Lec11 Note of Algebra

Xuxuayame

日期：2024 年 10 月 16 日

如果 ${}_RM$ 是 R-模, M 不能直接成为 S-模, 但 $S\otimes_R M$ 是 S-模.

$\forall\, s\in S$, 我们取 $\mu_s\colon S\times M\to S\otimes_R M,\ (s',m)\mapsto ss'\otimes m$ 为双线性映射. 那么

$$\begin{tikzcd} S\times M \arrow[r, "\text{can}"] \arrow[d, "\mu_s"'] & S\otimes_R M \arrow[dl, dashed, "\exists!\ \tilde{\mu_s}"] \\ S\otimes_R M & \end{tikzcd}$$

这里

$$\tilde{\mu_s}\colon S\otimes_R M\to S\otimes_R M,\ s'\otimes m\mapsto ss'\otimes m$$

为 R-模同态. 那么定义

$$S\times(S\otimes_R M)\to S\otimes_R M,\ (s,z)\mapsto\tilde{\mu_s}(z).$$

习题: 验证 $S\otimes_R M$ 成为 S-模.

于是我们可以看见函子 $S\otimes_R -\colon R\text{−}\mathsf{Mod}\to S\text{−}\mathsf{Mod}$,

$$\begin{tikzcd} M \arrow[d, "\theta"'] & S\otimes_R M \arrow[d, "\mathrm{Id}_S\otimes_R\theta"] \\ N \arrow[r, phantom, ""] & S\otimes_R N \end{tikzcd} \quad \longmapsto$$

称为**基变换函子**.

例 1.42. $I\lhd R,\ R\overset{\pi}{\twoheadrightarrow}R/I$, 于是 $R\text{−}\mathsf{Mod}\to(R/I)\text{−}\mathsf{Mod}$,

$$M\mapsto R/I\otimes_R M\simeq M/IM.$$

称为 M 关于 I 的**约化 (Reduction)**.

例 1.43. ${}_{\mathbb{Z}}A\in\mathbb{Z}\text{−}\mathsf{Mod}$. 考虑 $\mathbb{Z}\to\mathbb{F}_p=\mathbb{Z}/p\mathbb{Z},\ p$ 素. 则可以得到 $\mathbb{F}_p$-线性空间: $\mathbb{F}_p\otimes_{\mathbb{Z}}A=A/pA$.

若考虑 $\mathbb{Z}\hookrightarrow\mathbb{Q}$, 则 $\mathbb{Q}\otimes_{\mathbb{Z}}A$ 成为 $\mathbb{Q}$-线性空间.

例 1.44. R 为整环, 则 $R\hookrightarrow K=\mathrm{Frac}(R)$, 那么 $R\text{−}\mathsf{Mod}\to K\text{−}\mathsf{Mod},\ M\mapsto K\otimes_R M$, 这是一个 K-线性空间.

命题 1.40. $R\xrightarrow{f}S,\ {}_SM,\ {}_RN$, 则

$$M\otimes_S(S\otimes_R N)\simeq M\otimes_R N$$

作为 S-模同构.

证明. 取

$$M \times N \to M \otimes_S (S \otimes_R N),\ (m,n) \mapsto m \otimes (1_S \otimes n).$$

我们验证这是一个双线性映射. 因为

$$rm \otimes (1_S \otimes n) = r(m \otimes (1_S \otimes n)),$$
$$m \otimes (1_S \otimes rn) = m \otimes (f(r) \otimes n) = f(r)m \otimes (1_S \otimes n).$$

于是得到

$$\psi\colon M \otimes_R N \to M \otimes_S (S \otimes_R N),\ m \otimes n \mapsto m \otimes (1_S \otimes n).$$

另外设 $M \times (S \otimes_R N) \to M \otimes_R N,\ (m,z) \mapsto \tilde{\phi}_m(z)$ 为双线性映射, 这里 $\phi_m\colon S \times N \to M \otimes_R N,\ (s,n) \mapsto sm \otimes n$ 为双线性映射, 延拓为 $\tilde{\phi}_m$. 这显然是双线性映射. 验证可知二者复合为 Id. □

推论. $R \xrightarrow{f} S \xrightarrow{g} T$ 为环同态, 则

$$T \otimes_R M \simeq T \otimes_S (S \otimes_R M).$$

作为 T-模. $t \otimes m \mapsto t \otimes (1_S \otimes m)$.

