Lec12 Note of Algebra

Xuxuayame

日期：2024 年 10 月 21 日

我们有如下事实:

命题 1.47. *R 为 PID, ${}_RM$ 有限生成, 则以下等价:*

(1) ${}_RM$ 自由.

(2) ${}_RM$ 投射.

(3) ${}_RM$ 无扭.

证明. (1) $\Rightarrow$ (2) $\Rightarrow$ (3) $\Rightarrow$ (1). $\square$

推论. *F 有限生成自由, ${}_RM \le {}_RF$, 则 ${}_RM$ 有限生成自由, 且 $\mathrm{rank}(M) \le \mathrm{rank}(F)$.*

推论. *R 为 PID, ${}_RM, {}_RM'$ 有限生成, 则*

(1) $M \simeq M_{\mathrm{tor}} \oplus (M/M_{\mathrm{tor}})$.

(2) $M \simeq M' \Leftrightarrow M_{\mathrm{tor}} \simeq M'_{\mathrm{tor}}$ 且 $M/M_{\mathrm{tor}} \simeq M'/M'_{\mathrm{tor}}$.

证明. (1) $0 \to M_{\mathrm{tor}} \hookrightarrow M \to M/M_{\mathrm{tor}} \to 0$ 正合, M/M_{tor} 有限生成且无扭, 故自由, 从而分裂.

(2) 显然.

$\square$

命题 1.48. *R 为 PID, 则 ${}_RF$ 平坦 $\Leftrightarrow$ ${}_RF$ 无扭.*

证明. $\Rightarrow$: 成立.

$\Leftarrow$: $\forall\, I = Rr \hookrightarrow R$, $r \neq 0$. 有

$$\begin{tikzcd}
F \otimes_R I \arrow[r] \arrow[d, "\simeq"] & F \otimes_R R \arrow[d, "\simeq"'] \\
F \arrow[r, hook, dashed, "\psi", "y \mapsto yr"'] & F
\end{tikzcd}$$

$\square$

例 1.47. (1) $R = \mathbb{Z}$, 有限生成扭 $\mathbb{Z}$-模 $=$ 有限生成 Abel 群.

(2) $R = k[x]$, 有限生成扭 $k[x]$-模 $=\{(V, T) \mid V$有限维, $T\colon V \to V\}$.

1.5.3 结构定理

R 为 PID, $\mathfrak{p}=(p)\in\mathrm{Spec}(R)$(进而落在 $\mathfrak{m}\mathrm{Spec}(R)$ 中).

定义 1.38. ${}_RM$ 称为 **$\mathfrak{p}$-准素模 (Primary module)**, 若 $\forall\, m\in M,\ \exists\, n\geq 1,\ \mathfrak{p}^n m=0$.

评论. $\forall\, r\notin\mathfrak{p},\ M\xrightarrow{\sim}M,\ m\mapsto rm$.

它单, 因为若 $rm=0_M$, 则 $\mathfrak{p}^n+Rr\subset\mathrm{Ann}(m)$, 而 $Rr+\mathfrak{p}=R\Rightarrow Rr+\mathfrak{p}^n=R$, 从而 $1_Rm=0_m$.

它满, 因为 $\forall\, m_0\in M,\ \exists\, n\geq 1,\ \mathfrak{p}^n m_0=0\Rightarrow 1_R=ar+l,\ l\in\mathfrak{p}^n$, 故 $m_0=1m_0=(ar+l)m_0=r(am_0)$.

定义 1.39. ${}_RM$ 的 **$\mathfrak{p}$-准素部分**定义为

$$M_{\mathfrak{p}}=\{m\in M\mid \mathfrak{p}^n m=0,\ \exists\, n\}\subset M.$$

命题 1.49. ${}_RM$ 扭, 则 $M=\bigoplus_{\mathfrak{p}\in\mathfrak{m}\mathrm{Spec}R}M_{\mathfrak{p}}$.

