Taylorove rady

Oľga Stašová

Ústav informatiky a matematiky
Fakulta elektrotechniky a informatiky
Slovenská technická univerzita

letný semester 2023/2024

Analytickosť súčtu mocninového radu

Veta

Ak mocninový rad $\sum_{n=0}^{\infty} c_n(z-a)^n$ *má polomer konvergencie* $R > 0$. *Potom jeho súčet*

$$f : K(a,R) \longrightarrow \mathbf{C},\ f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n(z-a)^n$$

je analytická funkcia a platí

$$f' : K(a,R) \longrightarrow \mathbf{C},\ f'(z) = \sum_{n=1}^{\infty} n\, c_n(z-a)^{n-1}.$$

Analytickosť súčtu mocninového radu

Veta

Ak mocninový rad $\sum_{n=0}^{\infty} c_n (z-a)^n$ *má polomer konvergencie* $R > 0$*. Potom jeho súčet*

$$f : K(a,R) \longrightarrow \mathbf{C},\ f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n (z-a)^n$$

má derivácie všetkých rádov a platí

$$f^{(k)} : K(a,R) \longrightarrow \mathbf{C},\ f^{(k)}(z) = \sum_{n=k}^{\infty} n(n-1)...(n-k+1) c_n (z-a)^{n-k}$$

$$a \qquad f^{(k)}(a) = k! c_k \quad alebo \quad c_k = \frac{f^{(k)}(a)}{k!}.$$

Súčet funkcionálného radu

Veta

Nech funkcionálny rad funkcií komplexnej premennej $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(z)$ *rovnomerne konverguje na* C, *kde* $C : \varphi : \langle \alpha, \beta \rangle \longrightarrow \mathbf{C}$ *je jednoduchá, po častiach hladká krivka. Ak sú funkcie* $f_n(z)$, $n = 1, 2, 3, \ldots$ *spojité na* C *a ak* $f : C \longrightarrow \mathbf{C}$, $f(z) = \sum_{n=1}^{\infty} f_n(z)$ *je ich súčet, tak tento súčet je tiež spojitá funkcia a platí:*

$$\int_C f(z)dz = \sum_{n=1}^{\infty} \int_C f_n(z).$$

Taylorove rady

Z predchádzajúcim slajdov vieme, že súčet mocninového radu, ktorý je konvergentný v kruhu K(a,R) je analytická funkcia v tomto kruhu. Ukážeme, že platí aj obrátené tvrdenie.

Definícia

*Nech má funkcia komplexnej premennej f v bode $a \in$ **C** derivácie všetkých rádov. Potom mocninový rad*

$$f(a) + \frac{f'(a)}{1!}(z-a) + \dots + \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(z-a)^n + \dots = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(z-a)^n$$

nazývame Taylorovým radom funkcie f v bode a.

Taylorove rady

Definícia

Nech f *je analytická funkcia v oblasti* D*. Nech* $a \in D$ *a* $K(a, R) \subset D$*. Potom existuje mocninový rad (t.j.* $f(z)$ *sa dá rozvinúť do mocninového radu)*

$$\sum_{n=0}^{\infty} c_n (z-a)^n$$

taký, že

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n (z-a)^n \, pre \, \forall z \in K(a, R),$$

pričom

$$c_n = \frac{1}{2\pi i} \int_C \frac{f(\xi)}{(\xi - a)^{n+1}} d\xi$$

kde C *je jednoduchá, po častiach hladká uzavretá krivka, kladne orientovaná, ktorá leží v* $K(a, R)$ *tak, že* $a \in Int C$*.*

Taylorove rady

Veta

Nech f je analytická funkcia v oblasti D, potom f má v každom bode z D derivácie všetkých rádov. Ak $K(a, R) \subset D$, potom

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(z-a)^n, \, pre \, \forall z \in K(a, R).$$

Príklad

Príklad

Nájdite Taylorov rozvoj funkcie $exp : \mathbf{C} \longrightarrow \mathbf{C}$, $f(z) = e^z$ *v bode* $a = 0$.

TAYLOROV RAD

$$f(a) + \frac{f'(a)}{1!}(z-a) + ... + \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(z-a)^n + ... = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(z-a)^n$$

Riešenie: $f(z) = e^z$ je analytická funkcia v **C** a pre každú jej deriváciu platí:

$$f^{(n)}(z) = e^z.$$

Po dosadení derivácií do vzorca pre všeobecný Taylorov rad dostaneme:

$$e^0 + \frac{e^0}{1!}(z-0) + \frac{e^0}{2!}(z-0)^2 + ... + \frac{e^0}{n!}(z-0)^n + ... =$$

$$= 1 + \frac{z}{1!} + \frac{z^2}{2!} + ... + \frac{z^n}{n!} + ... = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!}$$

Príklad

Príklad
Nájdite Taylorov rozvoj funkcie $exp : \mathbf{C} \longrightarrow \mathbf{C},\ f(z) = e^z$ *v bode* $a = 0$.

