

微分方程数值解——有限差分法

偏微分方程组

参考书目:

- Numerical Partial Differential Equations: Finite Difference Methods (J. W. Thomas, 1995)
- Time Dependent Problems and Difference Methods (B. Gustafsson, 1995)
- Finite Difference Methods for Ordinary and Partial Differential Equations (Randall J. LeVeque, 2007)
- 偏微分方程的有限差分方法 (张强, 2017)

本文主要讨论偏微分方程组的适定性理论, 不涉及对数值方法的分析, 仅仅考虑问题本身的性质, 内容对应 TDPDM 的第四章。

粗略地来说, 所谓适定性是指问题的解同时满足:

- 存在性;
- 唯一性;
- 稳定性: 解连续依赖于输入数据。

对于偏微分方程组的初值问题

$$\begin{cases} u_t = F(u, x, t), & x \in \Omega, t > 0, \\ u(x, 0) = f(x), & x \in \Omega, \end{cases} \quad (0.1)$$

其中 $u = u(x, t)$ 是未知函数, Ω 是定义域, F 是给定的函数, f 是给定的初值函数。我们希望该问题的解 $u(x, t)$ 的能量 (某范数) 可以被初值控制, 即

$$\|u(\cdot, t)\| \leq K \|u(\cdot, 0)\| = K \|f\|, \quad t > 0,$$

此时如果对初值进行扰动, 令 $f_\varepsilon = f + \varepsilon g$, 则对应的解 u_ε 满足

$$\|u_\varepsilon(\cdot, t) - u(\cdot, t)\| \leq K \|g\|,$$

因此数值误差可以被初值误差控制, 此时该问题的解连续依赖于初值, 所以满足稳定性条件 (与差分格式的稳定性是不同概念)。不过一般而言, 解无法仅通过常数因子用初值控制, 例如考虑带有零阶导数项的方程 $u_t = u$, 此时解的范数可能会随时间增长, 因此我们需要引入指数增长因子, 即

$$\|u(\cdot, t)\| \leq K e^{\beta t} \|f\|, \quad t > 0. \quad (0.2)$$

1 线性偏微分方程的适定性

本节考虑线性偏微分方程方程组

$$u_t = P(x, t, \frac{\partial}{\partial x})u \quad (1.1)$$

的适定性问题, 其中 P 是线性微分算子

$$P(x, t, \frac{\partial}{\partial x}) = \sum_{|\alpha| \leq p} A_\alpha(x, t) \left(\frac{\partial}{\partial x^{(1)}} \right)^{\alpha_1} \cdots \left(\frac{\partial}{\partial x^{(n)}} \right)^{\alpha_n}, \quad (1.2)$$

其中 $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_n)$ 是多重指标, $|\alpha| = \alpha_1 + \dots + \alpha_n$, $A_\alpha(x, t)$ 是给定的 $m \times m$ 阶矩阵值函数。要求 $A_\alpha \in C^\infty$, 并且考虑在各个空间变量上都具有 2π 周期边界条件的初值问题, 现在给出这一问题的适定性的定义。

Definition. 考虑偏微分方程(1.1)的在 2π 周期边界条件下的初值问题。如果对于任意给定的初值 $f \in C^\infty$, 如下两个条件成立:

1. 存在唯一解 $u \in C^\infty(x, t)$, 该解是以 2π 为周期的周期函数;
2. 存在常数 β, K , 使得对于任意 $t > 0$, 有

$$\|u(\cdot, t)\| \leq K e^{\beta t} \|f\|, \quad (1.3)$$

则称该问题是适定的。如果问题不适定, 则称其为病态的。

根据 Parseval 定理, $\|u(x, t)\|_2 = \|\hat{u}(\omega, t)\|_2$, 因此可以使用 Fourier 变换来研究问题的适定性, 将单波解

$$u(x, t) = \hat{u}(\omega, t) e^{i\omega x} \quad (1.4)$$

(这一单波解对应单波初始条件 $f(x) = e^{i\omega x} \hat{f}(\omega)$, 其中 $\hat{f}(\omega) = 1/(2\pi) \int_{-\pi}^{\pi} f(x) e^{-i\omega x} dx$) 代入给定的方程(1.1)可以得到 $\hat{u}(\omega, t)$ 与 $\hat{u}(\omega, 0) = \hat{f}$ 之间的关系, 借助这两者之间增长的关系可以判断问题的适定性。

