Izolované singulárne body

Oľga Stašová

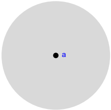
Ústav informatiky a matematiky
Fakulta elektrotechniky a informatiky
Slovenská technická univerzita

letný semester 2023/2024

Diferencovateľnosť a analytickosť v bode

a) Funkcia f je **diferencovateľná** v bode $a \in A$, ak v tomto bode existuje derivácia, t.j. $f'(a)$.

b) Funkcia f je **analytická** v bode $a \in A$, ak existuje okolie $O(a) \subset A$ také, že v každom bode $z \in O(a)$ existuje $f'(z)$.



- **Analytickosť funkcie v bode** je silnejšia vlastnosť ako **diferencovateľnosť funkcie v bode**.
  Napr. funkcia **môže byť diferencovateľná len v jedinom bode** a, ale analytická v ňom nie je, pretože jej derivácia neexistuje v žiadnom inom bode ľubovoľne malého okolia $O(a)$.
- Funkcia **nie je analytická v bodoch jednorozmernej množiny** (keďže okolie v **C** je dvojrozmerný kruh.)
  Napr. funkcia môže byť diferencovateľná v izolovaných bodoch alebo na úsečke, priamke, ale na týchto množinách nie je analytická.

Regulárne a singulárne body funkcie

Analytické (holomorfné) funkcie

- Diferencovateľnosť a analytickosť funkcie **v oblasti** sú zhodné pojmy.
- Funkcia je analytická (a aj diferencovateľná) v oblasti M, ak $f'(z)$ existuje v každom bode $z \in M$,

Definícia

- *Body komplexnej roviny* **C***, v ktorých funkcia* **je analytická** *nazývame regulárne body funkcie.*
- *Body komplexnej roviny* **C***, v ktorých funkcia* **nie je analytická** *nazývame singulárne body (alebo singularity) funkcie.*
  - *Singulárne body sú* **aj body, v ktorých funkcia nie je definovaná** *(keďže v nich neexistuje derivácia funkcie).*

Izolovaný singulárny bod

prstencové okolie: $O_r^{\circ}(a) = \{z \in \mathbf{C}, 0 < |z - a| < r\}$

Definícia

Nech f je analytická funkcia definovaná v prstencovom okolí bodu $a \in \overline{C}$, (a nepatrí $D(f)$). Bod a nazývame izolovaný singulárny bod funkcie f.

Funkciu $f(z)$ môžme rozvinúť v bode $z = a$ na $O_r^{\circ}(a)$ do Laurentovho radu:

$$f(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n (z - a)^n.$$

Typy izolovaných singulárnych bodov

Nech $z = a \in \mathbf{C}$ je **izolovaný singulárny bod** funkcie $f : O_r^\circ(a) \longrightarrow \mathbf{C}$.

- Ak $\lim\limits_{z \longrightarrow a} f(z) = A$, kde A je konečné číslo,
  potom bod $z = a$ nazývame odstrániteľný singulárny bod.
- Ak $\lim\limits_{z \longrightarrow a} f(z) = \infty$,
  potom bod $z = a$ nazývame pól.
- Ak $\lim\limits_{z \longrightarrow a} f(z)$ neexistuje,
  potom bod $z = a$ nazývame podstatne singulárny bod.

Odstrániteľný singulárny bod

Nech $z = a \in \mathbf{C}$ je **izolovaný singulárny bod** funkcie $f : O_r^{\circ}(a) \longrightarrow \mathbf{C}$.

- Ak $\lim\limits_{z \longrightarrow a} f(z) = A$, kde A je konečné číslo, potom bod $z = a$ nazývame odstrániteľný singulárny bod.

Príklad

Funkcia $f : \mathbf{C} \setminus \{0\} \longrightarrow \mathbf{C}$, $f(z) = \dfrac{\sin z}{z}$ *má odstrániteľný singulárny bod v bode* $z = 0$, *pretože*

$$\lim_{z \longrightarrow 0} \frac{\sin z}{z} = 1.$$

Pól

Nech $z = a \in \mathbf{C}$ je **izolovaný singulárny bod** funkcie $f : O_r^\circ(a) \longrightarrow \mathbf{C}$.

- Ak $\lim\limits_{z \longrightarrow a} f(z) = \infty$,
  potom bod $z = a$ nazývame pól.

Príklad

Funkcia $f : \mathbf{C} \setminus \{5i\} \longrightarrow \mathbf{C}$, $f(z) = \dfrac{1}{z - 5i}$ *má pól v bode* $z = 5i$, *pretože*

$$\lim_{z \longrightarrow 5i} \frac{1}{z - 5i} = \infty.$$

Podstatne singulárny bod

Nech $z = a \in \mathbf{C}$ je **izolovaný singulárny bod** funkcie $f : O_r^\circ(a) \longrightarrow \mathbf{C}$.