证明. (1) 若 $m\in M$, $\mathrm{Ann}(m)=(a)$, 考虑 a 的素分解 $a=up_1^{e_1}\cdots p_n^{e_n},\ e_n\geq 1,\ u$ 可逆.
则 $\forall\, i,\ p_i^{e_i}\left(\frac{a}{p_i^{e_i}}m\right)=0$, 令 $\mathfrak{p}_i=(p_i)$, 则 $\frac{a}{p_i^{e_i}}m\in M_{\mathfrak{p}_i}$, 而

$$\gcd_R\left(\frac{a}{p_1^{e_1}},\cdots,\frac{a}{p_n^{e_n}}\right)=1.$$

由 Bézout 等式, $\exists\, b_1,\cdots,b_n\in R$,

$$b_1\frac{a}{p_1^{e_1}}+\cdots+b_n\frac{a}{p_n^{e_n}}=1_R,$$

于是

$$\sum_{i=1}^n b_i\left(\frac{a}{p_i^{e_i}}m\right)=1_Rm=m.$$

可见 $M\subset\sum_{\mathfrak{p}\in\mathfrak{m}\mathrm{Spec}R}M_{\mathfrak{p}}\Rightarrow M=\sum_{\mathfrak{p}\in\mathfrak{m}\mathrm{Spec}R}M_{\mathfrak{p}}$.

(2) 我们要证 $M_{\mathfrak{p}_i}\cap(\sum_{j\neq i}M_{\mathfrak{p}_j})=\{0_M\}$.
设 $m_0\in M_{\mathfrak{p}_i}\cap(\sum_{j\neq i}M_{\mathfrak{p}_j}),\ m_0\in\sum_{j\neq i}M_{\mathfrak{p}_j}\Rightarrow m_0=m_1+\cdots+m_l,\ m_j\in M_{\mathfrak{p}_j}\Rightarrow\exists\, s\geq 1,\ p_j^s m_i=0$. 那么我们取最大的 s, 得到

$$p_1^sp_2^s\cdots p_l^s\cdot(m_0)=0,\ p_i^sm_0=0.$$

而 $\mathfrak{p}_i^s+\mathfrak{p}_1^s\mathfrak{p}_2^s\cdots\mathfrak{p}_l^s=R$, 从而 $m_0=0$.

$\square$

评论. M 有限生成扭, 则 $|\{\mathfrak{p}\in\mathfrak{m}\mathrm{Spec}R\mid M_{\mathfrak{p}}\neq 0\}|<+\infty$.

推论. 设有扭 M,M', 则 $M\simeq M'\Leftrightarrow\forall\,\mathfrak{p}\in\mathfrak{m}\mathrm{Spec}R,\ M_{\mathfrak{p}}\simeq M'_{\mathfrak{p}}$.

定义 1.40. ${}_RM,\mathfrak{p}\in\mathfrak{m}\mathrm{Spec}R$, 则 $R/\mathfrak{p}$ 为域, 则 $M/\mathfrak{p}M$ 是 $R/\mathfrak{p}$-线性空间, $\mathrm{d}_{\mathfrak{p}}(M)=\dim_{R/\mathfrak{p}}M/\mathfrak{p}M$, 称为 M 在 $\mathfrak{p}$ 处的**深度**.

对 $n\geq 1$ 定义

$$U_{\mathfrak{p}}(n,M)=\mathrm{d}_{\mathfrak{p}}(\mathfrak{p}^{n-1}M)-\mathrm{d}_{\mathfrak{p}}(\mathfrak{p}^nM)=\dim_{R/\mathfrak{p}}(\mathfrak{p}^{n-1}M/\mathfrak{p}^nM)-\dim_{R/\mathfrak{p}}(\mathfrak{p}^nM/\mathfrak{p}^{n+1}M)\in\mathbb{Z}.$$

评论. M 扭, 则 $\mathrm{d}_{\mathfrak{p}}(M)=\mathrm{d}_{\mathfrak{p}}(M_{\mathfrak{p}})$, $U_{\mathfrak{p}}(n,M)=U_{\mathfrak{p}}(n,M_{\mathfrak{p}})$.

证明. $M=M_{\mathfrak{p}}\oplus L$, $L=\bigoplus_{\mathfrak{q}\neq\mathfrak{p}}M_{\mathfrak{q}}$.

