Lec4 Note of Algebra

Xuxuayame

日期：2024 年 9 月 18 日

1.1.6 正合列

定义 1.13. 设有一列 R-模及同态:

$$\cdots \to M_{n+1} \xrightarrow{f_{n+1}} M_n \xrightarrow{f_n} M_{n-1} \to \cdots$$

满足 $\forall\, n,\ f_n \circ f_{n+1} = 0 \Leftrightarrow \mathrm{Im} f_{n+1} \subset \mathrm{Ker} f_n$, 则称为 **(模) 复形**.

称复形在 M_n 处**正合 (Exact)**, 若 $\mathrm{Im} f_{n+1} = \ker f_n$.

称复形正合, 若在任意 M_n 处都正合.

例 1.11. $0 \to A \xrightarrow{f} B$ 在正合 $\Leftrightarrow f$ 单. 因为二者均等价于 $\{0_A\} = \mathrm{Ker} f$.

同理 $A \xrightarrow{g} B \to 0$ 正合 $\Leftrightarrow \mathrm{Im} g = B \Leftrightarrow g$ 满.

$0 \to A \xrightarrow{f} B \to 0$ 正合 $\Leftrightarrow f$ 同构.

定义 1.14. 复形

$$0 \to A \xrightarrow{f} B \xrightarrow{g} C \to 0$$

称为**短正合列 (Short exact sequence, s.e.s.)**, 若

- f 单;
- $\mathrm{Im} f = \mathrm{Ker} g$;
- g 满.

评论. 短正合列 $\Rightarrow A \simeq \mathrm{Im} f,\ C \simeq B/\mathrm{Im} f = \mathrm{Coker} f$.

例 1.12. 设 R-模 $M \supset N$, 那么

$$0 \to N \overset{\mathrm{inc}}{\hookrightarrow} M \overset{\mathrm{can}}{\twoheadrightarrow} M/N \to 0$$

为短正合列.

例 1.13. $\forall\, f\colon M \to L$ 为 R-模同态, 自然有两个短正合列:

$$0 \to \mathrm{Ker} f \overset{\mathrm{inc}}{\hookrightarrow} M \overset{f'}{\twoheadrightarrow} \mathrm{Im} f \to 0,$$

$$0 \to \mathrm{Im} f \overset{\mathrm{inc}}{\hookrightarrow} L \overset{\mathrm{can}}{\twoheadrightarrow} \mathrm{Coker} f \to 0.$$

这里 f' 为 $m\mapsto f(m)$. 二者可以拼接为一个更长的正合列:

$$\begin{tikzcd} 0 \arrow[r] & \mathrm{Ker}f \arrow[r, hook, "\mathrm{inc}"] & M \arrow[rr, "\forall f"] \arrow[dr, two heads, "f'"'] & & L \arrow[r, two heads, "\mathrm{can}"] & \mathrm{Coker}f \arrow[r] & 0 \\ & & & \mathrm{Im}f \arrow[ur, hook, "\mathrm{inc}"'] & & & \end{tikzcd}$$

命题 1.16. 设

$$0\to A\overset{i}{\hookrightarrow} B\overset{\pi}{\twoheadrightarrow} C\to 0$$

为短正合列. 则以下等价:

(1) $\exists\, q\colon B\to A$ *s.t.* $q\circ i=\mathrm{Id}_A$.

(2) $\exists\, j\colon C\to B$ *s.t.* $\pi\circ j=\mathrm{Id}_C$.

此时 $B\simeq A\oplus C$, 称该短正合列**分裂 *(Split)***.

