

Construire tous les plans de sondage déterminantaux

Vincent Loonis*

Résumé

Dans cet article, nous utilisons la méthode de Fickus et collab. (2013) pour définir une paramétrisation maniable des noyaux de tous les plans de sondages déterminantaux à probabilités d’inclusion fixées. Pour des valeurs spécifiques du paramètre, nous parvenons à une formulation explicite de certains noyaux. En particulier, nous établissons une relation directe entre la méthode de Fickus et collab. (2013) et la famille de matrices P^Π de Loonis et Mary (2019), conférant aux plans de sondage déterminantaux associés à ces matrices un statut particulier. Sur la base de ces éléments, et de simulations, nous conjecturons la forme fonctionnelle prise par la borne inférieure de la variance de l’estimateur d’Horvitz et Thompson (1952) pour un plan de sondage à probabilités d’inclusion simple fixées. Cette borne joue alors un rôle similaire à celui de la borne de Fréchet-Darmois-Cramer-Rao pour la statistique inférentielle classique.

Mots-clés. Processus déterminantal, Borne de Fréchet-Darmois-Cramer-Rao, frame, plan de sondage déterminantal

Introduction

Un plan de sondage est une loi de probabilité sur l’ensemble 2^U des parties, appelées échantillons, d’une population finie U de taille N , indexée par $k = 1, \dots, N$. Une variable aléatoire dont la loi est un plan de sondage est notée \mathbb{S} . Les plans de sondage déterminantaux forment une famille de plans paramétrée par les matrices hermitiennes contractantes, c’est à dire les matrices hermitiennes dont les valeurs propres sont comprises entre 0 et 1 (Macchi (1975), Soshnikov (2000), Loonis et Mary (2019)). Pour une telle matrice K de taille $(N \times N)$, appelée noyau, $DSD(K)$ désigne le plan déterminantal associé. Ces plans jouissent de propriétés statistiques, théoriques et empiriques, variées. Seules celles en lien direct avec l’objet de cet article sont succinctement rappelées dans la suite. Le lecteur intéressé pourra se référer à Loonis et Mary (2019) pour des éléments plus précis sur les propriétés asymptotiques ou les algorithmes de tirage par exemple.

Une des difficultés pratiques liée à la manipulation des plans déterminantaux réside dans la construction de noyaux répondant aux besoins standards du statisticien d’enquête, comme disposer de probabilités d’inclusion fixées a priori et/ou d’un plan de taille fixe égale à $n \in \mathbb{N}^*$. Dans le monde déterminantal, le premier besoin correspond à des noyaux dont les termes diagonaux sont astreints à être égaux aux coefficients d’un vecteur Π de $]0, 1[^N$. Le second besoin correspond à des plans dont les noyaux sont des projections orthogonales, c’est à dire des matrices hermitiennes dont les valeurs propres sont 0 ou 1 avec des multiplicités respectives égales à $N - n$ et n . Construire un plan déterminantal de taille fixe et de probabilités d’inclusion fixées est donc un cas particulier du problème plus général de construction de matrices hermitiennes dont la diagonale et le spectre sont fixés. Ce problème a fait l’objet de nombreux travaux dans la littérature, dont certains récents.

*Insee, Paris, France. Email:vincent.loonis@insee.fr

Schur (1911), Horn (1954), Kadison (2002) ont étudié les conditions nécessaires et suffisantes d'existence de telles matrices dans les cas complexe et réel. Leurs preuves ne sont pas constructives cependant. Dhillon et collab. (2005) proposent des algorithmes de construction de certaines de ces matrices alors que l'algorithme de Fickus et collab. (2013) permet de les construire toutes. Dans les deux cas précédents, les résultats ne sont pas connus de manière formelle. Loonis et Mary (2019) exhibent explicitement quelques exemples de matrices de projection dont les termes diagonaux sont constants et valent nN^{-1} . Elles sont associées à des plans équipondérés de taille fixe. En s'appuyant sur les travaux de Kadison (2002), ils présentent les formules permettant la construction d'une famille P^Π de matrices de projection de diagonale quelconque Π . Par sérenpidité, il s'avère que les plans déterminantaux associés à cette famille possèdent de très intéressantes propriétés statistiques. Dans cet article, nous nous intéressons spécifiquement à la méthode de Fickus et collab. (2013) dans le contexte des plans déterminantaux et à ses liens avec la famille P^Π .

Dans une première partie, nous proposons quelques rappels généraux de théorie des sondages que l'on interprète dans le cas particulier des plans déterminantaux. Dans une seconde partie, nous présentons les grands principes de la méthode de Fickus et collab. (2013) ainsi que ses paramètres. Ces derniers n'étant pas aisés à manipuler directement, nous montrons que l'on peut les modifier à la marge de manière à décrire, à une permutation près, l'ensemble des matrices hermitiennes K^Π de diagonale Π par le triplet (M, Ω, ρ) . M est un entier donnant le nombre de valeurs propres strictement positives de K^Π . Ω est une matrice de $[0, 1]^{(M \times N)}$ dont la $k^{\text{ème}}$ colonne permet de construire le spectre de la sous-matrice principale d'ordre k de K^Π . D'un point de vue statistique, ce spectre est directement lié au nombre de points de l'échantillon aléatoire \mathbb{S} qui tombent dans le domaine $D_k = \{1, \dots, k\}$, $k = 1, \dots, N$. Enfin, ρ est un paramètre multidimensionnel modifiant, à Ω donné, la valeur des coefficients hors diagonale de K^Π sans altérer les spectres des sous-matrices principales de K^Π . Ce paramètre conditionne directement les probabilités d'inclusion double et donc la précision des estimations. Dans le cas particulier des matrices de projection et pour Ω dans $]0, 1[^{(M \times N)}$, ρ peut être assimilé à une matrice quelconque de $[0, 1]^{(M \times (N-1))}$. Dans une troisième partie, nous rappelons les propriétés des matrices P^Π de Loonis et Mary (2019). Nous montrons que, pour un vecteur de probabilités Π^\triangleright dont les coefficients sont triés de manière décroissante et tels que $\sum_{k=1}^N \Pi_k^\triangleright = n$, le choix $M = n$ et $\Omega = 0^{(n \times N)}$ permet de retrouver, avec la méthode de Fickus et collab. (2013), la matrice P^{Π^\triangleright} de Loonis et Mary (2019), à une matrice hermitienne près dont tous les termes sont de module 1. Nous nous interrogeons alors sur le choix polaire $M = n$ et $\Omega = 1^{(n \times N)}$, pour lequel un résultat similaire au précédent est fourni mais avec une nouvelle famille de matrices Q^Π , dont les coefficients sont explicités. Dans une dernière partie, nous constatons que les différentes propriétés théoriques et empiriques de la famille P^Π la positionne comme une candidate crédible pour construire une borne inférieure de la variance de l'estimateur d'Horvitz-Thompson (Horvitz et Thompson (1952)). Nous formulons une conjecture que nous étayons par une validation empirique.

Outre l'appropriation et la programmation de la méthode de Fickus et collab. (2013) pour une utilisation dans le domaine des plans de sondage déterminantaux, les principaux apports de ce document résident dans les théorèmes 3.1, 3.2, 3.3 et dans la conjecture 4.1. Quand bien même cette dernière se révélerait fausse in fine, sa réfutation contribuerait à mieux comprendre certains fondements des processus déterminantaux sur des populations finies.

1 Rappels de théorie des sondages

Les probabilités d'inclusion jouent un rôle central dans la théorie des sondages, notamment celles d'ordre 1 : $\pi_k = pr(\{k\} \in \mathbb{S})$ et d'ordre 2 : $\pi_{kl} = pr(\{k, l\} \subseteq \mathbb{S})$ pour $k \neq l$. Pour un plan déterminantal, les probabilités d'inclusion à tous les ordres se déduisent directement du noyau K auquel il est associé. Pour un échantillon s de 2^U , on a en effet $pr(s \subseteq \mathbb{S}) = \det(K|_s)$, où $K|_s$ est la sous-matrice de K construite par extraction des lignes et des colonnes de K indexées par les éléments de s . La diagonale de K fournit ainsi directement les probabilités d'inclusion simple puisque $\pi_k = pr(\{k\} \in \mathbb{S}) = \det(K|_k) = K_{kk}$. À diagonale fixée, les termes hors diagonale déterminent quant à eux les probabilités d'inclusion double puisque $\pi_{kl} = pr(\{k, l\} \subseteq \mathbb{S}) = \det(K|_{\{k, l\}}) = K_{kk}K_{ll} - K_{kl}K_{lk} = K_{kk}K_{ll} - |K_{kl}|^2$.

Pour un plan quelconque, Δ est la matrice $(N \times N)$ dont les termes diagonaux et hors diagonaux sont respectivement $\Delta_{kk} = \pi_k(1 - \pi_k)$ et $\Delta_{kl} = \pi_{kl} - \pi_k\pi_l$. Dans le cas déterminantal, ces quantités deviennent $\Delta_{kk} = K_{kk}(1 - K_{kk})$ et $\Delta_{kl} = -|K_{kl}|^2$, soit $\Delta = K \odot (I_N - \bar{K})$, où I_N est la matrice identité de taille N , \odot et \bar{z} désignent respectivement le produit matriciel terme à terme et \bar{z} le conjugué de z . Les plans déterminantaux vérifient ainsi les conditions de Sen-Yates-Grundy (Sen (1953), Yates et Grundy (1953)), à savoir $\Delta_{kl} \leq 0$ pour k différent de l . Cela implique notamment qu'une probabilité d'inclusion double π_{kl} est toujours inférieure au produit $\pi_k\pi_l$ dans le cas déterminantal.

Pour un plan quelconque, dont les probabilités d'inclusion simple sont strictement positives, le total inconnu $t_y = \sum_{k=1}^N y_k$ d'une variable d'intérêt y , assimilée à un vecteur de \mathbb{R}^N , est estimé sans biais par l'estimateur d'Horvitz-Thompson (Horvitz et Thompson (1952)) $\hat{t}_y = \sum_{k \in \mathbb{S}} y_k \Pi_k^{-1}$, dont la variance est :

$$var(\hat{t}_y) = \sum_k \sum_l \frac{y_k}{\pi_k} \frac{y_l}{\pi_l} \Delta_{kl} = y^T D_\pi^{-1} \Delta D_\pi^{-1} y, \quad (1)$$

avec D_π matrice diagonale dont les termes diagonaux sont les π_k . Quand le plan est de taille fixe, (1) devient

$$var(\hat{t}_y) = -\frac{1}{2} \sum_k \sum_{l \neq k} \left(\frac{y_k}{\pi_k} - \frac{y_l}{\pi_l} \right)^2 \Delta_{kl}. \quad (2)$$

La variance étant positive, elle sera d'autant plus petite, à probabilités d'inclusion fixées $\pi_k = \Pi_k$, $k = 1, \dots, N$, que $\Delta_{kl} = \pi_{kl} - \pi_k\pi_l$ est grand quand $y_k \Pi_k^{-1}$ est très différent de y_l / Π_l . Dans ce cas le terme concerné de la somme, en intégrant le $-1/2$, est fortement négatif dans les cas les plus favorables : $\pi_{kl} > \pi_k\pi_l$, contribuant à rendre la variance plus faible. En d'autres termes, pour une estimation précise, il faut que les probabilités d'inclusion doubles π_{kl} soient d'autant plus grandes que les individus ne ressemblent pas au sens de $y_k \Pi_k^{-1}$.

Dans le cas déterminantal, du fait des conditions de Sen-Yates-Grundy, ces propriétés souhaitables sont équivalentes à avoir $\pi_{kl} \simeq \pi_k\pi_l$ et donc $|K_{kl}| \simeq 0$ quand $y_k \Pi_k^{-1}$ est très différent de y_l / Π_l . Par contraposée, il est préférable d'avoir $\pi_{kl} = 0$ et $|K_{kl}|^2 = \pi_k\pi_l$ si $y_k \Pi_k^{-1} \simeq y_l / \Pi_l$. Si le plan est déterminantal, (1) devient :

$$var(\hat{t}_y) = y^T (I_N \odot K)^{-1} [K \odot (I_N - \bar{K})] (I_N \odot K)^{-1} y. \quad (3)$$

Un cas particulier important est $y_k = \pi_k$, $k = 1, \dots, N$. L'estimateur d'Horvitz-Thompson devient alors $\hat{t}_\pi = \sum_{k \in \mathbb{S}} \pi_k / \pi_k = \sum_{k \in U} \mathbb{1}(k \in \mathbb{S}) = \#\mathbb{S}$, où $\#\mathbb{S}$ désigne la taille de l'échantillon

aléatoire \mathbb{S} . Hough et collab. (2006) montrent que si le plan est déterminantal associé à une matrice K alors

$$\text{var}(\hat{t}_\pi) = \text{var}(\#\mathbb{S}) = \sum_{j=1}^N \lambda_j(1 - \lambda_j), \quad (4)$$

où les λ_j sont les valeurs propres de K . Le plan est donc de taille fixe, $\text{var}(\#\mathbb{S}) = 0$, si et seulement si les valeurs propres valent 0 ou 1 et c'est à dire que K est une matrice de projection orthogonale.

Nous concluons cette section en remarquant que la recherche du noyau K qui minimise (3) est un problème d'optimisation semi-définie non linéaire sous contrainte. Quand la contrainte est d'avoir la diagonale, $I_N \odot K$, fixée, la fonction objectif est concave. La solution est un point extrémal. Dans certaines conditions, on peut montrer que les projections sont des points extrémaux mais aussi qu'il existe d'autres points extrémaux qui ne sont pas des projections (voir Loonis et Mary (2019)).

2 Construire tous les plans déterminantaux de probabilités d'inclusion simple fixées

2.1 Notations

La méthode de Fickus et collab. (2013) permet de construire toutes les matrices hermitiennes de diagonale et de spectre fixés. Dans le cadre des plans de sondages déterminantaux, nous nous limitons au cas particulier où les valeurs propres sont dans $[0, 1]$ et les termes diagonaux sont à valeur dans $]0, 1[$. Sans perte de généralités, Fickus et collab. (2013) supposent que la population est triée de telle sorte que $\Pi_1 \geq \Pi_2 \geq \dots \geq \Pi_k \geq \dots \geq \Pi_{N-1} \geq \Pi_N$. Leur méthode ne permettra donc pas de construire directement toutes les matrices hermitiennes K^Π de diagonale Π . Pour une telle matrice, l'algorithme donnera une matrice K^{Π^\triangleright} telle que $K^{\Pi^\triangleright} = \Sigma^{\Pi^\triangleright} K^\Pi \Sigma^\Pi$ où $\Sigma^{\Pi^\triangleright}$ est une matrice de permutation qui transforme Π en Π^\triangleright . Dans la suite nous maintiendrons la distinction entre Π et sa version triée de manière décroissante Π^\triangleright car elle s'avère utile dans la comparaison avec la méthode de Loonis et Mary (2019). Ponctuellement, nous aurons besoin d'une version de Π triée par ordre croissant, notamment dans la formule (10). Nous le mentionnerons explicitement avec la notation Π^\triangleleft .

