Lec13 Note of Algebra

Xuxuayame

日期：2024 年 10 月 23 日

我们继续证明.

证明. 当 $\mathrm{d}_{\mathfrak{p}}(M) \geq 2$ 时. 取 $x_0 \in M$, $p^{n-1}x_0 \neq 0$, $p^n M = 0$, 那么 $M \supset M_0 = \langle x_0 \rangle$, $\mathrm{d}_{\mathfrak{p}}(M/M_0) = \mathrm{d}_{\mathfrak{p}}(M) - 1$. 设

$$M/M_0 = \langle \overline{x_1} \rangle \oplus \cdots \oplus \langle \overline{x_m} \rangle$$

为内直和. 这里 $\overline{x_i} = x_i + M_0$, 那么有 $p^{n_i}\overline{x_i} = \overline{0} \neq p^{n_i - 1}\overline{x_i}$ 在 M/M_0 中. 而由引理 1.52$p^{n_i}x_i \in M_0 \cap p^{n_i}M = p^{n_i}M_0$, 故 $\exists\, s_i \in R$ 使得 $p^{n_i}x_i = p^{n_i}(s_i x_0)$.

令 $y_i = x_i - s_i x_0$, $p^{n_i}y_i = 0$, 而 $p^{n_i-1}\overline{y_i} \neq \overline{0}$ 在 M/M_0 中, 故 $p^{n_i-1}y_i \neq 0$ 在 M 中. 有 $M = \langle x_0, y_1, \cdots, y_m \rangle$. 我们宣称

$$M = \langle x_0 \rangle \oplus \langle y_1 \rangle \oplus \cdots \oplus \langle y_m \rangle$$

为内直和. 设 $r_i \in R$ 满足 $r_0 x_0 + r_1 y_1 + \cdots + r_m y_m = 0$ 在 M 中, 则

$$\overline{r_1 y_1} + \overline{r_2 y_2} + \cdots + \overline{r_m y_m} = \overline{0}$$

$$\Rightarrow \overline{r_1 x_1} + \overline{r_2 x_2} + \cdots + \overline{r_m y_m} = \overline{0}.$$

而 $\overline{r_i x_i} = \overline{0} \Rightarrow p^{n_i} \mid r_i$, 故 $r_i y_i = 0_M$, $\forall\, i \geq 1$.

而对于唯一性, 设 $M = \bigoplus_{i=1}^m R/\mathfrak{p}^{e_i}$, 那么考虑 $e \geq 0$, $\mathfrak{p}^e M = \bigoplus_{i=1}^m \mathfrak{p}^e\left(R/\mathfrak{p}^{e_i}\right)$.

若 $e_i \leq e$, 则 $\mathfrak{p}^e(R/\mathfrak{p}^{e_i}) = 0$. 若 $e_i > e$, 则 $\mathfrak{p}^e(R/\mathfrak{p}^{e_i}) = \mathfrak{p}^e/\mathfrak{p}^{e_2}$, 为循环模, 故 $\mathrm{d}_{\mathfrak{p}}(\mathfrak{p}^e(R/\mathfrak{p}^{e_i})) = 1$.

从而 $\mathrm{d}_{\mathfrak{p}}(\mathfrak{p}^e M) = |\{1 \leq i \leq m \mid e_i > e\}|$, $\mathrm{d}_{\mathfrak{p}}(\mathfrak{p}^{e+1}M) = |\{1 \leq i \leq m \mid e_i > e+1\}|$,

$$0 \leq \mathrm{d}_{\mathfrak{p}}(\mathfrak{p}^e M) - \mathrm{d}_{\mathfrak{p}}(\mathfrak{p}^{e+1}M) = U_{\mathfrak{p}}(e+1, M) = |\{1 \leq i \leq M \mid e_i = e+1\}|.$$

□

习题: $\forall\, \mathfrak{p} \in \mathfrak{m}\mathrm{Spec}R$, R 为 PID, 则 $R/\mathfrak{p}^n$ 不可分解, 即不存在直和项.

定理 1.53. ***PID* 上有限生成模的结构定理**: *R 为 PID, $K = \mathrm{Frac}(R)$, ${}_RM$ 有限生成, 则*

$$M \simeq R^r \oplus \left(\bigoplus_{\mathfrak{p} \in \mathfrak{m}\mathrm{Spec}R} \bigoplus_{n \geq 1} (R/\mathfrak{p}^n)^{\bigoplus U_{\mathfrak{p}}(n,M)} \right).$$

其中 $r = \dim_K(K \otimes_R M)$ 称为 $\mathrm{rank}(M)$, $U_{\mathfrak{p}}(n, M) = \mathrm{d}_{\mathfrak{p}}(\mathfrak{p}^{n-1}M) - \mathrm{d}_{\mathfrak{p}}(\mathfrak{p}^n M)$, $\mathfrak{p} \in \mathfrak{m}\mathrm{Spec}M$, $n \geq 1$.

另若 $M \simeq R^s \oplus \left(\bigoplus_{\mathfrak{p} \in \mathfrak{m}\mathrm{Spec}R} \bigoplus_{n \geq 1} (R/\mathfrak{p}^n)^{\bigoplus u_{\mathfrak{p},n}} \right)$, 则 $s = \mathrm{rank}(M)$, $u_{\mathfrak{p},n} = U_{\mathfrak{p}}(n, M)$.

证明. $M \simeq M_{\text{tor}} \oplus (M/M_{\text{tor}}), M/M_{\text{tor}} \simeq R^r$. 因为 $K \otimes_R M = (K \otimes_R M_{\text{tor}}) \oplus (K \otimes_R R^r) \Rightarrow \dim_K(K \otimes_R M) = r$.

