## Lec8 Note of Algebra

## Xuxuayame

日期: 2024年10月9日

**证明.**  $(1) \Rightarrow (2)$ : 根据投射, 有

$$0 \longrightarrow L \xrightarrow{a} M \xrightarrow{\exists s} P \xrightarrow{\operatorname{Id}_{P}} 0$$

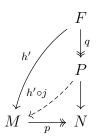
那么  $b \circ s = \mathrm{Id}_P$ , 因此分裂.

 $(2) \Rightarrow (3)$ : 取满  $F \stackrel{b}{\rightarrow} P, F$  为自由模. 那么

$$0 \longrightarrow \operatorname{Ker} b \stackrel{\operatorname{inc}}{\longleftrightarrow} F \stackrel{b}{\longrightarrow} P \longrightarrow 0$$

f 分裂, 于是  $F \simeq \text{Ker} b \oplus P$ .

(3) ⇒ (1): 若存在 X 使得  $F = X \oplus P$  自由. 那么由自由模投射, 有:



这里由分裂设  $q \circ j = \mathrm{Id}_P$ . 那么  $h = h' \circ j$  为提升.

评论. 习题: 若 P 为 R-模, 则 P 有限投射  $\Leftrightarrow \exists M$  s.t.  $P \oplus M \simeq R^n$ .

$$\Rightarrow P^* = \operatorname{Hom}_R(P, R).$$

命题 1.25. P 投射  $\Leftrightarrow$   $\exists$  集合  $\{a_i\}_{i\in\Lambda}\subset P,\ \{\varphi_i\}_{i\in\Lambda}\subset P^*$  s.t.

- (1)  $\forall x \in P$ ,  $\{i \in \Lambda \mid \varphi_i(x) \neq 0\}$  有限.
- (2)  $\forall x \in P$ ,  $x = \sum_{i \in \Lambda} \varphi_i(x) a_i$  在 P 中成立.

此时  $\{a_i\}$ ,  $\{\varphi_i\}$  一并称为 P 的**对偶基**.

证明.  $\Leftarrow$ : 以  $\{e_i \mid i \in \Lambda\}$  为基, 作自由模  $F, F = \bigoplus_{i \in \Lambda} Re_i$ . 定义:

$$f \colon P \to F$$
  
$$x \mapsto f(x) = \sum_{i \in \Lambda} \varphi_i(x) e_i \in F.$$

与

$$g \colon F \to P$$
  
$$\sum_{i \in \Lambda} c_i e_i \mapsto \sum_{i \in \Lambda} c_i a_i, \ g(e_i) = a_i.$$

那么我们宣称  $g \circ f = \mathrm{Id}_P$ .

**评论.** P 有限投射  $\Rightarrow$  可取  $\Lambda$  有限.

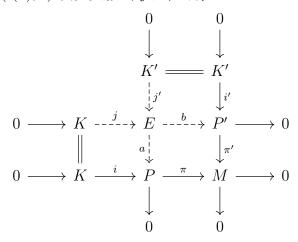
## 命题 1.26. Schanuel 引理 (Schanuel lemma).

若存在短正合列

$$0 \to K \xrightarrow{i} P \xrightarrow{\pi} M \to 0,$$
$$0 \to K' \xrightarrow{i'} P' \xrightarrow{\pi'} M \to 0$$

使得 P, P' 投射, 则  $K \oplus P' \simeq K' \oplus P$ .

**证明.** 我们将两条正合列合并且令  $E = \{(x,y) \in P \oplus P' \mid \pi(x) = \pi'(y)\}$  得到一个拉回, 并令  $j \colon K \to E, \ a \mapsto (i(a),0)$  以及类似的 j', 那么有



习题: 证明新构造的一行一列是正合列.

于是我们得到  $E \simeq K' \oplus P$ ,  $E \simeq K \oplus P'$ , 于是二者同构.

