NPDE-FDM
陈曦，HOME
Summer, 2024

微分方程数值解——有限差分法

偏微分方程组

参考书目：

- Numerical Partial Differential Equations: Finite Difference Methods （J. W. Thomas，1995）
- Time Dependent Problems and Difference Methods（B. Gustafsson，1995）
- Finite Difference Methods for Ordinary and Partial Differential Equations（Randall J.LeVeque，2007）
- 偏微分方程的有限差分方法（张强，2017）

本文主要讨论偏微分方程组的适定性理论，不涉及对数值方法的分析，仅仅考虑问题本身的性质，内容对应 TDPDM 的第四章。

粗略地来说，所谓适定性是指问题的解同时满足：

- 存在性；
- 唯一性；
- 稳定性：解连续依赖于输入数据。

对于偏微分方程组的初值问题

$$\begin{cases} u_t = F(u,x,t), \quad x \in \Omega, t > 0, \\ u(x,0) = f(x), \quad x \in \Omega, \end{cases} \tag{0.1}$$

其中 $u = u(x,t)$ 是未知函数，Ω 是定义域，F 是给定的函数，f 是给定的初值函数。我们希望该问题的解 $u(x,t)$ 的能量（某范数）可以被初值控制，即

$$\|u(\cdot,t)\| \leqslant K\|u(\cdot,0)\| = K\|f\|, \quad t > 0,$$

此时如果对初值进行扰动，令 $f_\varepsilon = f + \varepsilon g$，则对应的解 u_ε 满足

$$\|u_\varepsilon(\cdot,t) - u(\cdot,t)\| \leqslant K\|g\|,$$

因此数值误差可以被初值误差控制，此时该问题的解连续依赖于初值，所以满足稳定性条件（与差分格式的稳定性是不同概念）。不过一般而言，解无法仅通过常数因子用初值控制，例如考虑带有零阶导数项的方程 $u_t = u$，此时解的范数可能会随时间增长，因此我们需要引入指数增长因子，即

$$\|u(\cdot,t)\| \leqslant Ke^{\beta t}\|f\|, \quad t > 0. \tag{0.2}$$

1 线性偏微分方程的适定性

本节考虑线性偏微分方程方程组

$$u_t = P(x,t,\frac{\partial}{\partial x})u \tag{1.1}$$

的适定性问题，其中 P 是线性微分算子

$$P(x,t,\frac{\partial}{\partial x}) = \sum_{|\alpha|\leqslant p} A_\alpha(x,t)\left(\frac{\partial}{\partial x^{(1)}}\right)^{\alpha_1}\cdots\left(\frac{\partial}{\partial x^{(n)}}\right)^{\alpha_n}, \tag{1.2}$$

其中 $\alpha = (\alpha_1,\cdots,\alpha_n)$ 是多重指标，$|\alpha| = \alpha_1 + \cdots + \alpha_n$，$A_\alpha(x,t)$ 是给定的 $m \times m$ 阶矩阵值函数。要求 $A_\alpha \in C^\infty$，并且考虑在各个空间变量上都具有 2π 周期边界条件的初值问题，现在给出这一问题的适定性的定义。

Definition. *考虑偏微分方程(1.1)的在 2π 周期边界条件下的初值问题。如果对于任意给定的初值 $f \in C^\infty$，如下两个条件成立：*

1. *存在唯一解 $u \in C^\infty(x,t)$，该解是以 2π 为周期的周期函数；*
2. *存在常数 β, K，使得对于任意 $t > 0$，有*

$$\|u(\cdot,t)\| \leqslant Ke^{\beta t}\|f\|, \tag{1.3}$$

则称该问题是适定的。如果问题不适定，则称其为病态的。

根据 Parseval 定理，$\|u(x,t)\|_2 = \|\hat{u}(\omega,t)\|_2$，因此可以使用 Fourier 变换来研究问题的适定性，将单波解

$$u(x,t) = \hat{u}(\omega,t)e^{i\omega x} \tag{1.4}$$

（这一单波解对应单波初始条件 $f(x) = e^{i\omega x}\hat{f}(\omega)$，其中 $\hat{f}(\omega) = 1/(2\pi)\int_{-\pi}^{\pi} f(x)e^{-i\omega x}dx$）代入给定的方程(1.1)可以得到 $\hat{u}(\omega,t)$ 与 $\hat{u}(\omega,0) = \hat{f}$ 之间的关系，借助这两者之间增长的关系可以判断问题的适定性。

