Lec9 Note of Algebra

Xuxuayame

日期: 2024 年 10 月 12 日

定义 1.33. 设 R 为整环, 称 $_RM$ 为**可除模**, 若 $\forall\, m \in M,\ 0 \neq r \in R,\ \exists\, m' \in M$ s.t. $rm' = m$.

评论. M 可除 $\Rightarrow M/N$ 可除.

引理 1.29. R 整环.

(1) $_RE$ 内射 $\Rightarrow$ 可除.

(2) R 为 *PID,* 则内射 $\Leftrightarrow$ 可除.

证明. (1) $m \in E$, $0 \neq r \in R$. 定义 $\phi_r\colon R \hookrightarrow R,\ a \mapsto ra$ 为单态射, 此外由 $\mathrm{Hom}_R(R, X) \simeq X$, 对 $m \in E$ 有 $\psi_m\colon R \to E,\ b \mapsto bm$. 于是

$$\begin{tikzcd} R \arrow[r, hook, "\phi_r"] \arrow[d, "\psi_m"'] & R \arrow[dl, dashed, "\exists!\ \psi'"] \\ E & \end{tikzcd}$$

(2) $_RM$ 可除, $\forall\, I \lhd R,\ 0 \neq Ra = I \hookrightarrow R$, 有 $f(a) \in M \Rightarrow \exists\, m' \in M$ s.t. $f(a) = am'$, 于是取 $\psi'\colon R \to M,\ 1 \mapsto m'$ 得到 f 的延拓, 从而由 Baer 判别法得到 M 内射.

$\square$

例 1.34. $0 \to {}_{\mathbb{Z}}\mathbb{Z} \to {}_{\mathbb{Z}}\mathbb{Q} \to \mathbb{Z}(\mathbb{Q}/\mathbb{Z}) \to 0$, $\mathbb{Q}/\mathbb{Z}$ 为内射模.

1.4 张量积与平坦模

1.4.1 张量积

定义 1.34. 设有 $_RM, {}_RN, {}_RL$, 称如下映射

$$M \times N \xrightarrow{\theta} L,$$

$$(m, n) \mapsto \theta(m, n)$$

是**双线性的 (Bilinear)**, 若

(1) $\theta(m_1 + m_2, n) = \theta(m_1, n) + \theta(m_2, n),\ \theta(rm, n) = r\theta(m, n)$.

(2) $\theta(m, n_1 + n_2) = \theta(m, n_1) + \theta(m, n_2),\ \theta(m, rn) = r\theta(m, n)$.

定义 1.35. ${}_RM, {}_RN$ 的**张量积**是指 $({}_RU, \varphi)$, 这里 $\varphi\colon M \times N \to U$ 为双线性映射, 满足泛性质: 对 $\forall\, {}_RL$, 以及 $\forall\, \theta\colon M \times N \to L$ 双线性, 有

$$
\begin{tikzcd}
M \times N \arrow[r, "\varphi"] \arrow[d, "\theta"'] & R \arrow[dl, dashed, "\exists!\, h"] \\
E &
\end{tikzcd}
$$

我们如下构造 (U, φ). 考虑集 $M \times N$, 以 $M \times N$ 为基构造自由 R-模:

$$R(M \times N) = \{\text{有限和} \sum_i c_i(m_i, n_i) \mid c_i \in R,\ (m_i, n_i) \in M \times N\}.$$

我们取 K 为由子集

$$\left\{ \begin{array}{c|c} (m_1 + m_2, n) - (m_1, n) - (m_2, n) & \\ (rm, n) - r(m, n) & \\ (m, n_1 + n_2) - (m, n_1) - (m, n_2) & m, m_i \in M,\ n, n_i \in N,\ r \in R \\ (m, rn) - r(m, n) & \end{array} \right\}$$

生成的 $R(M \times N)$ 的 R-子模. 那么我们取

$${}_RU = R(M \times N)/K,\ \overline{(m, n)} =: m \otimes n.$$

并令

$$\varphi\colon M \times N \to U,\ (m, n) \mapsto m \otimes n.$$

现在我们要验证 φ 是双线性的: 在 U 中,

$$
\begin{aligned}
(m_1 + m_2) \otimes n &= \overline{(m_1 + m_2, n)} \\
&= \overline{(m_1, n) + (m_2, n)} \\
&= \overline{(m_1, n)} + \overline{(m_2, n)} \\
&= m_1 \otimes n + m_2 \otimes n.
\end{aligned}
$$

同理

$$r(m \otimes n) = (rm) \otimes n,$$

$$m \otimes (n_1 + n_2) = m \otimes n_1 + m \otimes n_2,$$

$$m \otimes (rn) = r(m \otimes n).$$

而泛性质的验证基于

生成

$$
\begin{tikzcd}
M \times N \arrow[r, "\varphi"] \arrow[d, "\theta"'] & R(M \times N) \arrow[r, two heads] \arrow[dl, dashed, "\exists!\, \tilde{\theta}"] & U \arrow[dll, bend left, "\theta'"] \\
L & &
\end{tikzcd}
$$

\tilde{theta}由基在映射下的像确定

我们宣称 $\tilde{\theta}(K) = 0$, 因为 θ 双线性, 于是令 $\theta'(m \otimes n) = \theta(m, n)$ 即可.

评论. 记 $U =: M \otimes_R N$, $\varphi\colon M \times N \to M \otimes_R N$, $(m, n) \mapsto m \otimes n$, 那么 $\{m \otimes n \mid m \in M,\ n \in N\}$ 生成 $M \otimes_R N$. 特别地由于 $m \otimes rn = rm \otimes n$, $\forall\, r \in R$, 所以 $0_M \otimes n = 0_R(0_M \otimes n) = 0_{M \otimes N}$.