- Ak $\lim\limits_{z \longrightarrow a} f(z)$ neexistuje,
  potom bod $z = a$ nazývame podstatne singulárny bod.

Príklad

Funkcia $f : \mathbf{C} \setminus \{0\} \longrightarrow \mathbf{C}$, $f(z) = e^{\frac{1}{z}}$ *má podstatne singulárny bod v bode* $z = 0$, *pretože ak* $z \in \mathbf{R}$ *platí*

$$\lim_{z \longrightarrow 0^+} e^{\frac{1}{z}} = e^{\infty} = \infty, \qquad \lim_{z \longrightarrow 0^-} e^{\frac{1}{z}} = e^{-\infty} = \frac{1}{e^{\infty}} = 0$$

a kedže limita zľava a limita sprava sú rôzne, tak

$$\lim_{z \longrightarrow 0} e^{\frac{1}{z}} \ \textit{neexistuje}.$$

Hlavná a analytická časť Laurentovho radu

Definícia

Nech $\ldots, c_{-n}, \ldots, c_{-2}, c_{-1}, c_0, c_1, c_2, \ldots, c_n, \ldots, a$ *sú komplexné čísla (***niektoré z nich môžu byť aj nulové***). Potom rad*

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n(z-a)^n = \sum_{n=-\infty}^{-1} c_n(z-a)^n + \sum_{n=0}^{\infty} c_n(z-a)^n$$

nazývame Laurentov rad v bode a*.*

$$Rad \sum_{n=-\infty}^{-1} c_n(z-a)^n$$

sa nazýva hlavná časť Laurentovho radu.

$$Rad \sum_{n=0}^{\infty} c_n(z-a)^n$$

sa nazýva analytická (regulárna) časť Laurentovho radu.

Laurentov rad a odstrániteľný singulárny bod

Veta

Nech $f(z)$ je analytická v prstencovom okolí $O_r^\circ(a)$ bodu $z = a$. Bod $z = a$ je odstrániteľný singulárny bod funkcie f vtedy a len vtedy ak jej Laurentov rad na $O_r^\circ(a)$ má tvar

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n (z-a)^n.$$

To znamená, že *bod $z = a$ je odstrániteľný singulárny bod funkcie f vtedy a len vtedy ak hlavná časť Laurentovho radu na $O_r^\circ(a)$ má 0 členov.*

Pozn: Ak funkciu $f(z)$, ktorá má v bode $z = a$ odstrániteľný singulárny bod dodefinujeme v tomto bode hodnotou $f(a) = c_0$ potom táto funkcia bude analytická na $O_r(a)$.

Odstrániteľný singulárny bod

Príklad

Funkcia $f : \mathbf{C} \setminus \{0\} \longrightarrow \mathbf{C}$, $f(z) = \dfrac{\sin z}{z}$ *má odstrániteľný singulárny bod v bode* $z = 0$.
Ak ju v tomto bode dodefinujeme pomocou $f(a) = c_0$ *dostaneme analytickú funkciu*

$$f : \mathbf{C} \longrightarrow \mathbf{C},\ f(z) = \begin{cases} \dfrac{\sin z}{z} & pre \quad z \neq 0 \\ 1 \quad pre & z = 0. \end{cases}$$

Tento typ singulárneho bodu sa nazýva odstrániteľný, pretože dodefinovaním funkcie ho vieme odstrániť - funkcia po dodefinovaní bude analytická na celej množine **C**.

Taylorove rady

TAYLOROV RAD

$$f(a) + \frac{f'(a)}{1!}(z-a) + \ldots + \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(z-a)^n + \ldots = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(z-a)^n$$

alebo

$$\begin{aligned}
\sin z &= \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{z^{2n+1}}{(2n+1)!}, \quad \forall z \in \mathbf{C}, \\
\frac{\sin z}{z} &= \frac{1}{z} \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{z^{2n+1}}{(2n+1)!} = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{z^{2n}}{(2n+1)!}
\end{aligned}$$

c_0 je koeficient pri z^0.
z^0 dostaneme pre $n = 0$

keďže $c_n = \dfrac{(-1)^n}{(2n+1)!} \Rightarrow c_0 = \dfrac{(-1)^0}{(2 \cdot 0 + 1)!} = 1.$

Hlavná a analytická časť Laurentovho radu

Definícia

Nech $\ldots, c_{-n}, \ldots, c_{-2}, c_{-1}, c_0, c_1, c_2, \ldots, c_n, \ldots, a$ *sú komplexné čísla (***niektoré z nich môžu byť aj nulové***). Potom rad*

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n(z-a)^n = \sum_{n=-\infty}^{-1} c_n(z-a)^n + \sum_{n=0}^{\infty} c_n(z-a)^n$$

nazývame Laurentov rad v bode a*.*

$$Rad \sum_{n=-\infty}^{-1} c_n(z-a)^n$$

sa nazýva hlavná časť Laurentovho radu.

$$Rad \sum_{n=0}^{\infty} c_n(z-a)^n$$

sa nazýva analytická (regulárna) časť Laurentovho radu.

