Integrály - úvod

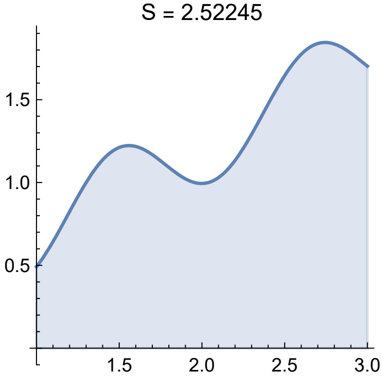
Oľga Stašová

Ústav informatiky a matematiky
Fakulta elektrotechniky a informatiky
Slovenská technická univerzita

letný semester 2023/2024

Motivácia

- **Určitý integrál** nezápornej funkcie $f(x)$ od bodu a po bod b **je rovný obsahu rovinnej oblasti** ohraničenej priamkami $x = a$, $x = b$, osou x a grafom funkcie $f(x)$.



História

- **Herodotos** (najstarší grécky historik) v 5. storočí pred n. l. opísal situáciu zdaňovania poľnohospodárskej pôdy v Egypte. Dane sa platili podľa plošnej veľkosti, ale rieka Níl menila svoje povodie a vyberačí daní potrebovali poznať aktuálnu veľkosť pozemkov.

História

- **Herodotos** (najstarší grécký historik) v 5. storočí pred n. l. opísal situáciu zdaňovania poľnohospodárskej pôdy v Egypte. Dane sa platili podľa plošnej veľkosti, ale rieka Níl menila svoje povodie a vyberačí daní potrebovali poznať aktuálnu veľkosť pozemkov.
- Princíp určovania obsahu útvarov so zakrivenými hranicami sa pripisuje Platónovmu žiakovi Eudoxovi. Plošný obsah rovinného útvaru s krivočiarou hranicou sa **Eudoxos** snažil určiť tak, že do útvaru postupne vpisoval mnohouholníky, ktorých obsah starovekí Gréci vedeli vypočítať.

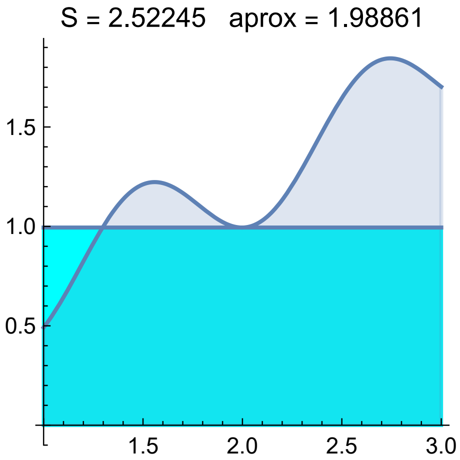
História

- **Herodotos** (najstarší grécky historik) v 5. storočí pred n. l. opísal situáciu zdaňovania poľnohospodárskej pôdy v Egypte. Dane sa platili podľa plošnej veľkosti, ale rieka Níl menila svoje povodie a vyberačí daní potrebovali poznať aktuálnu veľkosť pozemkov.
- Princíp určovania obsahu útvarov so zakrivenými hranicami sa pripisuje Platónovmu žiakovi Eudoxovi. Plošný obsah rovinného útvaru s krivočiarou hranicou sa **Eudoxos** snažil určiť tak, že do útvaru postupne vpisoval mnohouholníky, ktorých obsah starovekí Gréci vedeli vypočítať.
- Princípy integrovania sformulovali v 17. storočí nezávisle **Isaac Newton** a **Gottfried Leibniz**. Obidvaja integrál považovali za nekonečnú sumu obdĺžnikov veľmi malej šírky.

