Diferenciálny počet funkcií komplexnej premennej

Oľga Stašová

Ústav informatiky a matematiky
Fakulta elektrotechniky a informatiky
Slovenská technická univerzita

letný semester 2023/2024

Definícia derivácie funkcie komplexnej premennej

Definícia

Nech $f : A(\subset \mathbf{C}) \longrightarrow \mathbf{C}$ *je jednoznačná funkcia komplexnej premennej. Množina* A *je otvorená a* $a \in A$.

- *Ak existuje konečná limita* $\lim\limits_{z \longrightarrow a} \frac{f(z)-f(a)}{z-a}$, *potom túto funkciu nazývame derivácia funkcie* f *v bode* a, *označujeme* $f'(a)$ *a hovoríme, že funkcia* f *je diferencovateľná v bode* a.
- *Ak je funkcia* f *diferencovateľná v každom bode z* A, *hovoríme, že* f *je diferencovateľná funkcia a funkciu*

$$f' : A(\subset \mathbf{C}) \longrightarrow \mathbf{C},\ f'(a) = \lim_{z \longrightarrow a} \frac{f(z) - f(a)}{z - a}$$

nazývame **derivácia funkcie** f.

Pravidlá derivovanie funkcie komplexnej premennej

Pretože definícia derivácie funkcie komplexnej premennej v bode a je rovnaká ako pre funkciu reálnej premennej, **platia všetky pravidlá, ktoré platili pre derivovanie funkcií reálnej premennej** a tak isto **aj všetky vety o diferencovateľnosti**, napr. diferencovateľnosť funkcie komplexnej premennej $f(z)$ v nejakom bode z definičného oboru implikuje spojitosť funkcie f v tomto bode.

Parciálne derivácie

Parciálna derivácia funkcie viac premenných je jej derivácia vzhľadom na jednu z jej premenných, pričom s ostatnými premennými pracujeme ako s konštantami.
∂ - znak parciálnej derivácie

$\dfrac{\partial u(x,y)}{\partial x}$ - parciálna derivácia funkcie $u(x,y)$ podľa premennej x
S premennou y pri výpočte parciálnej derivácie pracujeme tak, ako keby to bola konštanta.

$\dfrac{\partial u(x,y,z)}{\partial y}$ - parciálna derivácia funkcie $u(x,y,z)$ podľa premennej y
S premennými x a z pri výpočte parciálnej derivácie pracujeme tak, ako keby to boli konštanty.

Parciálne derivácie

$\dfrac{\partial u(x,y)}{\partial x}$ - parciálna derivácia funkcie $u(x,y)$ podľa premennej x

S premennou y pri výpočte parciálnej derivácie pracujeme tak, ako keby to bola konštanta.

Príklad

$u(x,y) = 5x^3y^7$

Vypočítajte $\dfrac{\partial u(x,y)}{\partial x}$

Použijeme vzorec: $(c \cdot f)' = c \cdot f'$

$$\frac{\partial u(x,y)}{\partial x} = 5y^7 3x^2 = 15x^2y^7$$

Cauchyho - Riemannove rovnice (veľmi dôležité)

Nutná a postačujúca podmienka diferencovateľnosti

Veta

Funkcia $f : A(\subset \mathbf{C}) \longrightarrow \mathbf{C}$, $f(z) = u(x,y) + i\,v(x,y)$ *(A je otvorená) je diferencovateľná v bode* $\mathbf{a} = a_1 + i\,a_2$ **vtedy a len vtedy** *ak sú funkcie* $u(x,y)$ *a* $v(x,y)$ *diferencovateľné v bode* $\mathbf{a} = (a_1, a_2)$ *a platia nasledujúce podmienky:*

$$\frac{\partial u(\mathbf{a})}{\partial x} = \frac{\partial v(\mathbf{a})}{\partial y} \qquad\qquad \frac{\partial u(\mathbf{a})}{\partial y} = -\frac{\partial v(\mathbf{a})}{\partial x}$$

Tieto 2 rovnice nazývame **Cauchyho - Riemannove rovnice**.