TAYLOROV RAD

$$f(a) + \frac{f'(a)}{1!}(z-a) + \dots + \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(z-a)^n + \dots = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(z-a)^n$$

Riešenie: $f(z) = e^z$ je analytická funkcia v $\mathbf{C}$ a pre každú jej deriváciu platí:

$$f^{(n)}(z) = e^z.$$

Po dosadení derivácií do vzorca pre všeobecný Taylorov rad dostaneme:

$$1 + \frac{z}{1!} + \frac{z^2}{2!} + \dots + \frac{z^n}{n!} + \dots = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!},$$

ktorý konverguje v kruhu $K(0, \infty) = \mathbf{C}$ a teda platí

$$exp\, z = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!},\ \forall z \in \mathbf{C}.$$

Podobným spôsobom vieme odvodiť aj Taylorove rady pre iné funkcie.

Taylorove rady

Budeme používať Taylorove rady nasledujúcich funkcií.

Definícia

$$
\begin{aligned}
exp\, z &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!}, && \forall z \in \mathbf{C}, && (1)\\
sin\, z &= \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{z^{2n+1}}{(2n+1)!}, && \forall z \in \mathbf{C}, && (2)\\
cos\, z &= \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{z^{2n}}{(2n)!}, && \forall z \in \mathbf{C}, && (3)\\
\frac{1}{1-z} &= \sum_{n=0}^{\infty} z^n, && \forall z \in K(0,1). && (4)
\end{aligned}
$$

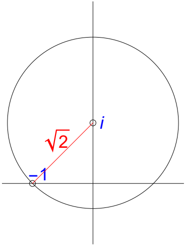
Príklad

Príklad

Nájdite Taylorov rozvoj funkcie $f : \mathbf{C} \setminus \{-1\} \longrightarrow \mathbf{C}$, $f(z) = \dfrac{1}{1+z}$ *v bode* $a = i$.

Nakreslíme kruh so stredom v i s maximálnym polomerom takým, aby -1 neležalo vnútri kruhu (na kružnici môže ležať). Polomer je z Pytagorovej vety $\sqrt{2}$.

$$a^2 + b^2 = r^2 \Rightarrow r = \sqrt{a^2 + b^2} = \sqrt{1^2 + 1^2} = \sqrt{2}.$$



$f(z)$ bude konvergovať na $K(i, \sqrt{2})$.

Príklad

Príklad
Nájdite Taylorov rozvoj funkcie $f : \mathbf{C} \setminus \{-1\} \longrightarrow \mathbf{C}$, $f(z) = \dfrac{1}{1+z}$ *v bode* $a = i$.

Hľadáme $f(z) = \dfrac{1}{1+z} = \sum_{n=0}^{\infty} c_n (z-i)^n$.

Použijeme: $\dfrac{1}{1-z} = \sum_{n=0}^{\infty} z^n, \quad \forall z \in K(0,1) \ldots\ldots z \in K(0,1) \Leftrightarrow |z| < 1$

$$\frac{1}{1+z} = \frac{1}{(1+i)+(z-i)} = \frac{1}{(1+i)\left(\frac{1+i}{1+i} + \frac{z-i}{1+i}\right)} = \frac{1}{1+i}\frac{1}{1-\left(-\frac{z-i}{1+i}\right)}$$

Ak budeme predpokladať, že

$$\left|-\frac{z-i}{1+i}\right| = \left|\frac{z-i}{1+i}\right| < 1 \Leftrightarrow |z-i| < |1+1\cdot i| = \sqrt{1^2+1^2} = \sqrt{2},$$

t.j. $|z-i| < \sqrt{2} \ldots\ldots z \in K(i, \sqrt{2})$.

Príklad

Príklad

Nájdite Taylorov rozvoj funkcie $f : \mathbb{C} \setminus \{-1\} \longrightarrow \mathbb{C}$, $f(z) = \dfrac{1}{1+z}$ *v bode* $a = i$.

Hľadáme $f(z) = \dfrac{1}{1+z} = \sum\limits_{n=0}^{\infty} c_n (z - i)^n$.

Použijeme: $\dfrac{1}{1-z} = \sum\limits_{n=0}^{\infty} z^n, \quad \forall z \in K(0,1) \ldots\ldots z \in K(0,1) \Leftrightarrow |z| < 1$

$$\frac{1}{1+z} = \frac{1}{(1+i)+(z-i)} = \frac{1}{(1+i)\left(\frac{1+i}{1+i} + \frac{z-i}{1+i}\right)} = \frac{1}{1+i}\frac{1}{1-\left(-\frac{z-i}{1+i}\right)}$$

Potom pomocou Taylorovho radu (4) za predpokladu $|z - i| < \sqrt{2}$ dostaneme

$$f(z) \quad = \quad \frac{1}{1+i}\sum_{n=0}^{\infty}\left(-\frac{z-i}{1+i}\right)^n = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{(1+i)^{n+1}}(z-i)^n, \; \forall z \in K(i, \sqrt{2}).$$

Ďakujem za pozornosť.