L'ordre des valeurs propres est également important dans la construction, mais intervient moins dans l'interprétation des résultats. Sauf mention contraire explicite, les valeurs propres de tous les spectres, généralement notés à partir de la lettre grecque λ , sont supposées être triées de manière croissante. Pour être en cohérence avec les notations matricielles, cette convention est différente de celle de Fickus et collab. (2013) dont les travaux se situent dans le champ des bases redondantes, appelées *frame*. Afin d'être en accord avec les notations de la théorie des sondages, les notations N et M ont été interverties par rapport à celles de Fickus et collab. (2013).

La notation $x^{p \times q}$ désigne une matrice de taille $p \times q$ dont tous les coefficients valent x . Par sous-matrice principale d'ordre k d'une matrice, nous entendons la sous-matrice correspondant au coin supérieur gauche de taille $(k \times k)$ de cette matrice.

2.2 Principes généraux

λ^N est le spectre de K^{Π^\triangleright} . En le limitant aux seules valeurs propres strictement positives, il est de taille $0 < M \leq N$. Bien que donnés, Π^\triangleright , λ^N et M sont soumis à des contraintes. Les contraintes de trace imposent par exemple que $\sum_{k=1}^N \Pi_k^\triangleright = \sum_{j=1}^M \lambda_j^N$. Les contraintes de *contraction*, $0 \leq \lambda_j^N \leq 1$, conduisent à $\sum_{k=1}^N \Pi_k \leq M$. Enfin, des contraintes de dominance sont héritées du théorème de Schur-Horn. Elles sont rappelées par les équations (13) et (14).

Le principe général de la méthode est de constituer séquentiellement N vecteurs φ^k de taille M pour $k = 1, \dots, N$ et N matrices Φ^k de taille $(M \times k)$ dont les colonnes sont les φ^s , $s = 1, \dots, k$. Fickus et collab. (2013) établissent des équations donnant les φ^k et telles qu'au final $K^{\Pi^\triangleright} = \overline{\Phi^N}^\top \Phi^N$ a les propriétés souhaitées (équations (18) et (19)). Afin de construire l'ensemble de ces matrices, les équations dépendent de 3 types de paramètres considérés comme libres, même si ils sont astreints à respecter certaines contraintes.

1. $\{\lambda^k\}_{k=1}^{N-1}$ est la séquence des $N - 1$ spectres des sous-matrices principales $\{\overline{\Phi^k}^\top \Phi^k\}_{k=1}^{N-1}$ de K^{Π^\triangleright} . Pour chaque spectre λ^k , en théorie de taille N , on se limite aux M plus grandes valeurs propres dont au plus M sont strictement positives quand $k \geq M$. Quand $0 < k < M$, on complète le spectre par $M - k$ valeurs 0 de manière à ce que les vecteurs $\{\lambda^k\}_{k=1}^{N-1}$ soient de taille constante M .
2. U^1 est une matrice unitaire quelconque de taille $(M \times M)$.
3. $\{V^k\}_{k=1}^{N-1}$ est une séquence de $N - 1$ matrices unitaires bloc-diagonales quelconques de taille $(M \times M)$. Le nombre de blocs de V^k correspond au nombre de valeurs propres distinctes de λ^k . La taille d'un bloc est la multiplicité de la valeur propre correspondante.

L'algorithme de construction est présenté de manière détaillée en annexe dans les sections 6.5 et 6.6. Si la nature des paramètres libres dans cette méthode se comprend bien, leur manipulation dans une optique de calculs ou de programmation est moins aisée. On cherche dans la suite à *simplifier* cette paramétrisation.

2.3 Simplifier la paramétrisation de la séquence de valeurs propres

En tant que spectres des sous-matrices principales de K^{Π^\triangleright} , qui sont aussi hermitiennes contractantes, les valeurs propres des spectres $\{\lambda^k\}_{k=1}^{N-1}$ sont soumises aux conditions de Schur-Horn et à celles du théorème d'entrelacement de Cauchy, à savoir $\lambda_j^{k+1} \leq \lambda_j^k \leq \lambda_{j-1}^{k+1}$. Tout en respectant ces contraintes, Fickus et collab. (2013) montrent que les différents $\{\{\lambda_j^k\}_{j=1}^M\}_{k=1}^{N-1}$ peuvent prendre n'importe quelle valeur dans les intervalles $\{\{[A_j^k, B_j^k]\}_{j=1}^M\}_{k=1}^{N-1}$, avec :

$$A_j^k = \max\{\lambda_{j-1}^{k+1}, \sum_{s=1}^j \lambda_s^{k+1} - \sum_{s=1}^{j-1} \lambda_s^k - \Pi_{k+1}^\triangleright\} \quad (5)$$

$$B_j^k = \min\{\lambda_j^{k+1}, \min_{i=j, \dots, M} \{ \sum_{s=M-i+1}^k \Pi_s^\triangleright - \sum_{s=j}^{i-1} \lambda_s^{k+1} - \sum_{s=1}^{j-1} \lambda_s^k \} \} \quad (6)$$

où $\lambda_0^k = 0$ pour tout k et, par convention, la sommation sur des ensembles vides est égale à 0. Les coefficients A_j^k et B_j^k dépendent du spectre λ^{k+1} et des valeurs propres λ_s^k pour $s < j$. On en déduit que l'on peut les construire récursivement en parcourant les k de $N - 1$ à 1 et les j de 1 à M . Nous donnons en annexe, dans la section 6.1, un exemple d'application de ces formules. Conditionnellement à cette construction, on peut ré-écrire les contraintes (5) et (6) sous la forme :

$$\lambda_j^k = A_j^k + \Omega_{jk}(B_j^k - A_j^k) \text{ pour } j = 1, \dots, M, k = 1, \dots, N - 1 \quad (7)$$

où Ω_{jk} est un élément de $[0, 1]$. Cette paramétrisation peut être étendue au spectre λ^N qui, dans Fickus et collab. (2013), est considéré comme donné.

Proposition 2.1 *Soit Π un vecteur de $]0, 1[^N$, tel que $\sum_{k=1}^N \Pi_k = \mu \in \mathbb{R}^{+*}$, il existe une matrice hermitienne de diagonale Π et dont les $0 < M \leq N$ valeurs propres strictement positives sont $\lambda^N = \{\lambda_j^N\}_{j=1}^M$ si et seulement si :*

$$\lambda_j^N = A_j^N + \Omega_{jN}(B_j^N - A_j^N), \quad j = 1, \dots, M \quad \text{avec :} \quad (8)$$

$$A_j^N = \max(\lambda_{j-1}^N, (\mu - \sum_{s=0}^{j-1} \lambda_s^N) - (M - j)) \quad \text{et} \quad (9)$$

$$B_j^N = \min(\sum_{s=1}^{N-M+j} \Pi_s^\triangleleft - \sum_{s=0}^{j-1} \lambda_s^N, 1, \frac{\mu - \sum_{s=0}^{j-1} \lambda_s^N}{M - j + 1}). \quad (10)$$

où $\lambda_0^N = 0$ et $\Omega_{jN} \in [0, 1]$.

La démonstration est donnée dans la section 6.2. Les équations (7) et (8) montrent que pour un vecteur Π^\triangleright donné, il est possible de construire l'ensemble des spectres admissibles des sous-matrices principales de l'ensemble des matrices K^{Π^\triangleright} , y compris λ^N , à partir des coefficients des matrices Ω de $[0, 1]^{M \times N}$. On donne ci-après deux cas particuliers importants, dont la démonstration découle directement des formules (5), (6), (9) et (10).

Proposition 2.2

1. *Soit Π un vecteur de $]0, 1[^N$ tel que $\sum_{k=1}^N \Pi_k = n \in \mathbb{N}^*$, alors le choix $M = n$ conduit à des matrices K^{Π^\triangleright} qui sont des matrices de projection orthogonale quel que soit le choix de Ω .*
2. *Si $\lambda_{j-1}^{k+1} \neq \lambda_j^{k+1}$ et que Ω_{jk} est différent de 0 et de 1 alors $\lambda_{j-1}^k < \lambda_j^k < \lambda_{j+1}^k$.*

Le premier point montre que dans des procédures d'optimisation, une contrainte potentiellement difficile à formaliser, telle que le spectre de K est dans $\{0, 1\}^N$, s'exprimera simplement par $M = n$ dans la paramétrisation proposée. Le second sera important pour simplifier la paramétrisation de la séquence de matrices $\{V^k\}_{k=1}^{N-1}$.

2.4 Simplifier la paramétrisation des matrices unitaires

La paramétrisation des matrices unitaires, par un nombre restreint de paramètres, joue un rôle important en physique nucléaire (Wolfenstein (1983), Jarlskog (2005), Hedemann (2013)). Quand M est grand, les différentes méthodes s'avèrent difficiles à implémenter. Le résultat ci-après montre qu'il est possible de se ramener à des cas simples dans une grande partie des situations intéressant les plans déterminantaux.

Proposition 2.3

1. *Dans la construction de Fickus et collab. (2013), Φ^N dépend bien de U^1 mais $\overline{\Phi^N}^\top \Phi^N$, qui est utile pour les plans déterminantaux, ne dépend pas de U^1 .*
2. *Dans le cas des matrices K^{Π^\triangleright} de projection de rang n et Ω à valeurs dans $]0, 1[^{(n \times N)}$, les matrices $\{V^k\}_{k=1}^{N-1}$ peuvent être choisies comme unitaires diagonales. Elles peuvent être paramétrisées par une matrice ρ à valeur dans $]0, 1[^{(n \times (N-1))}$ de telle manière que $V_{jj}^k = \exp(i\pi\rho_{jk})$.*

Le premier point est peut être direct pour qui possède une vision algébrique des principes qui sous-tendent la méthode de Fickus et collab. (2013), ce qui n'est pas nécessairement le cas de l'auteur. Une intuition réside dans le fait que $(U\Phi^N)^\top(U\Phi^N) = \overline{\Phi^N}^\top \Phi^N$ pour toute matrice U unitaire. On donne une démonstration calculatoire de ces deux points dans la section 6.7.

Quand $M > n$ ou que certains coefficients de Ω prennent les valeurs 0 ou 1 nous n'avons pas démontré que l'on pouvait se limiter aux matrices diagonales pour les matrices $\{V^k\}_{k=1}^{N-1}$. La démonstration des théorèmes 3.2 et 3.3 indique que c'est le cas quand les coefficients de Ω valent tous soit 1 soit 0. Dans le cas général, nous conseillerions donc volontiers, en première approche, de considérer ρ comme une matrice de taille $M \times (N-1)$ permettant de construire $N-1$ matrices unitaires diagonales de taille M , le cas $\rho = 0^{n \times (N-1)}$ correspondant à $\{V^k = I_M\}_{k=1}^{N-1}$.

En optimisation, la paramétrisation $K^{\Pi^\triangleright}(M, \Omega, \rho)$ ouvre des perspectives de simplification par le recours à des méthodes non contraintes puisque tous les paramètres définis par Ω et ρ sont indépendants. Le choix des algorithmes dans ce cas est guidé par la proposition ci-après qui autorise le recours à des techniques telles que le recuit-simulé (Kirkpatrick et collab. (1983)).

Proposition 2.4 *Soient Π un vecteur de $]0, 1[$ tel que $\sum_{k=1}^N \Pi_k = n \in \mathbb{N}^*$ et $\mathcal{H}_{proj}^{\Pi^\triangleright}$ l'ensemble des matrices hermitiennes de projection de diagonale Π^\triangleright , alors l'application $\mathbb{K}^{\Pi^\triangleright}$ telle que :*

$$\begin{aligned} \mathbb{K}^{\Pi^\triangleright} :]0, 1[^{(n \times N)} \times [0, 1]^{(n \times (N-1))} &\rightarrow \mathcal{H}_{proj}^{\Pi^\triangleright} \\ (\Omega, \rho) &\mapsto K^{\Pi^\triangleright}(M = n, \Omega, \rho) \end{aligned}$$

est de classe C^0 en Ω et C^∞ en ρ .

La démonstration s'appuie sur le fait que la construction de $K^{\Pi^\triangleright}(M = n, \Omega, \rho)$ mobilise la composition de fonctions continues en Ω et en ρ . Dans le cas de Ω une partie de ces fonctions sont des *min* et des *max* qui ne sont pas différentiables (formules 5, 6, 9, 10).

3 Construire des plans de sondage déterminantaux particuliers

3.1 Les matrices P^Π de Loonis et Mary (2019)

Soient Π un vecteur de \mathbb{R}^N tel que $\sum_{k=1}^N \Pi_k = n \in \mathbb{N}^*$, et k_r ($r = 1, \dots, n-1$), un entier tel que $\sum_{k=1}^{k_r-1} \Pi_k < r$ et $\sum_{k=1}^{k_r} \Pi_k \geq r$. Soient $\alpha_{k_r} = r - \sum_{k=1}^{k_r-1} \Pi_k$ et $\gamma_r^{r'}$ tel que

$$\gamma_r^{r'} = \sqrt{\prod_{j=r+1}^{r'} \frac{(\Pi_{k_j} - \alpha_{k_j})\alpha_{k_j}}{(1 - \alpha_{k_j})(1 - (\Pi_{k_j} - \alpha_{k_j}))}}$$

pour $r < r'$, $\gamma_r^{r'} = 1$ autrement. Loonis et Mary (2019) montrent que la matrice symétrique P^Π dont les coefficients sont donnés par la table 1 est une matrice de projection dont la diagonale est Π .

