Laurentove rady

Oľga Stašová

Ústav informatiky a matematiky
Fakulta elektrotechniky a informatiky
Slovenská technická univerzita

letný semester 2023/2024

Laurentove rady

Definícia

Nech $\dots, c_{-n}, \dots, c_{-2}, c_{-1}, c_0, c_1, c_2, \dots, c_n, \dots, a$ *sú komplexné čísla. Potom rad*

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n(z-a)^n = \cdots + c_{-n}(z-a)^{-n} + \cdots + c_{-2}(z-a)^{-2}$$

$$+c_{-1}(z-a)^{-1} + c_0 + c_1(z-a) + c_2(z-a)^2 + \cdots + c_n(z-a)^n + \cdots \quad (1)$$

nazývame **Laurentov rad** *v bode* a.

$$Rad \sum_{n=-\infty}^{-1} c_n(z-a)^n = \cdots + c_{-n}(z-a)^{-n} + \cdots + c_{-1}(z-a)^{-1}$$

sa nazýva **hlavná časť radu (1).**

$$Rad \sum_{n=0}^{\infty} c_n(z-a)^n = c_0 + c_1(z-a) + \cdots + c_n(z-a)^n + \cdots$$

sa nazýva **analytická (regulárna) časť radu (1).**

Konvergencia Laurentovho radu

Definícia

Hovoríme, že Laurentov rad (1) konverguje (rovnomerne) na množine $M \subset \mathbf{C}$*, ak jeho* **hlavná časť** *a aj jeho* **analytická časť** *konvergujú (rovnomerne) na množine* M*.*
Súčtom Laurentovho radu rozumieme súčet hlavnej a analytickej časti radu.

Konvergencia Laurentovho radu

Veta

Pre každý Laurentov rad (1) existujú čísla (jediné) $0 \le r \le \infty$, $0 \le R \le \infty$ *také, že:*

a) **analytická časť radu (1)**
- *absolútne konverguje na otvorenom kruhu* $K(a, R)$,
- *rovnomerne konverguje na každom uzavretom kruhu* $\overline{K(a, R_1)}$, *kde* $R_1 < R$
- *diverguje na* **C** $\setminus \overline{K(a, R)}$.

b) **hlavná časť radu (1)**
- *absolútne konverguje na* **C** $\setminus \overline{K(a, r)}$,
- *rovnomerne konverguje na každej* **C** $\setminus \overline{K(a, r_1)}$, *kde* $r_1 > r$
- *diverguje na* $K(a, r)$.

c) *Ak* $r < R$, *potom* **Laurentov rad (1)**
- *absolútne konverguje v množine* $P(a, r, R)$ *- medzikruží ohraničenoom 2 sústrednými kružnicami s polomermi* **r** *a* **R**.
- *rovnomerne konverguje na* $\overline{P(a, r_1, R_1)}$, *kde* $r < r_1 < R_1 < R$
- *diverguje na* **C** $\setminus \overline{P(a, r, R)}$.

Konvergencia Laurentovho radu

Veta

Pre každý Laurentov rad (1) existujú čísla (jediné) $0 \leq r \leq \infty$, $0 \leq R \leq \infty$ *také, že:*

c) *Ak* $r < R$, *potom* **Laurentov rad (1)**

- *absolútne konverguje v množine* $P(a, r, R)$ *- medzikruží ohraničenoom 2 sústrednými kružnicami s polomermi* **r** *a* **R**.
- *rovnomerne konverguje na* $\overline{P(a, r_1, R_1)}$, *kde* $r < r_1 < R_1 < R$
- *diverguje na* **C** $\setminus \overline{P(a, r, R)}$.

Konvergencia Laurentovho radu a analytickosť

Veta

$$Nech \quad \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n(z-a)^n$$

je konvergentný na $P(a,r,R)$*. Potom jeho súčet*

$$f : P(a,r,R) \longrightarrow \mathbf{C},\ f(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n(z-a)^n$$

je analytická funkcia.

Veta

Nech $f : P(a,r,R) \longrightarrow$ **C** *je analytická funkcia. Potom existuje* **jediny** *Laurentov rad, ktorý na* $P(a,r,R)$ *konverguje ku funkcií* $f(z)$*. Koeficienty Laurentovho radu majú tvar*

$$c_n = \frac{1}{2\pi i}\int_C \frac{f(z)}{(z-a)^{n+1}}dz,\ n = 0, \pm 1, \pm 2, ...,$$

kde C *je ľubovoľná jednoduchá, po častiach hladká, kladne orientovaná krivka, ktorá leží v* $P(a,r,R)$ *tak, že* $a \in IntC$*.*

Rozvoj funkcie do Laurentovho radu

Pozn. Rozvoj funkcie $f(z)$ do Laurentovho radu má výhodu v porovnaní s rozvinutím do Taylorovho radu:
funkciu môžeme rozvinúť do nekonečného radu **aj v takom bode** $z = a$, v ktorom funkcia nie je analytická
(v takomto prípade rozklad funkcie do Taylorovho radu nie je možný).