$\mathfrak{p}M=\mathfrak{p}M_{\mathfrak{p}}\oplus\mathfrak{p}L$, $\mathfrak{p}L=L\Rightarrow\mathrm{d}_{\mathfrak{p}}(M_{\mathfrak{p}})=\mathrm{d}_{\mathfrak{p}}(M)$. 因为 $\exists\, r\neq\mathfrak{p}$, $rM_{\mathfrak{q}}=M_{\mathfrak{q}}\Rightarrow\mathfrak{p}M_{\mathfrak{q}}=M_{\mathfrak{q}}$. □

定理 1.50. ${}_RM$ 有限生成 $\mathfrak{p}$-准素, 则

$$M\simeq\bigoplus_{i=1}^{m}\left(R/\mathfrak{p}^{e_i}\right).$$

其中 $R/\mathfrak{p}^n$ 个数 $=U_{\mathfrak{p}}(n,M)\geq 0$. (由 M 唯一决定)

引理 1.51. M 是 $\mathfrak{p}$-准素的, $\mathfrak{p}^nM=0\neq\mathfrak{p}^{n-1}M$, 取 $x\in M$, $\mathfrak{p}^{n-1}x\neq 0$, $M_1=Rx$, 则

$$\mathrm{d}_{\mathfrak{p}}(M)=\mathrm{d}_{\mathfrak{p}}(M_1)+\mathrm{d}_{\mathfrak{p}}(M/M_1)=1+\mathrm{d}_{\mathfrak{p}}(M/M_1).$$

证明.

$$\frac{M/M_1}{\mathfrak{p}(M/M_1)}=\frac{M/M_1}{(\mathfrak{p}M+M_1)/M_1}\simeq\frac{M}{(\mathfrak{p}M+M_1)}\simeq\frac{M/\mathfrak{p}M}{(\mathfrak{p}M+M_1)/\mathfrak{p}M}.$$

而 $(\mathfrak{p}M+M_1)/\mathfrak{p}M\simeq M_1/(\mathfrak{p}M\cap M_1)\simeq M_1/M_1=0$, 这里因为 $\mathfrak{p}M\cap M_1=M_1$(由下面引理). □

引理 1.52. $M_1\cap\mathfrak{p}^iM=\mathfrak{p}^iM_1$, $i\geq 1$.

证明. $M_1\cap\mathfrak{p}^iM\supset\mathfrak{p}^iM_1$.

设 $y\in M_1\cap\mathfrak{p}^iM$, $y=p^iu$, $u\in M=(p^tz)x$, $p\nmid z\in R$, $t\geq 0$.

若 $i\geq n$, $p^iu\subset\mathfrak{p}^nM=0$, $y=0$, $y\in\mathfrak{p}^iM_1$.

$i<n$, $t\geq i$, 则 $y=p^i(p^{t-i}zx)\in p^iM_1$.

$i<n$, $t<i$, 则 $0=p^nu=p^{n-i}y=zp^{n-i+t}x\neq 0$. □

现在我们证明定理 1.50.

证明. 对 $\mathrm{d}_{\mathfrak{p}}(M)$ 归纳.

若 $\mathrm{d}_{\mathfrak{p}}(M)=0$, $M=\mathfrak{p}M=\mathfrak{p}^2M=\cdots$, 故 $M=0$, 成立.

$\mathrm{d}_{\mathfrak{p}}(M)=1$, 设 $0\neq x\in M$, 若 $\mathfrak{p}^nM=0\neq\mathfrak{p}^{n-1}M$, 那么 $\overline{x}\in M/\mathfrak{p}M$ 为生成元, $p^nx=0\neq p^{n-1}x$.

$\forall\, y\in M$, $\overline{y}=\overline{a_0}\cdot\overline{x}$, $\overline{a_0}\in R/\mathfrak{p}$, $y=a_0x+py_1$, $y_1\in M\Rightarrow y_1=a_1x+py_2$, 如此反复得到 $y\in Rx=R/\mathfrak{p}^{n-1}$. □