Lec7 Note of Algebra

Xuxuayame

日期：2024 年 9 月 30 日

同样设 $\mathcal{C}$ 为加法范畴.

定义 1.28. $f\colon X \to Y$ 的**余核 (Cokernel)** 意指 $Y \xrightarrow{p} C$(或 (C, p)), 满足:

(1) $p \circ f = 0_{X,C}$.

(2) 泛性质: $\forall\, Y \xrightarrow{t} L$ s.t. $t \circ f = 0$, 则 $\exists!\, C \xrightarrow{\tilde{t}} L$ s.t. $\tilde{t} \circ p = t$.

评论. p 是满态射.

设 $\mathcal{C}$ 中有核, 余核. 那么我们预想

$$\begin{tikzcd}
\mathrm{Ker}f \arrow[r, hook, "i"] & X \arrow[r, "f"] \arrow[d, two heads, "p'"'] & Y \arrow[r, two heads, "p"] & \mathrm{Coker}f \\
& \mathrm{Coker}i \arrow[r, dashed, "\exists!\ \bar{f}"'] & \mathrm{Ker}p \arrow[u, phantom] &
\end{tikzcd}$$

图表交换.

定义 1.29. 加法范畴称为 **Abel 范畴 (Abelian Category)**, 若

(1) $\mathcal{C}$ 有核, 余核.

(2) $\forall\, f$, $\bar{f}$ 是同构.

1.3 投射模, 内射模, 平坦模

1.3.1 自由模

我们知道 R 本身成为 R-模. 那么 $R^n = R \times \cdots \times R$ 也构成 R-模. 我们记 e_i 为第 i 个分量为 1, 其余分量为 0 的 R^n 中有序对, 那么

(1) $\langle e_1, \cdots, e_n \rangle = R^n$.

(2) $e_1, \cdots, e_n$ 是 R-线性无关的.

评论. 设 Λ 为指标集, 那么定义 R 的直和为:

$$\bigoplus_{i\in\Lambda} R = \{(a_i)_{i\in\Lambda} \mid a_i \in R,\ \text{仅有限个} a_i \neq 0\}.$$

那么类似对 $i \in \Lambda$ 有 $e_i \in \bigoplus_{i\in\Lambda} R$, 满足

(1) $\langle e_i \mid i \in \Lambda \rangle = \bigoplus_{i\in\Lambda} R$.

(2) $\{e_i \mid i \in \Lambda\}$ 线性无关.

定义 1.30. 设 M 为 R-模, $S \subset M$. 我们称 S 为 M 的**基 (Basis)**, 若

(1) $\langle S\rangle = M$,

(2) S 是 R-线性无关的.

若 M 有基, 则 M 称为**自由模 (Free Module)**.

命题 1.20. M 自由 $\Leftrightarrow M \simeq \bigoplus_{i\in\Lambda} R$.

M 有限生成自由 $\Leftrightarrow M \simeq R^n$.

证明. $\Leftarrow$: 记 $\Phi\colon \bigoplus_{i\in\Lambda} R \xrightarrow{\sim} M$ 为同构, $\{e_i \mid i \in \Lambda\}$ 为一组基, 那么我们宣称 $\{\Phi(e_i) \mid i \in \Lambda\}$ 是 M 的基.

$\Rightarrow$: 设 $S \subset M$ 为基, 那么定义

$$\Phi\colon \bigoplus_{x\in S} R \to M,\ (a_x)_{x\in S} \to \sum_{x\in S} a_x x \in M.$$

可以验证 Φ 是同构. $\square$

定理 1.21. 设 R-模 M 自由, M 有基 S, T, 则 $|S| = |T|$.

证明. 我们要用到如下引理:

> **引理**: 设 M 基为 $\{e_i \mid i \in \Lambda\}$, $I \lhd R$, M/IM 为 R/I 模, 则作为 R/I-模, M/IM 的基为 $\{\bar{e}_i \mid i \in \Lambda\}$.

取 $\mathfrak{m} \in \mathfrak{m}\mathrm{Spec}(R)$, $R/\mathfrak{m} = k$ 为域, 那么 $M/\mathfrak{m}M$ 为 k-线性空间, 那么 $M/\mathfrak{m}M$ 有 k-基 $\bar{S}, \bar{T} \Rightarrow \bar{S} = \bar{T}$.

特别地若 $R^m \simeq R^n \Rightarrow n = m$. $\square$

定理 1.22. 考虑有限生成 R-模 M, 则存在同构 $M \simeq R^n/K$, 其中 $K \subset R^n$.

证明. M 由 $\{x_1, \cdots, x_n\}$ 生成, 那么定义

$$R^n \to M,\ (a_1, \cdots, a_n) \mapsto \sum_{i=1}^n a_i x_i.$$

进而引用同态基本定理即得. $\square$

我们可以尝试研究 R 上线性代数. 对 $A \in M_{m\times n}(R)$, 那么在 R 交换的前提下,

$$\phi_A\colon R^n \to R^m,\ \vec{v} \mapsto A\vec{v}$$

成为 R-模同态.

