Integrálny počet
Aplikácie

Oľga Stašová

Ústav informatiky a matematiky
Fakulta elektrotechniky a informatiky
Slovenská technická univerzita

letný semester 2023/2024

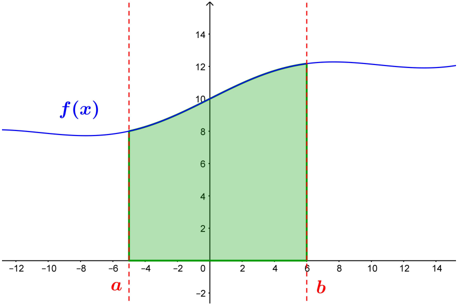
Obsah prednášky

- **Obsah** rovinnej oblasti
- **Objem** rotačného telesa
- **Dĺžka krivky**

Obsah rovinnej oblasti

Obsah rovinnej oblasti

- **Obsah rovinnej oblasti ohraničenej grafom** $f(x) \geq 0$ a osou x v intervale $\langle a, b\rangle$ (t.j. ohraničenej aj priamkami $x = a$, $x = b$).

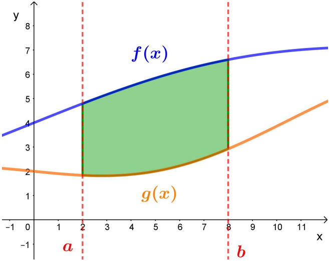


vypočítame pomocou integrálu

$$S = \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x.$$

Obsah rovinnej oblasti

- **Obsah oblasti ohraničenej grafmi funkcií** $f(x) \geq g(x)$ v intervale$\langle a, b\rangle$ (t.j. ohraničenej aj priamkami $x = a$, $x = b$).



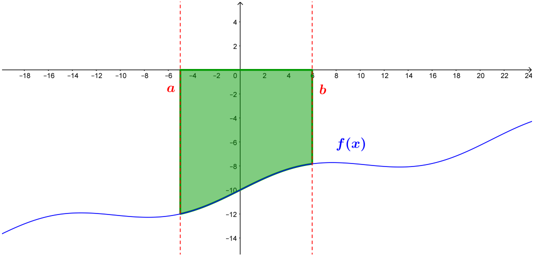
vypočítame pomocou integrálu

$$S = \int_a^b (f(x) - g(x))\,\mathrm{d}x.$$

Pre lepšie zapamätanie: $S = \int_a^b (horna(x) - dolna(x))\,\mathrm{d}x.$

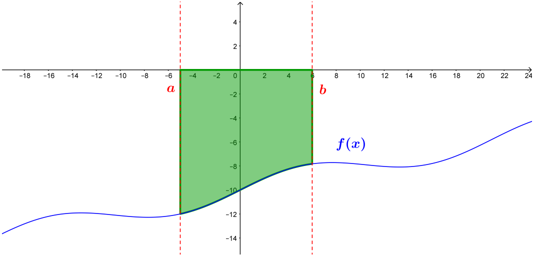
Obsah rovinnej oblasti

- **Obsah rovinnej oblasti ohraničenej grafom** $f(x) \leq 0$ a osou x v intervale $\langle a, b \rangle$ (t.j. ohraničenej aj priamkami $x = a$, $x = b$).



Obsah rovinnej oblasti

- **Obsah rovinnej oblasti ohraničenej grafom** $f(x) \leq 0$ a osou x v intervale $\langle a, b\rangle$ (t.j. ohraničenej aj priamkami $x = a$, $x = b$).



Keby sme použili vzorec pre kladnú funkciu $S = \int\limits_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$, výsledok by bol záporné číslo.
Výsledok určitého integrálu môže byť záporné číslo, ale miera (dĺžka, obsah, objem,...) musí byť **nezáporna**. Väčšinou je kladná a v špeciálnych prípadoch je nulová.

Obsah rovinnej oblasti

- V skutočnosti sa vo všetkých prípadoch používa vzorec

$$S = \int_a^b (horna(x) - dolna(x))\,\mathrm{d}x.$$

- V špeciálnom prípade s jedinou **kladnou** funkciou je **dolna(x)=0** (pretože **os x** je daná rovnicou $y = 0$).

$$S = \int_a^b (f(x) - 0)\,\mathrm{d}x = \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x.$$

- V špeciálnom prípade s jedinou **zápornou** funkciou je **horna(x)=0** (pretože **os x** je reprezentovaná funkciou $y = 0$), takže ak $f(x) \leq 0$, potom obsah oblasti vypočítame pomocou integrálu

$$S = \int_a^b (0 - f(x)\,\mathrm{d}x) = -\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x.$$

Obsah rovinnej oblasti

Ak je na niektorých intervaloch $f(x) \geq g(x)$ a na iných intervaloch $f(x) \leq g(x)$, tak potom obsah oblasti ohraničenej funkciami $f(x)$ a $g(x)$ vypočítame ako **súčet integrálov pre jednotlivé podintervaly**.
Nech $\langle a = x_0, x_1, x_2, ..., x_{n-1}, x_n = b \rangle$, kde $x_1, x_2, ..., x_{n-1}$ sú priesečníky $f(x)$ a $g(x)$. Potom

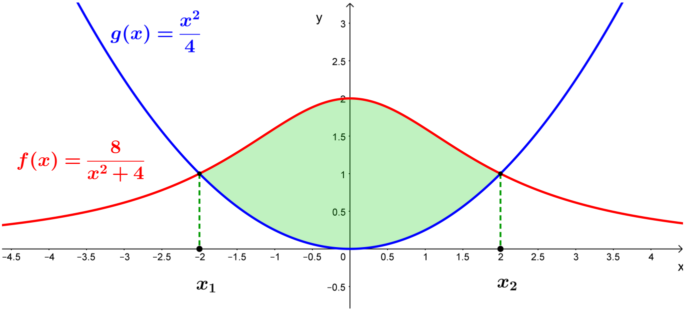
$$S = \sum_{k=1}^{k} \int_{x_{k-1}}^{x_k} (horna(x) - dolna(x))\,\mathrm{d}x,$$

kde $horna(x) \geq dolna(x)$ na každom podintervale.