而 M_{tor} 有限生成扭, 故 $M_{\text{tor}} = \bigoplus_{\mathfrak{p} \in \mathfrak{m}\mathrm{Spec}R}(M_{\text{tor}})_{\mathfrak{p}}$, $(M_{\text{tor}})_{\mathfrak{p}}$ 是有限生成 $\mathfrak{p}$-准素的. □

评论. $U_{\mathfrak{p}}(n, M) = U_{\mathfrak{p}}(n, M_{\text{tor}}) = U_{\mathfrak{p}}(n, M_{\mathfrak{p}})$.

定义 1.41. 设 $M_{\text{tor}} = \bigoplus_{i=1}^{s} \bigoplus R/\mathfrak{p}_i^{e_{ij}}$. 称

$$\{p_i^{e_{ij}} \mid 1 \leq i \leq s,\ 1 \leq j \leq m_s,\ e_{ij} \geq 1\}$$

为 M 的**初等因子组**.

我们将初等因子如下排练:

$$\begin{aligned} &p_1^{e_{11}}, p_1^{e_{12}}, \cdots, p_1^{e_{1m_1}}, \\ &p_2^{e_{21}}, p_2^{e_{22}}, \cdots, p_2^{e_{2m_2}}, \\ &\qquad\qquad\qquad \cdots, \\ &p_s^{e_{s1}}, p_s^{e_{s2}}, \cdots, p_s^{e_{sm_s}}. \end{aligned}$$

使得 $e_{i1} \geq e_{i2} \geq \cdots \geq e_{im_i}$, 并记 $m = \max\{m_1, \cdots, m_s\}$. 记每一列的乘积为 $c_1, \cdots, c_m$, 那么 $c_m \mid c_{m-1} \mid \cdots \mid c_2 \mid c_1$, 这称为 M 的**不变因子组**.

命题 1.54. *若* $M = \bigoplus_{i=1}^{s} \bigoplus_{j=1}^{m_i} R/\mathfrak{p}_i^{e_{ij}}$, *则*

$$M \simeq R/(c_1) \oplus \cdots \oplus R/(c_m).$$

这里 $c_1, \cdots, c_m$ *为不变因子.*

证明. 由中国剩余定理, 有

$$R/(c_1) \xrightarrow{\sim} R/\mathfrak{p}_1^{e_{11}} \oplus \cdots \oplus R/\mathfrak{p}_s^{e_{s1}},\ \overline{r} \mapsto (\overline{r}, \cdots, \overline{r}).$$

□

评论. $(c_1) = \mathrm{Ann}(M)$.

1.5.4 矩阵方法

设 R 为交换环, $A \in M_{n \times m}(R)$, 则有

$$\begin{aligned} R^m \xrightarrow{\phi_A} R^n &\to \mathrm{Coker}(\phi_A) \to 0, \\ \vec{x} \mapsto A\vec{x}&. \end{aligned}$$

定义 1.42. 称 M 为**有限表现模 (Finitely presented module)**, 若存在右正合列 $F_1 \to F_2 \to M \to 0$ 使得 F_i 有限生成自由.

我们有如下事实:

命题 1.55. $A, B \in M_{n\times m}(R)$, 若 A, B 相抵, 则 $\mathrm{Coker}(\phi_A) \simeq \mathrm{Coker}(\phi_B)$.

这里所谓相抵, 即 $A = PBQ$, $P \in \mathrm{GL}_n(R)$, $Q \in \mathrm{GL}_m(R)$.

证明. 有交换图

$$\begin{tikzcd}
R^m \arrow[r, "\phi_A"] \arrow[d, "\phi_Q"'] & R^n \arrow[r] \arrow[d, "\phi_{P^{-1}}"] & \mathrm{Coker}\phi_A \arrow[r] \arrow[d, dashed, "\exists!", "\sim"'] & 0 \\
R^m \arrow[r, "\phi_B"] & R^n \arrow[r] & \mathrm{Coker}\phi_B \arrow[r] & 0
\end{tikzcd}$$

□

定理 1.56. 设 R 为 *PID*, $A \in M_{n\times m}(R)$, 则 A 可相抵于

$$\begin{pmatrix} d_1 & & & & \\ & d_1 & & & \\ & & \ddots & & \\ & & & d_r & \\ & & & & O \end{pmatrix},$$

这里 $d_1 \mid \cdots \mid d_r$, $d_i \neq 0$, 称为 ***Smith* 标准形**.

例 1.48. 设 $V \xrightarrow{T} V$, V 为域 k 上有限生成模, 一组基为 $e_1, \cdots, e_n$, 那么 $(V, T) \in k[x]-\mathsf{Mod}$,

$$V[x] = \left\{ \sum_{i\geq 0} v_i x^i \mid v_i \in V \right\} \simeq V \otimes_k k[x]$$

为自由 $k[x]$-模, 于是有

$$0 \to V[x] \overset{\phi_T = xI - A}{\to} V[x] \overset{\pi}{\twoheadrightarrow} V \to 0,$$
$$vx^i \mapsto T^i(v).$$

这里设 $T(e_i) = \sum_{j=1}^n a_{ji} e_j$, A 取为 T 在这组基下的转移矩阵.

习题: 验证正合性.

推论. 设 $A, B \in M_n(k)$, 那么 A, B 相似 $\Leftrightarrow$ $(k^n, A) \simeq (k^n, B)$ 作为 $k[x]$-模, 也即 $xI - A, xI - B$ 在 $k[x]$ 上相抵.