

Integrálny počet

Neurčitý integrál - 3.časť

Univerzálne goniometrické substitúcie

Ol'ga Stašová

Ústav informatiky a matematiky
Fakulta elektrotechniky a informatiky
Slovenská technická univerzita

letný semester 2023/2024

Univerzálne goniometrické substitúcie

- Nazývajú sa **univerzálne**, lebo sa dajú použiť univerzálne, t.j. pri integrovaní každej racionálnej funkcie, v ktorej vystupujú **goniometrické** funkcie $\sin(x)$, $\cos(x)$, $\operatorname{tg}(x)$ a $\operatorname{cotg}(x)$ - stačí jedna z nich.
- Aj keď tieto metódy sú univerzálne, sú dosť komplikované a časovo náročné. Je potrebné pri nich dobre ovládať úpravy výrazov a pri nepozornosti sa dá ľahko pomýliť. Z tohoto dôvodu, ak je to možné, použite radšej niektorú z metód, ktoré sme preberali na minulých hodinách.
- Univerzálne goniometrické substitúcie sa používajú v prípadoch, kde **nevieme** použiť žiadnu z jednoduchších metód.
- **Sú dôležité - využitie na odborných predmetoch.** Častejšie sa používa prvá z nich: $t = \operatorname{tg}\left(\frac{x}{2}\right)$.

1. univerzálna goniometrická substitúcia

$$t = \operatorname{tg}\left(\frac{x}{2}\right)$$

$$\operatorname{arctg}(t) = \operatorname{arctg}\left(\operatorname{tg}\left(\frac{x}{2}\right)\right)$$

$$\operatorname{arctg}(t) = \frac{x}{2}$$

$$\frac{x}{2} = \operatorname{arctg}(t)$$

$$x = 2 \operatorname{arctg}(t)$$

$$dx = 2 \frac{1}{1+t^2} dt = \frac{2 dt}{1+t^2}$$

$$\sin x = \frac{2t}{1+t^2}, \quad \cos x = \frac{1-t^2}{1+t^2}.$$

2. univerzálna goniometrická substitúcia

$$t = \operatorname{tg}(x)$$

$$\operatorname{arctg}(t) = \operatorname{arctg}(\operatorname{tg}(x))$$

$$\operatorname{arctg}(t) = x$$

$$x = \operatorname{arctg}(t)$$

$$dx = \frac{1}{1+t^2} dt = \frac{dt}{1+t^2}$$

$$\sin^2 x = \frac{t^2}{1+t^2}, \quad \cos^2 x = \frac{1}{1+t^2}.$$

univerzálne goniometrické substitúcie - písomka / skúška

Na písomke **univerzálne goniometrické substitúcie** **nebudú**.

Keď budú **univerzálne goniometrické substitúcie** na skúške, do zadania Vám napíšem nasledujúce pomôcky.

$$\begin{aligned} t &= \operatorname{tg}\left(\frac{x}{2}\right) & \sin x &= \frac{2t}{1+t^2}, & \cos x &= \frac{1-t^2}{1+t^2}. \\ t &= \operatorname{tg}(x) & \sin^2 x &= \frac{t^2}{1+t^2}, & \cos^2 x &= \frac{1}{1+t^2}. \end{aligned}$$

Vy sa musíte rozhodnúť, ktorú substitúciu použiť a ostatné vzťahy si musíte odvodiť sami.

Kedy použiť ktorú univerzálnu goniometrickú substitúciu?

- Ak v racionálnej funkcii sú $\sin x$ a $\cos x$ (stačí jedno z nich), použijeme substitúciu $t = \operatorname{tg} \left(\frac{x}{2} \right)$.
- Ak v racionálnej funkcii sú $\sin^2 x$ a $\cos^2 x$ (stačí jedno z nich), použijeme substitúciu $t = \operatorname{tg} x$.
- Ak v racionálnej funkcii sú $\sin x$ a $\cos x$ (stačí jedno z nich) a aj $\sin^2 x$ a $\cos^2 x$ (stačí jedno z nich), tak každé $\sin^2 x$ a každé $\cos^2 x$ nahradíme $(\sin x)^2$ a $(\cos x)^2$ a použijeme substitúciu $t = \operatorname{tg} \left(\frac{x}{2} \right)$.
- Ak sú v racionálnej funkcii okrem $\sin x$ a $\cos x$ aj $\operatorname{tg} x$ a $\operatorname{cotg} x$, tak najskôr každé $\operatorname{tg} x$ nahradíme $\frac{\sin x}{\cos x}$ a každé $\operatorname{cotg} x$ nahradíme $\frac{\cos x}{\sin x}$.
- Ak sú v racionálnej funkcii iba $\operatorname{tg} x$ a $\operatorname{cotg} x$ (stačí jedno z nich), tak každé $\operatorname{tg} x$ nahradíme t a každé $\operatorname{cotg} x$ nahradíme $\frac{1}{t}$ a použijeme substitúciu $t = \operatorname{tg} x$.

Príklady na prednáške alebo na domácu úlohu

Príklad 1

Vypočítajte integrály (Satko: str.66/Pr.6 k), m); str.59/Pr.5 h), j)):

a) $\int \frac{1-\sin x}{1+\cos x} dx$

b) $\int \frac{\tan x}{1+\tan x} dx$

c) $\int \frac{1}{\cos x} dx$

d) $\int \frac{1}{\sin x - \cos x} dx$

Ďakujem za pozornosť.