Obsah rovinnej oblasti - 1. príklad

Príklad 1

Nájdite obsah oblasti ohraničenej parabolou $x^2 = 4y$ a krivkou $y = \frac{8}{x^2+4}$.



Obr.: Obsah oblasti ohraničenej parabolou $x^2 = 4y$ a krivkou $y = \frac{8}{x^2+4}$

Obsah rovinnej oblasti - 1. príklad

Riešenie:

Najskôr nájdeme x-ové súradnice priesečníkov obidvoch kriviek (hranice intervalu integrácie). Porovnaním y-ových súradníc bodov obidvoch kriviek dostávame rovnicu

$$\begin{aligned}
y &= y \\
\frac{x^2}{4} &= \frac{8}{x^2+4} \\
x^2 \cdot (x^2+4) &= 8 \cdot 4 \\
x^4 + 4x^2 - 32 &= 0, \quad subst.\, t = x^2 \\
t^2 + 4t - 32 &= 0 \\
(t+8)(t-4) &= 0 \\
t_1 = -8, \quad t_2 &= 4.
\end{aligned}$$

Dostaneme reálne riešenia $x_1 = -2$ a $x_2 = 2$.

Obsah rovinnej oblasti - 1. príklad

Zo spojitosti a porovnaním hodnôt obidvoch funkcií dosadením niektorého čísla intervalu integrácie (napr. 0) dostávame, že $\frac{8}{x^2+4} \geq \frac{x^2}{4}$ pre všetky $x \in \langle -2, 2 \rangle$. Preto

$$S = \int_{-2}^{2} \left(\frac{8}{x^2+4} - \frac{x^2}{4} \right)$$

pozn. Vzhľadom na to, že rovinná oblasť je symetrická podľa osi y, tento integrál stačí riešiť na intervale $x \in \langle 0, 2 \rangle$ a vypočítanú plochu vynásobiť 2, čím dostaneme plochu hľadanej oblasti.

$$S = 2 \int_{0}^{2} \left(\frac{8}{x^2+4} - \frac{x^2}{4} \right) =$$

Obsah rovinnej oblasti - 1. príklad

Zo spojitosti a porovnaním hodnôt obidvoch funkcií dosadením niektorého čísla intervalu integrácie (napr. 0) dostávame, že $\frac{8}{x^2+4} \geq \frac{x^2}{4}$ pre všetky $x \in \langle -2, 2 \rangle$. Preto

$$S = \int_{-2}^{2} \left(\frac{8}{x^2+4} - \frac{x^2}{4} \right)$$

pozn. Vzhľadom na to, že rovinná oblasť je symetrická podľa osi y, tento integrál stačí riešiť na intervale $x \in \langle 0, 2 \rangle$ a vypočítanú plochu vynásobiť 2, čím dostaneme plochu hľadanej oblasti.

$$S = 2 \int_{0}^{2} \left(\frac{8}{x^2+4} - \frac{x^2}{4} \right) = 2 \left[\frac{8}{2} \arctan \frac{x}{2} - \frac{x^3}{4 \cdot 3} \right]_0^2$$

$$= 2 \left[4 \arctan \frac{2}{2} - \frac{2^3}{12} - \left(4 \arctan 0 - \frac{0^3}{12} \right) \right]$$

Obsah rovinnej oblasti - 1. príklad

$$= 2\left[4\arctan\frac{2}{2} - \frac{2^3}{12} - \left(4\arctan 0 - \frac{0^3}{12}\right)\right]$$

$$= 2\left[4\frac{\pi}{4} - \frac{8}{12} - 0 + 0\right] = 2\left[\pi - \frac{2}{3}\right] = 2\pi - \frac{4}{3}\ \mathbf{j^2}$$

Obsah rovinnej oblasti - 2. príklad

Príklad 2

Nájdite obsah oblasti ohraničenej parabolou $y = 3 - 2x - x^2$, jej dotyčnicou v bode $[2, -5]$ a osou y.

Obsah rovinnej oblasti - 2. príklad

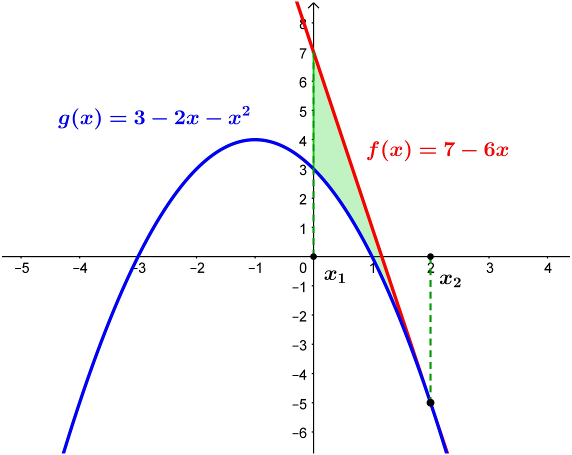
Príklad 2

Nájdite obsah oblasti ohraničenej parabolou $y = 3 - 2x - x^2$, jej dotyčnicou v bode $[2, -5]$ a osou y.