Example. *考虑具有周期性边界的二维扩散方程 $u_t = \kappa\Delta u$ 的初值问题，令 $u(x,t) = \hat{u}(\omega,t)e^{i\omega\cdot x}$，$\omega, x$ 都是二维向量，代入方程可以得到*

$$\hat{u}_t(\omega,t) = -\kappa|\omega|^2\hat{u}(\omega,t),$$

这是一个常微分方程，初值为 $\hat{u}(\omega,0) = \hat{f}(\omega)$，于是

$$\hat{u}(\omega,t) = \hat{f}(\omega)e^{-\kappa|\omega|^2 t}. \tag{1.5}$$

因此

$$\|u(\cdot,t)\|_2 = \|\hat{u}(\omega,t)\|_2 = \|\hat{f}(\omega)\|_2 e^{-\kappa|\omega|^2 t} = \|f\|_2 e^{-\kappa|\omega|^2 t},$$

为了使得(1.3)成立，需要 $\beta = -\kappa|\omega|^2$ 关于 $\omega \in \mathbb{R}$ 有上界，因此为了保证适定性需要要求 $\kappa > 0$。

在上面的例子中，尽管当问题具有 2π 周期性边界时可以只考虑 $\omega \in [-\pi,\pi]$ 的简谐波，然而对于数值计算而言，舍入误差的存在使得计算时几乎总是会出现高频分量，因此有必要考虑所有的 $\omega \in \mathbb{R}$，要求任意可能的 ω 下的 β 都有上界。

1.1 一维线性常系数标量方程

考虑如下一维线性常系数标量方程

$$u_t = au_{xx} + bu_x + cu \tag{1.6}$$

的 $(-\pi,\pi)$ 周期性边界条件下的初值问题，初值条件为 $u(x,0) = f(x)$。根据上一节的定义我们有如下适定性判定定理。

Theorem 1. *周期初边值问题(1.6)是适定的，当且仅当存在 $\alpha \in \mathbb{R}$ 使得*

$$\mathrm{Re}\ \kappa(\omega) \leqslant \alpha, \quad \forall\omega \in \mathbb{R}, \tag{1.7}$$

其中 $\kappa(\omega) = -a\omega^2 + ib\omega + c$。

Proof. 考虑单波解 $u(x,t) = \exp(i\omega x)\hat{u}(\omega,t)$，带入方程(1.6)可以得到

$$\hat{u}_t(\omega,t) = (-a\omega^2 + ib\omega + c)\hat{u}(\omega,t) = \kappa\hat{u}(\omega,t),$$

相应的初值条件变为 $\hat{u}(\omega,0) = \hat{f}(\omega)$，该 ODE 问题的解为

$$\hat{u}(\omega,t) = \hat{f}(\omega)e^{\kappa t},$$

根据 Parseval 定理，$\|u(x,t)\|_2 = \|\hat{u}(\omega,t)\|_2$，因此

$$\|u(x,t)\|_2 = e^{\mathrm{Re}\ \kappa t}\|\hat{f}(\omega)\|_2 = e^{\mathrm{Re}\ \kappa t}\|u(x,0)\|_2,$$

根据适定性的定义，需要 $\mathrm{Re}\ \kappa(\omega)$ 关于 $\omega \in \mathbb{R}$ 有上界，即 $\mathrm{Re}\ \kappa(\omega) \leqslant \alpha$。 □

根据如上定理，方程(1.6)的适定性依赖于 $\kappa(\omega)$，因为 $a,b,c\in\mathbb{C}$ 而 $\omega\in\mathbb{R}$，所以

$$\mathrm{Re}\ \kappa(\omega)=-a_r\omega^2-b_i\omega+c,$$

于是我们有如下结论：

1. 当 $a_r>0$ 时，$\kappa(\omega)$ 关于 ω 有上界，即
$$\kappa=-a_r\omega^2-b_i\omega+c\leqslant\frac{b_i}{4a_r}+c,\quad\forall\omega\in\mathbb{R}.$$
2. 当 $a_r=0$ 时，$\kappa(\omega)$ 关于 ω 有上界当且仅当 $b_i=0$，此时问题适定。
3. 当 $a_r<0$ 时，$\kappa(\omega)$ 关于 ω 有不存在上界，因此问题总是病态的。

