Postupnosti a nekonečné rady

Oľga Stašová

Ústav informatiky a matematiky
Fakulta elektrotechniky a informatiky
Slovenská technická univerzita

letný semester 2023/2024

Postupnosti

Obsah prednášky:

- Postupnosti
- Nekonečné rady

Postupnosti - základné pojmy

Postupnosť komplexných čísel je zobrazenie z množiny prirodzených čísel **N** do množiny komplexných čísel **C**, (f:$\mathbf{N} \to \mathbf{C}$).

Postupnosti - základné pojmy

Postupnosť komplexných čísel je zobrazenie z množiny prirodzených čísel **N** do množiny komplexných čísel **C**, (f:$\mathbf{N} \to \mathbf{C}$). Postupnosti komplexných čísel označujeme $\{z_n\}_{n=1}^{\infty}$,

$$\{z_n\}_{n=1}^{\infty} = \{z_1, z_2, z_3, ..., z_n, ...\}.$$

Postupnosti - základné pojmy

Postupnosť komplexných čísel je zobrazenie z množiny prirodzených čísel **N** do množiny komplexných čísel **C**, (f:**N** → **C**). Postupnosti komplexných čísel označujeme $\{z_n\}_{n=1}^{\infty}$,

$$\{z_n\}_{n=1}^{\infty} = \{z_1, z_2, z_3, ..., z_n, ...\}.$$

Pozn. Postupnosti reálnych čísel označujeme $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$.

Postupnosti - základné pojmy

Postupnosť komplexných čísel je zobrazenie z množiny prirodzených čísel **N** do množiny komplexných čísel **C**, (f:**N** $\to$ **C**). Postupnosti komplexných čísel označujeme $\{z_n\}_{n=1}^{\infty}$,

$$\{z_n\}_{n=1}^{\infty} = \{z_1, z_2, z_3, ..., z_n, ...\}.$$

Pozn. Postupnosti reálnych čísel označujeme $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$.

Postupnosť reprezentuje **funkciu**, ktorej definičný obor je množina prirodzených čísel a jej funkčné hodnoty priradené prirodzeným číslam $1, 2, \ldots, n$ nazývame **členy postupnosti**. n-tý člen postupnosti komplexných čísel označujeme z_n.

Postupnosti - základné pojmy

Pre každé $n \in N$ máme

$$z_n = x_n + iy_n,$$

t.j. definícia postupnosti komplexných čísel je ekvivalentná s definíciou dvojice postupností reálnych čísel $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ a $\{y_n\}_{n=1}^{\infty}$.

Postupnosti - ohraničenosť

Postupnosť reálnych čísel $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ sa nazýva

- **ohraničená zhora** ak $\exists \alpha \in \mathbf{R}$ také, že $\forall n \in \mathbf{N} : a_n \leq \alpha$.

Postupnosti - ohraničenosť

Postupnosť reálnych čísel $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ sa nazýva

- **ohraničená zhora** ak $\exists \alpha \in \mathbf{R}$ také, že $\forall n \in \mathbf{N} : a_n \leq \alpha$.
- **ohraničená zdola** ak $\exists \beta \in \mathbf{R}$ také, že $\forall n \in \mathbf{N} : a_n \geq \beta$.

Postupnosti - ohraničenosť

Postupnosť reálnych čísel$\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ sa nazýva

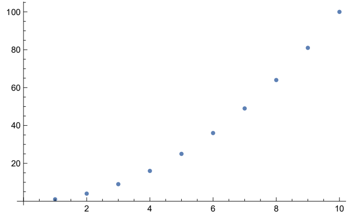
- **ohraničená zhora** ak $\exists \alpha \in \mathbf{R}$ také, že $\forall n \in \mathbf{N} : a_n \leq \alpha$.
- **ohraničená zdola** ak $\exists \beta \in \mathbf{R}$ také, že $\forall n \in \mathbf{N} : a_n \geq \beta$.
- **ohraničená**, ak je ohraničená zhora **a** ohraničená zdola, teda ak $\exists \alpha, \beta \in \mathbf{R}$ také, že $\forall n \in \mathbf{N} : \beta \leq a_n \leq \alpha$.