Dotyčnica:

Dotyčnica má rovnicu: $f(x) - f(x_0) = f'(x_0)(x - x_0)$
dotykový bod $[2, -5]$ dosadíme do rovnice a dostaneme:
$f(x) - (-5) = f'(x_0)(x - 2)$
Zderivovaním $y = 3 - 2x - x^2$ dostaneme, že
$f'(x) = -2 - 2x, \quad f'(x_0) = f'(2) = -2 - 2 \cdot 2 = -6$ dosadíme do rovnice dotyčnice:
$f(x) + 5 = -6(x - 2)$
Po úprave dostame rovnicu dotyčnice v tvare:
$f(x) = 7 - 6x$.

Obsah rovinnej oblasti - 2. príklad



Obr.: Obsah oblasti ohraničenej parabolou $y = 3 - 2x - x^2$, jej dotyčnicou v bode $[2, -5]$ a osou y

Obsah rovinnej oblasti - 2. príklad

Riešenie:
V intervale integrácie $\langle 0,2\rangle$ platí $7-6x \geq 3-2x-x^2$, preto

$$S=\int_0^2 \left(7-6x-(3-2x-x^2)\right)\,\mathrm{d}x=\int_0^2 (x^2-4x+4)\,\mathrm{d}x$$

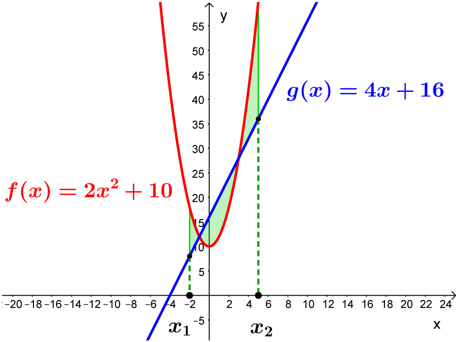
$$=\left[\frac{x^3}{3}-\frac{4x^2}{2}+4x\right]_0^2=\left[\frac{2^3}{3}-\frac{4\cdot 2^2}{2}+4\cdot 2-\left(\frac{0^3}{3}-\frac{4\cdot 0^2}{2}+4\cdot 0\right)\right]$$

$$=\left[\frac{8}{3}-8+8-0\right]=\frac{8}{3}\,\mathbf{j^2}.$$

Obsah rovinnej oblasti - 3. príklad

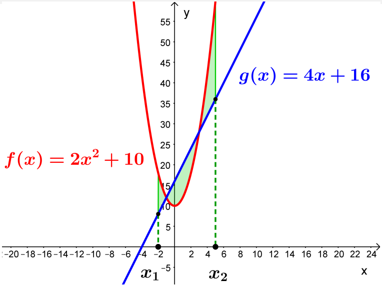
Príklad 3

Vypočítajte obsah oblasti ohraničenej krivkou $y = 2x^2 + 10$ a priamkami $y = 4x + 16$, $x = -2$ a $x = 5$.



Obr.: Obsah oblasti ohraničenej krivkou $y = 2x^2 + 10$ a priamkami $y = 4x + 16$, $x = -2$ a $x = 5$.

Obsah rovinnej oblasti - 3. príklad



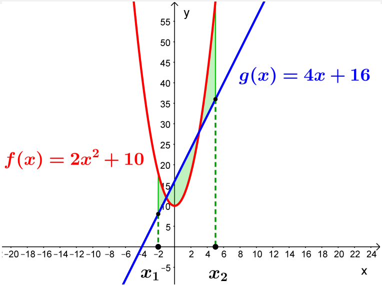
Riešenie:

Vypočítame priesečníky funkcii $f(x)$ a $g(x)$.

$$\begin{aligned} f(x) &= g(x) \\ 2x^2 + 10 &= 4x + 16 \\ 2x^2 - 4x - 6 &= 0 \\ x^2 - 2x - 3 &= 0 \\ (x+1)(x-3) &= 0 \end{aligned}$$

$$x = -1 \quad x = 3.$$

Obsah rovinnej oblasti - 3. príklad



Obsah oblasti vypočítame ako súčet integrálov

$$S = \int_{-2}^{-1} (2x^2 + 10 - (4x + 16))\,\mathrm{d}x + \int_{-1}^{3} (4x + 16 - (2x^2 + 10))\,\mathrm{d}x$$

$$+ \int_{3}^{5} (2x^2 + 10 - (4x + 16))\,\mathrm{d}x.$$

Obsah rovinnej oblasti - 3. príklad

$$S = S_1 + S_2 + S_3.$$

$$S_1 = \int_{-2}^{-1} (2x^2 + 10 - (4x + 16))\,\mathrm{d}x = \int_{-2}^{-1} (2x^2 - 4x - 6)\,\mathrm{d}x$$

$$S_2 = \int_{-1}^{3} (4x + 16 - (2x^2 + 10))\,\mathrm{d}x = \int_{-1}^{3} (-2x^2 + 4x + 6)\,\mathrm{d}x$$

$$S_3 = \int_{3}^{5} (2x^2 + 10 - (4x + 16))\,\mathrm{d}x = \int_{3}^{5} (2x^2 - 4x - 6)\,\mathrm{d}x$$

