Integrálny počet funkcií komplexnej premennej

Oľga Stašová

Ústav informatiky a matematiky
Fakulta elektrotechniky a informatiky
Slovenská technická univerzita

letný semester 2023/2024

Parametrizácia krivky

Komplexnú funkciu reálnej premennej

$$\varphi : \langle \alpha, \beta \rangle \longrightarrow \mathbf{C}$$

môžeme vyjadriť v tvare

$$\varphi(t) = x(t) + i\, y(t),$$

kde $x, y : \langle \alpha, \beta \rangle \longrightarrow \mathbf{R}$
sú reálne funkcie reálnej premennej $t \in \langle \alpha, \beta \rangle \longrightarrow \mathbf{R}$.

Hovoríme, že funkcia $\varphi : \langle \alpha, \beta \rangle \longrightarrow \mathbf{C}$ je spojitá, ak sú funkcie $x, y : \langle \alpha, \beta \rangle \longrightarrow \mathbf{R}$ spojité.

Parametrizácia krivky

Definícia

Nech $\varphi : \langle \alpha, \beta \rangle \longrightarrow$ **C** *je spojitá funkcia. Obraz intervalu* $\langle \alpha, \beta \rangle$ *pomocou funkcie* φ*, t.j. množina* $C = \varphi(\langle \alpha, \beta \rangle)$ *sa nazýva* **krivka** *v komplexnej rovine.*

- *Funkciu* $\varphi : \langle \alpha, \beta \rangle \longrightarrow$ **C**, $\varphi(t) = x(t) + i\, y(t)$ *nazývame parametrizáciou (parametrickou rovnicou) krivky C.*
- *Krivka môže mať viac (aj nekonečne veľa) parametrizácií.*
- *Bod* $\varphi(\alpha)$ *sa nazýva začiatočný bod a* $\varphi(\beta)$ *koncový bod krivky C.*
- *Ak* $\varphi : \langle \alpha, \beta \rangle \longrightarrow$ **C** *je injektívna, potom hovoríme, že C je* **jednoduchá krivka** *(t.j. nemá samoprieniky).*
- *Ak* $\varphi(\alpha) = \varphi(\beta)$*, potom C je* **uzavretá krivka**.
- *Ak je krivka C s parametrizáciou* $\varphi : \langle \alpha, \beta \rangle \longrightarrow$ **C jednoduchá** *a* **uzavretá**, *nazývame ju Jordanova (čítaj Žordanova) krivka.*

Jordanova veta

Pozn. Jordanova veta hovorí, že jednoduchá uzavretá krivka C delí komplexnú rovinu na dve súvislé množiny, ktoré sa nepretínajú: ohraničenú (**vnútro krivky - IntC**) a neohraničenú (**vonkajšok krivky - ExtC**).

- Nech $a, b \in$ **C**, potom $\varphi : \langle 0, 1\rangle \longrightarrow$ **C**, $\varphi(t) = a + t(b - a)$ je parametrizáciou jednoduchej krivky C - úsečky spájajúcej body a a b.
- Funkcia $\varphi : \langle 0, 2\pi\rangle \longrightarrow$ **C**, $\varphi(t) = cos\, t + i\, sin\, t = e^{it}$ je parametrizáciou **jednoduchej uzavretej** krivky C - kružnice s polomerom 1 a stredom v začiatku súradnicovej sústavy.
  Všimnite si, že $\varphi(0) = \varphi(2\pi)$.
- Funkcia $\varphi : \langle 0, 4\pi\rangle \longrightarrow$ **C**, $\varphi(t) = 3cos\, t + 3i\, sin\, t = 3e^{it}$ je tiež parametrizáciou kružnice, ale s polomerom 3 a stredom v začiatku súradnicovej sústavy. Táto krivka je tiež **uzavretá** $\varphi(0) = \varphi(4\pi)$, nie je však jednoduchá, pretože napr. $\varphi(\frac{\pi}{2}) = \varphi(\frac{5\pi}{2})$.