证明. (1)⇒(2): $\exists\, q, \mathrm{Id}_B-(i\circ q)\colon B\to B$,

$$\begin{aligned} &(\mathrm{Id}_B-i\circ q)\circ i\\ =&i-i\circ(q\circ i)\\ =&i-i\circ \mathrm{Id}_A\\ =&i-i=0. \end{aligned}$$

即 $\mathrm{Id}_B-(i\circ q)|_{\mathrm{Im}i}=0$. 现取

$$j\colon C\to B,\ c\mapsto(\mathrm{Id}_B-(i\circ q))(\pi^{-1}(c)).$$

对 $\forall\, x,y\in\pi^{-1}(c),\ \pi(x)=c=\pi(y),\ \pi(x-y)=0_C,\ x-y\in\mathrm{Ker}\pi=\mathrm{Im}i$. 于是

$$(\mathrm{Id}_B-i\circ q)(x-y)=0.$$

从而可以验证 j 为同态. $\forall\, c\in C,\ \pi\circ j(c)=\pi(x-i\circ q(x))=\pi(x)-\pi\circ i\circ q(x)=\pi(x)=c$.

(2)⇒(1): $\exists\, j\colon C\to B$ s.t. $\pi\circ j=\mathrm{Id}_C$, 取 $\mathrm{Id}_B-j\circ\pi\colon B\to B$, 则类似有 $0=\pi\circ(\mathrm{Id}_B-j\circ\pi)$. $\mathrm{Im}(\mathrm{Id}_B-j\circ\pi)\subset\mathrm{Ker}\pi=\mathrm{Im}i$.

于是取 $q\colon B\to A,\ b\mapsto i^{-1}(b-j(\pi(b)))$, 可以验证 (**习题**)$q$ 为同态, $q\circ i=\mathrm{Id}_A,\ q\circ j=0,\ \mathrm{Id}_B=j\circ\pi+i\circ q$.

此时有

$$\begin{tikzcd} B \arrow[r, bend right, "\begin{pmatrix} q\\ \pi\end{pmatrix}"'] & A\oplus C \arrow[l, bend right, "(i,j)"'] \end{tikzcd}$$

这里 $x\mapsto\begin{pmatrix} q(x)\\ \pi(x)\end{pmatrix}\in A\oplus C$, $(i,j)\colon A\oplus C\to B$, $\begin{pmatrix} a\\ c\end{pmatrix}\mapsto i(a)+j(c)$. 于是 $(i,j)\circ\begin{pmatrix} q\\ \pi\end{pmatrix}=\mathrm{Id}_B$, $\begin{pmatrix} \pi\\ q\end{pmatrix}(i,j)=\begin{pmatrix} \mathrm{Id}_A & 0_{C,A}\\ 0_{A,C} & \mathrm{Id}_C\end{pmatrix}=\mathrm{Id}_{A\oplus C}$. □

评论. $\forall\, c,\ \pi(x) = c,$

$$\begin{aligned} q(j(c)) &= q(x - i \circ q(x)) \\ &= q(x) - q \circ i \circ q(x) \\ &= q(x) - q(x) = 0. \end{aligned}$$

可见 $q \circ j = 0$.

以及 $\forall\, x \in B$,

$$\begin{aligned} & i \circ q(x) + j \circ \pi(x) \\ =& i \circ q(x) + (x - i \circ q(x)) \\ =& x. \end{aligned}$$

可见 $\mathrm{Id}_B = i \circ q + j \circ \pi$.

评论. 设 R-模 $N \subset M$, 则

$$0 \to N \overset{\text{inc}}{\hookrightarrow} M \overset{\text{can}}{\twoheadrightarrow} M/N \to 0$$

分裂 $\Leftrightarrow$ N 是 M 的直和项.

现假设有 R-模同态 $f\colon M \to N$ 与 R-模 L, 可以定义 f^*:

$$\begin{aligned} f^*\colon \mathrm{Hom}_R(N, L) &\to \mathrm{Hom}_R(M, L), \\ g &\mapsto g \circ f. \end{aligned}$$

则 f^* 保加法: $(g_1 + g_2) \circ f = g_1 \circ f + g_2 \circ f$. 以及 $\forall\, r \in R,\ (rg) \circ f = r(g \circ f)$.