Deriváciu funkcie f *pomocou parciálnych derivácií funkcií* u *a* v *vypočítame nasledovne:*

$$f'(\mathbf{a}) = \frac{\partial u(\mathbf{a})}{\partial x} + i\,\frac{\partial v(\mathbf{a})}{\partial x} = \frac{\partial v(\mathbf{a})}{\partial y} - i\,\frac{\partial u(\mathbf{a})}{\partial y}$$

Príklad (Cauchyho - Riemannove rovnice)

$$\frac{\partial u(\mathbf{a})}{\partial x} = \frac{\partial v(\mathbf{a})}{\partial y} \qquad \frac{\partial u(\mathbf{a})}{\partial y} = -\frac{\partial v(\mathbf{a})}{\partial x}$$

$$f'(\mathbf{a}) = \frac{\partial u(\mathbf{a})}{\partial x} + i\,\frac{\partial v(\mathbf{a})}{\partial x} = \frac{\partial v(\mathbf{a})}{\partial y} - i\,\frac{\partial u(\mathbf{a})}{\partial y}$$

Príklad

Nájdite deriváciu funkcie $f : \mathbf{C} \longrightarrow \mathbf{C},\ f(z) = x^3 - 3xy^2 + i(3x^2y - y^3)$.

Riešenie:

$$u(x,y) = x^3 - 3xy^2 \qquad v(x,y) = 3x^2y - y^3$$

$$\frac{\partial u}{\partial x} = 3x^2 - 3y^2 \qquad \frac{\partial v}{\partial x} = 6xy$$

$$\frac{\partial u}{\partial y} = -6xy \qquad \frac{\partial v}{\partial y} = 3x^2 - 3y^2$$

$$3x^2 - 3y^2 = 3x^2 - 3y^2 \quad \wedge \quad -6xy = -6xy$$

Parciálne derivácie sú spojité v každom bode $(x, y) \in \mathbf{R}^2$
a spĺňajú Cauchyho - Riemannove rovnice v každom bode.

Príklad (Cauchyho - Riemannove rovnice)

$$f'(\mathbf{a}) = \frac{\partial u(\mathbf{a})}{\partial x} + i\,\frac{\partial v(\mathbf{a})}{\partial x} = \frac{\partial v(\mathbf{a})}{\partial y} - i\,\frac{\partial u(\mathbf{a})}{\partial y}$$

Príklad

Nájdite deriváciu funkcie $f : \mathbf{C} \longrightarrow \mathbf{C}$, $f(z) = x^3 - 3xy^2 + i(3x^2y - y^3)$.

Riešenie:

$$u(x,y) = x^3 - 3xy^2 \qquad v(x,y) = 3x^2y - y^3$$

$$\frac{\partial u}{\partial x} = 3x^2 - 3y^2 \qquad \frac{\partial v}{\partial x} = 6xy$$

$$\frac{\partial u}{\partial y} = -6xy \qquad \frac{\partial v}{\partial y} = 3x^2 - 3y^2$$

$3x^2 - 3y^2 = 3x^2 - 3y^2 \quad \wedge \quad -6xy = -6xy$

Parciálne derivácie sú spojité v každom bode $(x,y) \in \mathbf{R}^2$
a spĺňajú Cauchyho - Riemannove rovnice v každom bode.

$$f'(z) = 3x^2 - 3y^2 + i\,6xy.$$

Príklad (Cauchyho - Riemannove rovnice)

Príklad

Vyšetrite, v ktorých bodoch je funkcia $f : \mathbf{C} \longrightarrow \mathbf{C}$, $f(z) = |z^2|$ diferencovateľná.

Riešenie: Nech $z = x + i\,y$, potom

$$f(z) = |z^2| = |z|^2 = \left(\sqrt{x^2 + y^2}\right)^2 = x^2 + y^2 + i\,0.$$

$$\begin{aligned} u(x,y) &= x^2 + y^2 \qquad & v(x,y) &= 0 \\ \frac{\partial u}{\partial x} &= 2x & \frac{\partial v}{\partial x} &= 0 \\ \frac{\partial u}{\partial y} &= 2y & \frac{\partial v}{\partial y} &= 0 \end{aligned}$$

Príklad (Cauchyho - Riemannove rovnice)

$$\frac{\partial u(\mathbf{a})}{\partial x} = \frac{\partial v(\mathbf{a})}{\partial y} \qquad \frac{\partial u(\mathbf{a})}{\partial y} = -\frac{\partial v(\mathbf{a})}{\partial x}$$

$$f'(\mathbf{a}) = \frac{\partial u(\mathbf{a})}{\partial x} + i\,\frac{\partial v(\mathbf{a})}{\partial x} = \frac{\partial v(\mathbf{a})}{\partial y} - i\,\frac{\partial u(\mathbf{a})}{\partial y}$$

$$\begin{aligned} u(x,y) &= x^2 + y^2 & \qquad v(x,y) &= 0 \\ \frac{\partial u}{\partial x} &= 2x & \frac{\partial v}{\partial x} &= 0 \\ \frac{\partial u}{\partial y} &= 2y & \frac{\partial v}{\partial y} &= 0 \end{aligned}$$

