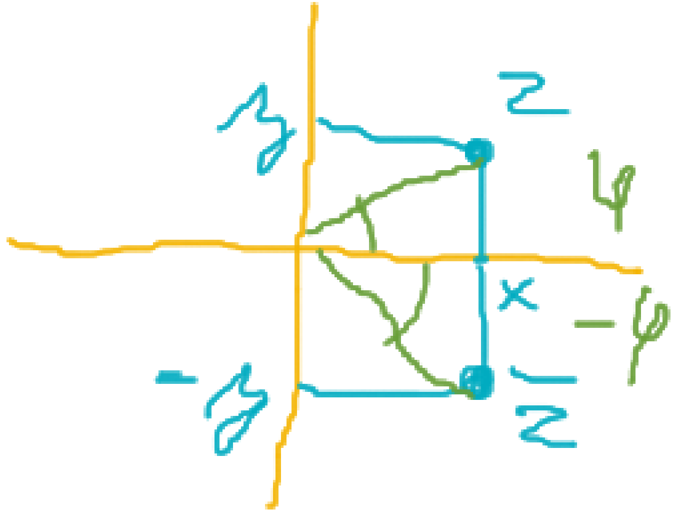
Algebricky tvar komplexného čísla

$$z = x + iy$$

Komplexne združené čísla $\bar{z}$

$z = x + i\,y$

$\bar{z} = x - i\,y$



$$z = |z|\,e^{i\varphi}$$

$$\bar{z} = |z|\,e^{-i\varphi}$$

$$z = |z|(\cos\varphi + i\sin\varphi)$$

$$\bar{z} = |z|(\cos\varphi - i\sin\varphi)$$

$$\bar{z} = |z|(\cos(-\varphi) + i\sin(-\varphi))$$

cos x je párna funkcia
sin x je nepárna funkcia

$$= |z|\;\cos\varphi - i\sin\varphi)$$

párna funkcia: pre všetky x z def. oboru platí f(- x) = f(x)........cos(- x) = cos x

nepárna funkcia: pre všetky x z def. oboru platí f(- x) = -f(x)........sin(- x) = -sin x

často sa používa aj....arctg(- x) = -arctg x

Násobenie, delenie z v goniometrickom tvare

$$z_1 = |z_1|(\cos \varphi_1 + i \sin \varphi_1)$$

$$z_2 = |z_2|(\cos \varphi_2 + i \sin \varphi_2)$$

$$z = |z|(\cos \varphi + i \sin \varphi)$$

$$z_1 \cdot z_2 = |z_1||z_2|\left(\cos(\varphi_1 + \varphi_2) + i \sin(\varphi_1 + \varphi_2)\right)$$

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{|z_1|}{|z_2|}\left(\cos(\varphi_1 - \varphi_2) + i \sin(\varphi_1 - \varphi_2)\right)$$

$$z^n = |z|^n\left(\cos(n\varphi) + i \sin(n\varphi)\right)$$

Umocnenie z

$$z = |z|(\cos\varphi + i\sin\varphi)$$

$$z^n = |z|^n(\cos\varphi + i\sin\varphi)^n$$

Moivreova (čítaj Moávrova) veta: $\forall n \in N, \forall \varphi \in R: (\cos\varphi + i\sin\varphi)^n =$

