

Lec6 Note of Algebra

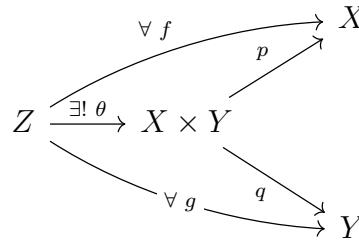
Xuxuayame

日期：2024 年 9 月 25 日

定义 1.19. \mathcal{C} 中**零对象** 0 意指既始又终的对象.

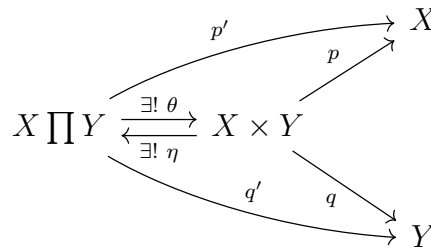
例 1.21. $\{1_G\} \in \text{Grp}$, $0 \in R - \text{mod}$.

定义 1.20. \mathcal{C} 中对象 X, Y 的**积 (Product)** 意指 $(X \amalg Y, p, q)$, $X \amalg Y$ 也记为 $X \times Y$, $p: X \times Y \rightarrow X$, $q: X \times Y \rightarrow Y$. 它须满足如下泛性质:

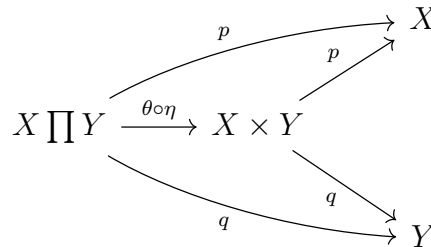


对任意 Z 有图表交换.

那么我们有积在同构意义下至多唯一. 例如若还有一个积 $(X \amalg' Y, p', q')$. 那么实际上有



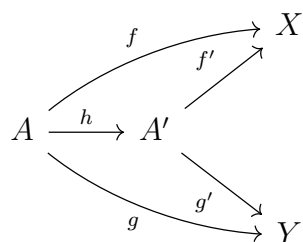
图表交换, 于是有



于是 $\theta \circ \eta = 1_{X \times Y}$.

这里还有一种证明. 考虑新范畴 $\mathcal{C}'_{X,Y}$, 对象为三元组 $(A; f, g)$, $A \in \text{Obj}(\mathcal{C})$, $f: A \rightarrow$

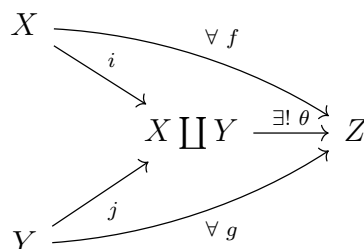
$X, g: A \rightarrow Y$. 态射为 $(A; f, g) \xrightarrow{h} (A'; f', g')$ 也即交换图表:



或者更确切的可以理解为 $h: A \rightarrow A'$ 满足 $f' \circ h = f$ 且 $g' \circ h = g$. 那么显然积即此范畴中的终对象因此同构意义下至多唯一.

例 1.22. Set 中的笛卡尔积, Grp 与 Ring 中的直积, $R\text{-Mod}$ 中的直和.

定义 1.21. X, Y 的余积 (Coproduct) 记作 $(X \coprod Y, i, j)$ 须满足泛性质, 也即



图表交换.

例 1.23. Set 中余积即不交并.

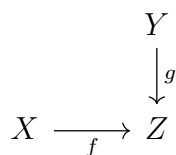
(习题): 设 $G = \{1, a\}$, $H = \{1, b\}$ 均为二阶群, 则 $G \coprod H = \langle a, b \mid a^2 = 1 = b^2 \rangle$.

ComRing 中余积是张量积.

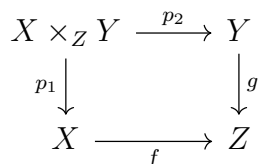
Ring 中余积是直和.

评论. 对任意指标集 Λ 也可定义相应积与上积.

定义 1.22. 图表



的拉回 (Pullback) 或称纤维积 (Fibered Product) 意指交换图表



且满足泛性质:

$$\begin{array}{ccccc}
 \forall W & & & & \\
 \searrow \exists! \theta & & \forall b & \searrow & \\
 & X \times_Z Y & \xrightarrow{p_2} & Y & \\
 \searrow \forall a & \downarrow p_1 & & \downarrow g & \\
 & X & \xrightarrow{f} & Z &
 \end{array}$$

评论. 若 Z 为上述范畴的终对象, 则 $X \times_Z Y = X \times Y$.

定义 1.23. 图表

$$\begin{array}{ccc}
 Z & \xrightarrow{f} & X \\
 g \downarrow & & \\
 Y & &
 \end{array}$$

的推出 (**Pushout**) 或纤维余积 (**Fibered Coproduct**) 意指 $(X \coprod_Z Y, i_1, i_2)$ 满足如下泛性质:

$$\begin{array}{ccccc}
 Z & \xrightarrow{f} & X & & \\
 g \downarrow & & \downarrow i_1 & \searrow \forall b & \\
 Y & \xrightarrow{i_2} & X \coprod_Z Y & \xrightarrow{\exists! \theta} & \forall W \\
 & \searrow \forall a & & &
 \end{array}$$

评论. 若 Z 是原范畴的始对象, 则 $X \coprod_Z Y = X \coprod Y$.