因此总的来说，方程(1.6)的适定性主要取决于最高阶项的系数 a 的实部符号，这一事实对于更高阶的方程也是成立的。

1.2　一维线性常系数方程组

考虑一维线性常系数方程组

$$u_t=Au_x,\tag{1.8}$$

其中 A 是 m 阶方程，$u=(u_1,\cdots,u_m)$ 是 m 维向量值函数，相应的初值问题为 $u(x,0)=f(x)$。关于这一问题有如下适定性判定定理。

Theorem 2. *周期性初边值问题(1.8)是适定的，当且仅当存在一阶系数矩阵 A 的各特征值都为实数，且具有 m 个线性无关的特征向量。*

Proof. 首先说明必要性。设 ϕ 是 A 的关于特征值 λ 的一个特征向量，即 $A\phi=\lambda\phi$，则直接验证可知方程(1.8)在初值 $u(x,0)=e^{i\omega x}\phi$ 下的一个解为

$$u(x,t)=e^{i\omega(x+\lambda t)}\phi=e^{i\lambda\omega t}u(x,0),\tag{1.9}$$

因此

$$\|u(x,t)\|_2=e^{-(\mathrm{Im}\ \lambda)\omega t}\|u(x,0)\|_2,$$

为了保证适定性，需要 $\mathrm{Im}\ \lambda\cdot\omega$ 关于 $\omega\in\mathbb{R}$ 有上界，所以 $\mathrm{Im}\ \lambda=0$，因此 λ 只能是实数。为了说明 A 必须有 m 个线性无关的特征向量，考虑 A 的 Jordan 标准型，即

$$S^{-1}AS=\begin{pmatrix}\lambda_1I+J_1 & & & \\ & \lambda_2I+J_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & \lambda_kI+J_k\end{pmatrix}=J,$$

其中 λ_i 是 A 的不同特征值，J_i 是对应的 Jordan 块。令 $v=S^{-1}u$，则原方程

$$v_t=S^{-1}u_t=S^{-1}Au_x=S^{-1}ASS^{-1}u_x=Jv_x,$$

考虑单波解 $v(x,t)=e^{i\omega x}\hat{v}(\omega,0)$，则

$$\hat{v}_t(\omega,t)=i\omega J\hat{v}(\omega,t),\quad\hat{v}(\omega,0)=S^{-1}\hat{u}(\omega,0),$$

所以 $\hat{v}(\omega,t)=\exp(i\omega Jt)\hat{v}(\omega,0)$，其中

$$\exp(i\omega Jt)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(i\omega t)^n}{n!}J^n,$$

因为 J 是分块对角阵，因此 J^n 也是分块对角阵，只需考虑单独的一个 Jordan 块，于是问题转化为

$$\hat{w}=\exp(i\omega(\lambda_jI+J_j)t)\hat{w}(0),$$

所以

$$\|w\|_2\leqslant\|\exp(i\omega(\lambda_jI+J_j)t)\|_2\|w(0)\|_2,$$

为此我们考虑 $\exp(i\omega(\lambda_j I + J_j)t)$ 的实部矩阵的大小，注意到 $\lambda_j I$ 与 J_i 可交换，因此

$$\exp(i\omega(\lambda_j I + J_j)t) = \exp(i\omega\lambda_j t)\exp(i\omega J_j t),$$

因为 λ_j 为实数，因此只需考虑 $\exp(i\omega J_j t)$，注意到 $J_j^{m_j} = 0$，其中 m_j 是该 Jordan 块的大小，展开可得

$$\exp(i\omega J_j t) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(i\omega t)^n}{n!} J_j^n = \sum_{n=0}^{m_j-1} \frac{(i\omega t)^n}{n!} J_j^n$$

当 $m_j \neq 1$ 时，上式关于 $\omega \in \mathbb{R}$ 无法被控制，因此为了保证适定性，需要 $m_j = 1$，即 A 的只有一阶 Jordan 块，可逆 S 是 A 的特征向量矩阵，所以 A 必须有 m 个线性无关的特征向量。