Postupnosti - ohraničenosť

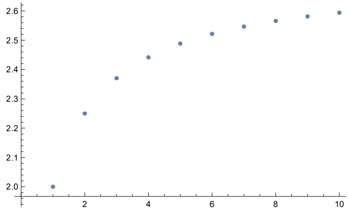
Postupnosť reálnych čísel $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ sa nazýva

- **ohraničená zhora** ak $\exists \alpha \in \mathbf{R}$ také, že $\forall n \in \mathbf{N} : a_n \leq \alpha$.
- **ohraničená zdola** ak $\exists \beta \in \mathbf{R}$ také, že $\forall n \in \mathbf{N} : a_n \geq \beta$.
- **ohraničená**, ak je ohraničená zhora **a** ohraničená zdola, teda ak $\exists \alpha, \beta \in \mathbf{R}$ také, že $\forall n \in \mathbf{N} : \beta \leq a_n \leq \alpha$.
- **neohraničená**, ak nie je ohraničená zhora **alebo** zdola.

Postupnosti - ohraničenosť



Obr.: Neohraničená postupnosť $\{n^2\}_{n=1}^{\infty}$.



Obr.: Ohraničená postupnosť $\left\{\left(1+\frac{1}{n}\right)^n\right\}_{n=1}^{\infty}$.

Postupnosti - ohraničenosť

Postupnosť komplexných čísel $\{z_n\}_{n=1}^{\infty}$ sa nazýva **ohraničená**, ak $\forall n \in$ **N** platí: $|z_n| < M$, kde $M > 0$.
$|z_n| = \sqrt{x_n^2 + y_n^2} \geq 0$.

Postupnosť $\{z_n\}_{n=1}^{\infty} \subset$ **C** je ohraničená $\Leftrightarrow \{x_n\}_{n=1}^{\infty} \subset$ **R**, $\{y_n\}_{n=1}^{\infty} \subset$ **R** sú ohraničené.

$$\lim_{n\to\infty} z_n = z \in \mathbf{C} \Leftrightarrow \lim_{n\to\infty} Re\, z_n = Re\, z \bigwedge \lim_{n\to\infty} Im\, z_n = Im.$$

Pozn. $\lim_{n\to\infty} (-1)^n n = \infty$. **Pozor!** táto limita v **R** neexistuje.

Aritmetická a geometrická postupnosť

Aritmetická postupnosť: $a_{n+1} = a_n + d$, kde d je diferencia.

$$
\begin{aligned}
a_1 &= a_1 \\
a_2 &= a_1 + d \\
a_3 &= a_1 + 2d \\
&\vdots \\
a_n &= a_1 + (n-1)d
\end{aligned}
$$

Aritmetická a geometrická postupnosť

Aritmetická postupnosť: $a_{n+1} = a_n + d$, kde d je diferencia.

$$\begin{aligned} a_1 &= a_1 \\ a_2 &= a_1 + d \\ a_3 &= a_1 + 2d \\ &\vdots \\ a_n &= a_1 + (n-1)d \end{aligned}$$

Postupnosť čísel $a_1, a_2, ..., a_n, ...$ nazývame **aritmetická**, ak pre ľubovoľné dva po sebe nasledujúce členy postupnosti platí $a_{n+1} - a_n = d$.

Aritmetická a geometrická postupnosť

Geometrická postupnosť: $a_{n+1} = a_n \cdot q$, kde q je quotient (kvocient).

$$\begin{aligned} a_1 &= a_1 \\ a_2 &= a_1 \cdot q \\ a_3 &= a_1 \cdot q^2 \\ &\vdots \\ a_n &= a_1 \cdot q^{(n-1)} \end{aligned}$$

Aritmetická a geometrická postupnosť

Geometrická postupnosť: $a_{n+1} = a_n \cdot q$, kde q je quotient (kvocient).

$$\begin{aligned} a_1 &= a_1 \\ a_2 &= a_1 \cdot q \\ a_3 &= a_1 \cdot q^2 \\ &\vdots \\ a_n &= a_1 \cdot q^{(n-1)} \end{aligned}$$

Postupnosť čísel $a_1, a_2, ..., a_n, ...$ nazývame **geometrická**, ak pre ľubovoľné dva po sebe nasledujúce členy postupnosti platí $\frac{a_{n+1}}{a_n} = q$.