评论. ${}_RF$ 自由 $\Rightarrow {}_S(S \otimes_R F)$ 自由.

${}_RP$ 投射 $\Rightarrow {}_S(S \otimes_R P)$ 投射.

命题 1.41. *(1)* ${}_RF$ 平坦, 则 $S \otimes_R F$ 平坦.

(2) ${}_RS$ 平坦, ${}_SM$ 平坦 $\Rightarrow {}_RM$ 平坦.

证明. (1) 设 ${}_SM \overset{i}{\hookrightarrow} {}_SM$ 单, 有图表交换:

$$\begin{tikzcd}
M' \otimes_S (S \otimes_R F) \arrow[r, "i_*"] \arrow[d, "\simeq"] & M \otimes_S (S \otimes_R F) \arrow[d, "\simeq"] \\
M' \otimes_R F \arrow[r, hook, "i_*"] & M \otimes_R F
\end{tikzcd}$$

下面的 i_* 单因为 ${}_RF$ 平坦. 具体来讲是

$$\begin{tikzcd}
m' \otimes (s \otimes a) \arrow[r, mapsto] \arrow[d, mapsto] & i(m') \otimes (s \otimes a) \arrow[d, mapsto] \\
sm' \otimes a \arrow[r, mapsto] & si(m') \otimes a
\end{tikzcd}$$

(2) $\forall\, j\colon {}_RN' \hookrightarrow {}_RN$ 单.

$$\begin{tikzcd}
M \otimes_R N' \arrow[r] \arrow[d, "\simeq"] & M \otimes_R N \arrow[d, "\simeq"'] \\
M \otimes_S (S \otimes_R N') \arrow[r, hook] & M \otimes_S (S \otimes_R N)
\end{tikzcd}$$

这里 $S \otimes N' \overset{j_*}{\hookrightarrow} S \otimes_R N$, 因为 ${}_RS$ 平坦.

□

1.5 PID 上的有限生成模

1.5.1

R 为整环, ${}_RM$, $m \in M$, 则定义

$$\mathrm{Ann}(m) = \{r \in R \mid rm = 0_M\} \lhd R$$

为 m 的**零化子 (Annihilator)**.

命题 1.42. 我们有 R-模同构:

$$R/\mathrm{Ann}(m) \simeq Rm.$$

证明. $R \twoheadrightarrow Rm$, $r \mapsto rm$, $\mathrm{Ker} = \mathrm{Ann}(m)$. □

定义 1.37. (1) $m \in M$ 称为**扭元 (Torsion element)**, 若 $\mathrm{Ann}(m) \neq \{0_R\}$. 即 $\exists\, 0 \neq r \in R$, $rm = 0_M$.

(2) $M_{\mathrm{tor}} = \{m \in M \mid m\text{为扭元}\} \subset M$ 为子模, 称为**扭子模**.
若 $M_{\mathrm{tor}} = 0_M$, 则称 M 是**无扭的**. 若 $M_{\mathrm{tor}} = M$, 则称 M 为**扭模**.

例 1.45. ${}_{\mathbb{Z}}A$, 那么 $a \in A_{\mathrm{tor}} \Leftrightarrow a$ 有限阶.

命题 1.43. M/M_{tor} 无扭.

证明. 若 $\overline{m} \in M/M_{\mathrm{tor}}$ 为扭元, $\exists\, 0 \neq r$, $r\overline{m} = \overline{0}$, $rm \in M_{\mathrm{tor}} \Rightarrow \exists\, 0 \neq s$, $s(rm) = 0_M \Rightarrow m \in M_{\mathrm{tor}}$, $\overline{m} = \overline{0}$. □

对 $\forall\, {}_RM$, 有正合列:

$$0 \to M_{\mathrm{tor}} \hookrightarrow M \twoheadrightarrow M/M_{\mathrm{tor}} \to 0$$