现在说明充分性。当 A 有 m 个线性无关的特征向量时，可以将 A 进行相似对角化 $A = SDS^{-1}$，和之前一样令 $v = S^{-1}u$ 可以将原方程解耦成 m 个标量方程：

$$(v_i)_t = \lambda_i (v_i)_x, \quad i = 1, \cdots, m,$$

其中 $\lambda_i \in \mathbb{R}$ 是 A 的特征值，v_i 是 v 的第 i 个分量函数。根据上一小节对标量方程的适定性判定，每个标量方程都是适定的，因此转换后的 $v_t = Dv_x$ 是适定的，且

$$\|v(x,t)\|_2 = \|v(x,0)\|_2,$$

现在我们需要将 v 转换回 u，使用范数的相容性可得

$$\|u(x,t)\|_2 = \|Sv(x,t)\|_2 \leqslant \|S\|_2\|v(x,0)\|_2 = \|S\|_2\|S^{-1}u(x,0)\|_2 \leqslant \|S\|_2\|S^{-1}\|_2\|u(x,0)\|_2,$$

所以原问题是适定的。 □

下面我们考虑双曲方程，首先给出一些定义：

Definition. *考虑形如 $u_t = Au_x$ 的方程，则*

1. *如果 A 的特征值都是实数，则称该方程是（弱）双曲的（weakly hyperbolic）；*
2. *如果 $A = A^*$ 是 Hermite 矩阵，则称该方程是对称双曲的（symmetric hyperbolic）；*
3. *如果 A 的特征值都是实数且具有 m 个线性无关的特征向量，则称该方程是强双曲的（strongly hyperbolic）；*
4. *如果 A 具有 m 个互不相同的实特征值，则称该方程是严格双曲的（strictly hyperbolic）。*

显然对于对称双曲、强双曲和严格双曲方程，系数矩阵 A 都可以进行相似对角化。

在讨论双曲方程的适定性之前，我们先给出一个引理：

Lemma 1. *如果 $y \in C^1$ 满足*

$$\frac{dy}{dt} \leqslant \alpha y, \quad \forall t \geqslant 0, \tag{1.10}$$

则

$$y(t) \leqslant y(0)e^{\alpha t}, \quad \forall t \geqslant 0. \tag{1.11}$$

证明只需考虑 $v = e^{-\alpha t}y$，它满足 $\frac{dv}{dt} \leqslant 0$，因此 $v(t) \leqslant v(0)$，于是 $y(t) \leqslant y(0)e^{\alpha t}$。

现在我们考虑更一般的带有零阶项的强双曲方程

$$u_t = Au_x + Bu,$$

关于这一方程的适定性有如下定理：

Theorem 3. *考虑形如 $u_t = Au_x + Bu$ 的强双曲方程，其中 A, B 是 m 阶矩阵，A 是强双曲的 m 阶方阵，B 是任意常数矩阵，则该方程的初值问题是适定的。*

Proof. 因为 A 是强双曲的，因此取 S 为 A 的线性无关的特征向量组成的矩阵，$S^{-1}AS = D$ 是对角矩阵，D 的对角元是 A 的特征值，于是 $v = S^{-1}u$ 满足

$$v_t = Dv_x + S^{-1}BSv,$$

记 $S^{-1}BS=C$，相应的初值条件为 $v(x,0)=S^{-1}u(x,0)$。考虑单波解 $v(x,t)=e^{i\omega x}\hat{v}(\omega,t)$，则

$$\hat{v}_t(\omega,t)=i\omega D\hat{v}(\omega,t)+C\hat{v}(\omega,t),$$

于是

$$\hat{v}(\omega,t)=\exp((i\omega D+C)t)\hat{v}(\omega,0).$$

注意到

$$\begin{aligned}\frac{\partial}{\partial t}(\hat{v},\hat{v})&=(\hat{v}_t,\hat{v})+(\hat{v},\hat{v}_t)=(i\omega D\hat{v}+C\hat{v},\hat{v})+(\hat{v},i\omega D\hat{v}+C\hat{v})\\&=(i\omega D\hat{v},\hat{v})+(\hat{v},i\omega D\hat{v})+(C\hat{v},\hat{v})+(\hat{v},C\hat{v})\end{aligned},$$

因为 $(\hat{v},i\omega D\hat{v})=-i\omega(D^*\hat{v},\hat{v})=-(i\omega D\hat{v},\hat{v})$，所以上式即

$$\frac{\partial}{\partial t}(\hat{v},\hat{v})=(C\hat{v},\hat{v})+(\hat{v},C\hat{v})\leqslant 2\|C\|_2(\hat{v},\hat{v}),$$