Example. 考虑具有周期性边界的二维扩散方程 $u_t = \kappa \Delta u$ 的初值问题, 令 $u(x, t) = \hat{u}(\omega, t) e^{i\omega \cdot x}$, ω, x 都是二维向量, 代入方程可以得到

$$\hat{u}_t(\omega, t) = -\kappa |\omega|^2 \hat{u}(\omega, t),$$

这是一个常微分方程, 初值为 $\hat{u}(\omega, 0) = \hat{f}(\omega)$, 于是

$$\hat{u}(\omega, t) = \hat{f}(\omega) e^{-\kappa |\omega|^2 t}. \quad (1.5)$$

因此

$$\|u(\cdot, t)\|_2 = \|\hat{u}(\omega, t)\|_2 = \|\hat{f}(\omega)\|_2 e^{-\kappa |\omega|^2 t} = \|f\|_2 e^{-\kappa |\omega|^2 t},$$

为了使得(1.3)成立, 需要 $\beta = -\kappa |\omega|^2$ 关于 $\omega \in \mathbb{R}$ 有上界, 因此为了保证适定性需要要求 $\kappa > 0$ 。

在上面的例子中, 尽管当问题具有 2π 周期性边界时可以只考虑 $\omega \in [-\pi, \pi]$ 的简谐波, 然而对于数值计算而言, 舍入误差的存在使得计算时几乎总是会出现高频分量, 因此有必要考虑所有的 $\omega \in \mathbb{R}$, 要求任意可能的 ω 下的 β 都有上界。

$\omega = -\infty \rightarrow +\infty$
bounded \rightarrow discrete
continuous \rightarrow unbounded

1.1 一维线性常系数标量方程

考虑如下一维线性常系数标量方程

$$u_t = a u_{xx} + b u_x + c u \quad (1.6)$$

的 $(-\pi, \pi)$ 周期性边界条件下的初值问题, 初值条件为 $u(x, 0) = f(x)$ 。根据上一节的定义我们有如下适定性判定定理。

Theorem 1. 周期初值问题(1.6)是适定的, 当且仅当存在 $\alpha \in \mathbb{R}$ 使得

$$\operatorname{Re} \kappa(\omega) \leq \alpha, \quad \forall \omega \in \mathbb{R}, \quad (1.7)$$

其中 $\kappa(\omega) = -a\omega^2 + ib\omega + c$ 。

Proof. 考虑单波解 $u(x, t) = \exp(i\omega x) \hat{u}(\omega, t)$, 带入方程(1.6)可以得到

$$\hat{u}_t(\omega, t) = (-a\omega^2 + ib\omega + c) \hat{u}(\omega, t) = \kappa \hat{u}(\omega, t),$$

相应的初值条件变为 $\hat{u}(\omega, 0) = \hat{f}(\omega)$, 该 ODE 问题的解为

$$\hat{u}(\omega, t) = \hat{f}(\omega) e^{\kappa t},$$

根据 Parseval 定理, $\|u(x, t)\|_2 = \|\hat{u}(\omega, t)\|_2$, 因此

$$\|u(x, t)\|_2 = e^{\operatorname{Re} \kappa t} \|\hat{f}(\omega)\|_2 = e^{\operatorname{Re} \kappa t} \|u(x, 0)\|_2,$$

根据适定性的定义, 需要 $\operatorname{Re} \kappa(\omega)$ 关于 $\omega \in \mathbb{R}$ 有上界, 即 $\operatorname{Re} \kappa(\omega) \leq \alpha$ 。

□

根据如上定理, 方程(1.6)的适定性依赖于 $\kappa(\omega)$, 因为 $a, b, c \in \mathbb{C}$ 而 $\omega \in \mathbb{R}$, 所以

$$\operatorname{Re} \kappa(\omega) = -a_r \omega^2 - b_i \omega + c,$$

于是我们有如下结论:

1. 当 $a_r > 0$ 时, $\kappa(\omega)$ 关于 ω 有上界, 即

$$\kappa = -a_r \omega^2 - b_i \omega + c \leq \frac{b_i^2}{4a_r} + c, \quad \forall \omega \in \mathbb{R}.$$

