Lec3 Note of Algebra

Xuxuayame

日期：2024 年 9 月 14 日

1.1.5 外直和与内直和

定义 1.9. 固定 R, 考虑 R-模 S,T, 定义其 **(外) 直和**为:

$$S \oplus T = S \times T = \{(s,t) \mid s \in S,\ t \in T\},$$
$$(s,t) + (s',t') = (s+s', t+t'),$$
$$\forall\, r \in R,\ r \cdot (s,t) = (rs, rt).$$

我们可以有一些自然的嵌入或投影:

$$S \overset{i_1}{\hookrightarrow} S \oplus T \overset{\pi_1}{\twoheadrightarrow} S,$$
$$s \mapsto (s, 0_T),\ (s,t) \mapsto s,$$
$$T \overset{i_2}{\hookrightarrow} S \oplus T \overset{\pi_2}{\twoheadrightarrow} T,$$
$$t \mapsto (0_S, t),\ (s,t) \mapsto t.$$

命题 1.11. $(S \oplus T, i_1, i_2)$ 的泛性质*:* $\forall$ R-模 M, $f\colon S \to M$, $g\colon T \to M$, $\exists!\, \varphi\colon S \oplus T \to M$ *s.t.*

$$\varphi \circ i_1 = f,\ \varphi \circ i_2 = g.$$

也即如下交换图成立

$$\begin{tikzcd}
S \arrow[dr, hook, "i_1"'] \arrow[drr, bend left, "\forall\, f"] & & \\
& S \oplus T \arrow[r, dashed, "\exists!\ \varphi"] & M \\
T \arrow[ur, hook, "i_2"] \arrow[urr, bend right, "\forall\, g"'] & &
\end{tikzcd}$$

证明. 先证明至多唯一性: 由图表交换, $\varphi \circ i_1 = f,\ \varphi \circ i_2 = g, \forall\, s \in S,\ t \in T,\ \varphi(s, 0_T) = f(s),\ \varphi(0_S, t) = g(t)$. 那么 $\forall\, (s,t) \in S \oplus T,\ (s,t) = (s, 0_T) + (0_S, t)$, 若有 $\varphi\colon S \oplus T \to M$, 则必然有

$$\varphi(s,t) = \varphi(s, 0_T) + \varphi(0_S, t) = f(s) + g(t).$$

可见 φ 唯一地被 f,g 构造出来 (因此存在性也被给出). 于是我们可记 φ 为 (f,g):

$$
\begin{aligned}
(f,g)=\varphi\colon S\oplus T&\to M,\\
\begin{pmatrix}s\\t\end{pmatrix}&\mapsto (f,g)\begin{pmatrix}s\\t\end{pmatrix}=f(s)+g(t).
\end{aligned}
$$

□

命题 1.12. *$(S\oplus T,\pi_1,\pi_2)$ 的泛性质: $\forall$ R-模 N, $p\colon N\to S$, $q\colon N\to T$, 则 $\exists!\,\psi\colon N\to S\oplus T$ s.t.*

$$\pi_1\circ\psi=p,\ \pi_2\circ\psi=q.$$

也即如下交换图成立

$$
\begin{tikzcd}
 & & S \\
N \arrow[r, dashed, "\exists!\ \psi"] \arrow[urr, bend left, "\forall\ p"] \arrow[drr, bend right, "\forall\ q"'] & S\oplus T \arrow[ur, two heads, "\pi_1"] \arrow[dr, two heads, "\pi_2"'] & \\
 & & T
\end{tikzcd}
$$

证明. 同样先证明 ψ 的至多唯一性: 设 $\psi\colon N\to S\oplus T,\ x\mapsto(a,b)$, 那么由图表交换, $\forall\,x,\ \pi_1\circ\psi(x)=p(x)\Rightarrow a=p(x)$, 同理 $b=q(x)$. 因此 ψ 唯一地被 p,q 构造 (从而存在性也成立).

记 $\psi=\begin{pmatrix}p\\q\end{pmatrix}: N\to S\oplus T,\ x\mapsto\begin{pmatrix}p(x)\\q(x)\end{pmatrix}$. □

定义 1.10. 设 R-模 S,T 为 M 的子模, 若 $S+T=M$ 且 $S\cap T=\{0_M\}$, 则称 M 为 S,T 的**内直和**, S,T 互称为**补**, S,T 为 M 的**直和项**.

