# Lec14 Note of Algebra

Xuxuayame

日期：2024 年 10 月 28 日

我们补充一下例 1.48 的内容.

$\phi_T\colon V[x]\to V[x],\ vx^i\mapsto vx^{i+1}-T(v)x^i$, 我们验证正合性.

$$\begin{aligned}\pi\circ\phi_T(vx^i)&=\pi(vx^{i+1}-T(v)x^i)\\&=T^{i+1}(v)-T^i(T(v))=0.\end{aligned}$$

于是 $\pi\circ\phi_T=0$, 从而 $\mathrm{Im}\phi_T\subset\mathrm{Ker}\pi$.

另一方面设 $\pi(\sum v_ix^i)=0$, 即 $\sum T^i(v_i)=0$, 于是

$$\sum v_ix^i=\sum(v_ix^i-T^i(v_i))\in\mathrm{Im}\phi_T.$$

于是 $\mathrm{Im}\phi_T=\mathrm{Ker}\pi$. 至于 $\phi_T$ 单则略.

注意任何一个 $k[x]-\mathsf{Mod}$ 都可以视作 $(V,T)$, 因此对所有 $k[x]-\mathsf{Mod}$ 都有如此正合列, 称为**自由分解**.

而若 $T$ 的转移矩阵为 $A, T(e_i)=\sum a_{ji}e_j$, 那么 $\phi_T(e_i)=e_ix-T(e_i)=xe_i-\sum a_{ji}e_i$, 因此 $\phi_T$ 的方阵为 $xI_n-A\in M_n(k[x])$.

注意 $(V,T)\simeq\mathrm{Coker}(xI_n-A)$. 因此我们可以解决推论.

**证明.** $\Rightarrow$: 成立.

$\Leftarrow$: 若 $xI_n-A$ 与 $xI_n-B$ 相抵, 则 $\mathrm{Coker}(xI_n-A)\simeq\mathrm{Coker}(xI_n-B)$, 而 $(k^n,A)\simeq\mathrm{Coker}(xI_n-A)$, $(k^n,B)\simeq\mathrm{Coker}(xI_n-B)$. 故 $(k^n,A)\simeq(k^n,B)\Leftrightarrow A$ 与 $B$ 相似. □

**推论.** $xI_n-A$ 相抵于 *Smith* 标准形 $\begin{pmatrix}c_1(x)&&\\&\ddots&\\&&c_n(x)\end{pmatrix}$, 满足首一 $c_1(x)\mid\cdots\mid c_n(x)$. 则

*(1)* $\det(xI_n-A)=c_1(x)\cdots c_n(x)$.

*(2)* $(k^n,A)\simeq k[x]/(c_1)\oplus\cdots\oplus k[x]/(c_n(x))$.

*(3)* $c_n(x)$ 是 $A$ 的最小多项式.

**评论.** 设 $c(x)=a_0+a_1x+\cdots+x^d$, 那么 $k[x]/(c(x))$ 的一组基为 $\overline{1},\overline{x},\cdots,\overline{x^{d-1}}$, 于是

$k[x]/(c(x)) \xrightarrow{x*} k[x]/(c(x))$ 将基映为:

$$\overline{1} \mapsto \overline{x},$$
$$\overline{x} \mapsto \overline{x^2},$$
$$\cdots$$
$$\overline{x^{d-1}} \mapsto -a_0\overline{1} - a_1\overline{x} - \cdots - a_{d-1}\overline{x^{d-1}}.$$

于是转移矩阵为

$$\begin{pmatrix} 0 & & & & 0 \\ 1 & 0 & & & -a_1 \\ & 1 & 0 & & -a_2 \\ & & \ddots & \ddots & \vdots \\ & & & 1 & -a_{d-1} \end{pmatrix}$$

称为 $c(x)$ 的**友方阵 (Companion matrix)**.

**证明.** (3) 的证明.

$d(x)$ 是 $A$ 的最小多项式, 即 $d(A) = 0$, $d(x)$ 次数最小.

那么对 $d(A) = 0 \Leftrightarrow d(x) \cdot v = 0$, $\forall\, v \Leftrightarrow d(x) \in \mathrm{Ann}((k^n, A))$.

而 $k[x]/(c_i(x))$ 的零化理想为 $(c_i(x))$. 故 $\mathrm{Ann}((k^n, A)) = (c_n(x))$. □

# 2 交换代数初步

## 2.1 Noether 环/模, Artin 环/模

设 $R$ 为含幺交换环.

**定义 2.1.** 称 $R$ 为 **Noether 环 (Noetherian ring)**, 若 $R$ 的所有理想均有限生成 ($\forall\, I \lhd R$, 存在有限 $x_1, \cdots, x_n \in I$ s.t. $I = (x_1, \cdots, x_n) = Rx_1 + \cdots + Rx_n$).