História

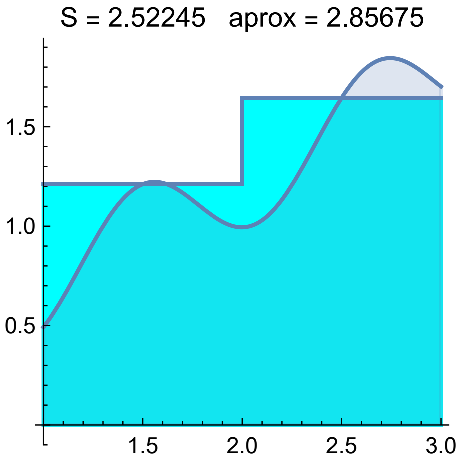
- **Herodotos** (najstarší grécký historik) v 5. storočí pred n. l. opísal situáciu zdaňovania poľnohospodárskej pôdy v Egypte. Dane sa platili podľa plošnej veľkosti, ale rieka Níl menila svoje povodie a vyberačí daní potrebovali poznať aktuálnu veľkosť pozemkov.
- Princíp určovania obsahu útvarov so zakrivenými hranicami sa pripisuje Platónovmu žiakovi Eudoxovi. Plošný obsah rovinného útvaru s krivočiarou hranicou sa **Eudoxos** snažil určiť tak, že do útvaru postupne vpisoval mnohouholníky, ktorých obsah starovekí Gréci vedeli vypočítať.
- Princípy integrovania sformulovali v 17. storočí nezávisle **Isaac Newton** a **Gottfried Leibniz**. Obidvaja integrál považovali za nekonečnú sumu obdĺžnikov veľmi malej šírky.
- Matematickú definíciu integrálov predstavil o 200 rokov neskôr **Bernhard Riemann**.... Riemannov integrál.