Nekonečné rady - základné pojmy

Definícia

Nech $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ *je daná nekonečná postupnosť reálnych čísel. Potom symbol*

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = a_1 + a_2 + \ldots + a_n + \ldots$$

nazývame **nekonečný číselný rad**, *alebo skrátene* **nekonečný rad**. *Číslo* a_n *nazývame* n*-tý člen radu.*

(*pozn.* Číselné rady - členmi radu sú čísla; Funkcionálne rady - členmi radu sú funkcie.)

Nekonečné rady v komplexnej analýze

Na komplexnej analýze sa budeme zaoberať: **radmi funkcií komplexnej premennej.**

Veta

Rad $\sum_{n=1}^{\infty} z_n, \quad z_n = x_n + iy_n$ *konverguje* $\Leftrightarrow$ *ak konvergujú obidva rady* $\sum_{n=1}^{\infty} x_n$ *a* $\sum_{n=1}^{\infty} y_n$.

Veta

Rad $\sum_{n=1}^{\infty} z_n, \quad z_n = x_n + iy_n$ **absolútne** *konverguje* $\Leftrightarrow$ *ak* **absolútne** *konvergujú obidva rady* $\sum_{n=1}^{\infty} x_n$ *a* $\sum_{n=1}^{\infty} y_n$.

Nekonečné rady v komplexnej analýze

Rad

$$u_1(z) + u_2(z) + ... + u_n(z) + ...,$$

kde $u_k : A \to \mathbf{C}$ sú funkcie komplexnej premennej
sa nazýva **rad funkcií komplexnej premennej**.

Pre pevnú hodnotu $z = z_0 \in A$ z vyššie uvedeného radu dostaneme **rad komplexných čísel**

$$u_1(z_0) + u_2(z_0) + ... + u_n(z_0) + ...$$

Ak je 2. rad konvergentný, tak bod $z = z_0$ nazývame **bodom konvergencie** 1. radu. A množinu všetkých bodov konvergencie nazývame **obor konvergencie** 1. radu a označujeme ho **K**.

Nekonečné rady - základné pojmy

Definícia

K radu $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ *je priradená taká postupnosť* $\{s_n\}_{n=1}^{\infty}$, *že platí*

$$s_n = a_1 + a_2 + \ldots + a_n$$

pre každé $n \in \mathbf{N}^+$. *Postupnosť* $\{s_n\}_{n=1}^{\infty}$ *nazývame* **postupnosť čiastočných súčtov** *k radu* $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$.

Nekonečné rady - základné pojmy

Definícia

Nech postupnosť čiastočných súčtov $\{s_n\}_{n=1}^{\infty}$ *má vlastnú limitu*

$$\lim_{n\to\infty} s_n = s$$

potom číslo s *nazývame súčtom radu a rad nazývame* **konvergentný**. *Ak limita* $\lim\limits_{n\to\infty} s_n$ *neexistuje alebo je nevlastná, potom hovoríme, že rad je* **divergentný**.

Nekonečné rady - základné pojmy

Vzťah medzi $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ a $\{s_n\}_{n=1}^{\infty}$:

$$\begin{aligned} s_1 &= a_1 \\ s_2 &= a_1 + a_2 \\ &\dots \\ s_n &= a_1 + a_2 + \cdots + a_{n-1} + a_n \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} s_1 &= a_1 \\ s_2 &= s_1 + a_2 \\ &\dots \\ s_n &= s_{n-1} + a_n \end{aligned}$$

Nekonečné rady - základné pojmy

Ešte pár poznámok, ktoré je dobré si uvedomiť:

- V čom je rozdiel medzi postupnosťou a radom? **Nekonečný číselný rad predstavuje súčet prvkov postupnosti.**

