NPDE-FDM
陈曦，HOME
Summer, 2024

微分方程数值解——有限差分法

偏微分方程组

参考书目：

- Numerical Partial Differential Equations: Finite Difference Methods （J. W. Thomas，1995）
- Time Dependent Problems and Difference Methods（B. Gustafsson，1995）
- Finite Difference Methods for Ordinary and Partial Differential Equations（Randall J.LeVeque，2007）
- 偏微分方程的有限差分方法（张强，2017）

本文主要讨论偏微分方程组的适定性理论，不涉及对数值方法的分析，仅仅考虑问题本身的性质，内容对应 TDPDM 的第四章。

粗略地来说，所谓适定性是指问题的解同时满足：

- 存在性；
- 唯一性；
- 稳定性：解连续依赖于输入数据。

对于偏微分方程组的初值问题

$$\begin{cases} u_t = F(u,x,t), \quad x\in\Omega, t>0, \\ u(x,0) = f(x), \quad x\in\Omega, \end{cases} \tag{0.1}$$

其中 $u=u(x,t)$ 是未知函数，Ω 是定义域，F 是给定的函数，f 是给定的初值函数。我们希望该问题的解 $u(x,t)$ 的能量（某范数）可以被初值控制，即

$$\|u(\cdot,t)\| \leqslant K\|u(\cdot,0)\| = K\|f\|, \quad t>0,$$

此时如果对初值进行扰动，令 $f_\varepsilon = f+\varepsilon g$，则对应的解 u_ε 满足

$$\|u_\varepsilon(\cdot,t) - u(\cdot,t)\| \leqslant K\|g\|,$$

因此数值误差可以被初值误差控制，此时该问题的解连续依赖于初值，所以满足稳定性条件（与差分格式的稳定性是不同概念）。不过一般而言，解无法仅通过常数因子用初值控制，例如考虑带有零阶导数项的方程 $u_t=u$，此时解的范数可能会随时间增长，因此我们需要引入指数增长因子，即

$$\|u(\cdot,t)\| \leqslant Ke^{\beta t}\|f\|, \quad t>0. \tag{0.2}$$

1 线性偏微分方程的适定性

本节考虑线性偏微分方程方程组

$$u_t = P(x,t,\frac{\partial}{\partial x})u \tag{1.1}$$

的适定性问题，其中 P 是线性微分算子

$$P(x,t,\frac{\partial}{\partial x}) = \sum_{|\alpha|\leqslant p} A_\alpha(x,t)\left(\frac{\partial}{\partial x^{(1)}}\right)^{\alpha_1}\cdots\left(\frac{\partial}{\partial x^{(n)}}\right)^{\alpha_n}, \tag{1.2}$$

其中 $\alpha=(\alpha_1,\cdots,\alpha_n)$ 是多重指标，$|\alpha|=\alpha_1+\cdots+\alpha_n$，$A_\alpha(x,t)$ 是给定的 $m\times m$ 阶矩阵值函数。要求 $A_\alpha\in C^\infty$，并且考虑在各个空间变量上都具有 2π 周期边界条件的初值问题，现在给出这一问题的适定性的定义。

Definition. *考虑偏微分方程(1.1)的在 2π 周期边界条件下的初值问题。如果对于任意给定的初值 $f \in C^\infty$，如下两个条件成立：*

1. *存在唯一解 $u \in C^\infty(x,t)$，该解是以 2π 为周期的周期函数；*
2. *存在常数 β, K，使得对于任意 $t > 0$，有*

$$\|u(\cdot,t)\| \leqslant Ke^{\beta t}\|f\|, \tag{1.3}$$

则称该问题是适定的。如果问题不适定，则称其为病态的。

根据 Parseval 定理，$\|u(x,t)\|_2 = \|\hat{u}(\omega,t)\|_2$，因此可以使用 Fourier 变换来研究问题的适定性，将简谐波解

$$u(x,t) = \hat{u}(\omega,t)e^{i\omega x} \tag{1.4}$$

代入给定的方程(1.1)可以得到 $\hat{u}(\omega,t)$ 与 $\hat{u}(\omega,0) = \hat{f}$ 之间的关系，借助这两者之间增长的关系可以判断问题的适定性。

Example. *考虑具有周期性边界的二维扩散方程 $u_t = \kappa\Delta u$ 的初值问题，令 $u(x,t) = \hat{u}(\omega,t)e^{i\omega\cdot x}$，$\omega, x$ 都是二维向量，代入方程可以得到*

$$\hat{u}_t(\omega,t) = -\kappa|\omega|^2\hat{u}(\omega,t),$$

这是一个常微分方程，初值为 $\hat{u}(\omega,0) = \hat{f}(\omega)$，于是

$$\hat{u}(\omega,t) = \hat{f}(\omega)e^{-\kappa|\omega|^2 t}. \tag{1.5}$$

因此

$$\|u(\cdot,t)\|_2 = \|\hat{u}(\omega,t)\|_2 = \|\hat{f}(\omega)\|_2 e^{-\kappa|\omega|^2 t} = \|f\|_2 e^{-\kappa|\omega|^2 t},$$

为了使得(1.3)成立，需要 $\beta = -\kappa|\omega|^2$ 关于 $\omega \in \mathbb{R}$ 有上界，因此为了保证适定性需要要求 $\kappa > 0$。

在上面的例子中，尽管当问题具有 2π 周期性边界时可以只考虑 $\omega \in [-\pi,\pi]$ 的简谐波，然而对于数值计算而言，舍入误差的存在使得计算时几乎总是会出现高频分量，因此有必要考虑所有的 $\omega \in \mathbb{R}$，要求任意可能的 ω 下的 β 都有上界。