Obsah rovinnej oblasti - 3. príklad

$$S_1 = \int_{-2}^{-1} (2x^2 - 4x - 6)\, \mathrm{d}x =$$

Obsah rovinnej oblasti - 3. príklad

$$S_1 = \int_{-2}^{-1} (2x^2 - 4x - 6)\,\mathrm{d}x = \left[2\frac{x^3}{3} - 4\frac{x^2}{2} - 6x\right]_{-2}^{-1}$$

$$=$$

Obsah rovinnej oblasti - 3. príklad

$$S_1 = \int_{-2}^{-1} (2x^2 - 4x - 6)\,\mathrm{d}x = \left[2\frac{x^3}{3} - 4\frac{x^2}{2} - 6x\right]_{-2}^{-1}$$

$$= 2\frac{(-1)^3}{3} - 2(-1)^2 - 6(-1) - \left(2\frac{(-2)^3}{3} - 2(-2)^2 - 6(-2)\right)$$

$$=$$

Obsah rovinnej oblasti - 3. príklad

$$S_1 = \int_{-2}^{-1} (2x^2 - 4x - 6)\,\mathrm{d}x = \left[2\frac{x^3}{3} - 4\frac{x^2}{2} - 6x\right]_{-2}^{-1}$$

$$= 2\frac{(-1)^3}{3} - 2(-1)^2 - 6(-1) - \left(2\frac{(-2)^3}{3} - 2(-2)^2 - 6(-2)\right)$$

$$= -\frac{2}{3} - 2 + 6 - \left(-\frac{16}{3} - 8 + 12\right) = -\frac{2}{3} + 4 + \frac{16}{3} - 4 = \frac{14}{3}$$

Obsah rovinnej oblasti - 3. príklad

$$S_1 = \int_{-2}^{-1} (2x^2 - 4x - 6)\,\mathrm{d}x = \left[2\frac{x^3}{3} - 4\frac{x^2}{2} - 6x\right]_{-2}^{-1}$$

$$= 2\frac{(-1)^3}{3} - 2(-1)^2 - 6(-1) - \left(2\frac{(-2)^3}{3} - 2(-2)^2 - 6(-2)\right)$$

$$= -\frac{2}{3} - 2 + 6 - \left(-\frac{16}{3} - 8 + 12\right) = -\frac{2}{3} + 4 + \frac{16}{3} - 4 = \frac{14}{3}$$

$$S_2 = \frac{64}{3} \qquad S_3 = \frac{64}{3}$$

$$S = S_1 + S_2 + S_3 = \frac{14}{3} + \frac{64}{3} + \frac{64}{3} = \frac{142}{3}\,\mathbf{j^2}$$

j^2 - jednotky štvorcové

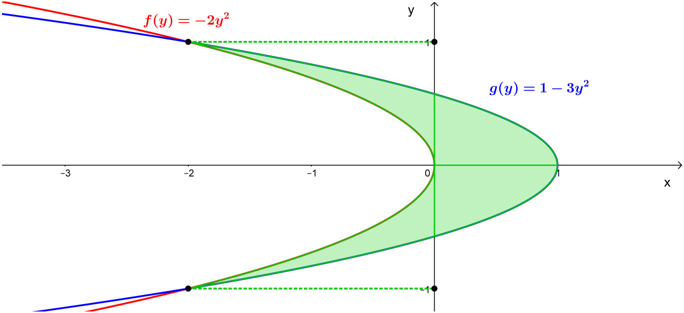
Obsah (plocha) sa udáva v km^2, m^2, cm^2,... Tu je to všeobecne v j^2.

Obsah rovinnej oblasti - 4. príklad

Príklad 4

Vypočítajte obsah oblasti ohraničenej dvojicou parabol $x = -2y^2$ a $x = 1 - 3y^2$.

Všimnite si, že v rovniciach obidvoch parabol x **je funkciou premennej** y.



Obr.: Obsah oblasti ohraničenej dvojicou parabol $x = -2y^2$ a $x = 1 - 3y^2$

Obsah rovinnej oblasti - 4. príklad

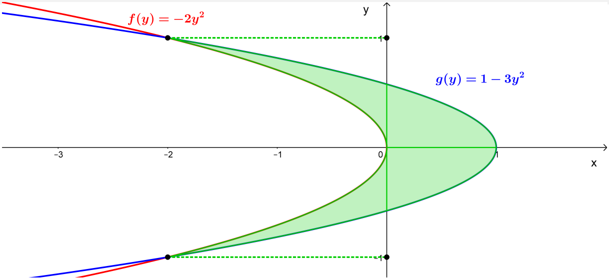
Riešenie:

Najskôr nájdeme y-ové súradnice priesečníkov obidvoch kriviek (hranice intervalu integrácie). Porovnaním x-ových súradníc bodov obidvoch kriviek dostávame rovnicu

$$\begin{aligned} x &= x \\ -2y^2 &= 1 - 3y^2 \\ y^2 &= 1 \\ y_1 &= 1, \quad y_2 = -1 \\ f(1) &= -2 \cdot 1^2 = -2, \qquad f(-1) = -2 \cdot (-1)^2 = -2. \\ g(1) &= 1 - 3 \cdot 1^2 = -2, \quad f(-1) = 1 - 3 \cdot (-1)^2 = -2. \end{aligned}$$

Paraboly sa pretínajú v bodoch $[-2, -1]$ a $[-2, 1]$.

Obsah rovinnej oblasti - 4. príklad



Riešenie:

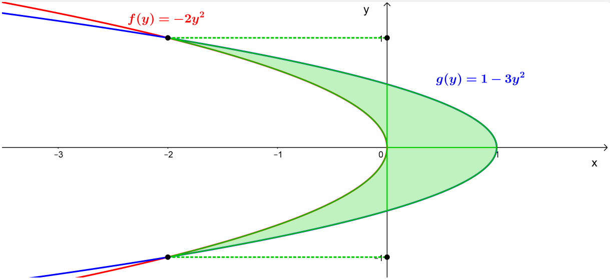
Keďže x **je funkciou premennej** y, tak namiesto vzorca

$$S = \int_a^b (horna(x) - dolna(x))\,\mathrm{d}x$$

použijeme vzorec

$$S = \int_a^b (prava(y) - lava(y))\,\mathrm{d}x.$$

Obsah rovinnej oblasti - 4. príklad



Nezávislá premenná y je ohraničená v intervale $\langle -1, 1\rangle$. V tomto intervale platí $-2y^2 \leq 1 - 3y^2$, preto

$$S = \int_{-1}^{1} \left(1 - 3y^2 - (-2y^2)\right)\, \mathrm{d}y = 2\int_{0}^{1} \left(1 - y^2\right)\, \mathrm{d}y = 2\left[y - \frac{y^3}{3}\right]_0^1 = \frac{4}{3}\,\mathbf{j^2}.$$

Pozn. Opäť sa jedná o symetrickú plochu (tentokrát podľa osi x). Preto je vhodné tento integrál riešiť len na intervale $y \in \langle 0, 1\rangle$ a vypočítanú plochu vynásobiť 2.