$$= (\cos(n\varphi) + i\sin(n\varphi))$$

$$z^n = |z|^n(\cos(n\varphi) + i\sin(n\varphi))$$

Odmocnenie z

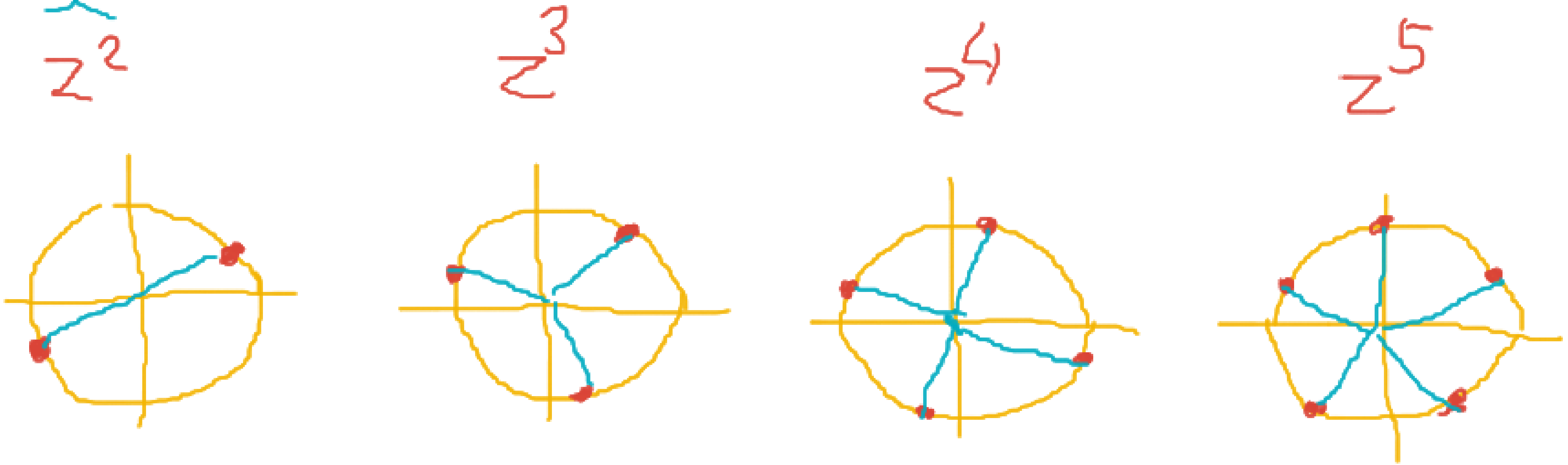
$$z_k = \sqrt[n]{|z|}\left(\cos\frac{\varphi + 2k\pi}{n} + i\sin\frac{\varphi + 2k\pi}{n}\right),\ k = \underbrace{0, 1, 2, \dots n-1}_{n \text{ koreňov}}$$

$$z_0 = \sqrt[n]{|z|}\left(\cos\frac{\varphi}{n} + i\sin\frac{\varphi}{n}\right)$$ hlavná vetva n-tej odmocniny z komplexného čísla z

v exponenciálnom tvare

$$z_k = \sqrt[n]{|z|}\, e^{i\frac{\varphi + 2k\pi}{n}},\ k = 0, 1, 2, \dots, n-1$$

korene musia byť rovnomerne rozložené na kružnici

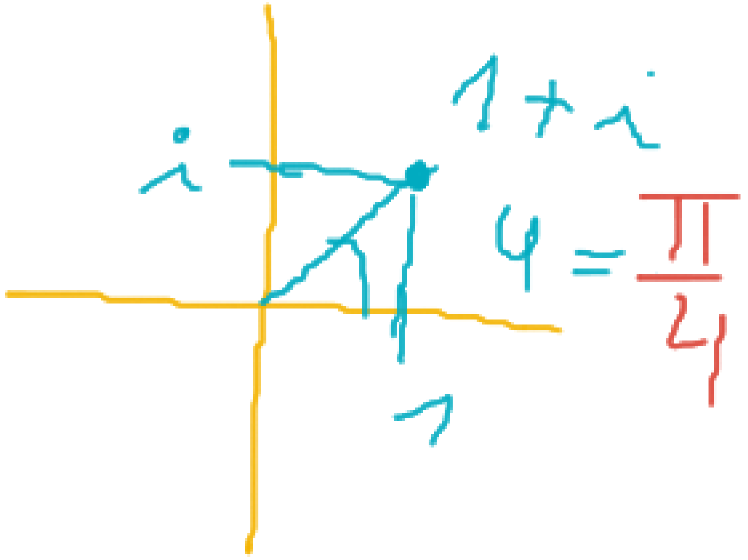


polomer kružnice, na ktorej ležia korene je $\sqrt[n]{|z|}$

Príklad: Nájdime všetky riešenia rovnice $z^3 = 1 + i$

$$z = |z|(\cos\varphi + i\sin\varphi)$$

$$|1+i| = |1 + i\cdot 1| = \sqrt{1^2+1^2} = \sqrt{2}$$



Uhol určíme z grafu alebo pomocou vzorca zo slajdu 4.