2. 当 $a_r = 0$ 时, $\kappa(\omega)$ 关于 ω 有上界当且仅当 $b_i = 0$, 此时问题适定。

3. 当 $a_r < 0$ 时, $\kappa(\omega)$ 关于 ω 有不存在上界, 因此问题总是病态的。

因此总的来说, 方程(1.6)的适定性主要取决于最高阶项的系数 a 的实部符号, 这一事实对于更高阶的方程也是成立的。

1.2 一维线性常系数方程组

考虑一维线性常系数方程组

$$u_t = Au_x, \quad (1.8)$$

其中 A 是 m 阶方程, $u = (u_1, \dots, u_m)$ 是 m 维向量值函数, 相应的初值问题为 $u(x, 0) = f(x)$ 。关于这一问题有如下适定性判定定理。

Theorem 2. 周期性初边值问题(1.8)是适定的, 当且仅当存在一阶系数矩阵 A 的各特征值都为实数, 且具有 m 个线性无关的特征向量。

Proof. 首先说明必要性。设 ϕ 是 A 的关于特征值 λ 的一个特征向量, 即 $A\phi = \lambda\phi$, 则直接验证可知方程(1.8)在初值 $u(x, 0) = e^{i\omega x}\phi$ 下的一个解为

$$u(x, t) = e^{i\omega(x+\lambda t)}\phi = e^{i\lambda\omega t}u(x, 0), \quad (1.9)$$

因此

$$\|u(x, t)\|_2 = e^{-(\operatorname{Im} \lambda)\omega t} \|u(x, 0)\|_2,$$

为了保证适定性, 需要 $\operatorname{Im} \lambda \cdot \omega$ 关于 $\omega \in \mathbb{R}$ 有上界, 所以 $\operatorname{Im} \lambda = 0$, 因此 λ 只能是实数。为了说明 A 必须有 m 个线性无关的特征向量, 考虑 A 的 Jordan 标准型, 即

$$S^{-1}AS = \begin{pmatrix} \lambda_1 I + J_1 & & \\ & \lambda_2 I + J_2 & \\ & & \ddots \\ & & & \lambda_k I + J_k \end{pmatrix} = J,$$

其中 λ_i 是 A 的不同特征值, J_i 是对应的 Jordan 块。令 $v = S^{-1}u$, 则原方程

$$v_t = S^{-1}u_t = S^{-1}Au_x = S^{-1}ASS^{-1}u_x = Jv_x,$$

考虑单波解 $v(x, t) = e^{i\omega x}\hat{v}(\omega, 0)$, 则

$$\hat{v}_t(\omega, t) = i\omega J\hat{v}(\omega, t), \quad \hat{v}(\omega, 0) = S^{-1}\hat{u}(\omega, 0),$$

所以 $\hat{v}(\omega, t) = \exp(i\omega Jt)\hat{v}(\omega, 0)$, 其中

$$\exp(i\omega Jt) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(i\omega t)^n}{n!} J^n,$$

因为 J 是分块对角阵, 因此 J^n 也是分块对角阵, 只需考虑单独的一个 Jordan 块, 于是问题转化为

$$\hat{w} = \exp(i\omega(\lambda_j I + J_j)t)\hat{w}(0),$$

所以

$$\|w\|_2 \leq \|\exp(i\omega(\lambda_j I + J_j)t)\|_2 \|w(0)\|_2,$$

为此我们考虑 $\exp(i\omega(\lambda_j I + J_j)t)$ 的实部矩阵的大小, 注意到 $\lambda_j I$ 与 J_j 可交换, 因此

$$\exp(i\omega(\lambda_j I + J_j)t) = \exp(i\omega\lambda_j t) \exp(i\omega J_j t),$$

因为 λ_j 为实数, 因此只需考虑 $\exp(i\omega J_j t)$, 注意到 $J_j^{m_j} = 0$, 其中 m_j 是该 Jordan 块的大小, 展开可得

$$\exp(i\omega J_j t) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(i\omega t)^n}{n!} J_j^n = \sum_{n=0}^{m_j-1} \frac{(i\omega t)^n}{n!} J_j^n$$

当 $m_j \neq 1$ 时, 上式关于 $\omega \in \mathbb{R}$ 无法被控制, 因此为了保证适定性, 需要 $m_j = 1$, 即 A 的只有一阶 Jordan 块, 可逆 S 是 A 的特征向量矩阵, 所以 A 必须有 m 个线性无关的特征向量。

