Diferenciálny počet funkcií komplexnej premennej

Pokračovanie

Oľga Stašová

Ústav informatiky a matematiky
Fakulta elektrotechniky a informatiky
Slovenská technická univerzita

letný semester 2023/2024

Cauchyho - Riemannove rovnice (veľmi dôležité)

Nutná a postačujúca podmienka diferencovateľnosti

Veta

Funkcia $f : A(\subset \mathbf{C}) \longrightarrow \mathbf{C}$, $f(z) = u(x,y) + i\,v(x,y)$ *(A je otvorená) je diferencovateľná v bode* $\mathbf{a} = a_1 + i\,a_2$ **vtedy a len vtedy** *ak sú funkcie* $u(x,y)$ *a* $v(x,y)$ *diferencovateľné v bode* $\mathbf{a} = (a_1, a_2)$ *a platia nasledujúce podmienky:*

$$\frac{\partial u(\mathbf{a})}{\partial x} = \frac{\partial v(\mathbf{a})}{\partial y} \qquad \frac{\partial u(\mathbf{a})}{\partial y} = -\frac{\partial v(\mathbf{a})}{\partial x}$$

Tieto 2 rovnice nazývame **Cauchyho - Riemannove rovnice**.

Deriváciu funkcie f *pomocou parciálnych derivácií funkcií* u *a* v *vypočítame nasledovne:*

$$f'(\mathbf{a}) = \frac{\partial u(\mathbf{a})}{\partial x} + i\,\frac{\partial v(\mathbf{a})}{\partial x} = \frac{\partial v(\mathbf{a})}{\partial y} - i\,\frac{\partial u(\mathbf{a})}{\partial y}$$

Hľadanie analytickej funkcie

Použitím **Vety o nutnej a postačujúcej podmienke diferencovateľnosti** vieme nájsť analytickú funkciu, ak je daná:

- iba jej reálna časť.
- iba jej imaginárna časť.

Hľadanie analytickej funkcie - príklad

Príklad

(Typ skúškového príkladu)
Nájdite analytickú funkciu $f : A(\subset \mathbf{C}) \longrightarrow \mathbf{C}$, $f(z) = u(x,y) + i\,v(x,y)$, *ak je daná* $v : \mathbf{R}^2 \longrightarrow \mathbf{R}$, $v(x,y) = 2xy + 3x$.

Riešenie: (Príklad budem riešiť (a vysvetľovať) na prednáške.)
Jeho riešenie vychádza z nasledujúcej teórie.
Pretože hľadáme analytickú funkciu f, mala by byť diferencovateľná v každom bode oblasti A, t.j. podľa **Vety o nutnej a postačujúcej podmienke diferencovateľnosti:** funkcie u a v musia byť diferencovateľné v oblasti A a musia spĺňať **Cauchyho - Riemannove rovnice**.

Derivovanie a integrovanie reálnych funkcií 2 premenných

Pri hľadaní analytickej funkcie budeme derivovať a integrovať reálne funkcie 2 premenných $u(x, y)$ a $v(x, y)$ podľa jednotlivých premenných.

Ak derivujeme (integrujeme) podľa premennej x, tak s premennou y pracujeme tak, ako keby to bola konštanta.

Ak derivujeme (integrujeme) podľa premennej y, tak s premennou x pracujeme tak, ako keby to bola konštanta.

Harmonické funkcie

Definícia

Reálna funkcia $u : A(\subset \mathbf{R}^2) \longrightarrow \mathbf{R}$ *sa nazýva* **harmonická,** *ak*

- $u(x, y)$ *má spojité parciálne derivácie 2. rádu v oblasti* A.
- $\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0$ *pre každé* $(x, y) \in A$.

Poslednú rovnicu nazývame **Laplaceova rovnica**, ktorá sa často zapisuje v nasledujúcej forme

$$\triangle u = 0,$$

kde

$$\triangle = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}$$

je **Laplaceov operátor.**

Harmonické funkcie

Veta

Nech $f : A \longrightarrow \mathbf{C}$, $f(z) = u(x, y) + i\,v(x, y)$ je analytická funkcia a funkcie u a v sú dvakrát spojite diferencovateľné. Potom u a v sú **harmonické funkcie** *v oblasti A.*

Pozn. Opačné tvrdenie k predchádzajúcej vete neplatí, pretože dve harmonické funkcie v oblasti A nemusia byť časťami analytickej funkcie (nemusia spĺňať Cauchyho - Riemannove rovnice).

Harmonicky združené funkcie

Definícia

Nech $u, v : A(\subset \mathbf{R}^2) \longrightarrow \mathbf{R}$ *sú harmonické funkcie. Ak* u, v *spĺňajú Cauchyho - Riemannove rovnice v oblasti* A, *potom hovoríme, že* u, v *sú* **harmonicky združené funkcie**.

Lemma

Reálna a imaginárna časť každej analytickej funkcie $f : A \longrightarrow \mathbf{C}$, $f = u + iv$, $A \subset \mathbf{C}$ **sú harmonicky združené funkcie** *v oblasti* A, *pričom funkcie* u *a* v *sú dvakrát spojite diferencovateľné.*

Pozn. Použitím Cauchyho - Riemannových rovníc na ľubovoľnú harmonickú funkciu $u : A(\subset \mathbf{R}^2) \longrightarrow \mathbf{R}$, môžeme nájsť harmonicky združenú funkciu $v : A(\subset \mathbf{R}^2) \longrightarrow \mathbf{R}$ tak, že funkcie $f = u + i\,v$ a $g = v + i\,u$ sú analytické v oblasti A.

Príklad

Príklad

(Typ skúškového príkladu)
Nech $u : \mathbf{R}^2 \longrightarrow \mathbf{R}$, $u(x, y) = x^2 - y^2$. *Nájdite harmonicky združenú funkciu* $v : \mathbf{R}^2 \longrightarrow \mathbf{R}$, *takú, že* $v(0, 0) = 0$.

Riešenie: (Príklad budem riešiť (a vysvetľovať) na prednáške.)

Ďakujem za pozornosť.