Motivácia - integrálny súčet



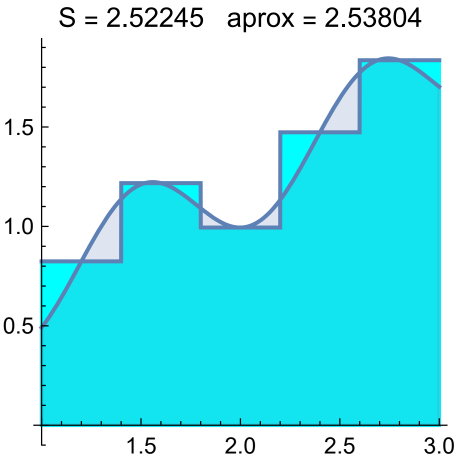
Obr.: Aproximácia obsahu oblasti, n=1

Motivácia - integrálny súčet



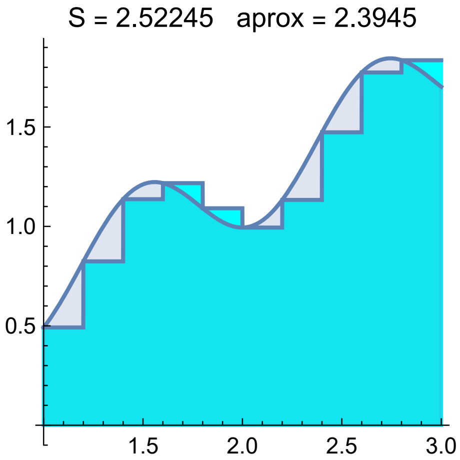
Obr.: Aproximácia obsahu oblasti, n=2

Motivácia - integrálny súčet



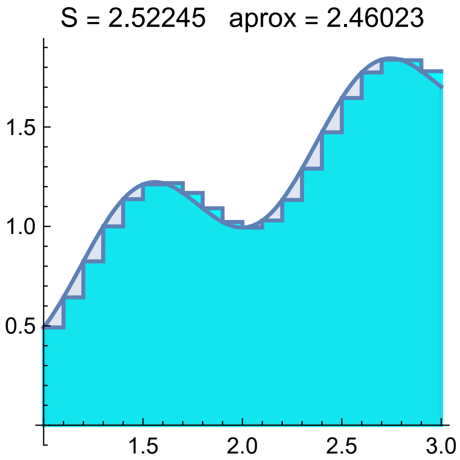
Obr.: Aproximácia obsahu oblasti, n=5

Motivácia - integrálny súčet



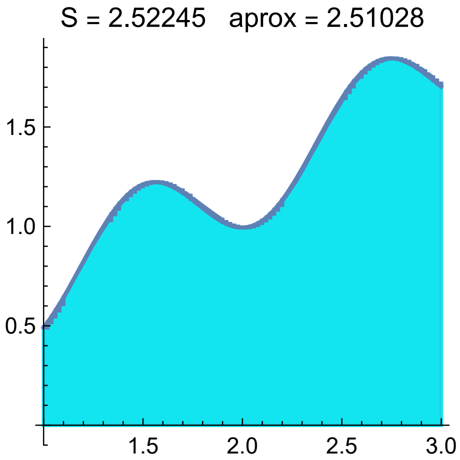
Obr.: Aproximácia obsahu oblasti, n=10

Motivácia - integrálny súčet



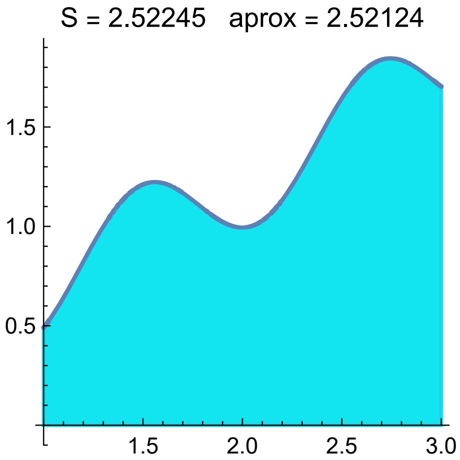
Obr.: Aproximácia obsahu oblasti, n=20

Motivácia - integrálny súčet



Obr.: Aproximácia obsahu oblasti, n=100

Motivácia - integrálny súčet



Obr.: Aproximácia obsahu oblasti, n=1000

Motivácia

Obr.: Výpočet obsahu plochy nepravidelného tvaru

Motivácia

Obr.: Výpočet obsahu povrchu rotačnej plochy.

Motivácia

Obr.: Výpočet objemu rotačného telesa

Motivácia

Obr.: Výpočet momentu zotrvačnosti

Motivácia

Obr.: Výpočet práce potrebnej na premiestnenie nákladu

Motivácia

Obr.: Výpočet súradníc ťažiska

Motivácia - pri riešení dif. rovníc

Diferenciálne rovnice

● Obsahujú premennú x, neznámu funkciu $u(x)$ (ktorú hľadáme) a jej **derivácie**, prípadne aj ďalšie (známe) funkcie premennej x.
● Využívajú sa v situáciách, keď hľadáme nejakú funkciu, ktorú síce nepoznáme, ale poznáme jej vzťah s jej deriváciami.
● Pri ich riešení sa používajú **derivácie** a **integrály**.

Motivácia - pri riešení dif. rovníc

Jeden typ diferenciálnej rovnice

$$-\frac{d}{dx}\left(a(x)\frac{du(x)}{x}\right) = q(x),\ x \in (0, L) + okraj.\ podm.$$

u(x) - neznáma funkcia,
a(x) - materiálový koeficient,
q(x) - zdroj.

Táto dif. rovnica reprezentuje napr. priehyb nosníka, pozdĺžnu deformáciu nosníka, vedenie tepla, prúdenie cez potrubie, prúdenie v pórovitom prostredí, difúziu,...

Motivácia - pri riešení dif. rovníc

Príklady jej aplikácií

Priehyb nosníka

u(x) - priehyb nosníka,
a(x) - tuhosť nosníka,
q(x) - zaťaženie v kolmom smere.

Vedenie tepla

u(x) - teplota,
a(x) - koeficient tepel. vodivosti,
q(x) - intenzita zdrojov tepla.

Motivácia - integrál z funkcie komplexnej premennej

Rezíduum

Nech $f : D(\subset \mathbf{C}) \to \mathbf{C}$ je analytická s výnimkou izolovaného singulárneho bodu $z = a$. Potom hodnotu $\frac{1}{2\pi i}\int_C f(z)\,dz$, kde C je jednoduchá, po častiach hladká uzavretá kladne orientovaná krivka, taká že $a \subset IntC$ (interior $=$ vnútro krivky C); nazývame rezíduum funkcie $f(z)$ v bode $z = a$ a označujeme $res_{z=a}\, f(z) = \frac{1}{2\pi i}\int_C f(z)\,dz$.

Pojem rezíduum je veľmi dôležitým pojmom v **teórii funkcií komplexnej premennej** (a tak isto aj v **elektrotechnike** a vo **Vašich odborných predmetoch**).
Môžeme ho prirovnať:
k používaniu pojmu Ludolfovho čísla $\pi \doteq 3,14$ v geometrii alebo
k používaniu pojmu Eulerovho čísla $e \doteq 2,718$ v štatistike a finančníctve.

Motivácia - integrál z funkcie komplexnej premennej

Transformácie

Téma poslednej prednášky predmetu **MAT2** sú **Rezídua**. Využívajú v mnohých praktických aplikáciách, napr. pri transformáciách.
6 z 12 prednášok predmetu **MAT3** sú **Transformácie**: Laplaceova, Fourierova a Z-transformácia.
Tieto transformácie budete používať na odborných predmetoch, najviac budete používať Laplaceovu.