实际上有如下事实:

$$\mathrm{Hom}_R(R^n, R^m) \overset{1-1}{\leftrightarrow} M_{m\times n}(R).$$

$$R^n \xrightarrow{\phi} R^m,$$

$$\sum_{i=1}^n a_i e_i \mapsto \sum_{i=1}^n a_i \phi(e_i) = A \begin{pmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix},$$

$$A = (\phi(e_1), \cdots, \phi(e_n))_{m\times n}.$$

而对 $\forall\, B \in M_n(R)$, 类似可以定义行列式 $\det B \in R$:

$$\det\colon M_n(R) \to R$$

满足

(1) $\det(I_n) = 1_R$.

(2) det 对每行是 R-线性的.

(3) 两行互换时结果乘以 -1_R.

以及有 $\det(AB) = \det A \det B$.

定理 1.23. $R^n \simeq R^m \Rightarrow n = m$.

证明. 由题, 存在 $\phi_A\colon R^n \to R^m$ 与 $\phi_B\colon R^m \to R^n$ 使得

$$\phi_B \circ \phi_A = \mathrm{Id}_{R^n},\ \phi_A \circ \phi_B = \mathrm{Id}_{R^m}.$$

可见 $BA = I_n$, $AB = I_m$. 若 $m > n$, 则 $AB = (A\ O)_{m\times m} \begin{pmatrix} B \\ O \end{pmatrix}_{m\times m} = I_m$, 但应当 $\det(AB) = 0$, 矛盾. 类似对 $m < n$. □

同样可以定义

$$GL_n(R) = \{A \in M_n(R) \mid \exists\, B \in M_n(R),\ AB = I_n = BA\}.$$

习题: $A \in GL_n(R) \Leftrightarrow \det A \in R^\times$ 即 R 中可逆元.

习题: $\mathrm{Aut}(R^n) = \{\phi\colon R^n \to R^n \mid \phi\text{为模的自同构}\}$. 则 $\mathrm{Aut}(R^n) \simeq GL_n(R)$.

1.3.2 投射模

定义 1.31. 称 R-模 P 是**投射的 (Projective)**, 若 $\forall$ 满同态 $p\colon M \twoheadrightarrow N$, 对 $\forall\, f\colon P \to N$, 都存在 f 的提升 h. 即

$$\begin{tikzcd} & P \arrow[d, "f"] \arrow[dl, dashed, "\exists\, h"'] \\ M \arrow[r, two heads, "p"'] & N \end{tikzcd}$$

图表交换.

例 1.30. R-模 R 是投射的, 称为**正则模 (Regular Module)**.

$$\begin{tikzcd} & R \arrow[dl, dashed, "\exists\, h"'] \arrow[d, "f"] \\ M \arrow[r, two heads, "p"'] & N \end{tikzcd}$$

$f(1_R) \in N,\ f(a) = f(a \cdot 1_R) = af(1_R)$. 于是取 $m_0 \in M$ 使得 $p(m_0) = f(1_R)$, 那么定义 $h\colon R \to M,\ a \mapsto am_0$ 即可. 于是

$$p \circ h(a) = p(am_0) = ap(m_0) = af(1_R) = f(a).$$

例 1.31. P, Q 是投射的 $\Rightarrow P \oplus Q$ 是投射的.

$$\begin{tikzcd} & P \oplus Q \arrow[d, "{(f_1,f_2)=f}"] \\ M \arrow[r, two heads, "p"'] & N \end{tikzcd}$$

这里 $f_1\colon P \to N,\ f_2\colon Q \to N,\ (f_1, f_2)\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = f_1(x) + f_2(x)$. 那么分别诱导 $h_1\colon P \to M,\ h_2\colon Q \to M$, 从而诱导 $h\colon P \oplus Q \to M,\ h = (h_1, h_2)$, 可验证 $f = p \circ h$.

此事对无穷直和也成立 ($\Rightarrow$ 可见自由模是投射模).

例 1.32. $P \oplus X$ 投射 $\Rightarrow P$ 投射.

$$\begin{tikzcd} & P \oplus X \arrow[ddl, bend right, "\tilde{h}"'] \arrow[d, shift left, "\mathrm{Pr}_1"] \\ & P \arrow[u, shift left, "i_1"] \arrow[d, "f"] \\ M \arrow[r, two heads, "p"'] & N \end{tikzcd}$$

这里 $i_1(x) = \begin{pmatrix} x \\ 0 \end{pmatrix}$, 那么取 $h = \tilde{h} \circ i_1$, 则

$$\begin{aligned} p \circ h &= p \circ \tilde{h} \circ i_1 \\ &= f \circ \mathrm{Pr}_1 \circ i_1 \\ &= f \circ \mathrm{Id}_P \\ &= f. \end{aligned}$$

定理 1.24. 设 R-模 P, 则以下等价:

(1) P 投射.

(2) 任意短正合列 $0 \to L \to M \to P \to 0$ 均分裂.

(3) $\exists\, R$-模 M 使得 $M \oplus P$ 自由.

(4) 函子 $\mathrm{Hom}_R(P, -)\colon R\text{−Mod} \to R\text{−Mod}$ 正合. 即对任意短正合列 $0 \to M \xrightarrow{f} N \xrightarrow{g} L \to 0$, 有 $0 \to \mathrm{Hom}_R(P, M) \xrightarrow{f_*} \mathrm{Hom}_R(P, N) \xrightarrow{g_*} \mathrm{Hom}_R(P, L) \to 0$ 正合.