对 $S,T\subset M$, 我们有典范映射:

$$
\begin{aligned}
\mathrm{can}\colon S\oplus T&\to M,\\
(s,t)&\mapsto s+t.
\end{aligned}
$$

命题 1.13. *R-模 $S,T\subset M$, 则 M 为 S,T 的内直和 $\Leftrightarrow$ $\mathrm{can}\colon S\oplus T\to M$ 是同构. 故此时可以写 $M=S\oplus T$.*

证明. $\Rightarrow$: $\mathrm{Im}(\mathrm{can})=S+T$, $\mathrm{Ker}(\mathrm{can})=\{(s,t)\in S\oplus T\mid s+t=0\}=(0_M,0_M)$.

$\Leftarrow$: 显然. □

评论. (1) 补不一定存在 ($R=\mathbb{Z}$, $\mathbb{Z}_4\supset\{\overline{0},\overline{2}\}$ 子模无补).

(2) 补不唯一, 但同构下唯一.

命题 1.14. *R-模 $S\subset M$, 则 S 为直和项 $\Leftrightarrow\exists\,p\colon M\twoheadrightarrow S$ s.t. $p|_S=\mathrm{Id}_S$, 我们称此 p 为**收缩 (Retraction)**.*

证明. $\Leftarrow$: $p\colon M \twoheadrightarrow S$, $p|_S = \mathrm{Id}_S$, 记 $K = \mathrm{Ker}p = \{m \in M \mid p(m) = 0\}$, 我们宣称 M 为 K, S 内直和.

首先对 $\forall\, x \in M$, $x = (x - p(x)) + p(x)$, $p(x) \in S$, 而 $p(x - p(x)) = p(x) - p(p(x)) = p(x) - p(x) = 0 \Rightarrow x - p(x) \in K$, 可见 $M = K + S$. 而对 $y \in K \cap S$, $0 = p(y) = y$, 故 $K \cap S = \{0_M\}$.

$\Rightarrow$: 设 S 的补为 T, $\forall\, x \in M$, $\exists!\, x = x_S + x_T$. 定义

$$p\colon M \to S,$$
$$x \mapsto x_s.$$

可以验证 p 为同态, 且 $p|_S = \mathrm{Id}_S$. $\square$

评论. p 依赖于 T.

推论. $S \subset M$ 为直和项, $S \subset A \subset M$, 则 S 也为 A 的直和项.

证明.

方法 1 $p\colon M \to S$, $p|_S = \mathrm{Id}_S$, 则 $p \circ \mathrm{inc}_A = p'\colon A \to S$, 可以发现 $p'|_S = \mathrm{Id}_S$.

方法 2 设 $M = S \oplus T$ 为内直和, 我们宣称 $A = S \oplus (A \cap T)$. 首先 $S \cap (A \cap T) = \{0_A\}$ 显然.

对 $\forall\, a \in A$, $a = s + t$, $t = a - s \in A \Rightarrow t \in A \cap T$.

$\square$

那么更复杂地, 对于 $\forall\, f_{11} \in \mathrm{Hom}_R(S, S')$, $f_{12} \in \mathrm{Hom}_R(T, S')$, $f_{21} \in \mathrm{Hom}_R(S, T')$, $f_{22} \in \mathrm{Hom}_R(T, T')$, 我们宣称存在 $F\colon S \oplus T \to S' \oplus T'$ 使得如下图表交换:

$$\begin{tikzcd}
S \arrow[rrr, "f_{11}"] \arrow[dr, hook, "i_1"'] \arrow[ddrrr, "f_{21}" near start] & & & S' \\
& S \oplus T \arrow[r, "F"] & S' \oplus T' \arrow[ur, two heads, "\pi_1"] \arrow[dr, two heads, "\pi_2"'] & \\
T \arrow[rrr, "f_{22}"] \arrow[ur, hook, "i_2"] \arrow[uurrr, "f_{12}"'] & & & T'
\end{tikzcd}$$

也即:

$$\pi_1 \circ F \circ i_1 = f_{11},$$
$$\pi_1 \circ F \circ i_2 = f_{12},$$
$$\pi_2 \circ F \circ i_1 = f_{21},$$
$$\pi_2 \circ F \circ i_2 = f_{22}.$$

利用泛性质即可. 可记 $F = \begin{pmatrix} f_{11} & f_{12} \\ f_{21} & f_{22} \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} s \\ t \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} f_{11} & f_{12} \\ f_{21} & f_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} s \\ t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} f_{11}(s) + f_{12}(t) \\ f_{21}(s) + f_{22}(t) \end{pmatrix}$.