进而使用上一个引理两侧关于 t 积分可得

$$\|\hat{v}(\omega,t)\|_2^2=(\hat{v}(\omega,t),\hat{v}(\omega,t))\leqslant(\hat{v}(\omega,0),\hat{v}(\omega,0))e^{2\|C\|_2t}=\|\hat{v}(\omega,0)\|_2^2e^{2\|C\|_2t},$$

因此

$$\|\hat{v}(\omega,t)\|_2^2=\|\exp((i\omega D+C)t)\hat{v}(\omega,0)\|_2^2\leqslant\|\hat{v}(\omega,0)\|_2^2e^{2\|C\|_2t},$$

这说明

$$\|\exp((i\omega D+C)t)\|_2\leqslant e^{\|C\|_2t}.$$

因为方程的通解形如

$$v(x,t)=\sum_{\omega=-\infty}^{\infty}\hat{v}(\omega,t)e^{i\omega x},$$

带入 $\hat{v}$ 可得

$$v(x,t)=\sum_{\omega=-\infty}^{\infty}e^{i\omega x+(i\omega D+C)t}\hat{v}(\omega,0),$$

使用 Parseval 定理并使用 $\|\exp((i\omega D+C)t)\|_2\leqslant e^{\|C\|_2t}$ 可得

$$\|v(x,t)\|_2\leqslant e^{\|C\|_2t}\|v(x,0)\|_2.$$

最后使用 $u=Sv$ 可得

$$\|u(x,t)\|_2\leqslant\|S\|_2\|S^{-1}\|_2e^{\|C\|_2t}\|u(x,0)\|_2,$$

因此原问题是适定的。 □

1.3 一维常系数抛物方程组

考虑二阶常系数方程组

$$u_t=Au_{xx}+Bu_x+Cu \tag{1.12}$$

的周期性初值问题，初值条件为 $u(x,0)=f(x)$。

Definition. 如果形如(1.12)的方程组中的 A 的所有特征值的实部都有正的下界，即

$$\mathrm{Re}\ \lambda\geqslant\delta, \tag{1.13}$$

其中 λ 是 A 的特征值，δ 是一个正常数，则称该方程组是抛物的。

为了简单起见，如果 $A=A^*$ 是 Hermite 的，而且 $(Av,v)\geqslant 0$ 对任意 v 都成立，则称 $A\geqslant 0$。如果 A,B 都是 Hermite 矩阵且 $A-B\geqslant 0$，则记为 $A\geqslant B$。如果(1.12)是抛物的，则对 A 使用 Schur 分解[1]可以将它酉上三角化，即

$$A=U^*TU,$$

[1]对矩阵阶数进行归纳可证明

其中 U 是酉矩阵，T 是上三角矩阵，T 的对角元是 A 的特征值，即

$$T = \begin{pmatrix} \lambda_1 & t_{12} & \cdots & t_{1m} \\ & \lambda_2 & \cdots & t_{2m} \\ & & \ddots & \vdots \\ & & & \lambda_m \end{pmatrix}.$$

为了控制非对角元的大小，令 $D = \mathrm{diag}\{1, d, \cdots, d^{m-1}\}$ 是对角矩阵，考虑

$$\hat{A} = D^{-1}U^*TUD = \begin{bmatrix} \lambda_1 & dt_{12} & \cdots & d^{m-1}t_{1m} \\ & \lambda_2 & \cdots & d^{m-2}t_{2m} \\ & & \ddots & \vdots \\ & & & \lambda_m \end{bmatrix} = \Lambda + G, \tag{1.14}$$

其中 Λ 是对角矩阵，G 是严格上三角矩阵，当 d 足够小时，$\hat{G}$ 的各个元素都足够接近零，于是

$$G + G^* + \delta I \geqslant 0, \tag{1.15}$$

而因为方程是抛物的，所以

$$\Lambda + \Lambda^* = 2\mathrm{Re}\ \Lambda \geqslant 2\delta I, \tag{1.16}$$

因此

$$\hat{A} + \hat{A}^* = \Lambda + \Lambda^* + G + G^* \geqslant 2\delta I + G + G^* \geqslant \delta I. \tag{1.17}$$