Obsah rovinnej oblasti - príklady na domácu úlohu

Príklad 5

Vypočítajte obsahy rovinných oblastí ohraničených uvedenými krivkami:

a) Parabolou $y = 4x - x^2$ a osou x. $S = \frac{32}{3}\, j^2$

b) Parabolou $y = x^2 + 1$ a priamkou $x + y = 3$. $S = \frac{9}{2}\, j^2$

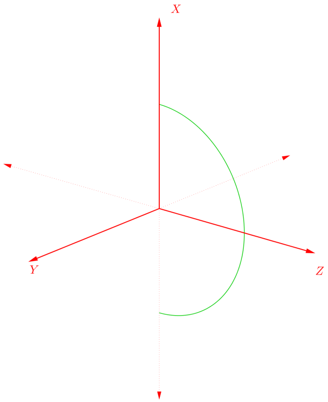
c) Parabolou $y = x^2 - 2$ a priamkou $y = 2$. $S = \frac{32}{3}\, j^2$

d) Osou y, $x = \frac{\pi}{2}$ a krivkami $y = \cos x$ a $y = \sin x$. $S = 2\sqrt{2} - 2\, j^2$

e) Krivkou $x = \frac{1}{2}y^2 - 3$ a priamkou $y = x - 1$. $S = 18\, j^2$

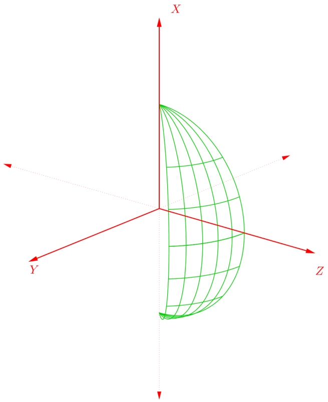
Objem rotačného telesa

Objem rotačného telesa



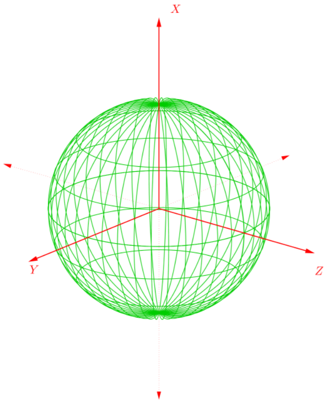
Obr.: Guľa.

Objem rotačného telesa



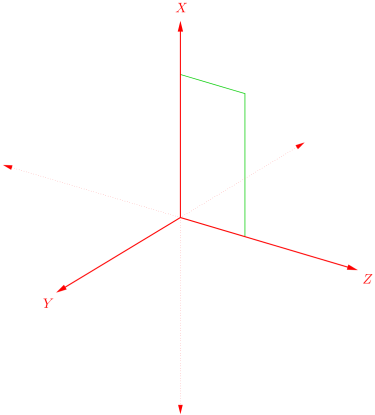
Obr.: Guľa.

Objem rotačného telesa



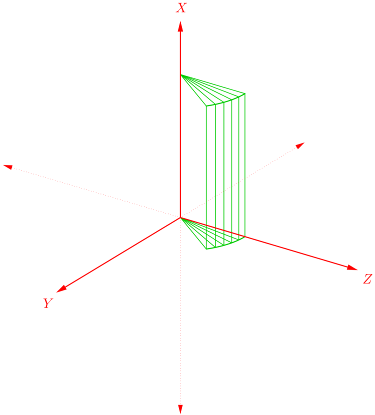
Obr.: Guľa.

Objem rotačného telesa



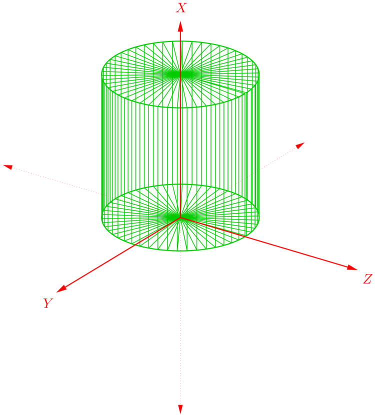
Obr.: Valec.

Objem rotačného telesa



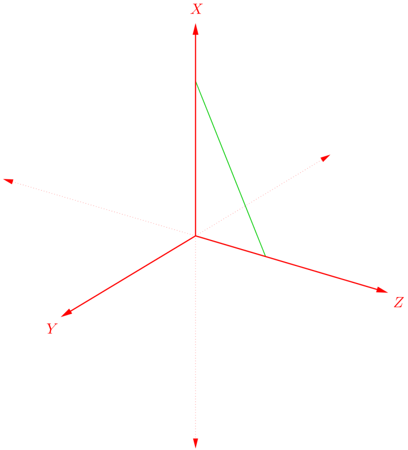
Obr.: Valec.

