Lec1 Note of Algebra

Xuxuayame

日期：2024 年 9 月 9 日

1 模论

1.1 定义

1.1.1 模的基本定义

回忆线性空间的定义, 设 k 为域, 那么 k-线性空间 $(V,+,\cdot)$ 简记为 V 指的是:

- $(V,+)$ 为 Abel 群;
- 满足数乘结合律与数乘单位元: $1_k\cdot\vec{v}=\vec{v},\ \mu(\lambda\vec{v})=(\mu\lambda)\vec{v}$;
- 分配律: $(\mu+\lambda)\vec{v}=\mu\vec{v}+\lambda\vec{v},\ \lambda(\vec{v}+\vec{w})=\lambda\vec{v}+\lambda\vec{w}$.

评论. $+\colon V\times V\to V,\ \cdot:k\times V\to V,\ (\lambda,\vec{v})\mapsto\lambda\vec{v}$.

模论的动机在于, 对于 $I\lhd R$, R 为含幺交换环, $I, R/I$ 同时成为 R-模, 从而能统一起来.

定义 1.1. **R-模 (Module)** 指的是一个三元组 $(M,+,\varphi)$ 满足:

- $(M,+)$ 成为 Abel 群.
- $\varphi\colon R\times M\to M,\ (r,m)\mapsto\varphi(r,m)=:rm\in M$ 作为所谓的 "数乘映射" 应当满足

  结合律 $r'(rm)=(r'r)m,\ \forall\, r,r'\in R,\ m\in M$.

  单位性 $1_Rm=m,\ \forall\, m\in M$.

  分配律 $r(m+m')=rm+rm',\ (r+r')m=rm+r'm,\ \forall\, r,r'\in R,\ m,m'\in M$.

命题 1.1. *(1)* $0_R\cdot m=0_M,\ \forall\, m\in M$.

(2) $-1_R\cdot m=-m,\ \forall\, m\in M$.

(3) 广义分配律

$$\left(\sum_{i=1}^n r_i\right)\cdot\left(\sum_{j=1}^l m_j\right)=\sum_{i=1}^n\sum_{j=1}^l r_im_j.$$

(4) $\forall\, n\in\mathbb{Z},\ (n1_R)\cdot m=nm,\ \forall\, m\in M$.

证明. (1) $0_R\cdot m=(0_R+0_R)\cdot m=0_R\cdot m+0_R\cdot m$, 于是根据 $(M,+)$ 的消去律.

(2) $0_M=0_R\cdot m=(1_R+(-1_R))\cdot m=1_R\cdot m+(-1_R)\cdot m=m+(-1_R)\cdot m$.

(3) Try yourself.

(4) Try yourself.

$\square$

例 1.1. (1) $R = k$, k-模也即 k-线性空间.

(2) $R = \mathbb{Z}$, $\mathbb{Z}$-模: $(M, +, \varphi)$, 则 $n \cdot x = (n1_{\mathbb{Z}}) \cdot x = nx$, 可见 φ 完全由 M 决定.

反之, $\forall\, (M, +)$ 为 Abel 群, 定义 $n \cdot x = nx$, $\forall\, n \in \mathbb{Z}$, $x \in M$ 自然满足定义 (**??**) 的三条性质, 因此其成为 $\mathbb{Z}$-模.

可见 $\mathbb{Z}$-模与 Abel 群是一回事.

(3) $R = k[x]$, 设 V 为 k-线性空间, $T\colon V \to V$ 为线性变换, 则 (V, T) 决定了一个 $k[x]$-模:

- $(V, +)$ 为 Abel 群.
- $k[x] \times V \to V,\ f(x) \cdot \vec{v} \mapsto (\sum_{i=0}^{n} c_i x^i) \cdot \vec{v} = \sum_{i=0}^{n} c_i T^i(\vec{v}) \in V.$

反之, 对 $k[x]$-模 M, $(M, +)$ 为 Abel 群, 对 $\lambda \in k \subset k[x]$, $\forall\, m \in M$, $\lambda \cdot m \in M \Rightarrow M$ 为 k-线性空间, 于是记

$$\begin{aligned} T\colon M &\to M, \\ m &\mapsto xm. \end{aligned}$$

我们宣称 T 为线性变换.

$$T(m + m') = x(m + m') = xm + xm' = T(m) + T(m')$$
$$T(\lambda m) = x(\lambda m) = (x\lambda)m = (\lambda x)m = \lambda(xm) = \lambda T(m).$$

于是和前面一致有

$$\left(\sum_{i=0}^{l} c_i \cdot x^i\right) \cdot m = \sum_{i=0}^{l} c_i T^i(m).$$

从而 M 也即 (M, T).

