Г. К. Муравин, О. В. Муравина

МАТЕМАТИКА

6

ДРОФА

ВЕРТИКАЛЬ

Электронное приложение www.drofa.ru

Г. К. Муравин, О. В. Муравина

МАТЕМАТИКА

Учебник для общеобразовательных учреждений

Рекомендовано
Министерством
образования и науки
Российской Федерации

2-е издание, стереотипное

ВЕРТИКАЛЬ

6

Москва
ДРОФА
2014

УДК 373.167.1:51
ББК 22.1я72
М91

Муравин, Г. К.

М91 Математика. 6 кл. : учебник / Г. К. Муравин, О. В. Муравина. — 2-е изд., стереотип. — М. : Дрофа, 2014. — 319, [1] с. : ил.

ISBN 978-5-358-13669-3

Учебник входит в линию учебно-методических комплексов по математике для 1—11 классов. Теоретический материал учебника представлен в виде блоков, в которые включены разнообразные и интересные задачи, дифференцированные по уровню сложности. К большинству задач даны ответы, к трудным задачам — советы и решения.

Учебник соответствует Федеральному государственному образовательному стандарту основного общего образования, одобрен РАН и РАО, имеет гриф «Рекомендовано» и включён в Федеральный перечень учебников в составе завершённой предметной линии.

УДК 373.167.1:51
ББК 22.1я72

ISBN 978-5-358-13669-3

Оглавление

От авторов 4

Глава 1. ПРОПОРЦИОНАЛЬНОСТЬ 5

1. Подобие фигур 5
2. Масштаб 14
3. Отношения и пропорции 22
4. Пропорциональные величины 31
5. Деление в данном отношении 43

Глава 2. ДЕЛИМОСТЬ ЧИСЕЛ 50

6. Делители и кратные 50
7. Свойства делимости произведения, суммы и разности чисел 57
8. Признаки делимости натуральных чисел 67
9. Простые и составные числа 75
10. Взаимно простые числа 84
11. Множества 91

Глава 3. ОТРИЦАТЕЛЬНЫЕ ЧИСЛА 105

12. Центральная симметрия 105
13. Отрицательные числа и их изображение на координатной прямой 113
14. Сравнение чисел 121
15. Сложение и вычитание чисел 132
16. Умножение чисел 143
17. Деление чисел 154

Глава 4. ФОРМУЛЫ И УРАВНЕНИЯ 164

18. Решение уравнений 164
19. Решение задач на проценты 173
20. Длина окружности и площадь круга 180
21. Осевая симметрия 191
22. Координаты 201
23. Геометрические тела 212
24. Диаграммы 219

Глава 5. ПОВТОРЕНИЕ 229

Из истории математики 229
Вычислительный практикум 256
Практикум по решению текстовых задач 265
Геометрический практикум 278
Практикум по развитию пространственного воображения 286

Ответы. Советы. Решения 291

Предметный указатель 318

Дорогие шестиклассники!

Вы продолжаете изучать одну из самых древних наук — ***математику***.

Математика — фундамент технического прогресса. Без неё немыслимы строительство зданий и мостов, использование атомной энергии, космические полёты. Важную роль математики в развитии интеллекта человека отмечал Михаил Ломоносов: «Математику уже затем учить следует, что она ум в порядок приводит».

Знать математику — значит уметь решать задачи. В нашем учебнике много разнообразных и интересных задач. В задачах, номера которых не имеют обозначений, вы не должны испытать затруднений. Значком «$^{\circ}$» отмечены задачи, в которых путь к ответу немного сложнее. Задачи, над которыми следует подумать, имеют обозначение «$^{\bullet}$». Изобретательность понадобится вам при решении *задач на смекалку*.

Часть задач учебника удобнее решать в рабочей тетради. Для этих задач указана ссылка на номер задания тетради с помощью значка . Ссылка с помощью значка указывает на материалы, представленные на электронном приложении к учебнику.

Учебник состоит из глав, главы — из пунктов. В каждом пункте есть и теоретический материал, и задачи. Каждый пункт учебника завершается контрольными вопросами и заданиями. В учебнике есть раздел «Ответы. Советы. Решения». В этом разделе вы найдёте ответы к большинству заданий, а к некоторым из них — советы и даже решения. Поможет вашей работе и справочный материал, размещённый на форзацах учебника.

История математики — это история великих открытий. С некоторыми из них вы познакомитесь в главе 5 «Повторение». Наше время — период расцвета математики, но впереди ещё очень много открытий. Надеемся, что некоторые из них предстоит сделать вам.

Желаем вам успеха!

Глава

1 Пропорциональность

1 Подобие фигур

Многим из вас на каникулах удалось сделать интересные фотоснимки. В фотоателье из них делают фотографии. Обычно сначала заказывают небольшие фотографии, а затем наиболее удачные из них увеличивают. На рисунках 1 и 2 вы видите фотографии, сделанные по одному и тому же фотоснимку цветка. На второй фотографии изображение цветка в 2 раза больше, чем на первой. Можно сказать, что второе изображение является увеличенной в 2 раза копией первого.

Определить на глаз, что второе изображение именно в 2, а не в 1,8 или 2,1 раза больше первого, невозможно. Однако с помощью линейки мы можем измерить, например, ширину первой фотографии, равную 3,4 см, и сравнить её с шириной второй фотографии, равной 6,8 см. Разделив ширину второй фотографии на ширину первой, получим, что вторая фотогра-

Рис. 1

Рис. 2

фия действительно в 2 раза больше. Тот же результат получается, если вместо ширины фотографий взять, например, расстояния между концами самого левого и самого правого лепестков цветка.

1. На рисунке 3 буквы «а» имеют одинаковую форму.
   1) Во сколько раз третья буква больше первой?
   2) Во сколько раз вторая буква меньше третьей?

Рис. 3

2. В типографском деле форма букв определяется шрифтом, а размер букв — кеглем. На рисунке 4 найдите пары букв, которые отличаются только кеглем.

Рис. 4

Фигуры одной и той же формы часто встречаются в геометрии. Например, одна и та же форма у всех равносторонних треугольников, у всех квадратов, у всех кругов (рис. 5).

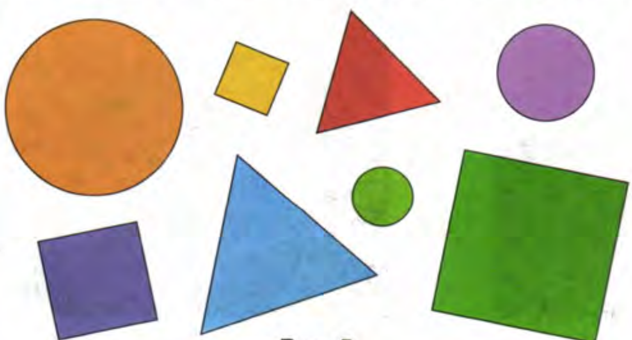


Рис. 5

Геометрические фигуры, имеющие одинаковую форму, называют *подобными*.

3. На рисунке 6 изображены пары подобных фигур.

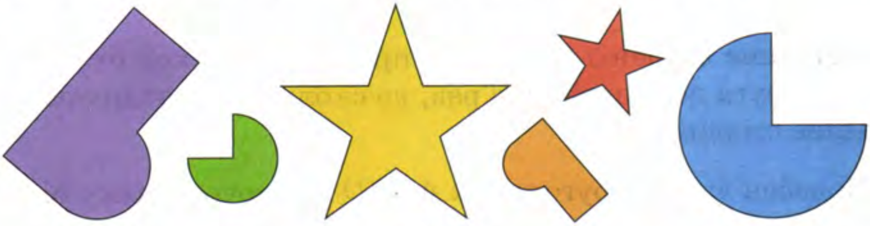


Рис. 6

1) Подберите каждой фигуре её пару.
2) С помощью линейки определите, во сколько раз одна из подобных фигур больше или меньше, чем другая.

Число, показывающее, во сколько раз одна из подобных фигур больше или меньше другой, называют *коэффициентом подобия*.

Равные фигуры, конечно, тоже можно считать подобными. Коэффициент подобия у них равен 1. 1

4●. 1) Попробуйте, не производя измерений, указать на рисунке 7 подобные друг другу прямоугольники (их только два).

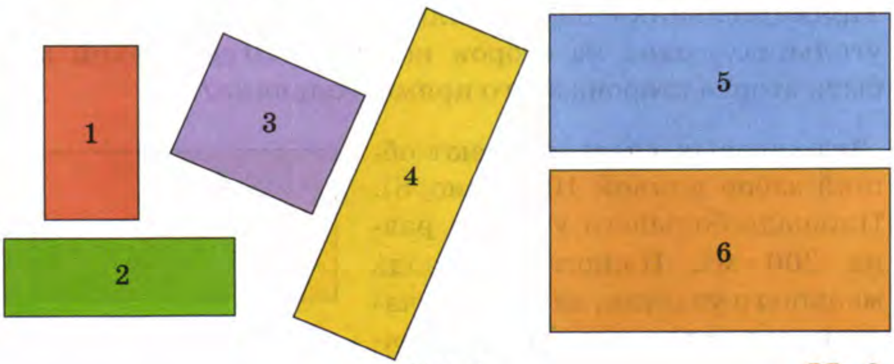


Рис. 7

2

2) Измерьте линейкой длины сторон прямоугольников, определите, какие подобны друг другу и чему равен их коэффициент подобия.

3) Во сколько раз отличаются периметры и во сколько раз — площади этих подобных прямоугольников? 2

Меньшие стороны подобных прямоугольников отличаются друг от друга во столько же раз, во сколько раз отличаются их большие стороны.

5. Подобен ли прямоугольник $ABCD$ прямоугольнику $KLMN$, если:

1) $AB = 32$ см, $BC = 24$ см, $KL = 16$ см, $LM = 12$ см;
2) $AB = 1{,}5$ дм, $BC = 2{,}3$ дм, $KL = 6$ дм, $LM = 9{,}2$ дм;
3) $AB = 5$ мм, $BC = 7$ мм, $KL = 7$ мм, $LM = 10{,}8$ мм;
4) $AB = \frac{6}{13}$ м, $BC = \frac{5}{12}$ м, $KL = \frac{3}{13}$ м, $LM = \frac{5}{6}$ м?

6. Найдите периметры и площади подобных прямоугольников $ABCD$ и $KLMN$, если известно, что:

1) $AB = 3$ см, $BC = 2$ см, $KL = 9$ см, $LM = 6$ см;
2) $KL = 13$ см, $LM = 10$ см, $AB : KL = 0{,}2$;
3) $AB = 6{,}5$ см, $BC = 5{,}2$ см, $AB : KL = 1{,}3$;
4) $AB = 9$ см, $BC = 6$ см, $AB : KL = \frac{3}{2}$.

7●. Прямоугольник с измерениями 5 см и 8 см подобен прямоугольнику, одна из сторон которого 10 см. Какой может быть вторая сторона этого прямоугольника?

8○. Два садовых участка имеют общий забор длиной 10 м (рис. 8). Площадь большего участка равна 200 м^2. Найдите площадь меньшего участка, зная, что участки являются подобными прямоугольниками.

Рис. 8

9●. Прямоугольник со сторонами:

1) 6 см и 9 см; 2) 4 см и 8 см; 3) 3,2 дм и 1,6 дм;

4) $1\frac{3}{4}$ м и 7 м разрезали на два прямоугольника, один из которых оказался подобен исходному прямоугольнику.

Найдите: 4

а) коэффициент подобия;

б) периметры подобных прямоугольников;

в) площади подобных прямоугольников.

10. Можно ли квадрат разрезать на два подобных, но не равных между собой прямоугольника?

Если увеличивать треугольник с сохранением его формы (рис. 9), величины углов треугольника не изменятся. Можно сказать, что форма треугольника определяется тем, какие у него углы.

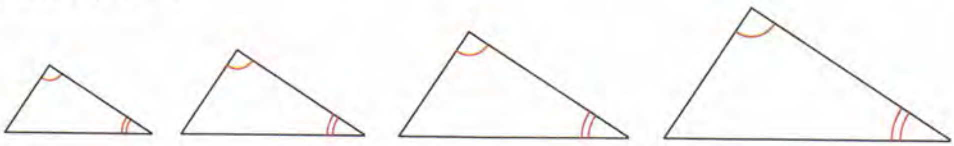


Рис. 9

Если углы одного треугольника соответственно равны углам другого треугольника, то такие треугольники подобны.

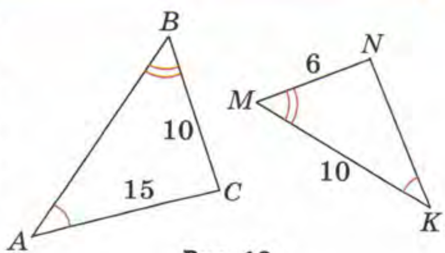


Рис. 10

На рисунке 10 у двух подобных треугольников указаны длины некоторых сторон в сантиметрах. Коэффициент подобия этих треугольников равен частному длин сторон, лежащих напротив равных углов: $k = \frac{BC}{MN} = \frac{10}{6} = \frac{5}{3}$. Треугольник ABC подобен треугольнику KMN с коэффициентом подобия $\frac{5}{3}$. Используем найденный коэффициент подобия для вычисления длин сторон KN и AB.

В треугольнике KMN сторона KN расположена напротив угла M, который отмечен двойной дужкой. В треугольнике ABC напротив такого же по величине угла B лежит сторона AC, равная 15. Имеем $AC : KN = k$. Выражаем KN как неизвестный делитель:

$$KN = AC : k = 15 : \frac{5}{3} = \frac{15 \cdot 3}{5} = 9 \text{ (см)}.$$

Сторона AB в треугольнике ABC лежит напротив такого же угла, как и сторона KM в треугольнике KMN, поэтому $AB : KM = k$. Выражаем AB как неизвестное делимое:

$$AB = k \cdot KM = \frac{5}{3} \cdot 10 = \frac{50}{3} = 16\frac{2}{3} \text{ (см)}.$$

Стороны подобных треугольников, лежащие напротив соответственно равных углов, называют сходственными.

11. На рисунке 11 изображены треугольники, среди которых две пары подобных. Найдите подобные треугольники. Назовите равные углы и сходственные стороны подобных треугольников. 5

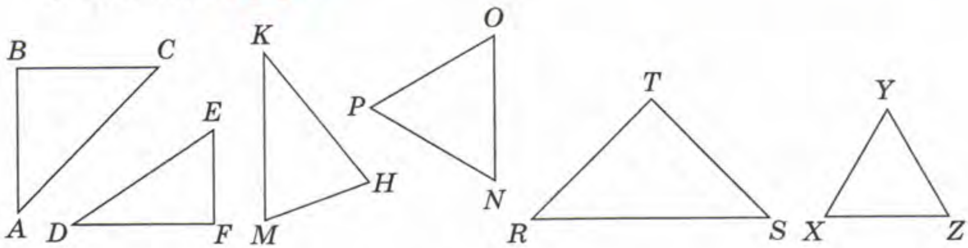


Рис. 11

12. Стороны треугольника MNK равны 5 см, 10 см и 12 см. Найдите стороны подобного треугольника с вершинами в точках D, E и F, зная, что большая его сторона равна 6 см. Выпишите пары равных углов этих треугольников.

Называя подобные треугольники, вершины соответственно равных углов перечисляют обычно в одном и том же порядке. Это позволяет легко определить сходственные стороны треугольников.

13. В треугольнике ABC $AB = 2$ см, $BC = 4$ см, $AC = 5$ см.

1) Найдите стороны подобного ему треугольника:

а) DEF, зная, что большая его сторона равна 10 см;

б) KLM, зная, что меньшая его сторона равна 10 см.

2) Найдите коэффициент подобия треугольников:

а) ABC и DEF; б) ABC и KLM; в) KLM и DEF.

3) Выпишите равные углы этих треугольников.

14•. 1) Найдите на рисунке 12 пары равных углов.

2) Что можно сказать о треугольниках ABC и MBN?

3) Найдите коэффициент подобия треугольников ABC и MBN.

4) Найдите длины сторон треугольников ABC и MBN.

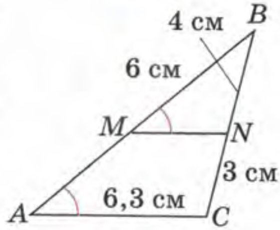


Рис. 12

15•. На рисунке 13 обозначены равные углы BNM и BAC.

1) Докажите, что углы BMN и BCA равны.

2) Что можно сказать о треугольниках ABC и MBN?

3) Найдите длины сторон треугольников ABC и MBN.

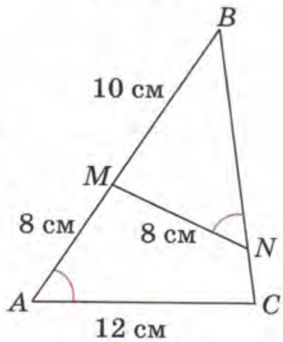


Рис. 13

16. Как изменится площадь квадрата, если его стороны:

1) увеличить в 5 раз;

2) уменьшить в 1,3 раза;

3) увеличить в $1\frac{1}{3}$ раза?

Подобными могут быть и геометрические тела. Так, например, подобны любые два куба, любые два шара (рис. 14).

Рис. 14

17. 1) Ребро куба равно $\frac{3}{4}$ см. Как изменится объём куба, если его ребро: а) увеличить в 2 раза; б) уменьшить в 2 раза?
2) Ребро куба равно a см. Как изменится объём куба, если его ребро: а) увеличить в 3 раза; б) уменьшить в 3 раза?

18. Объём одного куба равен 8 см^3, а объём другого куба равен 27 см^3. Найдите коэффициент подобия этих кубов.

19°. Площадь поверхности одного куба равна 54 см^2, а площадь поверхности другого куба равна 864 см^2. Найдите коэффициент подобия этих двух кубов.

20•. Измерения прямоугольного параллелепипеда равны 2 см, 4 см и 5 см. Одно из рёбер подобного ему прямоугольного параллелепипеда равно 60 см. Каким может быть коэффициент подобия этих параллелепипедов? Для каждого случая найдите объём и площадь поверхности второго параллелепипеда.

21. Выпишите номера верных утверждений.
1) Геометрические фигуры, имеющие одинаковую форму и размеры, называют равными.
2) Геометрические фигуры, имеющие одинаковую форму, называют подобными.
3) Квадраты равны, если равны их стороны.
4) Любые два квадрата подобны.

5) Треугольники подобны, если углы одного треугольника соответственно равны углам другого треугольника.

6) Любые два равносторонних треугольника подобны.

7) Любые два равнобедренных треугольника подобны.

8) Любые два круга подобны.

9) Если фигуру увеличить в k раз, то и её площадь увеличится в k раз.

10) Если ребро куба уменьшить в n раз, то его объём уменьшится в n^3 раз.

Задачи на смекалку

22. 1) Найдите площади квадратов, изображённых на рисунке 15, если сторона клетки равна 0,5 см.

2) Постройте на бумаге в клетку квадраты, площади которых равны: 2, 4, 5, 8, 9, 10, 16, 17 клеткам.

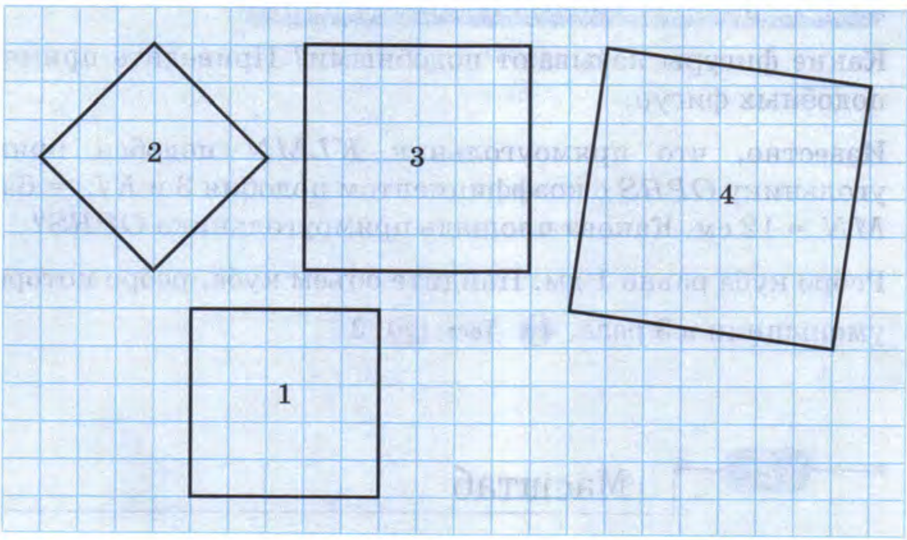


Рис. 15

23. Фигура состоит из трёх равных квадратов. Как нужно вырезать из этой фигуры часть, чтобы, приложив её к оставшейся части, получить квадрат, внутри которого вырезан квадрат (рис. 16)? Чему равен коэффициент подобия большого квадрата и вырезанной его части?

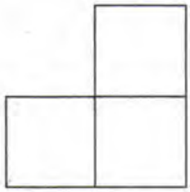


Рис. 16

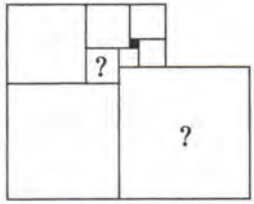


Рис. 17

24. Девять квадратов расположены так, как показано на рисунке 17. Сторона чёрного квадрата равна 1 мм. Найдите стороны двух квадратов, отмеченных вопросительными знаками.

Контрольные вопросы и задания

1. Какие фигуры называют подобными? Приведите примеры подобных фигур.
2. Известно, что прямоугольник $KLMN$ подобен прямоугольнику $OPRS$ с коэффициентом подобия 3 и $KL = 6$ см, $MN = 12$ см. Какова площадь прямоугольника $OPRS$?
3. Ребро куба равно 1 дм. Найдите объём куба, ребро которого уменьшили в 3 раза. Тест 3

2 Масштаб

Понятие, аналогичное коэффициенту подобия, часто используется при изображении объектов окружающего мира. Так, например, в кабинете географии вы можете увидеть *глобус* — уменьшенную модель планеты Земля, на которой мы с вами живём (рис. 18).

С древних времён путешественникам помогают находить путь географические карты, на которых изображают части земной поверхности. Расстояния на географической карте во много раз меньше, чем на местности. Поэтому на карте обязательно указывают её *масштаб*. Масштаб позволяет определить, *во сколько раз расстояния на карте меньше, чем на местности*. Слово «масштаб» происходит от немецких слов *мас* — «мера» и *штаб* — «палка» и, по-видимому, непосредственно связано с процессом измерения расстояний.

Рис. 18

Масштаб карты показывает, какую часть от реальных расстояний составляют расстояния на карте.

25. На рисунке 19 — вид на Московский Кремль, а на рисунке 20 представлена карта, масштаб которой 1 : 10 000. 6

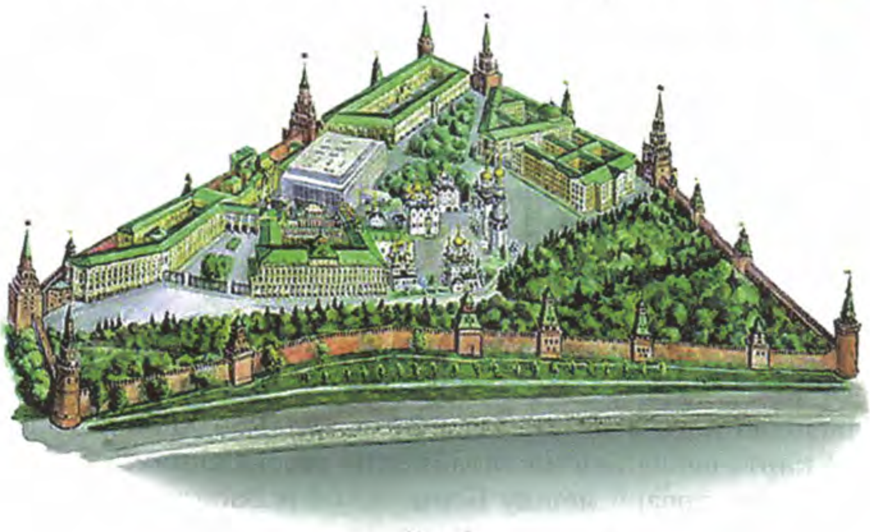


Рис. 19

1. Спасская башня
2. Царская башня
3. Набатная башня
4. Константино-Еленинская башня
5. Беклемишевская башня
6. Петровская башня
7. 2-я Безымянная башня
8. 1-я Безымянная башня
9. Тайницкая башня
10. Благовещенская башня
11. Водовзводная башня
12. Боровицкая башня
13. Оружейная башня
14. Комендантская башня
15. Троицкая башня
16. Средняя Арсенальная башня
17. Угловая Арсенальная башня
18. Никольская башня
19. Сенатская башня

Рис. 20

Проверьте, верны ли утверждения:

1) 1 см расстояния на карте равен 100 м на местности;

2) 500 м на местности равны 2 см на карте;

3) расстояние на карте между ближними к Москве-реке угловыми башнями Кремля (см. рис. 20, башни 5 и 11) равно 6,3 см, значит, расстояние на местности равно 630 м.

26. Запишите, какую часть составляет: 7

1) 1 см от 1 м; 3) 1 см от 1 км; 5) 1 мм от 1 м;

2) 1 дм от 1 км; 4) 1 см от 10 км; 6) 1 мм от 1 км.

27. 1) Найдите масштаб карты, на которой расстояние 50 км изображено отрезком длиной:

а) 5 см; б) 2,5 см; в) 10 см; г) 1 см.

2) На какой из этих карт изображение местности мельче?

28. Масштаб карты на рисунке 21 равен 1 : 100 000. Говорят, что карта сделана в масштабе одна стотысячная.

1) Длина отрезка между Борисовкой и Васильевкой на карте равна 3 см. Чему равно расстояние между Борисовкой и Васильевкой на местности?

Рис. 21

2) Расстояние между населёнными пунктами на местности равно 4 км. Чему равна длина соответствующего отрезка на карте? Расстояние между какими населёнными пунктами равно 4 км?

3) Найдите расстояние между Григорьевкой и Борисовкой на местности.

29. Расстояние от Москвы до Нижнего Новгорода 400 км (рис. 22).

Рис. 22

1) Каким должен быть масштаб карты, чтобы на ней от Москвы до Нижнего Новгорода было:
а) 20 см; б) 40 см; в) 8 см?
2) Каков масштаб карты на рисунке 22?
3) Найдите расстояние:
а) от Москвы до Смоленска; б) от Москвы до Казани.

30. Расстояние от Бреста до Владивостока более 10 000 км. Уместится ли на одной странице тетради это расстояние в масштабе 1 : 10 000 000?

31. Отрезку на карте длиной 4,5 см соответствует расстояние на местности 18 км. 1) Каков масштаб карты? 2) Каково расстояние между городами на местности, если на этой карте расстояние между ними 14 см? 10

32. На карте, масштаб которой 1 : 10 000 000, расстояние от Воронежа до Саратова равно 4,9 см. Сколько километров от Воронежа до Саратова?

Уменьшение, а иногда и увеличение размеров часто используется при изображении различных объектов.

33. На рисунке 23 в масштабе 1 : 100 изображён жираф — самое высокое из ныне живущих млекопитающих. А на рисун-

Рис. 23

Рис. 24

ке 24 вы видите в масштабе 200 : 1 простейшее одноклеточное — инфузорию-туфельку.

1) Какова высота жирафа?

2) Какова длина инфузории-туфельки?

3) Во сколько раз жираф больше инфузории?

34. Увеличен или уменьшен предмет и во сколько раз, если он изображён в масштабе:

1) 1 : 10; 2) 10 : 1; 3) 1 : 100; 4) 1 : 2; 5) 2 : 1? 8

Масштаб используется и при изготовлении чертежей. Обычно на чертежах указываются и реальные размеры в миллиметрах, и масштаб. Но даже если масштаб не указан, его легко найти. Для этого можно измерить длину любого элемента на чертеже и разделить результат на указанный размер этого элемента.

35. В каком масштабе изготовлен чертёж автомобиля (рис. 25), на котором все размеры указаны в миллиметрах?

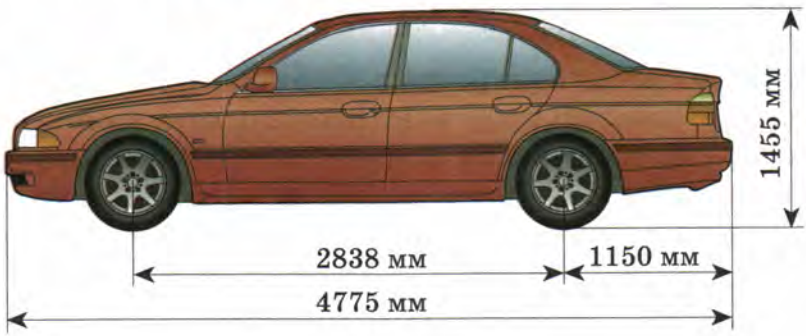


Рис. 25

36●. Длина детали на чертеже, сделанном в масштабе 1 : 5, равна 7,2 см. Чему равна длина этой детали на другом чертеже, сделанном в масштабе:

1) 1 : 3; 2) 2 : 1; 3) 1 : 10?

37. Длина дома на плане 25 см, а ширина 15 см. Какую длину и ширину имеет этот дом, если план сделан в масштабе 1 : 300?

38. На рисунке 26 изображён план двухкомнатной квартиры в масштабе 1 : 200. Найдите общую площадь квартиры. Определите жилую площадь квартиры (площадь двух комнат).

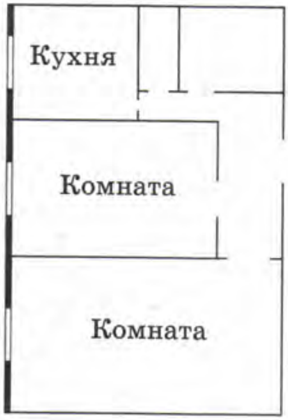


Рис. 26

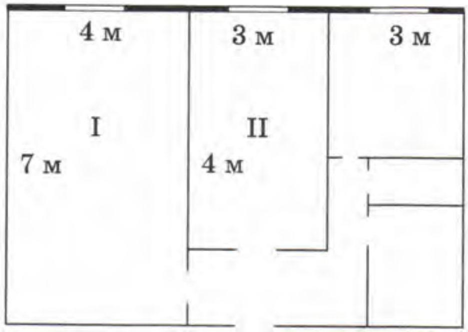


Рис. 27

39. На рисунке 27 изображён план двухкомнатной квартиры. Найдите:

1) масштаб плана;

2) общую площадь квартиры;

3) жилую площадь квартиры (площадь двух комнат).

Сколько нужно было бы платить за отопление такой квартиры в месяц, если бы она находилась в вашем доме (ставку оплаты за отопление 1 м^2 площади узнайте у родителей).

40. Найдите план эвакуации школы при пожаре и выясните, в каком масштабе он выполнен.

41●. 1) Площадь дачи на плане равна 30 см^2. Чему равна площадь самой дачи, если план сделан в масштабе 1 : 1000?

2) Площадь квартиры равна 140 м^2, площадь этой же квартиры на плане равна 35 см^2. Каков масштаб плана?

3) Площадь, занятая загородным домом, равна 120 м^2. Какую площадь занимает этот дом на плане, если план составлен в масштабе 1 : 500?

42. Размеры садового участка прямоугольной формы равны 20×30 (м). Начертите план этого участка в масштабе $1 : 500$. Изобразите на этом плане в центре участка садовый домик, размеры которого 5×5 (м).

43. **Практическая работа.** Сделайте план своей комнаты в масштабе $1 : 100$.

Задачи на смекалку

44. Карта масштаба $1 : 25\,000$ перечерчена в масштабе $1 : 20\,000$. Какова длина реки на новой карте, если на старой карте она равна 20 см?

45. Расстояние от Москвы до Бреста примерно равно 1100 км. Каким может быть масштаб при изображении этого расстояния отрезком на странице тетради?

46. На равных расстояниях от каждого из двух сёл A и B, рядом с которыми проходит железная дорога (рис. 28), решено построить железнодорожную станцию. Укажите на данном плане место этой станции и определите, на каком расстоянии она расположена от сёл, если план составлен в масштабе $1 : 50\,000$.

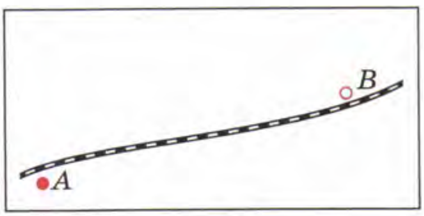


Рис. 28

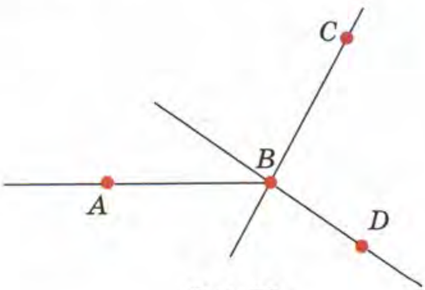


Рис. 29

47. Длина отрезка AB дороги, представленной на плане (рис. 29), в действительности равна 11 км.
Найдите расстояния от пунктов C и D до развилки B дорог и масштаб данного плана.

Контрольные вопросы и задания

1. 1) Как вы понимаете информацию о том, что масштаб карты равен 1 : 100 000?

2) Если расстояние между населёнными пунктами на этой карте равно 5 см, то чему равно расстояние между ними на местности?

3) Каким будет расстояние на этой карте, если на местности оно равно 35 км?

2. Что показывает масштаб изображения:

1) 1 : 1000; 2) 15 : 1; 3) 3 : 50 000?

3. Площадь двухкомнатной квартиры равна 60 м^2. Чему будет равна площадь этой квартиры на плане, сделанном в масштабе 1 : 100? Тест 9

3 Отношения и пропорции

Чтобы найти, во сколько раз первая величина больше второй, мы делим первую на вторую. Величины должны быть измерены в одинаковых единицах. Так, при определении коэффициентов подобия фигур мы делили расстояние между двумя точками одной фигуры на расстояние между соответствующими точками подобной фигуры, т. е. находили частное длин соответствующих друг другу отрезков, измеренных в одинаковых единицах.

Частное двух величин, измеренных в одинаковых единицах, называют *отношением* этих величин.

48. 1) Что показывает частное:

а) длин диагоналей двух квадратов;

б) расстояния, пройденного автомашиной, и времени её движения;

в) стоимости пачки одинаковых книг и их количества в этой пачке;

г) числа страниц, распечатанных принтером, и числа страниц, которые принтер печатал за 1 мин;

д) площади прямоугольника и его длины;

е) объёма прямоугольного параллелепипеда и его высоты?

2) Какие из указанных частных являются отношениями величин?

49. От рулона ткани отрезали два куска: 2 м на платье и 3 м на костюм.

1) Как относятся: а) длина куска ткани, которая пошла на платье, к длине всей ткани; б) длина куска ткани, которая пошла на костюм, к длине всей ткани; в) длина куска ткани для платья к длине куска ткани для костюма?

2) Во сколько раз: а) длина куска ткани для костюма больше длины куска ткани для платья; б) длина всей ткани больше длины куска ткани для костюма; в) длина всей ткани больше длины куска для платья?

50. 1) Найдите отношение длин сторон прямоугольника, одна из которых равна 15 см, а другая — 45 дм.

2) Найдите отношение массы манной крупы к массе муки, если при помоле пшеницы получили 80 т муки и 2000 кг манной крупы.

3) Найдите отношение площади меньшего квадрата к площади большего квадрата, если сторона одного квадрата равна 5 см, а другого — 2 см.

4) Найдите отношение объёма большего куба к объёму меньшего, если ребро одного куба равно 2,4 м, а другого — 12 дм.

51. В учебнике географии 6 класса записано: «Масштабом называется дробь, у которой числитель — единица, а знаменатель — число, указывающее, во сколько раз расстояние на местности больше, чем на карте». Переформулируйте данное определение, используя понятие отношения.

52. Копировальная машина изменяет размеры изображения в отношении 3 : 2.

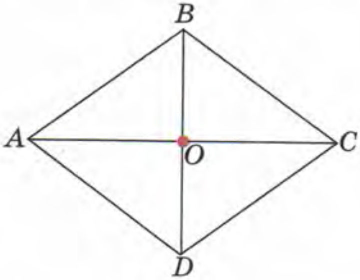


Рис. 30

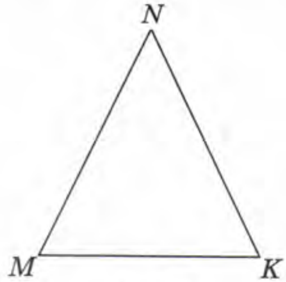


Рис. 31

1) Изобразите в тетради копию ромба (рис. 30).
2) По копии (рис. 31) восстановите рисунок в оригинале.

В математике часто говорят об отношении чисел, имея в виду частное двух чисел.

Правило чтения отношения чисел

Частное 25 : 43 можно прочитать как:
— отношение числа двадцать пять к числу сорок три;
— отношение чисел двадцать пять и сорок три;
— отношение двадцати пяти к сорока трём.

53. Прочитайте выражение, используя термин «отношение»:
1) 2 : 3; 3) 1 : 100; 5) 0,25 : 1,05;
2) 15 : 17; 4) 1 : 200 000; 6) $8\frac{3}{17} : 2\frac{1}{7}$.

54. Найдите отношение:
1) 135 к 9; 4) 2,52 к 3,6; 7) 2,6 к $1\frac{11}{15}$;
2) 185 к 74; 5) $\frac{1}{6}$ к $\frac{5}{9}$; 8) $9\frac{2}{5}$ к 2,35;
3) 2,16 к 0,3; 6) $3\frac{1}{5}$ к $1\frac{3}{5}$; 9) $11\frac{4}{7}$ к 3,24.

55. Запишите отношение числа 4 к числу 5 в виде:

1) обыкновенной дроби;
2) частного;
3) десятичной дроби.

56. Выберите пары отношений, из которых можно составить верное равенство:

1) $3 : 5$; 3) $15 : 25$; 5) $3{,}5 : 4{,}5$;

2) $7 : 9$; 4) $3 : 7$; 6) $5 : 9$. 13

***Пропорцией* называют верное равенство двух отношений.**

Пропорция в переводе с латыни — «соотношение».

Правило чтения пропорции

Пропорции $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$ и $a : b = c : d$ читаются одинаково:

— число a относится к числу b, как число c к числу d;

— a относится к b, как c относится к d;

— отношение a к b равно отношению c к d.

57. Запишите пропорцию:

1) 6 относится к 36, как 7 относится к 42;
2) число 9 относится к числу 4,5, как число 3 к числу 1,5;
3) отношение $\frac{3}{5}$ к 0,2 равно отношению 2,4 к 0,8;
4) $\frac{7}{11}$ относится к $\frac{2}{3}$, как $1\frac{5}{22}$ относится к $1\frac{2}{7}$. 12

58. Является ли пропорцией равенство:

1) $1 : 100 = 3 : 300$;
2) $\frac{2}{10} = \frac{7}{35}$;
3) $7 : 5 = 9 : 6$;
4) $\frac{0{,}37}{3{,}7} = \frac{7{,}1}{710}$?

На рисунке 32 треугольник ABC подобен треугольнику DEF с коэффициентом подобия 2. Значит, отношения AB к DE и BC к EF, т. е. *сходственных сторон* этих треугольников, составляют пропорцию $\frac{AB}{DE} = \frac{BC}{EF}$.