使用这一事实可以得到如下适定性定理：

Theorem 4. 一维常系数抛物方程组(1.12)的周期性初值问题是适定的。

Proof. 做变量代换，令 $u = UDv$，其中 U, D 是之前分析中的矩阵，满足 $\hat{A} = D^{-1}U^*TUD$，于是方程相应地变为

$$v_t = \hat{A}v_{xx} + \hat{B}v_x + \hat{C}v, \quad v(x,0) = D^{-1}U^*f(x),$$

考虑单波解 $v(x,t) = e^{i\omega x}\hat{u}(\omega,t)$，带入方程可以得到

$$\hat{v}_t = (-\omega^2\hat{A} + i\omega\hat{B} + \hat{C})\hat{u}, \quad \hat{v}(\omega,0) = D^{-1}U^*\hat{f}(\omega),$$

记 $\hat{P}(i\omega) = -\omega^2\hat{A} + i\omega\hat{B} + \hat{C}$，则

$$\hat{v}(\omega,t) = e^{\hat{P}(i\omega)t}\hat{f}(\omega).$$

根据之前的分析有

$$\hat{A} + \hat{A}^* \geqslant \delta I,$$

于是

$$\begin{aligned} \hat{P}(i\omega) + \hat{P}^*(i\omega) = -\omega^2(\hat{A} + \hat{A}^*) + i\omega(\hat{B} + \hat{B}^*) + (\hat{C} + \hat{C}^*) &\leqslant (-\delta\omega^2 + 2\|B\|_2\omega + 2\|\hat{C}\|_2)I \\ &\leqslant \left(\frac{\|\hat{B}\|_2^2}{\delta} + 2\|\hat{C}\|_2\right)I, \end{aligned} \tag{1.18}$$

其中用到了 $\hat{B} + \hat{B}^* \leqslant 2\|\hat{B}\|_2 I$ 和 $\hat{C} + \hat{C}^* \leqslant 2\|\hat{C}\|_2 I$。记上式右侧的上界为 $2\alpha I$，于是

$$\hat{P}(i\omega) + \hat{P}^*(i\omega) \leqslant 2\alpha I.$$

现在与之前一样考虑

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t}(\hat{v},\hat{v}) = (\hat{v}_t,\hat{v}) + (\hat{v},\hat{v}_t) &= (\hat{P}(i\omega)\hat{v},\hat{v}) + (\hat{v},\hat{P}(i\omega)\hat{v}) \\ &= ((\hat{P}(i\omega) + P^*(i\omega))\hat{v},\hat{v}) \\ &\leqslant 2\alpha(\hat{v},\hat{v}), \end{aligned}$$

再次使用引理可知

$$\|\hat{v}(\omega,t)\|_2^2 \leqslant e^{2\alpha t}\|\hat{v}(\omega,0)\|_2^2,$$

于是

$$\|\hat{v}(\omega,t)\|_2 = \|e^{\hat{P}(i\omega)t}\hat{v}(\omega,0)\|_2 \leqslant e^{\alpha t}\|\hat{v}(\omega,0)\|_2,$$