**例 2.1.** PID$\Rightarrow$Noether.

**命题 2.1.** *以下等价.*

*(1) $R$ 满足 **ACC(Ascending chain condition) 升链条件**, 即 $R$ 中的理想升链 $I_1 \subset I_2 \subset \cdots \subset I_n \subset \cdots$ 必稳定, 即存在 $N$ 使得 $I_N = I_{N+1} = \cdots$.*

*(2) $R$ 满足极大性条件, 即 $R$ 中由理想构成的非空集 $\mathcal{F}_1$ 都有极大元 ($\exists\, I_0 \in \mathcal{F}_1$ 极大, $I \supset I_0 \Rightarrow I = I_0$).*

*(3) $R$ 是 Noether 的.*

**证明.** (1)$\Rightarrow$(2).

$\forall\,\mathcal{F}_1$, 若 $\mathcal{F}_1$ 无极大元, 取 $I_1 \in \mathcal{F}_1$, $I_1$ 非极大, 故 $\exists\, I_2 \in \mathcal{F}_1,\ I_1 \subsetneq I_2$, 而 $I_2$ 也非极大, 故 $\exists\, I_3 \in \mathcal{F}_1, I_2 \subsetneq I_3$. 与得到一串严格理想升链

$$I_1 \subsetneq I_2 \subsetneq I_3 \subsetneq \cdots$$

矛盾.

(2)⇒(3).

设 $I \lhd R$, $I$ 不是有限生成的, 那么取 $0 \neq x_1 \in I,\ (x_1) \subsetneq I$, 再取 $x_2 \in I \setminus (x_1)$, 也有 $(x_1, x_2) \subsetneq I$, 于是又取 $x_3 \in I \setminus (x_1, x_2)$, 如此取出 $\mathcal{F} = \{(x_1), (x_1, x_2), (x_1, x_2, x_3), \cdots\}$ 无极大元, 矛盾.

(3)⇒(1).

设有一理想升链 $I_1 \subset I_2 \subset I_3 \subset \cdots$, 那么 $I = \bigcup_{i=1} I_i \lhd R$ 因而有限生成, 记为 $(x_1, \cdots, x_n)$, 那么 $\exists\, N > 0, x_1, \cdots, x_n \in I_N \Rightarrow (x_1, \cdots, x_n) \subset I_N$, 故 $I = I_N \Rightarrow I_N = I_{N+1} = \cdots$. □

我们有事实.

**命题 2.2.** *RNoether⇒ $R/I$Noether. 注意 $R/I$ 的理想形如 $J/I,\ I \subset J \subset R$.*

**定理 2.3. *Hilbert basis theorem*.**

*RNoether⇒ $R[x]$Noether.*

**推论.** *$k$ 域, $k[x_1, \cdots, x_n]/I$ 是 Noether 的, 称为仿射代数.*

**例 2.2.**
- **习题**: $k[x_1, x_2, \cdots]$ 不是 Noether 的.
- **习题**: $R = k + xk[x, y] = \{\lambda + xf(x, y)\} \subset k[x, y]$, 但 $R$ 不是 Noether 的.(Hint: $(x, xy, xy^2, \cdots) \lhd R$)

**证明.** 设 $I \lhd R[x]$, 若 $I$ 不是有限生成的, 取 $0 \neq f_0(x) \in I,\ d_0 = \deg f_0(x)$ 最小, 取 $f_1(x) \in I \setminus (f_0(x)),\ d_1 = \deg f_1$ 最小, $d_0 \leq d_1$, 取 $f_2(x) \in I \setminus (f_0(x), f_1(x)),\ d_2 = \deg f_2(x)$ 最小, $d_1 \leq d_2$, 如此反复.

设 $f_n(x)$ 的首项系数为 $0 \neq a_n \in R$, 那么

$$(a_0) \subset (a_0, a_1) \subset (a_0, a_1, a_2) \subset \cdots$$

在 $R$ 中. 由 $R$Noether, $\exists\, N,\ a_{N+1} \in (a_0, \cdots, a_N)$, 即 $a_{N+1} = r_0 a_0 + r_1 a_1 + \cdots + r_N a_N,\ r_j \in R$, 那么

$$f^*_{N+1}(x) = f_{N+1}(x) - \sum_{i=0}^{N} r_i f_i(x) \cdot x^{d_{N+1} - d_i}.$$

则 $\deg f^*_{N+1} < d_{N+1}$, 但 $f^*_{N+1} \in I \setminus (f_0, \cdots, f_N)$, 与 $f_{N+1}$ 的选取矛盾. □

**评论.** 记 $I \lhd R[x]$, 定义 $J$ 为 $I$ 中所有多项式的首项系数组成的集合, 它是 $R$ 的理想 (**习题**).

因此 $J$ 是有限生成的, 记为 $(a_1, \cdots, a_m)$, 那么例如 $a_i$ 对应的元素为 $f_i$. 我们记 $N = \max\{\deg f_1, \cdots, \deg f_m\}$, 那么 $\forall\, g(x) \in I$, $g$ 的首项系数为 $b$.

若 $\deg g \geq N$, $b = r_1 a_1 + \cdots + r_m a_m,\ r_j \in R$, 那么 $g(x) - \sum_{i=1}^{m} r_i f_i(x) x^{\deg g - \deg f_i}$, 次数 $\leq \deg g - 1$. $\forall\, 0 \leq d \leq N-1,\ J_d = \{a \in R \mid ax^d + \cdots \in I\} \triangleleft R$, $J_d = (a_{d1}, \cdots, d_{dm_d})$, 设 $a_{di}$ 对应多项式为 $g_{di}(x)$, 那么我们宣称 $(f_1, \cdots, f_m, g_{di}) = I$.