Lec6 Note of Algebra

Xuxuayame

日期：2024 年 9 月 25 日

定义 1.19. $\mathcal{C}$ 中**零对象** 0 意指既始又终的对象.

例 1.21. $\{1_G\} \in \mathsf{Grp},\ 0 \in R-\mathsf{mod}.$

定义 1.20. $\mathcal{C}$ 中对象 X, Y 的**积 (Product)** 意指 $(X\prod Y, p, q)$, $X\prod Y$ 也记为 $X\times Y$, $p\colon X\times Y\to X$, $q\colon X\times Y\to Y$. 它须满足如下泛性质:

$$\begin{tikzcd} & & X \\ Z \arrow[r, "\exists!\ \theta"] \arrow[urr, bend left, "\forall\ f"] \arrow[drr, bend right, "\forall\ g"'] & X\times Y \arrow[ur, "p"] \arrow[dr, "q"] & \\ & & Y \end{tikzcd}$$

对任意 Z 有图表交换.

那么我们有积在同构意义下至多唯一. 例如若还有一个积 $(X\prod' Y, p', q')$. 那么实际上有

$$\begin{tikzcd} & & X \\ X\prod Y \arrow[r, shift left, "\exists!\ \theta"] \arrow[urr, bend left, "p'"] \arrow[drr, bend right, "q'"'] & X\times Y \arrow[l, shift left, "\exists!\ \eta"] \arrow[ur, "p"] \arrow[dr, "q"] & \\ & & Y \end{tikzcd}$$

图表交换, 于是有

$$\begin{tikzcd} & & X \\ X\prod Y \arrow[r, "\theta\circ\eta"] \arrow[urr, bend left, "p"] \arrow[drr, bend right, "q"'] & X\times Y \arrow[ur, "p"] \arrow[dr, "q"] & \\ & & Y \end{tikzcd}$$

于是 $\theta\circ\eta = 1_{X\times Y}$.

这里还有一种证明. 考虑新范畴 $\mathcal{C}'_{X,Y}$, 对象为三元组 $(A; f, g)$, $A\in \mathrm{Obj}(\mathcal{C})$, $f\colon A\to$

X, $g\colon A\to Y$. 态射为 $(A;f,g)\xrightarrow{h}(A';f',g')$ 也即交换图表:

$$\begin{tikzcd} & & X \\ A \arrow[r, "h"] \arrow[urr, bend left, "f"] \arrow[drr, bend right, "g"'] & A' \arrow[ur, "f'"] \arrow[dr, "g'"'] & \\ & & Y \end{tikzcd}$$

或者更确切的可以理解为 $h\colon A\to A'$ 满足 $f'\circ h=f$ 且 $g'\circ h=g$. 那么显然积即此范畴中的终对象因此同构意义下至多唯一.

例 1.22. Set 中的笛卡尔积, Grp 与 Ring 中的直积, R-Mod 中的直和.

定义 1.21. X,Y 的**余积 (Coproduct)** 记作 $(X\coprod Y,i,j)$ 须满足泛性质, 也即

$$\begin{tikzcd} X \arrow[dr, "i"] \arrow[drr, bend left, "\forall f"] & & \\ & X\coprod Y \arrow[r, "\exists!\ \theta"] & Z \\ Y \arrow[ur, "j"'] \arrow[urr, bend right, "\forall g"'] & & \end{tikzcd}$$

图表交换.

例 1.23. Set 中余积即不交并.

(**习题**): 设 $G=\{1,a\},\ H=\{1,b\}$ 均为二阶群, 则 $G\coprod H=\langle a,b\mid a^2=1=b^2\rangle$.

ComRing 中余积是张量积.

Ring 中余积是直和.

评论. 对任意指标集 Λ 也可定义相应积与上积.

定义 1.22. 图表

$$\begin{tikzcd} & Y \arrow[d, "g"] \\ X \arrow[r, "f"'] & Z \end{tikzcd}$$

的**拉回 (Pullback)** 或称**纤维积 (Fibered Product)** 意指交换图表

$$\begin{tikzcd} X\times_Z Y \arrow[r, "p_2"] \arrow[d, "p_1"'] & Y \arrow[d, "g"] \\ X \arrow[r, "f"'] & Z \end{tikzcd}$$

且满足泛性质:

$$
\begin{tikzcd}
\forall\, W \arrow[dr, "\exists!\,\theta"] \arrow[drr, bend left, "\forall\, b"] \arrow[ddr, bend right, "\forall\, a"'] & & \\
& X \times_Z Y \arrow[r, "p_2"] \arrow[d, "p_1"'] & Y \arrow[d, "g"] \\
& X \arrow[r, "f"'] & Z
\end{tikzcd}
$$

评论. 若 Z 为上述范畴的终对象, 则 $X \times_Z Y = X \times Y$.

定义 1.23. 图表

$$
\begin{tikzcd}
Z \arrow[r, "f"] \arrow[d, "g"'] & X \\
Y &
\end{tikzcd}
$$

的**推出 (Pushout)** 或**纤维余积 (Fibered Coproduct)** 意指 $(X \coprod_Z Y, i_1, i_2)$ 满足如下泛性质:

$$
\begin{tikzcd}
Z \arrow[r, "f"] \arrow[d, "g"'] & X \arrow[d, "i_1"] \arrow[ddr, bend left, "\forall\, b"] & \\
Y \arrow[r, "i_2"'] \arrow[drr, bend right, "\forall\, a"'] & X \coprod_Z Y \arrow[dr, "\exists!\,\theta"] & \\
& & \forall\, W
\end{tikzcd}
$$

评论. 若 Z 是原范畴的始对象, 则 $X \coprod_Z Y = X \coprod Y$.