$2x = 0 \quad \wedge \quad 2y = -0 \quad \Rightarrow \quad x = 0 \quad \wedge \quad y = 0$
Parciálne derivácie sú spojité v každom bode $(x,y) \in \mathbf{R}^2$
a spĺňajú Cauchyho - Riemannove rovnice v jedinom bode $(0,0)$.

$$f'(z) = 2x + i\,0 \quad \vee \quad f'(z) = 0 - i\,2y \qquad f'(0) = f'(0 + i\,0) = 0.$$

Analytické (holomorfné) funkcie

Definícia

Funkcia $f : A(\subset \mathbf{C}) \longrightarrow \mathbf{C}$ *(*A *je otvorená) je funkcia komplexnej premennej. Hovoríme, že* f *je:*

a) *analytická v oblasti* $M \subset A$*, ak* $f'(z)$ *existuje v každom bode* $z \in M$*,*

b) *analytická v bode* $a \in A$*, ak existuje okolie* $O(a) \subset A$ *také, že v každom bode* $z \in O(a)$ *existuje* $f'(z)$*.*

Pozn.

- Diferencovateľnosť a analytickosť funkcie **v oblasti** sú zhodné pojmy.
- Analytickosť funkcie **v bode** je silnejšia vlastnosť ako diferencovateľnosť funkcie v bode.
  Napr. v poslednom príklade bola funkcia diferencovateľná len v jedinom bode 0, ale analytická v ňom nie je, pretože jej derivácia neexistuje v žiadnom bode (okrem bodu 0) ľubovoľne malého okolia $O(0)$.

Analytické (holomorfné) funkcie

Pozn.

- Diferencovateľnosť a analytickosť funkcie **v oblasti** sú zhodné pojmy.
- Analytickosť funkcie **v bode** je silnejšia vlastnosť ako diferencovateľnosť funkcie v bode.
  Napr. v poslednom príklade bola funkcia diferencovateľná len v jedinom bode 0, ale analytická v ňom nie je, pretože jej derivácia neexistuje v žiadnom bode (okrem bodu 0) ľubovoľne malého okolia $O(0)$.
  - Funkcia nie je analytická v bodoch jednorozmernej množiny (keďže okolie v **C** je dvojrozmerný kruh.)
    Napr. funkcia môže byť diferencovateľná v izolovaných bodoch alebo na úsečke, priamke, ale na týchto množinách nie je analytická.

Regulárne a singulárne body funkcie

Definícia

- *Body komplexnej roviny* **C**, *v ktorých funkcia* **je analytická** *nazývame regulárne body funkcie.*
- *Body komplexnej roviny* **C**, *v ktorých funkcia* **nie je analytická** *nazývame singulárne body funkcie.*
  - *Singulárne body sú* **aj body, v ktorých funkcia nie je definovaná** *(keďže v nich neexistuje derivácia funkcie).*

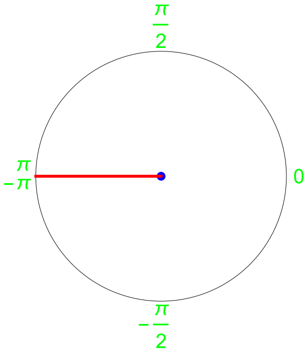
Pozn.

- Mocninová funkcia s prirodzeným exponentom, polynomická funkcia, trigonometrické a hyperbolické funkcie sú analytické funkcie.
- Hlavná hodnota (vetva) logaritmu a všeobecnej mocniny sú analytické na množine všetkých komplexných čísel **s výnimkou nuly a záporných reálnych čísel**.
  - Je to z toho dôvodu, že tieto funkcie sú definované pomocou logaritmickej funkcie.

Nespojitosť na polpriamke záporných reálnych čísel

Hlavná hodnota (vetva) logaritmu a mocniny so všeobecným exponentom sú analytické na množine všetkých komplexných čísel **s výnimkou nuly a záporných reálnych čísel**.

$$ln\, z = ln|z| + i\, arg\, z$$



Ďakujem za pozornosť.