评论. 习题: 证明 $k[x, y]$-模本质上为 $(V; T_1, T_2)$, 其中 V 为 k-线性空间, $T_1, T_2\colon V \to V$ 为线性变换且满足 $T_1 \circ T_2 = T_2 \circ T_1$.

例 1.2. (1) R 本身成为 R-模: $(R, +, \cdot)$, 这里数乘即为乘法本身. 我们也称为 R 的正则模 (Regular module).

(2) $I \lhd R$, 则 I 为 R-模: $r \in R,\ m \in I,\ r \cdot m = rm \in I$. $R/I = \{r + I \mid r \in R\}$ 也为 R-模: $r \cdot (m + I) := rm + I$.

(3) $R \subset S$ 为子环, 则 S 为 R-模.

定义 1.2. 定义 N 为 M 的 R-**子模 (Submodule)**, 若

- $N \subset M$ 为子群;
- $\forall\, n \in N,\ r \in R,\ r \cdot n \in N$.

M 的**平凡子模**是 $\{0_M\}$ 与 M.

例 1.3. (1) $R = k$, k-模即 k-线性空间, k-子模即其线性子空间.

(2) $R = \mathbb{Z}$, $\mathbb{Z}$-子模即子群.

(3) $R = k[x]$, 则 (V, T) 的 $k[x]$-子模即 V 的 T-不变子空间.

例 1.4. 考虑 R 正则模, 则 R 的子模即理想, $I \triangleleft R$, 则 I 的子模为 $J \triangleleft R, J \subset I$.

例 1.5. 对 $m \in M$, 取 $Rm = \{rm \mid r \in R\} \subset M$, 它是 M 的子模, 称为由 m **生成的子模**.

一般地, 对 $X \subset M$, 定义 $(X) = \{\sum_{i=1}^{n} r_i x_i \mid r_i \in R,\ x_i \in X,\ n \in \mathbb{N}\}$ 也即所有有限 R-线性组合, 称为由 X 生成的子模.

特别地对于 $X = \{x_1, \cdots, x_l\} \subset M$, (X) 也记为 $(x_1, \cdots, x_l)$.

命题 1.2. *若 $S, T \subset M$ 为子模, 则*

- *$S \cap T$ 为子模;*
- *S, T 的**和**:*

$$S + T := \{s + t \mid s \in S,\ t \in T\}$$

  为 M 的子模.

- $(x_1, \cdots, x_l) = \sum_{i=1}^{l} Rx_i$.

定义 1.3. (1) R-模 M 称为**循环模 (Cyclic module)**, 若 $\exists\, m \in M$ s.t. $M = Rm$.

(2) M 称为**有限生成的 (Finitely generated)**, 若 $\exists\, |X| < +\infty$ s.t. $M = (X)$. 即存在 $x_1, \cdots, x_l \in M$ s.t. $M = (x_1, \cdots, x_l)$.

例 1.6. (1) $R = k$, 有限生成 k-模即有限维 k-空间.

(2) $R = \mathbb{Z}$, 有限生成 $\mathbb{Z}$-模即有限生成 Abel 群.

(3) $R = k[x]$, 循环 $k[x]$-模 (V, T) 即循环子空间.

1.1.2 模同态

定义 1.4. 设 M, N 为 R-模, 则 R-**模同态** $f\colon M \to N$ 满足:

- $f(m + m') = f(m) + f(m'),\ \forall\, m, m' \in M$;
- $f(rm) = rf(m),\ \forall\, r \in R,\ m \in M$.

此外, 称 f 为**单同态**, 若 f 为单射 $\Leftrightarrow \mathrm{Ker} f = \{0_M\}$. 称 f 为**满同态**, 若 f 为满射. 称 f 为**同构**, 若 f 既单又满.

例 1.7. (1) $R = k$, k-模同态即 k-线性映射.

(2) $R = \mathbb{Z}$, $\mathbb{Z}$-模同态即群同态.

(3) $R = k[x]$, 则 $f\colon (V, T) \to (W, S)$ 为同态 $\Leftrightarrow$ f 为 k-线性映射, $f \circ T = S \circ f$. 进一步 f 为 $k[x]$-模同构 $\Leftrightarrow$ $f\colon V \to W$ 为线性同构且 $f \circ T = S \circ f$($\Rightarrow$ T, S 相似, $T = f^{-1} \circ S \circ f$).

反过来, 设 $A, B \in M_n(k)$, 则考虑 k^n 列向量空间, A, B 诱导了上面的线性映射, 从而 $(k^n, A), (k^n, B)$ 成为 $k[x]$-模. 而 $(k^n, A) \simeq (k^n, B) \Leftrightarrow A, B$ 相似.