Lec2 Note of Algebra

Xuxuayame

日期：2024 年 9 月 11 日

我们证明一下 $(k^n, A) \simeq (k^n, B) \Leftrightarrow A, B$ 相似.

$\Rightarrow$: 记同构为 F, 那么 F 保加法, 且对 $\forall\, f(x) \in k[x],\ \vec{v} \in k^n,\ F(f(x), \vec{v}) = f(x)F(\vec{v})$. 于是 $F(f(A)\vec{v}) = f(B)F(\vec{v})$. 取 $f(x) = c$, 则 $F(c\vec{v}) = cF(\vec{v})$, 得到 F 为线性同构. 再取 $f(x) = x$, 有 $F(A\vec{v}) = BF(\vec{v})$, 即 $FA = BF$, 且 F 为可逆方阵.

定义 1.5. 对于 R-模 M, N, 记

$$\mathrm{Hom}_R(M, N) = \{f\colon M \to N \mid f\text{为}R-\text{模同态}\}.$$

则 $\mathrm{Hom}_R(M, N)$ 上有加法: 对 $f\colon M \to N,\ f'\colon M \to N$, 有

$$f + f'\colon M \to N,\ m \mapsto f(m) + f'(m).$$

同样有零同态:

$$0_{M,N}\colon M \to N,\ m \mapsto 0_N.$$

命题 1.3. $\forall\, r \in R,\ f \in \mathrm{Hom}_R(M, N)$, 定义 $(rf) \in \mathrm{Hom}_R(M, N)$ 为

$$rf\colon M \to N,\ m \mapsto rf(m).$$

评论. **习题**: 验证 $rf\colon M \to N$ 为 R-模同态, 且

$$R \times \mathrm{Hom}_R(M, N) \to \mathrm{Hom}_R(M, N),$$
$$(r, f) \mapsto rf$$

使得 $\mathrm{Hom}_R(M, N)$ 成为 R-模.

例 1.8. 考虑 R-模 M, 记 $\mathrm{Hom}_R(M, R) = M^*$, 称为 M 的**对偶模**.

例如对 $R = \mathbb{Z}$ 的模 $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$, $(\mathbb{Z}/n\mathbb{Z})^* = \mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}}(\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}, \mathbb{Z}) = 0$.

评论. $\mathrm{End}_R(M) := \mathrm{Hom}_R(M, M)$, 它是 R-模, 且为含幺非交换环.

1.1.3 商模

设 $f\colon M \to N$ 为模同态. 定义**像**为 $\mathrm{Im} f = f(M) \subset N$ 为子模, 定义**核**为 $\mathrm{Ker} f = f^{-1}(0_N) = \{m \in M \mid f(m) = 0_N\} \subset M$ 为子模, 定义**余核**为 $\mathrm{Coker} f = N/\mathrm{Im} f$.

定义 1.6. 设有 R-模 K, M 且 $K \subset M$, 考虑商集

$$M/K = \{m + K \mid m \in M\}$$

并定义 $\forall\, r \in R,\ r \cdot \overline{m} = \overline{rm}$. 称其为**商模**.

我们自然要问这个乘法是否是良定义的.

设 $\overline{m} = \overline{m'} \Leftrightarrow m - m' \in K$, 那么 $rm - rm' = r(m - m') \in K$. 于是 $\overline{rm} = \overline{rm'}$. 进而可以验证 M/K 确实拥有 R-模结构. 从而典范投影:

$$\pi \colon M \to M/K,\ m \mapsto \overline{m}$$

成为满同态.

定理 1.4. 环同态第一基本定理. $\forall\, f \colon M \to N$ 诱导了同构:

$$\begin{aligned} \widetilde{f} \colon M/\ker f &\to \mathrm{Im}(f), \\ \overline{m} &\mapsto f(m). \end{aligned}$$

证明. 验证 $\widetilde{f}$ 为群同构以及保 R-作用即可:

$$\begin{tikzcd} M \arrow[r, "f"] \arrow[d, two heads, "\pi"'] & N \\ M/\ker f \arrow[r, dashed, "\widetilde{f}", "\sim"'] & \mathrm{Im} f \arrow[u, "\mathrm{inc}"'] \end{tikzcd}$$

交换, $f = \mathrm{inc} \circ \widetilde{f} \circ \pi$. □

评论. (1) f 单 $\Leftrightarrow \mathrm{Ker} f = \{0_M\}$, 此时 $M \simeq \mathrm{Im} f$.

(2) f 满 $\Leftrightarrow \mathrm{Im} f = N,\ M/\mathrm{Ker} f \simeq N \Leftrightarrow \mathrm{Coker} f \simeq 0$.