Nekonečné rady - základné pojmy

Ešte pár poznámok, ktoré je dobré si uvedomiť:

- V čom je rozdiel medzi postupnosťou a radom? **Nekonečný číselný rad predstavuje súčet prvkov postupnosti.**
- Z definície je zrejmé, že o tom, **či rad má alebo nemá súčet rozhoduje** to, či **postupnosť** $\{s_n\}_{n=1}^{\infty}$ je **konvergentná alebo divergentná**

Nekonečné rady - základné pojmy

Ešte pár poznámok, ktoré je dobré si uvedomiť:

- V čom je rozdiel medzi postupnosťou a radom? **Nekonečný číselný rad predstavuje súčet prvkov postupnosti.**
- Z definície je zrejmé, že o tom, **či rad má alebo nemá súčet rozhoduje** to, či **postupnosť** $\{s_n\}_{n=1}^{\infty}$ je **konvergentná alebo divergentná**
- Rad je **konvergentný** $\Leftrightarrow$ **má súčet**; rad je **divergentný** $\Leftrightarrow$ **nemá súčet**

Nekonečné rady - základné pojmy

Ešte pár poznámok, ktoré je dobré si uvedomiť:

- V čom je rozdiel medzi postupnosťou a radom? **Nekonečný číselný rad predstavuje súčet prvkov postupnosti.**
- Z definície je zrejmé, že o tom, **či rad má alebo nemá súčet rozhoduje** to, či **postupnosť** $\{s_n\}_{n=1}^{\infty}$ je **konvergentná alebo divergentná**
- Rad je **konvergentný** $\Leftrightarrow$ **má súčet**; rad je **divergentný** $\Leftrightarrow$ **nemá súčet**
- **O súčte radu hovoríme teda iba pri konvergentných radoch**.

Nekonečné rady - základné pojmy

Definícia

Nech sú dané rady $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ *a* $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$*. Potom rad*

$$\sum_{n=1}^{\infty}(a_n + b_n)$$

nazývame **súčtom radov** $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ *a* $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$*.*

Nekonečné rady - základné pojmy

Definícia

Nech sú dané rady $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ *a* $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$. *Potom rad*

$$\sum_{n=1}^{\infty} (a_n + b_n)$$

nazývame **súčtom radov** $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ *a* $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$.

Ak $c \in \mathbf{R}$, *tak rad*

$$\sum_{n=1}^{\infty} (c \cdot a_n)$$

nazývame **súčin radu** $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ **a konštanty** c.

Nekonečné rady - základné pojmy

Veta

Nech rad $\sum_{n=1}^{\infty}(a_n + b_n)$ **je súčtom radov** $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ *a* $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$. *Nech* **tieto rady sú konvergentné** *a platí* $\sum_{n=1}^{\infty} a_n = s_1$ *a* $\sum_{n=1}^{\infty} b_n = s_2$. *Potom aj* **rad** $\sum_{n=1}^{\infty}(a_n + b_n)$ **je konvergentný** *a platí*

$$\sum_{n=1}^{\infty}(a_n + b_n) = s_1 + s_2.$$

Nekonečné rady - základné pojmy

Veta

Nech $c \in \mathbf{R}$ *a* $c \neq 0$. *Potom rad* $\sum_{n=1}^{\infty}(c \cdot a_n)$ **je konvergentný práve vtedy, keď je konvergentný rad** $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$. *V prípade konvergencie, ak* $\sum_{n=1}^{\infty} a_n = s$, *tak*

$$\sum_{n=1}^{\infty}(c \cdot a_n) = c \cdot s = c \sum_{n=1}^{\infty} a_n.$$

Nekonečné rady - nutná podmienka konvergencie radu

Veta

Nutná podmienka konvergencie radu:

$$\text{Ak rad} \quad \sum_{n=1}^{\infty} a_n \quad \text{konverguje, tak} \quad \lim_{n\to\infty} a_n = 0.$$

Ak $\lim\limits_{n\to\infty} a_n \neq 0$, potom rad $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ diverguje.
Ak $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0$, potom rad $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ **môže ale nemusí** konvergovať.