例 1.24. 在 $R\text{-Mod}$ 中, 拉回 $X \times_Z Y = \{(x, y) \in X \oplus Y \mid f(x) = g(y)\}$, 推出 $X \coprod_Z Y = (X \oplus Y) / \{(f(z), -g(z)) \mid z \in Z\}$

(习题): 验证之.

例 1.25. 在 Set 中, 拉回同上. 推出 $X \coprod_Z Z = (X \coprod Y) / \sim$, 这里 $f(z) \sim g(z), \forall z \in Z$.

1.2.2 函子 Functor

定义 1.24. 设 \mathcal{A}, \mathcal{B} 为范畴, 定义从 \mathcal{A} 到 \mathcal{B} 的 (共变) 函子为 $\mathcal{F}: \mathcal{A} \rightarrow \mathcal{B}$ 即

- $\forall A \in \text{Obj}(\mathcal{A})$, 指定 $\mathcal{F}(A) \in \text{Obj}(\mathcal{B})$.
- $\forall f: A \rightarrow B$ 在 \mathcal{A} 中, 指定 $\mathcal{F}(f): \mathcal{F}(A) \rightarrow \mathcal{F}(B)$ 在 \mathcal{B} 中.

并满足

- (1) 结合律: $\mathcal{F}(g \circ f) = \mathcal{F}(g) \circ \mathcal{F}(f)$.
- (2) 单位元: $\mathcal{F}(1_A) = 1_{\mathcal{F}(A)}, \forall A \in \text{Obj}(\mathcal{A})$

例 1.26. 忘却函子 $R\text{-Mod} \xrightarrow{U} \mathbf{Ab}$:

$$\begin{array}{ccc} R^M & \longmapsto & M \\ f \downarrow & & \downarrow f \\ R^N & \longmapsto & N \end{array}$$

这里 $U(f) = f$.

例 1.27. 对 R^M 有函子 $\text{Hom}_R(M, -): R\text{-Mod} \rightarrow R\text{-Mod}$ 如下

$$\begin{array}{ccc} X & \longmapsto & \text{Hom}_R(M, X) \\ f \downarrow & & \downarrow f_* \\ Y & \longmapsto & \text{Hom}_R(M, Y) \end{array}$$

这里 $f_* = \text{Hom}_R(M, f)$, $f_*: g \mapsto f \circ g$.

定义 1.25. 设 \mathcal{A}, \mathcal{B} 为范畴, 定义 $\mathcal{F}: \mathcal{A} \rightarrow \mathcal{B}$ 为**反变函子**即 $\mathcal{F}: \mathcal{A} \rightarrow \mathcal{B}^{\text{op}}$ 为函子, 即:

$$\begin{aligned} A \in \text{Obj}(\mathcal{A}) &\rightsquigarrow \mathcal{F}(A) \in \text{Obj}(\mathcal{B}), \\ A \xrightarrow{f} B &\rightsquigarrow \mathcal{F}(f): \mathcal{F}(B) \rightarrow \mathcal{F}(A), \\ A \xrightarrow{f} B \xrightarrow{g} C &\rightsquigarrow \mathcal{F} \xrightarrow{\mathcal{F}(g)} \mathcal{F}(B) \xrightarrow{\mathcal{F}(f)} \mathcal{F}(A). \end{aligned}$$

例 1.28. 对 R -模 M . $\text{Hom}_R(-, M): R\text{-Mod} \rightarrow R\text{-Mod}$ 如下

$$\begin{array}{ccc} X & \longmapsto & \text{Hom}_R(X, M) \\ f \downarrow & & \uparrow f^* \\ Y & \longmapsto & \text{Hom}_R(Y, M) \end{array}$$

为反变函子. $f^*: h \mapsto h \circ f$.

1.2.3 加法范畴

定义 1.26. 称 \mathcal{C} 为**加法范畴**, 若

- (1) $\forall A, B$, $\text{Hom}_{\mathcal{C}}(A, B)$ 为 Abel 群, 零元记作 $0_{A,B}$. 且 $\text{Hom}_{\mathcal{C}}(B, C) \times \text{Hom}_{\mathcal{C}}(A, B) \xrightarrow{\circ} \text{Hom}_{\mathcal{C}}(A, C)$, $(g, f) \mapsto g \circ f$ 是双线性的, 即 $g \circ (f + f') = g \circ f + g \circ f'$, $(g + g') \circ f = g \circ f + g' \circ f$.
- (2) 存在零对象 0 . 因此对任意 A, B 存在 A 到 0 与 0 到 B 的态射复合, 恰为 $0_{A,B}$.
- (3) 存在有限积与余积. 即指标集有限时双积存在.

命题 1.19. 加法范畴 \mathcal{C} 中, $A \coprod B \simeq A \amalg B$, 记作 $A \oplus B$.

现在假设 \mathcal{C} 是加性的.

定义 1.27. $f: X \rightarrow Y$ 的**核**指 $K \xrightarrow{i} X$ (或 (K, i)) 满足:

- (1) $f \circ i = 0_{K,Y}$.

(2) 泛性质: $\forall T \xrightarrow{t} X$ s.t. $f \circ t = 0$, 则 $\exists! T \xrightarrow{\tilde{t}} K$ s.t. $i \circ \tilde{t} = t$.

评论. i 是单态射.

例 1.29. 在 $R\text{-Mod}$ 中, 对 $X \xrightarrow{f} Y$, $\text{Ker} f \xrightarrow{\text{inc}} X$ 是真正意义上的核.