现在说明充分性。当 A 有 m 个线性无关的特征向量时, 可以将 A 进行相似对角化 $A = SDS^{-1}$, 和之前一样令 $v = S^{-1}u$ 可以将原方程解耦成 m 个标量方程:

$$(v_i)_t = \lambda_i(v_i)_x, \quad i = 1, \dots, m,$$

其中 $\lambda_i \in \mathbb{R}$ 是 A 的特征值, v_i 是 v 的第 i 个分量函数。根据上一小节对标量方程的适定性判定, 每个标量方程都是适定的, 因此转换后的 $v_t = Dv_x$ 是适定的, 且

$$\|v(x, t)\|_2 = \|v(x, 0)\|_2,$$

现在我们需要将 v 转换回 u , 使用范数的相容性可得

$$\|u(x, t)\|_2 = \|Sv(x, t)\|_2 \leq \|S\|_2 \|v(x, 0)\|_2 = \|S\|_2 \|S^{-1}u(x, 0)\|_2 \leq \|S\|_2 \|S^{-1}\|_2 \|u(x, 0)\|_2,$$

所以原问题是适定的。 \square

下面我们考虑双曲方程, 首先给出一些定义:

Definition. 考虑形如 $u_t = Au_x$ 的方程, 则

1. 如果 A 的特征值都是实数, 则称该方程是(弱)双曲的 (*weakly hyperbolic*);
2. 如果 $A = A^*$ 是 *Hermite* 矩阵, 则称该方程是对称双曲的 (*symmetric hyperbolic*);
3. 如果 A 的特征值都是实数且具有 m 个线性无关的特征向量, 则称该方程是强双曲的 (*strongly hyperbolic*);
4. 如果 A 具有 m 个互不相同的实特征值, 则称该方程是严格双曲的 (*strictly hyperbolic*)。

显然对于对称双曲、强双曲和严格双曲方程, 系数矩阵 A 都可以进行相似对角化。

在讨论双曲方程的适定性之前, 我们先给出一个引理:

Lemma 1. 如果 $y \in C^1$ 满足

$$\frac{dy}{dt} \leq \alpha y, \quad \forall t \geq 0, \quad (1.10)$$

则

$$y(t) \leq y(0)e^{\alpha t}, \quad \forall t \geq 0. \quad (1.11)$$

证明只需考虑 $v = e^{-\alpha t}y$, 它满足 $\frac{dv}{dt} \leq 0$, 因此 $v(t) \leq v(0)$, 于是 $y(t) \leq y(0)e^{\alpha t}$ 。

现在我们考虑更一般的带有零阶项的强双曲方程

$$u_t = Au_x + Bu,$$

关于这一方程的适定性有如下定理:

Theorem 3. 考虑形如 $u_t = Au_x + Bu$ 的强双曲方程, 其中 A, B 是 m 阶矩阵, A 是强双曲的 m 阶方阵, B 是任意常数矩阵, 则该方程的初值问题是适定的。

Proof. 因为 A 是强双曲的, 因此取 S 为 A 的线性无关的特征向量组成的矩阵, $S^{-1}AS = D$ 是对角矩阵, D 的对角元是 A 的特征值, 于是 $v = S^{-1}u$ 满足

$$v_t = Dv_x + S^{-1}BSv,$$

记 $S^{-1}BS = C$, 相应的初值条件为 $v(x, 0) = S^{-1}u(x, 0)$ 。考虑单波解 $v(x, t) = e^{i\omega x}\hat{v}(\omega, t)$, 则

$$\hat{v}_t(\omega, t) = i\omega D\hat{v}(\omega, t) + C\hat{v}(\omega, t),$$

于是

$$\hat{v}(\omega, t) = \exp((i\omega D + C)t)\hat{v}(\omega, 0).$$

注意到

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t}(\hat{v}, \hat{v}) &= (\hat{v}_t, \hat{v}) + (\hat{v}, \hat{v}_t) = (i\omega D\hat{v} + C\hat{v}, \hat{v}) + (\hat{v}, i\omega D\hat{v} + C\hat{v}) \\ &= (i\omega D\hat{v}, \hat{v}) + (\hat{v}, i\omega D\hat{v}) + (C\hat{v}, \hat{v}) + (\hat{v}, C\hat{v}) \end{aligned}$$