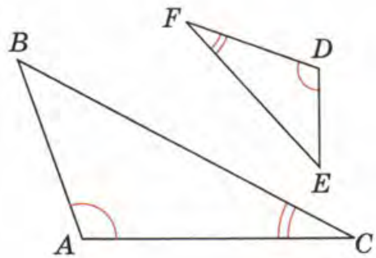


Рис. 32

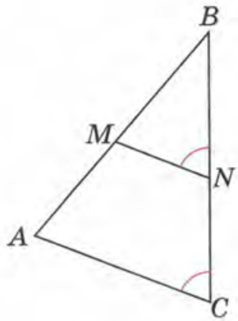


Рис. 33

59. Запишите ещё несколько пропорций по рисунку 32. 13

60. Составьте пропорции из длин сторон подобных треугольников, изображённых на рисунке 33.

61. Составьте пропорции из чисел:

1) 12; 390; 39; 120;
2) 72; 6; 54; 8;
3) 2,5; 1; 2; 5;
4) 6; $3\frac{1}{3}$; 1,2; $\frac{2}{3}$.

Если записать пропорцию $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$ с помощью знака деления $a : b = c : d$, то легко понять, почему a и d называют *крайними членами пропорции*, а b и c — *средними её членами.*

62. Прочитайте пропорцию и назовите её крайние и средние члены:

1) $3{,}5 : 0{,}05 = 7000 : 100$;
2) $12\,341\,234 : 1234 = 90\,009 : 9$;
3) $\frac{7{,}07}{10{,}1} = \frac{0{,}56}{0{,}8}$;
4) $\frac{15}{165} = \frac{1{,}265}{0{,}115}$.

63. 1) Найдите произведение крайних и произведение средних членов пропорции:

а) $5 : 10 = 2 : 4$; в) $\frac{4}{9} : 6 = \frac{2}{3} : 9$;

б) $6 : 0{,}5 = 24 : 2$; г) $\frac{5}{7} = \frac{6}{8{,}4}$.

2) Какую гипотезу о произведениях крайних и средних членов пропорции можно выдвинуть?

Основное свойство пропорции

Произведение крайних членов пропорции равно произведению её средних членов.

$$\frac{a}{b} = \frac{c}{d},\ ad = bc \text{ или } a : b = c : d,\ ad = bc.$$

Докажем основное свойство пропорции.

Доказательство. Рассмотрим ход доказательства на конкретной пропорции $3 : 5 = 9 : 15$.

Вы знаете, что частное не изменится, если делимое и делитель умножить на одно и то же число. Применим это свойство частного к левой и правой частям пропорции:

$$3 : 5 = (3 \cdot 15) : (5 \cdot 15),\ \ 9 : 15 = (9 \cdot 5) : (15 \cdot 5).$$

Частные $(3 \cdot 15) : (5 \cdot 15)$ и $(9 \cdot 5) : (15 \cdot 5)$ остались равными, делители $5 \cdot 15$ и $15 \cdot 5$ равны, значит, должны быть равны и делимые $3 \cdot 15 = 9 \cdot 5$. Мы получили равенство произведений крайних и средних членов пропорции.

▼ Запишем теперь пропорцию в общем виде $a : b = c : d$.

По свойству частного $(ad) : (bd) = (cb) : (db)$. Из равенства частных и делителей получаем равенство делимых $ad = cb$. Именно это равенство и требовалось доказать. △

Заметим, что если $a : b \neq c : d$, то $ad \neq bc$.

Пример 1. Является ли равенство $\frac{16}{15} : \frac{99}{7} = \frac{14}{33} : \frac{45}{8}$ пропорцией?

Решение. Чтобы это равенство являлось пропорцией, должны быть равны произведения её крайних и средних членов: $\frac{16}{15} \cdot \frac{45}{8} = \frac{99}{7} \cdot \frac{14}{33}$, $\frac{16 \cdot 45}{15 \cdot 8} = \frac{99 \cdot 14}{7 \cdot 33}$, $6 = 6$. Произведения оказались равными, значит, равенство $\frac{16}{15} : \frac{99}{7} = \frac{14}{33} : \frac{45}{8}$ является пропорцией.

64. Верно ли равенство:

1) $6 : 13 = 10 : 2$;
2) $14 : 7 = 1 : 0{,}5$;
3) $\frac{2}{3} : \frac{7}{9} = 1\frac{2}{7} : 1\frac{1}{2}$;
4) $2 : 4 = \frac{3}{4} : 1{,}6$;
5) $2{,}38 : 0{,}7 = 3{,}06 : 0{,}9$;
6) $1{,}45 : 0{,}29 = 2{,}58 : 0{,}43$?

65. Составьте пропорции из множителей:

1) $15 \cdot 6 = 9 \cdot 10$;
2) $1{,}2 \cdot 5 = 0{,}6 \cdot 10$;
3) $5 \cdot 1\frac{1}{3} = \frac{2}{3} \cdot 10$;
4) $7{,}8 \cdot \frac{2}{3} = 1{,}3 \cdot 4$.

66. Составьте ещё семь пропорций, используя эти же числа:
1) $20 : 5 = 100 : 25$; 2) $1{,}2 : 3 = 0{,}36 : 0{,}9$.

67. Можно ли составить пропорцию из чисел:
1) 5, 25, 7, 49;
2) 3, 5, 7, 9;
3) 2, 4, 6, 8;
4) 15, 5, 8, 24?

68●. Какие буквы можно поменять местами в пропорции $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$, чтобы равенство не нарушилось? Запишите пропорции, которые при этом получатся.

69●. Даны тройки чисел:

1) 2; 18; 10; 2) 9; 45; 7; 3) 4; 2; 6,5; 4) $\frac{8}{9}$; 4; 6.

Для каждой тройки чисел подберите четвёртое число так, чтобы из них можно было составить пропорцию. Запишите пропорцию, в которой подобранное число было бы:
а) средним членом; б) крайним членом.
Сколько разных чисел можно подобрать для каждой из троек?

Во многих задачах один из членов пропорции неизвестен и его нужно найти.

Пример 2. Найти неизвестный член пропорции $\frac{a}{15} = \frac{8}{25}$.

Р е ш е н и е. Запишем равенство крайних и средних членов пропорции и выразим из него a.

$$25a = 15 \cdot 8,$$

$$a = \frac{15 \cdot 8}{25} = \frac{3 \cdot 8}{5} = \frac{24}{5} = 4{,}8.$$

70. Найдите неизвестный член пропорции:

1) $\frac{x}{6} = \frac{4}{9}$; 3) $\frac{2{,}2}{3{,}5} = \frac{b}{3{,}85}$; 5) $c : 2{,}43 = 2 : 5$;

2) $\frac{60}{z} = \frac{5}{7}$; 4) $\frac{5}{2{,}7} = \frac{0{,}45}{a}$; 6) $\frac{7}{18} : \frac{5}{9} = x : \frac{3}{14}$. 15

71°. Найдите число x из пропорции:

1) $\frac{3}{x+3} = \frac{7}{15}$;

2) $\frac{x-5}{20} = \frac{6}{7}$;

3) $5\frac{3}{5} : 3\frac{1}{2} = 5\frac{1}{4} : 2x$;

4) $\frac{2}{7} = \frac{3}{4x}$;

5) $0{,}24 : 2\frac{2}{3} = (x - 0{,}06) : 1\frac{7}{9}$;

6) $\frac{11}{17} = 22 : 68x$;

7) $\frac{12{,}3}{2{,}324} = \frac{x-4}{46{,}48}$;

8) $\frac{7}{9} : 3{,}1 = x : 9{,}3$. 16, 17

72. Где на координатном луче (рис. 34) должно быть изображено число x, чтобы была верна пропорция:

1) $\frac{a}{b} = \frac{x}{d}$; 3) $\frac{a}{x} = \frac{b}{d}$;

2) $\frac{d}{b} = \frac{a}{x}$; 4) $\frac{x}{b} = \frac{b}{a}$? 14

Рис. 34

При решении задач на проценты в 5 классе вы сначала находили 1%, а затем отвечали на вопрос задачи. Можно решать эти задачи иначе, составляя по условию задачи пропорцию.

Так, например, чтобы выяснить, сколько процентов составляет число 2 от числа 5, обозначим искомое число процентов буквой x и составим пропорцию $\frac{2}{5} = \frac{x}{100}$. Отсюда $5x = 100 \cdot 2$, $x = 40$. Ответ: 40%.

Конечно, и при таком способе решения следует сначала понять, какое число принимается за 100%.

73. Решите задачи, составляя пропорции.

1) Бронза — это сплав, содержащий 90% меди и 10% олова. Сколько килограммов меди нужно взять, чтобы получилось 120 кг бронзы?

2) Латунь — это сплав, содержащий 60% меди и 40% цинка. Сколько килограммов цинка нужно добавить к 123 кг меди, чтобы получить латунь?

3) Набор инструментов стоил 1500 р. Сколько он будет стоить, если его цена возрастёт на 5%?

4) 20% пути равны 75 км. Чему равен весь путь?

Задачи на смекалку

74. Отношение $\frac{1}{2}$ к половине числа равно $\frac{1}{2}$. Найдите это число.

75. В коробке лежат красные и синие ручки. Число красных ручек составляет 40% от числа синих. Сколько процентов составляет число синих ручек от числа красных?

76. Мише на день рождения подарили несколько разноцветных шаров, причём красных шаров среди них было 45%. После того как Миша отдал один синий и один зелёный шар, красных шаров у Миши стало 50%. Сколько шаров подарили Мише на день рождения?

77. При каком значении a получится пропорция:

1) $\frac{a}{16} = \frac{9}{a}$; 3) $\frac{a}{a} = \frac{a}{16}$;

2) $\frac{a}{a} = \frac{9}{16}$; 4) $\frac{a}{a} = \frac{a}{a}$?

Контрольные вопросы и задания

1. Если средние члены пропорции поменять местами с крайними членами, будет ли это пропорцией? Составьте пропорцию и проверьте ваш ответ.

2. Найдите неизвестный член пропорции $\frac{x}{3} = \frac{17}{18}$.

3. Решите задачу, составив пропорцию. Из 225 кг руды получили 34,2 кг меди. Каково процентное содержание меди в руде? Тест 11

4 Пропорциональные величины

Задача 1. За 2 ч автомобиль проехал 120 км. Сколько времени потребуется автомобилю на путь в 3 раза больший, если он будет ехать с той же скоростью?

Решение.

1) $120 \cdot 3 = 360$ (км) — в 3 раза больший путь.

2) $120 : 2 = 60$ (км/ч) — скорость автомобиля.

3) $360 : 60 = 6$ (ч) — время, за которое автомобиль проедет 360 км.

Ответ: 6 ч.

Заметим, что при увеличении пути в 3 раза время движения также увеличилось в 3 раза. Зная, что при движении с постоянной скоростью время и пройденный путь изменяются в одно и то же число раз, мы могли бы сразу ответить на вопрос задачи:

$$2 \cdot 3 = 6 \text{ (ч)}.$$

Связь между значениями времени и соответствующими расстояниями можно записать с помощью пропорции $\frac{2}{6} = \frac{120}{360}$.

В рассмотренной задаче *при увеличении одной из величин в несколько раз во столько же раз увеличивается и другая величина.*

Аналогичными свойствами обладают и многие другие пары взаимосвязанных величин, например длина стороны и периметр квадрата, количество купленного продукта и стоимость покупки. При этом отношение любых двух значений одной из этих величин и отношение соответствующих им значений другой величины составляют пропорцию.

Такие величины называют ***пропорциональными.***

78. За краску заплатили 540 р. Сколько пришлось бы заплатить за краску, если бы её купили:

1) в 4 раза меньше; 2) в 3 раза больше?

79. 1) Как изменится периметр квадрата, если длину его стороны увеличить в 2 раза, в 3 раза, в 10 раз?

2) Сравните отношение длин сторон двух каких-нибудь квадратов с отношением их периметров.

80. Пропорциональны ли следующие величины:

1) длина стороны прямоугольника и его площадь при условии, что вторая сторона прямоугольника неизменна;

2) длина стороны квадрата и его площадь:

3) длина ребра куба и его объём;

4) длины сходственных сторон двух подобных треугольников;

5) длины сторон и диагоналей двух квадратов? 18

81•. Заполните таблицу значений пропорциональных величин.

1)

Время работы, ч		4	5	7	
Объём работы, детали	50		125		200

2)

Количество товара, шт.	2		27	115	
Стоимость покупки, р.		32,2	62,1		545,1

82. Длину стороны квадрата увеличили на 50%. На сколько процентов увеличилась при этом площадь квадрата? Как сформулировать эту задачу, не используя слово «процент»?

83. Длину каждого ребра куба увеличили на 40%.

1) На сколько процентов увеличился при этом объём куба?

2) На сколько процентов увеличилась площадь его поверхности?

Задача 2. Расстояние между двумя городами 240 км. За какое время автомобиль может проехать это расстояние?

Решение. Ответ на вопрос задачи зависит от того, с какой скоростью будет ехать автомобиль. Составим таблицу.

Скорость движения, км/ч	60	80	120
Время в пути, ч	4	3	2

Заметим, что *увеличение* скорости в 2 раза — с 60 до 120 км/ч — привело к *уменьшению* времени движения также в 2 раза.

Произведение скорости на соответствующее время движения для каждого столбца таблицы одно и то же — оно равно 240 км.

Равенство $60 \cdot 4 = 120 \cdot 2$ можно рассматривать как произведение крайних и средних членов пропорции $\frac{60}{120} = \frac{2}{4}$. Заметим, что время 4 ч, соответствующее скорости 60 км/ч, оказалось в знаменателе дроби, а время, соответствующее скорости 120 км/ч, — в числителе. Отношение скоростей и отношение соответствующих им значений времени оказались *взаимно обратными числами*. Поэтому такие величины, как скорость и время, за которое можно проехать данное расстояние, называют ***обратно пропорциональными***.

Примерами обратно пропорциональных величин являются длины сторон прямоугольника данной площади, производительность труда и время выполнения работы, цена купленного на некоторую сумму денег чая и его масса.

Обратно пропорциональные величины обладают важным свойством.

При увеличении одной из *обратно пропорциональных величин* в несколько раз другая величина во столько же раз уменьшается.

Задача 3. Через минуту после выезда у велосипедиста сломался велосипед, и ему пришлось вернуться домой. Сколько времени понадобилось велосипедисту на обратный путь, если возвращался он со скоростью в пять раз меньшей, чем при езде на велосипеде?

Решение. Путь в этой задаче один и тот же, значит, скорость и время обратно пропорциональны. Скорость уменьшилась в 5 раз, значит, время должно в 5 раз увеличиться. Поскольку от дома велосипедист ехал 1 мин, то путь домой занял у него 5 мин.

84. Купили 6 банок краски. Сколько банок краски можно было бы купить за те же деньги, если бы цена одной банки:
1) повысилась в 2 раза; 2) снизилась в 2 раза?

85. Расстояние в 210 км грузовик проехал за 3 ч.
1) С какой скоростью двигался грузовик?
2) Сколько времени займёт этот путь у легкового автомобиля, скорость которого в два раза больше скорости грузовика?
3) С какой скоростью ехал велосипедист, если у него тот же путь занял в 2 раза больше времени, чем у грузовика?

86. На 160 р. можно купить 3 кг апельсинов.
1) Сколько килограммов картофеля можно купить на эти деньги, если картофель в 4 раза дешевле апельсинов?

2) Сколько килограммов говядины, которая в 4 раза дороже апельсинов, можно купить на эти деньги?

87•. Заполните таблицу значений обратно пропорциональных величин x и y. 19, 20

1)

Производительность труда, деталей в час		250	500	400	
Время работы, ч	0,25		4		2

2)

Цена товара, р.	25		75		120
Количество товара, шт.	120	200		5	

Чтобы подчеркнуть разницу между *пропорциональными* и *обратно пропорциональными* величинами, пропорциональные величины часто называют ***прямо пропорциональными***.

88. Какие из следующих пар величин являются:

1) прямо пропорциональными;

2) обратно пропорциональными;

3) не являются ни теми, ни другими:

а) количество купленного товара и стоимость покупки;

б) скорость движения и время, необходимое для преодоления данного расстояния;

в) производительность труда и время выполнения определённой работы;

г) масса воды и её объём;

д) скорость движения и путь, пройденный за определённое время;

е) длина и ширина прямоугольника данной площади;

ж) длина стороны квадрата и его площадь;

з) длина ребра куба и его объём;

и) площадь поверхности куба и длина его ребра;

к) площадь поверхности куба и его объём;

л) рост человека и его возраст;

м) масса аквариума с рыбками и число рыбок в аквариуме;

н) число верно решённых заданий контрольной работы и отметка, полученная за неё;

о) длина окружности и её радиус;

п) длина высоты данного треугольника и длина стороны, к которой она проведена;

р) расстояние на карте между Москвой и Рязанью и число, равное масштабу карты? 21

Пропорциональные величины часто встречаются в задачах. При решении таких задач неизвестное значение одной из величин принимают за x и составляют уравнение.

Задача 4. За 7,5 кг сахара заплатили 210 р. Сколько придётся заплатить за 20 кг сахара?

Решение. Количество купленного сахара и стоимость покупки — прямо пропорциональные величины. Обозначим стоимость 20 кг сахара буквой x и составим пропорцию.

$$\frac{x}{210} = \frac{20}{7{,}5}. \text{ Отсюда } x = \frac{20 \cdot 210}{7{,}5},\ x = 560 \text{ (р.)}.$$

Ответ: 560 р.

Задача 5. Туристы планировали пройти маршрут за 6 дней, но из-за плохой погоды им пришлось двигаться медленнее, и вместо предполагаемых 52 км в день они проходили только 39 км. За сколько дней туристы прошли свой маршрут?

Решение. Поскольку туристы не изменили планировавшийся маршрут, количество дней *обратно пропорционально* расстоянию, которое туристы проходят за 1 день. Обозначим число дней, затраченных на весь поход, буквой x и составим пропорцию: $\frac{x}{6} = \frac{52}{39}$.

Отсюда $x = \frac{6 \cdot 52}{39}$, $x = 8$ (дней).

Ответ: за 8 дней.

89. Составьте пропорцию к задаче, используя таблицу.

1) За 5 конвертов заплатили 45 р. Сколько таких конвертов можно купить на 72 р.?

Цена	Количество	Стоимость
Одинаковая	5 к.	45 р.
	? к.	72 р.

2) Путь от Москвы до Ярославля автобус проходит со скоростью 50 км/ч за 5,4 ч.

Какова скорость движения поезда, если он тратит на этот же путь 3 ч?

	Скорость	Время	Расстояние
Автобус	50 км/ч	5,4 ч	Одинаковое
Поезд	? км/ч	3 ч	

90. 1) Объясните, как рассуждали при составлении каждой пропорции к задаче: «Один килограмм металлолома заменяет 2,5 кг руды. Сколько руды заменяют 4 т металлолома?»:

а) $\frac{x}{4000} = \frac{1}{2,5}$; б) $\frac{4000}{x} = \frac{2,5}{1}$; в) $\frac{4}{x} = \frac{1}{2,5}$; г) $\frac{x}{4} = \frac{2,5}{1}$.

2) В каких единицах будет найдена масса руды в каждой пропорции?

91. Какая пропорция составлена по условию задачи: «Пассажирский поезд, который двигался со скоростью 65 км/ч, затратил на путь между станциями 4 ч. За сколько часов пройдёт этот же путь товарный поезд, если его скорость 40 км/ч?»:

1) $\frac{65}{40} = \frac{4}{x}$; 2) $\frac{40}{65} = \frac{x}{4}$; 3) $\frac{40}{65} = \frac{4}{x}$; 4) $\frac{4}{65} = \frac{x}{40}$?

92. Прочитайте задачу, определите, пропорциональны или обратно пропорциональны величины, о которых в ней идёт речь, обозначьте неизвестное буквой x, составьте уравнение и решите его.

1) В наборе из четырёх стаканчиков 600 г йогурта. Найдите массу шести таких стаканчиков.

2) Для транспортировки нефти нужно было 35 цистерн ёмкостью 60 м^3 каждая. Однако на железной дороге оказались только цистерны ёмкостью 70 м^3. Сколько таких цистерн потребуется для транспортировки нефти?

3) На окраску 15 м^2 пола израсходовано 1,5 кг эмали. Сколько эмали потребуется для окраски пола в комнате, размеры которой $5{,}2 \times 3{,}5$ (м)?

4) 12 тракторов одинаковой мощности могут вспахать поле за 88 ч. Сколько нужно таких же тракторов, чтобы вспахать это поле за 33 ч?

5) Для строительства двух домов требуется 120 м^3 леса. Сколько кубических метров леса потребуется для строительства 6 таких домов?

6) Для приготовления каши на 1 стакан молока требуется 2 столовые ложки крупы. Сколько нужно взять стаканов молока, чтобы приготовить кашу из 6 столовых ложек крупы?

7) На карте железная дорога Москва — Санкт-Петербург, имеющая длину 650 км, изображена линией длиной 5 см. Какую длину на этой карте имеет линия, изображающая Байкало-Амурскую магистраль, если длина этой магистрали 3145 км?

8)$^{\circ}$ Маятник стенных часов совершает 198 колебаний за 3,3 мин. Сколько колебаний совершает маятник за 12 мин?

93. Волга — самая длинная река в Европе, её длина приблизительно равна 3530 км. На карте её длина составляет 17,65 см. 1) Какова длина реки Нил, если на карте с тем же масштабом её длина равна 33,35 см? 2) Какова длина реки Миссисипи на карте с тем же масштабом, если её реальная длина равна 5970 км? 3) Какая из этих рек длиннее?

94●. Составьте пропорции к задаче, используя таблицу.
На автозаправочной станции первый водитель залил в бак 40 л бензина, второй — 25 л такого же бензина. Первый заплатил на 135 р. больше, чем второй. Сколько заплатил за бензин каждый водитель?

Цена	Количество	Стоимость
Одинаковая	25 л	? р.
	40 л	? р.
	(40—25) л	135 р.

95●. 1) Велосипедист движется со скоростью на 10 км/ч большей, чем пешеход. На один и тот же путь велосипедисту требуется 2 ч, а пешеходу — 7 ч. Найдите скорости велосипедиста и пешехода.

2) Мастер может отштамповать 480 деталей за 4 ч, а ученику на выполнение этой работы потребуется времени в 3 раза больше. За сколько часов могут отштамповать 480 деталей мастер и ученик при совместной работе?

96●. На рисунках 35 и 36 изображены пары треугольников.

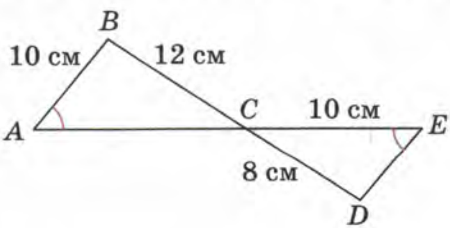


Рис. 35

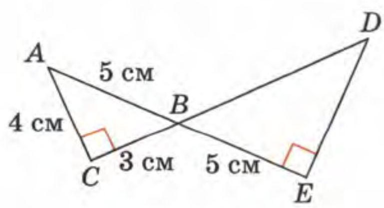


Рис. 36

1) Можно ли утверждать, что каждая пара составлена из подобных друг другу треугольников?

2) Для каждой пары треугольников выпишите пары сходственных сторон и составьте из них пропорции.

3) Пользуясь указанными на рисунках данными, найдите из пропорций неизвестные длины сторон треугольников.

▼ Рассмотрим ещё одну задачу на пропорциональность величин.

Задача 6. Велосипедист проезжает путь от деревни до станции за 30 мин. Когда велосипедист выезжал из деревни, со станции в деревню вышел пешеход. Велосипедист встретил его через 20 мин после выезда из деревни. Сколько времени займёт у пешехода путь от станции до деревни?

Решение. В этой задаче можно легко обойтись без составления уравнения. А вот рисунок к ней сделать полезно (рис. 37). За 20 мин велосипедист проехал $\frac{20}{30} = \frac{2}{3}$ всего пути. Значит, оставшуюся $\frac{1}{3}$ пути прошёл пешеход.

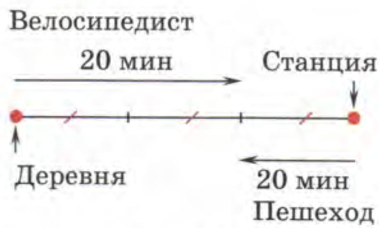


Рис. 37

На $\frac{1}{3}$ пути у пешехода ушло 20 мин, значит, на весь путь уйдёт в 3 раза больше, т. е. $20 \cdot 3 = 60$ (мин).

Ответ: 1 ч. △

97●. Два насоса могут осушить котлован за 2 ч. За сколько часов мог бы осушить котлован второй насос, работая один, если первому насосу на это понадобилось бы 3 ч?

98●. Из пунктов A и B одновременно навстречу друг другу выехали велосипедист и мотоциклист. Скорость велосипедиста в 4 раза меньше скорости мотоциклиста.

1) Через сколько минут мотоциклист встретился с велосипедистом, если весь путь из B в A у него занял полчаса?

2) Сколько времени после встречи велосипедист ехал до пункта B?

99●. Две бригады могут проложить участок дороги за 6 дней. Если бы первая бригада работала одна, то на эту же работу у неё ушло бы 18 дней. За сколько дней проложит этот участок дороги вторая бригада, если будет работать одна?

100●. Два насоса, работая одновременно, могут откачать воду из резервуара за 6 ч. Первый насос, работая один, может откачать эту воду за 15 ч. За сколько часов сможет откачать воду второй насос, если будет работать только он?

Задачи на смекалку

101. Задача-шутка. 6 котов за 6 мин съедают 6 мышей. Сколько понадобится котов, чтобы за 100 мин съесть 100 мышей?

102. Прямоугольник разделён двумя отрезками на четыре прямоугольника, площади трёх из которых 2 см^2, 4 см^2, 6 см^2 (рис. 38). Найдите площадь прямоугольника.

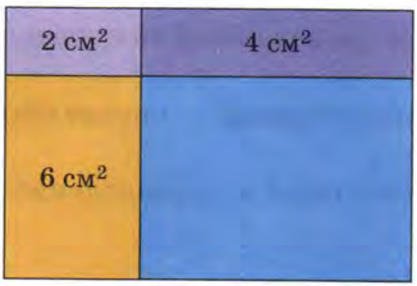


Рис. 38

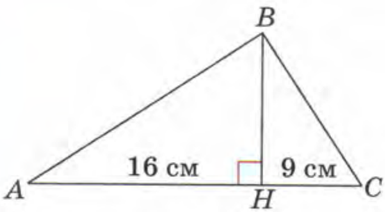


Рис. 39

103●. В прямоугольном треугольнике ABC проведена высота BH, которая разделила гипотенузу AC на отрезки в 9 см и 16 см (рис. 39).

1) Выпишите равные углы.

2) Убедитесь в том, что треугольники ABH и BCH подобны. Найдите коэффициент их подобия.

3) Найдите площадь треугольника ABC.

4) Найдите коэффициент подобия треугольников ABC и BHC.

104. Двое друзей одновременно отправились из пункта A в пункт B: первый — на велосипеде, а второй — на автомобиле со скоростью, в 20 раз большей скорости первого. На полпути автомобиль сломался, и оставшуюся часть пути автомобилист прошёл пешком со скоростью, в два раза меньшей скорости велосипедиста. Кто из друзей раньше прибыл в пункт B?

Контрольные вопросы и задания

1. Какие величины называют пропорциональными? Почему их иногда называют прямо пропорциональными? Чем отличаются прямо и обратно пропорциональные величины?

2. Какие из следующих величин являются прямо пропорциональными, обратно пропорциональными, а какие не являются ни теми, ни другими:

1) масса учебников в портфеле и их количество;

2) средняя скорость движения и проделанный за определённое время путь;

3) время движения и путь, проделанный с определённой скоростью;

4) средняя скорость движения и время на преодоление определённого расстояния;

5) рост человека и его масса;

6) высота предмета и тень, которую он отбрасывает в 14 ч дня при ясной погоде?

3. Решите задачу, составив пропорцию.

1) Стальной шарик объёмом 6 см^3 имеет массу 46,8 г. Какова масса шарика из той же стали, если его объём равен 2,5 см^3?

2) Длина первого прямоугольника 3,6 м, а ширина — 2,4 м. Длина второго прямоугольника 4,8 м. Найдите ширину второго прямоугольника, если известно, что площади прямоугольников равны. Тест

5 Деление в данном отношении

У прямоугольника на рисунке 40 сторона AB состоит из двух равных отрезков, а сторона BC — из трёх таких же отрезков. Эту информацию о соотношении измерений прямоугольника можно записать в виде пропорции

$$AB : BC = 2 : 3.$$

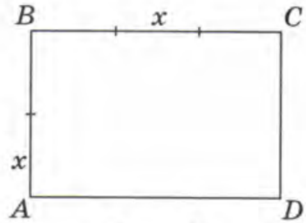


Рис. 40

Говорят, что стороны прямоугольника $ABCD$ *относятся как* 2 *к* 3.

Зная, что периметр прямоугольника равен 20 см, можно найти длины сторон.

Обозначим буквой x длины отрезков, из которых состоят стороны AB и BC (см. рис. 40). Выразим через x данный периметр.

$$P = 2(AB + BC) = 2(2x + 3x),$$

$$2 \cdot 5x = 20,\ 10x = 20,$$

$$x = 2 \text{ (см)}.$$

Теперь легко найти стороны AB и BC.

$$AB = 2x = 2 \cdot 2 = 4 \text{ (см)},$$

$$BC = 3x = 3 \cdot 2 = 6 \text{ (см)}.$$

Таким образом, стороны прямоугольника равны 4 см и 6 см.

Ответ: 4 см и 6 см. 22

105. Молоко разлили в три бидона. В первый налили 0,2 всего молока, во второй — 0,3, а в третий — 0,5 всего молока. Что показывает отношение:

1) 0,2 : 0,3;
2) 0,3 : 0,5;
3) 0,2 : 0,5;
4) (0,2 + 0,3) : 0,5?

106. Измерьте углы и определите, как относятся величины смежных углов на рисунке 41.

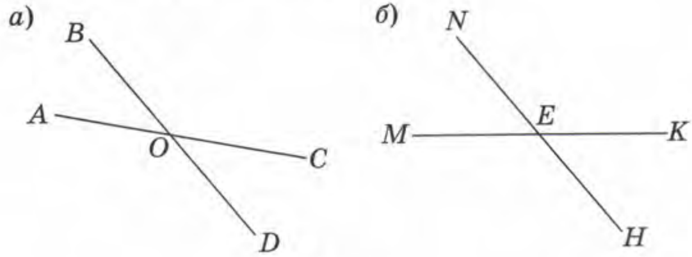


Рис. 41

107. Смежные углы равны:
1) $30°$ и $150°$; 2) $25°$ и $155°$; 3) $90°$ и $90°$; 4) $45°$ и $135°$.
Как относятся величины смежных углов?

108. Начертите и обозначьте смежные углы, которые находятся в отношении:
1) $1 : 2$; 3) $8 : 7$; 5) $1 : 5$;
2) $5 : 4$; 4) $5 : 7$; 6) $3 : 7$.

109. Постройте угол MNK и разделите его лучом в отношении $3 : 5$, если:
1) $\angle MNK = 180°$; 3) $\angle MNK = 80°$;
2) $\angle MNK = 90°$; 4) $\angle MNK = 140°$. 23, 25

110. 1) Объясните, как разделить число c в отношении $m : n$, где m и n — натуральные числа.
2) Разделите число:
а) 20 в отношении $2 : 3$;
б) 3,5 в отношении $3 : 4$;
в)● 96 в отношении $\frac{1}{3} : \frac{1}{5}$;
г)● 90 в отношении $\frac{1}{4} : \frac{1}{5}$;
д)● 5,6 в отношении $1{,}25 : 5{,}75$;
е)● $5\frac{5}{8}$ в отношении $\frac{1}{2} : \frac{1}{3}$. 24

111. 1) Постройте прямоугольник, у которого стороны относятся как 5 : 8, а периметр равен 18,2 см.

2) Могут ли стороны квадрата относиться как:

а) 3 : 3; б) 2 : 5; в) 7 : 7; г) 2 : 3?

112. Два числа относятся как 4 : 7. Найдите эти числа, зная, что:

1) их сумма равна 110;
2) их сумма равна 3,3;
3) их разность равна 12;
4) их разность равна 0,03;
5)● их произведение равно 7;
6)● их произведение равно 252.

113. Составьте пропорции к задаче, используя таблицу.

На автозаправочной станции первый водитель залил в бак 25 л бензина, второй — 40 л такого же бензина. Сколько заплатил за бензин каждый водитель, если вместе они заплатили 585 р.?

Цена	Количество	Стоимость
Одинаковая	25 л	? р.
	40 л	? р.
	(40 + 25) л	585 р.

114. Решите задачи.

1) Первая машинистка печатает 10 страниц в час, вторая — 8 страниц в час. Как разделить между ними 90 страниц рукописи, чтобы они закончили работу одновременно?

2) Первая машинистка может перепечатать 90 страниц за 4 ч, вторая — за 5 ч. Как распределить между ними 90 страниц так, чтобы они перепечатали их в кратчайший срок?

115. Для приготовления вишнёвого варенья на 3 стакана вишни берут 2 стакана сахара.

1) Сколько надо взять сахара, чтобы сварить варенье из 5 стаканов вишни?

2) Сколько процентов объёма этой смеси составляет сахар?

116. Решите задачи.

1) Для изготовления подшипников используется сплав свинца и меди, в который они входят в отношении $8:17$. Сколько свинца и сколько меди нужно взять, чтобы получить 112 кг сплава?

2) Сколько килограммов олова нужно взять, чтобы получить 332 кг бронзы, если бронза — это сплав олова и меди в отношении $1:9$?

3) Латунь — это сплав меди и цинка в отношении $3:2$. Сколько меди нужно добавить к 31 кг цинка, чтобы получить латунь?

117. На координатном луче отмечены точки $A(38)$ и $B(56)$. Точка C расположена между ними и делит отрезок AB в отношении $5:7$, т. е.

$$AC : CB = 5 : 7.$$

1) Найдите длину отрезка AB.

2) Найдите длины отрезков AC и CB.

3) Найдите координату точки C.

118. На координатном луче отмечены точки $A(163)$ и $B(229)$. Точка C расположена между ними и делит отрезок AB в отношении $9:13$. Найдите координату точки C.

Соотношение между сторонами треугольника на рисунке 42 нельзя задать с помощью одной пропорции.

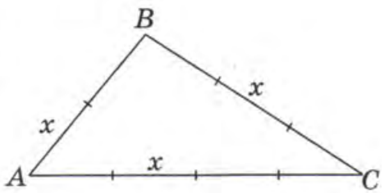


Рис. 42

Тем не менее и в этом случае говорят, что стороны AB, BC и AC треугольника относятся как 2 к 3 и к 4, и записывают это с помощью знака деления:

$$AB : BC : AC = 2 : 3 : 4.$$

Зная, что периметр треугольника ABC равен 27 см, мы можем найти длины его сторон. Для этого нужно *разделить число* 27 *в отношении* $2:3:4$.

Обозначим длину стороны AB как $2x$, тогда $BC = 3x$ и $AC = 4x$.

Выразим через x данный периметр треугольника ABC.

$$2x + 3x + 4x = 27,\ 9x = 27,\ x = 3\ (\text{см}).$$

Теперь найдём длины сторон треугольника.

$$AB = 2x = 2 \cdot 3 = 6\ (\text{см}),$$
$$BC = 3x = 3 \cdot 3 = 9\ (\text{см}),$$
$$AC = 4x = 4 \cdot 3 = 12\ (\text{см}).$$

Таким образом, стороны треугольника 6 см, 9 см и 12 см.

119. Разделите число 128 на четыре части так, чтобы первая часть относилась ко второй как 2 : 3, вторая к третьей — как 3 : 5, а третья к четвёртой — как 5 : 6.

120. 1) Объясните, как разделить число p в отношении $k : m : n$, где k, m и n — натуральные числа.

2) Разделите число: 22

а) 170 в отношении 3 : 5 : 9;

б) 10 в отношении 3 : 7 : 10;

в)● 14,4 в отношении $\frac{1}{3} : \frac{1}{15} : 0{,}2$;

г)● 13,5 в отношении $0{,}2 : \frac{1}{6} : \frac{2}{15}$.

121. Для приготовления фарфора смешивают 25 частей белой глины, 2 части песка и 1 часть гипса.

1) В каком отношении берут глину, песок и гипс для приготовления фарфора?

2) Сколько нужно взять каждого материала, чтобы приготовить 490 г смеси?

122. 1) Два угла треугольника равны соответственно 30° и 60°. В каком отношении находятся три угла этого треугольника?

2) Углы треугольника относятся как 3 : 4 : 5. Найдите углы треугольника.

123. Периметр треугольника равен 38,7 см. Найдите стороны треугольника, если их длины относятся как 2 : 3 : 4. 26

124●. Стороны треугольника относятся как 3 : 4 : 5.

1) Как называется такой треугольник?

2) Найдите площадь этого треугольника, зная, что его периметр равен 45,6 см.

125●. Постройте треугольник, у которого стороны относятся как 2 : 5 : 6, зная, что его периметр равен 19,5 см.

126. 1) Могут ли рёбра прямоугольного параллелепипеда относиться как 2 : 3 : 5?

2) Могут ли рёбра куба относиться как 1 : 2 : 3?

3) Могут ли стороны какого-нибудь треугольника относиться как 2 : 7 : 9?

4) Могут ли углы какого-нибудь треугольника относиться как 3 : 7 : 10?

127. Для приготовления компота требуется вода, ягоды и сахар, массы которых относятся как 5 : 3 : 2.

1) Сколько процентов в этой смеси составляет сахар?

2) Сколько нужно взять воды, ягод и сахара для приготовления 5 кг компота?

128. Для приготовления драгоценного сплава взяли золото, серебро и платину, массы которых относятся как 3 : 4 : 9.

1) Сколько процентов серебра в этом сплаве?

2) Найдите массу платины в 120 г сплава.

129. 1) Для приготовления компота смешали 3,5 кг яблок, 2 кг груш и 0,5 кг вишен. Сколько процентов яблок, груш и вишен в смеси?

2) Смешали 0,24 кг грузинского, 0,36 кг индийского и 0,2 кг китайского чая. Сколько процентов грузинского, индийского и китайского чая в полученной смеси?

130. Объёмы работ, выполненные тремя мастерами, находятся в отношении 2 : 3 : 4. За работу заплачено 36 000 р. Как им следует разделить между собой эти деньги?

131•. Смешали три сорта конфет: 14 кг по цене 120 р. за 1 кг, 16 кг по 350 р. и 10 кг по 470 р. Сколько будет стоить килограмм смеси конфет?

132•. На координатном луче отмечены точки $A(357)$ и $D(437)$. Точки B и C, которые расположены на отрезке AD, делят его в отношении 12 : 13 : 15. Найдите координаты точек B и C.

Задачи на смекалку

133. Пять чисел относятся между собой как 1 : 2 : 3 : 4 : 5. Найдите эти числа, зная, что сумма первого и третьего чисел равна 20.

134. Разделите число 1155 на такие части, чтобы первая часть относилась ко второй как 2 : 3, вторая к третьей — как 4 : 5, а третья к четвёртой — как 6 : 7.