于是我们有

定理 1.5. 环同态第二基本定理. 对 R-模 $S, T \subset M$, 有

$$S/(S \cap T) \xrightarrow{\sim} (S+T)/T.$$

证明.

$$\begin{tikzcd} S \arrow[r, hook, "\mathrm{inc}"] \arrow[rr, bend right, two heads, "s \mapsto s+T"'] & S+T \arrow[r, two heads, "\pi"] & (S+T)/T \end{tikzcd}$$

得到一个满射 $S \twoheadrightarrow (S+T)/T$ 后算核 $\{s \in S \mid s + T = 0_M + T\} = S \cap T$. □

定理 1.6. 环同态第三基本定理. 对 R-模 $T \subset S \subset M$, 则

$$\frac{M/T}{S/T} \xrightarrow{\sim} M/S.$$

证明. 考虑

$$M/T \twoheadrightarrow M/S,\ m + T \mapsto m + S.$$

其核为 S/T. □

定理 1.7. 设 R-模 T 和 M, 则有双射

$$
\begin{aligned}
\{S \mid T \subset S \subset M\} &\leftrightarrow \{M/T\text{的子模}\},\\
S &\mapsto S/T,\\
\{s \in M \mid s+T \in L\} &\leftarrow\!\shortmid L.
\end{aligned}
$$

1.1.4 循环模

称 R-模为**循环模**, 若 $\exists\, m_0 \in M$ s.t. $M = Rm_0$.

命题 1.8. M 为循环模 $\Leftrightarrow M \simeq R/I,\ I \lhd R$.

证明. $\Leftarrow$: 设同构为 $\varphi\colon R/I \xrightarrow{\sim} M,\ 1+I \mapsto \varphi(1+I) =: m_0$. 那么对 $\forall\, m \in M$, 存在 r 使得 $m = \varphi(r+I) = \varphi(r(1+I)) = r\varphi(1+I) = rm_0$.

$\Rightarrow$: 设 $m_0 \in M$ s.t. $M = Rm_0$, 则 $\varphi\colon R \to M,\ r \mapsto rm_0$ 为满射, $\mathrm{Ker}\varphi =: I \lhd R$, 于是由第一基本定理得到 $R/I \simeq M$. □

评论. 习题: 模 $R/I \simeq R/J$, 则 $I = J$, 因此在同构意义下有多少个理想就有多少个循环模.

定义 1.7. $0 \neq M$ 称为**单模 (Simple module)/不可约模**若 M 仅有平凡子模.

故 $0 \neq M$ 单 $\Leftrightarrow \forall\, 0 \neq m \in M,\ M = Rm$.

命题 1.9. M 单 $\Leftrightarrow M \simeq R/\mathfrak{m},\ \mathfrak{m} \in \mathfrak{m}\mathrm{Spec}(R)$.

证明. $\Rightarrow$: M 单, $M \simeq R/I,\ I \subset R$ 无中间理想, 于是 $I = \mathfrak{m}$.

$\Leftarrow$: $R/\mathfrak{m}$ 为单模. □

定义 1.8. R-模 M 的**合成列**为:

$$M = M_0 \supset M_1 \supset M_2 \supset \cdots \supset M_n = \{0_M\}$$

使得 $M_i/M_{i+1},\ i \geq 0$ 为单模, 称为**合成因子**. n 称为合成列的**长度**.

例如 $n = 1$ 时, $M = M_0 \supset M_1 = \{0_M\},\ M_0/M_1 = M$ 为单模. $n = 2$ 时, $M = M_0 \supset M_1 \supset M_2 = \{0_M\}$, M/M_1 为单模, $M_1/M_2 = M_1$ 为单模. 从而可以得到短正合列

$$0 \to M_1 \hookrightarrow M \twoheadrightarrow M/M_1 \to 0.$$

例 1.9. 对 $R = \mathbb{Z}$, 单 $\mathbb{Z}$-模 $= \mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$, p 素.

$n = 3$ 时, $M \supset M_1 \supset M_2 \supset M_3 = \{0_M\}$. M_2 是单模, M/M_1 为单模因此 M_1 为 M 的极大子模, M_2 是 M_1 极大子模.

例 1.10. 并非每个模都有合成列. 例如 $\mathbb{Z}$-模 $\mathbb{Q}$ 没有极大子模因此不存在合成列.(Left as exercise)

定理 1.10. ***(Jordan-Hölder)*** 设有两条合成列

$$M = M_0 \supset M_1 \supset \cdots \supset M_n = \{0_M\},$$

$$M = N_0 \supset N_1 \supset \cdots \supset N_m = \{0_M\}.$$

则 $m = n$, 且合成因子 $\{M_i/M_{i+1}\}$ 与 $\{N_i/N_{i+1}\}$ 在同构意义下相差一个置换.

证明. 对 $\min\{m, n\}$ 归纳.

若 $\min\{m, n\} = 1$, 若 $n = 1$, M 单, $N_1 = \{0\}$, $m = 1$.

那么对 $\min\{m, n\} > 1$, 若 $M_1 = N_1$, 对 M_1 归纳即可.

若 $M_1 \neq N_1$, 因为 M_1, N_1 均为极大子模, 则 $M_1 + N_1 = M$. 我们指出如果一个模有合成列那么其子模也有合成列, 因此 $M_1 \cap N_1$ 也有合成列, 这样使得 M_1 存在两条合成列, 利用归纳可知两条合成列一致, 同理对 N_1 也存在两条合成列, 也一致, 于是就一致. $\square$