因为 $(\hat{v}, i\omega D\hat{v}) = -i\omega(D^*\hat{v}, \hat{v}) = -(i\omega D\hat{v}, \hat{v})$, 所以上式即

$$\frac{\partial}{\partial t}(\hat{v}, \hat{v}) = (C\hat{v}, \hat{v}) + (\hat{v}, C\hat{v}) \leq 2\|C\|_2(\hat{v}, \hat{v}),$$

进而使用上一个引理两侧关于 t 积分可得

$$\|\hat{v}(\omega, t)\|_2^2 = (\hat{v}(\omega, t), \hat{v}(\omega, t)) \leq (\hat{v}(\omega, 0), \hat{v}(\omega, 0))e^{2\|C\|_2 t} = \|\hat{v}(\omega, 0)\|_2^2 e^{2\|C\|_2 t},$$

因此

$$\|\hat{v}(\omega, t)\|_2^2 = \|\exp((i\omega D + C)t)\hat{v}(\omega, 0)\|_2^2 \leq \|\hat{v}(\omega, 0)\|_2^2 e^{2\|C\|_2 t},$$

这说明

$$\|\exp((i\omega D + C)t)\|_2 \leq e^{\|C\|_2 t}.$$

因为方程的通解形如

$$v(x, t) = \sum_{\omega=-\infty}^{\infty} \hat{v}(\omega, t)e^{i\omega x},$$

带入 \hat{v} 可得

$$v(x, t) = \sum_{\omega=-\infty}^{\infty} e^{i\omega x + (i\omega D + C)t}\hat{v}(\omega, 0),$$

使用 Parseval 定理并使用 $\|\exp((i\omega D + C)t)\|_2 \leq e^{\|C\|_2 t}$ 可得

$$\|v(x, t)\|_2 \leq e^{\|C\|_2 t}\|v(x, 0)\|_2.$$

最后使用 $u = Sv$ 可得

$$\|u(x, t)\|_2 \leq \|S\|_2\|S^{-1}\|_2 e^{\|C\|_2 t}\|u(x, 0)\|_2,$$

因此原问题是适定的。 □

1.3 一维常系数抛物方程组

考虑二阶常系数方程组

$$u_t = Au_{xx} + Bu_x + Cu \quad (1.12)$$

的周期性初值问题, 初值条件为 $u(x, 0) = f(x)$ 。

Definition. 如果形如(1.12)的方程组中的 A 的所有特征值的实部都有正的下界, 即

$$\operatorname{Re} \lambda \geq \delta, \quad (1.13)$$

其中 λ 是 A 的特征值, δ 是一个正常数, 则称该方程组是抛物的。

为了简单起见, 如果 $A = A^*$ 是 Hermite 的, 而且 $(Av, v) \geq 0$ 对任意 v 都成立, 则称 $A \geq 0$ 。如果 A, B 都是 Hermite 矩阵且 $A - B \geq 0$, 则记为 $A \geq B$ 。如果(1.12)是抛物的, 则对 A 使用 Schur 分解¹可以将它酉上三角化, 即

$$A = U^*TU,$$

¹对矩阵阶数进行归纳可证明

其中 U 是酉矩阵, T 是上三角矩阵, T 的对角元是 A 的特征值, 即

$$T = \begin{pmatrix} \lambda_1 & t_{12} & \cdots & t_{1m} \\ & \lambda_2 & \cdots & t_{2m} \\ & & \ddots & \vdots \\ & & & \lambda_m \end{pmatrix}.$$

为了控制非对角元的大小, 令 $D = \text{diag}\{1, d, \dots, d^{m-1}\}$ 是对角矩阵, 考虑

$$\hat{A} = D^{-1} U^* T U D = \begin{bmatrix} \lambda_1 & dt_{12} & \cdots & d^{m-1}t_{1m} \\ & \lambda_2 & \cdots & d^{m-2}t_{2m} \\ & & \ddots & \vdots \\ & & & \lambda_m \end{bmatrix} = \Lambda + G, \quad (1.14)$$

其中 Λ 是对角矩阵, G 是严格上三角矩阵, 当 d 足够小时, \hat{G} 的各个元素都足够接近零, 于是

$$G + G^* + \delta I \geq 0, \quad (1.15)$$

而因为方程是抛物的, 所以

$$\Lambda + \Lambda^* = 2\text{Re } \Lambda \geq 2\delta I, \quad (1.16)$$

因此

$$\hat{A} + \hat{A}^* = \Lambda + \Lambda^* + G + G^* \geq 2\delta I + G + G^* \geq \delta I. \quad (1.17)$$

