代数学第六次作业

1 课堂练习

1. 设 $V \xrightarrow{T} V$, V 为域 k 上有限生成模, 一组基为 $e_1, \cdots, e_n$, 那么 $(V, T) \in k[x]-\mathsf{Mod}$,

$$V[x] = \left\{ \sum_{i \geq 0} v_i x^i \mid v_i \in V \right\} \simeq V \otimes_k k[x]$$

为自由 $k[x]$-模, 于是有

$$0 \to V[x] \overset{\phi_T = xI - A}{\to} V[x] \overset{\pi}{\twoheadrightarrow} V \to 0,$$
$$vx^i \mapsto T^i(v).$$

习题: 验证正合性.

2. R 为 PID, M 为 $\mathfrak{p}$-准素模. 对任意 $x \in M$, 证明 $\mathrm{ann}(x) = \mathfrak{p}^n$.

2 课本习题

1. 设 $G = \prod_p \mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$, 其中 p 取遍所有素数.
   (a) 证明: $G_{tor} = \oplus_p \mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$
   (b) 证明: G/G_{tor} 可除.
   (c) 证明: $\mathrm{Hom}(\mathbb{Q}, G) = 0$ 但是 $\mathrm{Hom}(\mathbb{Q}, G/G_{tor}) \neq 0$, 由此证明 G/G_{tor} 不是 G 的直和项.

2. R 是 PID. p 为 R 素元, M 为 R 的扭模. 证明: 若 $p \in \mathrm{ann}(m)$ 对某个 $0 \neq m \in M$ 成立, 则 $\mathrm{ann}(M) \subseteq (p)$.