Laurentov rad a typy izolovaných singulárnych bodov

Veta

Nech $f(z)$ je analytická v prstencovom okolí $O_r^\circ(a)$ bodu $z = a$.

- *Bod $z = a$ je odstrániteľný singulárny bod funkcie f vtedy a len vtedy ak hlavná časť Laurentovho radu na $O_r^\circ(a)$ má 0 členov.*
- *Bod $z = a$ je pól funkcie f vtedy a len vtedy ak hlavná časť Laurentovho radu na $O_r^\circ(a)$ má konečný počet členov.*
- *Bod $z = a$ je podstatne singulárny bod funkcie f vtedy a len vtedy ak hlavná časť Laurentovho radu na $O_r^\circ(a)$ má nekonečne veľa členov.*

Pól m-tého rádu

Veta

Nech $f(z)$ je analytická v prstencovom okolí $O_r^\circ(a)$ bodu $z = a$.
Bod $z = a$ je pól m-tého rádu funkcie f vtedy a len vtedy ak

$$\lim_{z \longrightarrow a} (z-a)^m f(z) \neq 0.$$

To znamená, že ak máme funkciu $f(z)$ analytickú v prstencovom okolí $O_r^\circ(a)$ bodu $z = a$ v tvare

$$f(z) = \frac{h(z)}{(z-a)^m}, \quad h(a) \neq 0,$$

$$\textit{tak} \quad \lim_{z \longrightarrow a} (z-a)^m f(z) = \lim_{z \longrightarrow a} (z-a)^m \frac{h(z)}{(z-a)^m} = \lim_{z \longrightarrow a} h(z) = h(a).$$

Takže bod $z = a$ je pól m-tého rádu takýchto funkcií $f(z)$.

Nulový bod m-tého rádu - príklad

Definícia

Nech $f(z)$ je analytická funkcia v oblasti D ($f(z) \neq 0$).
Nech pre bod $a \in D$ platí

$$f(a) = f'(a) = f''(a) = \cdots = f^{(m-1)}(a) = 0 \quad \text{a} \quad \mathrm{f}^{(\mathrm{m})}(\mathrm{a}) \neq 0.$$

Potom hovoríme, že bod $z = a$ je nulový bod m-tého rádu funkcie $f(z)$.
Ak $m = 1$ hovoríme, že bod $z = a$ je jednoduchý nulový bod funkcie $f(z)$.

Príklad

Nájdite nulové body funkcie $f(z) = \cos z$ a určte ich druh.

Nulový bod m-tého rádu - príklad

Definícia

Nech $f(z)$ *je analytická funkcia v oblasti* D *(*$f(z) \neq 0$*).*
Nech pre bod $a \in D$ *platí*

$$f(a) = f'(a) = f''(a) = \cdots = f^{(m-1)}(a) = 0 \quad \text{a} \quad \mathrm{f}^{(\mathrm{m})}(\mathrm{a}) \neq 0.$$

Potom hovoríme, že bod $z = a$ *je nulový bod m-tého rádu funkcie* $f(z)$*.*
Ak $m = 1$ *hovoríme, že bod* $z = a$ *je jednoduchý nulový bod funkcie* $f(z)$*.*

Príklad

Nájdite nulové body funkcie $f(z) = \cos z$ *a určte ich druh.*

Riešenie:

$$\begin{aligned} z_k &= (2k+1)\frac{\pi}{2}, \quad k = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots \\ \cos' z|_{z_k} &= -\sin\left((2k+1)\frac{\pi}{2}\right) = (-1)^{k+1} \neq 0 \end{aligned}$$

a teda každý nulový bod z_k je jednoduchý t.j. 1-rádu.