Objem rotačného telesa



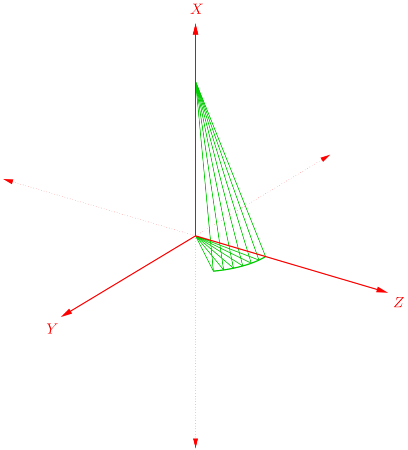
Obr.: Valec.

Objem rotačného telesa



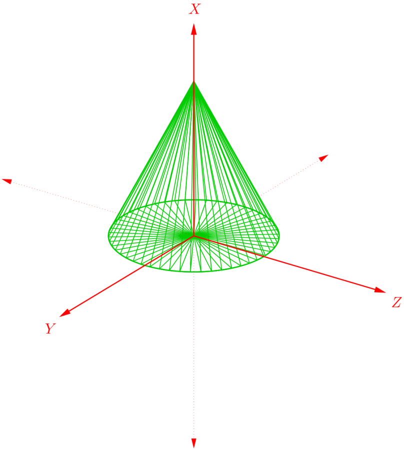
Obr.: Kužeľ.

Objem rotačného telesa



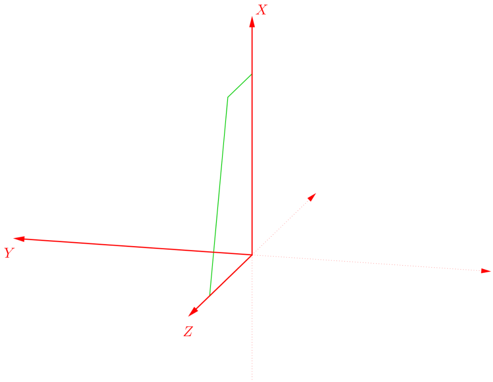
Obr.: Kužeľ.

Objem rotačného telesa



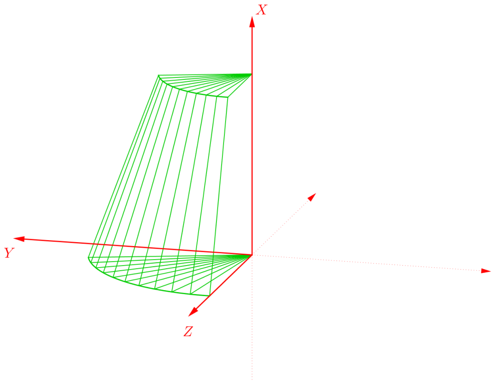
Obr.: Kužeľ.

Objem rotačného telesa



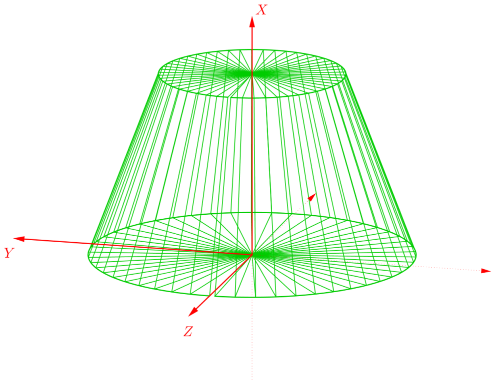
Obr.: Zrezaný kužeľ.

Objem rotačného telesa



Obr.: Zrezaný kužeľ.

Objem rotačného telesa



Obr.: Zrezaný kužeľ.

Objem rotačného telesa

Všeobecný princíp pre výpočet objemu telesa pomocou integrálu

Ak graf spojitej nezápornej funkcie $f : \langle a, b\rangle \longrightarrow \mathbf{R}$ *rotuje okolo osi* x, *vytvára teleso s plochou kolmého rezu* $A(x) = \pi f^2(x)$.

plocha kolmého rezu $\mathbf{A}(\mathbf{x})$ **telesa** $\mathbf{D}$ = *prienik telesa* D *a roviny kolmej na os* x *v bode* $x \in \langle a, b\rangle$

Uvažujme 3*-rozmerné rotačné teleso* D, *ktoré vzniklo rotáciou spojitej nezápornej funkcie* $f(x)$ *okolo osi* x *na intervale* $x \in \langle a, b\rangle$.

Nech teleso D *má* **plochu kolmého rezu** *definovanú spojitou funkciou* $A(x)$, *pričom* $x \in \langle a, b\rangle$. *Potom objem telesa D vypočítame:*

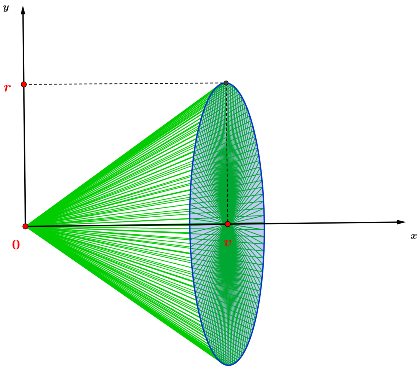
$$V = \int_a^b A(x)\,dx = \pi \int_a^b f^2(x)\,\mathrm{d}x.$$

Objem rotačného telesa

Objem rotačného telesa, ktoré vznikne rotáciou rovinnej oblasti ohraničenej grafom funkcie $f \geq 0$, a osou x na intervale $\langle a, b \rangle$ (t.j. aj priamkami $x = a$, $x = b$) **okolo osi** x vypočítame pomocou integrálu

$$V = \pi \int_a^b f^2(x)\, \mathrm{d}x.$$

Objem rotačného telesa - Príklad



Obr.: Kužeľ s polomerom podstavy r, výškou v, umiestnený vrcholom do začiatku súradnicovej sústavy a jeho os splýva s osou x