135. Моторной лодке хватит бензина либо на 40 км против течения реки, либо на 60 км по течению. На какое расстояние может спуститься лодка по течению реки, чтобы без дозаправки вернуться назад? (Считать, что при движении лодки её мотор постоянно работает.)

136. Первая машинистка может перепечатать 80 страниц за 4 ч, вторая — за 5 ч. Как распределить между ними 80 страниц так, чтобы они перепечатали их в кратчайший срок?

Контрольные вопросы и задания

1. Как вы понимаете утверждение: «Возраст отца относится к возрасту сына как 7 : 3»? Приведите конкретный пример таких возрастов.

2. Разделите число 5,2 в отношении 4 : 9 : 13.

3. Сколько золота в 20 г сплава золота с серебром в отношении 53 : 47? Тест Ч. 1. С. 24

Глава

2 Делимость чисел

6 Делители и кратные

Одно натуральное число можно разделить на другое натуральное число либо нацело, как, например, 6 на 3, либо с остатком, как, например, при делении 6 на 5.

137. Выполните деление и укажите, в каких заданиях делимое нацело разделилось на делитель:

1) 4580 : 10;	4) 123 : 7;	7) 504 : 56;
2) 2790 : 90;	5) 249 : 2;	8) 2704 : 26;
3) 47 : 5;	6) 3624 : 12;	9) 99 998 : 11.

Если одно натуральное число делится нацело на другое натуральное число, то первое называют *кратным* второму, а второе называют *делителем* первого.

Число 6 можно разделить нацело на 1, на 2, на 3 и на 6. Значит, число 6 *кратно* числам 1, 2, 3 и 6, а числа 1, 2, 3 и 6 являются *делителями* числа 6. 27

138. 1) 225 : 7 = 32 (ост. 1). Можно ли назвать число 225 кратным числу 7?

2) Можно ли назвать число k делителем числа n, если $n : k = m$ и числа n, k и m — натуральные?

3) Можно ли назвать число c кратным числу d, если $c = da$ и числа c, d и a — натуральные?

139. 1) Докажите, что число 13 является делителем числа 130.

2) Является ли число 130 кратным числу 13? 28

140. 1) Докажите, что число 420 437 кратно числу 593.

2) Является ли число 593 делителем числа 420 437? 34

141. Укажите наименьшее из чисел, делителями которого являются числа:

1) 1, 3; 2) 1, 16, 2, 8, 4; 3) 1, 3, 5, 9, 15, 45.

142. 1) Как найти все делители числа 16?

2) Можно ли упростить поиск делителей, называя их парами, по сравнению с поиском и проверкой каждого делителя отдельно?

3) Найдите все делители числа:

а) 4; б) 9; в) 12; г) 32; д) 50; е) 125.

143. 1) Докажите, что число 500 кратно числу 100.

2) Как найти кратные числа 7?

3) Укажите какие-нибудь два числа, кратные числу:

а) 10; б) 17; в) 15; г) 45; д) 37; е) 100.

144. Существует ли отличное от 1 число, которому кратны числа:

1) 2, 4, 6; 2) 10, 20, 30; 3) 2, 3, 4?

Если существует, то укажите такое число.

145. 1) Найдите наименьшее трёхзначное число, кратное числу 54.

2) Найдите наибольший двузначный делитель числа 100.

146. 1) Из чисел 1, 6, 12, 20, 42, 54, 72, 90, 45 выберите числа, кратные 6.

2) Из чисел 2, 3, 9, 12, 18, 36 выберите делители числа 864.

3) Из чисел 7, 14, 17, 28, 34, 56 выберите числа, кратные числу 14.

4) Из чисел 2, 7, 30, 50, 60 выберите делители числа 270.

147. 1) Запишите все делители числа 48.

2) Есть ли среди них делители числа 18?

3) Выпишите все общие делители чисел 18 и 48.

4) Укажите наибольший из общих делителей чисел 18 и 48.

148. 1) Можно ли назвать наименьший из общих делителей чисел 4 и 6? Если можно, то укажите его.

2) Можно ли назвать наибольший из общих делителей чисел 4 и 6? Если можно, то укажите его.

149. 1) Какие из следующих чисел 4, 6, 12, 24, 30, 48, 60, 120 кратны 12?

2) Из чисел 3, 5, 30, 50, 60, 75, 90, 120, 150 выберите кратные 15.

3) Из ответов к заданиям 1) и 2) выберите числа, которые одновременно являются кратными для чисел 12 и 15. Укажите наименьшее из общих кратных этих чисел.

150. 1) Можно ли назвать наибольшее из общих кратных чисел 2 и 5? Если можно, то укажите его.

2) Можно ли назвать наименьшее из общих кратных чисел 2 и 5? Если можно, то укажите его.

151●. Докажите, что:

1) каждое натуральное число является делителем самого себя;

2) каждое натуральное число является кратным самому себе;

3) если a кратно b, а b кратно c, то a кратно c.

152●. 1) Какое число является делителем всех натуральных чисел?

2) У какого числа меньше всего делителей?

3) Может ли число иметь только 2 делителя?

4) Может ли делитель какого-либо натурального числа быть больше этого числа?

153●. 1) Известно, что число 37 является делителем числа 148, а число 148 является делителем 444. Не выполняя деления, скажите, является ли число 37 делителем числа 444.

2) Известно, что число 620 кратно числу 155, а число 155 кратно 31. Не выполняя деления, скажите, кратно ли число 620 числу 31.

При сокращении дроби

$$\frac{18}{24} = \frac{9}{12} = \frac{3}{4}$$

мы последовательно разделили её числитель и знаменатель сначала на 2, а затем на 3. Числа 2 и 3 являются делителями как числа 24, так и числа 18. Другими словами, 2 и 3 — *общие делители* чисел 24 и 18. Можно было сразу сократить исходную дробь на 6 — *наибольший общий делитель* чисел 24 и 18.

Наибольший общий делитель натуральных чисел m и n обозначают НОД (m; n).

Таким образом, НОД (18; 24) = 6.

Числитель и знаменатель дроби $\frac{3}{4}$ имеют единственный общий делитель 1. Понятно, что делением на 1 дробь не сократить. Поэтому дробь $\frac{3}{4}$ называют *несократимой*.

154. Запишите, что:

1) шесть — наибольший общий делитель двенадцати и восемнадцати;

2) число пять — наибольший общий делитель чисел пятнадцать и двадцать.

155. 1) Проверьте, является ли число 7 общим делителем чисел 70 и 126.

2) Найдите НОД (70; 126).

156. 1) Запишите все общие делители чисел 48 и 60.

2) Найдите НОД (48; 60) и сократите дробь $\frac{48}{60}$. 29

При поиске общих делителей чисел достаточно проверить, какие из делителей одного числа являются делителями другого.

157. Делители какого числа рациональнее проверять при поиске:

1) НОД (15; 120); 3) НОД (8; 16; 40);
2) НОД (9; 183); 4) НОД (7; 21; 490)?

158. Найдите:

1) НОД (5; 9); 4) НОД (90; 96); 7) НОД (24; 18; 54);
2) НОД (24; 30); 5) НОД (50; 75); 8) НОД (14; 35; 77);
3) НОД (36; 45); 6) НОД (77; 99); 9) НОД (18; 27; 42).

159. Сократите дробь:

1) $\frac{18}{45}$; 3) $\frac{12}{36}$; 5) $\frac{30}{105}$; 7) $\frac{88}{990}$; 9) $\frac{100}{250}$;
2) $\frac{22}{88}$; 4) $\frac{50}{75}$; 6) $\frac{400}{500}$; 8) $\frac{42}{720}$; 10) $\frac{24}{360}$.

При сложении и вычитании дробей с разными знаменателями их приводят к общему знаменателю. Так, например,

$$\frac{1^{\backslash 4}}{18} + \frac{1^{\backslash 3}}{24} = \frac{4+3}{72} = \frac{7}{72}.$$

Общий знаменатель дробей кратен каждому из знаменателей, т. е. является их *общим кратным*. Обычно, как в рассмотренном примере сложения, стараются найти ***наименьшее*** из ***общих кратных*** знаменателей.

> Наименьшее общее кратное натуральных чисел m и n обозначают НОК (m; n).

Таким образом, НОК (18; 24) = 72.

160. Даны числа: 6, 12, 24, 54, 2, 1, 3, 4, 36, 72.

1) Назовите числа, кратные 6.
2) Назовите делители числа 6.
3) Назовите числа, кратные 6 и 4.
4) Назовите общие делители чисел 6 и 4.
5) Назовите НОД (6; 4).
6) Назовите НОК (6; 4).

161. 1) Является ли число 18 общим кратным чисел 3 и 2?
2) Является ли число 18 наименьшим общим кратным чисел 3 и 2?
3) Запишите НОК (2; 3).

162. 1) Найдите закономерность и допишите ещё по два числа в каждый ряд чисел: 60, 120, 180, ... и 75, 150, 225, ...
2) Можно ли, пользуясь данными рядами чисел, найти НОК (60; 75)?

При поиске наименьшего общего кратного чисел достаточно проверить, какие из кратных одного числа являются кратными для другого.

163. Кратные каких чисел рациональнее проверять при поиске:
1) НОК (16; 320);
2) НОК (2; 37);
3) НОК (9; 12; 15);
4) НОК (4; 6; 10)?

164. Найдите наименьшее общее кратное чисел:
1) 2 и 3;
2) 4 и 5;
3) 7 и 9;
4) 10 и 15;
5) 12 и 15;
6) 20 и 30. 30

165. Выполните действия:
1) $\frac{5}{24} + \frac{7}{60}$;
2) $\frac{11}{21} - \frac{3}{35}$;
3) $\frac{5}{42} + \frac{10}{63}$;
4) $\frac{19}{60} - \frac{8}{45}$;
5) $\frac{5}{18} + \frac{9}{24} - \frac{7}{12}$;
6) $\frac{3}{20} - \frac{2}{25} + \frac{1}{30}$. 31, 32

166•. Верно ли, что двенадцать любых натуральных чисел имеют наименьшее общее кратное?

167. В вазе лежит 30 конфет. Сколько конфет нужно добавить, чтобы 7 мальчиков смогли разделить их поровну между собой?

168. Печенье упаковано в коробки по 23 кг, а вафли — по 17 кг. Можно ли, не распаковывая коробки, взять со склада 115 кг печенья, 150 кг вафель?

169. В классе 32 ученика. На уроках физкультуры они обычно строятся в две колонны. Можно ли их построить в колонну:
1) по три человека;
2) по четыре человека;
3) по шесть человек;
4) по восемь человек?

170. С конечной остановки по разным маршрутам отправляются одновременно два автобуса. Первый возвращается каждые 40 мин, второй — каждые 60 мин. Через какое наименьшее время они окажутся вместе на конечной остановке?

171. Вдоль дороги через каждые 45 м стоят столбы. Их решили заменить другими, увеличив расстояние между столбами до 60 м. На каком расстоянии от первого столба новый столб установят на то же место, где стоял старый?

172. Для отправки на консервный завод яблоки уложили в 18 ящиков, по 12 кг в каждый. Можно ли эти яблоки уложить в ящики: 1) по 24 кг; 2) по 36 кг? Если можно, то сколько таких ящиков потребуется? 35

Задачи на смекалку

173. Найдите число, которое:
1) меньше 60 и кратно 8 и 14;
2) больше 100 и кратно 8 и 14;
3) больше 10, но меньше 15 и является делителем чисел 28 и 42. 33

174. Три теплохода совершают рейсы из одного порта.
Первый теплоход возвращается из рейса на шестой день после выхода, второй — на пятый день, а третий — на десятый. На следующий день после возвращения теплоходы снова уходят в рейс. Все три теплохода вышли в рейс одновременно. Через сколько дней после выхода в рейс проведут ночь в порту: а) первый теплоход со вторым; б) второй с третьим; в) все три теплохода вместе?

175. В коробке лежат цветные карандаши, по 9 карандашей каждого цвета. Известно, что в коробке натуральное число десятков и натуральное число дюжин карандашей, при этом карандашей в коробке меньше 300. Сколько карандашей в коробке?

Контрольные вопросы и задания

1. Как вы понимаете утверждение: «Врачи ожидают двукратного увеличения зарплаты»?
2. Как вы понимаете утверждение:

   а) a — делитель n; б) b кратно a; в) НОД $(m; n) = k$?
3. Даны числа: 12, 24, 30, 43, 48, 55, 60. Укажите среди них числа, которые:

   1) кратны 3; 2) являются делителями числа 120.

7 Свойства делимости произведения, суммы и разности чисел

Натуральное число можно представить в виде произведения любого из его делителей на натуральное число, так, например,

$$6 = 1 \cdot 6, \quad 6 = 2 \cdot 3, \quad 6 = 3 \cdot 2, \quad 6 = 6 \cdot 1.$$

Это свойство легло в основу принятого в математике **определения делимости.**

Число n делится на натуральное число d, если $n = d \cdot m$, где m — натуральное число или нуль.

Число d в этом случае называют *делителем* числа n.

Заметим, что по этому определению число 0 делится на любое натуральное число, а любое натуральное число, в свою очередь, является делителем нуля.

Чтобы доказать, что число d является делителем числа n, можно найти такое натуральное число m, что $n = d \cdot m$.

176. Используя определение делимости, докажите, что:

1) 39 — делитель числа 68 601;
2) число 48 856 делится на 31;
3) 19 не является делителем числа 3551;
4) число 32 875 не делится на 73.

177•. Объясните, в каких случаях нельзя сказать, что число n делится на число d.

Если n делится на d, а d, в свою очередь, делится на c, то n тоже делится на c.

Доказательство. По определению делимости $n = dm$ и $d = ck$, где m и k — натуральные числа или нули. Подставим в первое равенство вместо d его выражение из второго равенства:

$$n = dm = (ck)m = c(km).$$

Мы представили число n в виде произведения натурального числа c и числа km, которое является натуральным числом или нулём. Значит, число n делится на c, что и требовалось доказать.

По сути дела, мы доказали следующее. 36, 37

Свойство делимости произведения натуральных чисел

Если один из множителей делится на некоторое число, то и всё произведение делится на это число.

178. На склад привезли 37 пачек учебников, по 24 учебника в каждой пачке. Можно ли поровну распределить эти учебники между тремя книжными магазинами?

179. Разделите на 5 произведение: 38

1) $15 \cdot 18$;
2) $94 \cdot 30$;
3) $25 \cdot 31$;
4) $24 \cdot 5 \cdot 17$;
5) $98 \cdot 75 \cdot 34$;
6) $64 \cdot 68 \cdot 65$.

180. Используя свойство делимости произведения, докажите, что значения выражений: 39

1) $19 \cdot 30$, $34 \cdot 12$, $33 \cdot 25$, $94 \cdot 18$, $13 \cdot 45 \cdot 8$ делятся на 3;

2) $28 \cdot 25$, $73 \cdot 50$, $35 \cdot 48$, $40 \cdot 71$, $43 \cdot 89 \cdot 15$ делятся на 5;

3) $14 \cdot 5$, $8 \cdot 21$, $56 \cdot 12$, $84 \cdot 27$, $85 \cdot 77$, $63 \cdot 28$ делятся на 7.

181●. Почему равенство $m = 2n$ называют *формулой чётного числа*?

182. Формулой каких чисел является равенство:

1) $a = 7n$; 2) $a = 4n$; 3) $a = 8n$; 4) $a = 17n$?

183. Запишите формулу числа, делящегося: 40

1) на 3; 2) на 5; 3) на 13.

184○. Два натуральных числа отличаются друг от друга на 1. Можно ли утверждать, что их произведение кратно 2?

185. 1) Запишите несколько делителей произведения чисел 8 и 9.

2)● Сколько всего делителей у этого произведения?

186○. Придумайте пример, который опровергает утверждение:

1) если произведение двух натуральных чисел делится на некоторое число, то хотя бы одно из них делится на это число;

2) если ни одно из двух натуральных чисел не делится на некоторое число, то и их произведение не делится на это число.

Рассмотрим теперь свойство делимости суммы натуральных чисел.

Свойство делимости суммы натуральных чисел

Если каждое слагаемое делится на некоторое число, то и сумма делится на это число.

Действительно, при делении суммы чисел можно отдельно разделить каждое слагаемое, а полученные частные сложить.

Если каждое из слагаемых кратно делителю, то полученные частные окажутся натуральными числами, а значит, натуральным числом будет и их сумма. Например,

$$(6 + 9) : 3 = 6 : 3 + 9 : 3 = 2 + 3 = 5,$$

$$6 + 9 = 3 \cdot 5,$$

т. е. сумма $(6 + 9)$ кратна 3. 41

187. Укажите несколько таких натуральных значений m, чтобы сумма $28 + m$:

1) делилась на 2;
2) не делилась на 2;
3) делилась на 7;
4) не делилась на 7.

188. 1) Какие из следующих сумм делятся на 7:

а) $14 + 28$;
б) $56 + 700$;
в) $630 + 49$;
г) $8 + 1$;
д) $16 + 5$;
е) $50 + 44$;
ж) $7 + 25$;
з) $39 + 35$;
и) $68 + 777$?

2)● По какому признаку эти выражения распределены по трём столбцам? 42

189°**.** Верно ли утверждение:

1) если каждое слагаемое делится на 4, то сумма делится на 2;
2) если каждое слагаемое делится на 2, то сумма делится на 4;
3) если ни одно из слагаемых не делится на некоторое число, то и сумма не делится на это число;
4) если сумма натуральных чисел делится на некоторое число, то и каждое слагаемое делится на это число;
5) если натуральное число m кратно числу n, отличному от m, то m можно представить в виде суммы натуральных чисел, каждое из которых делится на n?

190. Сократите дробь:

1) $\dfrac{22 + 33}{77 + 88}$;
2) $\dfrac{45 + 75}{55 + 50}$;
3) $\dfrac{12 + 36}{60 + 24}$;
4) $\dfrac{20 + 30}{50 + 100}$.

191●. Почему равенство $m = 2n - 1$ называют *формулой нечётного числа*?

192. 1) Запишите формулу числа, которое при делении на 5 даёт в остатке: а) 1; б) 2.

2) Каким натуральным числом может оказаться остаток от деления на 5?

Такими же рассуждениями, как и при доказательстве свойства делимости суммы, можно получить *свойство делимости разности* натуральных чисел.

Свойство делимости разности натуральных чисел

Если уменьшаемое и вычитаемое делятся на некоторое число, то и разность делится на это число.

193○. Докажите свойство делимости разности натуральных чисел.

194. Укажите несколько таких натуральных значений n, чтобы разность $130 - n$:

1) делилась на 2;
2) не делилась на 2;
3) делилась на 13;
4) не делилась на 13.

195. 1) Значения каких выражений делятся на 11:

а) $110 - 22$;
б) $7788 - 44$;
в) $5555 - 132$;
г) $85 - 19$;
д) $690 - 58$;
е) $980 - 120$;
ж) $2233 - 87$;
з) $121 - 100$;
и) $500 - 99$?

2)● По какому признаку эти выражения распределены по трём столбцам?

196. Сократите дробь: 43

1) $\dfrac{65 - 13}{130 - 26}$;
2) $\dfrac{153 - 51}{136 + 17}$.

197. Выполните деление:

1) $(45a + 60b) : 5$;
2) $(99x - 81y) : 9$;
3) $(117m + 91) : 13$;
4) $(152k - 95) : 19$.

198°. Докажите, что:

1) $7a + 4$ делится на 5, если известно, что $a + 2$ делится на 5;

2) $a + b$ делится на 11, если известно, что $2000 + a$ и $b - 999$ делятся на 11.

199°. Подберите пример, опровергающий следующее утверждение:

1) если ни уменьшаемое, ни вычитаемое не делятся на некоторое число, то и разность на это число не делится;

2) если разность двух чисел делится на некоторое число, то и уменьшаемое, и вычитаемое делятся на это число.

С помощью опровергающих примеров (их обычно называют *контрпримерами*) можно иногда убедиться в том, что некоторое утверждение неверно. Но в большинстве случаев для доказательства утверждений приходится проводить рассуждения.

Если одно из двух слагаемых делится на некоторое число, а другое — нет, то сумма на это число не делится.

▼Доказательство. Пусть число n делится на d, а число m не делится на d.

Рассмотрим сумму чисел n и m:

$$n + m = k.$$

Выразим из этого равенства слагаемое m:

$$m = k - n.$$

Если бы число k делилось на d, то в правой части равенства и уменьшаемое k, и вычитаемое n делились бы на d. Но тогда и разность m должна была бы делиться на d, а по условию это не так.

Значит, число k не может делиться на число d. То есть сумма чисел n и m не делится на d, что и требовалось доказать. △

200. При решении уравнения $x^2 + 72 - 17x = 0$ восьмиклассник нашёл корни 5 и 7. Верно ли он решил уравнение?

201. Докажите, что:

1) ни число 10, ни число 5 не являются корнями уравнения $17x^3 - 314x + 2 = 0$;

2) ни одно из натуральных чисел не является корнем уравнения $3x^3 - 9x^2 + 12x - 1 = 0$.

202°. Представьте число в виде суммы или разности натуральных чисел так, чтобы без дополнительных вычислений ответить на вопрос:

1) делится ли число 131 311: а) на 2; б) на 13;
2) делится ли число 181 819: а) на 2; б) на 18;
3) делится ли число 14 285 612: а) на 2; б) на 14; в) на 7;
4) делится ли число 22 066 089: а) на 2; б) на 22; в) на 11?

203. Не выполняя деления, найдите остаток от деления числа:

1) 181 819 на число: а) 2; б) 18;
2) 131 311 на число: а) 2; б) 13;
3) 22 066 089 на число: а) 2; б) 22; в) 11;
4) 14 285 612 на число: а) 2; б) 14; в) 7.

Свойство делимости разности удобно использовать при отыскании наибольшего общего делителя. Пусть, например, надо найти наибольший общий делитель чисел 153 и 187.

Р е ш е н и е. Рассмотрим разность $187 - 153 = 34$. По свойству делимости разности число 34 должно быть кратно наибольшему общему делителю чисел 187 и 153. Это соображение упрощает поиск. Нужно проверить делители числа 34, т. е. числа 34, 17 и 2. Понятно, что 1 проверять не нужно. Проверку начнём с наибольшего делителя, т. е. с числа 34.

153 не делится на 34, так как $34 \cdot 4 < 153$, а $34 \cdot 5 > 153$.

Теперь проверяем число 17.

$$153 = 17 \cdot 9, \text{ значит, НОД } (153;\ 187) = 17.$$

О т в е т: 17.

204•. Объясните, почему в приведённом решении не проверялась делимость числа 187 на 17.

Мы искали наибольший общий делитель чисел 153 и 187, однако точно так же для любых двух натуральных чисел n и m таких, что $n > m$,

$$\text{НОД}\ (n;\ m) = \text{НОД}\ (n - m;\ m).$$

205. Пользуясь свойством делимости разности, найдите наибольший общий делитель чисел:

1) 70 и 42;	3) 579 и 582;	5) 482 и 484;
2) 100 и 85;	4) 378 и 270;	6) 1001 и 998.

206. Сократите дробь:

1) $\frac{90}{135}$; 2) $\frac{42}{70}$; 3) $\frac{56}{72}$; 4) $\frac{84}{96}$; 5) $\frac{65}{91}$; 6) $\frac{45}{75}$.

207. Из школы в день здоровья 424 человека повезли на стадион, а 477 человек — в плавательный бассейн. Для этого заказали несколько автобусов с одинаковым числом мест в каждом. Все места в автобусах были заняты, и никто не стоял. Сколько автобусов было заказано и сколько пассажиров было в каждом автобусе?

208. Маша и Саша покупают одинаковые почтовые наборы. Каждый набор состоит из открытки с конвертом, и его цена выражается целым числом рублей. Маша заплатила за наборы 85 р., а Саша — на 34 р. больше. Сколько стоит один набор? Сколько наборов купила Маша? Сколько наборов купил Саша?

▼ Когда числа сильно отличаются друг от друга, найти их наибольший общий делитель помогает деление с остатком.

Пусть, например, требуется найти НОД (276; 52 338).

Р е ш е н и е. Разделим с остатком 52 338 на 276.

$$\begin{array}{r|l} -52338 & 276 \\ \underline{276} & \overline{189} \\ -2473 & \\ \underline{2208} & \\ -2658 & \\ \underline{2484} & \\ 174 & \end{array}$$

52 338 = 276 · 189 + 174,

52 338 − 276 · 189 = 174. Отсюда следует, что НОД (276; 52 338) = НОД (276; 174).

Продолжим последовательно упрощать задачу.

276 − 174 = 102, значит,
НОД (276; 174) = НОД (174; 102).

174 − 102 = 72, значит,
НОД (174; 102) = НОД (102; 72).

102 − 72 = 30, значит,
НОД (102; 72) = НОД (72; 30).

72 − 30 · 2 = 12, значит,
НОД (72; 30) = НОД (30; 12).

30 − 12 · 2 = 6, значит,
НОД (30; 12) = НОД (12; 6).

12 = 6 · 2, значит, НОД (12; 6) = 6.

О т в е т: НОД (276; 52 338) = 6.

Рассмотренный приём поиска наибольшего общего делителя был разработан более 2000 лет назад великим древнегреческим математиком Евклидом. △ 44, 45

209●. 1) Найдите:

а) НОД (378; 3850); в) НОД (391; 1288);
б) НОД (555; 703); г) НОД (445; 5665).

2) Сократите дробь:

а) $\frac{378}{3850}$; в) $\frac{391}{1288}$; д) $\frac{791}{1337}$;

б) $\frac{555}{703}$; г) $\frac{445}{5665}$; е) $\frac{712}{26\,760}$.

210. Выполните действия:

1) $20\frac{1}{4} \cdot 20\frac{4}{9}$; 3) $8\frac{1}{11} \cdot 5\frac{1}{2}$;

2) $2\frac{3}{5} : 1\frac{11}{15}$; 4) $6\frac{11}{25} : 7\frac{2}{3}$.

Задачи на смекалку

211. Какой день недели будет ровно через 10 лет?

212. Найдите наименьшее из натуральных чисел, при умножении которого на 2 получается квадрат, а при умножении на 3 — куб натурального числа.

213. Делится ли на 2006 сумма чисел $1 + 2 + 3 + \ldots + 2006$?

Контрольные вопросы и задания

1. Верно ли утверждение:

1) если произведение двух натуральных чисел делится на некоторое число, то хотя бы одно из них делится на это число;

2) если ни одно из двух натуральных чисел не делится на некоторое число, то и их произведение не делится на это число;

3) если ни уменьшаемое, ни вычитаемое не делятся на некоторое число, то и их разность не делится на это число;

4) если одно из двух слагаемых делится на некоторое число, а другое — нет, то и вся сумма не делится на это число;

5) если вычитаемое делится на некоторое число, а уменьшаемое — нет, то разность не делится на это число;

6) если натуральное число m делится на число n, то m можно представить в виде разности натуральных чисел, каждое из которых делится на n? 46

2. Используя признаки делимости суммы и разности, определите, делится ли:

1) $27 + 15$ на 3;

2) $555 - 200$ на 5;

3) 71 421 283 546 на 7;

4) 193 876 149 на 19. Тест

3. Найдите наибольший общий делитель чисел 91 и 117.

8 Признаки делимости натуральных чисел

Свойства делимости произведения, суммы и разности часто облегчают поиск делителей. Например, представим многозначное натуральное число 389 565 в виде суммы $38\,956 \cdot 10 + 5$. Первое слагаемое является произведением, имеющим множитель 10. По свойству делимости произведения это слагаемое делится на 2, 5 и 10 — делители числа 10. Второе слагаемое — число 5, которое на 5 делится, а на 2 и 10 — нет. Значит, число 389 565 делится на 5, а ни на 2, ни на 10 не делится. Рассмотренный пример позволяет получить следующие выводы.

Признаки делимости на 2, на 5 и на 10

На 2 делятся те и только те числа, у которых цифра разряда единиц чётная, т. е. однозначное число, записанное этой цифрой, делится на 2. Таких цифр пять — это 0, 2, 4, 6 и 8.

На 5 делятся те и только те числа, у которых в разряде единиц стоят цифры 0 или 5.

На 10 делятся те и только те числа, у которых в разряде единиц стоит цифра 0.

214. Даны числа: 45 456, 454 545, 450, 40 005, 50 000 008, 5 004 050, 556. Укажите числа, которые делятся:
1) на 2; 2) на 5; 3) на 10. 47

215. Сколько существует двузначных чисел, которые:
1) делятся на 2;
2) делятся на 5;
3)• не делятся ни на 2, ни на 5? 48

216. Каким словом следует заменить многоточие: 49
1) сумма чётных чисел является ... числом;
2) сумма двух нечётных чисел является ... числом;
3) сумма чётного и нечётного числа является ... числом;
4) разность двух чётных чисел является ... числом;

5) разность двух нечётных чисел является ... числом;

6) разность чётного и нечётного числа является ... числом;

7) произведение чётного и нечётного числа является ... числом;

8) произведение нечётных чисел является ... числом?

217. Каким числом (чётным или нечётным) является:

1) квадрат чётного числа; 3) куб чётного числа;

2) квадрат нечётного числа; 4) куб нечётного числа?

218. Запишите числа, большие 455, но меньшие 466, если известно, что они:

1) чётные; 2) кратны 5; 3) кратны 10.

219. Можно ли, используя только цифры 2 и 5, записать:

1) чётное число; 3) число, кратное 5;

2) нечётное число; 4) чётное число, кратное 5?

220. Докажите, не выполняя вычислений, что: **50**

1) 23 045 + 7980 делится на 5;

2) 167 820 − 92 700 делится на 10;

3) 57 992 · 4833 делится на 2;

4) 5737 · 4711 не делится на 2.

221•. Перемножили все натуральные числа от 1 до 100. Сколькими нулями подряд заканчивается полученное произведение?

222•. Разность двух натуральных чисел умножили на их произведение. Могло ли при этом получиться число 3 751 467?

223•. 98 спичек разложили по 19 коробка́м и на каждом коробке́ написали количество спичек в нём. Может ли произведение этих чисел быть нечётным числом?

224•. Чётно или нечётно значение выражения:

1) 1 + 2 + 3 + ... + 2007; 2) 1 + 2 + 3 + ... + 3002?

225•. На координатном луче отметили три точки A, B и C с натуральными координатами. Докажите, что хотя бы одна из середин отрезков с концами в этих точках имеет натуральную координату.

226. Какие остатки получатся при делении на 5 чисел: 578, 12 034, 5687, 99 999, 56 001, 232 323, 98 765 432?

227°. Докажите, что разность большего и меньшего из двух чисел, дающих при делении на 5 одинаковые остатки, делится на 5.

Таким же приёмом, что и при выводе признаков делимости на 2, 5 и 10, можно получить признак делимости на 4. Представим, например, число 579 368 в виде суммы его сотен и единиц:

$$579\,368 = 5793 \cdot 100 + 68.$$

Поскольку множитель 100 первого слагаемого делится на 4, то и всё первое слагаемое делится на 4. Чтобы сумма делилась на 4, её второе слагаемое должно делиться на 4. В нашем случае число 68 кратно 4, значит, число 579 368 делится на 4.

Если бы последние две цифры составляли число, которое на 4 не делится, как, например, в числе 579 317, то мы сделали бы вывод о том, что число 579 317 не делится на 4.

Сформулируем признак делимости многозначного числа на 4.

Признак делимости на 4

На 4 делятся те и только те числа, последние две цифры которых образуют число, делящееся на 4.

228. Даны числа: 888, 6100, 4502, 70 662, 21 824, 3526, 607 090. Назовите те из них, которые делятся на 4.

229. Вставьте вместо звёздочек цифры так, чтобы получились числа, кратные 4:

45*6, 67239*, 5203**, 904702**. 51, 52

230. 1) Сформулируйте и обоснуйте признак делимости на 25.
2) В числах 7035*, 17209*5, 1111*0, 73245** замените звёздочки цифрами так, чтобы получились числа, кратные 25.

231. Среди чисел 13 404, 56 250, 856 000, 12 345, 135 790, 40 057 100, 3425 укажите те, которые:
1) кратны 4; 2) кратны 25; 3) кратны и 4, и 25. 53

Выведем теперь признаки делимости чисел на 3 и на 9. Представим многозначное число, например 1 427 856, в виде суммы разрядных слагаемых.

$$1\,427\,856 = 1 \cdot 1\,000\,000 + 4 \cdot 100\,000 + 2 \cdot 10\,000 +$$
$$+ 7 \cdot 1000 + 8 \cdot 100 + 5 \cdot 10 + 6.$$

Любое число, записанное единицей с последующими нулями, можно представить в виде суммы 1 и числа, кратного 9:

$$10 = 9 + 1,\ 100 = 99 + 1,\ \ldots,$$
$$1\,000\,000 = 999\,999 + 1 \text{ и т. д.}$$

Подставим эти выражения в сумму разрядных слагаемых, раскроем скобки и сгруппируем слагаемые.

$$1\,427\,856 = 1 \cdot (999\,999 + 1) + 4 \cdot (99\,999 + 1) +$$
$$+ 2 \cdot (9999 + 1) + 7 \cdot (999 + 1) + 8 \cdot (99 + 1) + 5 \cdot (9 + 1) + 6 =$$
$$= (1 \cdot 999\,999 + 4 \cdot 99\,999 + 2 \cdot 9999 + 7 \cdot 999 + 8 \cdot 99 + 5 \cdot 9) +$$
$$+ (1 + 4 + 2 + 7 + 8 + 5 + 6).$$

Все числа в первой скобке кратны девяти, поэтому и их сумма кратна девяти, а следовательно, она кратна и трём.

Если сумма чисел второй скобки окажется кратной 9, то и само число 1 427 856 будет делиться на 9, в противном случае число 1 427 856 на 9 делиться не будет. Во второй скобке стоит сумма чисел, выраженных цифрами числа 1 427 856, поэтому её называют суммой цифр числа 1 427 856.

$$1 + 4 + 2 + 7 + 8 + 5 + 6 = 33.$$

Сумма цифр числа 1 427 856 не делится на 9, значит, и само число на 9 не делится.

С другой стороны, сумма цифр числа 1 427 856 кратна 3, значит, и само число кратно 3.

Проведённые на примере числа 1 427 856 рассуждения можно отнести к любому многозначному числу. Это позволяет сформулировать признаки делимости на 3 и на 9.

Признаки делимости на 3 и на 9

На 3 делятся те и только те числа, сумма цифр которых кратна 3.

На 9 делятся те и только те числа, сумма цифр которых кратна 9.

232. Среди чисел 18 181 836, 26 271, 5 000 415, 111 111, 10 301 220, 65 730 укажите те, которые кратны:

1) 3; 3) и 3, и 5;

2) 9; 4) и 4, и 9. 54

233. Даны уравнения: а) $x : 3425 = 132$; б) $x \cdot 723 = 21\,690$; в) $x + 3690 = 18\,279$; г) $7423 + x = 9006$.

Не выполняя вычислений, определите, корни каких уравнений делятся:

1) на 2; 2) на 3; 3) на 5; 4) на 9; 5) на 10.

234. Число a делится на 9. Назовите выражения, значения которых делятся на 9:

1) $a + 180$; 3) $a + 123$; 5) $5a + 63$.

2) $999 - a$; 4) $27 \cdot 63a$;

235. 1) Запишите с помощью цифр 0, 4, 5, 3 два четырёхзначных числа, которые: а) делятся на 2; б) делятся на 5; в) делятся на 4; г) делятся на 10.

2) Можно ли записать этими же цифрами число, которое делится: а) на 3; б) на 9?

236. В книжный магазин привезли 57 упаковок книг, по 15 штук в каждой. Можно ли эти книги распределить между девятью продавцами поровну?

237. К празднику организация приобрела 5 упаковок гвоздик, по 115 штук в каждой упаковке. Можно ли сделать 25 одинаковых букетов, используя все цветы?

238. В семье пятеро детей. На праздник детям принесли 5 одинаковых наборов конфет. Дети все конфеты высыпали в общую вазу. Может ли в вазе оказаться:

1) 93 конфеты; 2) 95 конфет; 3) 90 конфет?

239. Серёжа купил в магазине 9 одинаковых книг в подарок своим друзьям. Продавец назвал стоимость покупки 635 р. Не ошибся ли продавец?

240○. Укажите трёхзначное число:

1) первая цифра которого 2 и оно делится на 9 и на 5, но не делится на 2;

2) первая цифра которого 6 и оно делится на 2, на 5 и на 9.

241. Укажите какое-нибудь четырёхзначное число:

1) первая цифра которого 7 и оно делится на 3 и на 5, но не делится ни на 2, ни на 9;

2) первая цифра которого 5 и оно делится на 3 и на 2, но не делится ни на 5, ни на 9.

242○. Поставьте в число *578* вместо звёздочек цифры так, чтобы получившееся пятизначное число делилось на 5 и на 9.

243●. В числе 428 428 428 428 428 вычеркните несколько цифр так, чтобы получилось как можно большее число, кратное 9.

244○. Какой остаток получится при делении числа 700...0:

1) на 3; 2) на 9?

245●. Докажите, что число и сумма его цифр дают одинаковые остатки при делении: 1) на 3; 2) на 9.

246. Среди выражений $5658 + 1032$, $1325 \cdot 91$, $6975 + 3125$, $3585 \cdot 5372$, $1560 \cdot 324$ укажите то, значение которого:

1) является чётным числом;
2) кратно 25;
3) делится на 9;
4) делится на 4 и на 9;
5) делится на 10 и на 9;
6) делится на 5 и на 3.

247. Замените звёздочку цифрой так, чтобы получилось верное утверждение:

1) $567*$ делится на 2;
2) $567*$ делится на 3;
3) $567*$ делится на 5;
4) $567*$ делится на 9;
5) $567*$ делится на 4;
6) $567*$ делится на 25. 55

248. Найдите два значения x, при которых значение выражения:

1) $x - 25$ делится на 25;
2) $312 + x$ делится на 4;
3) $\overline{213x}$ делится на 9;
4) $\overline{5x}$ делится на 7;
5) $5618 + x$ делится на 10;
6) $543 - x$ делится на 2, но не делится на 5;
7) $634 + x$ при делении на 5 даёт в остатке 3;
8) $\overline{20x}$ не делится на 6.

249. Запишите две пары натуральных чисел x и y, при которых значение выражения $5x + 6y$:

1) делится на 2;
2) делится на 3;
3) делится на 5;
4) делится на 10;
5) делится на 9;
6) делится на 25. 56

250•. Известно, что a — нечётное число. Какие из следующих чисел чётные, а какие нечётные: $a + 1$, $a - 1$, $2a$, $2a + 1$, $2a - 1$, $2a + 2$, $2a + 3$, $3a$, $3a + 1$, $3a + 2$?

251•. 1) Записано три последовательных натуральных числа: n, $n + 1$, $n + 2$. На какое число обязательно делится их сумма?
2) Записано три последовательных чётных числа: $2n$, $2n + 2$, $2n + 4$. На какое число обязательно делится их сумма?
3)° Запишите три последовательных нечётных числа. На какое число обязательно делится их сумма?

252. Используя признаки делимости, сократите дробь:

1) $\frac{675}{340}$;
2) $\frac{123}{99}$;
3) $\frac{340}{560}$;
4) $\frac{124}{268}$;
5) $\frac{351}{252}$;
6) $\frac{525}{350}$.

