Lec10 Note of Algebra

Xuxuayame

日期：2024 年 10 月 14 日

命题 1.33. $I \lhd R$, 则 $R/I \otimes_R M \simeq M/IM$, 这里 $IM = \{\sum_{\text{有限}} r_i m_i \mid r_i \in I\}$. 特别地 $I = 0$ 则 $R \otimes_R M \simeq M$.

证明. 考虑

$$R/I \times M \to M/IM,\ (\bar{r}, m) \mapsto \overline{rm}$$

为双线性映射, 则其诱导同态:

$$\phi\colon R/I \otimes_R M \to M/IM,\ \bar{r} \otimes m \mapsto \overline{rm}.$$

反之取 $\phi^{-1}\colon M/IM \to R/I \otimes_R M,\ \overline{m} \mapsto \bar{1} \otimes m$.

习题: 验证 ϕ^{-1} 良定义. □

命题 1.34. $N \otimes_R -\colon R\text{–}\mathsf{Mod} \to R\text{–}\mathsf{Mod}$ 是右正合的. 即

$$M' \xrightarrow{i} M \xrightarrow{\phi} M'' \to 0 \text{ 正合}$$

$$\Rightarrow N \otimes_R M' \xrightarrow{\mathrm{Id}_N \otimes_R i} N \otimes_R M \xrightarrow{\mathrm{Id}_N \otimes_R \phi} N \otimes_R M'' \to 0 \text{ 正合}.$$

例 1.38. 注意 $\mathrm{Id}_N \otimes_R i$ 未必是单同态. 取 $R = \mathbb{Z}$, 那么对 $\mathbb{Z} \xhookrightarrow{i} \mathbb{Q}$. 取 $N = \mathbb{Z}_2$, 则对 $\mathbb{Z}_2 \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Z} \xrightarrow{i_*} \mathbb{Z}_2 \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Q}, \bar{1} \otimes 1 \mapsto \bar{1} \otimes 1$, 但前者在 $\mathbb{Z}_2 \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Z}$ 中不为零, 而后者在 $\mathbb{Z}_2 \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Q}$ 中为零.

证明. 先证 $\phi_* = \mathrm{Id}_N \otimes_R \phi$ 满. 因为 $n \otimes m'' = n \otimes \phi(m) = \phi_*(n \otimes m)$.

然后 $\phi_* \circ i_* = 0$, 这是显然的. 于是 $\mathrm{Im} i_* \subset \mathrm{Ker} \phi_*$.

要证 $\mathrm{Im} i_* = \mathrm{Ker} \phi_*$, 只需证 $N \otimes_R M/\mathrm{Im} i_* \simeq N \otimes_R M''$. 我们设 $\forall\, z \in N \otimes_R M,\ \bar{z} \mapsto \phi_*(z)$. 只需

$$N \times M'' \to M \otimes_R M/\mathrm{Im} i_*,\ (n, m'') \mapsto \overline{n \otimes m}.$$

成为双线性映射. 为了证明映射良定义, 取 $m \in M,\ y \in M$ s.t. $\phi(m) = m'' = \phi(y)$, 则 $m - y \in \mathrm{Im} i,\ n \otimes m - n \otimes y = n \otimes (m - y) \in \mathrm{Im} i_*$. 则其诱导的延拓与前者复合得到 Id, 从而为同构. □

1.4.2 平坦模 Flat Module

定义 1.36. 称 ${}_RF$ 平坦, 若 $\forall\, i\colon M' \hookrightarrow M$ 单, 都有 $\mathrm{Id}_F \otimes_R i\colon F \otimes_R M' \to F \otimes_R M$ 单.

例 1.39. ${}_RR$ 平坦, 因为对 $\forall\, i\colon M' \hookrightarrow M$ 单, 可以验证 $\mathrm{Id}_R \otimes R\colon R \otimes_R M' \to R \otimes_R M$ 单.