Pri transformáciách **funkcie transformujeme** (meníme podľa nejakých pravidiel a za nejakých predpokladov) **na iné funkcie**, s ktorými sa jednoduchšie pracuje.
Funkcie (**originály**) sa transformujú na iné funkcie (**obrazy**).
Potom sa vyrieši príklad, v ktorom sú funkcie **obrazy** a vypočítané riešenie sa spätne transformuje. Toto **spätne transformované riešenie** je riešením pôvodného príkladu, v ktorom boli funkcie (**originály**).

Pre študentov, ktorí chcú vedieť viac.

Toto sa skúšať nebude.

Iné typy integrálov

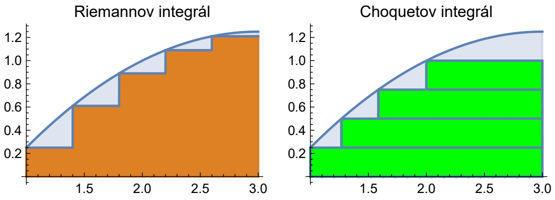
- Predmetom matematiky na Fei je len Riemannov integrál, ale existujú aj iné typy integrálov.

Iné typy integrálov

- Predmetom matematiky na Fei je len Riemannov integrál, ale existujú aj iné typy integrálov.
- Lebesgueov integrál používa namiesto dĺžky intervalu mieru intervalu a umožňuje integrovať oveľa širšiu triedu funkcií ako Riemannov. Každá ohraničená merateľná funkcia je lebesgueovsky integrovateľná, ale **nemusí byť** riemannovsky integrovateľná.
  Lebesgueov integrál sa využíva napr. v kvantovej mechanike.

Iné typy integrálov

- Predmetom matematiky na Fei je len Riemannov integrál, ale existujú aj iné typy integrálov.
- Lebesgueov integrál používa namiesto dĺžky intervalu mieru intervalu a umožňuje integrovať oveľa širšiu triedu funkcií ako Riemannov. Každá ohraničená merateľná funkcia je lebesgueovsky integrovateľná, ale **nemusí byť** riemannovsky integrovateľná.
Lebesgueov integrál sa využíva napr. v kvantovej mechanike.
- Choquetov integrál

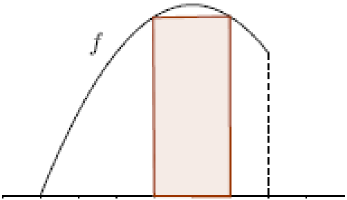


Iné typy integrálov

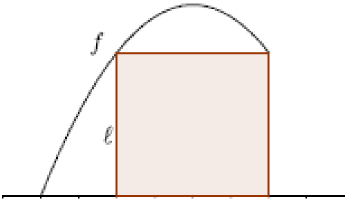
- Šípošov integrál (Rozšírenie Choquetovho) umožnilo Danielovi Kahnemanovi získať v roku 2002 Nobelovu cena za ekonómiu.

Iné typy integrálov

- Šípošov integrál (Rozšírenie Choquetovho) umožnilo Danielovi Kahnemanovi získať v roku 2002 Nobelovu cena za ekonómiu.
- Výsledkom Shilkretovho integrálu je najväčší možný vpísaný obdĺžnik.
- Výsledkom Sugenovho integrálu je dĺžka strany najväčšieho možného vpísaného štvorca.



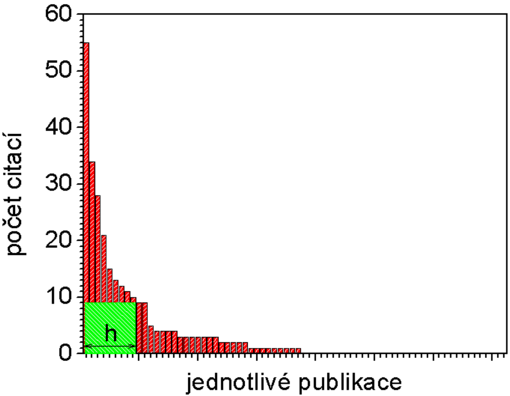
Shilkretov integrál (1971)



Sugenov integrál (1974)

Iné typy integrálov

Sugenov integrál sa využíva napr. pri určovaní h-indexu vedeckých pracovníkov. Hirschov index (h-index) udáva, koľko článkov daného autora má počet citácií vyšší alebo rovný, ako je poradové číslo článku v poradí zoradenom podľa počtu citácií.



Ďakujem za pozornosť.