253. Вычислите:

1) $\frac{28}{135} \cdot \frac{225}{616}$; 2) $\frac{52}{105} : \frac{91}{700}$; 3) $\frac{125}{576} \cdot \frac{432}{625}$; 4) $\frac{81}{320} : \frac{729}{80}$.

254. 1) Известно, что длины сторон прямоугольника — натуральные числа в сантиметрах. Может ли периметр прямоугольника быть равен: а) 45 см; б) 96 см; в) 112 см; г) 913 см?
2) Известно, что длина стороны квадрата — натуральное число сантиметров. Может ли периметр квадрата быть равен: а) 518 см; б) 748 см; в) 3456 см; г) 1314 см?

Задачи на смекалку

255. Запишите наименьшее натуральное число, кратное 25 и имеющее при этом сумму цифр, равную 25. 57

256. Если m и k натуральные числа и $m + k = 2m + 4$, то какие из следующих утверждений верны:
1) m — чётное; 3) $k - m$ — чётное;
2) k — чётное; 4) если m чётное, то и k чётное?

257. Из некоторого натурального числа вычитают сумму его цифр. С получившимся числом проделывают то же самое и так далее. Докажите, что в конце концов получится нуль.

258. На мониторе компьютера высветилось число 1. Каждую секунду число на мониторе увеличивается на сумму его цифр. Может ли через некоторое время на мониторе появиться число 123 456?

259. Перемножили все натуральные числа от 1 до 100, нашли и выписали сумму цифр полученного произведения, затем нашли сумму цифр этой суммы цифр и т. д. Наконец, получили однозначное число. Какое это число?

260. В результате некоторой перестановки цифр число уменьшилось в три раза. Докажите, что исходное число делилось на 27.

Контрольные вопросы и задания

1. Почему верны признаки «На 2 делятся те и только те числа, у которых последняя цифра делится на 2» и «На 5 делятся те и только те числа, у которых последняя цифра делится на 5» и не верны аналогичные признаки для других однозначных чисел?

2. Среди чисел 23 075, 56 700, 123 123, 62 835, 30 303 340, 695 025, 12 318 укажите те, которые делятся:

1) на 2;	4) на 5;	7) на 25. Тест
2) на 3;	5) на 9;	
3) на 4;	6) на 10;	

9 Простые и составные числа

Все натуральные числа имеют делители. Вы научились их находить с помощью свойств и признаков делимости.

261. 1) Сколько делителей имеет число:
1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10?
2) Разбейте эти числа на группы по числу делителей у каждого из них.

Меньше всего делителей у числа 1. Единственным делителем является само это число.

Любое другое натуральное число имеет, по крайней мере, два делителя — это само число и 1.

Некоторые числа имеют ровно два делителя. Так, например, число 17 делится только на 1 и на 17.

Натуральные числа, имеющие только два делителя, называют *простыми*.

Натуральные числа, имеющие более двух делителей, называют *составными*.

Таким образом, все натуральные числа можно разбить на три группы. 58

Единица	Простые числа	Составные числа
Один делитель	Два делителя	Три или больше делителей
1	2, 3, 5, 7, 11, 13, ...	4, 6, 8, 9, 10, 12, ...

262. Верно ли утверждение:

1) число 1 не является ни простым, ни составным числом;
2) если у числа есть два делителя, то оно простое;
3) если у числа есть только два делителя, то оно простое;
4) число 11 — простое число;
5) если у числа больше двух делителей, то оно составное;
6) число 6 имеет четыре делителя 1, 2, 3 и 6, значит, оно составное;
7) число 161 — составное число, потому что $161 = 23 \cdot 7$;
8) произведение двух простых чисел является простым числом;
9) сумма двух любых простых чисел является простым числом;
10) все чётные числа являются составными? 59

263. Укажите среди чисел 3, 6, 11, 13, 4, 9, 5, 15, 30, 31:

1) чётные однозначные числа;
2) двузначные простые числа;
3) однозначные составные числа;
4) делители числа 15;
5) числа, кратные числу 15. 60

264. Докажите, что составным числом является:

1) 111 111 111; 2) 111...1 (2007 единиц в записи числа).

265. Назовите:

1) все двузначные числа, которые имеют только 2 делителя;
2) все двузначные числа, меньшие 30, у которых ровно 3 делителя.

Простые числа помогают в поиске делителей. Так, например, представив число 70 524 в виде суммы 70 000 + 490 + 34 и заметив, что оно не делится на 7, уже не нужно проверять его делимость ни на 14, ни на 21, ни на 28 и т. д. Поэтому стараются сначала найти простые делители числа. Поиск обычно начинают с меньших простых чисел. Покажем, как проводится поиск простых делителей числа 70 524. 62

70 524	2
35 262	2
17 631	3
5877	3
1959	3
653	653

Числа, расположенные друг под другом слева от вертикальной черты, получаются при последовательном делении на простые числа, записанные от черты справа.

Первые пять простых делителей легко найти по признакам делимости на 2 и на 3. Число 653 не делится ни на 2, ни на 3, ни на 5. Перед тем как приступить к поиску других простых делителей, обратимся к *таблице простых чисел первой тысячи*, помещённой на форзаце учебника.

Число 653 в этой таблице есть, значит, оно простое.

Теперь представим число 70 524 в виде произведения простых множителей — *разложим на простые множители*:

$$70\,524 = 2 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 653.$$

Заменим в этом разложении произведения одинаковых простых множителей их степенями и получим окончательно:

$$70\,524 = 2^2 \cdot 3^3 \cdot 653.$$

Как и число 70 524, на простые множители можно разложить любое составное число. При этом каждое число имеет своё, единственное разложение на простые множители, если не учитывать, в каком порядке они записаны.

Утверждение о единственности разложения на простые множители называют *основной теоремой арифметики*.

266. 1) С помощью таблицы простых чисел, расположенной на форзаце учебника, определите, какие из чисел 607, 504, 549, 349, 383, 547, 991, 569 являются простыми, а какие составными.

2) Какую цифру можно приписать справа к числу 43, чтобы полученное трёхзначное число оказалось простым?

3) Каким простым числом может быть a, если:

а) $a < 10$; в) $100 < a \leqslant 113$;

б) $11 \leqslant a < 20$; г) $223 \leqslant a \leqslant 229$?

267. Докажите, что числа 67 925, 67 064, 46 521 являются составными.

268. 1) Укажите, в каком равенстве записано разложение числа на простые множители:

а) $1197 = 3^2 \cdot 7 \cdot 19$; в) $19\,125 = 5^3 \cdot 9 \cdot 17$;

б) $560 = 2^3 \cdot 7 \cdot 10$; г) $9744 = 2^4 \cdot 21 \cdot 29$.

2) Завершите разложение на простые множители в остальных случаях.

269. 1) Разложите на простые множители число:

а) 75; 36; 18; 28; 63; 8; 16; 48;

б) 20; 45; 50; 12; 98; 40; 80; 112.

2) Выполните действия, используя результаты предыдущего задания:

а) $\frac{36}{28} \cdot \frac{8}{63}$; в) $\frac{12}{20} \cdot \frac{45}{50}$;

б) $\frac{16}{18} : \frac{48}{75}$; г) $\frac{40}{98} : \frac{80}{112}$.

270. Является ли натуральным числом значение выражения:

1) $(3 \cdot 5 \cdot 7) : (3 \cdot 7)$;

2) $(5 \cdot 11 \cdot 13 \cdot 23) : (11 \cdot 23 \cdot 7)$;

3) $(7 \cdot 19^3 \cdot 29^5 \cdot 31) : (19^2 \cdot 29^4 \cdot 31)$;

4) $(37^2 \cdot 41^3 \cdot 43) : (37 \cdot 41^2 \cdot 43^3)$?

271°. 1) Выпишите все делители каждого из чисел: $k = 2 \cdot 3 \cdot 5$, $m = 2 \cdot 3^2 \cdot 5$, $n = 2^3 \cdot 5$.

2) Найдите НОД (k; m), НОД (m; n), НОД (k; n).

3) Найдите НОК (k; m), НОК (m; n), НОК (k; n), НОК (k; m; n).

272●. Числа p и q простые. Запишите:

1) все делители числа: а) p^2; б) q^3; в) p^2q^3;

2) наибольший общий делитель чисел:

а) p и p^2; б) q^2 и q^3; в) p^2q и pq^3;

3) наименьшее общее кратное чисел:

а) p и p^2; б) q^2 и q^3; в) p^2q и pq^3.

273. Разложите на простые множители число:

1) 2370;	4) 10 860;
2) 3609;	5) 27 700;
3) 6625;	6) 32 280.

274●. Докажите, что наибольший общий делитель двух чисел кратен любому их общему делителю.

Разложение чисел на простые множители помогает найти их наибольший общий делитель и наименьшее общее кратное. Возьмём, например, числа 540 и 2520 и разложим их на простые множители. 65

$$\begin{array}{r|l} 540 & 2 \\ 270 & 2 \\ 135 & 3 \\ 45 & 3 \\ 15 & 3 \\ 5 & 5 \end{array} \qquad \begin{array}{r|l} 2520 & 2 \\ 1260 & 2 \\ 630 & 2 \\ 315 & 3 \\ 105 & 3 \\ 35 & 5 \\ 7 & 7 \end{array}$$

$540 = 2^2 \cdot 3^3 \cdot 5$ $\qquad$ $2520 = 2^3 \cdot 3^2 \cdot 5 \cdot 7$

Наибольший общий делитель должен быть кратен любому общему делителю. Значит, разложение наибольшего общего делителя должно содержать все простые множители, которые одновременно входят в разложения обоих данных чисел. Это числа 2, 3 и 5.

Число 2 входит в первое число в степени 2, а во второе — в степени 3. Значит, число 540 делится на 2^2, но не делится на 2^3, а число 2520 делится и на 2^2, и на 2^3. В наибольший общий делитель число 2 должно войти с показателем степени, равным 2, меньшим из встретившихся в разложениях данных чисел.

Аналогично, число 3 должно войти в наибольший общий делитель с показателем степени, равным 2.

Число 5 в оба разложения входит в первой степени. Так же оно войдёт и в наибольший общий делитель.

Итак, НОД (540; 2520) $= 2^2 \cdot 3^2 \cdot 5$.

Сформулируем правило, по которому мы нашли НОД.

Правило нахождения наибольшего общего делителя

Чтобы найти наибольший общий делитель, нужно:

① разложить данные числа на простые множители;

② составить произведение из всех простых чисел, которые одновременно входят в каждое из полученных разложений;

③ каждое из выписанных простых чисел взять с наименьшим из тех показателей степени, с которыми оно входит в разложения данных чисел.

275. Разложите числа на простые множители и найдите их наибольший общий делитель:

1) 690 и 234;
2) 590 и 700;
3) 3096 и 5076;
4) 1425 и 3105;
5) 3960 и 10 200;
6) 30 500 и 17 750.

276. Запишите в виде несократимой дроби:

1) $\frac{31^5 \cdot 73^8}{73^9 \cdot 31^4}$;
2) $\frac{92 \cdot 13^3 \cdot 17}{17^2 \cdot 13 \cdot 23}$;
3) $\frac{390}{575}$;
4) $\frac{1305}{1425}$;
5) $\frac{744}{5904}$;
6) $\frac{23\ 760}{55\ 800}$;
7) $\frac{111\ 111}{1001}$;
8) $\frac{10\ 101\ 010}{1010}$;
9) $\frac{45\ 469}{41\ 033}$.

В разложение наименьшего общего кратного чисел 540 и 2520 должны войти все простые числа, которые встретились в разложении *хотя бы одного из них.* Это числа 2, 3, 5 и 7. При этом показатели степеней этих чисел следует взять наибольшими из тех, с которыми они входили в разложения. Так, например, число 2 должно войти с показателем степени, не меньшим трёх. Если показатель степени взять меньше, то полученное число не будет делиться на 2^3, а значит, и на 2520. Поскольку мы ищем наименьшее кратное, то в его разложение войдет 2^3.

Аналогично включаем в искомое разложение множители 3^3, 5 и 7.

Итак, НОК (540; 2520) = $2^3 \cdot 3^3 \cdot 5 \cdot 7$.

277. 1) Что надо изменить в формулировке правила отыскания наибольшего общего делителя чисел, чтобы получить правило отыскания их наименьшего общего кратного?

2) Сформулируйте правило отыскания наименьшего общего кратного чисел.

3) Найдите наименьшее общее кратное чисел:

а) $2^5 \cdot 3^4$ и $2^4 \cdot 3^5$; в) 8370, 396 и 984;

б) 440 и 4875; г) 10 080, 13 872 и 784. 66

При приведении дробей к общему знаменателю удобно оставлять наименьшее общее кратное знаменателей разложенным на простые множители. Это облегчает поиск дополнительных множителей к дробям. Покажем это на примере вычитания дробей.

$$\frac{13}{540} - \frac{29}{2520} = \frac{13}{2^2 \cdot 3^3 \cdot 5} - \frac{29}{2^3 \cdot 3^2 \cdot 5 \cdot 7};$$

$2^3 \cdot 3^3 \cdot 5 \cdot 7$ — общий знаменатель.

Сравнивая знаменатели дробей с общим знаменателем, мы видим, что знаменателю первой дроби «не хватает» множителей 2 и 7, а знаменателю второй дроби «не хватает» множителя 3. Чтобы привести к общему знаменателю, знаменатель и числитель первой дроби надо умножить на 14, а числитель и знаменатель второй дроби — на 3.

Запишем дополнительные множители и завершим вычитание дробей.

$$\frac{13^{\backslash 14}}{2^2 \cdot 3^3 \cdot 5} - \frac{29^{\backslash 3}}{2^3 \cdot 3^2 \cdot 5 \cdot 7} = \frac{13 \cdot 14 - 29 \cdot 3}{2^3 \cdot 3^3 \cdot 5 \cdot 7} =$$

$$= \frac{182 - 87}{2^3 \cdot 3^3 \cdot 5 \cdot 7} = \frac{95}{2^3 \cdot 3^3 \cdot 5 \cdot 7}.$$

Полученную дробь можно сократить на 5.

$$\frac{95}{2^3 \cdot 3^3 \cdot 5 \cdot 7} = \frac{19}{2^3 \cdot 3^3 \cdot 7} = \frac{19}{1512}.$$

Числитель и знаменатель полученной дроби не имеют общих простых делителей, значит, дробь $\frac{19}{1512}$ несократима.

278. Приведите дроби $\frac{17}{24}$, $\frac{13}{136}$, $\frac{17}{208}$ к общему знаменателю.

279°. Выполните действия:

1) $\frac{2}{29^9 \cdot 37^5} + \frac{3}{29^8 \cdot 37^6}$;

2) $\frac{1}{13^5 \cdot 23^3} - \frac{1}{13^4 \cdot 23^4 \cdot 2}$;

3) $\frac{7}{648} + \frac{11}{972}$;

4) $\frac{13}{6000} - \frac{17}{14\,400}$;

5) $\frac{19}{3960} + \frac{23}{132}$;

6) $\frac{1}{14\,625} - \frac{1}{15\,525}$.

280°. Вычислите:

1) $\frac{1}{2 \cdot 3^5} + \frac{1}{5 \cdot 3^4} - \frac{1}{3^6 \cdot 5^2}$;

2) $\frac{1}{7 \cdot 3^2 \cdot 5} - \frac{4}{7^2 \cdot 3^3} + \frac{1}{3^4 \cdot 5^2}$;

3) $\frac{7}{3250} + \frac{1}{1300} - \frac{3}{5000}$;

4) $\frac{5}{306} - \frac{1}{2808} + \frac{1}{2376}$.

281. Найдите произведение и частное дробей, разложив, если нужно, их числители и знаменатели на простые множители:

1) $\frac{500}{3969} \cdot \frac{1701}{400}$;

2) $\frac{891}{1750} : \frac{9477}{2500}$;

3) $\frac{153}{1960} : \frac{867}{17\,150}$;

4) $\frac{1176}{350} \cdot \frac{1925}{756}$.

282°. Среди пяти данных дробей есть пары равных. Какая из дробей не имеет пары:

1) $\frac{996}{997}$;
2) $\frac{19\,960\,001\,996}{19\,970\,001\,997}$;
3) $\frac{10\,996}{10\,997}$;
4) $\frac{1996}{1997}$;
5) $\frac{996\,996}{997\,997}$?

283. Конструкторское бюро получило 74 справочника и 111 наборов карандашей, которые поровну разделили между работниками. Сколько работников в конструкторском бюро, если известно, что их больше 35?

284. На соревнованиях по бегу через каждые 300 м от старта стоит наблюдатель, а через каждые 800 м от старта можно попить воды. На каком минимальном расстоянии от старта можно попить воды рядом с наблюдателем?

Задачи на смекалку

285. Представьте в виде суммы простых слагаемых число: 1) 10; 2) 36; 3) 54; 4) 49 так, чтобы количество слагаемых было наименьшим. Сформулируйте правило, с помощью которого вы составляли сумму. 61

286. В семье шестеро детей, причём возраст каждого ребёнка в годах выражается простым числом. Пятеро из них старше самого младшего соответственно на 2, 6, 8, 12 и 14 лет. Сколько лет самому младшему ребёнку? 63

287. Перемножив четыре простых последовательных числа, получили число, цифра единиц которого нуль. Какие числа перемножили и какой результат получили?

288. Запишите последовательно в порядке возрастания по одному разу первые десять простых чисел. В полученном многозначном числе вычеркните половину цифр так, чтобы получилось: 1) наименьшее число; 2) наибольшее число. Запишите получившиеся числа.

Контрольные вопросы и задания

1. Какими числами (простыми или составными) являются следующие числа: 4905, 1112, 263, 9990?
2. Найдите произведение всех простых однозначных чисел.
3. Разделите дроби $\frac{1863}{10\ 200} : \frac{243}{17\ 500}$. 64

10 Взаимно простые числа

После сокращения дроби $\frac{18}{24} = \frac{3}{4}$ в её числителе и знаменателе оказываются числа, не имеющие никаких общих делителей, кроме 1. Поскольку общий делитель единственный, то он же является и наибольшим общим делителем.

Два числа, наибольший общий делитель которых равен 1, называют *взаимно простыми*.

289. 1) Укажите пары взаимно простых чисел среди чисел: 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12, 13.
2) Являются ли два разных простых числа взаимно простыми числами? 67, 68

290. Имеют ли общий делитель, отличный от 1, числа:
1) 23 и 27;
2) 5944 и 7112;
3) 109 и 107;
4) 2345 и 310;
5) 20, 30 и 11;
6) 369, 666 и 123?

291. 1) Найдите НОД и НОК чисел m и n:
а) $m = 7$ и $n = 11$;
б) $m = 12$ и $n = 30$;
в) $m = 63$ и $n = 3$;
г) $m = 2^3 \cdot 3^2 \cdot 5$ и $n = 2^4 \cdot 3^3$.

2) Сравните произведение mn с произведением их НОД и НОК. Какую гипотезу можно высказать?

292. Запишите правильные дроби со знаменателем 9, у которых числитель и знаменатель — взаимно простые числа.

293●. Можно ли составить пропорцию из четырёх различных простых чисел?

294●. Наибольший общий делитель трёх чисел равен 1. Можно ли утверждать, что любые два из этих чисел взаимно просты?

295. 1) Может ли площадь квадрата в квадратных сантиметрах быть равной простому числу, если длина его стороны выражается натуральным числом сантиметров?

2) Может ли периметр прямоугольника быть равным простому числу сантиметров, если его стороны выражаются натуральными числами сантиметров?

296. Запишите все делители числа 100. Назовите среди них пары взаимно простых чисел.

В предыдущем пункте вы познакомились с правилами нахождения наибольшего общего делителя и наименьшего общего кратного.

По этим правилам каждый множитель разложения двух чисел на простые множители входит либо в НОД, либо в НОК. Например, для чисел $540 = 2^2 \cdot 3^3 \cdot 5$ и $2520 = 2^3 \cdot 3^2 \cdot 5 \cdot 7$ получаем следующее.

$$540 \cdot 2520 = 2^2 \cdot 3^3 \cdot 5 \cdot 2^3 \cdot 3^2 \cdot 5 \cdot 7$$

$$\text{НОД } (540;\ 2520) \cdot \text{НОК } (540;\ 520) = 2^2 \cdot 3^2 \cdot 5 \cdot 2^3 \cdot 3^3 \cdot 5 \cdot 7$$

В произведение НОД и НОК вошли все множители разложений данных чисел, значит,

$$540 \cdot 2520 = \text{НОД } (540;\ 2520) \cdot \text{НОК } (540;\ 2520).$$

Произведение двух любых натуральных чисел равно произведению их наибольшего общего делителя и наименьшего общего кратного:

$$mn = \text{НОД}\,(m;\, n) \cdot \text{НОК}\,(m;\, n).$$

297. Найдите произведение чисел x и y, зная, что:

1) НОД $(x;\, y) = 5^3 \cdot 3^2$, НОК $(x;\, y) = 3^3 \cdot 5^3$;
2) НОД $(x;\, y) = 2^2 \cdot 5^2$, НОК $(x;\, y) = 2^2 \cdot 5^3 \cdot 7$;
3) НОД $(x;\, y) = 110$, НОК $(x;\, y) = 1100$;
4) НОД $(x;\, y) = 14$, НОК $(x;\, y) = 98$.

298. Найдите:

1) НОК $(a;\, b)$, если НОД $(a;\, b) = 10$, $ab = 300$;
2) НОД $(a;\, b)$, если НОК $(a;\, b) = 420$, $ab = 5040$;
3) ab, если НОД $(a;\, b) = 1$, НОК $(a;\, b) = 170$;
4) ab, если НОД $(a;\, b) = 4$, НОК $(a;\, b) = 48$;
5) ab, если НОД $(a;\, b) = 2 \cdot 3 \cdot 5$, НОК $(a;\, b) = 2 \cdot 3^2 \cdot 5$;
6) ab, если НОД $(a;\, b) = 77$, НОК $(a;\, b) = 231$.

Наибольший общий делитель двух взаимно простых чисел a и b равен 1, поэтому

$$ab = \text{НОД}\,(a;\, b) \cdot \text{НОК}\,(a;\, b) = 1 \cdot \text{НОК}\,(a;\, b) = \text{НОК}\,(a;\, b).$$

Наименьшее общее кратное двух взаимно простых чисел равно их произведению.

Поскольку наименьшее общее кратное чисел является делителем любого их общего кратного, можно сформулировать следующее важное свойство делимости на взаимно простые числа.

Если число делится на каждое из взаимно простых чисел, то оно делится и на их произведение.

299. Подберите число, которое делится на каждое из заданных чисел, но не делится на их произведение:

1) 2 и 6; 3) 45 и 60; 5) 150 и 180;
2) 12 и 18; 4) 42 и 63; 6) 60 и 108.

300•. Найдите наименьшее общее кратное чисел:

1) 43 и 11; 3) 127 и 10; 5) 53 и 4;
2) 105 и 70; 4) 36 и 45; 6) 13 и 7.

301. Сравните числа:

1) $\frac{4}{11}$ и $\frac{3}{7}$; 3) $\frac{4}{21}$ и $\frac{7}{28}$; 5) $1\frac{11}{30}$ и $1\frac{23}{50}$;
2) $\frac{7}{13}$ и $\frac{2}{3}$; 4) $\frac{13}{24}$ и $\frac{17}{36}$; 6) $1\frac{14}{59}$ и $1\frac{2}{5}$.

302. Вычислите:

1) $\frac{1}{7} + \frac{1}{5} + \frac{1}{3}$; 3) $\left(\frac{2}{3} + \frac{9}{11}\right) \cdot 22$;
2) $\frac{7}{10} + \frac{2}{15} + \frac{11}{30}$; 4) $\frac{3}{5} : \left(\frac{9}{10} - \frac{3}{5} \cdot \frac{8}{9}\right)$.

С помощью свойства делимости на взаимно простые числа из признаков делимости на 2 и на 3 можно получить признак делимости на 6.

Признак делимости на 6

На 6 делятся те и только те числа, которые заканчиваются чётной цифрой и имеют сумму цифр, кратную 3.

303. Сформулируйте признак делимости:

1) на 15; 2) на 12; 3) на 45; 4) на 100. 69

304. Среди чисел 2 010 045, 217 176, 30 528, 48 234, 571 230 укажите те, которые делятся:

1) на 6; 2) на 18; 3) на 15; 4) на 12.

305•. Верно ли, что:

1) два чётных числа не могут быть взаимно простыми;
2) любое чётное число взаимно просто с любым нечётным;

3) два различных простых числа взаимно просты;

4) любое натуральное число взаимно просто с единицей;

5) любые два последовательных натуральных числа взаимно просты;

6) два последовательных нечётных числа взаимно просты?

306. Известно, что число делится на 3, 5 и 7. На какие ещё числа должно делиться это число?

307●. Выберите верные утверждения.

1) Если число делится на 10, то оно делится на 2 и на 5.

2) Если число делится на 3 и на 4, то оно делится на 12.

3) Если число делится на 6 и на 4, то оно делится на 24.

4) Если число делится на 2, то оно делится на 4.

5) Если число делится на 4, то оно делится на 2. 70

308. Найдите все числа b, которые делятся на 45, такие, что $423 \leqslant b \leqslant 500$.

309●. 1) Найдите какие-нибудь натуральные числа x и y, чтобы было верным равенство:

а) $y = \dfrac{1 + 7x}{2}$; б) $x = \dfrac{1 + 5y}{9}$; в) $11x - 3y = 1$; г) $5x - 13y = 1$.

2) Существуют ли такие натуральные числа x и y, для которых верно равенство:

а) $9x - 6y = 1$; б) $5x - 25y = 1$?

310●. На математической олимпиаде было предложено для решения 10 задач. За каждую решённую задачу засчитывали 5 очков, а за каждую нерешённую задачу списывали 3 очка. Сколько задач правильно решил ученик, набравший в итоге 26 очков?

311. Докажите, что следующие пары чисел взаимно просты:
1) 883 и 383; 2) 864 и 875.

312. Даны три попарно взаимно простых числа 44, 117 и 175.

1) Разложите эти числа на простые множители и запишите их наименьшее общее кратное.

2) Сравните наименьшее общее кратное с произведением чисел.

3) Сформулируйте гипотезу о наименьшем общем кратном нескольких попарно взаимно простых чисел и докажите её.

313. Вычислите:

1) $\frac{10}{18} + 24\frac{36}{81}$;

2) $7\frac{33}{87} - 6\frac{22}{58}$;

3) $5\frac{4}{9} \cdot 2\frac{11}{98}$;

4) $8\frac{12}{31} \cdot 9\frac{7}{13}$;

5) $4\frac{4}{5} : \frac{4}{17} : 3\frac{2}{5}$;

6) $11\frac{1}{3} : \frac{4}{21} : 4\frac{1}{4}$;

7) $1\frac{2}{7} \cdot 1\frac{1}{4} \cdot \frac{4}{9} \cdot 2\frac{3}{4}$;

8) $2\frac{11}{50} : 7\frac{2}{5} \cdot 3\frac{1}{3}$.

314. Докажите, что:

1) $\frac{1}{2} + \frac{1}{6} + \frac{1}{12} + \frac{1}{20} = 0{,}8$;

2) $\left(1\frac{4}{9} + 2\frac{5}{6} - 2\frac{3}{4}\right) \cdot \frac{6}{11} = \frac{5}{6}$.

315●. Вычислите:

1) $\dfrac{1 + \frac{1}{3} + \frac{1}{9} + \frac{1}{27}}{2 + \frac{2}{3} + \frac{2}{9} + \frac{2}{27}} \cdot \dfrac{4 - \frac{4}{7} + \frac{4}{49} - \frac{4}{343}}{1 - \frac{1}{7} + \frac{1}{49} - \frac{1}{343}}$;

2) $\dfrac{1 + 2 + 3 + 4 + 5 + 6 + 7 + 8}{8 + 9 + 10 + 11 + 12 + 13 + 14 + 15}$.

316●. Вычислите сумму $\frac{1}{8} + \frac{1}{12} + \frac{1}{16} + \frac{1}{20}$, а затем, не выполняя сложения, скажите, чему равна сумма $\frac{1}{4} + \frac{1}{6} + \frac{1}{8} + \frac{1}{10}$.

317●. Подберите натуральный корень уравнения:

1) $\frac{x}{2} + \frac{x}{3} + \frac{x}{4} = 26$;

2) $\frac{x}{6} + \frac{x}{9} + \frac{x}{15} = 31$.

318. Докажите или опровергните утверждение:

1) если a — простое число, то дробь $\frac{a}{a+2}$ несократима;

2) если НОД $(a;\ b) = k$, то дроби $\frac{a}{b+k}$ и $\frac{a}{b-k}$ сократимы;

3) если дробь $\frac{a}{b}$ сократима, то сократимы и дроби $\frac{b}{a}$, $\frac{a-b}{b}$ и $\frac{a+b}{b}$;

4) если НОД $(a;\ b) = 1$, то дробь $\frac{b-a}{a+b}$ несократима.

Задачи на смекалку

319. Докажите, что:

1) если сумма любых двух из трёх натуральных чисел k, m и n делится на 3, то и сумма всех трёх этих чисел делится на 3;

2) если сумма любых трёх из четырёх натуральных чисел делится на 4, то и каждое число делится на 4.

320. Какую цифру надо подставить вместо *, чтобы получилась правильная несократимая дробь: 1) $\frac{285}{2*7}$; 2) $\frac{378}{3*9}$? 72

321. В трёх шестых классах 102 ученика. Число учеников 6 «А» класса составляет $\frac{8}{9}$ числа учеников 6 «Б» класса, а число учеников 6 «В» класса равно $\frac{17}{16}$ числа учеников 6 «А» класса. Сколько учеников учится в каждом классе?

Контрольные вопросы и задания

1. Докажите, что числа 154 и 585 взаимно простые.

2. Запишите все правильные дроби со знаменателем 14, у которых числитель и знаменатель дроби — взаимно простые числа.

3. Найдите значение выражения

$$\frac{3}{16} \cdot 1\frac{3}{5} : \left(7\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{10} - \frac{3}{5}\right) - 3\frac{1}{2} : 4\frac{2}{3}.$$

Тест 71

11 Множества

Все ученики вашего класса, все делители числа 6, все точки плоскости, удалённые от точки A на 2 сантиметра... — всё это наборы объектов, объединённых общим для каждого набора свойством. В математике такие наборы называют *множествами* и говорят: «множество учеников класса», «множество делителей числа 6», «множество точек плоскости, удалённых от точки A на 2 сантиметра».

В отличие от русского языка, где слово «множество» часто заменяет слово «много», в математике термин «множество» не имеет количественного смысла. Так, множество делителей числа 1 состоит из одного *элемента* — числа 1, т. е. это множество — *конечное*. Множество общих кратных чисел 2 и 3 является *бесконечным*: 6, 12, 18, 24, ... Многоточие после числа 24 означает, что за ним следует ещё бесконечно много чисел — элементов этого множества. В математике встречаются множества, в которых нет ни одного элемента, например множество чисел, делящихся на нуль. Такое множество называют *пустым*. Пустое множество имеет специальное обозначение: «$\varnothing$».

322. 1) Дайте название множеству:

а) 1, 2, 3, 4, ...;
б) 2, 4, 6, 8, ...;
в) 10, 20, 30, 40, ...;
г)● 1, 2, 3, 6, 9, 18;
д)● 4, 7, 10, 13, ...;
е)● 13, 26, 39, ..., 78, 91.

2) Назовите конечные и бесконечные множества. 74

323. 1) Назовите, если возможно, несколько элементов множества: 73

а) делителей числа 12;
б) чисел, кратных 5 и 6;
в) однозначных чисел, кратных 10:
г) общих делителей чисел 12 и 18;
д) общих делителей чисел 17 и 19;
е) делителей числа 3.

2) Сколько элементов в каждом из этих множеств?

324. 1) Приведите примеры множеств, которые состоят:

а) из одного элемента; в) из трёх элементов;

б) из двух элементов; г) из 100 элементов. 75

2) Приведите несколько примеров бесконечных множеств.

325. Запишите элементы множества A, если:

1) A — множество правильных дробей со знаменателем 5;

2) A — множество неправильных дробей с числителем 4.

326•. Запишите формулу чисел, являющихся элементами множества:

1) 1, 3, 5, 7, ...; 4) 1, 4, 9, 16, ...;

2) 5, 25, 125, 625, ...; 5) 1, 8, 27, 64, ...;

3) 3, 6, 9, 12, ...; 6) 6, 11, 16, 21, ...

327. 1) Назовите пустые множества:

а) множество корней уравнения $0 \cdot x = 1$;

б) множество корней уравнения $x : 1 = 0$;

в) множество натуральных чисел, меньших 1;

г) множество натуральных чисел, которые не являются ни простыми, ни составными.

2) Приведите свои примеры пустых множеств.

Числа 1, 2, 3 и 6 являются элементами множества делителей числа 12. Говорят, что они *принадлежат* множеству делителей числа 12.

328. Даны числа: 1, 2, 3, 5, 7, 9, 10, 25, 125.

1) Какие из этих чисел принадлежат множеству делителей числа 125?

2) Какие из этих чисел принадлежат множеству общих делителей чисел 100 и 35?

329. Множество A состоит из чисел 3 и 5, а множество B — из чисел 4, 6 и 8. Составьте множество дробей, числители которых принадлежат множеству A, а знаменатели — множеству B. Сколько элементов в множестве этих дробей?

330. Верно ли, что:

1) число 599 370 принадлежит множеству чётных чисел;

2) число 977 принадлежит множеству простых чисел:

3) $\frac{7}{7}$ принадлежит множеству правильных дробей;

4) число 0 принадлежит множеству чётных натуральных чисел;

5) 124 не принадлежит множеству двузначных чисел;

6) значение выражения $43^2 - 43$ является элементом множества составных чисел?

Великий математик XVIII в. Леонард Эйлер предложил изображать множества кругами, а элементы множеств — точками внутри этих кругов.

Пусть A — множество делителей числа 12, а B — множество делителей числа 18. На рисунке 43 соотношение между этими множествами изображено с помощью кругов Эйлера.

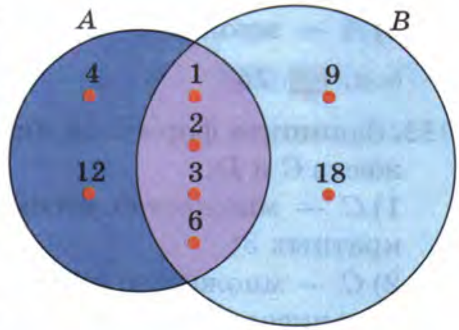


Рис. 43

В общую часть обоих кругов попали числа, принадлежащие и множеству A, и множеству B.

Множество элементов, общих для множеств A и B, называют *пересечением* множеств A и B.

331. На рисунке 44 одна из фигур частично наложена на другую. Какие это фигуры? Какую фигуру составляет пересечение множеств их точек? 77

Рис. 44

332. Опишите множество, которое является пересечением множеств A и B, если:

1) A — множество простых чисел, B — множество чётных чисел;

2) A — множество делителей числа 15, B — множество делителей числа 45;

3) A — множество чисел, кратных 9, B — множество чисел, кратных 21;

4) A — множество двузначных чисел, B — множество чётных чисел;

5) A — множество правильных дробей, B — множество неправильных дробей;

6) A — множество прямоугольников, B — множество ромбов. 76

333. Запишите формулой числа, входящие в пересечение множеств C и D:

1) C — множество чётных чисел, D — множество чисел, кратных 3;

2) C — множество чисел, кратных 5, D — множество чётных чисел;

3) C — множество чисел, кратных 7, D — множество чисел, кратных 9;

4) C — множество дробей с числителем 1, D — множество дробей с нечётным знаменателем;

5) C — множество дробей с чётным числителем, D — множество дробей со знаменателем, дающим в остатке 2 при делении на 3.

К поиску пересечения множеств сводится решение некоторых геометрических задач. Рассмотрим, например, как построить треугольник ABC со сторонами $AB = 2{,}5$ см, $BC = 3$ см и $AC = 2$ см. Начертим сначала сторону AC (рис. 45, *а*), а затем будем искать третью вершину треугольника — точку B.

Точка B должна находиться на расстоянии 2,5 см от точки A, т. е. быть элементом множества точек, удалённых на 2,5 см от точки A. Множество таких точек — это окружность с центром в точке A и радиусом 2,5 см (см. рис. 45, *а*).

С другой стороны, точка B должна отстоять на 3 см от точки C, т. е. принадлежать окружности с центром в точке C и радиусом 3 см (рис. 45, *б*). Таким образом, точка B оказывается элементом сразу двух множеств точек окружностей, а значит, она принадлежит их пересечению. Пересечение в данном случае содержит два элемента — точки B_1 и B_2 (см. рис. 45, *б*). Любую из этих точек можно взять за третью вершину треугольника. Остаётся соединить выбранную точку с точками A и C.

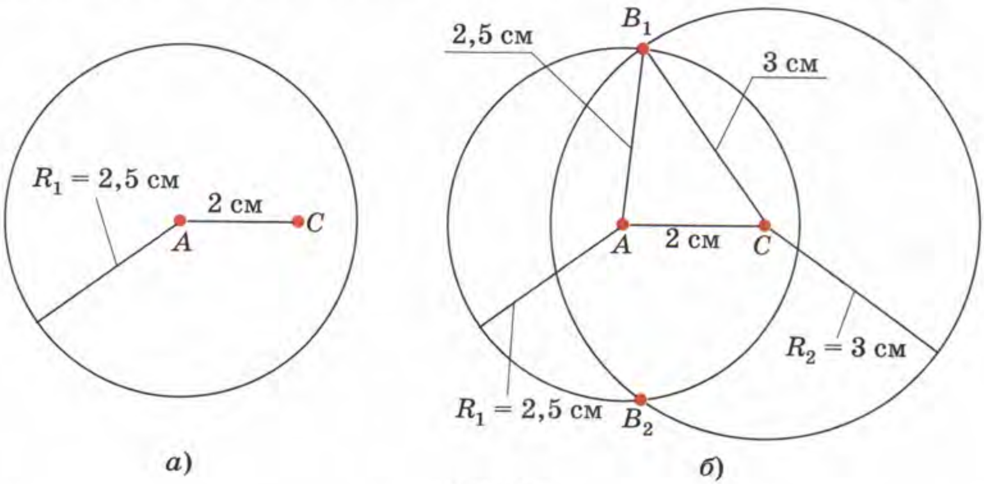


Рис. 45

334. Постройте треугольник со сторонами 3 см, 4 см и 5 см и объясните своё решение, используя термины «множество», «элемент множества», «пересечение множеств».

335●. На плоскости отмечены две точки. Сколько элементов может оказаться в множестве точек плоскости, удалённых от каждой из них на 2 см? Проиллюстрируйте каждый случай рисунком.

336●. Постройте треугольник ABC, у которого:

$$AC = 3 \text{ см}, \angle A = 60°, \angle C = 40°.$$ 75

Объясните своё решение, используя термины «множество», «элемент множества», «пересечение множеств».

В каждом из множеств A и B на рисунке 43 содержится по шесть элементов. В то же время в обоих этих множествах вместе различных элементов всего восемь.

Множество элементов, принадлежащих хотя бы одному из множеств A и B, называют *объединением* множеств A и B.

337. В математическом кружке занимается 17 учеников класса (множество M), а в кружке «Умелые руки» занимается 18 учеников (множество K). Известно, что каждый из учеников класса занимается хотя бы в одном из этих кружков, а 6 учеников посещают занятия обоих кружков.