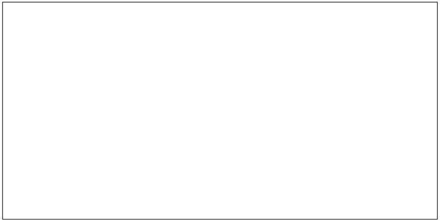
Ďalšie príklady parametrizácii nájdete v pdf **21a_parametrizacie**.

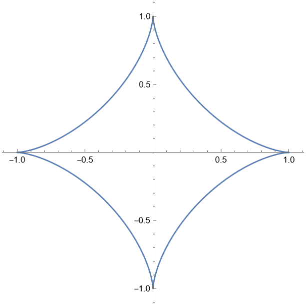
Hladké a po častiach hladké krivky

Definícia

Ak funkcia $\varphi : \langle \alpha, \beta \rangle \longrightarrow \mathbf{C}$ *je taká, že* $\forall t \in \langle \alpha, \beta \rangle$ *je funkcia* $\varphi'(t)$ *spojitá a* $\varphi'(t) \neq 0$, *tak krivku C nazývame hladká krivka.*

V hladkej krivke sa nevyskytujú **body vratu**. Napr. vrcholy v krivke, ktorú tvoria hranice obdĺžnika alebo vrcholy asteroidy sú body vratu.



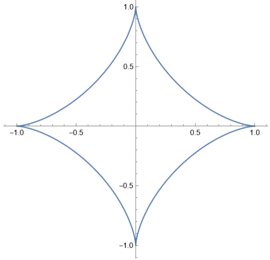


Hladké a po častiach hladké krivky

V hladkej krivke sa nevyskytujú **body vratu**. Napr. vrcholy v krivke, ktorú tvoria hranice obdĺžnika alebo vrcholy asteroidy sú body vratu.

- Vo vrcholoch obdĺžnika **neexistuje derivácia**, pretože derivácie na úsečkách (stranách obdĺžnika) sú rôzne.
- Vo vrcholoch asteroidy $\varphi : \langle 0, 2\pi \rangle \longrightarrow$ **C**, $\varphi = cos^3 t + isin^3 t$ je **nulová derivácia**, pretože $\varphi'(t) = -3cos^2 t sin\, t + 3isin^2 t cos\, t$ má nulovú hodnotu v bodoch $t = 0,\ \frac{\pi}{2},\ \pi,\ \frac{3\pi}{2},\ 2\pi$.

Takže tieto krivky nie sú hladké. Sú však **po častiach hladké.**



Delenie krivky C na čiastočné krivky C_k

Delenie krivky.

- Nech $\varphi : \langle \alpha, \beta \rangle \longrightarrow \mathbf{C}$ je parametrizáciou krivky C.
- Nech P je delenie intervalu $\langle \alpha, \beta \rangle$,
  $P = \{a = t_0 < t_1 < t_2 < \cdots < t_p = \beta\}$
- Potom každému bodu $t_k \in \langle \alpha, \beta \rangle$ odpovedá bod $\varphi(t_k) = z_k \in C$.
- Potom $Q = \{z_k; k = 0, 1, 2, ..., p\}$ nazývame delenie krivky C.
- Funkcie $\varphi_k : \langle t_{k-1}, t_k \rangle \longrightarrow \mathbf{C}$, $\varphi_k(t) = \varphi(t)$, $k = 1, 2, 3, ..., p$ sú parametrizáciami čiastočných kriviek C_k so začiatočnými bodmi $\varphi_k(t_{k-1})$ a koncovými bodmi $\varphi_k(t)$, $k = 1, 2, 3, ..., p$ krivky C.

Grafické znázornenie delenia krivky nájdete v pdf **21b_Delenie_krivky**.

Hladké a po častiach hladké krivky

Definícia

Nech $\varphi : \langle \alpha, \beta \rangle \longrightarrow \mathbf{C}$ *je parametrizáciou krivky C. Ak existuje delenie intervalu* $\langle \alpha, \beta \rangle$, *t.j.* $P = \{a = t_0 < t_1 < t_2 < \cdots < t_p = \beta\}$ *také, že čiastočné krivky* C_k *s parametrizáciami*

$$\varphi_k : \langle t_{k-1}, t_k \rangle \longrightarrow \mathbf{C},\ \varphi_k(t) = \varphi(t),\ k = 1, 2, 3, ..., p$$

sú hladké funkcie, potom sa krivka C nazýva po častiach hladká krivka.