进而
$$\|e^{\hat{P}(i\omega)t}\|_2 \leqslant e^{\alpha t}.$$
当考虑一般的初值 f 而非单波初值时，可以将 f 展开为 Fourier 级数
$$f(x) = \sum_{\omega=-\infty}^{\infty} \hat{f}(\omega)e^{i\omega x},$$
于是方程的一个形式解为
$$v(x,t) = \sum_{\omega=-\infty}^{\infty} e^{i\omega x+\hat{P}(i\omega)t}\hat{f}(\omega),$$
根据 Parseval 定理可得
$$\|v(x,t)\|_2^2 = \sum_{\omega=-\infty}^{\infty} \|e^{i\omega x+\hat{P}(i\omega)t}\hat{f}(\omega)\|_2^2 \leqslant \sum_{\omega=-\infty}^{\infty} e^{2\alpha t}\|\hat{f}(\omega)\|_2^2 = e^{2\alpha t}\|f\|_2^2,$$
于是该形式解是连续依赖于初值，现在我们需要将 v 转换回 u，使用范数的相容性可得
$$\|u(x,t)\|_2 \leqslant \|U\|_2\|D\|_2 e^{\alpha t}\|U^*\|_2\|D^{-1}\|_2\|u(x,0)\|_2 = \|D\|_2\|D^{-1}\|_2 e^{\alpha t}\|f\|_2,$$
因此 $u = D^{-1}U^*v$ 是连续依赖于初值。最后我们证明 v 是唯一解，如果 w 是满足相同初值条件 $v(x,0) = w(x,0)$ 的另一个解，将 $v - w$ 进行 Fourier 展开可得
$$v(x,t) - w(x,t) = \sum_{\omega=-\infty}^{\infty} e^{i\omega x}(\hat{v}(\omega,t) - \hat{w}(\omega,t)),$$
于是
$$\frac{\partial}{\partial t}(e^{i\omega x}, v-w) = (e^{i\omega x}, v_t - w_t) = (e^{i\omega x}, \hat{A}(v_{xx} - w_{xx}) + \hat{B}(v_x - w_x) + \hat{C}(v-w)),$$
使用分部积分可知
$$(e^{i\omega x}, v_x - w_x) = i\omega(e^{i\omega x}, v-w),$$
再次微分可知
$$(e^{i\omega x}, v_{xx} - w_{xx}) = -\omega^2(e^{i\omega x}, v-w),$$
注意到 $(e^{i\omega x}, v-w) = 2\pi(\hat{v} - \hat{w})$，所以
$$\frac{\partial}{\partial t}(\hat{v} - \hat{w}) = \hat{P}(i\omega)(\hat{v} - \hat{w}), \quad \hat{v}(\omega,0) - \hat{w}(\omega,0) = 0,$$
因为上述方程只有零解，所以 $v = w$，因此解是唯一的。综上所述，该问题是适定的。 □

1.4 一般常系数方程组

考虑一般的常系数方程组的初值问题
$$u_t = P\left(\frac{\partial}{\partial t}\right)u, \quad u(x,0) = f(x), \tag{1.19}$$
其中 P 是一个常系数多项式，$\omega = (\omega_1, \cdots, \omega_d)$ 是实波数向量，$x = (x_1, \cdots, x_d) \in \mathbb{R}^d$ 是空间变量，这种情况下单波初值为
$$f(x) = e^{i\omega\cdot x}\hat{f}(\omega),$$
相应地单波解为
$$u(x,t) = e^{i\omega\cdot x}\hat{u}(\omega,t), \tag{1.20}$$
与之前一样将该单波解带入方程可以得到
$$\hat{u}_t(\omega,t) = P(i\omega)\hat{u}(\omega,t), \quad \hat{u}(\omega,0) = \hat{f}(\omega), \tag{1.21}$$
其中的 $P(i\omega)$ 是 m 阶矩阵，其中的元素是 $i\omega_j$ 的多项式。对于这一问题我们有如下结论

Theorem 5. 一般常系数方程组(1.19)的周期性初值问题是适定的当且仅当存在常数 K, α 使得
$$\|e^{\hat{P}(i\omega)t}\|_2 \leqslant Ke^{\alpha t}, \quad \forall\omega \in \mathbb{R}^d. \tag{1.22}$$

证明可以视作之前各特例的推广。在实际应用中我们更常使用如下的必要性条件：

Theorem 6. The Petrovskii condition 方程组(1.19)的周期性初值问题适定的一个必要条件是 $\hat{P}(i\omega)$ 的任意特征值 λ 的实部都关于 $\omega \in \mathbb{R}^d$ 有上界，即

$$\mathrm{Re}\ \lambda \leqslant \alpha, \quad \forall \omega \in \mathbb{R}^d. \tag{1.23}$$

在如上定理的基础上我们有下面的充分性定理：

Theorem 7. 如果 *Petrovskii* 条件满足，且存在常数 K 和线性变换 $S(\omega)$ 满足

$$\|S(\omega)\|_2 \|S^{-1}(\omega)\|_2 \leqslant K, \quad \forall \omega \in \mathbb{R}^d \tag{1.24}$$

使得 $S^{-1}(\omega)\hat{P}(i\omega)S(\omega)$ 是对角矩阵，则方程组(1.19)的周期性初值问题是适定的。

作为一个推论有

Corollary. 如果存在常数 α 使得

$$\hat{P}(i\omega) + \hat{P}^*(i\omega) \leqslant 2\alpha I, \quad \forall \omega \in \mathbb{R}^d, \tag{1.25}$$

则方程组(1.19)的周期性初值问题是适定的。