Nekonečné rady - geometrický rad

Definícia

Rad

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_1 q^{n-1} = a_1 + a_1 q + a_1 q^2 + \ldots + a_1 q^{n-1} + \ldots = a_1 (1 + q + \ldots + q^{n-1} + \ldots)$$

nazývame **geometrický rad**. *Číslo* q *nazývame* **kvocient** *geometrického radu.*

Nekonečné rady - geometrický rad

Pre n-tý čiastočný súčet s_n platí

$$\begin{aligned} s_n &= a_1 + a_1 q + a_1 q^2 + \ldots + a_1 q^{n-1} + \ldots = a_1 \frac{q^n - 1}{q - 1}, \quad \text{ak} \quad q \neq 1, \\ s_n &= n \cdot a_1, \quad \text{ak} \quad q = 1. \end{aligned}$$

Dá sa dokázať, že

- pre $|q| \geq 1$ postupnosť $\{s_n\}_{n=1}^{\infty}$ diverguje,
- pre $|q| < 1$ postupnosť $\{s_n\}_{n=1}^{\infty}$ konverguje a platí

$$\lim_{n \to \infty} s_n = \lim_{n \to \infty} a_1 \frac{q^n - 1}{q - 1} = \frac{a_1}{q - 1} \lim_{n \to \infty} (q^n - 1) = \frac{a_1}{q - 1} (0 - 1) = \frac{a_1}{1 - q}.$$

Nekonečné rady - geometrický rad

Veta

Geometrický rad $\sum_{n=1}^{\infty} a_1 q^{n-1}$ **je konvergentný** *práve vtedy, keď* $|q| < 1$. *V prípade konvergencie platí*

$$\sum_{n=1}^{\infty} q^{n-1} = a_1(1 + q + q^2 + ... + q^{n-1} + ...) = \frac{a_1}{1-q}.$$

Nekonečné rady - rad so striedavými znamienkami

Definícia

Nech $a_n > 0$ *pre každé* $n \in \mathbf{N}^+$. *Potom rad*

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} a_n = a_1 - a_2 + a_3 - a_4 + \ldots + (-1)^{n+1} a_n + \ldots$$

nazývame **radom so striedavými znamienkami**.

Nekonečné rady - rad so striedavými znamienkami

Veta

Leibnizovo kritérium konvergencie radu

Nech $a_n > 0$ *pre každé* $n \in \mathbf{N}^+$ *a postupnosť* $\{s_n\}_{n=1}^{\infty}$ *je* **nerastúca**. *Ak* $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0$, *tak rad* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} a_n$ *je* **konvergentný**.

(*pozn.* Nerastúca postupnosť: $a_n \geq a_{n+1}$, pre $n = 1, 2, \ldots$)

To znamená, že podmienka $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0$ je:

- pre nekonečný rad len nutnou podmienkou konvergencie,
- pre nekonečný rad so striedavými znamienkami postačujúcou podmienkou konvergencie.

Nekonečné rady - rad so striedavými znamienkami

- **Nutná podmienka.**
  - Ak nie je splnená, neplatí tvrdenie (napr. konvergencia).
  - Ak je splnená, tvrdenie **môže ale nemusí** platiť.
- **Postačujúca podmienka.**
  - Ak je splnená, tvrdenie **platí**.

Nekonečné rady - Cauchyho odmocninové kritérium

Cauchyho odmocninové kritérium

Nech $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ je nekonečný rad. Ak

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|} = L < 1,$$

potom nekonečný rad $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ konverguje.

Nekonečné rady - Cauchyho odmocninové kritérium

Cauchyho odmocninové kritérium

Nech $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ je nekonečný rad. Ak

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|} = L < 1,$$

potom nekonečný rad $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ konverguje.

- Ak $L > 1$, rad $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ diverguje.

Nekonečné rady - Cauchyho odmocninové kritérium

Cauchyho odmocninové kritérium

Nech $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ je nekonečný rad. Ak

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|} = L < 1,$$

potom nekonečný rad $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ konverguje.