Keďže x = 1 > 0, tak $\varphi = \arg z = \operatorname{arctg}\left(\frac{y}{x}\right) = \operatorname{arctg}\left(\frac{1}{1}\right) = \frac{\pi}{4}$

$$\operatorname{arctg} 1 = A$$
$$\operatorname{tg}(\operatorname{arctg} 1) = \operatorname{tg} A$$
$$1 = \operatorname{tg} A$$
$$1 = \frac{\sin A}{\cos A}$$
$$\sin A = \cos A$$
$$A = \frac{\pi}{4}$$

tg a arctg sú inverzné na $\left\langle -\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2} \right\rangle$

$$1 + i = \sqrt{2}\left(\cos\frac{\pi}{4} + i\sin\frac{\pi}{4}\right)$$

nepatrí do tohto príkladu

$$\operatorname{arctg}\sqrt{3} = A \qquad \operatorname{arctg}\frac{1}{\sqrt{3}} = A$$

$$\sqrt{3} = \frac{\frac{\sqrt{3}}{2}}{\frac{1}{2}} \Rightarrow A = \frac{\pi}{3} \qquad \frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{\frac{1}{2}}{\frac{\sqrt{3}}{2}} \Rightarrow A = \frac{\pi}{6}$$

Pokračovanie príkladu: Nájdime všetky riešenia rovnice $z^3 = 1 + i$

$$1 + i = \sqrt{2}\left(\cos\frac{\pi}{4} + i\sin\frac{\pi}{4}\right)$$

$$z_k = \sqrt[n]{|z|}\left(\cos\frac{\varphi + 2k\pi}{n} + i\sin\frac{\varphi + 2k\pi}{n}\right), \quad k = 0, 1, 2, \dots, n-1$$

$$z_k = \sqrt[3]{\sqrt{2}}\left(\cos\frac{\frac{\pi}{4} + 2k\pi}{3} + i\sin\frac{\frac{\pi}{4} + 2k\pi}{3}\right), \quad k = 0, 1, 2$$

$$z_0 = \sqrt[6]{2}\left(\cos\frac{\pi}{12} + i\sin\frac{\pi}{12}\right) \qquad \frac{3}{4} \qquad \frac{9}{12} - \frac{1}{12} = \frac{8}{12}$$

$$z_1 = \sqrt[6]{2}\left(\cos\frac{\frac{\pi}{4} + 2\pi}{3} + i\sin\frac{9}{12}\pi\right) \qquad \frac{17}{12} - \frac{9}{2} = \frac{8}{12}$$

$$z_2 = \sqrt[6]{2}\left(\cos\frac{\frac{\pi}{4} + 4\pi}{3} + i\sin\frac{17}{12}\pi\right) \qquad \frac{17}{12} + \frac{8}{12} = \frac{25}{12}$$

$$\frac{25}{12}\pi = \frac{1}{12}\pi$$

polomer = $\sqrt[6]{2}$

Základne pojmy analýzy v C

Nech $a \in \mathbb{C},\ a \neq \infty$.

$O_\varepsilon(a) = \{z \in \mathbb{C} : |z-a| < \varepsilon\}$ ε- okolie bodu a

$O^\circ_\varepsilon(a) = O_\varepsilon(a) \setminus \{a\} = \{z \in \mathbb{C} : 0 < |z-a| < \varepsilon\}$ ε- prstencové okolie bodu a

Nech $E \subset \mathbb{C}$. Bod $a \in E$ sa nazýva vnútorný bod množiny E, ak $\exists\, \varepsilon > 0$ tak, že $O_\varepsilon(a) \subset E$.

Bod $a \in \mathbb{C}$ sa nazýva hraničný bod množiny E, ak pre každé $\varepsilon > 0$ $O_\varepsilon(a)$ obsahuje body z množiny E a aj body, ktoré neležia v množine E.

Bod $a \in \mathbb{C}$ sa nazýva vonkajší bod množiny E, ak $\exists\, \varepsilon > 0$ tak, že $O_\varepsilon(a) \cap E = \emptyset$.

Množinu všetkých vnútorných (hraničných, vonkajších) bodov množiny E nazývame: vnútrom (hranicou, vonkajškom) množiny E a označujeme int E (∂ E ,ext E).

Bod $a \in \mathbb{C}$ sa nazýva hromadný bod množiny E, ak $\forall\, \varepsilon > 0,\ O^\circ_\varepsilon(a) \cap E \neq \emptyset$

Príklad hromadného bodu: množina (c,d) a body c a d sú hromadnými bodmi tejto množiny.

Množina E sa nazýva otvorená, ak E = int E.

Uzáver $\overline{E}$ množiny E nazývame $\overline{E} = E \cup \partial E$

Množinu nazývame uzavretá, ak platí $\overline{E}$ = E.

Prázdna množina je otvorená množina.

Oblasť

Množina D$\subseteq$ C taká, že:

1. D obsahuje len vnútorné body (je otvorená).
2. ľubovoľné dva body z D možno spojiť spojitou (môže byť aj lomenou) čiarou, ktorá celá leží v D.

sa nazýva oblasť.