1) Чем является объединение множеств M и K?

2) Сколько учеников в классе?

338. Принадлежат ли объединению множеств M и K:

1) числа 31, 132 и 111, если M — множество двузначных чисел, K — множество чётных чисел;

2) числа 10, 123 и 152, если M — множество чисел, кратных 5, K — множество нечётных чисел;

3) числа 11, 6 и 2, если M — множество простых чисел, K — множество чётных чисел;

4) квадрат и равносторонний треугольник, если M — множество треугольников, K — множество многоугольников с равными сторонами;

5) числа 0, 1 и 3, если M — множество натуральных чисел, меньших 3, K — множество чисел, равных трём?

Для обозначения объединения множеств используют знак «$\cup$», похожий на первую букву латинского слова *union* — «союз».

$A \cup B$ читается: «объединение множеств A и B».

Для обозначения пересечения множеств знак объединения переворачивают: «$\cap$».

$A \cap B$ читается: «пересечение множеств A и B».

339. Прочитайте запись:

1) $A \cup B = C$;
2) $A \cap B \neq \varnothing$.

340. D — множество букв слова «математика», B — множество букв слова «грамматика».

1) Из каких букв состоит объединение данных множеств?
2) Из каких букв состоит пересечение данных множеств?

Рисунок 46 иллюстрирует случай, когда пересечение множеств A и B совпало с множеством A. Так могут, например, изображаться множество A делителей числа 6 и множество B — делителей числа 12.

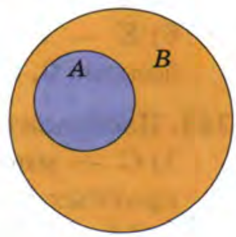


Рис. 46

Множество A называют *подмножеством* множества B, если каждый элемент множества A принадлежит множеству B.

Соотношение между множествами A и B в этом случае записывают с помощью знака «$\subset$».

$A \subset B$ читается: «A — подмножество B».

341. Является ли множество A подмножеством множества B, если:

1) A — множество натуральных чётных чисел, B — множество натуральных чисел;
2) A — множество делителей числа 12, B — множество делителей числа 18;

3) A — множество чисел, кратных 3, B — множество чисел, кратных 6;
4) A — множество квадратов, B — множество прямоугольников;
5) A — множество треугольников, B — множество многоугольников?

342. Назовите множество, подмножеством которого является множество K, если:
1) K — множество простых чисел;
2) K — множество квадратов;
3) K — множество правильных дробей;
4) K — множество остатков при делении на 7;
5) K — множество натуральных чисел, кратных 9;
6) K — множество натуральных чисел, каждое из которых больше 9, но меньше или равно 99.

343. Изобразите кругами Эйлера множества:
1) C — множество нечётных чисел, D — множество чисел, кратных 5;
2) M — множество прямоугольников, K — множество квадратов;
3) P — множество прямоугольных треугольников, L — множество прямоугольников;
4) S — множество прямоугольных треугольников, T — множество тупоугольных треугольников.

Равенство двух чисел $a = b$ означает, что a и b являются одним и тем же числом. Так, например, $\frac{2}{5} = 0{,}4$. Аналогично и равенство множеств $A = B$ означает, что множества A и B — это одно и то же множество, т. е. множества A и B состоят из одних и тех же элементов или они оба являются пустыми множествами.

Два множества равны, если они состоят из одних и тех же элементов или вообще не содержат элементов.

Элементы множества обычно записывают в фигурных скобках. Обозначим, например, множество делителей числа 12 буквой F, тогда

$$F = \{1, 2, 3, 4, 6, 12\}.$$

344. Назовите равные друг другу множества:

$$A = \{1, 2, 3\};\ B = \{1, 2, 4\};$$

$$C = \{3, 2, 1\};\ D = \{2, 3, 1\};$$

$$E = \{3, 1, 5\};\ F = \{5, 1, 3\}.$$

345. На рисунке 47 изображены множества A и B. Подберите каждому рисунку соответствующую ему запись:

$$A = B,\ A \subset B,\ B \subset A,$$

$$A \cap B \neq \varnothing,\ A \cap B = \varnothing.$$

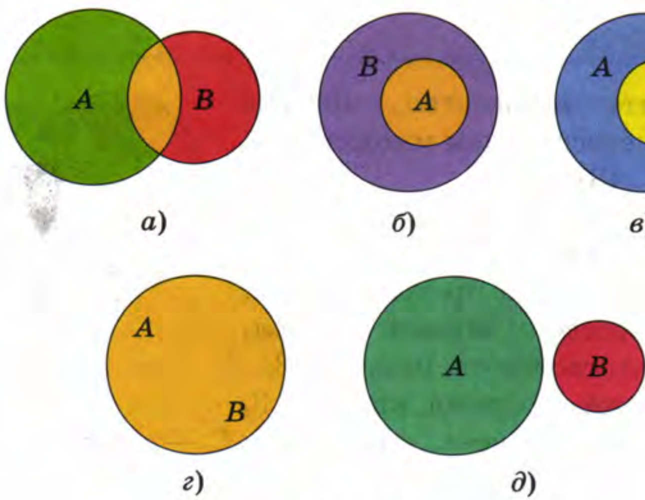


Рис. 47

346. 1) Изобразите кругами Эйлера множества A и B так, чтобы выполнялось:

а) $A \cap B = A$; в) $A \cap B = \varnothing$;

б) $A \cup B = A$; г) $A = B$.

2) Приведите примеры таких множеств.

347●. Используя круги Эйлера, объясните, чем является:

1) $(A \cap B) \cup B$;

2) $(A \cup B) \cap B$.

348. В 6 «В» классе учится 28 школьников. На родительское собрание пришли 24 мамы и 18 пап. Зная, что на собрание пришли родители всех учеников, определите, у скольких учеников на собрание пришли оба родителя.

По аналогии с объединением и пересечением двух множеств можно рассматривать объединение и пересечение трёх и более множеств.

***Пересечением* множеств называют множество их общих элементов.**

***Объединением* множеств называют множество всех их элементов.**

349. 1) Опишите множество, которое является пересечением множеств A, B и C (рис. 48).

Рис. 48

2) Назовите элементы, принадлежащие пересечению A, B и C, если:

а) A — множество простых чисел, B — множество чётных чисел, C — множество чисел, кратных 3;

б) A — множество чисел, кратных 3, B — множество чисел, кратных 5, C — множество чисел, кратных 7;

в) A — множество четырёхугольников, B — множество параллелограммов, C — множество ромбов;

г) A — множество правильных дробей, B — множество дробей с чётным числителем, C — множество дробей со знаменателем 7;

д) A — множество делителей числа 15, B — множество делителей числа 100, C — множество делителей числа 25.

350. Используя рисунок 49, ответьте на вопросы. Сколько элементов в множестве:

1) A, B и C;
2) $A \cap B$;
3) $B \cap C$;
4) $A \cap C$;
5) $A \cap B \cap C$;
6) $A \cup B \cup C$?

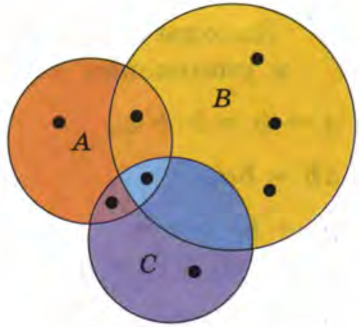


Рис. 49

351. P — множество чисел, кратных 5, S — множество чисел, кратных 3, T — множество чётных чисел.

1) Изобразите эти множества кругами Эйлера.
2) Отметьте в соответствующих кругах точками числа: 97 315, 374 853, 57 032, 38 265, 503 150, 825 258, 63 510.
3) Назовите какое-нибудь число, которое принадлежит множеству:

а) $P \cap S$;
б) $S \cap T$;
в) $P \cap T$;
г) $P \cap S \cap T$.

352. X — множество делителей числа 630, Y — множество делителей числа 75, Z — множество делителей числа 3465.

Опишите множество:

1) $X \cap Y$;
2) $X \cap Z$;
3) $Y \cap Z$;
4) $X \cap Y \cap Z$;
5) $X \cup Z \cap Y$.

▼ Пересечение и объединение множеств обладают свойствами, очень похожими на свойства арифметических действий сложения и умножения. В левом столбце таблицы записаны известные законы арифметических действий, а в правом — свойства пересечения и объединения множеств.

Законы сложения и умножения чисел	Свойства объединения и пересечения множеств
$a + b = b + a,$	$A \cup B = B \cup A,$
$ab = ba,$	$A \cap B = B \cap A,$
$(a + b) + c =$ $= a + (b + c) = a + b + c,$	$(A \cup B) \cup C = A \cup (B \cup C) =$ $= A \cup B \cup C,$
$(ab)c = a(bc) = abc,$	$(A \cap B) \cap C = A \cap (B \cap C) =$ $= A \cap B \cap C,$
$a(b + c) = ab + ac$	$A \cap (B \cup C) =$ $= (A \cap B) \cup (A \cap C)$

△

353•. Как называются законы арифметических действий, записанные в левом столбце таблицы?

354•. С помощью кругов Эйлера на рисунке 50 убедитесь, что верно равенство:

1) $(A \cup B) \cup C =$
$= A \cup (B \cup C);$
2) $(A \cap B) \cap C =$
$= A \cap (B \cap C);$
3) $A \cap (B \cup C) =$
$= (A \cap B) \cup (A \cap C);$
4) $A \cup (B \cap C) =$
$= (A \cup B) \cap (A \cup C).$

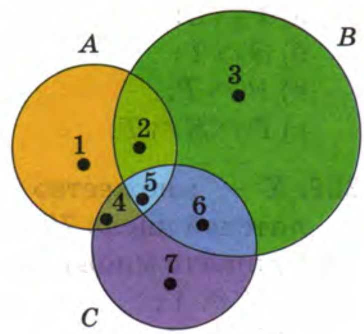


Рис. 50

355•. На какое известное вам свойство арифметических действий с числами похоже свойство операций с пустым множеством:

1) $A \cap \varnothing = \varnothing;$
2) $A \cup \varnothing = A?$

356●. Множества A, B, C и D изображены на рисунке 51 кругами Эйлера. Какое из следующих множеств изображается на этом рисунке красной фигурой:

1) $A \cap B \cap C \cap D$;
2) $(A \cap B) \cup (C \cap D)$;
3) $(A \cup B) \cap (C \cup D)$;
4) $(A \cap C) \cup (B \cap D)$?

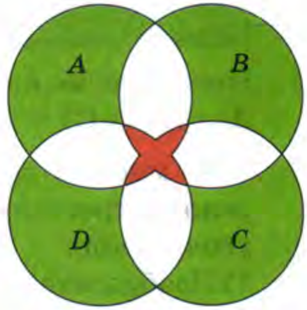


Рис. 51

Задачи на смекалку

357. Множество A состоит из пяти простых чисел, множество B — из семи простых чисел, а в пересечении этих множеств два числа.

Сколько различных чисел можно записать обыкновенными дробями:

1) числителями которых являются элементы множества A, а знаменателями — элементы множества B;
2) числители и знаменатели которых принадлежат объединению множеств A и B?

358. Изобразите множества A, B и C кругами Эйлера и расставьте в них 7 точек так, чтобы:

1) в каждом множестве было по 4 элемента;
2) в каждом множестве было по 5 элементов;
3) в множестве A и в множестве C было по 4 элемента, а в множестве B — 6 элементов.

359. Постройте два треугольника так, чтобы их пересечением являлась фигура:

1) шестиугольник;
2) пятиугольник;
3) четырёхугольник;
4) треугольник;
5) отрезок;
6) точка.

Контрольные вопросы и задания

1. Покажите на кругах Эйлера свойство
$A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$.

2. K — множество треугольников, L — множество равнобедренных треугольников, M — множество тупоугольных треугольников.
1) Изобразите множества K, L и M кругами Эйлера.
2) Сформулируйте свойство элементов множества $K \cap L \cap M$.
3) Нарисуйте треугольник, который принадлежит пересечению множеств L и M. 79

3. Известно, что C — множество чётных чисел, D — множество чисел, кратных 9, E — множество делителей числа 12.
1) Расставьте числа 135 274, 136 267, 3, 4, 215 246, 12 в кругах Эйлера, изображающих множества C, D и E.
2) Опишите множество:

а) $C \cap E$;	в) $D \cap E$;	д) $C \cup D$;
б) $C \cap D$;	г) $C \cap D \cap E$;	е) $C \cup E$.

Тест Ч. 1. С. 52

Глава 3

Отрицательные числа

12 Центральная симметрия

Уже более 100 лет страницы школьных тетрадей по математике разлинованы в клетку. И столько же лет школьники играют на них в такие увлекательные игры, как «Морской бой» и «Крестики-нолики». Можно придумать и другие игры. Вот одна из них. В строке из 11 клеток тетради, изображённой на рисунке 52, игроки по очереди закрашивают одну, две или три соседние клетки. Выигрывает тот из игроков, кто закрасит последнюю клетку.

Рис. 52

360. 1) Сыграйте в эту игру два раза со своим соседом по парте. Пусть первый раз начинает тот из вас, кто сидит за партой слева, а второй раз — тот, кто справа.
2) Кто, по вашему мнению, имеет бо́льшие шансы выиграть: тот, чей ход первый, или тот, кто ходит вторым?

Войны и игры обычно выигрывают те, у кого лучше *стратегия* — план, который должен привести к победе. В игре с закрашиванием строки из 11 клеток можно предложить следующую стратегию.

① Первым ходом закрасить центральную клетку.

② Затем повторять ходы противника, но с другой стороны от середины строки. Так, например, если противник закрасил

Рис. 53

две клетки слева — закрасить две справа (рис. 53). Следует закрашивать клетки, которые находятся на таком же расстоянии от центральной клетки, что и закрашенные противником, но с противоположной от неё стороны.

361. Сыграйте два раза в игру по закрашиванию 11 клеток строки по предложенной выше стратегии.

362. 1) Сыграйте со своим соседом по парте в немного более сложную игру, в которой в прямоугольнике 5×7 клеток можно закрашивать одноклеточные квадратики или двухклеточные и трёхклеточные прямоугольники. Побеждает тот, кто закрасит последнюю клетку в прямоугольнике.

2) Придумайте свою стратегию игры и проверьте её, сыграв со своим соседом по парте.

Рассмотренная игра по сравнению с игрой «Морской бой» имеет существенный недостаток. Интерес к ней теряется, как только игроки понимают, что надо «захватить» центр, а затем «повторять» ходы соперника по другую сторону от него (рис. 54).

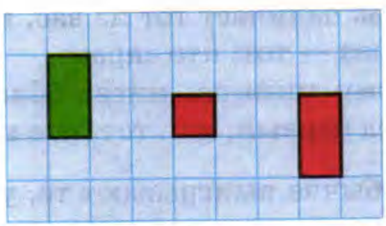


Рис. 54

Стратегия захвата центра основана на важном геометрическом понятии *симметрии*.

Пусть на плоскости выбрана точка O.

① Возьмём какую-нибудь точку A и проведём прямую AO.

② Отложим на этой прямой от точки O отрезок OA_1, равный отрезку AO, но по другую сторону от точки O (рис. 55).

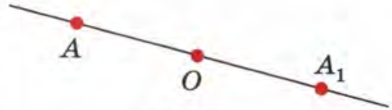


Рис. 55

Точки A и A_1 называют *симметричными* относительно точки O, которую называют *центром симметрии*.

Слово «симметрия», как и многие другие математические термины, пришло к нам из Древней Греции, где оно означало «соразмерность».

Используя этот термин, можно сказать, что выигрышная стратегия закрашивания заключалась в том, чтобы выбирать клетки, *симметричные* закрашенным противником относительно центральной клетки. *Центр симметрии симметричен сам себе*, поэтому первым ходом закрашивалась центральная клетка, что не давало противнику возможности сделать симметричный ход.

Если построить точки, симметричные всем точкам некоторой фигуры, то получится фигура, симметричная данной. Само построение обычно существенно облегчается тем, что *симметричные друг другу фигуры равны*. Так, например, при построении фигуры, симметричной отрезку AB относительно точки O (рис. 56), должен получиться отрезок. Для его построения достаточно знать, где расположены концы этого отрезка, т. е. достаточно построить точки A_1 и B_1, симметричные точкам A и B относительно точки O, и соединить их (рис. 57).

Рис. 56

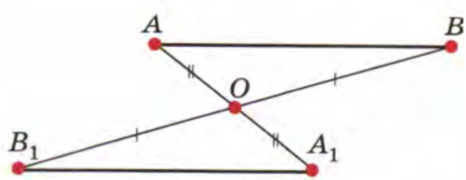


Рис. 57

363. Назовите пары точек, симметричных относительно точки O на рисунке 58. 80

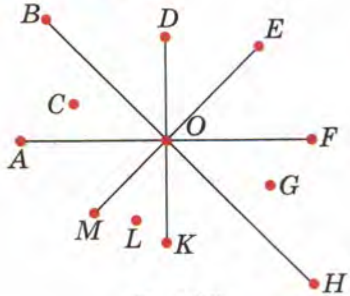


Рис. 58

364. Назовите на рисунке 59 фигуры, симметричные относительно некоторой точки, и назовите их центр симметрии.

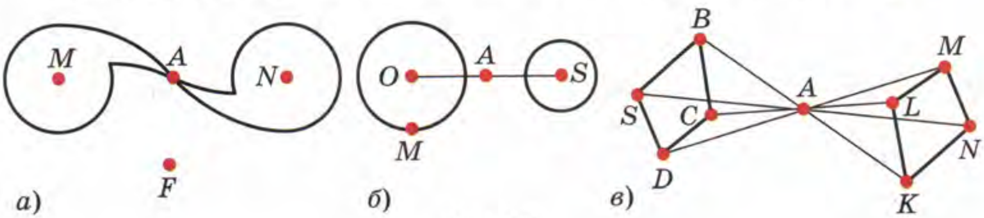


Рис. 59

365. Начертите отрезок CD длиной 2 см и постройте фигуру, симметричную этому отрезку относительно:
1) точки O, не лежащей на прямой CD; 2) точки C; 3) точки M — середины отрезка CD. 81, 82

366. Скопируйте рисунок 60 в свою тетрадь и постройте фигуру, симметричную треугольнику ABC относительно точки O. 83

367. 1) Начертите треугольник KMN.
2) Постройте фигуру, симметричную этому треугольнику относительно точки M.
3) Постройте фигуру, симметричную треугольнику KMN относительно точки E — середины стороны MN. 84

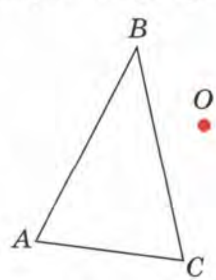


Рис. 60

368. 1) Начертите угол ABC и подумайте, какая фигура будет симметрична этому углу относительно точки B.

2) Постройте фигуру, симметричную углу ABC относительно точки B. Как называются получившиеся фигуры?

3) Постройте фигуру, симметричную углу ABC относительно точки M, лежащей на биссектрисе этого угла.

369°. Проведите окружность с центром в точке O. Какая фигура будет симметрична этой окружности относительно точки P, лежащей на окружности? Постройте эту фигуру.

370. Постройте прямую MN, симметричную прямой AB относительно точки O, не лежащей на этой прямой. 85

Прямые, которые получились при выполнении задания № 370, оказались параллельны друг другу. И это не случайно.

Центрально-симметричные прямые параллельны друг другу.

Для д о к а з а т е л ь с т в а этого свойства напомним свойство углов, образующихся при пересечении двух прямых третьей. Если при пересечении прямых a и b прямая c образует с ними равные друг другу углы, отмеченные на рисунке 61 одинаковым количеством дужек, то прямые a и b параллельны друг другу.

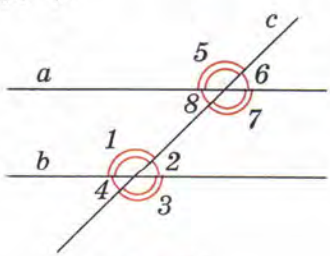


Рис. 61

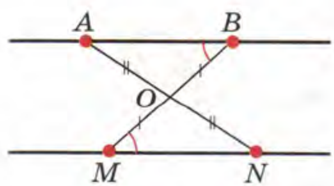


Рис. 62

При построении прямой, симметричной прямой AB относительно точки O, получилась прямая MN (рис. 62). При этом углы ABM и NMB также симметричны друг другу относительно точки O. Значит, $\angle ABM = \angle NMB$, и прямые AB и MN параллельны. Таким образом, мы доказали, что центрально-симметричные прямые параллельны.

371. Выпишите названия параллелограммов, изображённых на рисунке 63.

372. Постройте фигуру, симметричную квадрату $ABCD$ относительно одной из его вершин.

373°. Начертите прямоугольник $ABCD$. Какая фигура будет симметрична этому прямоугольнику относительно точки O — середины его диагонали AC?

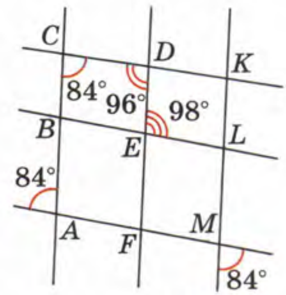


Рис. 63

При построении фигуры, симметричной данной, в некоторых случаях в результате получается исходная фигура, т. е. исходная фигура оказывается сама себе симметрична.

Фигуры, симметричные сами себе относительно некоторой точки, называют *центрально-симметричными*, а сама эта точка называется *центром симметрии фигуры*.

374. Назовите номера центрально-симметричных фигур и составьте планы поиска их центров симметрии (рис. 64).

86

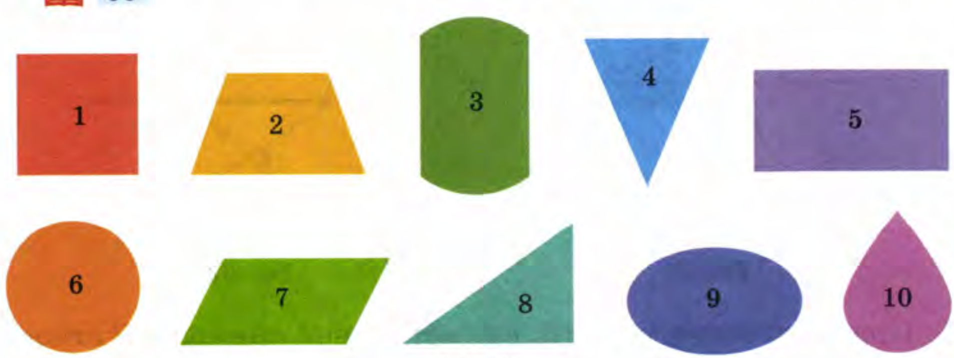


Рис. 64

375. Где расположен центр симметрии фигуры, если этой фигурой является:
1) отрезок AB;
2) окружность с центром в точке O;
3) параллелограмм $ABCD$?

376. Точка O — центр симметрии шестиугольника $ABCDEF$ (рис. 65).
Назовите:
1) точки, симметричные точкам A, C, D, F;
2) отрезки, симметричные отрезкам AB, FE, AD;
3) треугольник, симметричный треугольнику AOB.

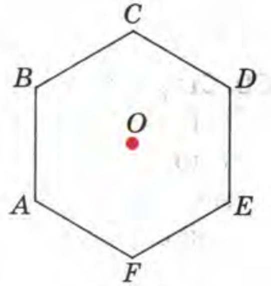


Рис. 65

377. Строится прямая, симметричная прямой AB относительно точки O. Может ли полученная прямая оказаться той же самой прямой AB? Где в этом случае должна располагаться точка O?

378•. Докажите, что ни треугольник, ни пятиугольник не являются центрально-симметричными фигурами.

Идеи симметрии часто используются при создании различных орнаментов. Знание симметрии и богатое воображение позволили знаменитому голландскому художнику Морису Эшеру создать ряд интересных картин. Вот одна из них, которую Эшер назвал «Водовороты» (рис. 66).


Рис. 66

379. Не производя измерений, найдите центр симметрии картины Эшера.

Задачи на смекалку

380. Старинная игра. Имеется две кучки, по 20 камней в каждой. За ход разрешается взять любое количество камней от 1 до 5, но только из одной кучки. Выигрывает тот, кто возьмёт последний камень. Кто должен выиграть при правильной стратегии, если играют двое?

381. На доску для игры в 100-клеточные шашки двое по очереди выкладывают по одной фишке домино, закрывая две соседние клетки доски по вертикали или горизонтали. Проигрывает тот, кому некуда будет поставить фишку. Кто, первый или второй играющий, должен выиграть при правильной стратегии? И в чём эта стратегия заключается?

382. На окружности расставлено 20 точек. За ход разрешается соединить любые две из этих точек хордой, не пересекающей ранее проведённых хорд. Проигрывает тот, кто не сможет провести хорду. Кто, первый или второй играющий, должен выиграть при правильной стратегии? И в чём эта стратегия заключается?

383. Двое по очереди разламывают шоколадку, в которой 40 долек.

За ход разрешается сделать прямолинейный разлом любого из имеющихся кусков вдоль углубления. Выигрывает тот, кто первым отломит одну дольку. Кто, первый или второй из любителей шоколада, должен выиграть при правильной стратегии?

Контрольные вопросы и задания

1. Любые ли две точки можно считать центрально-симметричными друг другу? Если ответ утвердительный, то где находится центр этой симметрии?
2. Как вы понимаете утверждение: «Прямоугольник имеет центр симметрии»?
3. Начертите треугольник ABC и постройте треугольник, симметричный треугольнику ABC относительно середины стороны BC. Докажите, что эти два треугольника вместе составляют параллелограмм. Тест 87

13 Отрицательные числа и их изображение на координатной прямой

Рис. 67

Шкала термометра (рис. 67) состоит из двух частей — красной и синей. Нулевая отметка шкалы соответствует температуре 0°, при которой вода замерзает. В термометрах обычно используют подкрашенный спирт, температура замерзания которого 100° мороза. При повышении температуры спирт в термометре расширяется, его объём увеличивается, и столбик термометра поднимается, а при понижении температуры — опускается.

Когда температура больше нуля, её записывают с помощью хорошо вам знакомых *положительных* чисел, а в случаях, когда температура оказывается меньше нуля, используют *отрицательные* числа. 88

Числа, меньшие нуля, называют *отрицательными*.

Отрицательные числа записывают с помощью знака «–», например, –1; –25,7; $-\frac{2}{7}$ и т. п.

Числа, большие нуля, называют *положительными* (иногда перед положительными числами ставят знак «+», например, +3 = 3).

Число нуль не относится ни к положительным, ни к отрицательным числам.

384. На здании Московского государственного университета им. М. В. Ломоносова установлен термометр со стрелкой (рис. 68). Какую температуру он показывает?

89

а) *б)*

Рис. 68

385. Начертите шкалу температур от –30 до 60 °C, приняв отрезок длиной 1 см за 10 °C. Отметьте на этой шкале точку замерзания глицерина –20 °C; нормальную температуру тела человека 36,6 °C; температуру таяния льда 0 °C; температуру замерзания раствора поваренной соли –21 °C; температуру кипения эфира 35 °C.

Пусть температура понизилась с 5 градусов тепла на 7 градусов. Отсчитав 7 делений вниз от отметки 5 на красной части шкалы, получим 2 на синей её части. Это значит, что температура стала меньше нуля на 2 градуса, т. е. оказалась равной –2 градусам.

386. Используя рисунок шкалы термометра (см. рис. 67), заполните пустые ячейки таблицы. 90

Температура в градусах до изменения	Изменение температуры	Температура в градусах после изменения
+10	Понизилась на 12°	
−8	Повысилась на 5°	
−5		+4
+2	Понизилась на 6°	
+3		−9
	Понизилась на 17°	−5
	Повысилась на 15°	+4
−10		−3

С введением отрицательных чисел множество чисел стало состоять из трёх непересекающихся множеств: положительных чисел, отрицательных чисел и множества, единственным элементом которого является число нуль.

Объединение множества положительных чисел с множеством, состоящим из нуля, называют множеством *неотрицательных* чисел.

Объединение множества отрицательных чисел с множеством, состоящим из нуля, называют множеством *неположительных* чисел.

Правило чтения положительных и отрицательных чисел

Названия знаков «+» и «−» по падежам не склоняют.
Например, $x = -3$ — икс равен минус трём;
$c = +5{,}2$ — цэ равно плюс пяти целым двум десятым;
$A\left(-\frac{3}{7}\right)$ — точка A с координатой минус три седьмых.

387. Среди чисел

$$15;\ 0;\ -1;\ -140\,079;\ 3{,}7;\ 8{,}(1);\ \frac{13}{7};\ -3\frac{8}{11};\ -1{,}034$$

укажите:

1) натуральные числа;
2) положительные числа;
3) неотрицательные числа;
4) отрицательные числа;
5) неположительные числа.

Для изображения неотрицательных чисел используют координатный луч. Чтобы изображать отрицательные числа, координатный луч дополняют до прямой.

Как и на шкале термометра, где положительные и отрицательные температуры отмечаются по разные стороны от нулевой отметки, будем изображать положительные и отрицательные числа по разные стороны от точки с координатой 0 — *начала координат.*

Мы получили *координатную прямую* (рис. 69), точками которой справа от нуля изображают положительные, а слева — отрицательные числа.

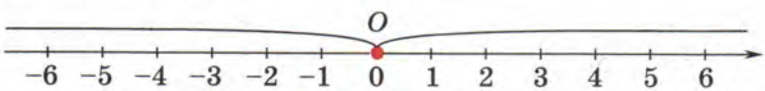


Рис. 69

Координатная прямая **— это прямая с указанными на ней началом координат, положительным направлением и единичным отрезком.**

Принято координатную прямую располагать горизонтально так, что число 1 изображается на ней справа от начала координат.

Отметим на координатной прямой числа: 1; −1; 2; −2; 7 и −7 (рис. 70).

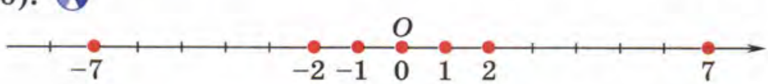


Рис. 70

Точки, соответствующие числам -2 и 2 (можно говорить: точки -2 и 2), симметричны относительно точки O — начала координат. Также симметричны и пары точек 1 и -1, -7 и 7.

388. Запишите координаты точек, отмеченных на рисунке 71.

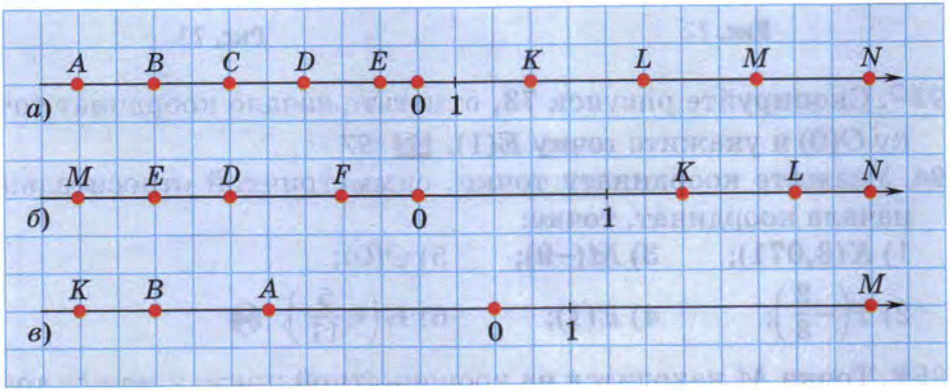


Рис. 71 94, 95

389. Назовите какие-нибудь два числа, которые расположены на координатной прямой:

1) правее числа 3;
2) левее числа 0;
3) правее числа -15;
4) левее числа -23;
5) между числами -1 и 1;
6) между числами -1 и 0;
7) между числами 0 и 1;
8) между числами -2 и 3. 92, 93

390. Изобразите координатную прямую, выбрав единичный отрезок равным 1 см, и отметьте на ней точки:

$A(-1)$, $B(5)$, $C(1{,}5)$, $D(-2{,}3)$, $E\left(\frac{1}{3}\right)$, $F\left(-\frac{13}{5}\right)$. 91

391°. Изобразите координатную прямую, выбрав единичный отрезок так, чтобы было удобно отметить на ней точки:

1) $A\left(\frac{1}{5}\right)$, $B\left(\frac{2}{5}\right)$, $C\left(-\frac{4}{5}\right)$, $D\left(1\frac{1}{5}\right)$, $E\left(-1\frac{3}{5}\right)$, $F\left(-\frac{1}{2}\right)$, $G\left(\frac{3}{2}\right)$;
2) $A\left(\frac{3}{4}\right)$, $B\left(-\frac{3}{8}\right)$, $C\left(\frac{1}{2}\right)$, $D\left(-\frac{3}{4}\right)$, $E\left(\frac{7}{8}\right)$, $F\left(-\frac{3}{8}\right)$, $G\left(-1\frac{3}{8}\right)$;
3) $A(1{,}7)$, $B(-2{,}3)$, $C(3{,}8)$, $D(-4{,}2)$, $E(5{,}5)$, $F(-5{,}2)$;
4) $A(150)$, $B(-100)$, $C(250)$, $D(400)$, $E(-300)$, $F(450)$.

392°. Скопируйте рисунок 72 и укажите точку $E(1)$. 96

Рис. 72

Рис. 73

393°. Скопируйте рисунок 73, отметьте начало координат точку $O(0)$ и укажите точку $E(1)$. 97

394. Укажите координату точки, симметричной относительно начала координат, точке:

1) $K(3{,}071)$; 3) $M(-9)$; 5) $O(0)$;

2) $T\left(-\frac{2}{3}\right)$; 4) $E(1)$; 6) $H\left(6\frac{5}{11}\right)$.

395•. Точка M находится на координатной прямой между точками:

1) 2 и 3; 2) −2 и 3; 3) −3 и 2; 4) −2 и 2.

Между какими точками будет находиться точка M_1, симметричная точке M относительно начала координат?

396. 1) Какой станет координата точки $A(2)$, если точка переместится: 99, 100

а) на 2 единицы влево; в) на 5 единиц влево;

б) на 3 единицы вправо; г) на 20 единиц вправо?

2) Какой станет координата точки $B(-3)$, если точка переместится:

а) на 3 единицы влево; в) на 6 единиц влево;

б) на 4 единицы вправо; г) на 50 единиц вправо?

397. На координатной прямой отмечены точки:

$A(-3)$, $B(4)$, $C(-2)$.

Какими станут координаты этих точек, если начало координат перенести:

1) в точку A;

2) в точку B;

3) в точку C?

398●. 1) Найдите координату точки K, симметричной точке $A(6)$ относительно точки:

а) $O(0)$; б) $E(1)$; в) $S(-1)$; г) $T(-2)$.

2) Найдите координату точки K, симметричной точке $B(-5)$ относительно точки:

а) $O(0)$; б) $E(1)$; в) $C(-3)$; г) $D(-4)$. 98

399●. Концы отрезка AB имеют координаты:

1) $A(-8)$, $B(4)$;
2) $A(-13)$, $B(6)$.

Какую координату имеет середина этого отрезка M?

400●. Концы отрезка AB имеют координаты:

1) $A(-9)$, $B(0)$; 3) $A(-16)$, $B(-4)$;
2) $A(-8)$, $B(4)$; 4) $A(-8)$, $B(-26)$.

Какую координату имеет точка N этого отрезка такая, что $AN : BN = 2 : 1$?

401. Верно ли утверждение:

1) положительные числа располагаются на координатной прямой справа от нуля;
2) отрицательные числа располагаются на координатной прямой слева от положительных чисел;
3) число нуль расположено правее отрицательных чисел;
4) точка $D(-3)$ симметрична точке $C(2)$ относительно начала координат;
5) точки $T(70)$ и $P(-70)$ находятся на равном расстоянии от начала координат;
6) точка $R(-9)$ ближе к началу координат, чем точка $S(8)$;
7) точка $F(-1)$ ближе к началу координат, чем точка $H(-2)$;
8) точка $M(-2)$ симметрична точке $L(6)$ относительно точки $B(2)$?

402. Известно, что Москва находится на высоте 150 м относительно уровня Мирового океана, Санкт-Петербург — на высоте 5 м, Астрахань — на высоте −25 м, Ереван — на высоте 110 м, Мехико — на высоте 2240 м, Париж — на высоте 130 м. Назовите города в порядке убывания их высоты относительно уровня Мирового океана.

403. Возраст Москвы 850 лет, Новгорода — 1100 лет, Рима — 2700 лет, Александрии — 2300 лет, Киева — 1400 лет. В каком веке был основан каждый из этих городов?

Задачи на смекалку

404. Фигура, состоящая из отрезка AB длиной 2 см и симметричного ему отрезка, является отрезком, длина которого равна:

а) 4 см; б) 2 см; в)● 3 см.

Сделайте рисунок и отметьте на нём центр симметрии.

405. Отрезок координатной прямой длиной 5 единиц образован двумя симметричными друг другу относительно начала координат отрезками AB и A_1B_1 длиной по 3 единицы. Определите координаты точек A, B, A_1 и B_1.

406. Точку A передвинули по координатной прямой:

1) вправо на 6 единиц;

2) влево на 10 единиц.

Какой была координата точки A до перемещения, если в результате перемещения точка оказалась на таком же расстоянии от начала координат?

Контрольные вопросы и задания

1. Как устроена координатная прямая? Как на координатной прямой расположены числа 1 и −1 по отношению к началу координат?

2. Начертите координатную прямую и отметьте на ней числа: −2; 1,5; −0,5; −2,5.

3. Запишите координаты точек, симметричных точкам $P(3{,}57)$ и $T(-2{,}1)$ относительно начала координат. 101

14 Сравнение чисел

При измерении температуры видно, что чем выше поднимается столбик термометра, тем большую температуру он показывает. Чем правее на координатной прямой располагается точка, тем больше её координата.

407. Используя координатную прямую (рис. 74), сравните числа:

1) 7 и 3; 4) 0 и −1; 7) −1 и 1;
2) −5 и 2; 5) 0 и −3; 8) −5 и 8;
3) 0 и 8; 6) −5 и −3; 9) 7 и −7.

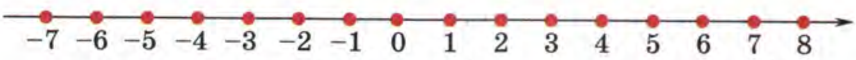


Рис. 74

408. На координатной прямой изображены числа (рис. 75).

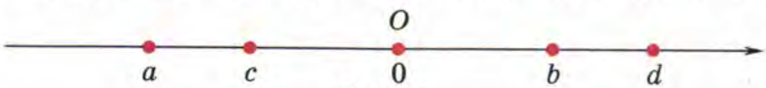


Рис. 75

Верно ли неравенство:

1) $a < c$; 4) $b > c$;
2) $c < 0$; 5) $d > a$;
3) $d > 0$; 6) $c < d$?

409. Изобразите на координатной прямой числа m, n, k, l, если известно, что $m > 0$, $n < 0$, $n < k < 0$ и $l > m$.

410. Сравните числа:

1) 5,2 и 5,25; 3) −3 и 0; 5) 6,9 и −2;
2) $7\frac{2}{3}$ и 0; 4) −5 и −7; 6) $-1\frac{2}{9}$ и $2\frac{3}{7}$. 102

411. 1) Чему равны расстояния от начала координат до точек:

$A(-4)$, $B(6)$, $C(-6)$, $D(-3{,}5)$, $F(15)$, $M(-100)$?

