代数学第一次作业

English looks like this.

1 课堂练习

1. k 为域。说明 $k[x,y]$-模本质上为 (V,T_1,T_2), 其中 V 是 k-线性空间。T_1,T_2 为 V 上的线性变换满足 $T_1T_2=T_2T_1$.(更准确地说，此处指的是范畴等价)

2. M,N 为 R-模. 对所有 $r\in R, f\in \mathrm{Hom}_R(M,N)$, 证明:

$$\begin{aligned}(rf):M&\to N\\ m&\mapsto rf(m)\end{aligned}$$

   也属于 $\mathrm{Hom}_R(M,N)$.

3. M 为 R-模. 证明

$$\begin{aligned}R&\to \mathrm{End}_R(M)\\ r&\mapsto r\mathrm{Id}_M\end{aligned}$$

   为环同态.

4. I,J 为 R 的理想. $R/I\tilde{\to}R/J$ 是否能推出 $I=J$?

5. 证明: $\mathbb{Q}$ 作为 $\mathbb{Z}$-模没有极大子模，从而其没有合成列.

2 课本习题

1. 设 $X\subset M$. 证明 X 生成的子模 $<X>$ 是所有包含 X 的子模之交.

2. 设 J 是 R 的理想. 对于 R-模 M, 证明:M/JM 在

$$(r+J)(m+JM)=rm+JM$$

   下是 R/J-模. 由此推出如果 $JM=0$, 那么 M 是 R/J-模.

3. A,B,A' 为 M 子模. 证明: 若 $A'\subseteq A$, 则 $A\cap(B+A')=(A\cap B)+A'$.

4. 对 R-模 M, 证明:

$$\varphi_M : \mathrm{Hom}_R(R, M) \to M, \quad f \mapsto f(1)$$

为同构。

5. 设 A 为 B 子模。证明：若 A,B/A 为有限生成模, 则 B 也是有限生成模. 这个命题反过来是否正确?

6. 证明:(此题中所有映射均指模同态)

   (a) $\varphi : B \to C$ 为单射当且仅当对任意 $f, g : A \to B$, $\varphi f = \varphi g$ 给出 $f = g$

   (b) $\varphi : B \to C$ 为满射当且仅当对任意 $h, k : C \to D$, $h\varphi = k\varphi$ 给出 $h = k$