Budeme pracovať len s krivkami hladkými alebo po častiach hladkými.

Definícia integrálu

Definícia

Nech $\varphi : \langle \alpha, \beta \rangle \longrightarrow \mathbf{C}$, $\varphi = x(t) + i\, y(t)$ *je parametrizáciou krivky C.* *Nech* $f : A(\subset \mathbf{C}) \longrightarrow \mathbf{C}$ *je spojitá funkcia, ktorej definičný obor obsahuje krivku* C, $C \subset A$. *Potom integrál z funkcie* f

- *po hladkej krivke* C *je definovaný*

$$\int_C f(z)dz = \int_\alpha^\beta f(\varphi(t))\varphi'(t)dt.$$

- *po po častiach hladkej krivke* C *je definovaný*

$$\int_C f(z)dz = \sum_{k=1}^{p} \int_{t_{k-1}}^{t_k} f(\varphi(t))\varphi'(t)dz.$$

Vlastnosti integrálu

- **Linearita**
  Nech c_1, $c_2 \in \mathbf{C}$, C je po častiach hladká krivka a f_1 a f_2 sú funkcie spojité na $\mathbf{C}$. Potom

$$\int_C (c_1 f_1(z) + c_2 f_2(z))\,\mathrm{d}z \quad = \quad c_1 \int_C f_1(z)\,\mathrm{d}z + c_2 \int_C f_2(z)\,\mathrm{d}z.$$

- **Integrál po krivke** $C = C_1 + C_2$
  Nech $\varphi_1 : \langle \alpha, \beta \rangle \longrightarrow \mathbf{C}$, $\quad \varphi_2 : \langle \beta, \gamma \rangle \longrightarrow \mathbf{C}$ sú parametrizácie po častiach hladkých kriviek C_1 a C_2, pričom platí $\varphi_1(\beta) = \varphi_2(\beta)$ a ak definujeme parametrizáciu

$$\varphi(t) = \begin{cases} \varphi_1(t) & \text{ak } t \in \langle \alpha, \beta \rangle \\ \varphi_2(t) & \text{ak } t \in \langle \beta, \gamma \rangle \end{cases}$$

  krivky $C = C_1 + C_2$, potom ak f je funkcia spojitá na C, tak

$$\int_C f(z)\,\mathrm{d}z = \int_{C_1} f(z)\,\mathrm{d}z + \int_{C_2} f(z)\,\mathrm{d}z.$$

Vlastnosti integrálu

- **Integrál po krivke C^- opačnej ku krivke C.**
  Ak $\varphi : \langle \alpha, \beta \rangle \longrightarrow \mathbf{C}$ je parametrizácia po častiach hladkej krivky C a funkcia $\varphi^- : \langle -\beta, -\alpha \rangle \longrightarrow \mathbf{C}$, taká, že $\varphi^-(t) = \varphi(-t)$, potom hovoríme, že krivka C^- je opačná ku krivke C. Ak f je spojitá na C. Potom

$$\int_{C^-} f(z)\,\mathrm{d}z = -\int_C f(z)\,\mathrm{d}z.$$

- **Nezávislosť integrálu od parametrizácie**
  Krivka môže mať viac (aj nekonečne veľa) parametrizácií, ale bez ohľadu na to, ktorú parametrizáciu použijeme, dostaneme pre integrál $\int_C f(z)\,\mathrm{d}z$ rovnaký výsledok, pretože **nezávisí od parametrizácie**.

Príklad

Príklad

Vypočítajte $\int_C (z+5)\,\mathrm{d}z$, *kde* C *je krivka tvorená oblúkom kružnice a úsečkou.*
Oblúk kružnice: $|z| = 4$, $(Re\, z \geq 0) \wedge (Im\, z \geq 0)$ *od bodu* $4i$ *po bod* 4.
Úsečka: od bodu 4 *po bod* 2.
Nakreslite obrázok.

Riešenie: (Príklad budem riešiť (a vysvetľovať) na prednáške.)

Ďakujem za pozornosť.