- Ak $L > 1$, rad $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ diverguje.
- Ak $L = 1$, podľa tohto kritéria o konvergencii (divergencii) radu $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ nevieme rozhodnúť.

Nekonečné rady - D'Alambertovo podielové kritérium

D'Alambertovo podielové kritérium

Nech $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ je nekonečný rad. Ak

$$\lim_{n\to\infty} \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| = L < 1,$$

potom nekonečný rad $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ konverguje.

Nekonečné rady - D'Alambertovo podielové kritérium

D'Alambertovo podielové kritérium

Nech $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ je nekonečný rad. Ak

$$\lim_{n\to\infty} \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| = L < 1,$$

potom nekonečný rad $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ konverguje.

- Ak $L > 1$, rad $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ diverguje.

Nekonečné rady - D'Alambertovo podielové kritérium

D'Alambertovo podielové kritérium

Nech $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ je nekonečný rad. Ak

$$\lim_{n\to\infty} \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| = L < 1,$$

potom nekonečný rad $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ konverguje.

- Ak $L > 1$, rad $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ diverguje.
- Ak $L = 1$, podľa tohto kritéria o konvergencii (divergencii) radu $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ nevieme rozhodnúť.

Nekonečné rady - Porovnávacie kritérium

Weierstrassovo porovnávacie kritérium

Nech sú dané rady $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ a $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$. Nech pre každé $n \in \mathbf{N}$, $b_n \geq 0$ a nech pre každé $n \geq k$ platí, že $|a_n| \leq b_n$.

Nekonečné rady - Porovnávacie kritérium

Weierstrassovo porovnávacie kritérium

Nech sú dané rady $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ a $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$. Nech pre každé $n \in \mathbf{N}$, $b_n \geq 0$ a nech pre každé $n \geq k$ platí, že $|a_n| \leq b_n$. Potom platí:

Nekonečné rady - Porovnávacie kritérium

Weierstrassovo porovnávacie kritérium

Nech sú dané rady $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ a $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$. Nech pre každé $n \in \mathbf{N}$, $b_n \geq 0$ a nech pre každé $n \geq k$ platí, že $|a_n| \leq b_n$. Potom platí:

- Ak konverguje rad $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$, tak konverguje aj rad $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$.

Nekonečné rady - Porovnávacie kritérium

Weierstrassovo porovnávacie kritérium

Nech sú dané rady $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ a $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$. Nech pre každé $n \in \mathbf{N}$, $b_n \geq 0$ a nech pre každé $n \geq k$ platí, že $|a_n| \leq b_n$. Potom platí:

- Ak konverguje rad $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$, tak konverguje aj rad $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$.
- Ak diverguje rad $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$, tak diverguje aj rad $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$.

Nekonečné rady - Porovnávacie kritérium

Weierstrassovo porovnávacie kritérium

Nech sú dané rady $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ a $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$. Nech pre každé $n \in \mathbf{N}$, $b_n \geq 0$ a nech pre každé $n \geq k$ platí, že $|a_n| \leq b_n$. Potom platí:

- Ak konverguje rad $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$, tak konverguje aj rad $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$.
- Ak diverguje rad $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$, tak diverguje aj rad $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$.

Hovoríme, že rad

- $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ **je majorantný k radu** $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$.

  Zapisujeme to: $\sum_{n=1}^{\infty} a_n << \sum_{n=1}^{\infty} b_n$.

Nekonečné rady - Porovnávacie kritérium

Ako postupujeme pri určovaní konvergencie?

Nekonečné rady - Porovnávacie kritérium

Ako postupujeme pri určovaní konvergencie?

- Ak **predpokladáme konvergenciu** daného radu, **hľadáme k nemu majorantný konvergentný rad**.

Nekonečné rady - Porovnávacie kritérium

Ako postupujeme pri určovaní konvergencie?

- Ak **predpokladáme konvergenciu** daného radu, **hľadáme k nemu majorantný konvergentný rad**.
  Používame na to konvergentné geometrické rady (s kvocientom $|q| < 1$) a rad $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{1}{n^2}$ a rady z neho odvodené.
- Ak naopak **predpokladáme divergenciu radu**, **hľadáme divergentný rad, ku ktorému je daný rad majorantný**.

