Lec5 Note of Algebra

Xuxuayame

日期：2024 年 9 月 23 日

我们已经熟知对 $\forall\, f\colon M\to N$ 为模同态有正合列:

$$\begin{tikzcd} 0 \arrow[r] & \mathrm{Ker}f \arrow[r, hook, "\mathrm{inc}"] & M \arrow[r, "f"] & N \arrow[r, two heads, "\mathrm{can}"] & \mathrm{Coker}f \arrow[r] & 0 \end{tikzcd}$$

那么对于两个模同态, 如果有如下交换图成立且行正合:

$$\begin{tikzcd} 0 \arrow[r] & \mathrm{Ker}f \arrow[r, hook, "\mathrm{inc}"] & M \arrow[r, "f"] \arrow[d, "a"'] & N \arrow[r, two heads, "\mathrm{can}"] \arrow[d, "b"] & \mathrm{Coker}f \arrow[r] & 0 \\ 0 \arrow[r] & \mathrm{Ker}g \arrow[r, hook, "\mathrm{inc}"] & L \arrow[r, "g"] & Q \arrow[r, two heads, "\mathrm{can}"] & \mathrm{Coker}g \arrow[r] & 0 \end{tikzcd}$$

那么我们可以自然定义 $a_* = a|_{\mathrm{Ker}f}$, b_* 使得如下交换图成立:

$$\begin{tikzcd} 0 \arrow[r] & \mathrm{Ker}f \arrow[r, hook, "\mathrm{inc}"] \arrow[d, dashed, "a_*"'] & M \arrow[r, "f"] \arrow[d, "a"'] & N \arrow[r, two heads, "\mathrm{can}"] \arrow[d, "b"] & \mathrm{Coker}f \arrow[r] \arrow[d, dashed, "b_*"] & 0 \\ 0 \arrow[r] & \mathrm{Ker}g \arrow[r, hook, "\mathrm{inc}"] & L \arrow[r, "g"] & Q \arrow[r, two heads, "\mathrm{can}"] & \mathrm{Coker}g \arrow[r] & 0 \end{tikzcd}$$

定理 1.18. 蛇引理 *(Snake Lemma)*.

如果有如下行正合的交换图*:*

$$\begin{tikzcd} & X' \arrow[r, "f"] \arrow[d, "d'"'] & X \arrow[r, "g"] \arrow[d, "d"] & X'' \arrow[r] \arrow[d, "d''"] & 0 \\ 0 \arrow[r] & Y' \arrow[r, "p"] & Y \arrow[r, "q"] & Y'' & \end{tikzcd}$$

则有*:*

$$\mathrm{Ker}d' \xrightarrow{f_*} \mathrm{Ker}d \xrightarrow{g_*} \mathrm{Ker}d'' \xrightarrow{\delta} \mathrm{Coker}d' \xrightarrow{p_*} \mathrm{Coker}d \xrightarrow{q_*} \mathrm{Coker}d'$$

正合. δ 称为连接映射.

评论. 完整的交换图如下:

$$
\begin{tikzcd}
 & \mathrm{Ker}(d') \arrow[r, dashed, "f_*"] \arrow[d, hook, "\mathrm{inc}"] & \mathrm{Ker}(d) \arrow[r, dashed, "g_*"] \arrow[d, hook, "\mathrm{inc}"] & \mathrm{Ker}(d'') \arrow[d, hook, "\mathrm{inc}"] \arrow[dddll, dashed, "\delta"] & \\
 & X' \arrow[r, "f"] \arrow[d, "d'"] & X \arrow[r, "g"] \arrow[d, "d"] & X'' \arrow[r] \arrow[d, "d''"] & 0 \\
0 \arrow[r] & N' \arrow[r, "p"] \arrow[d, two heads, "\mathrm{can}"] & N \arrow[r, "q"] \arrow[d, two heads, "\mathrm{can}"] & N'' \arrow[d, two heads, "\mathrm{can}"] & \\
 & \mathrm{Coker} d' \arrow[r, "p_*"] & \mathrm{Coker} d \arrow[r, "q_*"] & \mathrm{Coker} d'' &
\end{tikzcd}
$$

证明. See any textbook of homological algebra. □

1.2 范畴与函子 Abstract Nonsense

1.2.1 范畴 Category

定义 1.15. 一个**范畴** $\mathcal{C}$ 意指如下内容:

(1) **对象**: $A, B, C, \cdots$, 全体记为 $\mathrm{Obj}(\mathcal{C})$

(2) **态射**: 对 $A, B \in \mathrm{Obj}(\mathcal{C})$, 有集合 $\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(A, B)$, 其中元素记作 $f\colon A \to B$, 称为 A 到 B 的**态射**.