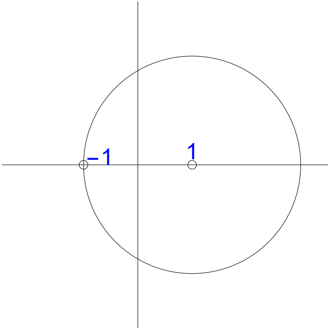
Pozn. Výpočet koeficientov Laurentovho radu použitím vzťahov z poslednej vety je nepraktický (veľmi pracný a časovo náročný postup).
Pri rozvoji do Laurentovho radu je výhodnejšie aplikovať rozvoj do Taylorových radov (1), (2), (3) a (4).

Príklad

Príklad

Nájdite Laurentov rad funkcie $f : \mathbf{C} \setminus \{-1, 1\} \longrightarrow \mathbf{C}$, $f(z) = \dfrac{1-2z}{1-z^2}$ *na* $P(1, 0, 2)$.

Riešenie:



Príklad

Príklad

Nájdite Laurentov rad funkcie $f : \mathbf{C} \setminus \{-1, 1\} \longrightarrow \mathbf{C}$, $f(z) = \dfrac{1-2z}{1-z^2}$ *na* $P(1, 0, 2)$.

Riešenie: Použijeme rozklad na parciálne zlomky.

$$\begin{aligned}
f(z) &= \frac{1-2z}{1-z^2} = \frac{1}{2}\frac{1}{z-1} + \frac{3}{2}\frac{1}{z+1} = \frac{1}{2}\frac{1}{z-1} + \frac{3}{2}\frac{1}{z-1+1+1} \\
&= \frac{1}{2}\frac{1}{z-1} + \frac{3}{2}\frac{1}{2+z-1} = \frac{1}{2}\frac{1}{z-1} + \frac{3}{2}\frac{1}{2\left(\dfrac{2}{2} + \dfrac{z-1}{2}\right)} \\
&= \frac{1}{2}\frac{1}{z-1} + \frac{3}{4}\frac{1}{1-\left(-\dfrac{z-1}{2}\right)} \qquad \left[0 < \left|\frac{z-1}{2}\right| < 1\right]
\end{aligned}$$

Príklad

$$f(z) = \frac{1}{2}\frac{1}{z-1} + \frac{3}{4}\frac{1}{1-\left(-\frac{z-1}{2}\right)} \quad \left[0 < \left|\frac{z-1}{2}\right| < 1\right]$$

Použijeme: $\frac{1}{1-z} = \sum_{n=0}^{\infty} z^n, \quad \forall z \in K(0,1).....z \in K(0,1) \Leftrightarrow |z| < 1$

$$f(z) = \frac{1}{2}\frac{1}{z-1} + \frac{3}{4}\sum_{n=0}^{\infty}\left(-\frac{z-1}{2}\right)^n$$

Tak pre $0 < |z-1| < 2$ máme

$$f(z) = \frac{1-2z}{1-z^2} = \frac{1}{2}\frac{1}{z-1} + \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n \frac{3}{2^{n+2}}(z-1)^n$$

Príklad

Tak pre $0 < |z-1| < 2$ máme

$$f(z) = \frac{1-2z}{1-z^2} = \frac{1}{2}\frac{1}{z-1} + \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n \frac{3}{2^{n+2}}(z-1)^n$$

Hlavná časť Laurentovho radu má iba jeden člen $\frac{1}{2}\frac{1}{z-1} = \frac{1}{2}(z-1)^{-1}$, ktorý "konverguje" na $\mathbf{C} \setminus \{1\}$.

Analytická časť Laurentovho radu $\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n \frac{3}{2^{n+2}}(z-1)^n$ konverguje na $K(1,2)$. To vieme z podmienky $|z-1| < 2$

Z toho: **Laurentov rad** konverguje na $P(1,0,2)$.

Medzikružie $P(1,0,2)$ je kruh $K(1,2)$ bez bodu 1.

Ďakujem za pozornosť.