TABLE 1 – Coefficients de $P_{kl}^\Pi : k < l$

	l	
$k > l$	$l = k_{r'} + 1$	$k_{r'} < l < k_{r'} + 1$
$k_r < k < k_{r+1}$	$\sqrt{\Pi_k} \sqrt{\frac{(1 - \Pi_l)\alpha_l}{1 - \alpha_l}} \gamma_r^{r'}$	$\sqrt{\Pi_k \Pi_l} \gamma_r^{r'}$
$k = k_r$	$-\sqrt{\frac{(1 - \Pi_l)\alpha_l}{1 - \alpha_l}} \sqrt{\frac{(1 - \Pi_k)(\Pi_k - \alpha_k)}{1 - (\Pi_k - \alpha_k)}} \gamma_r^{r'}$	$-\sqrt{\Pi_l} \sqrt{\frac{(1 - \Pi_k)(\Pi_k - \alpha_k)}{1 - (\Pi_k - \alpha_k)}} \gamma_r^{r'}$

Les plans déterminantaux associés aux matrices de la forme P^Π bénéficient de propriétés statistiques intéressantes. En particulier, si k et l sont des éléments de $]k_r, k_{r+1}[$ alors $\pi_{kl} = 0$, si $|k - l|$ est grand alors $\pi_{kl} \simeq \Pi_k \Pi_l$. D'après les rappels en introduction, ces caractéristiques sont de nature à favoriser une faible valeur de $var(\hat{t}_y)$, pour peu que la population soit triée de telle

manière que $y_1 \Pi_1^{-1} \leq \dots \leq y_k \Pi_k^{-1} \leq \dots \leq y_N \Pi_N^{-1}$. Ce résultat est validé empiriquement par Loonis et Mary (2019), qui trouvent que le plan déterminantal ainsi construit conduit, dans certains cas, à des variances plus faibles que les meilleures stratégies actuellement connues, dont celle du Cube de Deville et Tillé (2004).

Le théorème ci-après illustre certaines propriétés d'optimalité de la famille P^Π dans le cas particulier $y_k = \Pi_k$. Il garantit que, pour un tri donné, l'échantillon sera réparti *harmonieusement* et de manière stable sur l'ensemble de la population. Cette propriété pouvant expliquer, dans le cas général, que si le tri est judicieux la variance de l'estimateur d'Horvitz-Thompson associée est faible.

Theorème 3.1 *Soit Π un vecteur de $]0, 1[^N$ tel que $\sum_{k=1}^N \Pi_k = n \in \mathbb{N}^*$ et P^Π la matrice de Loonis et Mary (2019). Soit P_k^Π la sous-matrice principale d'ordre k de P^Π , $k = 1, \dots, N$, et $\{\lambda_j^k\}_{j=1}^n$ ses n plus grandes valeurs propres, complétées par $n - k$ valeurs 0 quand $k < n$, alors :*

1. *$\{\lambda_j^k\}_{j=1}^n$ est composé de 1 avec une multiplicité $\lfloor \sum_{s=1}^k \Pi_s \rfloor$, de $\{\sum_{s=1}^k \Pi_s\}$ avec une multiplicité 1 et de 0 avec une multiplicité $n - \lfloor \sum_{s=1}^k \Pi_s \rfloor - 1$, où $\lfloor x \rfloor$ et $\{x\}$ désignent les parties entière et décimale de x .*
2. *Soient \mathbb{S} une variable aléatoire dont la loi est $DSK(P^\Pi)$, D_k le domaine $D_k = \{1, \dots, k\}$ et $\#\mathbb{S} \cap D_k$ le nombre aléatoire d'individus de \mathbb{S} qui sont dans D_k alors $\text{var}(\#\mathbb{S} \cap D_k)$ est minimale, parmi les plans déterminantaux à probabilités d'inclusion fixées, et vaut :*

$$\text{var}(\#\mathbb{S} \cap D_k) = \left\{ \sum_{s=1}^k \Pi_s \right\} \left(1 - \left\{ \sum_{s=1}^k \Pi_s \right\} \right).$$

La démonstration est donnée dans la section 6.3.

Pour conclure cette section, nous précisons que si Π^1 et Π^2 sont deux vecteurs égaux, à une permutation près, il n'y a pas de relations a priori entre P^{Π^1} et P^{Π^2} . C'est le cas notamment pour P^Π et P^{Π^\flat} pour lesquels, sauf cas particuliers, P^{Π^\flat} est différent de $\Sigma^{\Pi^\top} P^\Pi \Sigma^\Pi$. Il y aura égalité quand la permutation est antidiagonale.

Proposition 3.1 *Soit Π^1 un vecteur de $]0, 1[^N$ tel que $\sum_{k=1}^{k=N} \Pi_k^1 = n \in \mathbb{N}$ et $\Pi^2 = J_N \Pi^1$, où J_N est la matrice antidiagonale de taille N , alors $P^{\Pi^2} = J_N P^{\Pi^1} J_N^\top$.*

La démonstration est donnée dans la section 6.4. Ce résultat est utile pour étudier les bonnes propriétés de P^Π qui sont observées que la population soit triée par ordre croissant, ou décroissant, des valeurs de $y_k \Pi_k^{-1}$.

3.2 Où l'on retrouve P^{Π^\flat} à partir de la méthode de Fickus et collab. (2013)

3.2.1 Un résultat général

La construction de P^Π s'appuie, dans Loonis et Mary (2019), sur la modification séquentielle les lignes d'une matrice de taille $N \times M (= n)$ à l'aide de matrices de rotations, qui sont par ailleurs des matrices unitaires. Cette approche correspond à l'esprit de la méthode de Fickus et collab. (2013). Pour autant, le formalisme des méthodes n'apparaît pas directement équivalent. Dans le théorème ci-après on précise certains liens entre ces deux approches.

Theorème 3.2 *Soit Π^\flat un vecteur de taille N , tel que $0 < \Pi_k^\flat < 1$, $\sum_{k \in U} \Pi_k^\flat = n \in \mathbb{N}^*$ et $\Pi_1^\flat \geq \dots \geq \Pi_N^\flat$. Pour toute valeur du paramètre ρ ,*

$$K^{\Pi^\flat}(M = n, \Omega = 0^{n \times N}, \rho) = H_N \odot P^{\Pi^\flat}$$

où $K^{\Pi^\flat}(M = n, \Omega = 0^{n \times N}, \rho)$ est construite selon la méthode de Fickus et collab. (2013), H_N est une matrice hermitienne de taille $(N \times N)$ dont tous les coefficients sont de module 1 et P^{Π^\flat} est la matrice définie par Loonis et Mary (2019) à partir du vecteur Π^\flat .

La démonstration du théorème, technique et longue, est donnée en annexe (section 6.8). D'après ce théorème, le module des termes hors diagonale de $K^{\Pi^\flat}(M = n, \Omega = 0^{n \times N}, \rho)$ ne dépend pas de ρ . Cette propriété est remarquable car elle n'est pas vraie pour une valeur quelconque du paramètre Ω . En termes de sondages, la variance de \hat{t}_y dépend des Δ_{kl} et donc du module des $K_{kl}^{\Pi^\flat}$ quand le plan est déterminantal, d'après (3). On en déduit que l'on n'a rien à attendre d'une modification du paramètres ρ pour améliorer la variance obtenue à partir de P^{Π^\flat} .

Pour une matrice P^Π quelconque, il existe des valeurs Ω^Π et ρ^Π telles que $\Sigma^{\Pi^\top} P^\Pi \Sigma^\Pi = K^{\Pi^\flat}(M = n, \Omega^\Pi, \rho^\Pi)$, mais ces valeurs sont a priori inconnues. Des éléments de validation empirique s'appuyant sur la réciproque du théorème de Fickus et collab. (2013) semblent montrer que le module des termes hors diagonale de $K(M = n, \Omega^\Pi, \rho)$ ne dépendent pas du choix ρ , généralisant, empiriquement, à l'ensemble de la famille P^Π les conclusions du théorème 3.2.

3.2.2 Simulations

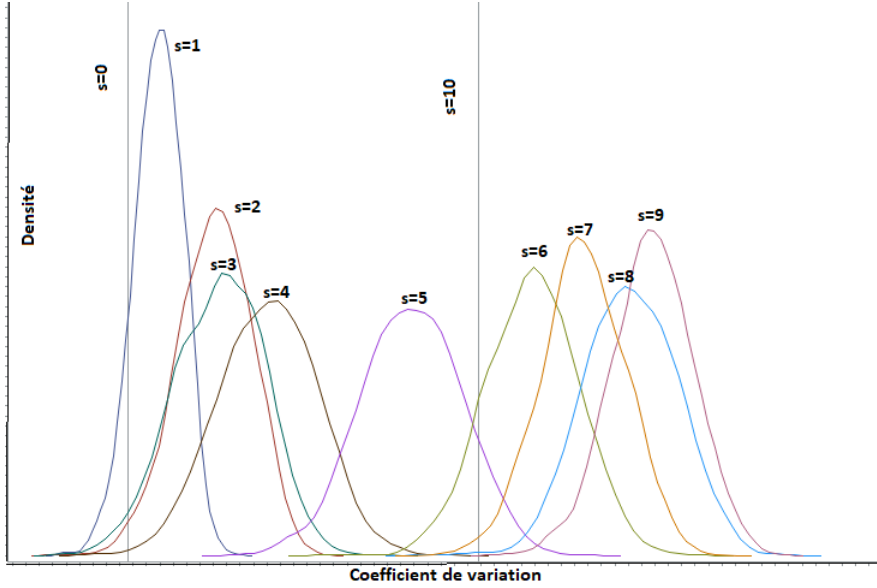
Afin d'aider à l'interprétation du théorème 3.2, nous procédons à l'expérience suivante. Nous considérons une population de taille $N = 148$ constituée par les unités primaires de l'échantillon maître de l'Insee pour l'ancienne région administrative Auvergne. Les unités primaires correspondent à une partition du territoire en regroupements les plus petits possible de communes contiguës ayant au moins 2000 résidences principales. Les probabilités d'inclusion Π_k , $k = 1, \dots, N$ sont proportionnelles au nombre de résidences principales pour une taille d'échantillon de $n = 14$. Nous considérons la variable y telle que y_k est le revenu total disponible de l'ensemble des ménages de l'unité primaire k . Pour $M = n = 14$, nous construisons la séquence de matrices $\{\Omega^s\}_{s=0}^{s=10}$ telles que $\Omega^s = (s/10)1^{14 \times 14}$. Tous les termes de Ω^0 valent 0 et tous ceux de Ω^{10} valent 1. Pour chaque $s = 0, \dots, 10$ et chaque $k = 1, \dots, 147$, nous construisons les matrices unitaires diagonales aléatoires $\mathcal{V}^{k,s}$, de taille 14×14 , telles que $\mathcal{V}_{jj}^{k,s} = \exp(i\pi\rho_{jk}^s)$ où ρ^s est une matrice aléatoire de dimension 14×147 dont tous les coefficients sont indépendants et uniformément distribués selon une loi uniforme $\mathcal{U}[0, 1]$. Nous considérons la séquence de matrices aléatoires $\mathcal{K}^{\Pi^\flat, s}(M = n, \Omega^s, \{\mathcal{V}^{k,s}\}_{k=1}^{N-1})$ et la séquence associée de variances aléatoires déduites de (3) :

$$\text{Var}(\hat{t}_y^s) = y^\top (I_N \odot \mathcal{K}^{\Pi^\flat, s})^{-1} [\mathcal{K}^{\Pi^\flat, s} \odot (I_N - \overline{\mathcal{K}^{\Pi^\flat, s}})] (I_N \odot \mathcal{K}^{\Pi^\flat, s})^{-1} y. \quad (11)$$

La figure 1 montre la densité des $\text{Var}(\hat{t}_y^s)$ obtenue par simulation et la méthode des noyaux. Nous constatons que

1. $\text{Var}(\hat{t}_y^s)$ est constante pour $s = 0$ et $s = 10$.
2. $\text{Var}(\hat{t}_y^0)$ ne correspond pas à un minimum car elle est calculée à partir de $\mathcal{K}^{\Pi^\flat}(M = n, \Omega^0, \{\mathcal{V}^{k,s}\}_{k=1}^{N-1}) = \mathcal{H}_N \odot P^{\Pi^\flat}$. P^{Π^\flat} est construite avec une population triée de telle manière que $\Pi_1 \geq \dots \geq \Pi_k \geq \dots \geq \Pi_N$, ce qui ne correspond pas à l'ordre préconisé pour bénéficier des bonnes propriétés de P^Π .
3. Pour être potentiellement précis, il aurait fallu utiliser P^Π construite sur une population triée de telle manière que $y_1 \Pi_1^{-1} \geq \dots \geq y_k \Pi_k^{-1} \geq \dots \geq y_N \Pi_N^{-1}$. Nous observons que la variance calculée avec cette matrice et la population dans le *bon* ordre est nettement plus petite que celles observées sur la figure 1. On ne la représente pas car elle aurait contribué à écraser les différentes courbes représentées.

FIGURE 1 – Densité de $\mathcal{V}ar(\hat{t}_y^s)$ pour $N = 148$, $\sum_{k=1}^{k=148} \Pi_k = n = M = 14$ et $\Omega^s = (s/10)1^{14 \times 14}$, $s = 0, \dots, 10$



4. Le cas $s = 10$ conduit à des conclusions comparables à celles du cas $s = 0$ mais avec des matrices sous-jacentes différentes de la famille P^Π . Ce cas est étudié de manière plus précise dans la section suivante.

3.3 Où l'on déduit une forme explicite pour une nouvelle famille de matrices : Q^{Π^\triangleright}

Quand $\sum_{k=1}^N \Pi_k = n$, on parvient à une forme explicite du noyau $K^{\Pi^\triangleright}(M = n, \Omega = 0^{n \times N}, \rho)$. Dans le théorème ci-après on montre que l'on peut aussi trouver une formulation explicite dans les mêmes conditions mais pour le jeu de paramètres $(M = n, \Omega = 1^{n \times N}, \rho)$.

Theorème 3.3 Soit Π^\triangleright un vecteur de taille N , tel que $0 < \Pi_k^\triangleright < 1$, $\sum_{k \in U} \Pi_k^\triangleright = n \in \mathbb{N}^*$ et $\Pi_1^\triangleright \geq \dots \geq \Pi_N^\triangleright$. Soient $\{\{\lambda_j^k\}_{j=1}^n\}_{k=n}^N$ tels que $\lambda^N = 1^n$ et

$$\begin{cases} \lambda_1^k &= \lambda_n^{k+1} - \Pi_{k+1}^\triangleright & k = n, \dots, N-1, \\ \lambda_j^k &= \lambda_{j-1}^{k+1}, & j = 2, \dots, n, k = n, \dots, N-1 \end{cases} \quad (12)$$

On suppose que Π^\triangleright est tel que :

- H1 : Seules les valeurs propres 0 et 1 peuvent avoir une multiplicité supérieure à 1 pour les spectres λ^k , $k = n, \dots, N$,
- H2 : $\Pi_k = nN^{-1}$, $k = 1, \dots, N$.