那么事实上 $\forall\, f\colon {}_RM \to {}_RM'$, $f(M_{\mathrm{tor}}) \subset M'_{\mathrm{tor}}$, $\overline{f}\colon M/M_{\mathrm{tor}} \to M'/M'_{\mathrm{tor}}$, $\overline{m} \mapsto \overline{f(m)}$, 有

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & M_{\mathrm{tor}} \arrow[r, hook] \arrow[d, dashed, "f|_{M_{\mathrm{tor}}}"'] & M \arrow[r, two heads] \arrow[d, "f"'] & M/M_{\mathrm{tor}} \arrow[r] \arrow[d, dashed, "\overline{f}"] & 0 \\
0 \arrow[r] & M'_{\mathrm{tor}} \arrow[r, hook] & M' \arrow[r, two heads] & M'/M'_{\mathrm{tor}} \arrow[r] & 0
\end{tikzcd}$$

图表交换.

习题: f 同构 $\Leftrightarrow f|_{M_{\mathrm{tor}}}$ 与 $\overline{f}$ 同构.

1.5.2

设 R 为 PID.

引理 1.44. ${}_RM$ 由 n 个元素生成, $M' \subset M$, 则 M' 可由至多 n 个元素生成.

证明. 对 n 归纳.

$n=1$ 时, $M\simeq R/I$, 则 $M'\simeq J/I$, 这里 $J=(b)$, 于是 M' 由 $\bar{b}$ 生成.

$n\geq 2$ 时, $M=\langle v_1,\cdots,v_n\rangle$, $M'\subset M$, 令 $N=\langle v_1,\cdots,v_{n-1}\rangle$, 则

$$0\to M'\cap N\to M'\to M'/(M'\cap N)\to 0.$$

为正合列. 而 $M'\cap N\subset N$ 由至多 $n-1$ 个元素生成, $M'/(M'\cap N)\simeq (M'+N)/N\subset M/N$ 为循环模从而 1-生成. 并运用如下引理. □

引理 1.45. 习题*: Horseshoe Lemma*: $0\to X\xrightarrow{f} Y\xrightarrow{g} Z\to 0$ *正合, 设 X 由 m 个元素生成, Z 由 n 个元素生成, 则 Y 由至多 $m+n$ 个元素生成.*

定理 1.46. *R 为 PID, 有限生成无扭 R-模均为自由模.*

例 1.46. k 域, $R=k[x,y]$, ${}_RI=(x,y)\subset {}_RR$ 无扭, 但 ${}_RI$ 不是自由模.

证明. 设 $M=\langle v_1,\cdots,v_n\rangle$ 无扭.

$n=1$ 时, $M=\langle v_1\rangle$, 则

$$R\simeq M,\ r\mapsto rv_1.$$

$n\geq 2$, 取

$$M'=\{m\in M\mid \exists\, 0\neq r\in R,\ rm\in\langle v_n\rangle\}\supset Rv_n.$$

那么有

$$0\to M'\to M\to M/M'\to 0$$

正合. 这里由 M/M' 由 $\overline{v_1},\cdots,\overline{v_{n-1}}$ 生成且无扭. 因为设 $\overline{m}\in M/M'$ 为扭元则 $\exists\, 0\neq r,\ rm\in M'$, $\exists\, 0\neq s,\ s(rm)\in\langle v_n\rangle\Rightarrow m\in m'$, $\overline{m}=\overline{0}$.

于是由归纳假设, M/M' 自由. 于是 $M\simeq M'\oplus(M/M')$.

我们宣称 $M'\simeq R$. 定义 $M'\xrightarrow{\varphi} K,\ x\mapsto \frac{a}{r}$, 这里 $\exists\, 0\neq r,\ rx=av_n$. 然后检查 φ 良定义.

由引理, M' 由 n 个元素生成, 故 $\mathrm{Im}\varphi$ 也有 n 个元素生成, $\langle\frac{a_1}{r_1},\cdots,\frac{a_n}{r_n}\rangle\subset\langle\frac{1}{r_1\cdots r_n}\rangle=\frac{R}{r_1\cdots r_n}\simeq R$. 故 $M'\simeq\mathrm{Im}\varphi\simeq {}_RR$. □