Množinu bodov pozostávajúcu z bodov oblasti D a jej hranice ∂ D nazývame uzavretou oblasťou.

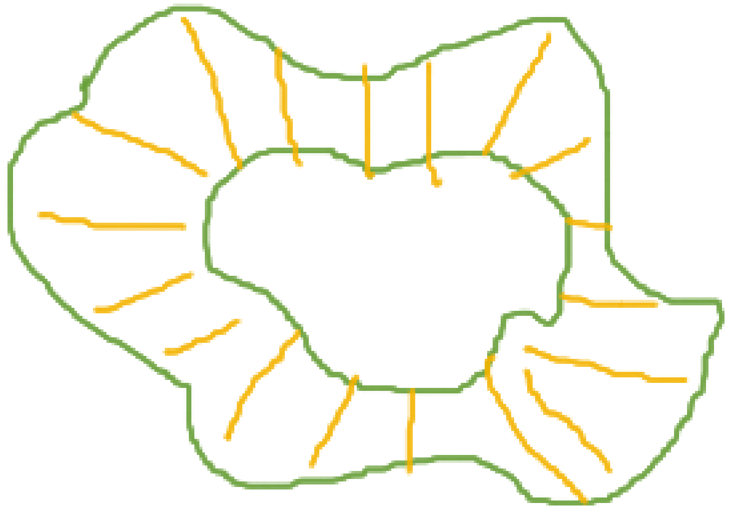
Označujeme ju: $\overline{D} = D \cup \partial D$

Rad súvislosti oblasti je počet navzájom nespojených (neprepojených) časti, z ktorých pozostáva hranica oblasti.

jednoducho súvislá oblasť

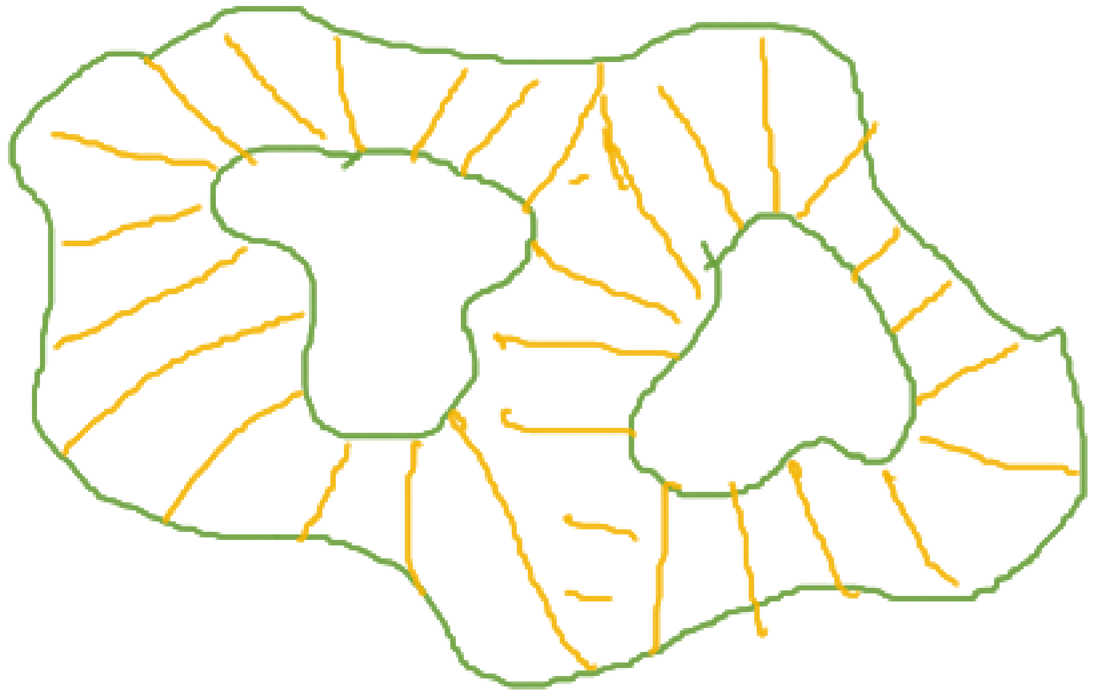
Oblasť ohraničená 1 spojitou uzavretou čiarou.

dvojnásobne súvislá oblasť



Oblasť ohraničená 2 nepretínajúcimi sa spojitými uzavretými čiarami.

trojnásobne súvislá oblasť



Oblasť ohraničená 3 nepretínajúcimi sa spojitými uzavretými čiarami.