Pour toute valeur du paramètre ρ ,

$$K^{\Pi^\triangleright}(M = n, \Omega = 1^{n \times N}, \rho) = H_N \odot Q^{\Pi^\triangleright}$$

où $K^{\Pi^\triangleright}(M = n, \Omega = 1^{n \times N}, \rho)$ est construite selon la méthode de Fickus et collab. (2013), H_N est une matrice hermitienne de taille $(N \times N)$ dont tous les coefficients sont de module 1 et Q^{Π^\triangleright} est telle que, pour tout $(k, l) \in [n+1, N]^2$:

1. λ^k donne les n plus grandes valeurs propres la sous-matrice principale d'ordre k de Q^{Π^\triangleright} , dont au plus n sont strictement positives ;

2. Sous $H_1 : Q_{kl}^{\Pi^p} = \sqrt{\Pi_k^p \Pi_l^p} \mathbb{1}(l \equiv k \pmod n) ;$
3. Sous $H_2 : Q_{kl}^{\Pi} = nN^{-1} \mathbb{1}(l \equiv k \text{ ou } k - N \equiv N - (l + 1) \pmod{2n}) ;$

Si n divise N les points 1 et 3 sont vrais pour $k \leq n$ ou $l \leq n$.

La démonstration est donnée en annexe (section 3.3). La figure 2 (page 22) donne quelques exemples de matrices Q^{Π^p} . La table 9 (page 24) permet de mieux comprendre l'organisation des spectres $\{\lambda_k\}_{k=1}^N$ des sous-matrices principales de Q^{Π^p} . Sauf dans le cas n divise N et $\Pi_k = nN^{-1}$, les termes de $Q_{kl}^{\Pi^p}$ sont plus complexes à identifier formellement quand $k \leq n$.

Tout comme P^{Π} construite sur une population correctement triée peut conduire à une variance faible, nous avons observé dans des simulations spécifiques que Q^{Π} peut conduire à des variances qui sont toujours supérieures à celles obtenues avec d'autres plans déterminantaux de taille fixe ayant les mêmes probabilités d'inclusion. Pour observer simplement ce phénomène, les variables y retenues étaient telles que, si $\Pi_1 \geq \dots \geq \Pi_k \geq \dots \geq \Pi_N$ alors $y_1 \Pi_1^{-1} \geq \dots \geq y_k \Pi_k^{-1} \geq \dots \geq y_N \Pi_N^{-1}$. C'est le cas pour $y_k = \sqrt{\Pi_k}$ par exemple.

4 Une conjecture et sa validation empirique

4.1 Une conjecture

Les éléments ci-dessus montrent que la matrice P^{Π} jouit de propriétés qui la positionne de manière singulière parmi l'ensemble des matrices hermitiennes à diagonale fixée. L'ensemble de ces observations, associées au rôle des matrices de projection dans les problèmes d'optimisation semi-définie concave, conduit à penser que cette matrice est effectivement un bon candidat pour jouer le rôle dévolu à la borne de Fréchet-Darmonis-Cramer-Rao en statistique inférentielle classique.

Conjecture 4.1 Soient y une variable positive et Π un vecteur de $]0, 1[^N$ tel que $\sum_{k=1}^N \Pi_k = n \in \mathbb{N}^*$ et tel que la population U est ordonnée de telle sorte que $y_1 \Pi_1^{-1} \leq \dots \leq y_k \Pi_k^{-1} \leq \dots \leq y_N \Pi_N^{-1}$ ou $y_1 \Pi_1^{-1} \geq \dots \geq y_k \Pi_k^{-1} \geq \dots \geq y_N \Pi_N^{-1}$. Soit \mathcal{P} un plan de sondage quelconque de probabilités d'inclusion $\pi_k = \Pi_k$, $k = 1, \dots, N$ et \hat{t}_y l'estimateur d'Horvitz-Thompson du total t_y de y sur ce plan, alors

$$\text{var}(\hat{t}_y) \geq y^T D_{\Pi}^{-1} [(I_N - P^{\Pi}) \odot P^{\Pi}] D_{\Pi}^{-1} y,$$

où P^{Π} est la matrice de Loonis et Mary (2019) et D_{Π} une matrice diagonale de diagonale Π .

Dans la configuration classique d'un plan de taille fixe à probabilités d'inclusion constantes, la conjecture précédente permet de retrouver des interprétations intuitives.

Si $\Pi_k = nN^{-1}$ et que n divise N , P^{Π} est bloc diagonale avec n blocs identiques. Les coefficients de chaque bloc de taille $(Nn^{-1} \times Nn^{-1})$ valent tous nN^{-1} . Le plan associé consiste à sélectionner 1 individu dans chacune des n strates de taille Nn^{-1} (voir Loonis et Mary (2019)). Après tri selon les valeurs de y , la première strate U_1 regroupe les Nn^{-1} premiers individus, la deuxième U_2 les Nn^{-1} suivants et ainsi de suite. La borne inférieure dans ce cas vaut

$$y^T D_{\Pi}^{-1} [(I_N - P^{\Pi}) * P^{\Pi}] D_{\Pi}^{-1} y = \frac{N^2}{n^2} \left(1 - \frac{n}{N}\right) \sum_{h=1}^n S_{yU_h}^2$$

où $S_{yU_h}^2 = N(N-1)^{-1} \sigma_{yU_h}^2$ et $\sigma_{yU_h}^2$ est la variance de y dans la strate U_h .

Si le total que l'on souhaite estimer est le nombre N_c d'individus qui ont une caractéristique c donnée, la variable sous-jacente y vaut 1 si l'individu possède la caractéristique et 0 autrement. Après tri de la variable, dans $n - 1$ strates la variance de y sera nulle. Dans une seule strate il y aura r_c valeurs 1, où r_c le reste de la division euclidienne de N_c par Nn^{-1} , et $Nn^{-1} - r_c$ valeurs 0. La borne inférieure vaut alors $r_c(Nn^{-1} - r_c)$.

4.2 Une validation empirique

On reprend le même cadre que celui décrit dans la section 3.2.2. On l'étend aux 22 anciennes régions françaises et à 70 variables auxiliaires décrivant la population, ses revenus et le parc des logements de chaque unité primaire. On calcule la valeur de la borne proposée dans la conjecture 4.1. On dispose ainsi de 1540 variances que l'on normalise sous forme de coefficients de variation. On calcule les équivalents pour un plan de sondage équilibré selon la méthode du Cube Deville et Tillé (2004). De manière concrète pour une variable et une région données, on équilibre sur cette variable. On estime la variance par simulation puisque les probabilités d'inclusion double sont inconnues dans ce cas. On procède de même avec des plans de sondage systématiques à probabilités inégales (Madow (1949)) pour chaque région et chaque variable, la population étant triée par $y_k \Pi_k^{-1}$. La figure 3 montre que le plan déterminantal est toujours meilleur que ces deux plans alors que la méthode du Cube est généralement considérée comme la plus précise conditionnellement à sa phase d'atterrissage. On ne trouve pas de relation selon laquelle le cube domine uniformément le tirage systématique par ailleurs.

5 Conclusion

Nous avons proposé une paramétrisation des noyaux des plans de sondage déterminantaux qui a permis d'établir des propriétés théoriques de certains plans spécifiques et d'établir une conjecture sur la précision maximale à attendre d'un plan de sondage à probabilités d'inclusion fixée. En l'absence de perspectives théoriques permettant de valider ou d'invalidier ce résultat, des éléments pourront être fournis par des travaux supplémentaires d'optimisation. La paramétrisation présentée permet en effet de transformer un problème d'optimisation semi définie en un problème non contraint. Un recours à des algorithmes stochastiques tel que le recuit simulé permettra de tester la robustesse de notre conjecture. D'autres pistes apparaissent également intéressantes telles que l'optimisation sur les variétés. Elles feront l'objet de travaux futurs. Quelques points soulevés dans le corps du texte gagneraient également à faire l'objet d'investigations supplémentaires. Sur un point très technique, il s'agit par exemple de rechercher une forme explicite pour les termes $Q_{kl}^{\Pi^p}$ tels que k ou l sont inférieurs à n . Sur un point plus de fond, il s'agirait d'étudier systématiquement les propriétés des paramètres $(M = n, \Omega^\Pi, \rho^\Pi)$ conduisant à toutes les matrices P^Π , à une permutation près. Nous n'avons en effet seulement aperçu empiriquement qu'elles semblent similaires à celles obtenues pour le cas P^{Π^p} .

6 Annexe

6.1 Construire la séquence $\{\lambda^k\}_{k=1}^{k=N-1}$ à partir de Ω

On montre ici comment appliquer les formules (5) et (6) pour un vecteur Π de taille $N = 10$, tel que $\Pi_k^\triangleright = \frac{6(11-k)}{10 \cdot 11}$ $k = 1, \dots, 10$, $M = 7$, $\sum_{k=1}^N \Pi_k = 3$ et on fixe $\lambda^{10} = (\frac{3}{10}, \frac{3}{10}, \frac{3}{10}, \frac{3}{10}, \frac{6}{10}, \frac{6}{10}, \frac{6}{10})^\top$. On prend $\Omega_{jk} = 0.5$ pour tout j et tout k .

TABLE 2 – Valeurs finales de λ_j^k

	k									
j	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
1	0	0	0	0	0	0	$\frac{3}{22}$	$\frac{12}{55}$	$\frac{3}{11}$	$\frac{3}{10}$
2	0	0	0	0	0	$\frac{93}{440}$	$\frac{111}{440}$	$\frac{63}{220}$	$\frac{3}{10}$	$\frac{3}{10}$
3	0	0	0	0	$\frac{213}{880}$	$\frac{3}{11}$	$\frac{129}{440}$	$\frac{3}{10}$	$\frac{3}{10}$	$\frac{3}{10}$
4	0	0	0	$\frac{927}{3520}$	$\frac{501}{1760}$	$\frac{261}{880}$	$\frac{3}{10}$	$\frac{3}{10}$	$\frac{3}{10}$	$\frac{3}{10}$
5	0	0	$\frac{5583}{14080}$	$\frac{669}{1408}$	$\frac{357}{704}$	$\frac{909}{1760}$	$\frac{21}{40}$	$\frac{6}{11}$	$\frac{63}{110}$	$\frac{3}{5}$
6	0	$\frac{13623}{28160}$	$\frac{909}{1760}$	$\frac{477}{880}$	$\frac{3969}{7040}$	$\frac{2001}{3520}$	$\frac{63}{110}$	$\frac{129}{220}$	$\frac{3}{5}$	$\frac{3}{5}$
7	$\frac{6}{11}$	$\frac{15561}{28160}$	$\frac{7881}{14080}$	$\frac{4041}{7040}$	$\frac{4113}{7040}$	$\frac{2073}{3520}$	$\frac{261}{440}$	$\frac{3}{5}$	$\frac{3}{5}$	$\frac{3}{5}$
Total	$\frac{6}{11}$	$\frac{57}{55}$	$\frac{81}{55}$	$\frac{102}{55}$	$\frac{24}{11}$	$\frac{27}{11}$	$\frac{147}{55}$	$\frac{156}{55}$	$\frac{162}{55}$	3
Π_k^\triangleright	$\frac{6}{11}$	$\frac{27}{55}$	$\frac{24}{55}$	$\frac{21}{55}$	$\frac{18}{55}$	$\frac{3}{11}$	$\frac{12}{55}$	$\frac{9}{55}$	$\frac{6}{55}$	$\frac{3}{55}$

TABLE 3 – Comment obtenir $\lambda_5^5 = \frac{1}{2}(A_5^5 + B_5^5) = \frac{357}{704}$ dans la table 2 ? Calcul de A_5^5

λ_4^6	$\sum_{s=1}^5 \lambda_s^6$	$\sum_{s=1}^4 \lambda_s^5$	Π_6^\triangleright	b-c-d	A_5^5
(a)	(b)	(c)	(d)	(e)	$\max(a, e)$
$\frac{261}{880}$	$\frac{93}{440} + \frac{3}{11} + \frac{261}{880} + \frac{909}{1760}$	$\frac{213}{880} + \frac{501}{1760}$	$\frac{3}{11}$	$\frac{219}{440}$	$\frac{219}{440}$

TABLE 4 – Comment obtenir $\lambda_5^5 = \frac{1}{2}(A_5^5 + B_5^5) = \frac{357}{704}$ dans la table 2 ? Calcul de B_5^5

i	λ_5^6	$\sum_{s=8-i}^5 \Pi_s^\triangleright$	$\sum_{s=5}^{i-1} \lambda_s^6$	g-h-c
	(f)	(g)	(h)	
5	$\frac{909}{1760}$	$\frac{24}{55} + \frac{21}{55} + \frac{18}{55}$	0	$\frac{99}{160}$
6	$\frac{909}{1760}$	$\frac{27}{55} + \frac{24}{55} + \frac{21}{55} + \frac{18}{55}$	$\frac{909}{1760}$	$\frac{261}{440}$
7	$\frac{909}{1760}$	$\frac{6}{11} + \frac{27}{55} + \frac{24}{55} + \frac{21}{55} + \frac{18}{55}$	$\frac{909}{1760} + \frac{2001}{3520}$	$\frac{2007}{3520}$

$B_5^5 = \min(\frac{909}{1760}, \frac{2007}{3520}, \frac{261}{440}, \frac{99}{160}) = \frac{909}{1760}$, $\lambda_5^5 = \frac{1}{2}(\frac{219}{440} + \frac{909}{1760}) = \frac{357}{704}$

6.2 Démonstration de la proposition 2.1

Soient Π et λ^N deux vecteurs respectivement de $]0, 1]^N$ et $]0, 1]^M$, avec $0 < M \leq N$. On note $\lambda^{N\oplus}$ la version de λ^N complétée par $N - M$ valeurs 0. On rappelle que, par convention, les coefficients de λ^N et $\lambda^{N\oplus}$ sont ordonnés de manière croissante. Les conditions nécessaires et suffisantes de Schur (1911) et (Horn (1954)), qui assurent l'existence d'une matrice hermitienne de diagonale Π et de spectre $\lambda^{N\oplus}$ sont :

$$\sum_{s=1}^k \Pi_s^\triangleleft \geq \sum_{s=1}^k \lambda_s^{N\oplus} \quad \forall k = 1, \dots, N-1, \quad (13)$$

$$\sum_{k=1}^N \Pi_k = \sum_{k=1}^N \lambda_k^{N\oplus} = \sum_{j=1}^M \lambda_j^N. \quad (14)$$

On affecte séquentiellement une valeur aux λ_j^N , $j = 1, \dots, M$. Avec cette dernière notation, (13) devient $\lambda_j^N \leq \sum_{s=1}^{N-M+j} \Pi_s^\triangleleft - \sum_{s=0}^{j-1} \lambda_s^N$. Les contraintes d'ordre $\lambda_j^N \leq \lambda_{j+1}^N$ et la contrainte de trace (14) conduisent à imposer que λ_j^N plus petit que la moyenne des $(M - j + 1)$ valeurs propres restant à affecter, dont λ_j^N , soit $\lambda_j^N \leq (\sum_{k=1}^N \Pi_k - \sum_{s=0}^{j-1} \lambda_s^N) / (M - j + 1)$. Pour que les $M - j$ valeurs propres restant à affecter soient inférieures à 1 il faut que leur moyenne soit inférieure à 1 soit $\lambda_j^N \geq (\sum_{k=1}^N \Pi_k - \sum_{s=0}^{j-1} \lambda_s^N) - (M - j)$.