2) Расположите числа: −4; 6; −6; −3,5; 15; −100 в порядке возрастания.

Любое неотрицательное число больше любого отрицательного, а любое неположительное число меньше любого положительного.

Чем больше положительное число, тем дальше от начала координат находится соответствующая точка. Так, например, точка 5 от начала координат отстоит на 5 единиц, а точка 3 — на 3 единицы (рис. 76).

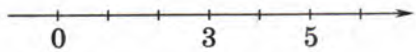


Рис. 76

Большее из двух отрицательных чисел на координатной прямой находится между вторым числом и началом координат, а значит, большее отрицательное число ближе к началу координат, чем меньшее. На рисунке 77 показано расположение точек −3 и −5 на координатной прямой. Точка −3 находится на расстоянии 3 единицы от начала координат, а точка −5 — на расстоянии 5 единиц.

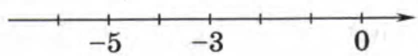


Рис. 77

Таким образом, для сравнения чисел достаточно знать их знаки и расстояния от соответствующих точек координатной прямой до начала координат. В математике для таких расстояний есть специальное название. 109

Расстояние от точки a на координатной прямой до начала координат называется *модулем* числа a и обозначается $|a|$.

Равенство $|-5| = 5$ читается: «модуль минус пяти равен пяти».

Модуль положительного числа равен самому числу:

$$|3{,}7| = 3{,}7; \left|1\frac{3}{11}\right| = 1\frac{3}{11}.$$

Поскольку число 0 изображается на координатной прямой началом координат, считают, что $|0| = 0$.

412. Чему равны модули чисел:

$$25; -25; -78; 5{,}1; -9{,}71; \frac{5}{12}; -\frac{9}{25}; 8\frac{3}{14}; -8\frac{3}{14}?$$

413. Даны точки:

1) $A(-3)$ и $B(5)$;
2) $A(7)$ и $B(-2)$;
3) $A(-3)$ и $B(-5)$;
4) $A(3)$ и $B(5)$.

а) Отметьте на координатной прямой точки A и B и найдите расстояние между ними в единичных отрезках.

б) Выразите длину отрезка AB через модули координат точек A и B. 104

414●. Выразите длину отрезка MN через модули координат точек M и N, если:

1) $M(m)$, $N(n)$ и точки M и N расположены по разные стороны от точки $O(0)$;

2) $M(m)$, $N(n)$ и точки M и N расположены по одну сторону от точки $O(0)$ и $|n| > |m|$.

415. Из двух чисел назовите то, у которого больший модуль:

1) $-35{,}7$ и $-35{,}07$;
2) $-\frac{11}{12}$ и $\frac{12}{13}$;
3) $-4{,}(56)$ и $-4{,}5(56)$;
4) $-5\frac{2}{3}$ и $6\frac{3}{5}$;
5) $\frac{5}{7}$ и $-\frac{9}{14}$;
6) $-3\frac{5}{8}$ и $-\frac{25}{7}$.

Сравнивать неотрицательные числа вы научились ещё в 5 классе. Правило сравнения отрицательных чисел можно сформулировать с использованием понятия модуля так.

Из двух отрицательных чисел больше то, у которого модуль меньше.

416. Сравните числа:

1) $12{,}15$ и $-12{,}71$; 4) $-\frac{5}{7}$ и $-\frac{2}{7}$; 7) $\frac{1}{2}$ и $-124{,}7$;

2) $-0{,}582$ и $-0{,}59$; 5) $-\frac{3}{11}$ и $-\frac{3}{4}$; 8) $-0{,}25$ и $-\frac{1}{4}$;

3) $-28{,}154$ и $-28{,}54$; 6) $+\frac{9}{100}$ и $-0{,}09$; 9) $-\frac{1}{3}$ и $-0{,}3$.

417. Округлите число: 1) $-13{,}4873$; 2) $-73{,}(82)$ до разряда:

а) десятков; в) десятых; д) тысячных.

б) единиц; г) сотых;

418. Запишите десятичной дробью, округлив до разряда сотых, число:

1) $-4\frac{2}{3}$; 2) $-\frac{5}{6}$; 3) $-15\frac{3}{8}$; 4) $-\frac{9}{7}$.

419. Изобразите координатную прямую и отметьте на ней точку $A(3)$. Какую координату имеет точка B, симметричная точке A относительно начала координат? Что общего у координат этих точек и чем они отличаются?

420. Назовите пары точек, симметричных относительно начала координат (рис. 78).

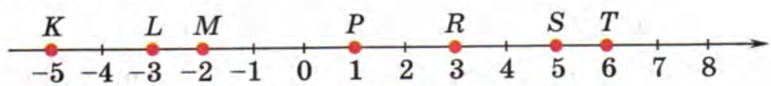


Рис. 78

Точки, симметричные относительно начала координат, находятся от него на одинаковых расстояниях, значит, модули их координат равны. Поскольку точки находятся по разные стороны от начала координат, их координаты имеют разные знаки.

Числа, имеющие одинаковые модули, но отличающиеся знаком, называются *противоположными*.

421. Запишите число, противоположное числу:

$1; -3; +17{,}25; 5\frac{13}{15}; -\frac{3}{4}; -5{,}013.$

422. Даны числа: $-1; 5{,}012; +\frac{7}{9}; -\frac{9}{7}; -5{,}012; 5{,}102; -\frac{7}{9}; 9.$

Среди данных чисел укажите числа, модули которых:

1) равны; 2) противоположны числам: $1; -5{,}102; -9; \frac{9}{7}.$

В определении противоположных чисел говорится о числах разных знаков, поэтому о числе нуль следует сказать отдельно.

Число 0 считают противоположным самому себе.

Натуральные числа, число нуль и числа, противоположные натуральным, объединяются в множество *целых чисел*. Поэтому натуральные числа иногда называют *целыми положительными числами*. Противоположные им числа называют *целыми отрицательными*.

423. Даны числа: $7{,}031; -82\ 560; \frac{7}{15}; -9\frac{5}{8}; 0; 23\ 706\ 561; 1.$

Назовите среди них:

1) натуральные числа;
2) целые положительные числа;
3) целые отрицательные числа;
4) целые неотрицательные числа;
5) отрицательные числа;
6) неположительные числа. 110

424. Найдите на координатной прямой (рис. 79) и запишите:

1) множество целых чисел, которые расположены между числами -3 и 4;

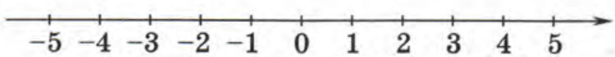


Рис. 79

2) множество натуральных чисел, которые расположены между числами −4 и 3;

3) множество целых неотрицательных чисел, которые расположены между числами −5 и 1;

4) множество целых отрицательных чисел, которые расположены между числами −4 и 2;

5) множество целых неположительных чисел, которые расположены между числами −2 и 2.

425. Между какими соседними целыми числами заключено число:

1) $-4{,}7$; 3) $-0{,}74$; 5) 0;

2) $-9{,}8$; 4) $-5\frac{7}{9}$; 6) $-0{,}1$?

Ответ запишите в виде двойного неравенства.

426. Запишите в виде неравенства предложение:

1) 5,3 — положительное число;
2) −41,3 — отрицательное число;
3) a — отрицательное число;
4) c — неотрицательное число;
5) b — положительное число;
6) m — неположительное число.

427. На координатной прямой (рис. 80) укажите точку O — начало координат. 107

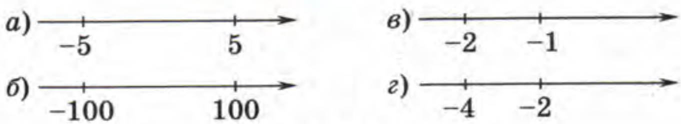


Рис. 80

428. Покажите, где на координатной прямой изображаются числа, модули которых: 107, 109

1) меньше 6;
2) больше 3;
3) больше 1, но меньше 3;
4) не больше 0.

429●. Расстояние между точками A и B равно 8, а их координаты являются противоположными числами. Какую координату может иметь точка A?

Использование понятия противоположных чисел позволяет дать модулю числа иное определение.

Модуль неотрицательного числа — это само число.
Модуль отрицательного числа — это число, противоположное данному.

$a \geqslant 0$	$a < 0$
$\|a\| = a$	$\|a\| = -a$

430. 1) Найдите значение выражения $|x|$, если x равен:

$13{,}52$; -18; $-9\frac{11}{15}$; -11; $\frac{1}{9}$.

2) Какое из указанных значений x имеет:

а) наибольший модуль;

б) наименьший модуль?

3) Модуль какого числа меньше модуля любого другого числа?

431○. Отметьте на координатной прямой числа, модули которых равны: 2, 6, 0.

432. Какое число противоположно числу:

а) c; б) $-c$? 105, 106

433○. Изобразите на координатной прямой точку a, если:

1) a равно: $+2$; $-1{,}5$; $2{,}25$; $3{,}75$;

2) $-a$ равно: -2; $+2{,}5$; $-1{,}2$; $+0{,}25$.

434○. Изобразите на координатной прямой точку $-b$, если:

1) b равно: 3; $+4$; -2; -5;

2) $-b$ равно: $-3{,}5$; $+7$; -6; $+4{,}5$.

435°. Какое число противоположно числу $-a$, равному:

$4; -7; 12{,}831; -\frac{3}{4}; 19\frac{6}{23}$?

Если число a положительно, то противоположное ему число $-a$ отрицательно. Так, например, если $a = 3$, то $-a = -3$.

Если же число a отрицательно, то противоположное ему число $-a$ положительно. Так, для числа a, равного -3, число $-a = 3$. Если подставить в это равенство вместо a его значение -3, получим, что $-(-3) = 3$. В математике нельзя ставить подряд два знака арифметических действий, поэтому в последнем равенстве число -3 заключено в скобки.

Правило чтения выражений с несколькими минусами

Выражение $-(-d)$ можно читать по разному:
— число, противоположное числу минус d;
— минус минус d.

436. 1) Перепишите равенство, поставив вместо многоточия пропущенное число, если нужно, заключив его в скобки:

а) $-(-5) = \ldots$; г) $-(+2{,}7) = \ldots$; ж)● $-(-(-5)) = \ldots$;
б) $3 = -\ldots$; д) $-\ldots = 10{,}3$; з)● $-(-(-(-5))) = \ldots$;
в) $-\ldots = 8$; е) $\frac{7}{8} = -\ldots$; и)● $-(-(-(-(-3)))) = \ldots$.

2) Прочитайте полученные равенства.

437. Запишите без скобок число:

1) $-(-2{,}7)$; 3) $-(-7{,}03)$; 5) $-(-a)$;
2) $-\left(+2\frac{1}{5}\right)$; 4) $-\left(+7\frac{2}{9}\right)$; 6) $-(+b)$.

438°. Найдите значение выражения:

1) $-b$, если b равно: $4{,}05; -10\frac{2}{3}; 8; -(-2{,}3)$;

2) c, если $-c$ равно: $5\frac{5}{17}; -16; +7{,}92; -\left(-9\frac{12}{13}\right)$;

3) $-(-d)$, если d равно: $-7; 3{,}4; -21{,}(1); -(-6)$.

439. 1) Каким числом — отрицательным, положительным или нулём — является $-k$, если k:

а) отрицательное; б) положительное; в) нуль?

2) Решите уравнение:

а) $-x = 3$; б) $|x| = 5,2$; в) $-|x| = 3\frac{4}{5}$; г) $-x = -3\frac{2}{7}$.

440. Сравните числа:

1) $-32,58$ и $|-32,582|$;
2) $|-9,031|$ и $|-9,013|$;
3) $|-4,5|$ и $-\frac{45}{10}$;
4) $\left|-\frac{9}{10}\right|$ и $\left|-\frac{10}{11}\right|$;
5) $\left|-\frac{5}{173}\right|$ и 0;
6) $\left|-\frac{18}{17}\right|$ и $\frac{18}{19}$.

441. Сравните числа, используя разные приёмы сравнения:

111, 112, 114

1) $\frac{17}{23}$ и $\frac{17}{25}$;
2) $\frac{5}{17}$ и $-\frac{19}{1999}$;
3) $-\frac{21}{29}$ и $-\frac{23}{29}$;
4) 5,67 и $-5,67$;
5)● $-\frac{200}{199}$ и $-\frac{19}{20}$;
6)● $\frac{2}{15}$ и $\frac{8}{65}$;
7)● $-\frac{2004}{2005}$ и $-\frac{2006}{2007}$;
8)● $\frac{9}{19}$ и $\frac{11}{21}$;
9) $-\frac{11}{42}$ и $-\frac{7}{36}$;
10) $\frac{56}{23}$ и 2,45;
11) 0 и $-0,01$;
12)● $-0,36$ и $-0,(360)$;
13)● $-0,(75)$ и $-0,756$;
14)● $-0,(47)$ и $-0,(473)$.

442. Найдите значение выражения:

1) $|-0,56| : |0,7|$;
2) $|2,5| : 5$;
3) $\left|\frac{12}{35}\right| \cdot \left|-1\frac{1}{6}\right|$;
4) $|-3,72| + |9,4|$;
5) $|-56| + |77|$;
6) $\left|-2\frac{1}{12}\right| + \frac{17}{30}$;
7) $|-2,3| - 1,75$;
8) $\left|-\frac{4}{5}\right| - \left|-\frac{2}{3}\right|$;
9) $\left|8\frac{1}{8}\right| : \left|-\frac{4}{9}\right|$. 103

443. Известно, что числа a и b — положительные, а числа c и d — отрицательные. Сравните:

1) a и 0; 4) a и c; 7) $-|d|$ и d;
2) c и 0; 5) $-d$ и $-b$; 8) a и $|a|$;
3) $-b$ и 0; 6) $|c|$ и c; 9) $-b$ и a.

444●. Какую цифру можно вставить вместо *, чтобы получилось верное неравенство:

1) $-2671 < -267*$; 4) $-78,* > -78,1$;
2) $-9*83 > -9132$; 5) $-\frac{4}{9} < -\frac{*}{9}$;
3) $-*6,32 > -26,74$; 6) $-\frac{*}{9} > -\frac{2}{3}$?

445. Каково расстояние (в единичных отрезках координатной прямой) между точками с координатами:

1) 0 и a;
2) $-a$ и a;
3) $-a$ и 0;
4) a и $-3a$?

446. Верно ли утверждение:

1) меньшее из двух отрицательных чисел имеет больший модуль;
2) из двух чисел с одинаковыми знаками больше то, которое имеет больший модуль;
3) из двух чисел с разными знаками меньше то, которое имеет меньший модуль;
4) из двух положительных чисел больше то, которое имеет больший модуль;
5) из двух отрицательных чисел больше то, которое имеет меньший модуль;
6) отрицательное число всегда меньше своего модуля;
7) положительное число больше отрицательного;
8) меньшее из двух отрицательных чисел может иметь меньший модуль?

Ответ обоснуйте.

Задачи на смекалку

447. Начало координат перенесли на 5 единиц вправо. Можно ли утверждать, что при этом:

1) координаты всех точек уменьшились;
2) модули координат всех точек уменьшились?

448. Начало координат перенесли на 6 единиц влево. Можно ли утверждать, что при этом:

1) координаты всех точек увеличились;
2) модули координат всех точек увеличились? 113

449. Начало координат перенесли:

1) на 10 единиц влево;
2) на 12 единиц вправо.

При этом модуль координаты точки A не изменился. Какую координату имела точка A до переноса?

450. На координатной прямой начало координат передвинули, однако при этом не изменился модуль координаты точки: 1) $A(6)$; 2) $B(-8)$.

В каком направлении и на сколько единиц передвинули начало координат?

451. Найдите наибольшее значение выражения:

1) $-|x|$; 2) $2 - |x|$; 3) $-|x - 2|$; 4) $-(x - 2)^2$.

Контрольные вопросы и задания

1. Какие числа называют противоположными? Назовите число, противоположное числу: 3; −5.
2. Что такое модуль числа?
3. Найдите $|c|$, если c равно: $5; -3; -\frac{2}{7}; 0; 0{,}15$.
4. Расположите следующие числа в порядке возрастания: $-4{,}74; 4{,}21; 4\frac{7}{8}; -\frac{48}{11}; -4$. Тест 115

15 Сложение и вычитание чисел

Перемещение точки координатной прямой вправо увеличивает её координату. При этом координата увеличивается ровно на столько единиц, на сколько была передвинута точка. Так, например, передвинув точку $A(5)$ на 3 единицы вправо (рис. 81), мы тем самым увеличили её координату на 3.

Увеличение неотрицательного числа на 3 мы записывали с помощью знака сложения: $5 + 3 = 8$. Так же будем записывать и увеличение отрицательных чисел.

Рисунок 82 иллюстрирует увеличение на 3 единицы числа -5. При этом получаем $-5 + 3 = -2$. 116

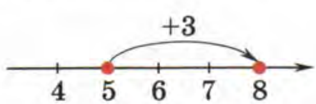


Рис. 81

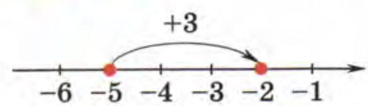


Рис. 82

452. С помощью координатной прямой найдите сумму:

1) $5 + 4$;	4) $-3 + 5$;	7) $-5 + 8$;
2) $-5 + 4$;	5) $-2 + 7$;	8) $-6 + 6$;
3) $-7 + 5$;	6) $-2 + 3$;	9) $-9 + 9$. 117

Рассматривая перемещение точки координатной прямой влево, можно прийти к выводу о том, что уменьшение числа записывается с помощью вычитания.

453•. 1) Как изменяется координата точки при перемещении точки по координатной прямой влево?

2) Точку $B(5)$ координатной прямой передвинули на 3 единицы влево (рис. 83).

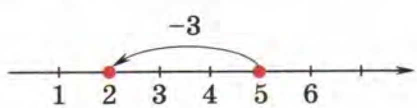


Рис. 83

На сколько уменьшилась её координата? Какое арифметическое действие соответствует этому изменению?

3) Отметьте на координатной прямой точку $C(-5)$, изобразите её перемещение на 3 единицы влево и найдите разность $-5 - 3$. 118

454. Что должно быть записано в пустых ячейках таблицы?

Координата точки	Перемещение точки	Действие с координатой точки	Новая координата точки
5	На 7 влево	$5 - 7$	-2
-4	На 9 вправо		
6			-5
	На 4 влево		-10
-8			3
		$-7 - 2$	

455. С помощью координатной прямой найдите разность:

1) $5 - 4$; 4) $3 - 5$; 7) $9 - 6$;
2) $-5 - 4$; 5) $2 - 7$; 8) $6 - 6$;
3) $-3 - 5$; 6) $6 - 9$; 9) $8 - 8$. 119

456. Вычислите значения выражений, объяснив их смысл:

1) как движение вдоль координатной прямой;
2) как изменение температуры.

а) $-16 + 8$; д) $19 - 12$;
б) $20 - 35$; е) $12 - 19$;
в) $-9 + 15$; ж) $-14 - 16$;
г) $-6 - 21$; з) $+14 + 16$.

Сложение и вычитание нескольких чисел тоже можно рассматривать как описание движения точки по координатной прямой.

Так, выражение $-5 + 7 - 4$ соответствует перемещениям точки, показанным на рисунке 84. В результате перемещений на 7 вправо и на 4 влево точка оказалась на 3 единицы правее, чем была вначале, т. е. новая координата точки равна -2.

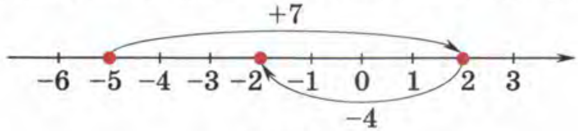


Рис. 84

457. На рисунке 85 схематически показаны перемещения точки по координатной прямой. Задайте эти перемещения числовыми выражениями. Чему равны значения этих выражений?

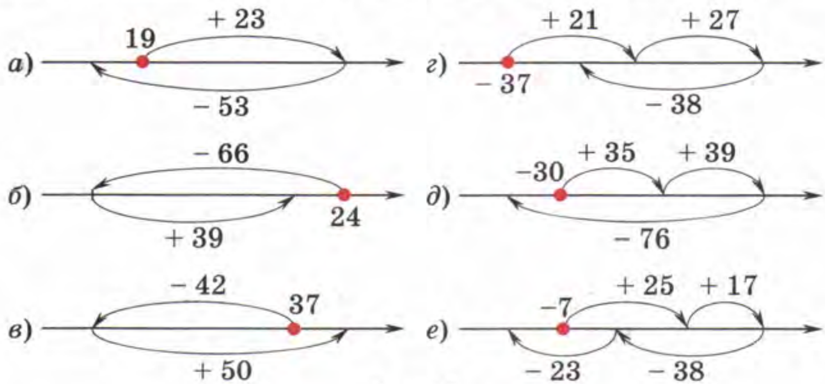


Рис. 85

458. Сделайте схематические рисунки к выражению и найдите его значение:

1) $57 - 82 + 13$;
2) $29 - 82 + 63$;
3) $-137 + 68 - 72$;
4) $192 - 230 - 172$;
5) $-114 - 39 - 72$;
6) $-136 + 212 - 92$;
7) $212 - 127 - 98$;
8) $-103 - 69 + 194$.

459●. Точки M и N перемещаются по координатной прямой, оставаясь всё время симметричными друг другу относительно начала координат. Перемещения точки M записываются с помощью выражения:

1) $-4 + 9 - 10$; 2) $3 - 4 - 7$; 3) $-2 - 3 + 5 - 7$; 4) $1 + 6 - 15 + 5$.

Задайте выражением перемещение точки N и найдите значение этого выражения.

460°. После двух перемещений по координатной прямой координата точки $A(-10)$ стала равной: 1) 8; 2) -7. Запишите числовое выражение, соответствующее какому-нибудь варианту перемещения точки, если она:

а) оба раза передвигалась в одном и том же направлении;

б) первый раз передвинулась вправо, а второй — влево;

в) первый раз передвинулась влево, а второй — вправо.

Рассмотрим теперь, как прибавить отрицательное число. Для этого сначала нужно понять, какой смысл имеет, например, выражение $5 + (-3)$. Пусть температура воздуха была 5 °C. Затем она изменилась на -3 °C, т. е. понизилась на 3 °C. Тогда она станет равной 2 °C, а результат изменения будет $5 + (-3) = 2$. Для изображения на координатной прямой прибавления к числу 5 числа -3, чтобы получить число 2, надо точку с координатой 5 переместить влево на 3 единицы, что отражает действие вычитания числа 3 из числа 5.

Следовательно, $5 + (-3) = 5 - 3$. 121

Прибавление отрицательного числа можно заменить вычитанием противоположного ему положительного числа.

461. Вычислите:

1) $10 + (-7)$;	4) $80 + (-90)$;
2) $-12 + (-8)$;	5) $11 + (-8)$;
3) $23 + (-30)$;	6) $12 + (-13)$.

Осталось научиться вычитать отрицательные числа. Снова возьмём числа 5 и -3 и рассмотрим их разность $5 - (-3)$. Обозначим буквой b значение этой разности, т. е. $5 - (-3) = b$, тогда $b + (-3) = 5$.

Прибавление числа -3 заменим вычитанием числа 3, а именно: $b - 3 = 5$. Отсюда $b = 5 + 3$. Мы получили, что $5 - (-3) =$ $= 5 + 3$, т. е. вычитание отрицательного числа (-3) привело к тому же результату, что и прибавление противоположного ему числа 3.

Вычитание отрицательного числа можно заменить прибавлением противоположного ему положительного числа.

462. Вычислите:

1) $8-(-2)$;
2) $13-(-9)$;
3) $15-(-19)$;
4) $-20-(-10)$;
5) $-11-(-13)$;
6) $28-(-35)$.

Сформулированные выше правила прибавления и вычитания можно объединить в одно общее правило.

Вычитание числа можно заменять прибавлением, а прибавление — вычитанием противоположного числа:

$$\boldsymbol{a-b=a+(-b),}$$

$$\boldsymbol{a+b=a-(-b).}$$

463. Пользуясь равенством $a-b=a+(-b)$, замените знаки вычитания знаками сложения в выражении:

1) $-24+33-8-12$;
2) $56+32-70-65$;
3) $-61-29+12+7$;
4) $33-(-87)-13$;
5) $-45+(-24)-(-15)$;
6) $-29-(-71)-95$.

Выражения, которые вам встретились в задании 463, содержали только числа и знаки арифметических действий сложения «+» и вычитания «−». Такие выражения можно представить в виде сумм (что вы и сделали), поэтому их часто называют суммами.

Такое расширение понятия суммы позволяет экономить время. Так, например, при изучении делимости чисел можно было бы ограничиться свойством делимости суммы и не рассматривать отдельно свойство делимости разности.

В этом пункте вы научились вычислять значения различных сумм чисел. При этом встретились четыре разные ситуации, которые можно проиллюстрировать на рисунке 86.

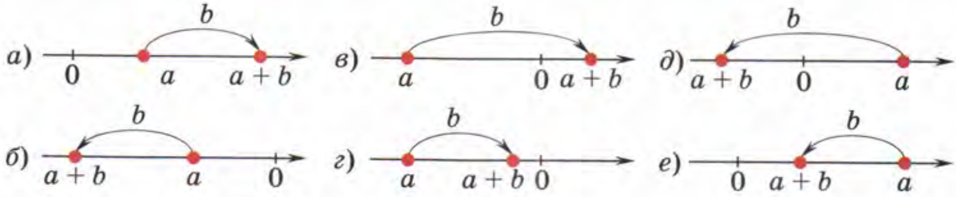


Рис. 86

На рисунке 86, *а* складываются два положительных числа. Их сумма положительна, а её модуль равен сумме модулей слагаемых.

На рисунке 86, *б* складываются два отрицательных числа. Их сумма отрицательна, а её модуль равен сумме модулей слагаемых.

Эти два случая объединяет правило сложения чисел одного знака.

Сумма чисел одного знака имеет тот же знак, что и слагаемые, а её модуль равен сумме модулей слагаемых.

На рисунке 86, *в*, *г*, *д*, *е* складываются числа разных знаков. Во всех случаях модуль суммы находится вычитанием из большего модуля меньшего модуля, а знак суммы тот же, что у слагаемого с большим модулем. Отсюда получаем правило сложения чисел с разными знаками.

Сумма двух чисел разных знаков имеет тот же знак, что и слагаемое с большим модулем, а модуль суммы равен разности большего и меньшего модулей слагаемых.

464. Не выполняя вычислений, скажите, какой знак неравенства следует поставить вместо многоточия: 120

1) $-5{,}7 + 3{,}89 \dots 0$;
2) $3\frac{7}{8} + \left(-4\frac{7}{90}\right) \dots 0$;
3) $-34{,}56 + (-16{,}93) \dots 0$;
4) $5{,}671 - 7{,}952 \dots 0$;
5) $-32\frac{8}{110} + 33\frac{9}{50} \dots 0$;
6)● $9{,}36 - 5{,}92 - 6{,}57 \dots 0$.

465. Не вычисляя, скажите, какой знак неравенства следует поставить вместо многоточия:

1) $78 - 92 \ldots -78 + 92$;
2) $-28 + 56 \ldots 28 - 56$;
3) $5 + \left(-3\frac{5}{7}\right) \ldots -5 + 3\frac{5}{7}$;
4) $-1 + 0{,}45 \ldots 1 - 0{,}45$.

466. 1) Не вычисляя, назовите выражения в порядке возрастания их значений:

а) $+15 - 9$; $-15 - 9$; $(-15) + 9$; $+15 + 9$;
б) $-23 - 50$; $+23 - 50$; $(-23) + 50$; $+23 + 50$;
в) $-71 + 45$; $71 - 45$; $(-71) - 45$; $71 + 45$;
г) $(-38) - 42$; $-38 + 42$; $38 - 42$; $38 + 42$.

2) Проверьте ответы, вычислив значения выражений.

467. Определите сначала знак, а затем найдите значение выражения:

1) $-6{,}8 + 2{,}5$; $-6{,}8 - 2{,}5$; $+6{,}8 - 2{,}5$; $+6{,}8 + 2{,}5$;
2) $-4{,}27 - 7{,}3$; $-4{,}27 + 7{,}3$; $4{,}27 - 7{,}3$; $4{,}27 + 7{,}3$;
3) $-9{,}4 - 3{,}6$; $-9{,}4 + 3{,}6$; $9{,}4 - 3{,}6$; $+9{,}4 + 3{,}6$;
4) $0{,}76 - 2{,}5$; $-0{,}76 - 2{,}5$; $-0{,}76 + 2{,}5$; $+0{,}76 + 2{,}5$;
5) $-\frac{11}{24} + \frac{7}{18}$; $-\frac{11}{24} - \frac{7}{18}$; $+\frac{11}{24} - \frac{7}{18}$; $+\frac{11}{24} + \frac{7}{18}$;
6) $+\frac{5}{6} - \frac{7}{9}$; $-\frac{5}{6} - \frac{7}{9}$; $-\frac{5}{6} + \frac{7}{9}$; $+\frac{5}{6} + \frac{7}{9}$. 122, 127

468. Не выполняя вычислений, сравните:

1) $-15 + 8$ и -15;
2) $-2{,}3 - 4{,}5$ и $-2{,}3$;
3) $25 - 73$ и -73;
4) $-9{,}1 - 83{,}2$ и $-83{,}2$.

469. Найдите суммы:

1) $\frac{3}{4} + 1$; $-\frac{3}{4} - 1$; $-\frac{3}{4} + 1$; $\frac{3}{4} - 1$;
2) $1 + \frac{3}{7}$; $1 - \frac{3}{7}$; $-1 - \frac{3}{7}$; $(-1) + \frac{3}{7}$;
3) $4 + \frac{2}{9}$; $-4 + \frac{2}{9}$; $(-4) - \frac{2}{9}$; $-\frac{2}{9} + 4$;
4)° $2 + \frac{8}{5}$; $-2 - \frac{8}{5}$; $2 - \frac{8}{5}$; $-2 + \frac{8}{5}$.

470°. Найдите значение выражения: 123

1) $\frac{11}{24}+\frac{7}{36}$; 4) $-\frac{18}{33}+\frac{7}{22}$; 7) $+7\frac{8}{225}-8\frac{11}{210}$;

2) $\frac{13}{35}-\frac{5}{21}$; 5) $8\frac{11}{15}+5\frac{6}{35}$; 8) $-25\frac{1}{105}+19\frac{5}{198}$;

3) $-\frac{17}{42}-\frac{6}{63}$; 6) $-17\frac{5}{84}-26\frac{7}{60}$; 9) $-31\frac{12}{185}+32\frac{5}{222}$.

471. Представьте в виде:

1) суммы целого числа и правильной дроби;

2) разности целого числа и правильной дроби число:

а) $4\frac{4}{9}$; в) $7\frac{3}{4}$; д) $1\frac{2}{7}$; ж) $5\frac{4}{11}$;

б) $-4\frac{4}{9}$; г) $-7\frac{3}{4}$; е) $-1\frac{2}{7}$; з) $-5\frac{4}{11}$.

Переместительный и сочетательный законы сложения сохраняют силу и при действиях с отрицательными числами.

$$a+b=b+a,$$
$$(a+b)+c=a+(b+c).$$

472. Вычислите устно рациональным способом:

1) $27+5-27$; 4) $-71+22+71$;

2) $-28+4+24$; 5) $-4,53+4,2+0,33$;

3) $100-23-77$; 6) $3,54-2,74+2,2$. 128

473. Назовите слагаемые и вычислите значения сумм:

1) $5-4,3$; 6) $-3,7-(-5,4)-1,5$;

2) $-7+3,4$; 7) $7,6+(-4,5)-2,1$;

3) $5,5-(-3,7)$; 8) $-2,08-5,02+(-6,9)+11$;

4) $3,6+(-5,4)$; 9) $2-\frac{5}{3}+\frac{1}{6}$;

5) $2,5-3,6+3,4$; 10) $\frac{1}{3}-2-\left(-\frac{4}{9}\right)$. 130

474. Вычислите устно:

1) $-2,8 + 1,4 + 2,3$;
2) $-3,15 - 5,25 + 4$;
3) $-5,2 + 8,3 - 5,2$;
4) $10 - 4,3 - 9,7$;
5) $17,4 - 56 + 22,6$;
6) $-24,8 + 60 - 35,2$. 131

475. Дано выражение:

1) $3,4 + (-7,2) + (-2,8) + 6,6$;
2) $-5,1 + 8,3 + 8,7 + (-4,9)$;
3) $29,6 + (-54,59) + 70,4 + (-55,41)$;
4) $(-98,3) + (-52,7) + 25,24 + 25,26$;
5) $(-31,6) + 11,08 + (-31,04) + 62,64$;
6) $43,52 + 47,8 + (-60,8) + (-100,52)$.

Вычислите значение выражения по следующему плану:

1 найдите сумму положительных слагаемых;

2 найдите сумму отрицательных слагаемых;

3 найдите значение всего выражения.

476. Дано выражение:

1) $-4 - \frac{7}{12} + 2 + \frac{5}{14}$;
2) $-2 + \frac{5}{9} - 4 - \frac{2}{15}$;
3) $+3 - \frac{4}{21} - 5 - \frac{3}{35}$;
4) $-1 - \frac{4}{27} - 2 - \frac{5}{45}$;
5) $-1 - \frac{13}{54} + 2 + \frac{7}{90}$;
6) $1 + \frac{13}{18} - 2 - \frac{5}{48}$.

Найдите значение выражения по следующему плану:

1 найдите сумму целых слагаемых;

2 найдите сумму дробных слагаемых;

3 найдите значение всего выражения.

477. Решите уравнение:

1) $-x = -\frac{3}{8}$;
2) $x + 34,56 = 0$;
3) $567 - x = 0$;
4) $x - 0,8 = -\frac{3}{4}$;

5) $-y = -23 - 9\frac{2}{7}$;

6) $140 - x : 2 = |-46|$;

7) $(x - 3) \cdot 5 = -6{,}4 + 12{,}9$;

8) $2x - \frac{7}{30} = -\frac{11}{35}$.

478. Вычислите устно, применив законы арифметических действий:

1) $196 + (-596 + 35{,}5)$;

2) $-735 + 288 + (-388)$;

3) $(372 - 789) + 528$;

4) $-17\frac{13}{53} + \left(-28{,}9 + \frac{13}{53}\right)$;

5) $17{,}84 - 5\frac{8}{13} - 4\frac{5}{13}$;

6) $\left(8\frac{11}{23} - 5\frac{37}{59}\right) - 4\frac{22}{59}$.

479•. Найдите значение выражения рациональным способом:

1) $(-8) + (-6) + (-4) + (-2) + 0 + 2 + 4 + 6 + 8$;
2) $(-50) + (-49) + (-48) + \ldots + 48 + 49 + 50$;
3) $-1 + 2 - 3 + 4 - \ldots - 9 + 10 - 11$;
4) $-1 + 2 - 3 + 4 - \ldots - 99 + 100$;
5) $1 - 2 + 3 - 4 + \ldots + 9 + (-10)$;
6) $1 - 2 + 3 - 4 + \ldots + 99 - 100$;
7) $2 - 4 + 6 - 8 + \ldots + 98 - 100$;
8) $-2 + 4 - 6 + 8 - \ldots - 98 + 100$.

480. Какие из следующих утверждений верны?

1) Сумма двух любых положительных чисел положительна.
2) Сумма двух любых отрицательных чисел отрицательна.
3) Сумма положительного и отрицательного чисел может быть положительной.
4) Сумма положительного и отрицательного чисел может быть отрицательной.
5) Сумма положительного и отрицательного чисел может быть равной нулю.
6) Разность положительных чисел может быть положительной.
7) Разность положительных чисел может быть отрицательной.
8) Разность положительных чисел может быть равной нулю.

481. Сравните:

1) $|56 - 83|$ и $|56| + |83|$;
2) $\left|1 - \frac{7}{11}\right|$ и $|1| - \left|-\frac{7}{11}\right|$;
3) $|-9{,}4 - 3{,}8|$ и $|-9{,}4| + |-3{,}8|$;
4) $\left|-\frac{11}{27} + \frac{7}{27}\right|$ и $\left|-\frac{11}{27}\right| + \left|\frac{7}{27}\right|$.

482. 1) В воскресенье утром температура воздуха была -3 °С. Какой стала температура воздуха в понедельник, если за сутки она изменилась:

а) на -5 °С; б) на $+7$ °С; в) на $+3$ °С?

2) За первую половину ночи температура изменилась на -5 °С, за вторую — на -7 °С. На сколько градусов изменилась температура за ночь?

3) За первую половину суток температура изменилась на -5 °С, а за вторую — на $+7$ °С. На сколько градусов изменилась температура в течение суток?

Задачи на смекалку

483. На координатной прямой (рис. 87) отмечены точки $A(a)$ и $B(a + b)$. Постройте точку $C(a - b)$. 125, 126

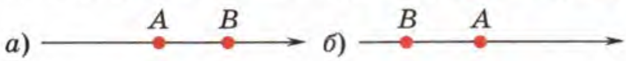


Рис. 87

484. На координатной прямой (рис. 88) отмечены точки $A(a)$, $B(b)$ и $C(a + b)$. Определите положение начала координат.

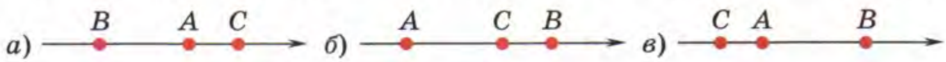


Рис. 88

485. На координатной прямой (см. рис. 88) отмечены точки $A(a)$, $B(b)$ и $C(a - b)$. Расположите в порядке возрастания числа $|a|$, $|b|$ и $|a - b|$. 129

486. 1) К числу a прибавили 14, при этом модуль суммы оказался меньше, чем $|a|$. Каким может быть число a?

2) К числу a прибавили -10, при этом модуль суммы оказался больше, чем $|a|$. Каким может быть число a? 132

487. Записали 11 чисел подряд так, что суммы любых двух соседних оказались положительны. Может ли сумма всех 11 чисел быть отрицательной?

Контрольные вопросы и задания

1. Может ли сумма двух чисел быть меньше:
а) каждого своего слагаемого;
б) одного слагаемого, но больше другого?

2. Может ли разность двух чисел быть больше уменьшаемого?

3. Объясните смысл выражения $3 + 6 - 8 + 10$ как движения точки по координатной прямой.

4. Почему выражение $-5 + 8 - 11$ называют суммой чисел?

5. Вычислите $-24{,}47 + 30{,}29 - 35{,}53$. Тест 124

16 Умножение чисел

Впервые вы познакомились с умножением на натуральные числа как с действием, заменяющим сложение нескольких одинаковых слагаемых. Так, например,

$$3 + 3 + 3 + 3 + 3 = 3 \cdot 5.$$

Произведение $(-3) \cdot 5$ можно рассматривать как сумму пяти слагаемых, каждое из которых равно -3:

$$(-3) \cdot 5 = (-3) + (-3) + (-3) + (-3) + (-3) = -15.$$

488. Запишите в виде произведения сумму: 133

1) $(-7) + (-7) + (-7) + (-7) + (-7)$;
2) $-\frac{3}{4} - \frac{3}{4} - \frac{3}{4} - \frac{3}{4}$;
3) $-a - a - a - a - a$;
4) $-2c - 2c - 2c$.

Во всех рассмотренных случаях произведение двух чисел с разными знаками оказалось равным произведению модулей этих чисел, взятому со знаком «−».

