

# Vzorce

Ol'ga Stašová

Ústav informatiky a matematiky  
Fakulta elektrotechniky a informatiky  
Slovenská technická univerzita

letný semester 2023/2024

# Úpravy výrazov

- $a^{-1} = \frac{1}{a}$        $a^{-n} = \frac{1}{a^n}$
- $\sqrt{a} = a^{\frac{1}{2}}$        $\sqrt[n]{a} = a^{\frac{1}{n}}$        $\sqrt[n]{a^m} = a^{\frac{m}{n}}$
- $a^b a^c = a^{b+c}$        $\frac{a^b}{a^c} = a^b a^{-c} = a^{b-c}$        $\frac{a \pm b}{c} = \frac{a}{c} \pm \frac{b}{c}$
- $(a \pm b)^2 = a^2 \pm 2ab + b^2$        $a^2 - b^2 = (a - b)(a + b)$

Logaritmické vzťahy:

- $\ln a + \ln b = \ln ab$        $\ln a - \ln b = \ln \frac{a}{b}$ ,

**dôležitý vzorec**

- $X = e^{\ln X} \wedge \ln A^B = B \ln A \Rightarrow \mathbf{a^b = e^{\ln a^b} = e^{b \ln a}}$

Hodnoty:

- $e^0 = 1$        $\ln 1 = 0$        $\ln e = 1$

# Goniometrické funkcie

**Tabuľka:** Vybrané hodnoty goniometrických funkcií - ľahko zapamätateľná verzia

	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	$\pi$	$\frac{3\pi}{2}$	$2\pi$
$\sin(x)$	$\frac{\sqrt{0}}{2}$	$\frac{\sqrt{1}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{4}}{2}$	0	-1	0
$\cos(x)$	$\frac{\sqrt{4}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{1}}{2}$	$\frac{\sqrt{0}}{2}$	-1	0	1

**Tabuľka:** Vybrané hodnoty goniometrických funkcií - štandardná verzia

	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	$\pi$	$\frac{3\pi}{2}$	$2\pi$
$\sin(x)$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1	0	-1	0
$\cos(x)$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0	-1	0	1

$$\tan(\mathbf{x}) = \frac{\sin(\mathbf{x})}{\cos(\mathbf{x})},$$

$$\cotg(\mathbf{x}) = \frac{\cos(\mathbf{x})}{\sin(\mathbf{x})}$$

# Goniometrické vzťahy

- $\sin^2(x) + \cos^2(x) = 1$ , **dôležitý vzorec**

Súčtové vzorce: **dôležité vzorce v C (impulzova funkcia)**

- $\sin(x_1 \pm x_2) = \sin(x_1) \cos(x_2) \pm \cos(x_1) \sin(x_2)$ ,
- $\cos(x_1 \pm x_2) = \cos(x_1) \cos(x_2) \mp \sin(x_1) \sin(x_2)$ .

Dvojnásobné uhly:

- $\sin(2x) = 2 \sin(x) \cos(x)$ ,
- $\cos(2x) = \cos^2(x) - \sin^2(x)$ .

Polovičné uhly:

- $\sin^2(x) = \frac{1 - \cos(2x)}{2}$       alebo       $\sin^2\left(\frac{x}{2}\right) = \frac{1 - \cos(x)}{2}$ ,
- $\cos^2(x) = \frac{1 + \cos(2x)}{2}$       alebo       $\cos^2\left(\frac{x}{2}\right) = \frac{1 + \cos(x)}{2}$ .

# Derivácie elementárnych funkcií

- 1)  $(c)' = 0$
- 2)  $(x^a)' = ax^{a-1}$ , kde  $a$  je ľubovoľné reálne číslo
- 3)  $(a^x)' = a^x \ln a$ , kde  $a > 0$ ,  $a \neq 1$
- 4)  $(e^x)' = e^x$
- 5)  $(\log_a x)' = \frac{1}{x \ln a}$ , kde  $a > 0$ ,  $a \neq 1$
- 6)  $(\ln x)' = \frac{1}{x}$
- 7)  $(\sin x)' = \cos x$
- 8)  $(\cos x)' = -\sin x$
- 9)  $(\tan x)' = \frac{1}{\cos^2 x}$
- 10)  $(\cotg x)' = -\frac{1}{\sin^2 x}$
- 11)  $(\arcsin x)' = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$ ,  $x \in (-1, 1)$
- 12)  $(\arccos x)' = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$ ,  $x \in (-1, 1)$
- 13)  $(\arctg x)' = \frac{1}{1+x^2}$
- 14)  $(\operatorname{arccotg} x)' = -\frac{1}{1+x^2}$

# Základné neurčité integrály

$$1) \int x^a dx = \frac{x^{a+1}}{a+1} + C, \text{ ak } a \neq -1.$$

$$2) \int x^{-1} dx = \int \frac{1}{x} dx = \ln |x| + C.$$

$$3) \int e^x dx = e^x + C.$$

$$4) \int a^x dx = \frac{a^x}{\ln a} + C, \text{ ak } a \in (0, 1) \cup (1, \infty).$$

$$5a) \int \sin x dx = -\cos x + C.$$

$$5b) \int \sin(ax) dx = \frac{-\cos(ax)}{a} + C.$$

$$6a) \int \cos x dx = \sin x + C.$$

$$6b) \int \cos(ax) dx = \frac{\sin(ax)}{a} + C.$$

$$7) \int \frac{1}{\cos^2 x} dx = \tan x + C.$$

$$8) \int \frac{1}{\sin^2 x} dx = -\cotg x + C.$$

# Základné neurčité integrály

$$9a) \int \frac{1}{1+x^2} dx = \begin{cases} \operatorname{arctg} x + C, \\ -\operatorname{arccotg} x + C. \end{cases}$$

$$9b) \int \frac{1}{a^2+x^2} dx = \frac{1}{a} \operatorname{arctg} \frac{x}{a} + C.$$

$$10a) \int \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \begin{cases} \arcsin x + C \\ -\arccos x + C. \end{cases}$$

$$10b) \int \frac{dx}{\sqrt{a^2-x^2}} = \arcsin \frac{x}{a} + C.$$

$$11) \int \frac{dx}{1-x^2} = \frac{1}{2} \ln \left| \frac{1+x}{1-x} \right| + C.$$

$$12) \int \frac{dx}{\sqrt{x^2+a}} = \ln \left| x + \sqrt{x^2+a} \right| + C.$$

$$13) \int \frac{f'(x)}{f(x)} dx = \ln |f(x)| + C. \quad \text{dôležitý vzorec}$$