且有复合映射: $\forall\, A, B, C$,

$$\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(B, C) \times \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(A, B) \to \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(A, C),$$
$$(g, f) \mapsto g \circ f.$$

满足

(1) 结合律: $A \xrightarrow{f} B \xrightarrow{g} C \xrightarrow{h} D$, 有 $h \circ (g \circ f) = (h \circ g) \circ f$.

(2) 单位性: $\forall\, A \in \mathrm{Obj}(\mathcal{C})$, $\exists\, \mathrm{Id}_A \in \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(A, A)$ s.t. $\forall\, f\colon A \to B$,

$$\mathrm{Id}_B \circ f = f = f \circ \mathrm{Id}_A.$$

(使得 $\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(A, A) = \mathrm{End}_{\mathcal{C}}(A)$ 关于复合成为含幺半群.)

定义 1.16. 范畴 $\mathcal{C}$ 中 $f\colon A \to B$ 称为**同构**, 若 $\exists\, g\colon B \to A$ s.t. $f \circ g = \mathrm{Id}_B$ 且 $g \circ f = \mathrm{Id}_A$.

评论. (**习题**): g 是唯一的.

例 1.14. (1) 集合范畴 Set.

- 对象为集合.
- $\mathrm{Hom}_{\mathsf{Set}}(A, B) = \{f\colon A \to B \text{为映射}\}$.

此时同构即双射.

(2) 群范畴 Grp. 对象为群, 态射即群同态.

(3) 含幺环范畴 Ring. 对象为含幺环, 态射即环同态.

(4) 含幺交换环范畴 ComRing.

(5) 设有交换环 R, 则有 R-Mod 称为 R-模范畴, 对象为 R-模, 态射即模同态.

(6) 设 X 拓扑空间, 有 $\mathsf{Sh}(X)$ 称为层范畴.

现设有范畴 $\mathcal{C}$.

定义 1.17. 态射 $f\colon A \to B$ 称为**单态射 (Monomorphism)**, 记为 $A \overset{f}{\hookrightarrow} B$, 若

$$X \underset{g_2}{\overset{g_1}{\rightrightarrows}} A \xrightarrow{f} B$$

意即 $\forall\, X,\ g_1, g_2 \in \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(X, A),\ f \circ g_1 = f \circ g_2 \Rightarrow g_1 = g_2$.

对应有**满态射 (Epimorphism)**$A \overset{f}{\twoheadrightarrow} B$, 若

$$A \xrightarrow{f} B \underset{g_2}{\overset{g_1}{\rightrightarrows}} Y$$

意即 $\forall\, Y,\ g_1, g_2 \in \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(B, Y),\ g_1 \circ f = g_2 \circ f \Rightarrow g_1 = g_2$.

评论. (**习题**): 记 $\mathcal{C} = R$-Mod. 则单态射 = 单同态, 满态射 = 满同态.

(**习题**): 记 $\mathcal{C} =$ ComRing. 那么 $\mathbb{Z} \hookrightarrow \mathbb{Q}$ 显然是单态射, 它也是环的满态射, 但并非同构.

例 1.15. $\mathcal{C}$ 的反范畴 $\mathcal{C}^{\mathrm{op}}$ 定义如下:

- $\mathrm{Obj}(\mathcal{C}^{\mathrm{op}}) = \mathrm{Obj}(\mathcal{C})$.
- $\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}^{\mathrm{op}}}(A, B) = \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(B, A)$. 相当于把所有箭头全部反过来.

例 1.16. 在范畴 $\mathcal{C}$ 中固定一个对象 $X \in \mathrm{Obj}(\mathcal{C})$, 定义**切片范畴 (Slice category)**$\mathcal{C}_X$ 为:

- $\mathrm{Obj}_{\mathcal{C}_X} \ni (Y, f)$, 这里 $Y \in \mathrm{Obj}(\mathcal{C}),\ f\colon Y \to X$.
- $\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}_X}((Y, f), (Y', f')) = \{g \in \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(Y, Y') \mid f' \circ g = f\}$.

定义 1.18. 设有范畴 $\mathcal{C}$.

(1) $\mathcal{C}$ 中的**始对象 (Initial Object)**I 意指 $\forall\, X \in \mathrm{Obj}(\mathcal{C}),\ \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(I, X) = \{*_{I,X}\}$ 也即恰好为单元集.
始对象在同构意义下是至多唯一的.

(2) $\mathcal{C}$ 中的**终对象 (Final Object)**F 意指 $\forall\, Y \in \mathrm{Obj}(\mathcal{C}),\ \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(Y, F) = \{*_{Y,F}\}$ 也即恰好为单元集.

例 1.17. 在 ComRing 中, 始对象为 $\mathbb{Z}$, 终对象为零环.

例 1.18. 在 Set 中, 始对象为 $\varnothing$, 终对象为单元集.

例 1.19. 在 Grp 中, 始对象与终对象均为 $\{1_G\}$.

例 1.20. 在 R-Mod 中, 始对象与终对象均为零模.