使用这一事实可以得到如下适定性定理:

Theorem 4. 一维常系数抛物方程组(1.12)的周期性初值问题是适定的。

Proof. 做变量代换, 令 $u = U D v$ 其中 U, D 是之前分析中的矩阵, 满足 $\hat{A} = D^{-1} U^* T U D$, 于是方程相应地变为

$$v_t = \hat{A} v_{xx} + \hat{B} v_x + \hat{C} v, \quad v(x, 0) = D^{-1} U^* f(x),$$

考虑单波解 $v(x, t) = e^{i\omega x} \hat{u}(\omega, t)$, 带入方程可以得到

$$\hat{v}_t = (-\omega^2 \hat{A} + i\omega \hat{B} + \hat{C}) \hat{u}, \quad \hat{v}(\omega, 0) = D^{-1} U^* \hat{f}(\omega),$$

记 $\hat{P}(i\omega) = -\omega^2 \hat{A} + i\omega \hat{B} + \hat{C}$, 则

$$\hat{v}(\omega, t) = e^{\hat{P}(i\omega)t} \hat{f}(\omega).$$

根据之前的分析有

$$\hat{A} + \hat{A}^* \geq \delta I,$$

于是

$$\begin{aligned} \hat{P}(i\omega) + \hat{P}^*(i\omega) &= -\omega^2 (\hat{A} + \hat{A}^*) + i\omega (\hat{B} + \hat{B}^*) + (\hat{C} + \hat{C}^*) \leq (-\delta\omega^2 + 2\|B\|_2\omega + 2\|\hat{C}\|_2)I \\ &\leq \left(\frac{\|\hat{B}\|_2^2}{\delta} + 2\|\hat{C}\|_2 \right) I, \end{aligned} \quad (1.18)$$

其中用到了 $\hat{B} + \hat{B}^* \leq 2\|\hat{B}\|_2 I$ 和 $\hat{C} + \hat{C}^* \leq 2\|\hat{C}\|_2 I$ 。记上式右侧的上界为 $2\alpha I$, 于是

$$\hat{P}(i\omega) + \hat{P}^*(i\omega) \leq 2\alpha I.$$

现在与之前一样考虑

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} (\hat{v}, \hat{v}) &= (\hat{v}_t, \hat{v}) + (\hat{v}, \hat{v}_t) = (\hat{P}(i\omega) \hat{v}, \hat{v}) + (\hat{v}, \hat{P}(i\omega) \hat{v}) \\ &= ((\hat{P}(i\omega) + \hat{P}^*(i\omega)) \hat{v}, \hat{v}) \\ &\leq 2\alpha (\hat{v}, \hat{v}), \end{aligned}$$

再次使用引理可知

$$\|\hat{v}(\omega, t)\|_2^2 \leq e^{2\alpha t} \|\hat{v}(\omega, 0)\|_2^2,$$

于是

$$\|\hat{v}(\omega, t)\|_2 = \|e^{\hat{P}(i\omega)t} \hat{v}(\omega, 0)\|_2 \leq e^{\alpha t} \|\hat{v}(\omega, 0)\|_2,$$

进而

$$\|e^{\hat{P}(i\omega)t}\|_2 \leq e^{\alpha t}.$$

当考虑一般的初值 f 而非单波初值时, 可以将 f 展开为 Fourier 级数

$$f(x) = \sum_{\omega=-\infty}^{\infty} \hat{f}(\omega) e^{i\omega x},$$

于是方程的一个形式解为

$$v(x, t) = \sum_{\omega=-\infty}^{\infty} e^{i\omega x + \hat{P}(i\omega)t} \hat{f}(\omega),$$

根据 Parseval 定理可得

$$\|v(x, t)\|_2^2 = \sum_{\omega=-\infty}^{\infty} \|e^{i\omega x + \hat{P}(i\omega)t} \hat{f}(\omega)\|_2^2 \leq \sum_{\omega=-\infty}^{\infty} e^{2\alpha t} \|\hat{f}(\omega)\|_2^2 = e^{2\alpha t} \|f\|_2^2,$$

于是该形式解是连续依赖于初值, 现在我们需要将 v 转换回 u , 使用范数的相容性可得

$$\|u(x, t)\|_2 \leq \|U\|_2 \|D\|_2 e^{\alpha t} \|U^*\|_2 \|D^{-1}\|_2 \|u(x, 0)\|_2 = \|D\|_2 \|D^{-1}\|_2 e^{\alpha t} \|f\|_2,$$

