

代数学第五次作业

1 课堂练习

1. $\forall a: M' \hookrightarrow M$ 单.

$$\begin{array}{ccc} (\coprod_{i \in \Lambda} F_i) \otimes_R M' & \xrightarrow{a_*} & (\coprod_{i \in \Lambda} F_i) \otimes_R M \\ \downarrow \simeq & & \downarrow \simeq \\ \coprod_{i \in \Lambda} (F_i \otimes_R M') & \xrightarrow{\coprod_{i \in \Lambda} (a_*)} & \coprod_{i \in \Lambda} (F_i \otimes_R M) \end{array}$$

习题: 验证图表交换.

2. ${}_Z\mathbb{Q}$ 不是投射模.
3. M 为 R 模, $R \rightarrow S$ 环同态. 证明 $S \otimes_R M$ 为 S 模.
- 4.

$$\begin{array}{ccccccc} 0 & \longrightarrow & M_{tor} & \hookrightarrow & M & \twoheadrightarrow & M/M_{tor} \longrightarrow 0 \\ & & \downarrow f|_{M_{tor}} & & \downarrow f & & \downarrow \bar{f} \\ 0 & \longrightarrow & M'_{tor} & \hookrightarrow & M' & \twoheadrightarrow & M'/M'_{tor} \longrightarrow 0 \end{array}$$

习题: f 同构 $\Leftrightarrow f|_{M_{tor}}$ 与 \bar{f} 同构.

2 课本习题

1. R 为整环, $Q = \text{Frac} R$. 证明 $Q/R \otimes Q/R = 0$.
2. m, n 为整数, 求 $\mathbb{Z}/m\mathbb{Z} \otimes \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$.
3. R 为整环, 证明平坦 R -模无扭.
4. R 为整环, $0 \rightarrow M' \rightarrow M \rightarrow M'' \rightarrow 0$ 为正合列. 证明: 若 M' 可除或 M'' 无扭, 则 $0 \rightarrow M'_{tor} \rightarrow M_{tor} \rightarrow M''_{tor} \rightarrow 0$ 还是正合列.
5. k 为域. $R = k[x, y]$, $I = (x, y)$ 为 R 理想.

(a) 描述 I/I^2 与 $I/I^2 \otimes_R I/I^2$ 作为 R 模的结构.

(b) 证明: $x \otimes y - y \otimes x \in I \otimes_R I$ 非 0.

- (c) 证明 $\text{Ann}(x \otimes y - y \otimes x) \neq 0$ (如果可以, 求出 $\text{Ann}(x \otimes y - y \otimes x)$), 从而 $I \otimes_R I$ 不是无扭模.
- (d) 证明: I 不是平坦 R -模.