## 1.3.3 内射模

**定义 1.32.** R-模 E 称为**内射的 (Injective module)**, 若  $\forall$  单态射  $A \overset{i}{\hookrightarrow} B$ ,  $\forall$  f:  $A \to E$ , 则 f 有延拓

$$\begin{array}{c}
A & \stackrel{i}{\longleftrightarrow} B \\
f \downarrow & \stackrel{i}{\exists} h \\
E
\end{array}$$

**定理 1.27.** 设有 R-模 E, 则以下等价:

- (1) E 内射.
- (2) 任意短正合列  $0 \to E \to B \to C \to 0$  分裂.

(3) 函子  $\operatorname{Hom}_R(-,E)$ :  $(R-\mathsf{mod})^{\operatorname{op}} \to R-\mathsf{Mod}$  正合.

证明.  $(1) \Rightarrow (2)$ .

$$0 \longrightarrow E \xrightarrow{i} B \xrightarrow{p} C \longrightarrow 0$$

$$\downarrow Id \downarrow \downarrow \downarrow \exists h$$

$$E$$

有  $h \circ i = \mathrm{Id}_E$ .

(2) ⇒ (1). 我们做个推出:

$$0 \longrightarrow A \stackrel{i}{\hookrightarrow} B \longrightarrow \operatorname{Coker} i \longrightarrow 0$$

$$\downarrow f \downarrow f' \downarrow \downarrow \qquad \qquad \parallel$$

$$0 \longrightarrow E \stackrel{i}{\longrightarrow} F \longrightarrow \operatorname{Coker} i \longrightarrow 0$$

这里  $F = E \oplus B/\{(f(a), i(a)) \mid a \in A\}$ . 我们猜测  $F \stackrel{p}{\to} \operatorname{Coker} i$  由  $\overline{(e, b)} \mapsto b$  定义, 那么可以得到下面也构成短正合列, 从而分裂, 于是取  $s \colon F \to E$  使得  $s \circ i' = \operatorname{Id}_E$ , 那么延拓  $h = s \circ f'$ . 那么

$$h \circ i = s \circ f' \circ i = s \circ i' \circ f = \mathrm{Id}_E \circ f = f.$$

定理 1.28. (Baer 判别法, 1940).

E 内射  $\Leftrightarrow \forall I \triangleleft R, \forall f: I \rightarrow E$  可延拓  $R \rightarrow E$ , 即

$$I \xrightarrow{\operatorname{inc}} R$$

$$\downarrow f \\ E$$

$$\downarrow f \\ A$$

证明. ⇒: 成立.

⇐: 对任意

$$A \xrightarrow{\operatorname{inc}} B$$

$$f \downarrow \\ E$$

取  $b \in B \setminus A$ ,  $A \subsetneq A_1 := A + Rb \subset B$ . 那么  $1 \notin I = \{r \in R \mid rb \in A\} \triangleleft R$ , 定义  $g: I \to E$ ,  $r \mapsto f(rb)$ , 则可以延拓为  $\tilde{g}$ .

$$I \xrightarrow{\operatorname{inc}} R$$

$$\downarrow \qquad \qquad \downarrow \qquad \qquad \qquad \downarrow \qquad \qquad \qquad \qquad \downarrow \qquad \qquad \qquad \qquad \qquad \downarrow \qquad \qquad \qquad \qquad \downarrow \qquad \qquad \qquad \downarrow \qquad \qquad \qquad \qquad \downarrow \qquad \qquad \qquad \qquad \qquad \downarrow \qquad \qquad$$

现在我们定义

$$f_1 \colon A_1 \to E,$$
  
 $a + rb \mapsto f(a) + r\tilde{q}(1).$ 

那么我们需要验证:

- (1)  $f_1$  是良定义的.
- (2)  $f_1|_A = f$ .

首先验证  $f_1$  良定义. 设 a+rb=a'+r'b, 那么 (r-r')b=a'-a,  $f(a'-a)=f((r-r')b)=g(r-r')=\tilde{g}(r-r')$ , 于是良定义.

好了我们不证了. 后面大致用 Zorn 引理. Idea 如上.

作为 Baer 判别法的例子我们有

**例 1.33.** R 整环, R 的分式域  $K = \operatorname{Frac}(R)$  为内射模.