Nekonečné rady - Porovnávacie kritérium

Ako postupujeme pri určovaní konvergencie?

- Ak **predpokladáme konvergenciu** daného radu, **hľadáme k nemu majorantný konvergentný rad**.
  Používame na to konvergentné geometrické rady (s kvocientom $|q| < 1$) a rad $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ a rady z neho odvodené.
- Ak naopak **predpokladáme divergenciu radu**, **hľadáme divergentný rad, ku ktorému je daný rad majorantný**.
  Používame na to divergentné geometrické rady (s kvocientom $|q| \geq 1$) a rad $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ a rady z neho odvodené.

Porovnávacie kritérium v príkladoch - dôležité

Porovnávacie kritérium

Nech $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n << \sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n$. (čítaj rad $\sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n$ **je majorantný k radu** $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$.)
To znamená: Nech pre každé $n \in \mathbf{N}$, $b_n \geq 0$ a nech pre každé $n \geq k$ platí, že $|a_n| \leq b_n$.

Porovnávacie kritérium v príkladoch - dôležité

Porovnávacie kritérium

Nech $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n << \sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n$. (čítaj rad $\sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n$ **je majorantný k radu** $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$.)
To znamená: Nech pre každé $n \in \mathbf{N}$, $b_n \geq 0$ a nech pre každé $n \geq k$ platí, že $|a_n| \leq b_n$. Potom platí:

- Ak konverguje rad $\sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n$, tak konverguje aj rad $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$.

V príkladoch budeme využívať nasledovné: $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n << \sum\limits_{n=1}^{\infty} |a_n|$.

To znamená, že ak ukážeme konvergenciu radu $\sum\limits_{n=1}^{\infty} |a_n|$,

tak podľa porovnávacieho kritéria je konvergentný aj rad $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$.

Nekonečné rady - Cauchyho integrálne kritérium

Cauchyho integrálne kritérium

Nech rad $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ má nezáporné členy

Nekonečné rady - Cauchyho integrálne kritérium

Cauchyho integrálne kritérium

Nech rad $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ má nezáporné členy a existuje k nemu funkcia $f(x)$, ktorá je spojitá, nerastúca (a aj nezáporná) na nejakom intervale $\langle k, \infty)$

Nekonečné rady - Cauchyho integrálne kritérium

Cauchyho integrálne kritérium

Nech rad $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ má nezáporné členy a existuje k nemu funkcia $f(x)$, ktorá je spojitá, nerastúca (a aj nezáporná) na nejakom intervale $\langle k, \infty)$ a pre každé $n \geq k$ platí $a_n = f(n)$.

Nekonečné rady - Cauchyho integrálne kritérium

Cauchyho integrálne kritérium

Nech rad $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ má nezáporné členy a existuje k nemu funkcia $f(x)$, ktorá je spojitá, nerastúca (a aj nezáporná) na nejakom intervale $\langle k, \infty)$ a pre každé $n \geq k$ platí $a_n = f(n)$. Potom ak integrál

$$\int_k^{\infty} f(x)\,\mathrm{d}x,$$

Nekonečné rady - Cauchyho integrálne kritérium

Cauchyho integrálne kritérium

Nech rad $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ má nezáporné členy a existuje k nemu funkcia $f(x)$, ktorá je spojitá, nerastúca (a aj nezáporná) na nejakom intervale $\langle k, \infty)$ a pre každé $n \geq k$ platí $a_n = f(n)$. Potom ak integrál

$$\int\limits_{k}^{\infty} f(x)\,\mathrm{d}x,$$

konverguje, konverguje aj rad $\sum\limits_{n=k}^{\infty} a_n$.