Objem rotačného telesa - rovnica priamky

Priamka prechádzajúca bodom $[0,0]$ má rovnicu $y = k\,x$.

$$y = k\,x = \tan\,\varphi\,x = \frac{\sin\,\varphi}{\cos\,\varphi}\,x$$

Zo sínusovej a kosínusovej vety vieme:

$$\sin\,\varphi = \frac{protilahla\ odvesna}{prepona} \qquad \cos\,\varphi = \frac{prilahla\ odvesna}{prepona}$$

$$\sin\,\varphi = \frac{r}{f} \qquad \cos\,\varphi = \frac{v}{f}$$

$$y = k\,x = \tan\,\varphi\,x = \frac{\sin\,\varphi}{\cos\,\varphi}\,x = \frac{\frac{r}{f}}{\frac{v}{f}}\,x = \frac{r}{v}\,x$$

Objem rotačného telesa - rovnica priamky

2. možnosť

Priamka prechádzajúca bodom $[0,0]$ má rovnicu $y = k\,x$.
Priamka prechádzajúca bodom $[v,r]$ má rovnicu $r = k\,v$.
Z toho vyplýva $k = \frac{r}{v}$ a teda priamka prechádzajúca bodmi $[0,0]$ a $[v,r]$ má rovnicu $y = \frac{r}{v}\,x$.

Objem rotačného telesa - Príklad

Príklad 6

Overíme vzorec pre výpočet objemu kužeľa s polomerom podstavy r a výškou v.

Riešenie:

Kužeľ umiestnime vrcholom do začiatku súradnicovej sústavy tak, že jeho os splýva s osou x. Takto umiestnený kužeľ je vytvorený rotáciou priamky $y = \frac{r}{v}x$ okolo osi x v intervale $\langle 0, v \rangle$.

$$V = \pi \int_0^v \left(\frac{r}{v}x\right)^2 \mathrm{d}x = \pi \left(\frac{r}{v}\right)^2 \left[\frac{x^3}{3}\right]_0^v = \frac{1}{3}\pi r^2 v \, \mathbf{j^3}.$$

Objem kužeľa:

$$V = \frac{1}{3} S_{podstavy} v = \frac{1}{3}\pi r^2 v \, \mathbf{j^3}.$$

Objem rotačného telesa

Objem rotačného telesa, ktoré vznikne rotáciou rovinnej oblasti ohraničenej grafmi funkcií $f \geq g \geq 0$ (a priamkami $x = a$, $x = b$) v intervale $\langle a, b \rangle$ okolo osi x vypočítame pomocou integrálu

$$V = \pi \int_a^b \left(f^2(x) - g^2(x) \right) \, \mathrm{d}x.$$

$$V = \pi \int_a^b \left(horna^2(x) - dolna^2(x) \right) \, \mathrm{d}x.$$

Porovnanie vzorcov pre obsah a objem

S - obsah rovinnej oblasti

$$S = \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$$

$$V = \pi \int_a^b f^2(x)\,\mathrm{d}x.$$

V - objem rotačného telesa

$$S = \int_a^b (f(x) - g(x))\,\mathrm{d}x.$$

$$S = \int_a^b (horna(x) - dolna(x))\,\mathrm{d}x.$$

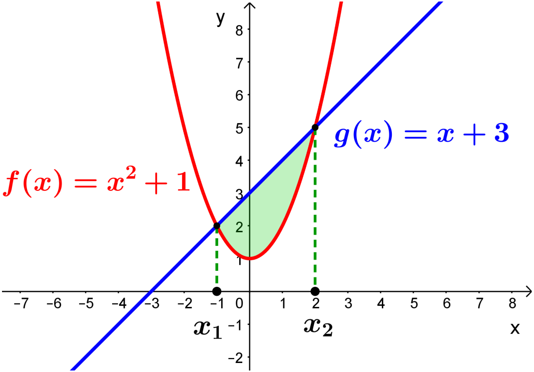
$$V = \pi \int_a^b \left(f^2(x) - g^2(x)\right)\,\mathrm{d}x.$$

$$V = \pi \int_a^b \left(horna^2(x) - dolna^2(x)\right)\,\mathrm{d}x.$$

Objem rotačného telesa - príklady na domácu úlohu

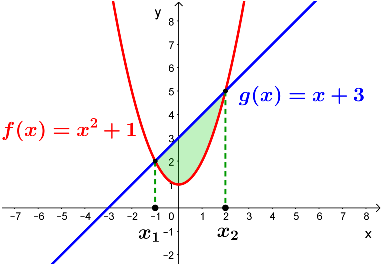
Príklad 7

Vypočítajte objem telesa určeného rotáciou rovinnej oblasti ohraničenou parabolou $y = x^2 + 1$ a priamkou $y = x + 3$ okolo osi x.



Obr.: Oblasť rotujúca okolo osi x ohraničená parabolou $y = x^2 + 1$ a priamkou $y = x + 3$.