6.3 Démonstration du théorème 3.1

Si k est de la forme k_r alors $\{\lambda_s^k\}_{s=1}^n$ est composé de r valeurs 1, $n - r - 1$ valeurs 0 et d'une valeur dans $[0, 1]$ (Voir Loonis et Mary (2019)). D'après le théorème d'entrelacement de Cauchy, ce résultat est vrai pour tout k tel que $k_r \leq k < k_{r+1}$. On observe que r est la partie entière de $\sum_{s=1}^k \Pi_s$ et que par ailleurs $\sum_{s=1}^n \lambda_s^k = \sum_{s=1}^k \Pi_s = \text{Tr}(P_k^\Pi)$. On en déduit que la seule valeur propre de $\{\lambda_s^k\}_{s=1}^n$ qui est dans $[0, 1]$ vaut $\{\sum_{s=1}^k \Pi_s\}$. On montre alors que les seuls points extrémaux de l'ensemble $\{0 \leq x_s \leq 1, k = 1, \dots, n, \sum_{s=1}^n x_s = \sum_{s=1}^k \Pi_s\}$ sont précisément les $\{\lambda_s^k\}_{s=1}^n$. On peut par exemple raisonner par l'absurde en supposant qu'un point extrémal a deux coefficients dans $]0, 1[$, il peut alors s'écrire comme une combinaison convexe de points de l'ensemble ce qui est contradictoire. $\{\lambda_s^k\}_{s=1}^n$ est donc la solution du problème de minimisation de $\sum_{k=1}^n x_s(1 - x_s)$ sous la contrainte $\{0 \leq x_s \leq 1, k = 1, \dots, n, \sum_{s=1}^n x_s = \sum_{s=1}^k \Pi_s\}$ puisque la fonction objectif est concave. Cette fonction est précisément celle rappelée en (4). Elle donne la variance du nombre de points d'un plan déterminantal sur D_k , dont la diagonale est Π_1, \dots, Π_k et dont le noyau a ses valeurs propres non nulles parmi $\{x_1, \dots, x_n\}$.

6.4 Démonstration de la proposition 3.1

On remarque que les k_r^1 sont les mêmes que les k_r^2 , à l'ordre prêt. On a $k_r^2 = N + 1 - k_{n+1-r}^1$. On a également $\alpha_{k_r^1} = \Pi_{N+1-k_{n+1-r}^2} - \alpha_{N+1-k_{n+1-r}^2}$ et $\Pi_{k_r^1} - \alpha_{k_r^1} = \alpha_{N+1-k_{n+1-r}^2}$. Les différentes valeurs de K_{kl} ne dépendent donc pas de l'ordre puisqu'elles font intervenir de manière symétrique les α et les $\Pi - \alpha$, notamment pour les $\gamma_r^{r'}$.

6.5 Algorithmes de Fickus et collab. (2013)

L'algorithme général repose sur deux sous algorithmes permettant de construire les différentes quantités utilisées dans les Équations (18) et (19). Pour un vecteur Π donné, on suppose que l'on a fixé des valeurs aux paramètres M, Ω, ρ ce qui a permis de construire les séquences $\{\lambda\}_{k=1}^N$ et $\{V\}_{k=1}^N$. Pour U^1 , on pourra prendre $U^1 = I_M$ par exemple.

Algorithme 6.1 (Fickus et collab. (2013))

Pour $k = 2$ à N ,

1. Poser $E_1^k = E_2^{k-1} = \{1, \dots, M\}$;
2. Pour $j = 1$ à M ;
 - Si $\lambda_j^{k-1} \in \{\lambda_{E_1^k}^k\}$, où $\{\lambda_{E_1^k}^k\}$ est l'ensemble des valeurs distincts du sous vecteur de λ^k indexé par E_1^k alors ;
 - $E_2^{k-1} := E_2^{k-1} \setminus \{j\}$;
 - $E_1^k := E_1^k \setminus \{s\}$ où $j' = \min\{j'' \in E_1^k : \lambda_{j''}^k = \lambda_j^{k-1}\}$;
3. Construire \overline{E}_2^{k-1} et \overline{E}_1^k , complémentaires dans $\{1, \dots, M\}$ de E_2^{j-1} et E_1^j .

Algorithme 6.2 [Fickus et collab. (2013)]

1. Poser $\varphi^1 = \sqrt{\Pi_1^T} u^1$ où u^1 est la première colonne de U^1 ;
2. pour $k = 2$ à N faire
 - Construire les ensembles $E_1^k, E_2^{k-1}, \overline{E}_1^k, \overline{E}_2^{k-1}$, tels que $E_1^k \cup \overline{E}_1^k = E_2^{k-1} \cup \overline{E}_2^{k-1} = \{1, \dots, M\}$ et $E_1^k \cap \overline{E}_1^k = E_2^{k-1} \cap \overline{E}_2^{k-1} = \emptyset$ selon les principes de l'Algorithme 6.1
 - Soit $r_k = \text{card}(E_1^k) = \text{card}(E_2^{k-1})$
 - Soit $E_1'^k = (M+1)e_{r_k} - E_1^k$ (resp. $E_2'^{k-1}$), $\overline{E}_1'^k = (M+1)e_{M-r_k} - \overline{E}_1^k$ (resp. $\overline{E}_2'^{k-1}$).
 - Soit σ_1^k (resp. σ_2^k) l'unique permutation de $\{1, \dots, M\}$ croissante en $E_1'^k$ et $\overline{E}_1'^k$ (resp. $E_2'^{k-1}$ et $\overline{E}_2'^{k-1}$) et telle que $\sigma_1^k(j) \in \{1, \dots, r_k\}$ pour tout $j \in E_1'^k$ (resp. $\sigma_2^{k-1}(j) \in \{1, \dots, r_k\}$ pour tout $j \in E_2'^{k-1}$). Soit Σ_1^k (resp. Σ_2^{k-1}) les matrices de permutation associées.
 - Soit $R^k = J_{r_k}(\lambda_{|E_2^{k-1}}^{k-1}, \lambda_{|E_1^k}^k)$ une matrice de taille $(r_k \times 2)$ où J_{r_k} désigne la matrice anti-diagonale de taille r_k , et $\lambda_{|E_2^{k-1}}^{k-1}$ (resp. $\lambda_{|E_1^k}^k$) le vecteur extrait de λ^{k-1} (resp. λ^k) dont les rangs sont indexés par E_2^{k-1} (resp. E_1^k).
 - Soit v^k, w^k deux vecteurs de taille r_k et W^k une matrice $r_k \times r_k$ telle que :

$$v_i^k = \sqrt{\frac{\prod_{i'=1}^{r_k} (R_{i'1}^k - R_{i'2}^k)}{\prod_{\substack{i' \neq i \\ i'=1}}^{r_k} (R_{i'1}^k - R_{i'1}^k)}} \quad (15)$$

$$w_i^k = \sqrt{\frac{\prod_{i'=1}^{r_k} (R_{i'2}^k - R_{i'1}^k)}{\prod_{\substack{i' \neq i \\ i'=1}}^{r_k} (R_{i'2}^k - R_{i'2}^k)}}; \quad (16)$$

$$W^k = (e_{r_k} \odot R_{.2}^{k\top} - e_{r_k}^\top \odot R_{.1}^k)^{[-1]} \odot (v^k w^{k\top}); \quad (17)$$

où $[-1]$ désigne l'inverse matricielle au sens du produit de Hadamard.

— Poser

$$\varphi^k = U^{k-1} V^{k-1} \Sigma_2^{k-1\top} \begin{bmatrix} v^k \\ 0_{M-r_k} \end{bmatrix}, \quad (18)$$

$$U^k = U^{k-1} V^{k-1} \Sigma_2^{k-1\top} \begin{bmatrix} W^k 0_{(r_k, M-r_k)} \\ 0_{(M-r_k, r_k)} I_{(M-r_k, M-r_k)} \end{bmatrix} \Sigma_1^k, \quad (19)$$

- et construire Φ^k la matrice dont les colonnes sont les $\{\varphi^s\}_{s=1}^{s=k}$.
— U^k est une base de vecteurs propres orthonormés de $\Phi^k(\Phi^k)^\top$ dont le spectre est λ^k .

Le théorème affirme que la construction précédente conduit à toutes les matrices hermitiennes de diagonale Π^\triangleright et de spectre λ^N . Inversement toute matrice hermitienne peut être construite selon ce procédé.

6.6 Construire les éléments des algorithmes 6.1 et 6.2

On montre ici comment obtenir les différentes quantités des algorithmes 6.2 et 6.1 à partir du tableau 2 pour $k = 9$.

$$E_2^8 = \{1, 2, 5, 6\}, E_1^9 = \{1, 4, 5, 7\}$$

$$k = 9, r_9 = 4, R^9 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{12}{55} & \frac{3}{11} \\ \frac{63}{220} & \frac{3}{10} \\ \frac{6}{11} & \frac{63}{110} \\ \frac{129}{220} & \frac{3}{5} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{129}{220} & \frac{3}{5} \\ \frac{6}{11} & \frac{63}{110} \\ \frac{63}{220} & \frac{3}{10} \\ \frac{12}{55} & \frac{3}{11} \end{pmatrix}$$

$$v_1^9 = \sqrt{-\frac{(\frac{3}{5} - \frac{129}{220})(\frac{63}{110} - \frac{129}{220})(\frac{3}{10} - \frac{129}{220})(\frac{3}{11} - \frac{129}{220})}{(\frac{6}{11} - \frac{129}{220})(\frac{63}{220} - \frac{129}{220})(\frac{12}{55} - \frac{129}{220})}}$$

$$\overline{E}_2^8 = \{5, 4, 1\}, \overline{E}_1^9 = \{6, 5, 2\}$$

$$\sigma_2^8 \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \\ 5 \\ 6 \\ 7 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \\ 1 \\ 2 \\ 6 \\ 7 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix}, \sigma_1^9 \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \\ 5 \\ 6 \\ 7 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 5 \\ 2 \\ 3 \\ 6 \\ 7 \\ 4 \end{pmatrix}$$

Pour une permutation σ donnée, la matrice associée est telle que :

$$\Sigma_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{si } i = \sigma(j) \\ 0 & \text{autrement} \end{cases}$$

$$\Sigma_2^8 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \Sigma_1^9 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

6.7 Démonstration de la proposition 2.3

Pour le premier point, une application itérative de (19) donne pour $l > k$:

$$U^{l-1} = U^{k-1} \prod_{s=k}^{l-1} V^{s-1} \Sigma_2^{s-1\top} \begin{bmatrix} W^s & 0_{r_s} \\ 0_{M-r_s} & I_{M-r_s} \end{bmatrix} \Sigma_1^s$$

et $(\overline{\Phi}^{N\top} \Phi^N)_{kl} = \overline{\varphi}^k \varphi^l$ ne dépend pas de U^1 puisque l'on a

$$\begin{aligned} \overline{\varphi}^k \varphi^l = & \begin{bmatrix} v^{k\top} & 0_{M-r_k}^\top \end{bmatrix} \Sigma_2^{k-1} \overline{V^{k-1}}^\top \left(\underbrace{\overline{U^{k-1}}^\top U^{k-1}}_{=I_M} \right) \\ & \left(\prod_{s=k}^{l-1} V^{s-1} \Sigma_2^{s-1\top} \begin{bmatrix} W^s & 0_{r_s} \\ 0_{M-r_s} & I_{M-r_s} \end{bmatrix} \Sigma_1^s \right) V^{l-1} \Sigma_2^{l-1\top} \begin{bmatrix} v^l \\ 0_{M-r_l} \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (20)$$

Pour le second point, les Formules (5), (6) et (7) ainsi que la Proposition 2.2 garantissent que seules les valeurs propres 1 et 0 peuvent avoir des multiplicités supérieures à 1, comme l'illustre la table 5. Pour $M-1 \leq k \leq N-M+1$, les matrices V^k sont donc diagonales. Pour $k < M-1$, les blocs unitaires associés à la valeur propre 0 sont inutiles car ces valeurs ont été rajoutées de manière fictives pour parvenir à un vecteur λ^k de taille n . Pour $k > N-n+3$, V^{k-1} a un bloc de taille $N-k$ associé à la valeur propre 1, les autres blocs, au nombre de $n - (N-k)$ sont de taille 1. L'entier r_k vaut $n - (N-k)$ et l'Équation (18) montre que seuls les blocs de taille 1 interviennent dans le calcul de φ^k . On peut prendre donc n'importe quelle matrice unitaire pour le bloc de dimension supérieur à 1 et donc une matrice diagonale. Au finale V^{k-1} peut être prise diagonale.

	Valeurs des λ_j^k , pour $M = n$ et $0 < \Omega_{jk} < 1$											
j	1	2	3	4	...	k	...	N-4	N-3	N-2	N-1	N
1	0	0	0	0	•	•	•	•	•	•	•	1
2	0	0	0	•	•	•	•	•	•	•	1	1
3	0	0	•	•	•	•	•	•	•	1	1	1
4	0	•	•	•	•	•	•	•	1	1	1	1
5	•	•	•	•	•	•	•	1	1	1	1	1

TABLE 5 – Structure de la séquence $\{\lambda_j^k\}_{k=1}^N$ pour une matrice de projection avec $n = 5$ dans le cas $\Omega \in]0, 1[^{(n \times N)}$. Les valeurs définies par des points sont dans $]0, 1[$ et sont toutes différentes.