Nekonečné rady - Cauchyho integrálne kritérium

Cauchyho integrálne kritérium

Nech rad $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ má nezáporné členy a existuje k nemu funkcia $f(x)$, ktorá je spojitá, nerastúca (a aj nezáporná) na nejakom intervale $\langle k, \infty)$ a pre každé $n \geq k$ platí $a_n = f(n)$. Potom ak integrál

$$\int\limits_{k}^{\infty} f(x)\,\mathrm{d}x,$$

konverguje, konverguje aj rad $\sum\limits_{n=k}^{\infty} a_n$. Ak $\int\limits_{k}^{\infty} f(x)\,\mathrm{d}x$ diverguje,

Nekonečné rady - Cauchyho integrálne kritérium

Cauchyho integrálne kritérium

Nech rad $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ má nezáporné členy a existuje k nemu funkcia $f(x)$, ktorá je spojitá, nerastúca (a aj nezáporná) na nejakom intervale $\langle k, \infty)$ a pre každé $n \geq k$ platí $a_n = f(n)$. Potom ak integrál

$$\int\limits_{k}^{\infty} f(x)\,\mathrm{d}x,$$

konverguje, konverguje aj rad $\sum\limits_{n=k}^{\infty} a_n$. Ak $\int\limits_{k}^{\infty} f(x)\,\mathrm{d}x$ diverguje, aj rad $\sum\limits_{n=k}^{\infty} a_n$ diverguje.

Pozn. Konvergencia integrálu znamená, že jeho výsledok je rôzny od ∞. Divergencia integrálu znamená, že jeho výsledok je rovný ∞.

Nekonečné rady - Mocninový rad

Definícia

Rad

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n(x-a)^n = a_0 + a_1(x-a) + a_2(x-a)^2 + \ldots + a_n(x-a)^n + \ldots$$

nazývame **mocninovým radom**. *Číslo* $a \in \mathbf{R}$ *sa nazýva* **stred radu**. *Čísla* a_n *sa nazývajú* **koeficienty mocninového radu**.

Mocninový rad je jednoznačne určený svojimi koeficientmi a stredom.
Oborom konvergencie mocninového radu:

- jednobodová množina,
- (v **R**) interval,

Nekonečné rady - Mocninový rad

Definícia

Rad

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n(x-a)^n = a_0 + a_1(x-a) + a_2(x-a)^2 + \ldots + a_n(x-a)^n + \ldots$$

nazývame **mocninovým radom***. Číslo* $a \in \mathbf{R}$ *sa nazýva* **stred radu***. Čísla* a_n *sa nazývajú* **koeficienty mocninového radu***.*

Mocninový rad je jednoznačne určený svojimi koeficientmi a stredom. Oborom konvergencie mocninového radu:

- jednobodová množina,
- (v **R**) interval, (v **C**)

Nekonečné rady - Mocninový rad

Definícia

Rad

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n(x-a)^n = a_0 + a_1(x-a) + a_2(x-a)^2 + \ldots + a_n(x-a)^n + \ldots$$

nazývame **mocninovým radom**. *Číslo* $a \in \mathbf{R}$ *sa nazýva* **stred radu**. *Čísla* a_n *sa nazývajú* **koeficienty mocninového radu**.

Mocninový rad je jednoznačne určený svojimi koeficientmi a stredom.
Oborom konvergencie mocninového radu:

- jednobodová množina,
- (v **R**) interval, (v **C**) kruh.

Nekonečné rady - Mocninový rad

Veta

Pre každý mocninový rad $\sum_{n=0}^{\infty} a_n(x-a)^n$ *existuje* $0 \leq r \leq \infty$ *také, že daný rad konverguje:*

- *v* **R** *pre každé* $x \in (a-r, a+r)$ *a diverguje pre každé* $x \in (-\infty, a-r) \cup (a+r, \infty)$.
- *v* **C** *pre každé* $x \in K(a,r)$ *a diverguje pre každé* $x \in$ **C** $\setminus \overline{K(a,r)}$.

Hodnotu r *nazývame* **polomer konvergencie mocninového radu**.

Daný mocninový rad konverguje len pre $x = a$ *práve vtedy, keď* $r = 0$. *Rad konverguje pre* $x \in$ **R** *alebo pre* $x \in$ **C** *práve vtedy, keď* $r = \infty$.

Ďakujem za pozornosť.