命题 1.17. 一个 R-模序列

$$M' \overset{i}{\to} M \overset{\pi}{\twoheadrightarrow} M'' \to 0$$

正合 $\Leftrightarrow$ $\forall\, R$-模 N,

$$0 \to \mathrm{Hom}_R(M'', N) \overset{\pi^*}{\hookrightarrow} \mathrm{Hom}_R(M, N) \overset{i^*}{\to} \mathrm{Hom}_R(M', N)$$

正合.

证明. $\Rightarrow$: 设 $M' \overset{i}{\to} M \overset{\pi}{\twoheadrightarrow} M'' \to 0$ 正合, $\forall\, R$-模 N, 我们宣称 π^* 单.

$$\mathrm{Ker}\pi^* = \{g\colon M'' \to N \mid \pi^*(g) = 0_{M,N}\} = \{g\colon M'' \to N \mid g \circ \pi = 0_{M,N}\}.$$

由 π 满, $g = 0_{M'',N}$. 然后 $\forall\, g\colon M'' \to N$,

$$\begin{aligned} i^* \circ \pi^*(g) &= i^*(g \circ \pi) \\ &= (g \circ \pi) \circ i \\ &= g \circ (\pi \circ i) = 0. \end{aligned}$$

然后我们再证明 $\mathrm{Ker}i^* \subset \mathrm{Im}\pi^*$. $\mathrm{Ker}i^* = \{g\colon M \to N \mid i^*(g) = g \circ i = 0\}$. 取

$$\begin{aligned} g'\colon M'' &\to N, \\ \forall\, m'' &\mapsto g(\pi^{-1}(m'')). \end{aligned}$$

那么对 $\forall\, x, y \in \pi^{-1}(m'')$, 我们宣称 $g(x) = g(y)$. 因为 $\pi(x-y) = 0$, $x-y \in \mathrm{Im}i \Rightarrow g|_{\mathrm{Im}i} = 0$, $g' \circ p = g$, 故 $g \in \mathrm{Im}\pi^*$.

注意 $\Leftarrow$ 不是平凡的. 首先我们考查是否 π 满. 有 $M'' \overset{\mathrm{can}}{\twoheadrightarrow} \mathrm{Coker}\pi = N_1$, 那么对 $N = N_1$,

$$\pi^*\colon \mathrm{Hom}_R(M'', N_1) \hookrightarrow \mathrm{Hom}_R(M, N_1),$$

$$\mathrm{can} \mapsto \mathrm{can} \circ \pi.$$

而 $\mathrm{can} \circ \pi = 0 \Rightarrow \mathrm{can} = 0 \Rightarrow N_1 = 0$. 从而 π 满.

然后我们考查是否 $\pi \circ i = 0$. 对 $N = M''$,

$$0 \to \mathrm{Hom}_R(M'', M'') \xrightarrow{\pi^*} \mathrm{Hom}_R(M, M'') \xrightarrow{i^*} \mathrm{Hom}_R(M', M''),$$

$$\mathrm{Id}_{M''} \mapsto \pi \mapsto \pi \circ i,$$

$$i^* \circ \pi^* = 0.$$

所以 $\pi \circ i = 0$, $\mathrm{Im}i \subset \mathrm{Ker}\pi$.

那么是否有 $\mathrm{Im}i \supset \mathrm{Ker}\pi$? 有 $M \overset{\mathrm{can}}{\to} \mathrm{Coker}i = M/\mathrm{Im}i$. 取 $N = \mathrm{Coker}i$, 那么

$$0 \to \mathrm{Hom}_R(M'', \mathrm{Coker}i) \xrightarrow{\pi^*} \mathrm{Hom}_R(M, \mathrm{Coker}i) \xrightarrow{i^*} \mathrm{Hom}_R(M', \mathrm{Coker}i).$$

那么 $i^*(\mathrm{can}) = \mathrm{can} \circ i = 0$. 故 $\exists\, g\colon M'' \to \mathrm{Coker}i$ s.t. $\pi^*(g) = \mathrm{can}$, 于是 $\mathrm{Ker}\pi \subset \mathrm{Kercan} = \mathrm{Im}i$. $\square$

评论. i 单 $\not\Rightarrow$ i^* 满.