6.8 Démonstration du théorème 3.2

D'après la paramétrisation des λ^k prendre $\Omega = 0^{n \times (N-1)}$ conduit à prendre la plus petite valeur possible de λ_j^k , à savoir A_j^k . λ^k et $\{\Pi_s^\triangleright\}_{s=1}^k$ sont par ailleurs le spectre et la diagonale de la matrice hermitienne $\overline{\Phi}^{k\top} \Phi^k$ contractante et vérifient à ce titre les conditions (13) et (14). Enfin, les matrices $\overline{\Phi}^{k\top} \Phi^k$ et $\overline{\Phi}^{k+1\top} \Phi^{k+1}$ étant emboîtées, elles vérifient des conditions d'entrelacement de Cauchy (Horn et Johnson (1991)) : $\lambda_j^{k+1} \leq \lambda_j^k \leq \lambda_{j-1}^{k+1}$. On rappelle également la définition des entiers k_r pour $r = 1, \dots, n-1$, qui sont tels que $1 < k_r \leq N$ et $\sum_{k=1}^{k_r-1} \Pi_k < r$ et $\sum_{k=1}^{k_r} \Pi_k \geq r$.

On donne dans un premier temps une formulation explicite de λ_j^k , que l'on exhibe en parcourant k de $N-1$ à 1 et j de 1 à j (Voir tableau 6). Comme $\lambda^N = 1^n$, les contraintes d'entrelacement donnent $\lambda_j^{N-1} = 1, (j = 2, \dots, n)$. La condition (14) sur la trace donne $\lambda_1^{N-1} + (n-1) = \sum_{k=1}^{N-1} \Pi_k^\triangleright$ ie $\lambda_1^{N-1} = \sum_{k=1}^{N-1} \Pi_k^\triangleright - (n-1)$. L'équation (5) conduit à $A_1^{N-2} = \max\{\lambda_0^{N-1}, \sum_{s=1}^1 \lambda_s^{N-1} - \sum_{s=1}^0 \lambda_s^{k-1} - \Pi_{N-1}^\triangleright\} = \max\{0, \sum_{k=1}^{N-1} \Pi_k^\triangleright - (n-1) - 0 - \Pi_{N-1}^\triangleright\}$. Si $k_{n-1} \leq N-2$, $\lambda_1^{N-2} = \sum_{k=1}^{N-2} \Pi_k^\triangleright - (n-1)$. Avec un raisonnement équivalent, $\lambda_1^k = \sum_{s=1}^k \Pi_s^\triangleright - (n-1)$ pour $k_{n-1} \leq k < N$ et $\lambda_j^k = 1$ ($j = 2, \dots, n$). Si $k = k_{n-1} - 1$, $A_1^{k_{n-1}-1} = 0 = \lambda_1^{k_{n-1}-1}$ et $\lambda_j^{k_{n-1}-1} = 1, j = 3, \dots, n$ du fait de l'entrelacement. La contrainte de trace donne alors $\lambda_2^{k_{n-1}-1} = \sum_{s=1}^{k_{n-1}-1} \Pi_s^\triangleright - (n-2)$. La démonstration est la même pour les autres valeurs λ_j^k .

TABLE 6 – Valeurs de λ_j^k pour $k_r - 1 \leq k \leq N$ et $j \in \{n-r+1, n-r, n-r+1\}$

	k								
j	$k_r - 1$	k_r	$k_r + 1$...	$k_{r+1} - 1$	k_{r+1}	$k_{r+1} + 1$...	$N = k_n$
n-r-1	0	0	0	0	0	$\sum_1^{k_{r+1}} \Pi_s^\triangleright - r - 1$	1	...	1
n-r	0	$\sum_1^{k_r} \Pi_s^\triangleright - r$	$\sum_1^{k_r+1} \Pi_s^\triangleright - r$...	$\sum_1^{k_{r+1}-1} \Pi_s^\triangleright - r$	1	1	1	1
n-r+1	$\sum_1^{k_r-1} \Pi_s^\triangleright - (r-1)$	1	1	1	1	1	1	1	1

Il est possible maintenant de déduire la valeur des différentes quantités apparaissant dans les algorithmes 6.1 et 6.2.

Si $k_r < k < k_{r+1}$:

$$r_k = 1, R^k = \begin{pmatrix} \sum_{s=1}^{k-1} \Pi_s^\triangleright - r & \sum_{s=1}^k \Pi_s^\triangleright - r \end{pmatrix}, v^k = w^k = \sqrt{\Pi_k^\triangleright}, W^k = 1, \begin{bmatrix} W^{k^\top} & 0 \\ 0_{n-1} & I_{n-1} \end{bmatrix} = I_n,$$

$$E_1^k = E_2^{k-1} = \{n-r\}, E_1'^k = E_2'^{k-1} = \{r+1\}, \Sigma_1^k = \Sigma_2^{k-1}$$

σ_1^k et σ_2^{k-1} permutent les valeurs 1 et $r+1$, et $\Sigma_2^{k-1} \Sigma_1^{k^\top} = I_n$. Si $\{V^k = I_n\}_{k=1}^{k=N}$, le produit intervenant dans le calcul de K_{kl} ne dépend que des $k_r, r = 1, \dots, n-1$.

Si $k = k_r, r = 1, \dots, n-1$:

$$r_{k_r} = 2, R^{k_r} = \begin{pmatrix} \sum_{j'=1}^{k_r-1} \Pi_{j'}^\triangleright - r - 1 & 1 \\ 0 & \sum_{j'=1}^{k_r} \Pi_{j'}^\triangleright - r \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 - \alpha_{k_r} & 1 \\ 0 & \Pi_{k_r}^\triangleright - \alpha_{k_r} \end{pmatrix}$$

$$v^{k_r} = \begin{pmatrix} \sqrt{\frac{\alpha_{k_r}(1-\Pi_{k_r}^\triangleright)}{1-\alpha_{k_r}}} \\ \sqrt{\frac{\Pi_{k_r}^\triangleright - \alpha_{k_r}}{1-\alpha_{k_r}}} \end{pmatrix}, w^{k_r} = \begin{pmatrix} \sqrt{\frac{\alpha_{k_r}}{1-(\Pi_{k_r}^\triangleright - \alpha_{k_r})}} \\ \sqrt{\frac{(1-\Pi_{k_r}^\triangleright)(\Pi_{k_r}^\triangleright \alpha_{k_r})}{1-(\Pi_{k_r}^\triangleright - \alpha_{k_r})}} \end{pmatrix}.$$

$$W^{k_r} = \begin{pmatrix} \frac{1}{\alpha_{k_r}} & \frac{1}{\Pi_{k_r}^\triangleright - 1} \\ 1 & \frac{1}{\Pi_{k_r}^\triangleright - \alpha_{k_r}} \end{pmatrix} \odot \begin{pmatrix} \alpha_{k_r} \sqrt{\frac{1-\Pi_{k_r}^\triangleright}{(1-\alpha_{k_r})(1-(\Pi_{k_r}^\triangleright - \alpha_{k_r}))}} & (1-\Pi_{k_r}^\triangleright) \sqrt{\frac{\alpha_{k_r}(\Pi_{k_r}^\triangleright - \alpha_{k_r})}{(1-\alpha_{k_r})(1-(\Pi_{k_r}^\triangleright - \alpha_{k_r}))}} \\ \sqrt{\frac{\alpha_{k_r}(\Pi_{k_r}^\triangleright - \alpha_{k_r})}{(1-\alpha_{k_r})(1-(\Pi_{k_r}^\triangleright - \alpha_{k_r}))}} & (\Pi_{k_r}^\triangleright - \alpha_{k_r}) \sqrt{\frac{1-\Pi_{k_r}^\triangleright}{(1-\alpha_{k_r})(1-(\Pi_{k_r}^\triangleright - \alpha_{k_r}))}} \end{pmatrix} =$$

$$\frac{1}{\sqrt{(1-\alpha_{k_r})(1-(\Pi_{k_r}^\triangleright - \alpha_{k_r}))}} \begin{pmatrix} \sqrt{1-\Pi_{k_r}^\triangleright} & -\sqrt{\alpha_{k_r}(\Pi_{k_r}^\triangleright - \alpha_{k_r})} \\ \sqrt{\alpha_{k_r}(\Pi_{k_r}^\triangleright - \alpha_{k_r})} & \sqrt{1-\Pi_{k_r}^\triangleright} \end{pmatrix}$$

$$E_1^{k_r} = \{n-r, n\}, E_2^{k_r-1} = \{n-r, n-r+1\}, E_1'^{k_r} = \{1, r+1\}, E_2'^{k_r-1} = \{r, r+1\}$$

$\Sigma_2^{(k_r-1)\top} X$ échange les lignes $(1, 2)$ et $(r, r+1)$ de X , alors que $X\Sigma_1^{k_r-1}$ échange les colonnes 2 et $r+1$. On a alors :

$$\Sigma_2^{k_r-1\top} \begin{bmatrix} W^{k_r} & 0_{(2,n-2)} \\ 0_{(n-2,2)} & I_n - 2 \end{bmatrix} \Sigma_1^{k_r} = \begin{pmatrix} 0_{(r-1,1)} & I_{r-1} & 0_{(r-1,1)} & 0_{(r-1,n-r-1)} \\ a_r & 0_{(1,r-1)} & -b_r & 0_{(1,n-r-1)} \\ b_r & 0_{(1,r-1)} & a_r & 0_{(1,n-r-1)} \\ 0_{(n-r-1,1)} & 0_{(n-r-1,r-1)} & 0_{(n-r-1,1)} & I_{n-r-1} \end{pmatrix}. \quad (21)$$

où $a_r = \frac{\sqrt{1-\Pi_{k_r}^\triangleright}}{\sqrt{(1-\alpha_{k_r})(1-(\Pi_{k_r}^\triangleright - \alpha_{k_r}))}}$ et $b_r = \frac{\sqrt{\alpha_{k_r}(\Pi_{k_r}^\triangleright - \alpha_{k_r})}}{\sqrt{(1-\alpha_{k_r})(1-(\Pi_{k_r}^\triangleright - \alpha_{k_r}))}}$.

il est possible maintenant de calculer les valeurs de K_{kl} dans le cas particulier $\{V^k = I_n\}_{k=1}^{N-1}$. Soient $0 < k_r \leq k < l \leq k_{r'+1}$, d'après (20), il faut pour cela calculer des quantités telles que :

$$\underbrace{\begin{bmatrix} v^{k\top} & 0_{n-r_k}^\top \end{bmatrix}}_{\mathcal{A}} \Sigma_2^{k-1} \underbrace{\left[\prod_s \Sigma_2^{(k_s-1)\top} \begin{bmatrix} W^{k_s} & 0_{2 \times (n-2)} \\ 0_{(n-2) \times 2} & I_{n-2} \end{bmatrix} \Sigma_1^{k_s\top} \right]}_{\mathcal{B}} \underbrace{\Sigma_2^{l-1\top} \begin{bmatrix} v^l \\ 0_{n-r_l} \end{bmatrix}}_{\mathcal{C}} \quad (22)$$

où la plage de variation de s ainsi que la structure de v^k, v^l dépendent de $k = k_r$ et/ou $l = k_{r'}$. On considère donc les différentes situations décrites dans le tableau 1.

1. $\boxed{k_r < k < k_{r+1} \leq k_{r'} < l < k_{r'+1}}$: le seul coefficient de \mathcal{A} qui est différent de 0 est le $(r+1)^{\text{ème}}$. Sa valeur est $\sqrt{\Pi_k^\triangleright}$. Le seul coefficient de \mathcal{C} différent de 0 est le $(r'+1)^{\text{ème}}$. Sa valeur est $\sqrt{\Pi_l^\triangleright}$. Il faut juste connaître le coefficient $(r+1, r'+1)$ de \mathcal{B} pour s variant de $r+1$ à r' . Après quelques calculs, on trouve $(-1)^{r'-r} \prod_{s=r+1}^{s=r'} b_s$ et $K_{kl} = (-1)^{r'-r} \sqrt{\Pi_k^\triangleright} \sqrt{\Pi_l^\triangleright} \gamma_r^{r'}$, qui, au signe $(-1)^{r'-r}$ près, correspond à la valeur de la table 1.
2. $\boxed{k_r = k \leq k_{r'} < l < k_{r'+1}}$: les seuls coefficients de \mathcal{A} différents de 0 sont les $r^{\text{ème}}$ et le $r+1^{\text{ème}}$. Leur valeur est $\sqrt{\frac{\alpha_k(1-\Pi_k^\triangleright)}{1-\alpha_k}}$ et $\sqrt{\frac{\Pi_k^\triangleright - \alpha_k}{1-\alpha_k}}$. Le seul élément non nul de \mathcal{C} est le $r'+1^{\text{ème}}$, sa valeur est $\sqrt{\Pi_l^\triangleright}$. Pour connaître K_{kl} , il faut connaître les coefficient $(r, r'+1)$ et $(r+1, r'+1)$ de \mathcal{B} . Après quelques calculs, on trouve respectivement $(-1)^{r'-r+1} \prod_{s=r}^{s=r'} b_s$ et $(-1)^{r'-r} a_r \prod_{s=r+1}^{s=r'} b_s$. Soit :

$$\begin{aligned} K_{kl} &= (-1)^{r'-r+1} \sqrt{\Pi_l^\triangleright} \left[\prod_{s=r+1}^{s=r'} b_s \right] \left(\sqrt{\frac{\alpha_k(1-\Pi_k^\triangleright)}{1-\alpha_k}} b_r - \sqrt{\frac{\Pi_k^\triangleright - \alpha_k}{1-\alpha_k}} a_r \right) \\ &= (-1)^{r'-r} \sqrt{\Pi_l^\triangleright} \sqrt{\frac{(1-\Pi_k^\triangleright)(\Pi_k^\triangleright - \alpha_k)}{1-(\Pi_k^\triangleright - \alpha_k)}} \gamma_r^{r'}. \end{aligned}$$