Nulový bod m-tého rádu

Definícia

Nech $f(z)$ *je analytická funkcia v oblasti* D *(*$f(z) \neq 0$*).*
Nech pre bod $a \in D$ *platí*

$$f(a) = f'(a) = f''(a) = \cdots = f^{(m-1)}(a) = 0 \quad \text{a} \quad \mathrm{f}^{(\mathrm{m})}(\mathrm{a}) \neq 0.$$

Potom hovoríme, že bod $z = a$ *je nulový bod m-tého rádu funkcie* $f(z)$*.*
Ak $m = 1$ *hovoríme, že bod* $z = a$ *je jednoduchý nulový bod funkcie* $f(z)$*.*

Nech bod $z = a$ je nulový bod m-tého rádu analytickej funkcie $f(z)$.
Potom platí

$$c_0 = f(a) = 0, c_1 = f'(a) = 0, ..., c_{m-1} = \frac{f^{(m-1)}(a)}{(m-1)!} = 0, c_m = \frac{f^{(m)}(a)}{m!} \neq 0$$

a Taylorov rozvoj funkcie $f(z)$ v bode $z = a$ má tvar

$$\begin{aligned} f(z) &= c_m(z-a)^m + c_{m+1}(z-a)^{m+1} + \cdots \\ &= (z-a)^m \left[c_m + c_{m+1}(z-a) + \cdots\right] = (z-a)^m \Phi(z),\ kde\, \Phi(a) \neq 0. \end{aligned}$$

Dostali sme iný **Taylorov rozvoj** a inú **analytickú funkciu** $\Phi(z)$.

Pól m-tého rádu

Veta

Nech bod $z = a$ je nulový bod m-tého rádu funkcie $g(z)$
(t.j. $g(z) = (z - a)^m \Phi(z)$, $\Phi(a) \neq 0$
a Φ je analytická funkcia definovaná na nejakom okolí $O_r(a)$ bodu $z = a$).
Potom bod $z = a$ je pól m-tého rádu funkcie $f = \dfrac{h}{g}$, kde h je analytická funkcia definovaná na $O_r(a)$ a $h(a) \neq 0$.

Pozn. V príkladoch sa často vyskytuje $\Phi(z) = 1$.
Pozn. 2 Ak $m = 1$ hovoríme, že bod $z = a$ je jednoduchý pól.

Pól m-tého rádu - príklad

Veta

Nech bod $z = a$ je nulový bod m-tého rádu funkcie $g(z)$
(t.j. $g(z) = (z-a)^m \Phi(z)$, $\Phi(a) \neq 0$
a Φ je analytická funkcia definovaná na nejakom okolí $O_r(a)$ bodu $z = a$).
Potom bod $z = a$ je pól m-tého rádu funkcie $f = \dfrac{h}{g}$, kde h je analytická funkcia definovaná na $O_r(a)$ a $h(a) \neq 0$.

Príklad

$f : \mathbf{C} \setminus \{-1, 2i\} \longrightarrow \mathbf{C}$, $f(z) = \dfrac{1}{(z-2i)^2(z+1)}$
Nájdite singulárne body a určte ich typ.

Riešenie: Pretože funkcia $g(z) = (z-2i)^2(z-(-1))$ má

- v bode $z = 2i$ nulový bod 2-rádu, tak bod $z = 2i$ je pól 2-rádu,
- v bode $z = -1$ jednoduchý nulový bod,
  tak bod $z = -1$ je jednoduchý pól.

Podstatne singulárny bod - príklad

Veta

Nech $f(z)$ je analytická v prstencovom okolí $O_r^\circ(a)$ bodu $z = a$.

- *Bod $z = a$ je podstatne singulárny bod funkcie f vtedy a len vtedy ak hlavná časť Laurentovho radu na $O_r^\circ(a)$ má nekonečne veľa členov.*

Príklad

$f : \mathbf{C} \setminus \{0\} \longrightarrow \mathbf{C}$, $f(z) = e^{\frac{1}{z}}$

Určte typ singulárneho bodu $z = 0$.

Riešenie:

$$e^z = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!}, \quad \forall z \in \mathbf{C} \qquad Pozn. \left(z^{-1}\right)^n = z^{-1 \cdot n} = z^{-n}$$

$$f(z) = e^{\frac{1}{z}} = e^{z^{-1}} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^{-n}}{n!}, \quad \forall z \in \mathbf{C} \setminus \{0\} = P(0, 0, \infty), \ (|z| > 0),$$

teda hlavná časť Laurentovho radu má nekonečne veľa členov
a to implikuje fakt, že bod $z = 0$ je podstatne singulárny bod.

Vzorce

$$\left(z^{-1}\right)^n = z^{-1\cdot n} = z^{-n}$$

$$\begin{aligned} (z^a)^b &= z^{a\cdot b} = z^{b\cdot a} = (z^b)^a \\ z^{a+b} &= z^a z^b \end{aligned}$$

Ďakujem za pozornosť.