Lec8 Note of Algebra

Xuxuayame

日期：2024 年 10 月 9 日

证明. (1) $\Rightarrow$ (2): 根据投射, 有

$$\begin{tikzcd}
 & & & P \arrow[dl, dashed, "\exists\, s"'] \arrow[d, "\mathrm{Id}_P"] & \\
0 \arrow[r] & L \arrow[r, hook, "a"'] & M \arrow[r, two heads, "b"'] & P \arrow[r] & 0
\end{tikzcd}$$

那么 $b \circ s = \mathrm{Id}_P$, 因此分裂.

(2) $\Rightarrow$ (3): 取满 $F \overset{b}{\twoheadrightarrow} P$, F 为自由模. 那么

$$0 \longrightarrow \mathrm{Ker} b \xhookrightarrow{\mathrm{inc}} F \xrightarrow{b} P \longrightarrow 0$$

f 分裂, 于是 $F \simeq \mathrm{Ker} b \oplus P$.

(3) $\Rightarrow$ (1): 若存在 X 使得 $F = X \oplus P$ 自由. 那么由自由模投射, 有:

$$\begin{tikzcd}
 & F \arrow[d, two heads, "q"] \arrow[ddl, bend right, "h'"'] \\
 & P \arrow[d] \arrow[dl, dashed, "h' \circ j"'] \\
M \arrow[r, two heads, "p"'] & N
\end{tikzcd}$$

这里由分裂设 $q \circ j = \mathrm{Id}_P$. 那么 $h = h' \circ j$ 为提升. $\square$

评论. **习题**: 若 P 为 R-模, 则 P 有限投射 $\Leftrightarrow \exists\, M$ s.t. $P \oplus M \simeq R^n$.

令 $P^* = \mathrm{Hom}_R(P, R)$.

命题 1.25. *P 投射 $\Leftrightarrow \exists$ 集合 $\{a_i\}_{i\in\Lambda} \subset P$, $\{\varphi_i\}_{i\in\Lambda} \subset P^*$ s.t.*

(1) $\forall\, x \in P$, $\{i \in \Lambda \mid \varphi_i(x) \neq 0\}$ 有限.

(2) $\forall\, x \in P$, $x = \sum_{i\in\Lambda} \varphi_i(x) a_i$ 在 P 中成立.

*此时 $\{a_i\}, \{\varphi_i\}$ 一并称为 P 的***对偶基**.

证明. $\Leftarrow$: 以 $\{e_i \mid i \in \Lambda\}$ 为基, 作自由模 F, $F = \bigoplus_{i\in\Lambda} Re_i$. 定义:

$$\begin{aligned}
f\colon P &\to F \\
x &\mapsto f(x) = \sum_{i\in\Lambda} \varphi_i(x) e_i \in F.
\end{aligned}$$

与

$$\begin{aligned} g\colon F &\to P \\ \sum_{i\in\Lambda} c_i e_i &\mapsto \sum_{i\in\Lambda} c_i a_i,\ g(e_i)=a_i. \end{aligned}$$

那么我们宣称 $g\circ f=\mathrm{Id}_P$. $\square$

评论. P 有限投射 $\Rightarrow$ 可取 Λ 有限.

命题 1.26. ***Schanuel* 引理 *(Schanuel lemma)*.**

若存在短正合列

$$0\to K \xrightarrow{i} P \xrightarrow{\pi} M \to 0,$$

$$0\to K' \xrightarrow{i'} P' \xrightarrow{\pi'} M \to 0$$

使得 P, P' 投射, 则 $K\oplus P'\simeq K'\oplus P$.

证明. 我们将两条正合列合并且令 $E=\{(x,y)\in P\oplus P' \mid \pi(x)=\pi'(y)\}$ 得到一个拉回, 并令 $j\colon K\to E,\ a\mapsto (i(a),0)$ 以及类似的 j', 那么有

$$\begin{tikzcd}
 & & 0 \arrow[d] & 0 \arrow[d] & \\
 & & K' \arrow[r, equal] \arrow[d, dashed, "j'"] & K' \arrow[d, "i'"] & \\
0 \arrow[r] & K \arrow[r, dashed, "j"] \arrow[d, equal] & E \arrow[r, dashed, "b"] \arrow[d, dashed, "a"] & P' \arrow[r] \arrow[d, "\pi'"] & 0 \\
0 \arrow[r] & K \arrow[r, "i"] & P \arrow[r, "\pi"] \arrow[d] & M \arrow[r] \arrow[d] & 0 \\
 & & 0 & 0 &
\end{tikzcd}$$

习题: 证明新构造的一行一列是正合列.