Objem rotačného telesa



Riešenie:

Vypočítame priesečníky funkcii $f(x)$ a $g(x)$.

$$\begin{aligned} f(x) &= g(x) \\ x^2 + 1 &= x + 3 \\ x^2 - x - 2 &= 0 \\ (x+1)(x-2) &= 0 \\ x = -1 \quad x = 2. \end{aligned}$$

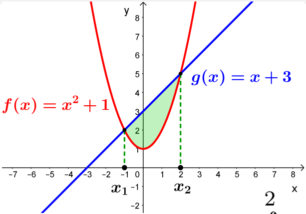
Objem rotačného telesa

Objem rotačného telesa, ktoré vznikne rotáciou rovinnej oblasti ohraničenej grafmi funkcií $f \geq g \geq 0$ (a priamkami $x = a$, $x = b$) v intervale $\langle a, b\rangle$ okolo osi x vypočítame pomocou integrálu

$$V = \pi \int_a^b \left(f^2(x) - g^2(x)\right) \mathrm{d}x.$$

$$V = \pi \int_a^b \left(horna^2(x) - dolna^2(x)\right) \mathrm{d}x.$$

Objem rotačného telesa



$$V = \pi \int_a^b \left(horna^2(x) - dolna^2(x)\right)\,\mathrm{d}x = \pi \int_{-1}^{2} \left((x+3)^2 - (x^2+1)^2\right)\,\mathrm{d}x$$

$$= \pi \int_{-1}^{2} \left(x^2 + 6x + 9 - (x^4 + 2x^2 + 1)\right)\,\mathrm{d}x = \pi \int_{-1}^{2} \left(-x^4 - x^2 + 6x + 8\right)\,\mathrm{d}x$$

$$= \pi \left[-\frac{x^5}{5} - \frac{x^3}{3} + \frac{6x^2}{2} + 8x\right]_{-1}^{2}$$

$$= \pi \left(-\frac{2^5}{5} - \frac{2^3}{3} + 3\cdot 2^2 + 8\cdot 2 - \left(-\frac{(-1)^5}{5} - \frac{(-1)^3}{3} + 3\cdot(-1)^2 + 8\cdot(-1)\right)\right)$$

$$= \frac{117}{5}\pi\,\mathbf{j^3}$$

Objem rotačného telesa - príklady na domácu úlohu

Príklad 8

Vypočítajte objemy telies určených rotáciou rovinných oblastí ohraničených danými krivkami okolo osi x:

a) Parabolou $y = x^2$ a priamkou $y = 4$. $V = ?\text{j}^3$

b) Krivkami $y = \sqrt{x}$ a $y = \frac{x^2}{8}$. $V = ?\text{j}^3$

Dĺžka krivky

Dĺžka krivky

Dĺžku rovinnej krivky, ktorá je grafom funkcie f, ktorá má spojitú deriváciu v intervale $\langle a, b\rangle$ vypočítame pomocou integrálu

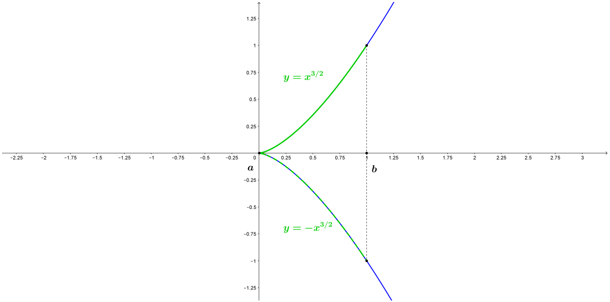
$$l = \int_a^b \sqrt{1 + (f'(x))^2}\,\mathrm{d}x.$$

Pre dĺžku sa používa značka D alebo l (z anglického length).

Dĺžka krivky - Príklad

Príklad 9

Vypočítame dĺžku polokubickej paraboly $y^2 = x^3$ v intervale $\langle 0, 1\rangle$.



Obr.: Polokubická parabola $y^2 = x^3$ v intervale $\langle 0, 1\rangle$

Dĺžka krivky - Príklad

Riešenie:
Krivka sa skladá z dvoch častí $y = x^{\frac{3}{2}}$ a $y = -x^{\frac{3}{2}}$ symetrických podľa osi x. Preto jej dĺžka bude dvojnásobkom dĺžky jednej z nich, pričom $f(x) = x^{\frac{3}{2}}$ a $f'(x) = \frac{3}{2}\sqrt{x}$.

$$l = 2\int_0^1 \sqrt{1+\frac{9}{4}x}\,\mathrm{d}x = \left\{ \begin{array}{l} t = 1+\frac{9}{4}x \\ \mathrm{d}t = \frac{9}{4}\,\mathrm{d}x \Rightarrow \mathrm{d}x = \frac{4}{9}\,\mathrm{d}t \\ t_1 = 1+\frac{9}{4}\cdot 0 = 1 \\ t_2 = 1+\frac{9}{4}\cdot 1 = \frac{13}{4} \end{array} \right\} = 2\int_1^{\frac{13}{4}} \sqrt{t}\,\frac{4}{9}\,\mathrm{d}t$$

$$l = \frac{8}{9}\int_1^{\frac{13}{4}} t^{\frac{1}{2}}\mathrm{d}t = \frac{8}{9}\left[\frac{t^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}}\right]_1^{\frac{13}{4}} = \frac{8}{9}\frac{2}{3}\left[t^{\frac{3}{2}}\right]_1^{\frac{13}{4}} = \frac{16}{27}\left(\frac{13}{8}\sqrt{13}-1\right)\ \mathbf{j}.$$

Dĺžka krivky - Neriešené príklady

Príklad 10

Vypočítajte dĺžky daných kriviek:

a) $y = \ln(\sin x),\; x \in \left\langle \frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{2} \right\rangle$. $l = ?$j

b) $y = \frac{x^2}{4} - \frac{1}{2}\ln x,\; x \in \langle 1, 2 \rangle$. $l = ?$j

Dôležité vzorce

S - obsah rovinnej oblasti

$$S = \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$$

$$V = \pi \int_a^b f^2(x)\,\mathrm{d}x.$$

V - objem rotačného telesa

$$S = \int_a^b (horna(x) - dolna(x))\,\mathrm{d}x.$$

$$V = \pi \int_a^b \left(horna^2(x) - dolna^2(x)\right)\,\mathrm{d}x.$$

l - dĺžka rovinnej krivky

$$l = \int_a^b \sqrt{1 + (f'(x))^2}\,\mathrm{d}x.$$

Ďakujem za pozornosť.