命题 1.35. *考虑 ${}_RF$, 则 ${}_RF$ 平坦 $\Leftrightarrow$ $F \otimes_R -\colon R\text{–}\mathsf{Mod} \to R\text{–}\mathsf{Mod}$ 正合.*

证明. $\Rightarrow$: 成立.

$\Leftarrow$: 设 $0 \to M' \overset{i}{\hookrightarrow} M \twoheadrightarrow M/\mathrm{Im}i \to 0$ 为短正合列, 由 $F \otimes_R -$ 正合即得. □

例 1.40. R 整环, $0 \neq I \lhd R,\ I \neq R$, 则 R/I 不平坦. 因为 $i\colon R \hookrightarrow K$, i_* 不单.

K = Frac R 是R的商域

命题 1.36. *(1) $\{F_i\}_{i\in\Lambda}$, F_i 平坦 $\Rightarrow \coprod_{i\in\Lambda} F_i$ 平坦.*

(2) F 平坦, F' 为 F 的直和项则 F' 平坦.

(3) 投射模是平坦模.

证明. (1) $\forall\, a\colon M' \hookrightarrow M$ 单.

$$\begin{array}{ccc}
(\coprod_{i\in\Lambda} F_i) \otimes_R M' & \xrightarrow{a_*} & (\coprod_{i\in\Lambda} F_i) \otimes_R M \\
\downarrow \simeq & & \downarrow \simeq \\
\coprod_{i\in\Lambda}(F_i \otimes_R M') & \xrightarrow{\coprod_{i\in\Lambda}(a_*)} & \coprod_{i\in\Lambda}(F_i \otimes_R M)
\end{array}$$

习题: 验证图表交换.

(2) $F = F' \oplus F''$, 对 $i\colon M' \hookrightarrow M$ 单,

$$\begin{array}{ccc}
F \otimes_R M' & \xhookrightarrow{\mathrm{Id}_F \otimes_R i} & F \otimes_R M \\
\simeq \downarrow & & \downarrow \simeq \\
(F' \otimes_R M') \oplus (F'' \otimes_R M') & \xhookrightarrow[i']{} & (F' \otimes_R M) \oplus (F'' \otimes_R M)
\end{array}$$

这里 $i' = \begin{pmatrix} \mathrm{Id}_F \otimes_R i & 0 \\ 0 & \mathrm{Id}_{F''} \otimes i \end{pmatrix}$

□

命题 1.37. *${}_RF$ 平坦 $\Leftrightarrow \forall\, I \lhd R,\ I \otimes_R F \hookrightarrow R \otimes_R F$ 单, 此时 $R \otimes F \simeq F$, $I \otimes_R F \simeq IF$.*

例 1.41. ${}_{\mathbb{Z}}\mathbb{Q}$ 平坦. (**习题**: ${}_{\mathbb{Z}}\mathbb{Q}$ 不是投射模).

固定 $d \geq 2$, 验证 $\mathbb{Q} \otimes_{\mathbb{Z}} d\mathbb{Z} \to \mathbb{Q} \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Z}$ 单.

证明. $\Leftarrow$: 取 $\mathcal{S} = \{{}_RM \mid \forall\, M' \leq M,\ F \otimes_R M' \to F \otimes_R M,\ f \otimes m' \mapsto f \otimes m'$单$\}$. 则

(1) $\mathcal{S}$ 对商封闭, 即 $M \in \mathcal{S}$, $K \leq M$ 则 $M/K \in \mathcal{S}$.

(2) $\mathcal{S}$ 对 $\coprod$ 封闭, 即 $M_i \in S \Rightarrow \coprod_{i\in\Lambda} M_i \in \mathcal{S}$.

于是 $(1) + (2) \Rightarrow \mathcal{S} = R\text{–}\mathsf{Mod}$.