因此 $u = D^{-1}U^*v$ 是连续依赖于初值. 最后我们证明 v 是唯一解, 如果 w 是满足相同初值条件 $v(x, 0) = w(x, 0)$ 的另一个解, 将 $v - w$ 进行 Fourier 展开可得

$$v(x, t) - w(x, t) = \sum_{\omega=-\infty}^{\infty} e^{i\omega x} (\hat{v}(\omega, t) - \hat{w}(\omega, t)),$$

于是

$$\frac{\partial}{\partial t}(e^{i\omega x}, v - w) = (e^{i\omega x}, v_t - w_t) = (e^{i\omega x}, \hat{A}(v_{xx} - w_{xx}) + \hat{B}(v_x - w_x) + \hat{C}(v - w)),$$

使用分部积分可知

$$(e^{i\omega x}, v_x - w_x) = i\omega(e^{i\omega x}, v - w),$$

再次微分可知

$$(e^{i\omega x}, v_{xx} - w_{xx}) = -\omega^2(e^{i\omega x}, v - w),$$

注意到 $(e^{i\omega x}, v - w) = 2\pi(\hat{v} - \hat{w})$, 所以

$$\frac{\partial}{\partial t}(\hat{v} - \hat{w}) = \hat{P}(i\omega)(\hat{v} - \hat{w}), \quad \hat{v}(\omega, 0) - \hat{w}(\omega, 0) = 0,$$

因为上述方程只有零解, 所以 $v = w$, 因此解是唯一的. 综上所述, 该问题是适定的. \square

1.4 一般常系数方程组

考虑一般的常系数方程组的初值问题

$$u_t = P\left(\frac{\partial}{\partial x}\right)u, \quad u(x, 0) = f(x), \quad (1.19)$$

其中 P 是一个常系数多项式, $\omega = (\omega_1, \dots, \omega_d)$ 是实波数向量, $x = (x_1, \dots, x_d) \in \mathbb{R}^d$ 是空间变量, 这种情况下单波初值为

$$f(x) = e^{i\omega \cdot x} \hat{f}(\omega),$$

相应地单波解为

$$u(x, t) = e^{i\omega \cdot x} \hat{u}(\omega, t), \quad (1.20)$$

与之前一样将该单波解带入方程可以得到

$$\hat{u}_t(\omega, t) = P(i\omega)\hat{u}(\omega, t), \quad \hat{u}(\omega, 0) = \hat{f}(\omega), \quad (1.21)$$

其中的 $P(i\omega)$ 是 m 阶矩阵, 其中的元素是 $i\omega_j$ 的多项式. 对于这一问题我们有如下结论

Theorem 5. 一般常系数方程组(1.19)的周期性初值问题是适定的当且仅当存在常数 K, α 使得

$$\|e^{\hat{P}(i\omega)t}\|_2 \leq Ke^{\alpha t}, \quad \forall \omega \in \mathbb{R}^d. \quad (1.22)$$

证明可以视作之前各特例的推广。在实际应用中我们更常使用如下的必要性条件：

Theorem 6. The Petrovskii condition 方程组(1.19)的周期性初值问题适定的一个必要条件是 $\hat{P}(i\omega)$ 的任意特征值 λ 的实部都关于 $\omega \in \mathbb{R}^d$ 有上界，即

$$\operatorname{Re} \lambda \leq \alpha, \quad \forall \omega \in \mathbb{R}^d. \quad (1.23)$$

在如上定理的基础上我们有下面的充分性定理：

Theorem 7. 如果 Petrovskii 条件满足，且存在常数 K 和线性变换 $S(\omega)$ 满足

$$\|S(\omega)\|_2 \|S^{-1}(\omega)\|_2 \leq K, \quad \forall \omega \in \mathbb{R}^d \quad (1.24)$$

使得 $S^{-1}(\omega)\hat{P}(i\omega)S(\omega)$ 是对角矩阵，则方程组(1.19)的周期性初值问题是适定的。

作为一个推论有

Corollary. 如果存在常数 α 使得

$$\hat{P}(i\omega) + \hat{P}^*(i\omega) \leq 2\alpha I, \quad \forall \omega \in \mathbb{R}^d, \quad (1.25)$$

则方程组(1.19)的周期性初值问题是适定的。