

代数学第二次作业

1 课堂练习

1. 设 M 为 S, T 内直和, 则 $M/S \xrightarrow{\sim} T, M/T \xrightarrow{\sim} S$.
2. q, i, j, π, A, B 如课堂讲述. 请验证: q 为同态, $q \circ i = \text{Id}_A, q \circ j = 0, \text{Id}_B = j \circ \pi + i \circ q$.

2 课本习题

1. 设 $\{M_i\}_{i \in I}$ 为一族 R -模, 对每个 $i, N_i \subset M_i$ 为子模, 证明:

$$(\bigoplus_{i \in I} M_i) / (\bigoplus_{i \in I} N_i) \xrightarrow{\sim} \bigoplus_{i \in I} (M_i / N_i)$$

2. 设 $0 \rightarrow A \rightarrow B \rightarrow C \rightarrow 0$ 为模的短正合列, M 为任意模, 证明: 存在短正合列

$$0 \rightarrow A \oplus M \rightarrow B \oplus M \rightarrow C \rightarrow 0$$

及

$$0 \rightarrow A \rightarrow B \oplus M \rightarrow C \oplus M \rightarrow 0$$

3. 设 $V_i (0 \leq i \leq n)$ 是有限维 k -线性空间,

$$0 \rightarrow V_0 \rightarrow V_1 \rightarrow \cdots \rightarrow V_n \rightarrow 0$$

为 k -线性空间正合列. 证明:

$$\sum_{i=0}^n (-1)^i \dim_k V_i = 0$$

4. 如 $A \xrightarrow{f} B \rightarrow C \xrightarrow{h} D$ 为正合列, 证明: f 为满射当且仅当 h 为单射.
5. 在 R -模范畴中证明: $0 \rightarrow M' \rightarrow M \rightarrow M''$ 为正合列当且仅当对任意 R -模 $N, 0 \rightarrow \text{Hom}(N, M') \rightarrow \text{Hom}(N, M) \rightarrow \text{Hom}(N, M'')$ 是正合列.