评论. 对于 R-模 $S_1, \cdots, S_n$, 可以定义外直和

$$\bigoplus_{i=1}^{n} S_i = S_1 \oplus \cdots \oplus S_n = S_1 \times \cdots \times S_n.$$

伴有 $S_l \xhookrightarrow{i_l} \bigoplus_{i=1}^n S_i \overset{\pi_l}{\twoheadrightarrow} S_l$. 类似可以有泛性质.

若 $S_1, \cdots, S_n$ 为 M 子模, 则称 M 为 $S_1, \cdots, S_n$ 的内直和, 若

- $S_1 + \cdots + S_n = M$;
- $\forall\, l,\ S_l \cap (S_1 + \cdots + S_{l-1} + S_{l+1} + \cdots + S_n) = \{0_M\}$.

这等价于 can: $\oplus_{i=1}^n S_i \to M,\ (s_1, \cdots, s_n) \mapsto s_1 + \cdots + s_n$ 为同构.

而对于无限的情况, 如下:

定义 1.11. 设 $\{S_\alpha\}_{\alpha\in\Lambda}$ 为一族 R-模, Λ 为指标集. 称**直积 (Product)** 为

$$\prod_{\alpha\in\Lambda} S_\alpha = \{(s_\alpha)_{\alpha\in\Lambda} \mid s_\alpha \in S_\alpha\}.$$

$\forall\, \alpha \in \Lambda$, 伴有 $\pi_\alpha\colon \prod_{\alpha\in\Lambda} S_\alpha \twoheadrightarrow S_\alpha$. 并且我们要求 $(\prod_{\alpha\in\Lambda} S_\alpha,\ p_\alpha,\ \alpha \in \Lambda)$ 满足泛性质: $\forall$ R-模 $M,\ f_\alpha\colon M \to S,\ \forall\, \alpha \in \Lambda,\ \exists!\, \varphi\colon M \to \prod_{\alpha\in\Lambda} S_\alpha$ s.t. $\pi_\alpha \circ \varphi = f_\alpha$.

定义 1.12. 我们称

$$\begin{aligned}\coprod_{\alpha\in\Lambda} S_\alpha &= \bigoplus_{\alpha\in\Lambda} S_\alpha \\ &= \left\{ (s_\alpha)_{\alpha\in\Lambda} \in \prod_{\alpha\in\Lambda} S_\alpha \,\middle|\, s_\alpha \neq 0 \text{只对有限} \alpha \in \Lambda \text{成立} \right\}\end{aligned}$$

为**直和 (Direct sum)** 或**余积 (Coproduct)**. 它是 $\prod_{\alpha\in\Lambda} S_\alpha$ 的子模. $\forall\, \alpha \in \Lambda$ 有 $i_\alpha\colon S_\alpha \hookrightarrow \coprod_{\alpha\in\Lambda} S_\alpha$, 且我们要求 $(\coprod_{\alpha\in\Lambda} S_\alpha,\ i_\alpha,\ \alpha \in \Lambda)$ 有类似嵌入的泛性质.

命题 1.15. *设有一族 R-模 $\{S_\alpha\}_{\alpha\in\Lambda}$, M, 则有 R-模同构:*

(1)

$$\prod_{\alpha\in\Lambda} \mathrm{Hom}_R(M, S_\alpha) \xrightarrow{\sim} \mathrm{Hom}_R\left(M, \prod_{\alpha\in\Lambda} S_\alpha\right),$$

$$(f_\alpha)_{\alpha\in\Lambda} \mapsto F,\ F(m) = (f_\alpha(m))_{\alpha\in\Lambda}.$$

(2)

$$\prod_{\alpha\in\Lambda} \mathrm{Hom}_R(S_\alpha, M) \xrightarrow{\sim} \mathrm{Hom}_R\left(\coprod_{\alpha\in\Lambda} S_\alpha, M\right),$$

$$(g_\alpha)_{\alpha\in\Lambda} \mapsto G.$$

这里 $G\colon \coprod_{\alpha\in\Lambda} S_\alpha \to M,\ (s_\alpha)_{\alpha\in\Lambda} \mapsto \sum_{\alpha\in\Lambda} g_\alpha(s_\alpha)$.