

## 代数学第三次作业

### 1 课堂练习

1. 设  $A, B \in \mathcal{C}$ .  $f: A \rightarrow B$  为同构. 证明: 其逆映射  $g$  惟一.
2.  $\mathcal{C} = R^{Mod}$ . 证明单态射 = 单同态, 满态射 = 满同态.
3.  $\mathcal{C} = \text{CommRing}$ , 证明嵌入映射  $\mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{Q}$  为满态射.
4. 记号如课堂讲述. 证明:  $(X \times Y; p, q)$  为  $\mathcal{C}'_{X,Y}$  的终对象.
5.  $G = \langle a | a^2 = 1 \rangle, H = \langle b | b^2 = 1 \rangle$ . 证明:  $G, H$  在 Groups 中的上乘积是  $\langle a, b | a^2 = b^2 = 1 \rangle$ .
6. 找出  $R^{Mod}$  中的推出 (pullback) 和拉回 (pushout). (老师上课讲了形式, 验证即可)

### 2 课本习题

1.  $f: M \rightarrow N, g: M \rightarrow 0, h: 0 \rightarrow N$  是  $R$ -模同态. 求  $f, g$  的推出和  $f, h$  的拉回.
2. (a) 给定  $R^{Mod}$  上推出图表

$$\begin{array}{ccc} A & \xrightarrow{g} & C \\ f \downarrow & & \downarrow \beta \\ B & \xrightarrow{\alpha} & D \end{array}$$

证明: 若  $g$  为单射, 则  $\alpha$  为单射. 若  $g$  为满射, 则  $\alpha$  为满射.

- (b) 给定  $R^{Mod}$  上拉回图表

$$\begin{array}{ccc} D & \xrightarrow{\alpha} & C \\ \beta \downarrow & & \downarrow g \\ B & \xrightarrow{f} & A \end{array}$$

证明: 若  $f$  为单射, 则  $\alpha$  为单射. 若  $f$  为满射, 则  $\alpha$  为满射.

3. 证明: 同构一定是双射. (课本中并未说明双射的定义. 此处意思应该是指  $\mathcal{C}$  为集合范畴 Sets 子范畴, 需要证明给定的同构映射是 Sets 中双射.) 在集合范畴 Sets 中, 双射也是同构.