Произведением двух чисел называют произведение модулей этих чисел, взятое со знаком «+», если оба числа одного знака, или со знаком «−», если они разных знаков.

489. Найдите произведение чисел с разными знаками: 135

1) $2{,}783 \cdot (-1)$;
2) $(-1) \cdot 13\frac{2}{7}$;
3) $3{,}21 \cdot (-2)$;
4) $\left(-\frac{3}{8}\right) \cdot 12$;
5) $(-100) \cdot 0{,}087$;
6) $\frac{3}{4} \cdot \left(-\frac{8}{9}\right)$.

Найдём, например, чему равно произведение двух отрицательных чисел $\left(-\frac{2}{3}\right) \cdot \left(-\frac{6}{5}\right)$.

Модуль этого произведения равен $\frac{2}{3} \cdot \frac{6}{5} = \frac{4}{5}$. Оба множителя одного знака, значит, произведение берётся со знаком «+», т. е. оно положительно:

$$\left(-\frac{2}{3}\right) \cdot \left(-\frac{6}{5}\right) = +\frac{4}{5} = \frac{4}{5}.$$

490. Найдите произведение двух отрицательных чисел:

1) $(-3084) \cdot (-1)$;
2) $(-401) \cdot (-1000)$;
3) $(-10) \cdot (-3{,}5)$;
4) $\left(-\frac{14}{15}\right) \cdot \left(-\frac{5}{7}\right)$;
5) $(-324) \cdot (-50)$;
6) $(-4{,}7) \cdot (-11)$. 136

491. Вычислите: 134

1) $3{,}72 \cdot (-9)$;
2) $(-42{,}02) \cdot (-50)$;
3) $(-58{,}9) \cdot 0{,}5$;
4) $\left(-\frac{36}{175}\right) \cdot \left(-5\frac{5}{6}\right)$;
5) $1\frac{11}{25} \cdot (-1{,}25)$;
6) $-\frac{11 \cdot 13}{17 \cdot 5} \cdot \left(-\frac{5 \cdot 17}{13}\right)$.

Таким образом, при перемножении чисел находят произведение модулей множителей, а знак, который ставится перед произведением, определяют по *правилу знаков*.

Плюс на плюс даёт плюс.
Минус на минус даёт плюс.
Плюс на минус даёт минус.

$(+)\cdot(+) \rightarrow (+)$ $(-)\cdot(-) \rightarrow (+)$ $(+)\cdot(-) \rightarrow (-)$

Число нуль знака не имеет, его модуль равен нулю, поэтому ***если среди множителей встретился нуль, то такое произведение равно нулю.*** 137

492. Какой знак неравенства должен стоять вместо многоточия: 138

1) $(-378)\cdot(-538) \ldots 0$;
2) $(-9{,}804)\cdot 5{,}032 \ldots 0$;
3) $(-678)\cdot(876 - 876) \ldots 0$;
4) $\frac{345}{997}\cdot(-853) \ldots 0$;
5) $\left(-\frac{227}{701}\right)\cdot\left(-\frac{677}{947}\right) \ldots 0$;
6) $(-5{,}93 - 5{,}93)\cdot 0{,}789 \ldots 0$?

493. Не вычисляя, сравните значения выражений:

1) $3{,}819\cdot(-9{,}07)$ и $(-3{,}819)\cdot(-9{,}07)$;
2) $(-0{,}934)\cdot(-4{,}925)$ и $0{,}934\cdot 4{,}925$;
3) $\left(-45\frac{13}{19}\right)\cdot 52\frac{1}{6}$ и $45\frac{13}{19}\cdot\left(-52\frac{1}{6}\right)$;
4) $\left(-\frac{27}{29}\right)\cdot(-567)$ и $(-567)\cdot\frac{27}{29}$;
5) $38\cdot(-9)$ и $(-4)\cdot(-10)$;
6)● $(-5{,}37)\cdot(-7{,}83)$ и $6{,}27\cdot 8{,}11$;
7)● $\left(-45\frac{13}{19}\right)\cdot 52\frac{1}{6}$ и $46\cdot(-53)$;
8)● $\left(-\frac{27}{29}\right)\cdot(-56{,}7)$ и $(-567)\cdot\left(-\frac{27}{290}\right)$. 139, 140

Когда в произведении больше двух множителей, правило знаков можно применить сначала к первым двум из них, затем к полученному знаку и знаку третьего множителя и т. д. Так, например, при вычислении произведения

$$(-2{,}5) \cdot 3 \cdot (-5) \cdot (-4) = -(2{,}5 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 4) = -150$$

знак находился по схеме

$$(-) \cdot (+) \cdot (-) \cdot (-)$$
$$(-) \cdot (-) \cdot (-)$$
$$(+) \cdot (-)$$
$$(-)$$

494. Положительным или отрицательным числом является значение выражения:

1) $(-35) \cdot (-82) \cdot (-54)$;
2) $(-5{,}8) \cdot (-4{,}9) \cdot (-1{,}2) \cdot (-9)$;
3) $\left(-\frac{3}{5}\right) \cdot \frac{7}{9} \cdot \left(-\frac{15}{42}\right)$;
4) $(-45 - 23 - 65 - 11) \cdot (-83)$;
5) $(2{,}8 + 6{,}4 + 9{,}3 + 6{,}8) \cdot (-4{,}5)$;
6) $1 \cdot (-2) \cdot 3 \cdot (-4) \cdot 5 \cdot (-6) \cdot \ldots \cdot 10$;
7) $10 \cdot (-11) \cdot 12 \cdot (-13) \cdot \ldots \cdot (-19) \cdot 20$;
8) $\frac{1}{2} \cdot \left(-\frac{2}{3}\right) \cdot \frac{3}{4} \cdot \left(-\frac{4}{5}\right) \cdot \ldots \cdot \frac{9}{10} \cdot \left(-\frac{10}{11}\right)$? 141

Переместительный и сочетательный законы умножения сохраняют силу и при действиях с отрицательными числами.

$$a \cdot b = b \cdot a,$$
$$(a \cdot b) \cdot c = a \cdot (b \cdot c).$$

495. Вычислите:

1) $\frac{14}{15} \cdot \left(-1\frac{3}{7}\right) - \frac{7}{10} \cdot \frac{3}{14}$;
2) $\left(1\frac{8}{21} - \frac{19}{42} - 3\frac{5}{28}\right) \cdot \left(-\frac{14}{15}\right)$;

3) $16 \cdot \left(-8\frac{1}{3}\right) \cdot 3\frac{1}{2} \cdot \left(-\frac{3}{25}\right) \cdot 6\frac{1}{4} \cdot (-5)$;

4) $\left(-\frac{56}{135}\right) \cdot 4\frac{2}{7} \cdot \left(-\frac{25}{28}\right) \cdot 22\frac{10}{11} \cdot \left(-3\frac{3}{8}\right)$.

Можно заметить, что произведение отрицательно, когда число отрицательных множителей нечётно, а положительно — когда чётно.

Этот факт позволяет находить знак степени отрицательного числа как произведения нескольких отрицательных множителей. Так,

$$(-2)^5 = (-2) \cdot (-2) \cdot (-2) \cdot (-2) \cdot (-2) = -2^5;$$
$$(-2)^6 = (-2) \cdot (-2) \cdot (-2) \cdot (-2) \cdot (-2) \cdot (-2) = 2^6.$$

Показатель степени равен количеству одинаковых множителей. Если количество множителей нечётно, то степень отрицательного числа отрицательна, а если чётно, то положительна.

496. Положительным или отрицательным числом является значение выражения:

1) $4{,}56 \cdot (-1)^2$;
2) $(-9{,}07) \cdot (-1)^3$;
3) $\left(-\frac{5}{7}\right)^2$;
4) $(-7{,}308)^7$;
5) $(-2)^2 \cdot (-3)^4$;
6) $-\left(-3\frac{2}{5}\right)^3$;
7) $(-1)^2 \cdot 3^3 \cdot (-5)^2$;
8) $(-2)^3 \cdot (-4)^5 \cdot (-6)^7$;
9) $\left(-\frac{1}{3}\right)^3 \cdot \left(-\frac{2}{5}\right)^3$;
10) $(-0{,}17)^5 \cdot (-0{,}2)^4 \cdot (-1{,}5)^6$? 143

497. Сравните:

1) $(-2)^4$ и 0;
2) $(-3)^5$ и 0;
3) $\left(-\frac{5}{7}\right)^4$ и $(-1)^6$;
4) 5^2 и 5^3;
5) $(-3{,}5)^3$ и $(-4)^4$;
6) $\left(\frac{3}{7}\right)^2$ и $\left(\frac{3}{7}\right)^3$;
7) $(-5{,}23)^4$ и $5{,}23^4$;
8) $(-0{,}7)^5$ и $(-1)^3$;
9) $\left(-\frac{2}{3}\right)^2$ и $\left(-\frac{2}{3}\right)^3$;
10) $\left(-\frac{9}{8}\right)^5$ и $\left(-\frac{9}{8}\right)^7$. 142

498. Вычислите:

1) $\frac{1}{7}\cdot\left(-\frac{7}{9}\right)+\left(-\frac{1}{2}\right)^2$; 3) $-3\cdot\left(-\frac{2}{3}\right):\frac{5}{12}:\left(-\frac{3}{2}\right)^2$;

2) $-\frac{3}{4}\cdot\frac{12}{7}-\left(-\frac{1}{7}\right)^2$; 4) $0,5:\left(-\frac{1}{3}\right)^2\cdot\left(-2\frac{2}{3}\right)\cdot\frac{5}{6}$.

499●. Зная, что натуральное число n: 1) нечётно; 2) чётно, сравните степени:

а) $(-5)^n$ и $(-6)^n$; б) 5^n и $(-6)^n$; в) $(-5)^n$ и 6^n. 144

500●. Определите, если возможно, чётным или нечётным натуральным числом является показатель степеней n в верном неравенстве:

1) $(-3)^n > (-2)^n$; 3) $(-3)^n < (-2)^n$; 5) $(-3)^n > 2^n$;

2) $(-3)^n > 2^n$; 4) $3^n > 2^n$; 6) $3^n > (-2)^n$. 145

Распределительный закон умножения так же, как переместительный и сочетательный законы сложения и умножения, справедлив для любых чисел.

$$a(b + c) = ab + ac.$$

На основании распределительного закона можно раскрывать скобки и выносить за скобки общий множитель.

501. Даны выражения:

а) $(-45,8 + 15,8)\cdot 2,3$; д) $\left(\frac{2}{3}-\frac{3}{4}\right)\cdot(-12)$;

б) $-1,59\cdot(-0,9 + 0,8)$; е) $100\cdot(0,19 - 0,75)$;

в) $(-100 - 10)\cdot(-0,7)$; ж) $(-3,75 - 6,25)\cdot 0,91$;

г) $\left(2-\frac{7}{15}\right)\cdot(-15)$; з) $(-809,3)\cdot\left(-\frac{12}{23}+\frac{12}{23}\right)$.

Вычислите значение выражения двумя способами:

1) сначала выполнив действия в скобках;

2) раскрыв скобки.

В каких случаях второй способ оказался удобнее?

502. Запишите выражение в виде суммы:

1) $(-4)\cdot(x+y-7)$;
2) $(7-a-b)\cdot(-2)$;
3) $3\cdot(c-8-2d)$;
4) $(0{,}1a+0{,}2-0{,}3c)\cdot(-10)$;
5) $\left(\frac{1}{2}a-\frac{2}{3}b-\frac{3}{4}\right)\cdot(-12)$;
6) $-15\left(c-\frac{2}{3}d+\frac{4}{5}\right)$.

503. Вынесите за скобки общий множитель:

1) $2x-4y+6$;
2) $9c-3a-6b$;
3) $5m-125+25n$;
4) $-4x-3x-9x$;
5) $1{,}3a-2a+6{,}5a$;
6) $2{,}1b+3{,}5b-4{,}7b$.

В выражении $2{,}3a+6-a-4$ у слагаемых $2{,}3a$ и $(-a)$ одинаковые буквенные части, равные a.

Слагаемые с одинаковыми буквенными частями называют *подобными* слагаемыми.

Поскольку $(-a)=(-1)\cdot a$, можно сказать, что подобные слагаемые отличаются только *коэффициентами* — числовыми множителями при буквенных частях. Слагаемое $2{,}3a$ имеет коэффициент, равный 2,3, а у слагаемого $(-a)$ коэффициент равен (-1).

Числа не имеют буквенной части, но их также считают подобными слагаемыми.

Выражение $2{,}3a+6-a-4$ можно упростить, *приведя подобные слагаемые*:

$$2{,}3a+6-a-4=(2{,}3-1)a+6-4=1{,}3a+2.$$

Чтобы привести подобные слагаемые, их коэффициенты складывают, а буквенную часть оставляют прежней.

504. Упростите выражение, приводя подобные слагаемые:

1) $a+4b-a-7b$;
2) $-2x+3{,}7+2x-5$;
3) $a-\frac{4}{5}a-\frac{1}{7}a$;
4) $0{,}2d-\frac{2}{3}-2d+\frac{5}{9}$;
5) $y-3{,}2+2y-4{,}6-5y$;
6) $-z+2{,}3x+0{,}11z+8{,}9x$;
7) $-c+\frac{2}{3}b-\frac{2}{7}c-\frac{4}{9}b$;
8) $m-0{,}8m-\frac{1}{5}m-\frac{1}{2}m$.

505. Упростите выражение:

1) $12c + (7 - c) - (5c - 3)$;
2) $9{,}1 + 5(b - 2b + 0{,}6b)$;
3) $\frac{1}{3}(0{,}3a - 0{,}6) - \frac{1}{4}(0{,}4a - 0{,}8)$;
4) $c - 2(c - d + 2c)$;
5) $-4(x - y) + 2(x + 3y)$;
6) $2(a - b) - 4(b - a)$;
7) $3{,}2(c + d) + 5{,}8(c - d)$;
8) $\frac{2}{9}(1{,}8m - 5{,}4) - \frac{3}{7}(2{,}1m - 4{,}2)$.

506. Найдите коэффициент результата умножения:

1) $(-a)\cdot(-a)\cdot\left(-\frac{2}{3}b\right)\cdot\left(-\frac{3}{4}b\right)\cdot 3$;
2) $(-2c)\cdot(-3)^2\left(-\frac{1}{3}d\right)\cdot\frac{5}{8}b$.

При определении коэффициента слагаемого $(-a)$ мы представили его в виде произведения (-1) и a.

При умножении любого числа на -1 получается число, противоположное исходному:

$$(-1)\cdot a = a\cdot(-1) = -a.$$

507. Умножьте на -1 числа:

$3; -2; 6{,}7; 0; -\frac{5}{7}; 56\frac{103}{223}; -5{,}(7)$.

Как умножение на число (-1) можно рассматривать и раскрытие скобок, перед которыми стоит знак «минус». Так, например,

$$-(2a + 3 - 7b) = (-1)\cdot(2a + 3 - 7b) = -2a - 3 + 7b.$$

Рассмотренный пример позволяет сформулировать правило раскрытия скобок, перед которыми стоит знак «минус».

При раскрытии скобок, перед которыми стоит знак «минус», все слагаемые, стоявшие в скобках, меняют знаки на противоположные. Например,

$$-(a + b - c) = -a - b + c.$$

Если подобным же образом рассмотреть умножение суммы на число + 1, то получим правило раскрытия скобок, перед которыми стоит знак «плюс».

При раскрытии скобок, перед которыми стоит знак «плюс» или нет знака, все слагаемые, стоявшие в скобках, переписывают с их знаками. Например,

$$+(a + b - c) = +a + b - c.$$

508. Вычислите, предварительно раскрыв скобки:

1) $-(4{,}6 + 9{,}81 + 1{,}27) + (5{,}73 - 1{,}81 + 3)$;
2) $4{,}92 + 54{,}09 - (-3{,}81 + 78 - 54{,}09)$;
3) $-\left(-\frac{1}{5} + \frac{6}{25} - \frac{8}{25}\right) - (-0{,}39 + 0{,}26)$;
4) $22 - \left(4\frac{5}{7} + 5{,}72 + 4{,}28\right)$;
5) $4\frac{1}{2} - \left(5\frac{5}{9} + 3\frac{1}{3} - 2\frac{1}{6} + 2\frac{1}{9}\right)$;
6) $\left(-\frac{2}{3} + 0{,}8 + \frac{1}{2}\right) - \left(\frac{5}{6} - 0{,}3\right) + 0{,}4$.

509. Заключите сумму $62a - 73b + 98c - 48$ в скобки, перед которыми стоит знак:

1) «минус»;
2) «плюс».

510. Вычислите, предварительно заключив положительные слагаемые в первые скобки, а отрицательные — во вторые.

Образец. $3{,}5 - 12{,}1 + 4 - 3 + 2{,}5 - 3{,}9 =$
$= (3{,}5 + 4 + 2{,}5) - (12{,}1 + 3 + 3{,}9) = 10 - 19 = -9$.

1) $2 - 15 + 23 - 11$;
2) $-31 + 14 + 5 - 17$;
3) $24{,}8 + 35{,}6 - 14{,}8 - 55{,}6$;
4) $3\frac{1}{3} - 2\frac{3}{5} + 1\frac{2}{3} - 2\frac{2}{5} - 3\frac{2}{15}$;
5) $6\frac{1}{2} + 4\frac{1}{6} - 7\frac{5}{9} - 5\frac{1}{3} - 4\frac{1}{9}$;
6) $-13{,}57 + 25{,}43 + 11{,}27 - 23{,}13$;
7) $11{,}269 + 5{,}427 - 7{,}169 - 6{,}527$;
8) $34{,}8 - 15{,}39 + 27{,}5 - 47{,}91$;
9) $-0{,}037 + \frac{1}{4} + \frac{7}{8} + \frac{5}{16} - 1{,}4$;
10) $0{,}4 - \frac{1}{2} + 0{,}75 - \frac{5}{6} + 0{,}85 - \frac{2}{3}$.

511●. Вычислите рациональным способом:

1) $3{,}2 \cdot 2 + 2{,}8 \cdot 11 + 3{,}2 \cdot 5 - 2{,}8 \cdot 4$;
2) $(-7{,}3) \cdot (-0{,}13) + 7{,}3 \cdot 0{,}02 + 2{,}7 \cdot 0{,}03 + 2{,}7 \cdot 0{,}12$;
3) $\left(\frac{3}{5} - \frac{7}{15}\right) \cdot 30 - 8 \cdot (-0{,}5)$;
4) $-\frac{2}{3} \cdot \left(-\frac{5}{14}\right) \cdot \left(-\frac{3}{8}\right) \cdot \frac{7}{5}$;
5) $2\frac{3}{5} \cdot (-0{,}2) \cdot \left(-\frac{5}{13}\right) \cdot (-0{,}5)$.

512●. Для каких значений x верно равенство:

1) $x = x^2$; 3) $x^2 = x^3$; 5) $|x| + x = 0$;
2) $x = x^3$; 4) $-x = x$; 6) $|x| - x = 0$?

513. Представьте каждое из чисел -60, 210, -234 в виде произведения: а) двух сомножителей; б) трёх сомножителей; в) четырёх сомножителей.

514. В течение всей недели температура изменялась на -2 °C в день. На сколько изменилась температура за неделю? Какой стала температура в конце недели, если в начале недели она составляла $+3$ °C?

Задачи на смекалку

515. Каким числом — положительным, отрицательным или нулём — является произведение? Найдите это число.

1) $(-1) \cdot (-2) \cdot (-3) \cdot \ldots \cdot (-2007)$;
2) $(-100) \cdot (-99) \cdot (-98) \cdot \ldots \cdot 98 \cdot 99 \cdot 100$;
3) $(1 - 2 + 3 - 4 + \ldots + 99 - 100) \cdot 100$;
4) $(-1) \cdot (-1)^2 \cdot (-1)^3 \cdot \ldots \cdot (-1)^{100}$;
5) $(-1 - 2 - 3 - \ldots - 100) \cdot (-100)$;
6) $\left(-\frac{1}{2}\right) \cdot \left(-\frac{2}{3}\right) \cdot \left(-\frac{3}{4}\right) \cdot \ldots \cdot \left(-\frac{99}{100}\right)$.

516. Верно ли для двух различных чисел a и b утверждение:

1) если $a = |b|$, то $a + b = 0$;
2) если $a + b = 0$, то $a = |b|$?

Если неверно, то приведите опровергающий пример.

517. Какой знак неравенства следует поставить вместо многоточия, чтобы при любых значениях a и b было верным:

1) $|a + b| \ldots |a| + |b|$; 2) $|a - b| \ldots |a| - |b|$?

518. 1) На координатной прямой (рис. 89) отмечены точки $A(a)$ и $B(-2a)$. Отметьте на этой прямой начало координат.

2) На координатной прямой (рис. 90) отмечены точки $C(a)$ и $D\left(-\frac{1}{2}a\right)$. Отметьте на этой прямой начало координат.

147

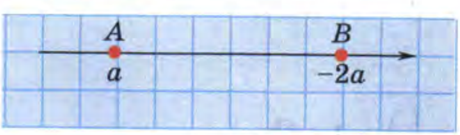


Рис. 89

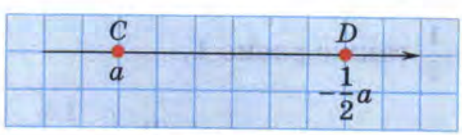


Рис. 90

Контрольные вопросы и задания

1. Каким числом — положительным или отрицательным — будет произведение, если перемножить:
1) одно положительное число и два отрицательных;
2) два положительных и два отрицательных;
3) три отрицательных и несколько положительных;
4) сто отрицательных чисел?

2. Подберите такие числа x и y, для которых верно:
1) $x \cdot y = 1$; 3) $x \cdot y = 0$; 5) $x \cdot y < 0$;
2) $x \cdot y = -1$; 4) $x \cdot y > 0$; 6) $x^2y^3 < 0$. Тест 146

3. Вычислите: 1) $\left(-\frac{3}{5} - \frac{2}{7}\right) \cdot (-35)$; 2) $-\frac{3}{13} \cdot 0{,}63 + 0{,}37 \cdot \left(-\frac{3}{13}\right)$.

17 Деление чисел

Частное положительных чисел можно записать с помощью дробной черты $a : b = \frac{a}{b}$.

К такому же результату приводит умножение числа a на дробь $\frac{1}{b}$: $a \cdot \frac{1}{b} = \frac{a}{b}$.

Сравнивая эти два равенства, получаем, что $a : b = a \cdot \frac{1}{b}$. Так, например, $2 : 3 = 2 \cdot \frac{1}{3} = \frac{2}{3}$.

Положительные числа 3 и $\frac{1}{3}$ дают в произведении число 1. Заметим, что произведение противоположных им чисел -3 и $-\frac{1}{3}$ также равно 1.

$$(-3) \cdot \left(-\frac{1}{3}\right) = +\left(3 \cdot \frac{1}{3}\right) = 1.$$

Два числа, дающие в произведении число 1, называют *взаимно обратными*:

$$b \cdot \frac{1}{b} = 1.$$

519. 1) Запишите число, обратное числу:

$2;\ -3;\ \frac{2}{5};\ -\frac{3}{7};\ 1;\ -500;\ 0{,}5;\ -0{,}25;\ 0{,}(3).$

2) Может ли отрицательное число оказаться обратным положительному числу?

3) Какие числа обратны сами себе?

4) У какого числа нет обратного? 148

Деление на отрицательное число также можно заменить умножением на число, обратное делителю. Например,

$$2 : (-3) = 2 \cdot \left(-\frac{1}{3}\right) = -\left(2 \cdot \frac{1}{3}\right) = -\frac{2}{3},$$

$$(-2) : (-3) = (-2) \cdot \left(-\frac{1}{3}\right) = +\left(2 \cdot \frac{1}{3}\right) = \frac{2}{3}.$$

520. Замените деление умножением на число, обратное делителю, и вычислите:

1) $6 : 3$;
2) $63 : (-3)$;
3) $-23 : \left(-\frac{1}{2}\right)$;
4) $-5 : 25$;
5) $-\frac{2}{3} : \frac{4}{9}$;
6) $7 : \left(-\frac{7}{8}\right)$;
7) $-3 : \left(-1\frac{1}{2}\right)$;
8) $\frac{3}{5} : 0{,}6$;
9) $0{,}6 : \left(-\frac{2}{3}\right)$.

При делении необходимо учитывать следующее.

① Знак частного связан со знаками делителя и делимого правилом знаков, знакомым вам по предыдущему пункту учебника, где его применяли для произведения:

«Плюс на плюс даёт плюс.
Минус на минус даёт плюс.
Плюс на минус даёт минус».

② Модуль частного равен частному модулей делимого и делителя. 149–151

521. Выполните устно деление: 154

1) $-760 : 7{,}6$;	5) $35{,}71 : (-35{,}71)$;
2) $0 : (-3{,}45)$;	6) $-7{,}9 : (-10)$;
3) $-9{,}01 : (-9{,}01)$;	7) $5{,}1 : (-1)$;
4) $5{,}6 : (-0{,}8)$;	8) $-6{,}2 : 0{,}1$.

522. Выполните деление:

1) $-1{,}5 : 2{,}5$;	5) $-30{,}42 : 23{,}4$;
2) $10{,}01 : (-1{,}3)$;	6) $0{,}527 : (-17)$;
3) $-42 : (-0{,}3)$;	7) $-2 : (-0{,}8)$;
4) $-19{,}6 : 2{,}8$;	8) $6{,}65 : (-1{,}9)$.

Образец оформления

$15 : (-1{,}2) = -12{,}5$

$$\begin{array}{r|l}
-150 & 12 \\
\underline{12} & \overline{12{,}5} \\
-30 & \\
\underline{24} & \\
-60 & \\
\underline{60} & \\
0 &
\end{array}$$

523. Решите уравнение:

1) $-3{,}74x = 84{,}15$;
2) $x : (-2{,}5) = -7{,}21$;
3) $-5{,}2(y + 1{,}7) = 55{,}12$;
4) $-3{,}9(z + 2{,}3) = 74{,}4 - 90$;
5) $5{,}7 \cdot (-x) = -21{,}09$;
6) $-4{,}52 : (-y) = 11{,}3$.

▼ Правило деления чисел можно получить и без использования числа, обратного делителю. Разделить число a на число b значит найти такое число c, произведение которого с делителем даёт делимое: $cb = a$.

① Если числа a и b имеют разные знаки, то произведение cb должно отличаться по знаку от множителя b, а значит, множитель c должен быть отрицателен. Если же a и b — числа одного знака, то число c должно быть положительным. Таким образом, *знак частного связан со знаками делителя и делимого правилом знаков.*

② Решив вопрос со знаком частного, займёмся его модулем. Модуль числа c находим из равенства $|c| \cdot |b| = |a|$ как неизвестный множитель: $|c| = |a| : |b|$. Таким образом, *модуль частного равен частному модулей делимого и делителя.* △

524. Выполните деление:

1) $15,3 : (-1,7)$;
2) $-20,7 : (-9)$;
3) $-\frac{7}{17} : \left(-\frac{49}{34}\right)$;
4) $1\frac{2}{9} : \left(-7\frac{1}{3}\right)$;
5) $-5,6 : 1\frac{2}{5}$;
6) $-\frac{4}{9} : (-1,6)$;
7) $0,1 : \left(-\frac{1}{12}\right)$;
8) $-0,18 : 1\frac{4}{5}$. 156

Знакомые вам по действиям с положительными числами свойства деления суммы, разности, произведения и свойство деления на произведение можно применять и в действиях с отрицательными числами.

Свойства деления

① $(a + b) : c = a : c + b : c$;
② $(a - b) : c = a : c - b : c$;
③ $(a \cdot b) : c = (a : c) \cdot b = (b : c) \cdot a$;
④ $a : (b \cdot c) = (a : b) : c = (a : c) : b$.

525•. Примените свойства деления для вычисления значений следующих выражений:

1) $(-0,45 \cdot 0,71) : (-0,9)$;
2) $-190 : (1,9 \cdot 25)$;
3) $\left(-\frac{9}{28}\right) \cdot \left(-15\frac{5}{9}\right) : 5$;
4) $\left(\frac{4}{5} - \frac{5}{6} + \frac{2}{15}\right) : \left(-\frac{1}{30}\right)$;
5) $(0,49 + 0,35) : (-0,7)$;
6) $-0,2 : 0,5 - 0,3 : 0,5$;
7) $-2\frac{3}{5} : 0,25 : (-0,4)$;
8) $-3\frac{15}{17} : \left(-8,9 \cdot 3\frac{15}{17}\right)$.

526. Найдите значение выражения:

1) $(17c + 13c) : (-15)$, если: а) $c = -0,4$; б) $c = 1\frac{1}{2}$;

2) $(-7d - 14d) : (-7)$, если: а) $d = -\frac{2}{3}$; б) $d = 1,3$.

527. Вычислите: 158

1) $1{,}8 : \left(-1\frac{2}{3}\right) + \left(-15\frac{2}{3}\right) : 1\frac{1}{3}$;

2) $3\frac{3}{4} : 0{,}03 + 4{,}52 : \left(-4\frac{5}{27}\right)$;

3) $\left(-3\frac{1}{3}\right) : (-2{,}4) + 7{,}654 - \left(\frac{1}{18} + 5{,}654\right)$;

4) $(1{,}545 : 1{,}5 - 1) \cdot \left(-2\frac{2}{3}\right) - 0{,}5 \cdot \frac{4}{15}$.

Деление, в котором участвуют отрицательные числа, сводится к делению их модулей и определению знака частного. При этом деление целых отрицательных чисел сводится к делению натуральных. А значит, к целым числам можно применять те же свойства делимости, что и к натуральным числам. Нужно только распространить на отрицательные целые числа определение делимости.

Целое число n делится на целое, отличное от нуля число d, если $n = d \cdot m$, где m — целое число.
Число d в этом случае называют *делителем* числа n.

Заметим, что термин «кратное» на отрицательные целые числа не переносится. Поэтому можно сказать, например, что число −12 делится на −4, но нельзя называть число −12 кратным числу −4.

528. Даны числа: −645, 180, −900, 1386, −1710, 1610, −1482. Назовите числа, которые делятся на: 1) −18; 2) −30; 3) −45.

529. 1) Запишите множества целых делителей чисел −35 и −20.
2) Найдите пересечение и объединение этих множеств.
3) Сохраняет ли свой смысл понятие наибольшего общего делителя для отрицательных целых чисел?

530. Сократите дроби:

1) $\frac{(-2) \cdot 3 \cdot (-5)}{2 \cdot (-3)(-7)}$; 2) $\frac{(-2)^3 \cdot 7^2}{(-2)^5 \cdot (-7)}$;

3) $\frac{(-22)\cdot(-30)}{(-25)\cdot 4\cdot 33}$;

4) $\frac{(-49)\cdot 9\cdot(-64)}{4\cdot(-81)\cdot 7}$;

5) $\frac{351}{-252}$;

6) $-\frac{124}{268}$;

7) $-\frac{23\,760}{55\,800}$;

8) $\frac{45\,469}{41\,033}$. 157

Повторим применительно к целым числам главные свойства делимости.

Свойства делимости целых чисел

1. Свойство делимости произведения.

Если один из множителей делится на некоторое число, то и всё произведение делится на это число.

2. Свойство делимости суммы.

Если каждое слагаемое делится на некоторое число, то и сумма делится на это число.

3. Свойство неделимости суммы.

Если одно из слагаемых не делится на некоторое число, а все остальные делятся, то сумма на это число не делится.

531. Сформулируйте признаки делимости целых чисел на:

1) −2; 5) −4;
2) −3; 6) −10;
3) −5; 7) −25;
4) −9; 8) −100.

532. Объясните, как, пользуясь известными признаками делимости, выяснить, делится ли целое число на:

1) −18; 2) −30; 3) −12.

533. Докажите, что:

1) $-123\cdot 10 - 14\cdot 321$ делится на -6;
2) $915 - 1920 + 735$ делится на -15;
3) $(-59)\cdot 23 - 11\cdot 59 + 59\cdot(-28)$ делится на -31;
4) $-1132 - 130 - 574 - 96 + 33$ не делится на -2.

534●. Вычислите:

1) $\left(\frac{55}{57}-\frac{51}{95}\right):\left(-\frac{122}{133}\right)$; 3) $\left(\frac{8}{225}-\frac{4}{105}\right):\left(\frac{6}{35}-\frac{2}{45}\right)$;

2) $\left(-\frac{60}{259}\right):\left(-\frac{45}{148}+\frac{75}{222}\right)$; 4) $\left(\frac{4}{51}-\frac{1}{136}\right):\left(-\frac{5}{34}-\frac{7}{51}\right)$.

В заключение разговора о делении напомним, что *деление на нуль невозможно*, а во всех остальных случаях частное целых чисел оказывается либо целым, либо дробным числом. И целое, и дробное число можно записать в виде дроби $\frac{m}{n}$, где m — целое, а n — натуральное число.

535. Запишите в виде несократимой дроби $\frac{m}{n}$, где m — целое, а n — натуральное число:

1) $\frac{-235}{282}$; 4) $\frac{-65}{-78}$; 7) $\frac{-51}{170}$;

2) $\frac{98}{-147}$; 5) $-\frac{138}{184}$; 8) $\frac{120}{-525}$;

3) $-\frac{85}{153}$; 6) $\frac{145}{-261}$; 9) $-\frac{68}{171}$.

536. Представьте в виде несократимой дроби $\frac{m}{n}$, где m — целое, а n — натуральное число:

1) сумму чисел $\frac{13}{42}$ и $-\frac{7}{30}$;

2) частное чисел $-0,8$ и $0,6$;

3) произведение чисел $1\frac{3}{11}$ и $-3\frac{1}{7}$;

4) произведение чисел $-3,7$ и $-1,4$.

Целые и дробные числа называют *рациональными* числами.

Термин «рациональный» происходит от латинского слова *rationalis* — «разумный». Именно в таком смысле мы использовали его, когда предлагали вам, например, вычислить значение выражения *рациональным* способом.

В математике за некоторыми числовыми множествами закреплены специальные обозначения. Так, множество рациональных чисел обозначают буквой $\boldsymbol{Q}$, множество целых чисел — буквой $\boldsymbol{Z}$, а для множества натуральных чисел выделена буква $\boldsymbol{N}$.

537. Запишите с помощью знака «$\subset$» соотношения между множествами $\boldsymbol{Q}$, $\boldsymbol{Z}$ и $\boldsymbol{N}$.

538. На рисунке 91 кругами Эйлера изображены множества $\boldsymbol{Q}$, $\boldsymbol{Z}$ и $\boldsymbol{N}$. Числа a, b и c — элементы этих множеств.

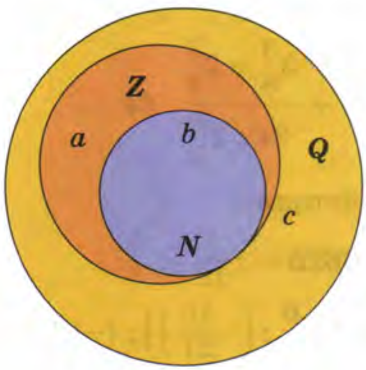


Рис. 91

1) Укажите какие-нибудь значения a, b и c.

2) Как называются элементы множества $\boldsymbol{Z}$, которые не принадлежат множеству $\boldsymbol{N}$?

3) Как называются элементы множества $\boldsymbol{Q}$, которые не принадлежат множеству $\boldsymbol{Z}$?

Вы изучили правила, по которым складывают, вычитают, умножают и делят рациональные числа.

При вычислении значения выражения, в котором несколько арифметических действий, сначала применяют *правило порядка действий*.

539°. Вычислите значение выражения:

1) $$\frac{\left(6\frac{1}{2}-1\frac{3}{4}\right):2\frac{1}{2}}{\left(7-6\frac{2}{5}\right)\cdot 3\frac{1}{3}}-\frac{\frac{1}{2}+\frac{3}{4}-\frac{5}{12}}{3\frac{7}{11}+6\frac{4}{11}};$$

2) $$\frac{\left(15:\frac{5}{18}:3\frac{3}{8}\right)\cdot\left(\frac{1}{16}+\frac{11}{36}+\frac{5}{48}+\frac{5}{18}\right)}{\left(11\frac{5}{11}-8\frac{21}{22}\right):1\frac{2}{3}};$$

3) $$\frac{\left(8\frac{1}{4}-\frac{3}{4}\right):3\frac{1}{2}}{\left(5-4\frac{2}{5}\right):10}+\frac{\left(3\frac{1}{8}-1\frac{7}{8}\right)\cdot 1\frac{3}{5}}{\left(2-1\frac{3}{8}\right):3\frac{1}{8}};$$

4) $$\frac{7\frac{1}{2}\cdot 2\frac{2}{3}-12\frac{1}{4}:\frac{7}{2}}{110:\frac{3}{5}}+\frac{3\frac{3}{8}+2\frac{3}{4}}{24:2\frac{2}{5}}.$$

540°. Выполните действия:

1) $19{,}6\cdot 2{,}5-\left(2{,}0625-1\frac{5}{12}\right):\frac{1}{8};$

2) $\left(\left(\frac{15}{28}-\frac{11}{36}\right)\cdot\frac{21}{29}-6\frac{6}{7}:\left(-\frac{16}{21}\right)\right):(-16{,}5);$

3) $\left(5{,}05:\frac{1}{40}-2{,}8\cdot\frac{5}{6}\right)\cdot 3+(-16)\cdot(-0{,}1875);$

4) $\left(9\frac{3}{20}-1{,}24\right):2\frac{1}{3}-\left(\frac{3}{4}+2\frac{5}{8}\right):(-0{,}625).$

541. Одинаковы ли знаки чисел a и b, если верно неравенство:

1) $ab>0$; 2) $a:b<0$; 3) $ab<-1$; 4) $a:b>1$? 155

542. Найдите среднее арифметическое чисел:

1) -22; -20; -18; -16;
2) -5; -4; -3; -2; 7; 9;
3) -23; 34; -43;
4) $-2{,}3$; $3{,}5$; $-4{,}1$.

543. 1) Задумали число, умножили его на -3, а затем из произведения вычли $4{,}8$. В результате получилось число $-53{,}7$. Какое число было задумано?

2) Задумали число, разделили его на −5, а затем к частному прибавили число −19,4. В результате получилось число −94,8. Какое число было задумано?

Задачи на смекалку

544. Из двузначного числа вычли число, получающееся из него же перестановкой цифр. Докажите, что полученная разность делится на 9. 152

545. Докажите, что сумма правильной дроби и дроби ей обратной больше 2.

546. Точки $A(x)$, $B\left(\frac{1}{x}\right)$ и $C(x^2)$ на одном из двух представленных рисунков (рис. 92) отмечены неправильно. 159

Рис. 92

1) Найдите, на каком рисунке точки A, B и C отмечены неправильно, и обоснуйте свой ответ.
2) Если же точки A, B и C отмечены правильно, укажите на координатной прямой, где примерно следует отметить начало координат и точку 1 при $x < 0$.

Контрольные вопросы и задания

1. Чему равно частное:
1) 0 : (−78); 2) (−9,3) : (−9,3); 3) −4,5 : 10?