例 1.24. 在 R-Mod 中, 拉回 $X \times_Z Y = \{(x, y) \in X \oplus Y \mid f(x) = g(y)\}$, 推出 $X \coprod_Z Y = (X \oplus Y)/\{(f(z), -g(z)) \mid z \in Z\}$

(习题): 验证之.

例 1.25. 在 Set 中, 拉回同上. 推出 $X \coprod_Z Z = (X \coprod Y)/\sim$, 这里 $f(z) \sim g(z)$, $\forall\, z \in Z$.

1.2.2 函子 Functor

定义 1.24. 设 $\mathcal{A}, \mathcal{B}$ 为范畴, 定义从 $\mathcal{A}$ 到 $\mathcal{B}$ 的 **(共变) 函子**为 $\mathcal{F}\colon \mathcal{A} \to \mathcal{B}$ 即

- $\forall\, A \in \mathrm{Obj}(\mathcal{A})$, 指定 $\mathcal{F}(A) \in \mathrm{Obj}(\mathcal{B})$.
- $\forall\, f\colon A \to B$ 在 $\mathcal{A}$ 中, 指定 $\mathcal{F}(f)\colon \mathcal{F}(A) \to \mathcal{F}(B)$ 在 $\mathcal{B}$ 中.

并满足

(1) 结合律: $\mathcal{F}(g \circ f) = \mathcal{F}(g) \circ \mathcal{F}(f)$.

(2) 单位元: $\mathcal{F}(1_A) = 1_{\mathcal{F}(A)}$, $\forall\, A \in \mathrm{Obj}(\mathcal{A})$

例 1.26. 忘却函子 $R\text{-}\mathsf{Mod} \xrightarrow{U} \mathsf{Ab}$:

$$\begin{array}{ccc} R^M & \longmapsto & M \\ {\scriptstyle f}\big\downarrow & & \big\downarrow{\scriptstyle f} \\ R^N & \longmapsto & N \end{array}$$

这里 $U(f) = f$.

例 1.27. 对 R^M 有函子 $\mathrm{Hom}_R(M, -)\colon R\text{-}\mathsf{Mod} \to R\text{-}\mathsf{Mod}$ 如下

$$\begin{array}{ccc} X & \longmapsto & \mathrm{Hom}_R(M, X) \\ {\scriptstyle f}\big\downarrow & & \big\downarrow{\scriptstyle f_*} \\ Y & \longmapsto & \mathrm{Hom}_R(M, Y) \end{array}$$

这里 $f_* = \mathrm{Hom}_R(M, f)$, $f_*\colon g \mapsto f \circ g$.

定义 1.25. 设 $\mathcal{A}, \mathcal{B}$ 为范畴, 定义 $\mathcal{F}\colon \mathcal{A} \to \mathcal{B}$ 为**反变函子**即 $\mathcal{F}\colon \mathcal{A} \to \mathcal{B}^{\mathrm{op}}$ 为函子, 即:

$$A \in \mathrm{Obj}(\mathcal{A}) \rightsquigarrow \mathcal{F}(A) \in \mathrm{Obj}(\mathcal{B}),$$

$$A \xrightarrow{f} B \rightsquigarrow \mathcal{F}(f)\colon \mathcal{F}(B) \to \mathcal{F}(A),$$

$$A \xrightarrow{f} B \xrightarrow{g} C \rightsquigarrow \mathcal{F} \xrightarrow{\mathcal{F}(g)} \mathcal{F}(B) \xrightarrow{\mathcal{F}(f)} \mathcal{F}(A).$$

例 1.28. 对 R-模 M. $\mathrm{Hom}_R(-, M)\colon R\text{-}\mathsf{Mod} \to R\text{-}\mathsf{Mod}$ 如下

$$\begin{array}{ccc} X & \longmapsto & \mathrm{Hom}_R(X, M) \\ {\scriptstyle f}\big\downarrow & & \big\uparrow{\scriptstyle f^*} \\ Y & \longmapsto & \mathrm{Hom}_R(Y, M) \end{array}$$

为反变函子. $f^*\colon h \mapsto h \circ f$.

1.2.3 加法范畴

定义 1.26. 称 $\mathcal{C}$ 为**加法范畴**, 若

(1) $\forall\, A, B$, $\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(A, B)$ 为 Abel 群, 零元记作 $0_{A,B}$. 且 $\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(B, C) \times \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(A, B) \xrightarrow{\circ} \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(A, C)$, $(g, f) \mapsto g \circ f$ 是双线性的, 即 $g \circ (f + f') = g \circ f + g \circ f'$, $(g + g') \circ f = g \circ f + g' \circ f$.

(2) 存在零对象 0. 因此对任意 A, B 存在 A 到 0 与 0 到 B 的态射复合, 恰为 $0_{A,B}$.

(3) 存在有限积与余积. 即指标集有限时双积存在.

命题 1.19. 加法范畴 $\mathcal{C}$ 中, $A \coprod B \simeq A \prod B$, 记作 $A \oplus B$.

现在假设 $\mathcal{C}$ 是加性的.

定义 1.27. $f\colon X \to Y$ 的**核**指 $K \xrightarrow{i} X$(或 (K, i)) 满足:

(1) $f \circ i = 0_{K,Y}$.

(2) 泛性质: $\forall\, T \xrightarrow{t} X$ s.t. $f \circ t = 0$, 则 $\exists!\, T \xrightarrow{\tilde{t}} K$ s.t. $i \circ \tilde{t} = t$.

评论. i 是单态射.

例 1.29. 在 R-Mod 中, 对 $X \xrightarrow{f} Y$, $\mathrm{Ker} f \xhookrightarrow{\mathrm{inc}} X$ 是真正意义上的核.