3. $\boxed{k_r < k < k_{r+1} \leq l = k_{r'+1}}$: le seul terme de \mathcal{A} différent de 0 est le $(r+1)^{\text{ème}}$, il vaut $\sqrt{\Pi_k^\triangleright}$. Les seuls coefficients de \mathcal{C} différents de 0 sont les $(r'+1)^{\text{ème}}$ et $(r'+2)^{\text{ème}}$. Ils valent $\sqrt{\frac{\alpha_l(1-\Pi_l^\triangleright)}{1-\alpha_l}}$ et $\sqrt{\frac{\Pi_l^\triangleright - \alpha_l}{1-\alpha_l}}$. Pour calculer K_{kl} , il faut connaître les termes $(r+1, r'+1)$ et

$(r+1, r'+2)$ de \mathcal{B} . Après un peu de calcul, nous avons respectivement $(-1)^{r'-r} \prod_{s=r+1}^{s=r'} b_s$ et 0, soit

$$\begin{aligned} K_{kl} &= (-1)^{r'-r} \sqrt{\prod_k^{\triangleright}} \left[\prod_{s=r+1}^{s=r'} b_s \right] \sqrt{\frac{\alpha_l(1-\prod_l^{\triangleright})}{1-\alpha_l}} \\ &= (-1)^{r'-r} \sqrt{\prod_k^{\triangleright}} \sqrt{\frac{\alpha_l(1-\prod_l^{\triangleright})}{1-\alpha_l}} \gamma_r^{r'}. \end{aligned}$$

4. $\boxed{k_r = k < k_{r'+1} = l}$: les seuls coefficients de \mathcal{A} différents de 0 sont les $r^{\text{ème}}$ et $r+1^{\text{ème}}$. Leur valeur est $\sqrt{\frac{\alpha_k(1-\prod_k^{\triangleright})}{1-\alpha_k}}$ et $\sqrt{\frac{\prod_k^{\triangleright}-\alpha_k}{1-\alpha_k}}$. Les seuls coefficients de \mathcal{C} différents de 0 sont les $((r'+1)^{\text{ème}})$ et $(r'+2)^{\text{ème}}$. Ils valent $\sqrt{\frac{\alpha_l(1-\prod_l^{\triangleright})}{1-\alpha_l}}$ et $\sqrt{\frac{\prod_l^{\triangleright}-\alpha_l}{1-\alpha_l}}$. Pour calculer K_{kl} , il faut connaître les termes $(r, r'+1)$, $(r+1, r'+1)$, $(r, r'+2)$, $(r+1, r'+2)$ de \mathcal{B} . Après quelques calculs, on trouve respectivement $(-1)^{r'-r+1} \prod_{s=r}^{s=r'} b_s$, $(-1)^{r'-r} a_r \prod_{s=r+1}^{s=r'} b_s$, 0 et 0. Soit :

$$\begin{aligned} K_{kl} &= (-1)^{r'-r+1} \sqrt{\frac{\alpha_l(1-\prod_l^{\triangleright})}{1-\alpha_l}} \left[\prod_{s=r+1}^{s=r'} b_s \right] \left(\sqrt{\frac{\alpha_k(1-\prod_k^{\triangleright})}{1-\alpha_k}} b_r - \sqrt{\frac{\prod_k^{\triangleright}-\alpha_k}{1-\alpha_k}} a_r \right) \\ &= (-1)^{r'-r} \sqrt{\frac{\alpha_l(1-\prod_l^{\triangleright})}{1-\alpha_l}} \sqrt{\frac{(1-\prod_k^{\triangleright})(\prod_k^{\triangleright}-\alpha_k)}{1-(\prod_k^{\triangleright}-\alpha_k)}} \gamma_r^{r'}. \end{aligned}$$

Pour le cas général $\{V^k \neq I_n\}_{k=1}^{N-1}$, tout en ayant toujours $\Omega = 0^{n \times N}$, on constate dans un premier temps que, pour $k_r \leq k \leq k_{r+1} - 1$, λ^k est constitué de $n - r - 1$ valeurs 0, 1 valeur fois $\sum_{s=1}^k \prod_s^{\triangleright} - r$ et r fois la valeur 1 (tableau 6). La matrice V^k associée est donc composée de 3 blocs unitaires dont 1 de taille 1 située en $(r+1, r+1)$, soit $\exp(i\pi \rho_{r+1,k})$ sa valeur.

On constate ensuite que l'équation 20 ne dépend pas de V^{k-1} . On s'intéresse alors au produit

$$\prod_{s=k+1}^{l-1} V^{s-1} \Sigma_2^{s-1\top} \begin{bmatrix} W^s & 0_{r_s} \\ 0_{M-r_s} & I_{M-r_s} \end{bmatrix} \Sigma_1^s \quad (23)$$

En se souvenant que l'on a

$$\Sigma_2^{s-1\top} \begin{bmatrix} W^s & 0_{r_s} \\ 0_{M-r_s} & I_{M-r_s} \end{bmatrix} \Sigma_1^s = I_n$$

pour $k_r < s < k_{r+1}$, on réécrit 23 sous la forme d'un produit de termes du

$$\prod_{s=k_r+1}^{k_{r+1}} V^{s-1} \Sigma_2^{s-1\top} \begin{bmatrix} W^s & 0_{r_s} \\ 0_{M-r_s} & I_{M-r_s} \end{bmatrix} \Sigma_1^s = \underbrace{\left(\prod_{s=k_r+1}^{k_{r+1}} V^{s-1} \right)}_A \Sigma_2^{s-1\top} \underbrace{\begin{bmatrix} W^{k_{r+1}} & 0_{r_{k_{r+1}}} \\ 0_{M-r_{k_{r+1}}} & I_{M-r_{k_{r+1}}} \end{bmatrix}}_B \Sigma_1^{k_{r+1}}.$$

La matrice A est bloc diagonale par construction, avec un bloc de dimension 1 en position $(r+1, r+1)$ dont la valeur est $\exp(i\pi \sum_{s=k_r}^{k_{r+1}-1} \rho_{r+1,s})$. Le produit AB conduit donc à multiplier la $r+1^{\text{ème}}$ colonne de B par $\exp(i\pi \sum_{s=k_r}^{k_{r+1}-1} \rho_{r+1,s})$. D'après (21), cette colonne comporte les valeurs a_r et b_r qui interviennent dans le calcul des coefficients. Quitte à adapter ces principes, à la marge, pour tenir compte de la position de k et de l par rapport aux entiers de la forme k_r , on voit que les coefficients de $K^{\Pi^{\triangleright}}(M = n, \Omega = 0^{n \times N}, \rho)$ se déduisent de ceux de $K^{\Pi^{\triangleright}}(M = n, \Omega = 0^{n \times N}, \rho = 0^{n \times (N-1)})$ par une multiplication par $\exp(i\pi \sum_{s=k_r}^{k_{r+1}-1} \rho_{r+1,s})$. On rajoute le terme en $l-1$ en considérant la partie $V^{l-1} \Sigma_2^{l-1\top} \begin{bmatrix} v^l & 0_{M-r_l}^\top \end{bmatrix}^\top$ de (20) qui n'avait pas été considérée jusqu'ici.

6.9 Démonstration du Théorème 3.3

En rappelant que $\lambda_j^N = 1$ pour $j = 1, \dots, n$, on montre dans un premier temps la relation sur les valeurs propres. Choisir $\Omega_{jk} = 1$ conduit à prendre la plus grande valeur possible pour λ_j^k d'après (7). D'après les relations d'entrelacements, c'est bien le cas pour λ_j^k , $k = 2, \dots, n$ puisque $\lambda_j^k = \lambda_{j-1}^{k+1}$. Choisir $\lambda_1^k = \lambda_n^k - \Pi_{k+1}$ conduit naturellement à bien vérifier les contraintes de trace : $\sum_{s=1}^k \Pi_s = \sum_{j=1}^n \lambda_j^k$. Il reste à vérifier que $\lambda_1^k \leq \lambda_1^{k+1}$. On observe que $\lambda_1^k = 1 - \sum_{s=1}^{p_k} \Pi_{k+1+ns}^\triangleright$ où p_k est le quotient de la division euclidienne de $N - k - 1$ par n . Si $p_k = p_{k+1}$, $\lambda_1^k - \lambda_1^{k+1} = \sum_{s=1}^{p_k} (\Pi_{k+2+ns}^\triangleright - \Pi_{k+1+ns}^\triangleright) \leq 0$, puisque les coefficients de Π^\triangleright sont ordonnés. Si $p_k = p_{k+1} + 1$, $\lambda_1^k - \lambda_1^{k+1} = \sum_{s=1}^{p_k} (\Pi_{k+2+ns}^\triangleright - \Pi_{k+1+ns}^\triangleright) - \Pi_N^\triangleright \leq 0$.

Pour $n < k \leq N$, on déduit que

$$(\lambda^{k-1}, \lambda^k) = \begin{pmatrix} \lambda_1^{k-1} & \lambda_1^k \\ \lambda_1^k & \lambda_1^{k+1} \\ \lambda_1^{k+1} & \lambda_1^{k+2} \\ \vdots & \vdots \\ \lambda_1^{k+n-2} & \lambda_1^{k+n-1} \\ \lambda_1^{k+n-1} & \lambda_1^{k+n} \end{pmatrix}$$

et que $r_k = 1$, $R^k = (\lambda_1^{k-1}, \lambda_1^{k+n-1})$, $v_k = w_k = \sqrt{\lambda_1^{k+n-1} - \lambda_1^{k-1}} = \sqrt{\Pi_k^\triangleright}$, $W^k = 1$, $E_2^{k-1} = \{1\}$, $E_1^k = \{n\}$, $E_2'^{k-1} = \{n\}$, $E_1'^k = \{1\}$. σ_1^2 est l'identité σ_2^{k-1} est la permutation qui transforme $(1, \dots, n)$ en $(n, 1, \dots, n-1)$. L'équation (20) donne alors :

$$\begin{aligned} K_{kl}^{\Pi^\triangleright}(M = n, \Omega = 1^{n \times N}, \rho = 0^{n \times (N-1)}) &= \begin{bmatrix} \sqrt{\Pi_k^\triangleright} & 0_{M-r_k}^\top \end{bmatrix} \Sigma_2^{k-1} \prod_{s=k}^{l-1} \Sigma_2^{s-1\top} \Sigma_2^{l-1\top} \begin{bmatrix} \sqrt{\Pi_l^\triangleright} \\ 0_{M-r_l} \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} \sqrt{\Pi_k^\triangleright} & 0_{M-r_k}^\top \end{bmatrix} \prod_{s=k+1}^l \Sigma_2^{s-1\top} \begin{bmatrix} \sqrt{\Pi_l^\triangleright} \\ 0_{M-r_l} \end{bmatrix} \end{aligned}$$

$K_{kl}^{\Pi^\triangleright}(M = n, \Omega = 1^{n \times N}, \rho = 0^{n \times (N-1)})$ est différent de 0 si et seulement si $\prod_{s=k+1}^l \Sigma_2^{s-1\top}$ envoie $\{1\}$ vers $\{1\}$. Ce n'est le cas que si $l \equiv k \pmod n$. Dans ce cas $\prod_{s=k+1}^l \Sigma_2^{s-1\top}$ est l'identité.

Si $\Pi_k = \frac{n}{N}$, $k = 1, \dots, N$, la structure des λ_j^k dépend de la divisibilité de N par n (voir tableaux (7) et (8)). Dans les deux cas nous avons $E_1^k = \{n\}$, $E_2^{k-1} = \{q_k + 1\}$, σ_1^k est l'identité et $\sigma_2^{k-1}((1, \dots, n - q_k - 1, n - q_k, n - q_k + 1, \dots, n)^\top) = (2, \dots, n - q_k, 1, n - q_k + 1, \dots, n)^\top$. Soit $\gamma_l(k)$, ($k = l + 1, \dots, N$) le rang du coefficient de la première colonne de $\prod_{s=k+1}^l \Sigma_2^{s-1\top}$ qui vaut 1. On constate que $\gamma_l(k)$ est $2n$ -périodique et que les $2n$ premières valeurs sont $n - q_{l+1}, n - q_{l+1} + 1, \dots, n, n, \dots, n - q_{l+1} + 1, n - q_{l+1}, 1, 2, \dots, n - q_{l+1} - 1, n - q_{l+1} - 1, \dots, 2, 1$. La valeur 1 est à la position $k = l + 1 + 2(q_{l+1} + 1)$ ou $k = l + 2n$. Comme $q_{l+1} = N - 2 - np_{l+1} - l$, nous avons $\gamma_l(k) = 1$ si $k = l \equiv 2n$ or $k - N = N - (l + 1) \equiv 2n$.

L'introduction de la matrice H_N est possible en suivant la même argumentation que pour la partie précédente. L'hypothèse $H1$ est nécessaire car quand elle n'est pas vérifiée, les permutations σ_2^{k-1} diffèrent selon une logique qui dépend de la structure des λ^k et qui semble difficile à anticiper, sauf dans le cas où $H2$ est vérifiée.

FIGURE 2 – Construction de Q^{Π^\triangleright} pour différentes configurations de n , N et valeurs de Π^\triangleright . Le signe \bullet indique que l'on ne connaît pas la forme explicite du coefficient.