例 1.35. 记 $\mathbb{Z}_n=\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$. 宣称: $\mathbb{Z}_n\otimes_{\mathbb{Z}}\mathbb{Q}=0$.

$$\begin{aligned}\overline{a}\otimes\frac{p}{q}&=\overline{a}\otimes n\left(\frac{p}{nq}\right)\\&=(n\overline{a})\otimes\frac{p}{nq}\\&=\overline{0}\otimes\frac{p}{nq}\\&=0.\end{aligned}$$

例 1.36. $\gcd(m,n)=1,\ \mathbb{Z}_m\otimes_{\mathbb{Z}}\mathbb{Z}_n=0$.

例 1.37. $R\otimes_R M\simeq M$, 因为对 $\rho(r,m)=rm$ 双线性, 其延拓同态 $\tilde{\rho}\colon R\otimes_R M\to M,\ \tilde{\rho}(r\otimes m)=rm,\ \forall\, r\in R,\ m\in M$. 另取

$$M\xrightarrow{f}R\otimes_R M,\ m\mapsto 1\otimes m.$$

则 f 保加法, 因为 $1\otimes(m+m')=1\otimes m+1\otimes m'$.

f 保 R-作用, 因为 $f(rm)=1\otimes rm=(r1)\otimes m=r(1\otimes m)=rf(m)$. 故 f 为模同态.

于是 $\tilde{\rho}f(m)=\tilde{\rho}(1\otimes m)=1m=m$. $f\tilde{\rho}\colon R\otimes M\to R\otimes M$, 只用 $f\tilde{\rho}(r\otimes m)=f(rm)=1\otimes rm=r\otimes m$.

命题 1.30. $M\otimes_R N\simeq N\otimes_R M$.

证明. 设 $\tau\colon M\times N\to N\times M,\ (m,n)\mapsto(n,m)$, 于是由泛性质:

$$\begin{tikzcd}M\times N \arrow[r, "\varphi"] \arrow[d, "\tau"] \arrow[dr, "\psi\circ\tau"] & M\otimes_R N \arrow[d, dashed, "\exists!\ f"] \\ N\times M \arrow[r, "\psi"] & N\otimes_R M\end{tikzcd}$$

这里 $f(m\otimes n)=n\otimes m$. 同理对 τ^{-1} 也可以由类似的 g, 可以证明 f,g 互逆, 从而同构. □

评论. $f\colon M\to M',\ g\colon N\to N'$, 则 $\exists!\ M\otimes_R N\xrightarrow{f\otimes_R g}M'\otimes_R N',\ m\otimes n\mapsto f(m)\otimes g(n)$.

证明. 取 $\theta\colon M\times N\to M'\otimes N',\ (m,n)\mapsto f(m)\otimes g(n)$ 使用泛性质确定唯一同态即可, 记为 $f\otimes g$. □

命题 1.31.

$$\left(\bigoplus_{i\in\Lambda}M_i\right)\otimes_R N\simeq\bigoplus_{i\in\Lambda}(M_i\otimes_R N).$$

证明. 我们考虑 $\{M_i\overset{\mathrm{inc}_i}{\hookrightarrow}\bigoplus_{i\in\Lambda}M_i\}_{i\in\Lambda}$, 考虑 $\forall\, i$,

$$\mathrm{inc}_i\otimes_R\mathrm{Id}_N\colon M_i\otimes_R N\to\left(\bigoplus M_i\right)\otimes_R N,\ m_i\otimes n\mapsto\mathrm{inc}_i(m_i)\otimes n.$$

那么我们宣称 $\{\mathrm{inc}_i\otimes_R\mathrm{Id}_N\mid i\in\Lambda\}$ 与 $(\bigoplus M_i)\otimes_R N$ 满足直和的泛性质:

$$\begin{tikzcd}M_i\otimes_R N \arrow[r, hook] \arrow[d, "\forall\ f_i"'] & \left(\bigoplus_{i\in\Lambda}M_i\right)\otimes_R N \arrow[dl, dashed, "\exists!\ h"] \\ T & \end{tikzcd}$$

这里 h 只需把 $(\cdots, m_i, \cdots) \otimes n$ 打到 $f_i(m_i \otimes n)$. 于是其与直和同构. $\square$

推论. ${}_R N$ 自由模, 基 $\{v_i \mid i \in I\}$, 则 $N \otimes_R M \simeq \bigoplus_{i\in I} M$.

证明. $N = \bigoplus_{i\in\Lambda} Rv_i$, 那么 $N \otimes_R M \simeq \bigoplus_{i\in I}(Rv_i \otimes_R M) \simeq \bigoplus_{i\in I} M$. $\square$

推论. ${}_R M, {}_R N$ 自由, 基分别为 $\{m_i\}_{i\in I}, \{n_j\}_{j\in J}$, 则 $M \otimes_R N$ 自由, 且基为 $\{m_i \otimes n_j \mid (i,j) \in I \times J\}$.

证明.

$$\begin{aligned} M \otimes_R N &= \left(\bigoplus_{i\in I} Rm_i\right) \otimes_R \left(\bigoplus_{j\in J} Rn_j\right) \\ &= \bigoplus_{i\in I} \bigoplus_{j\in J} (Rm_i \otimes Rn_j). \end{aligned}$$

$\square$

命题 1.32.

$$(M \otimes_R N) \otimes_R L \xrightarrow{\sim} M \otimes_R (N \otimes_R L),$$

$$(m \otimes n) \otimes l \mapsto m \otimes (n \otimes l).$$

记为 $M \otimes_R N \otimes_R L$.