对 (1), $K \le M' \le M$, $M'/K \le M/K$. 有

$$
\begin{tikzcd}
 & F \otimes_R K \arrow[r, equal] \arrow[d, hook] & F \otimes_R K \arrow[r] \arrow[d, hook] & 0 \arrow[r] \arrow[d] & 0 \\
0 \arrow[r] & F \otimes_R M' \arrow[r, hook] \arrow[d, two heads] & F \otimes_R M \arrow[r] \arrow[d, two heads] & F \otimes_R M/M' \arrow[d, equal] & 0 \\
 & F \otimes_R M'/K \arrow[r, "单?"'] \arrow[d] & F \otimes_R M/K \arrow[r] \arrow[d] & F \otimes_R M/M' \arrow[r] & 0 \\
 & 0 & 0 & &
\end{tikzcd}
$$

对一二行使用蛇引理即可.

对 (2), 设 $M_1, M_2 \in \mathcal{S}$, $E \le M_1 \oplus M_2 = M$, 则

$$
\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & M_1 \cap E \arrow[r] \arrow[d, hook] & E \arrow[r] \arrow[d, hook] & E/(M_1 \cap E) \arrow[r] \arrow[d, hook, "单?"] & 0 \\
0 \arrow[r] & M_1 \arrow[r] & M \arrow[r] & M_2 &
\end{tikzcd}
$$

这里单因为 $E/(M_1 \cap E) \simeq (M_1 + E)/M_1 \le M/M_1 \simeq M_2$. 于是对于

$$
\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & F \otimes_R (M_1 \cap E) \arrow[r] \arrow[d, hook] & F \otimes_R E \arrow[r] \arrow[d, hook, "?"] & F \otimes_R (E/(M_1 \cap E)) \arrow[r] \arrow[d, hook] & 0 \\
0 \arrow[r] & F \otimes_R M_1 \arrow[r] & F \otimes_R M \arrow[r] & F \otimes_R M_2 \arrow[r] & 0
\end{tikzcd}
$$

由蛇引理可得中间单.

于是对于一般的直和, 设 $M_i \in \mathcal{S}$, 与 $E \le \coprod_{i\in\Lambda} M_i$, 我们想要证明 $F \otimes_R E$ 中非零元打到 $F \otimes_R (\coprod M_i)$ 中非零, 那么对任意 $0 \neq z \in F \otimes_R E$, z 可写成 $\sum_{\text{有限}} e_j \otimes (m_i)_{i\in\Lambda}$, 这里 m_i 也是有限个, 因此整体是有限的, 所以存在 $\Lambda' \subset \Lambda$ 以及 $E' = E \cap \coprod_{i\in\Lambda'} M_i$ 使得 $0 \neq z' = \sum_{\text{有限}} e_j \otimes (m_i)_{i\in\Lambda'} \in F \otimes E'$ 被打到 $F \otimes_R E$ 中恰好为 z. 而 z' 最后的像自然也不为零.

$$
\begin{tikzcd}
F \otimes_R E \arrow[r] & F \otimes_R (\coprod M_i) \\
F \otimes_R E' \arrow[r, hook] \arrow[u] & F \otimes_R (\coprod_{i\in\Lambda'} M_i) \arrow[u, hook]
\end{tikzcd}
$$

□

引理 1.38. 设有短正合列 $0 \to N \hookrightarrow M \to F \to 0$, F 平坦.

则对 $\forall\, {}_R E$, $0 \to N \otimes_R E \hookrightarrow M \otimes_R E \to F \otimes_R E \to 0$ 正合.

命题 1.39. $0 \to F' \to F \to F'' \to 0$ 正合, F'' 平坦, 则 F 平坦 $\Leftrightarrow$ F' 平坦.

特别地 $0 \to K \to F' \to \cdots \to F^n \to 0$ 正合, F^i 平坦, 则 K 平坦.

1.4.3 基变换

设有环同态 $R \xrightarrow{f} S$,那么一个 ${}_SM$ 可以变为 ${}_RM$,这就给出了 S−$\mathsf{Mod} \to R$−Mod 的一个正合函子.