于是我们得到 $E\simeq K'\oplus P,\ E\simeq K\oplus P'$, 于是二者同构. $\square$

1.3.3 内射模

定义 1.32. R-模 E 称为**内射的 (Injective module)**, 若 $\forall$ 单态射 $A\overset{i}{\hookrightarrow} B$, $\forall f\colon A\to E$, 则 f 有延拓

$$\begin{tikzcd}
A \arrow[r, hook, "i"] \arrow[d, "f"'] & B \arrow[dl, dashed, "\exists\, h"] \\
E &
\end{tikzcd}$$

定理 1.27. 设有 R-模 E, 则以下等价:

(1) E 内射.

(2) 任意短正合列 $0\to E\to B\to C\to 0$ 分裂.

(3) 函子 $\mathrm{Hom}_R(-,E)\colon (R\text{−}\mathsf{mod})^{\mathrm{op}} \to R\text{−}\mathsf{Mod}$ 正合.

证明. (1) ⇒ (2).

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & E \arrow[r, hook, "i"] \arrow[d, "\mathrm{Id}"'] & B \arrow[r, "p"] \arrow[dl, dashed, "\exists\, h"] & C \arrow[r] & 0 \\
 & E & & &
\end{tikzcd}$$

有 $h \circ i = \mathrm{Id}_E$.

(2) ⇒ (1). 我们做个推出:

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & A \arrow[r, hook, "i"] \arrow[d, "f"'] & B \arrow[r] \arrow[d, dashed, "f'"'] & \mathrm{Coker} i \arrow[r] \arrow[d, equal] & 0 \\
0 \arrow[r] & E \arrow[r, dashed, "i'"'] & F \arrow[r] & \mathrm{Coker} i \arrow[r] & 0
\end{tikzcd}$$

这里 $F = E \oplus B/\{(f(a), i(a)) \mid a \in A\}$. 我们猜测 $F \xrightarrow{p} \mathrm{Coker} i$ 由 $\overline{(e,b)} \mapsto b$ 定义, 那么可以得到下面也构成短正合列, 从而分裂, 于是取 $s\colon F \to E$ 使得 $s \circ i' = \mathrm{Id}_E$, 那么延拓 $h = s \circ f'$. 那么

$$h \circ i = s \circ f' \circ i = s \circ i' \circ f = \mathrm{Id}_E \circ f = f.$$

□

定理 1.28. ***(Baer 判别法, 1940)***.

E 内射 $\Leftrightarrow \forall\, I \lhd R$, $\forall\, f\colon I \to E$ 可延拓 $R \to E$, 即

$$\begin{tikzcd}
I \arrow[r, hook, "\mathrm{inc}"] \arrow[d, "f"'] & R \arrow[dl, dashed, "\exists\, h"] \\
E &
\end{tikzcd}$$

证明. ⇒: 成立.

⇐: 对任意

$$\begin{tikzcd}
A \arrow[r, hook, "\mathrm{inc}"] \arrow[d, "f"'] & B \\
E &
\end{tikzcd}$$

取 $b \in B \setminus A$, $A \subsetneq A_1 := A + Rb \subset B$. 那么 $1 \notin I = \{r \in R \mid rb \in A\} \lhd R$, 定义 $g\colon I \to E$, $r \mapsto f(rb)$, 则可以延拓为 $\tilde{g}$.

$$\begin{tikzcd}
I \arrow[r, hook, "\mathrm{inc}"] \arrow[d, "g"'] & R \arrow[dl, dashed, "\exists\, \tilde{g}"] \\
E &
\end{tikzcd}$$

现在我们定义

$$\begin{aligned} &f_1\colon A_1 \to E, \\ &a + rb \mapsto f(a) + r\tilde{g}(1). \end{aligned}$$

那么我们需要验证:

(1) f_1 是良定义的.

(2) $f_1|_A = f$.

首先验证 f_1 良定义. 设 $a+rb = a'+r'b$, 那么 $(r-r')b = a'-a$, $f(a'-a) = f((r-r')b) = g(r-r') = \tilde{g}(r-r')$, 于是良定义.

好了我们不证了. 后面大致用 Zorn 引理. Idea 如上. □

作为 Baer 判别法的例子我们有

例 1.33. R 整环, R 的分式域 $K = \mathrm{Frac}(R)$ 为内射模.