(a) Cas général sous H_1 : $n = 2, N = 8$

$$Q^{\Pi^\triangleright} = \begin{pmatrix} \Pi_1^\triangleright & \bullet & \bullet & \bullet & \bullet & \bullet & \bullet & \bullet \\ \bullet & \Pi_2^\triangleright & \bullet & \bullet & \bullet & \bullet & \bullet & \bullet \\ \bullet & \bullet & \Pi_3^\triangleright & 0 & \sqrt{\Pi_3^\triangleright \Pi_5^\triangleright} & 0 & \sqrt{\Pi_3^\triangleright \Pi_7^\triangleright} & 0 \\ \bullet & \bullet & 0 & \Pi_4^\triangleright & 0 & \sqrt{\Pi_4^\triangleright \Pi_6^\triangleright} & 0 & \sqrt{\Pi_4^\triangleright \Pi_8^\triangleright} \\ \bullet & \bullet & \sqrt{\Pi_5^\triangleright \Pi_3^\triangleright} & 0 & \Pi_5^\triangleright & 0 & \sqrt{\Pi_5^\triangleright \Pi_7^\triangleright} & 0 \\ \bullet & \bullet & 0 & \sqrt{\Pi_6^\triangleright \Pi_4^\triangleright} & 0 & \Pi_6^\triangleright & 0 & \sqrt{\Pi_6^\triangleright \Pi_8^\triangleright} \\ \bullet & \bullet & \sqrt{\Pi_7^\triangleright \Pi_3^\triangleright} & 0 & \sqrt{\Pi_7^\triangleright \Pi_5^\triangleright} & 0 & \Pi_7^\triangleright & 0 \\ \bullet & \bullet & 0 & \sqrt{\Pi_8^\triangleright \Pi_4^\triangleright} & 0 & \sqrt{\Pi_8^\triangleright \Pi_6^\triangleright} & 0 & \Pi_8^\triangleright \end{pmatrix}$$

(b) Cas général sous H_2 : $n = 3, N = 10, \Pi_k = nN^{-1}$

$$Q^\Pi = \begin{pmatrix} nN^{-1} & \bullet & \bullet & \bullet & \bullet & \bullet & \bullet & \bullet \\ \bullet & nN^{-1} & \bullet & \bullet & \bullet & \bullet & \bullet & \bullet \\ \bullet & \bullet & nN^{-1} & \bullet & \bullet & \bullet & \bullet & \bullet \\ \bullet & \bullet & \bullet & nN^{-1} & 0 & 0 & nN^{-1} & 0 \\ \bullet & \bullet & \bullet & 0 & nN^{-1} & nN^{-1} & 0 & 0 \\ \bullet & \bullet & \bullet & 0 & nN^{-1} & nN^{-1} & 0 & 0 \\ \bullet & \bullet & \bullet & nN^{-1} & 0 & 0 & nN^{-1} & 0 \\ \bullet & \bullet & \bullet & 0 & 0 & 0 & 0 & nN^{-1} \end{pmatrix}$$

(c) Cas particulier sous H_2 n divise N : $n = 2, N = 10, \Pi_k = nN^{-1}$

$$Q^\Pi = \begin{pmatrix} nN^{-1} & 0 & 0 & nN^{-1} & nN^{-1} & 0 & 0 & nN^{-1} \\ 0 & nN^{-1} & nN^{-1} & 0 & 0 & nN^{-1} & nN^{-1} & 0 \\ 0 & nN^{-1} & nN^{-1} & 0 & 0 & nN^{-1} & nN^{-1} & 0 \\ nN^{-1} & 0 & 0 & nN^{-1} & nN^{-1} & 0 & 0 & nN^{-1} \\ nN^{-1} & 0 & 0 & nN^{-1} & nN^{-1} & 0 & 0 & nN^{-1} \\ 0 & nN^{-1} & nN^{-1} & 0 & 0 & nN^{-1} & nN^{-1} & 0 \\ 0 & nN^{-1} & nN^{-1} & 0 & 0 & nN^{-1} & nN^{-1} & 0 \\ nN^{-1} & 0 & 0 & nN^{-1} & nN^{-1} & 0 & 0 & nN^{-1} \end{pmatrix}$$

FIGURE 3 – Comparaison des performances en termes de coefficient de variation de 3 plans de sondage, déterminantal, systématique et cube, pour 22 régions et 70 variables, soient 1540 estimations. La droite correspond à la première bissectrice.

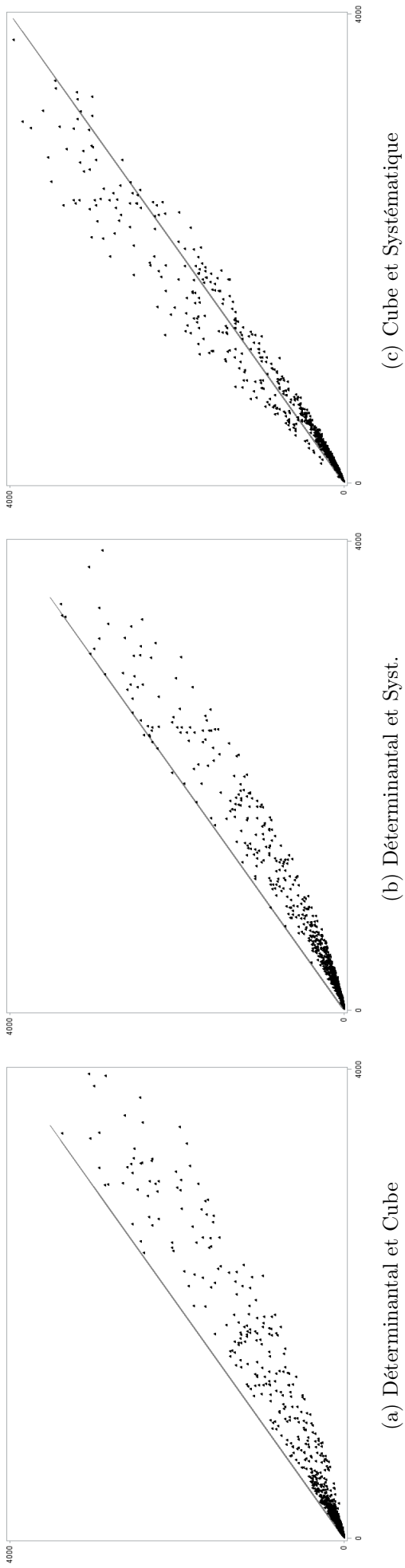


TABLE 7 – Valeurs propres de Q^{Π^p} , pour $\Pi_k = nN^{-1}$ et n divise N . Exemple de $n = 4$ et $N = 12$

k											
1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
0	0	0	$1 - \frac{2n}{N}$	$1 - \frac{2n}{N}$	$1 - \frac{2n}{N}$	$1 - \frac{2n}{N}$	$1 - \frac{n}{N}$	$1 - \frac{n}{N}$	$1 - \frac{n}{N}$	$1 - \frac{n}{N}$	1
0	0	$1 - \frac{2n}{N}$	$1 - \frac{2n}{N}$	$1 - \frac{2n}{N}$	$1 - \frac{2n}{N}$	$1 - \frac{n}{N}$	$1 - \frac{n}{N}$	$1 - \frac{n}{N}$	$1 - \frac{n}{N}$	1	1
0	$1 - \frac{2n}{N}$	$1 - \frac{2n}{N}$	$1 - \frac{2n}{N}$	$1 - \frac{2n}{N}$	$1 - \frac{n}{N}$	$1 - \frac{n}{N}$	$1 - \frac{n}{N}$	$1 - \frac{n}{N}$	1	1	1
$1 - \frac{2n}{N}$	$1 - \frac{2n}{N}$	$1 - \frac{2n}{N}$	$1 - \frac{2n}{N}$	$1 - \frac{n}{N}$	$1 - \frac{n}{N}$	$1 - \frac{n}{N}$	$1 - \frac{n}{N}$	1	1	1	1

TABLE 8 – Valeurs propres de Q^{Π^p} , pour $\Pi_k = nN^{-1}$ et n ne divise pas N . Exemple de $n = 5$ et $N = 12$

k												
1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	
0	0	0	0	$1 - \frac{2n}{N}$	$1 - \frac{2n}{N}$	$1 - \frac{n}{N}$	$1 - \frac{n}{N}$	$1 - \frac{n}{N}$	$1 - \frac{n}{N}$	$1 - \frac{n}{N}$	1	
0	0	0	•	$1 - \frac{2n}{N}$	$1 - \frac{n}{N}$	$1 - \frac{n}{N}$	$1 - \frac{n}{N}$	$1 - \frac{n}{N}$	$1 - \frac{n}{N}$	1	1	
0	0	•	•	$1 - \frac{n}{N}$	$1 - \frac{n}{N}$	$1 - \frac{n}{N}$	$1 - \frac{n}{N}$	$1 - \frac{n}{N}$	1	1	1	
0	•	•	•	$1 - \frac{n}{N}$	$1 - \frac{n}{N}$	$1 - \frac{n}{N}$	$1 - \frac{n}{N}$	1	1	1	1	
$\frac{n}{N}$	•	•	•	$1 - \frac{n}{N}$	$1 - \frac{n}{N}$	$1 - \frac{n}{N}$	1	1	1	1	1	

TABLE 9 – Q^{Π^p} , construction des λ_j^k , pour $n = 5$ et $k = N - 11, \dots, N - 1$.

k												
N-11	N-10	N-9	N-8	N-7	N-6	N-5	N-4	N-3	N-2	N-1	N	
$1 - \Pi_{N-10}^p - \Pi_{N-5}^p - \Pi_N^p$	$1 - \Pi_{N-9}^p - \Pi_{N-4}^p$	$1 - \Pi_{N-8}^p - \Pi_{N-3}^p$	$1 - \Pi_{N-7}^p - \Pi_{N-2}^p$	$1 - \Pi_{N-6}^p - \Pi_{N-1}^p$	$1 - \Pi_{N-5}^p - \Pi_N^p$	$1 - \Pi_{N-4}^p$	$1 - \Pi_{N-3}^p$	$1 - \Pi_{N-2}^p$	$1 - \Pi_{N-1}^p$	$1 - \Pi_N^p$	N	
$1 - \Pi_{N-9}^p - \Pi_{N-4}^p$	$1 - \Pi_{N-8}^p - \Pi_{N-3}^p$	$1 - \Pi_{N-7}^p - \Pi_{N-2}^p$	$1 - \Pi_{N-6}^p - \Pi_{N-1}^p$	$1 - \Pi_{N-5}^p - \Pi_N^p$	$1 - \Pi_{N-4}^p$	$1 - \Pi_{N-3}^p$	$1 - \Pi_{N-2}^p$	$1 - \Pi_{N-1}^p$	$1 - \Pi_N^p$	1	1	
$1 - \Pi_{N-8}^p - \Pi_{N-3}^p$	$1 - \Pi_{N-7}^p - \Pi_{N-2}^p$	$1 - \Pi_{N-6}^p - \Pi_{N-1}^p$	$1 - \Pi_{N-5}^p - \Pi_N^p$	$1 - \Pi_{N-4}^p$	$1 - \Pi_{N-3}^p$	$1 - \Pi_{N-2}^p$	$1 - \Pi_{N-1}^p$	$1 - \Pi_N^p$	1	1	1	
$1 - \Pi_{N-7}^p - \Pi_{N-2}^p$	$1 - \Pi_{N-6}^p - \Pi_{N-1}^p$	$1 - \Pi_{N-5}^p - \Pi_N^p$	$1 - \Pi_{N-4}^p$	$1 - \Pi_{N-3}^p$	$1 - \Pi_{N-2}^p$	$1 - \Pi_{N-1}^p$	$1 - \Pi_N^p$	1	1	1	1	
$1 - \Pi_{N-6}^p - \Pi_{N-1}^p$	$1 - \Pi_{N-5}^p - \Pi_N^p$	$1 - \Pi_{N-4}^p$	$1 - \Pi_{N-3}^p$	$1 - \Pi_{N-2}^p$	$1 - \Pi_{N-1}^p$	$1 - \Pi_N^p$	1	1	1	1	1	
$1 - \Pi_{N-5}^p - \Pi_N^p$	$1 - \Pi_{N-4}^p$	$1 - \Pi_{N-3}^p$	$1 - \Pi_{N-2}^p$	$1 - \Pi_{N-1}^p$	$1 - \Pi_N^p$	$1 - \Pi_N^p$	1	1	1	1	1	

Références

- Deville, J.-C. et Y. Tillé. 2004, «Efficient balanced sampling : the cube method», *Biometrika*, vol. 91, n° 4, p. 893–912.
- Dhillon, I. S., R. W. Heath Jr, M. A. Sustik et J. A. Tropp. 2005, «Generalized finite algorithms for constructing hermitian matrices with prescribed diagonal and spectrum», *SIAM Journal on Matrix Analysis and Applications*, vol. 27, n° 1, p. 61–71.
- Fickus, M., D. G. Mixon et M. J. Poteet. 2013, «Constructing finite frames with a given spectrum», dans *Finite Frames*, Springer, p. 55–107.
- Hedemann, S. R. 2013, «Hyperspherical parameterization of unitary matrices», *arXiv preprint arXiv :1303.5904*.
- Horn, A. 1954, «Doubly stochastic matrices and the diagonal of a rotation matrix», *American Journal of Mathematics*, vol. 76, n° 3, p. 620–630.
- Horn, R. A. et C. R. Johnson. 1991, *Topics in matrix analysis*, Cambridge Univ. Press.
- Horvitz, D. G. et D. J. Thompson. 1952, «A generalization of sampling without replacement from a finite universe», *Journal of the American statistical Association*, vol. 47, n° 260, p. 663–685.
- Hough, J. B., M. Krishnapur, Y. Peres et B. Virág. 2006, «Determinantal processes and independence», *Probability surveys*, vol. 3, p. 206–229.
- Jarlskog, C. 2005, «A recursive parametrization of unitary matrices», *Journal of mathematical physics*, vol. 46, n° 10, p. 103 508.
- Kadison, R. V. 2002, «The pythagorean theorem : I. the finite case», *Proceedings of the National Academy of Sciences*, vol. 99, n° 7, p. 4178–4184.
- Kirkpatrick, S., C. D. Gelatt Jr et M. P. Vecchi. 1983, «Optimization by simulated annealing», *science*, vol. 220, n° 4598, p. 671–680.
- Loonis, V. et X. Mary. 2019, «Determinantal sampling designs», *Journal of Statistical Planning and Inference*, vol. 199, p. 60–88.
- Macchi, O. 1975, «The coincidence approach to stochastic point processes», *Advances in Applied Probability*, p. 83–122.
- Madow, W. G. 1949, «On the theory of systematic sampling, ii», *The Annals of Mathematical Statistics*, vol. 20, n° 3, p. 333–354.
- Schur, J. 1911, «Bemerkungen zur theorie der beschränkten bilinearformen mit unendlich vielen veränderlichen.», *Walter de Gruyter, Berlin/New York Berlin, New York*.
- Sen, A. R. 1953, «On the estimate of the variance in sampling with varying probabilities», *Journal of the Indian Society of Agricultural Statistics*, vol. 5, n° 1194, p. 127.
- Soshnikov, A. 2000, «Determinantal random point fields», *Russian Mathematical Surveys*, vol. 55, n° 5, p. 923.
- Wolfenstein, L. 1983, «Parametrization of the kobayashi-maskawa matrix», *Physical Review Letters*, vol. 51, n° 21, p. 1945.

Yates, F. et P. M. Grundy. 1953, «Selection without replacement from within strata with probability proportional to size», *Journal of the Royal Statistical Society : Series B (Methodological)*, vol. 15, n° 2, p. 253–261.