2. Поставьте вместо многоточия нужный знак неравенства:
1) 8,352 : (−30) … 0;
2) (−6,7915) : (−5) … 0;
3) −96 312 : 9 … 0. 153

3. Вычислите:

1) $1\frac{5}{12} : \left(-\frac{5}{6} + \frac{2}{3}\right)$; 2) $\left(-0{,}2 + \frac{1}{3}\right) : 3{,}2$. Ч. 1. С. 94 Тест

Глава

4 Формулы и уравнения

18 Решение уравнений

Вы знаете, что уравнение — это *равенство с неизвестным, значение которого нужно найти.* Решая уравнение, стараются найти множество значений неизвестного, при подстановке которых в уравнение получается верное числовое равенство. Напомним, что эти искомые значения неизвестного называются *корнями* уравнения.

Решить уравнение — значит найти множество его корней.

Для решения уравнения вы пользовались соотношениями между компонентами суммы, разности, произведения и частного. Так, например, при решении уравнения $16 - (2x + 7) = 5$ сначала находилось вычитаемое $2x + 7 = 16 - 5$, $2x + 7 = 11$, затем слагаемое $2x = 11 - 7$, $2x = 4$, и, наконец, множитель, который и являлся корнем данного уравнения, $x = 4 : 2$, $x = 2$.

Умение выражать одни компоненты арифметических действий через другие позволяет теперь, когда вы познакомились с отрицательными числами, сформулировать более удобные правила решения уравнений.

Рассмотрим уравнение $3x + 14 = 29 - 2x$.

Выразим слагаемое $3x$ из левой части этого уравнения $3x = 29 - 2x - 14$. Заметим, что мы фактически перенесли слагаемое 14 из левой части уравнения в правую, изменив при этом его знак на противоположный.

Выполним в правой части вычитание и получим уравнение

$$3x = 15 - 2x.$$

Выразим уменьшаемое 15 из правой части этого уравнения $3x + 2x = 15$. И вновь преобразование свелось к переносу слагаемого $-2x$ из правой части уравнения в левую с переменой знака этого слагаемого.

При решении уравнения можно переносить слагаемые из одной его части в другую, изменяя при этом их знаки на противоположные.

Продолжим решение уравнения.

После упрощения уравнения $3x + 2x = 15$ получим $5x = 15$.

Выразим множитель x из левой части уравнения

$$x = 15 : 5,\ x = 3.$$

Легко заметить, что к такому же результату приводит деление обеих частей уравнения на числовой множитель при неизвестном, который называют *коэффициентом*. В этом проявляется ещё одно правило решения уравнений.

При решении уравнения можно делить или умножать обе его части на любое число, отличное от нуля.

С применением этих правил решение уравнения разбивается на два этапа.

1 Собираем в одной части уравнения слагаемые, содержащие неизвестное, а в другой — числа и упрощаем его.

$$3x + 14 = 29 - 2x,\ 3x + 2x = 29 - 14,\ 5x = 15.$$

2 Делим обе части уравнения на коэффициент при неизвестном.

$$5x = 15,\ x = 15 : 5,\ x = 3.$$

Получаем ответ: 3.

Решение уравнения обычно записывают в строчку:

$3x + 14 = 29 - 2x$, $3x + 2x = 29 - 14$, $5x = 15$, $x = 15 : 3$, $x = 3$. Ответ: 3. 160—163

547. Опишите ход решения уравнения:

1) $7x - 9 = 5x - 17$, $7x - 5x = 9 - 17$, $2x = -8$, $x = (-8) : 2$, $x = -4$. Ответ: -4.

2) $0{,}2y + 2{,}3 = 0{,}7y - 3{,}2$, $2{,}3 + 3{,}2 = 0{,}7y - 0{,}2y$, $5{,}5 = 0{,}5y$, $y = 5{,}5 : 0{,}5$, $y = 11$. Ответ: 11.

548. Решите уравнения по следующему плану:

1) перенесите числа в одну часть уравнения, а слагаемые, содержащие неизвестные, — в другую, изменив при этом знаки слагаемых на противоположные;

2) упростите уравнение;

3) разделите обе части уравнения на коэффициент при неизвестном;

4) запишите ответ.

1) $10x + 23 = 9x + 19$;
2) $7y - 19 = 5 - 5y$;
3) $-5x - 7 = 3x + 13$;
4) $3 - 4{,}9z = -5{,}4 - 2{,}8z$;
5) $5{,}2x + 9 = 3{,}4x$;
6) $0{,}9y - 41 = 0{,}5y - 5$.

549. Сколько корней имеет уравнение:

1) $3{,}4x = 3{,}4$;
2) $-5{,}78y = 5{,}78$;
3) $13x = 13x + 9$;
4) $45y = 97y$;
5) $-7|x| = 7$;
6) $5|x| = 5$?

Некоторые уравнения предварительно приходится упрощать, освобождаясь от дробей и раскрывая скобки.

Пример. Решить уравнение $\frac{2x + 3}{3} - \frac{3x - 4}{5} = \frac{x}{3} + \frac{8}{5}$.

Решение.

1) Сначала избавимся от дробей. Для этого умножим обе части уравнения на наименьшее общее кратное знаменателей дробей, НОК (3; 5) = 15.

$$\left(\frac{2x + 3}{3} - \frac{3x - 4}{5}\right) \cdot 15 = \left(\frac{x}{3} + \frac{8}{5}\right) \cdot 15,$$

$$\left(\frac{2x + 3}{3}\right) \cdot 15 - \left(\frac{3x - 4}{5}\right) \cdot 15 = \frac{x}{3} \cdot 15 + \frac{8}{5} \cdot 15,$$

$$(2x + 3) \cdot 5 - (3x - 4) \cdot 3 = 5x + 24.$$

② Раскроем скобки.

$$10x + 15 - 9x + 12 = 5x + 24.$$

③ Соберём в одной части уравнения слагаемые, содержащие неизвестное, а в другой — числа и упростим уравнение.

$$10x - 9x - 5x = 24 - 15 - 12,\ -4x = -3.$$

④ Разделим обе части уравнения на коэффициент при неизвестном. $x = (-3) : (-4)$, $x = \frac{3}{4}$.

Ответ: $\frac{3}{4}$.

550. Объясните, на какое число умножили обе части первого уравнения, чтобы получить второе:

1) $\frac{2}{3}x - 1 = \frac{1}{3}x + 2$; $2x - 3 = x + 6$;
2) $0{,}8y + 0{,}3 = 0{,}6y - 0{,}7$; $8y + 3 = 6y - 7$;
3) $\frac{1}{2}x + \frac{2}{5} = \frac{3}{4}x - \frac{7}{10}$; $10x + 8 = 15x - 14$;
4) $-0{,}25 - 1{,}3y = 1{,}6y - 0{,}83$; $25 + 130y = -160y + 83$. 164

551. Решите уравнение, предварительно освободившись от дробей: 165

1) $\frac{3}{4}x + \frac{5}{8} = \frac{1}{2}x - \frac{9}{16}$;
2) $\frac{2}{3}z - \frac{5}{9} = \frac{1}{3} + 2z$;
3) $\frac{3}{14}x + \frac{11}{21}x - 11 = x$;
4) $0{,}7z - 0{,}9 = -0{,}5z - 0{,}3$;
5) $-\frac{3}{10} - \frac{4}{15}z - \frac{1}{5}z = 1$;
6) $-0{,}83 + 0{,}7y = 0{,}24y + 0{,}412$.

552. Решите уравнение: 166

1) $\frac{x+1}{3} = \frac{-7}{5}$;
2) $\frac{y+2}{3} = \frac{y-7}{4}$;
3) $\frac{3z+6}{7} = \frac{-z-2}{5}$;
4)● $\frac{-0{,}3}{2x-1} = \frac{5}{9}$;
5)● $\frac{0{,}2}{2y-1} = \frac{-0{,}3}{y+3}$;
6)● $\frac{10}{z+3} = \frac{100}{5z-7}$.

553. Решите уравнение, предварительно составив план его решения:

1) $0{,}6z - 4{,}3 = 1{,}9z - 0{,}9$;

2) $\frac{2x-3}{-0{,}5} = \frac{-5x+6}{2}$;

3) $0{,}25 - \frac{1}{3}x = 0{,}5x - 1$;

4) $-1{,}7y = 1{,}9y$;

5) $-0{,}7y - 1\frac{3}{5} = 1{,}5y + 0{,}4$;

6) $2\frac{2}{3} : \left(y + \frac{1}{3}\right) = 1\frac{1}{2} : \left(y - 1\frac{1}{8}\right)$.

К решению уравнений сводится решение многих текстовых задач. Составление уравнения по тексту задачи является переводом этого текста на язык математики. При этом используются указанные в условии соотношения между величинами и известные формулы, такие, например, как формула пути $s = vt$. Рассмотрим одну из таких задач.

З а д а ч а. От города до посёлка автомобиль проехал за 1 ч 15 мин. Если бы скорость автомобиля была на 10 км/ч меньше, то этот путь занял бы 1,5 ч. С какой скоростью ехал автомобиль и какое расстояние он проехал?

Р е ш е н и е 1. Пусть искомая скорость автомобиля равна x км/ч. До посёлка автомобиль ехал 1,25 ч, так как 1 ч 15 мин = = 1,25 ч. Путь, который проехал автомобиль, равен $1{,}25x$ км. Если уменьшить скорость автомобиля на 10 км/ч, то она станет равной $(x - 10)$ км/ч. С такой скоростью за 1,5 ч автомобиль проедет $1{,}5(x - 10)$ км. Поскольку в обоих случаях автомобиль проедет один и тот же путь, получаем уравнение $1{,}25x = 1{,}5(x - 10)$.

Решим это уравнение.

$$1{,}25x = 1{,}5(x - 10),\ 1{,}25x = 1{,}5x - 15,\ 15 = 1{,}5x - 1{,}25x,$$
$$15 = 0{,}25x,\ x = 15 : 0{,}25,\ x = 60.$$

Расстояние, которое проехал автомобиль, равно

$$60 \cdot 1{,}25 = 75 \text{ (км)}.$$

О т в е т: 60 км/ч, 75 км.

Р е ш е н и е 2. Пусть искомая скорость автомобиля равна x км/ч. Воспользуемся обратной пропорциональностью скорости движения и времени, которое уходит на один и тот же путь.

Тогда $\frac{x}{x-10} = \frac{1,5}{1,25}$, и по основному свойству пропорции мы приходим к тому же уравнению $1,25x = 1,5(x - 10)$, что и в решении 1.

При решении задач большинство рассуждений проводится устно. В записи решения обязательно должно быть указано, какую величину обозначили буквой, какое уравнение при этом получилось, решение этого уравнения и ответ на вопрос задачи.

Перед тем как записать ответ, ещё раз прочитайте вопрос задачи. Иначе ваш ответ может оказаться неполным.

554. Объясните, как рассуждали при составлении уравнения $3x - 20 = 2x + 60$ к задаче: «Чтобы насыпать в каждый пакет по 3 кг муки, не хватает 20 кг муки. Когда в каждый из пакетов насыпали по 2 кг муки, осталось не расфасовано 60 кг. Сколько было пакетов?»

555. Три ученика решали задачу: «Автобус проходит расстояние от города до села за 1,8 ч, а легковая автомашина — за 0,8 ч. Найдите скорость автобуса, если известно, что она меньше скорости легковой автомашины на 50 км/ч». Ученики составили разные уравнения:

1) $1,8x = 0,8(x + 50)$;

2) $0,8(x - 50) = 1,8x$;

3) $1,8(x + 50) = 0,8x$.

Кто из учеников оказался прав?

556. Какое из уравнений: а) $8 + x = 4 - x$ или б) $4 + x = 8 - x$ соответствует условию задачи?

1) Какое число нужно прибавить к 4 и вычесть из 8, чтобы получить равные числа?

2) Какое число нужно прибавить к 8 и вычесть из 4, чтобы получить равные числа?

557. Составьте уравнение по условию задачи. 167

1) На школьной викторине было предложено 30 вопросов. За каждый верный ответ ученик получал 7 баллов, а за

каждый неправильный ответ сумма баллов ученика уменьшалась на 12.
Сколько верных ответов дал ученик, если, ответив на все вопросы викторины, он набрал 77 баллов?
2) Груша стоит на 5 р. дороже яблока, а 8 груш стоят столько же, сколько 12 яблок. Сколько стоит груша и сколько яблоко?
3) Отец разделил орехи поровну между тремя детьми. Когда они съели по 4 ореха, у них осталось вместе столько орехов, сколько получил каждый. Сколько орехов дал отец каждому ребёнку?
4) Сейчас отец в 7 раз старше сына, а через 10 лет он будет втрое старше сына. Сколько лет отцу и сколько лет сыну?
5) Мать в 5 раз старше сына. Через 15 лет она будет старше сына в 2 раза. Сколько лет матери и сколько лет сыну?

558. Решите задачи устно. 168

1) Сумма двух чисел равна 99. Одно число в 10 раз больше другого. Найдите эти числа.
2) Разность двух чисел равна 70. Одно число в 11 раз больше другого. Найдите эти числа.
3) В двух бидонах было 66 л молока. Когда из одного бидона отлили 10 л, а из другого — 8 л, в обоих бидонах молока осталось поровну. Сколько литров молока осталось в каждом бидоне?
4) В двух ящиках было 96 кг сахара. Когда из одного ящика взяли 12 кг, а из другого — 20 кг, сахара в ящиках осталось поровну. Сколько килограммов сахара было в каждом ящике?

559. Составьте уравнения к задачам.

1) Из пункта A в пункт B вышла моторная лодка со скоростью 20 км/ч. Спустя 2 ч вслед за ней вышла вторая лодка со скоро-

стью 24 км/ч. Найдите расстояние между пунктами A и B, если известно, что в пункт B они прибыли одновременно.

2) Моторная лодка проходит по течению реки за 6 ч такое же расстояние, как за 8 ч против течения. Найдите собственную скорость моторной лодки, если скорость течения реки равна 2 км/ч.

3) Теплоход проходит за 15 ч против течения реки столько же, сколько за 13 ч по течению. Найдите скорость течения реки, если собственная скорость теплохода 22 км/ч.

4) Два поезда отправляются из одного города друг за другом. Первый поезд проходит за каждый час 36 км, второй — 48 км. Через сколько часов второй поезд догонит первый, если известно, что первый поезд был отправлен на 2 ч раньше второго?

5) Туристы проехали на теплоходе со скоростью 25 км/ч на 420 км меньше, чем на поезде, скорость которого была 60 км/ч. Сколько всего километров проехали туристы, если путь на теплоходе занял у них такое же время, как и путь на поезде?

6) Из двух населённых пунктов, расстояние между которыми 21 км, одновременно навстречу друг другу вышли брат и сестра. При встрече оказалось, что брат прошёл в $1\frac{1}{4}$ раза большее расстояние, чем сестра. Через сколько часов после выхода они встретились, если скорость брата 5 км/ч?

560. Решите уравнения, составленные к задачам номера 559, и дайте ответы к этим задачам.

561. Найдите числа, если известно, что:

1) сумма пяти последовательных целых чисел равна 25;

2) сумма четырёх чётных последовательных чисел равна -20;

3) сумма четырёх нечётных последовательных чисел равна -24;

4) сумма трёх последовательных чисел, делящихся на 3, равна -45.

562. 1) Докажите, что сумма пяти последовательных чисел делится на 5.

2) Может ли сумма четырёх последовательных натуральных чисел быть простым числом?

563. 1) На вопрос друга: «Сколько у тебя денег?» Максим ответил: «Если к половине моих денег добавить 80 р., то сумма составит $\frac{3}{4}$ всех моих денег». Сколько денег у Максима?

2) На вопрос: «Который сейчас час?» Максим ответил: «До конца суток осталось $\frac{3}{5}$ того времени, что уже прошло от начала суток». Который был час?

Задачи на смекалку

564. Сумма уменьшаемого, вычитаемого и разности равна -42. Найдите уменьшаемое.

565. В 6 классе каждая девочка дружит с тремя мальчиками, а каждый мальчик дружит с двумя девочками. Сколько учащихся в классе, если мальчиков на 5 больше, чем девочек?

566. У Стаса в коллекции было 210 российских почтовых марок и 65 иностранных. Когда ему подарили ещё 25 марок, то российских марок стало в 3 раза больше, чем иностранных. Сколько российских марок подарили мальчику?

567. У Николая спросили, сколько ему лет. «Мне теперь вдвое больше лет, чем было тогда, когда мой брат был в моём возрасте, — ответил он. — Когда мне будет столько лет, сколько теперь моему брату, то нам вместе будет 98 лет». Сколько лет Николаю и его единственному брату?

Контрольные вопросы и задания

1. Сколько корней имеет уравнение:

1) $2x = 2x$; 3) $3x = 3x + 4$; 5) $-2|x| = 2$;
2) $2x = 3x$; 4) $2|x| = 2$; 6) $|x| = 0$?

2. Решите уравнение $\frac{3}{7}x - 0{,}2 = \frac{8}{35}x - 1$. Тест

3. В двух бригадах рабочих было поровну. Когда в первую бригаду поступило 6 человек, а из второй бригады ушли 4 человека, в первой бригаде оказалось в 3 раза больше рабочих, чем во второй. Сколько рабочих стало в каждой бригаде?

19 Решение задач на проценты

В условиях многих текстовых задач соотношение между величинами описывается словами «больше на...». Пусть, например, сказано, «число a на 5 больше, чем число b». Это можно записать, например, так:

$$a = b + 5.$$

Заметим, что это же равенство соответствует условию «число b меньше числа a на 5». В обоих случаях числа a и b отличаются друг от друга на одно и то же число 5.

Когда соотношение между величинами задаётся с помощью процентов, нужно в первую очередь понять, какая из сравниваемых величин принимается за 100%.

За 100% принимается та из величин, с которой сравнивается другая.

Так, если число a на 5% больше, чем число b, то за 100% принимается b. В этом случае 5% от b равно $0{,}05b$, и

$$a = b + 0{,}05b = 1{,}05b.$$

Заметим, что равенство $a = 1{,}05b$, в котором числа a и b отличаются на $0{,}05b$, не соответствует условию «число b на 5% меньше, чем число a». Здесь уже b сравнивается с a, значит, за 100% принимается число a, 5% от a равно $0{,}05a$ и число $b = a - 0{,}05a$. Поскольку число a больше числа b, то и 5% от a больше, чем 5% от b. 169—172

568. Известно, что число c на 12% меньше числа d.

1) Какая величина принимается за 100%?

2) Чему равна разность $d-c$?

3) Выразите число c через число d.

569. Запишите соотношение между числами a и b, если известно, что: 173

1) a на 3% больше, чем b;

2) a на 7% меньше, чем b;

3) a на 35% меньше, чем b;

4) a на 77% больше, чем b.

570. Известно, что число a больше числа b:

1) в 2 раза;

2) в 1,5 раза;

3) в 1,25 раза.

а) На сколько процентов a больше, чем b?

б) На сколько процентов b меньше, чем a?

571. На сколько процентов:

1) число 5 больше, чем число 4;

2) число 4 меньше, чем число 5;

3) число 10 больше, чем число 9;

4) число 9 меньше, чем число 10? 174

572. 1) Кофейные зёрна при жарке теряют $12{,}5\%$ своей массы. Сколько килограммов сырых зёрен надо взять, чтобы получить 35 кг жареных зёрен?

2) Масса муки составляет 70% от массы выпеченного из неё хлеба.

а) Сколько получится хлеба, если взять 10,5 ц муки?

б) Сколько муки надо взять, чтобы выпечь 200 кг хлеба?

Проценты встречаются в задачах о сплавах, смесях или растворах. В этих задачах используется понятие *процентного содержания*.

Процентным содержанием **вещества в сплаве называется отношение массы этого вещества к массе всего сплава, выраженное в процентах.**

Так, если в 10 кг сплава меди с оловом содержится 6 кг меди, то её процентное содержание в этом сплаве равно

$$\frac{6}{10} \cdot 100\% = 60\%.$$

573. Каково процентное содержание меди в её сплаве с оловом, если в 50 кг сплава содержится:
1) 30 кг меди; 2) 30 кг олова?

574. Одним из первых сплавов, который люди стали использовать, был *электр* — сплав золота с серебром, в котором процентное содержание серебра составляло 20—30%. На фотографии (рис. 93) изображён шумерский шлем из электра, изготовленный более 5000 лет назад.

Рис. 93

1) Сколько килограммов серебра нужно добавить к 1,4 кг золота, чтобы получить электр с содержанием серебра, равным 30%?
2) Сколько килограммов золота нужно добавить к 1,2 кг серебра, чтобы получить электр с содержанием серебра 30%?

575•. Бетон — один из самых древних строительных материалов. Его использовали уже в Древнем Египте более 5000 лет назад. Бетон применялся и при возведении Великой Китайской стены в III в. до н. э. (рис. 94). Для приготовления бетона смешивают воду, цемент, песок и щебень в отношении 2 : 4 : 9 : 17.

Рис. 94

1) Каково в этой смеси процентное содержание:

а) цемента;

б) песка;

в) щебня?

2) Сколько цемента понадобится для приготовления 16 т бетона?

Процентное содержание вещества в растворе называют *концентрацией*.

576. 1) Сколько граммов сахара содержится в 100 г 25%-го сахарного сиропа?

2) Сколько граммов соли содержится в 100 г 13%-го водного раствора соли?

3) Сколько граммов иода содержится в 100 г 4%-го спиртового раствора иода?

577. 1) В 200 г солевого раствора содержится 10 г соли. Какова концентрация соли в растворе?

2) В 120 г воды растворили 30 г сахара. Какова концентрация сахара в растворе?

3) Для приготовления клюквенного морса взяли 200 г клюквы, 150 г сахара и 1 л воды (1 л воды имеет массу 1 кг). Каково процентное содержание сахара в морсе?

4) Какой будет концентрация соли в растворе, если в 100 г воды растворить 25 г соли?

5) Какой будет концентрация сахара в сиропе, если в 150 г воды растворить 50 г сахара?

Рассмотрим задачи, при решении которых за 100% принимаются разные величины.

Задача 1. Ширину прямоугольника увеличили на 20%, а длину увеличили на 25%. На сколько процентов увеличилась площадь прямоугольника?

Решение.

1) Пусть ширина прямоугольника a. Тогда после увеличения на 20% она стала равной $1{,}2a$.

2) Пусть длина прямоугольника b. Тогда после увеличения на 25% она стала равной $1{,}25b$.

3) Площадь исходного прямоугольника была равна ab. После увеличения длин сторон его площадь стала равной $(1{,}2a) \cdot (1{,}25b) = 1{,}5ab$. Площадь увеличилась в 1,5 раза, т. е. на 50%.

Ответ: на 50%.

В этой задаче за 100% сначала принималась ширина, затем длина и, наконец, площадь исходного прямоугольника.

Задача 2. В течение года цена проезда на общественном транспорте повышалась дважды: сначала на 20%, а затем ещё на 25%. На сколько процентов выросла цена проезда за год?

Решение. Пусть в начале года цена проезда была равна a р. Тогда после первого повышения на 20% она стала равной $1{,}2a$ р. При втором повышении на 25% увеличивается уже новая цена, т. е. за 100% принимается $1{,}2a$ р. Окончательная цена равна $(1{,}2a) \cdot 1{,}25 = 1{,}5a$ (р.). За год цена увеличилась в 1,5 раза, т. е. на 50%.

Ответ: на 50%.

578. Ширину прямоугольника увеличили на 10%, а его длину уменьшили на 10%. Изменилась ли при этом площадь прямоугольника? Если изменилась, то увеличилась она или уменьшилась?

579. 1) Цена товара составляла 12 тыс. р. Через месяц товар подорожал на 5%, а ещё через месяц его цену снизили на 10%. Какой стала цена товара через два месяца? 178

2) Цена товара составляла 12 тыс. р. Через месяц цена снизилась на 5%, а через месяц после этого — ещё на 10%. Какой стала цена товара через 2 месяца?

580. В первом магазине цену товара снизили сначала на 10%, а затем ещё на 10%. Во втором магазине цену аналогичного товара сразу снизили на 20%. В каком из этих двух магазинов данный товар стал дешевле? 179

581. В банк на срочный вклад положили 30 тыс. р. Банк начисляет на сумму вклада 10% в год. Если клиент не снимает деньги со своего счёта, то через год проценты по вкладу прибавляются к сумме вклада. Какая сумма будет на счёте клиента, который не снимал деньги:

1) через год; 2) через два года; 3) через три года?

582. Ежемесячный доход семьи увеличился в первом квартале на 7%, а во втором — на 10%. На сколько процентов увеличился ежемесячный доход семьи за два квартала?

583. 1) Каким будет процентное содержание сахара в сиропе, который получится после того, как к 150 г 75%-го раствора сахара добавить 100 г воды?

2) Каким будет процентное содержание сахара в сахарном растворе, который получится после того, как к 120 г 50%-го сахарного сиропа добавить 80 г воды?

▼ Рассмотрим задачи на сплавы, смеси и растворы, при решении которых приходится составлять уравнения.

З а д а ч а 3. После добавления к 10 кг сплава меди с оловом 2 кг олова процентное содержание меди в сплаве понизилось на 10%. Сколько килограммов меди в сплаве?

Р е ш е н и е. Пусть в сплаве содержится x кг меди. Тогда до добавления олова её процентное содержание в сплаве было равно $\frac{x}{10} \cdot 100\%$.

После добавления олова масса меди в сплаве не изменилась, а масса сплава увеличилась на 2 кг и стала равной 12 кг. Процентное содержание меди в новом сплаве равно $\frac{x}{12} \cdot 100\%$.

По условию задачи новое процентное содержание меди на 10% меньше начального, значит, $\frac{x}{10} \cdot 100 - \frac{x}{12} \cdot 100 = 10$. Решаем полученное уравнение: $x - \frac{5x}{6} = 1$, $6x - 5x = 6$, $x = 6$ (кг).

О т в е т: 6 кг. △ 175, 176

584●. К 4 кг сплава золота с серебром добавили 1 кг золота.

1) При этом процентное содержание золота в сплаве увеличилось на 15%. Сколько килограммов золота было в сплаве первоначально? 180

2) При этом процентное содержание серебра в сплаве понизилось на 10%. Сколько килограммов серебра в сплаве?

585. После добавления 2 кг меди к 10 кг сплава меди с оловом процентное содержание меди в сплаве повысилось на 10%. Сколько килограммов меди стало в сплаве?

586●. 1) Сколько граммов сахара нужно добавить к 100 граммам 25%-го сахарного раствора, чтобы получился 50%-й сахарный раствор?

2) Сколько граммов воды нужно добавить к 120 граммам 75%-го сахарного сиропа, чтобы понизить концентрацию сахара в сиропе на 25%?

587●. Сколько граммов 30%-го сахарного сиропа следует развести водой, чтобы получить 100 г 15%-го сахарного сиропа?

588. Чтобы получить 6%-й столовый уксус, 70%-ю уксусную эссенцию разбавляют водой.

1) Сколько граммов воды нужно добавить к 30 г уксусной эссенции, чтобы получить столовый уксус?

2) Сколько граммов уксусной эссенции нужно взять для получения 200 г столового уксуса?

Задачи на смекалку

589. Вчера число учеников, присутствующих в классе, было в 8 раз больше, чем отсутствующих. Сегодня не пришли ещё 2 ученика, и оказалось, что число отсутствующих составляет 20% от числа присутствующих. Сколько учеников в классе?

590. Каждая девочка в классе дружит с тремя мальчиками, а каждый мальчик дружит с двумя девочками. Сколько процентов от числа всех учащихся в этом классе составляют девочки?

591. На сколько процентов увеличится численность населения города за 5 лет, если ежегодно она увеличивается на 3% ?

592. К 200 г 15%-го сахарного сиропа добавили 300 г 40%-го сахарного сиропа. Какова концентрация сахара в полученной смеси?

593. Арбуз массой 20 кг содержал 99% воды. Через несколько дней, когда он несколько усох, содержание воды в нём понизилось до 98%. Какой стала масса арбуза?

594. Число a составляет 80% числа b, а число c составляет 140% числа b. Найдите числа a, b и c, если известно, что число c больше a на 72.

Контрольные вопросы и задания

1. На сколько процентов:
1) число 10 больше, чем число 8;
2) число 8 меньше, чем число 10? Тест 177

2. Сколько граммов сахара содержится в 100 г сахарного сиропа, имеющего концентрацию: 1) 25%; 2) 50%?

3. На вклад положили 5000 р. под 4% годовых. Сколько денег будет на вкладе через 2 года, если не снимать с него денег?

4. Сколько граммов сахара нужно растворить в 300 г воды, чтобы получился сироп с концентрацией сахара 25%?

20 Длина окружности и площадь круга

Циферблат часов, колёса автомобилей, тарелки... Можно долго перечислять предметы, напоминающие нам о двух неразрывно связанных друг с другом геометрических фигурах — окружности и круге. 181

Длину отрезка можно найти с помощью линейки, длину ломаной можно найти, измерив её звенья и сложив их длины. С помощью специального прибора для измерения длин кривых линий — курвиметра можно измерить и длину окружности.

Рис. 95

Попробуем обойтись без курвиметра, воспользовавшись обычной ниткой. Аккуратно наложим нитку на окружность (рис. 95). Лишнюю нитку отрежем, а остаток растянем вдоль линейки и измерим. Длина оставшегося куска нитки и будет приближённо равна длине окружности.

595. Практическая работа.

1) Постройте окружность с диаметром, равным:

а) 10 см; б) 5 см.

2) С помощью нитки найдите длину окружности.

Длина окружности с диаметром 10 см, найденная Мишей при выполнении задания 595 с помощью нитки, оказалась приближённо равна 32 см. Получив этот результат, длину окружности диаметра 5 см Миша смог найти без измерений, воспользовавшись тем, что любые две окружности подобны. Отношения длин любых соответствующих друг другу линий двух подобных фигур равны. В частности, равны отношения длин окружностей и длин их диаметров. Обозначив буквой C длину окружности диаметра 5 см, Миша получил, что $\frac{32}{C} = \frac{10}{5}$. Из этой пропорции находим, что $C = 16$ см. Длина окружности диаметра 5 см, найденная Мишей, оказалась приближённо равна 16 см.

596. Используя свои результаты выполнения задания 595, найдите приближённо длину окружности:

1) диаметра 15 см; 2) диаметра 2 см.

Возьмём две окружности и обозначим длину первой C_1, а длину второй — C_2. Пусть диаметр первой окружности равен

d_1, а диаметр второй — d_2, тогда $\frac{C_1}{C_2} = \frac{d_1}{d_2}$. Применим к этой пропорции основное свойство, получим $C_1 d_2 = C_2 d_1$ и перейдём к пропорции $\frac{C_1}{d_1} = \frac{C_2}{d_2}$.

Из пропорции видно, что у любых двух окружностей, а значит, вообще у любых окружностей отношение длины окружности к её диаметру является одним и тем же числом. Этот факт был известен уже в Древней Греции. Наверное, поэтому число, которое получается при делении длины окружности на её диаметр, называют греческой буквой π, которая читается «пи». Это первая буква греческого слова *периферия* — «окружность». Обозначив диаметр окружности буквой d, а её длину буквой C, получим, что $\pi = \frac{C}{d}$.

Проведённые измерения длины окружности диаметра 10 см с помощью нитки позволили Мише найти приближённое значение числа π: $\pi \approx \frac{32}{10} \approx 3{,}2$.

Однако точность этого приближения невелика. Столетиями математики старались как можно точнее найти значение числа π, выполняли для этого аккуратные построения, измерения и вычисления. Великий древнегреческий учёный Архимед нашёл число π с точностью до 0,0001, а в XV в. было найдено значение π с точностью до 15-го десятичного знака после запятой $\pi \approx$ **3,141592653589793**. В наши дни с помощью компьютеров число π можно найти практически с любой точностью, однако для школьных нужд вполне достаточно помнить, что $\pi \approx$ **3,14**.

597. В прошлом веке многие школьники знали значительно больше цифр числа π. Для запоминания они использовали такую фразу: «Кто и шутя и скоро запомнить пи желает — число уже знает».

1) Запомните приведённую фразу и определите, каким способом в ней зашифрованы 11 цифр числа π.

2) Не глядя в учебник, запишите одиннадцать знаков числа π. С точностью до какого десятичного разряда вам удалось запомнить число π?

Из равенства $\pi = \frac{C}{d}$ можно выразить C и получить ***формулу длины окружности*** $\boldsymbol{C = \pi d}$.

598. Практическая работа.

1) Возьмите любой цилиндрический предмет, например круглую консервную банку, поставьте её на тетрадный лист и обведите карандашом.

2) Измерьте диаметр полученной окружности и найдите длину окружности по формуле.

3) Обмотайте 5 раз нитку вокруг банки, стараясь, чтобы витки легли как можно ближе друг к другу, тогда длина вашей окружности будет равна длине одного витка нитки.

4) Измерьте длину нитки и найдите длину окружности.

5) Вычислите, на сколько процентов отличается длина окружности, найденная с помощью нитки, от её же длины, вычисленной по формуле.

599. Найдите по формуле $C = \pi d$ длину окружности, диаметр которой равен 10 см. На сколько процентов отличается результат, вычисленный по формуле, от найденного вами с помощью нитки в задании 595? 182

600. Отлитый в 1735 г. Царь-колокол, хранящийся в Московском Кремле, имеет диаметр основания 6,6 м. Вычислите длину окружности основания Царь-колокола.

601. Диаметр колеса обозрения «Глаз Лондона» равен 135 м (рис. 96). Какой путь проходит каждая из его гондол за один оборот вокруг центра колеса?

Рис. 96

602. Число $3\frac{1}{7}$ — это довольно точное приближение числа π. Используя это приближение, найдите, на какое расстояние откатится колесо диаметром $\frac{10}{11}$ м, сделав:

1) один оборот; 2) два оборота; 3) три с половиной оборота.

603●. Сравните с длиной красной линии — *полуокружности* (половины окружности) длину синей линии, составленной из полуокружностей (рис. 97).

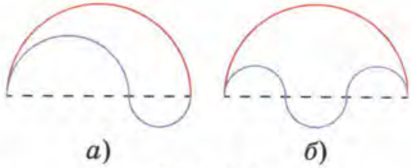


Рис. 97

В условиях задач чаще указывают не диаметр d окружности, а её радиус r. Длина окружности, выраженная через радиус, равна $2\pi r$:

$$C = 2\pi r.$$

604. Найдите с точностью до миллиметров длину окружности с радиусом, равным:

1) 2,5 см; 2) 10 см; 3) $\frac{5}{7}$ см; 4) $1\frac{5}{6}$ см. 183—185

605. 1) Выразите радиус из формулы длины окружности.

2) Вычислите радиус окружности с точностью до сантиметров, если длина окружности равна:

а) 35 дм; б) 47 дм; в) 27,5 дм; г) $2\frac{5}{7}$ дм.

606●. 1) На сколько сантиметров увеличится длина окружности, если её радиус увеличить на 1 см?

2) На сколько метров увеличится радиус окружности, если её длина увеличится на 6,3 м? 186

607○. Расстояние Юпитера от Солнца приближённо равно 778 млн км, а один оборот вокруг Солнца занимает у него примерно 12 лет. Считая, что Юпитер движется по окружности, в центре которой находится Солнце, найдите, с какой скоростью движется Юпитер по своей орбите. 187

Если разделить окружность на несколько равных частей — дуг и соединить соседние точки деления отрезками, то полученная замкнутая ломаная образует *вписанный в окружность* многоугольник (рис. 98). У этого многоугольника будут равны все стороны и все углы.

Многоугольник, все стороны и все углы которого равны, называют *правильным*.

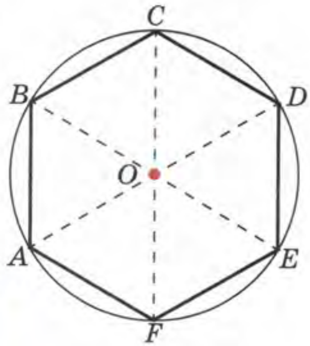


Рис. 98

Правильный треугольник — это равносторонний треугольник, правильный четырёхугольник — это квадрат. На рисунке 98 изображён правильный шестиугольник, вписанный в окружность.

608. Если соединить центр окружности с вершинами правильного шестиугольника (см. рис. 98), то получится шесть равных треугольников.

1) Найдите углы одного из этих треугольников.

2) Что можно сказать о сторонах этого треугольника?

3) С помощью циркуля проведите окружность и отметьте на ней вершины правильного шестиугольника. Начертите этот шестиугольник.

4) Найдите величину угла правильного шестиугольника.

Окружность ограничивает часть плоскости, которую называют кругом. У окружности мы находили длину, а у круга будем вычислять площадь.

Площадь S круга радиуса r можно найти по формуле

$$S = \pi r^2.$$

▼ Попробуем разобраться, как получена эта формула. В этом нам помогут правильные многоугольники.

На рисунках 99, 100, 101 в окружность вписаны правильные многоугольники: квадрат, восьмиугольник и шестнадцатиугольник.

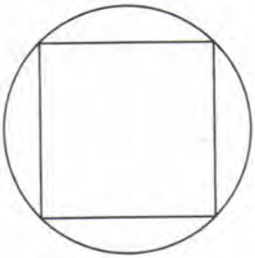


Рис. 99

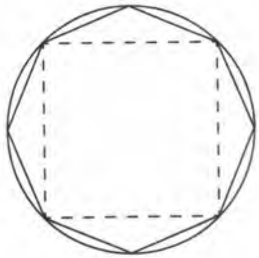


Рис. 100


Рис. 101

Вершины квадрата разбивают окружность на четыре равные дуги, вершины восьмиугольника — на 8, а вершины шестнадцатиугольника — на 16 равных дуг. Каждая новая вершина находится в середине соответствующей дуги.

609. Пользуясь тем, что отрезок — самая короткая из линий, соединяющих две точки, сравните (см. рис. 99, 100, 101):

1) периметры многоугольников, вписанных в окружность;

2) периметр каждого многоугольника с длиной окружности, проходящей через его вершины.

Процесс удвоения числа сторон многоугольника можно продолжать, получая 32-угольник, 64-угольник и т. д. Длина окружности по-прежнему больше периметра каждого из них, но разница между ней и периметром становится всё меньше и меньше по мере увеличения числа сторон. Уже шестнадцатиугольник (см. рис. 101) почти сливается с окружностью, и можно считать, что периметр шестнадцатиугольника приближённо равен длине окружности.

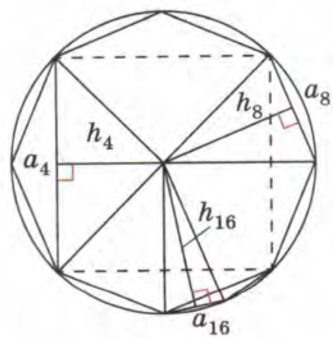


Рис. 102

Каждый из рассмотренных многоугольников составлен из равных треугольников с общей вершиной в центре круга. На рисунке 102 изображены треугольники, являющиеся: один — частью квадрата, другой — частью восьмиугольника и третий — шестнадцатиугольника.

Площадь квадрата равна сумме площадей четырёх треугольников, из которых он составлен.

$$S_4 = 4(0{,}5a_4 \cdot h_4) = 0{,}5(4a_4) \cdot h_4 = 0{,}5P_4 \cdot h_4,$$

где a_4 — сторона квадрата, h_4 — высота, проведённая к этой стороне, P_4 — периметр квадрата.

Площадь восьмиугольника равна сумме площадей восьми соответствующих треугольников

$$S_8 = 8(0{,}5a_8 \cdot h_8) = 0{,}5(8a_8) \cdot h_8 = 0{,}5P_8 \cdot h_8.$$

Площадь шестнадцатиугольника равна

$$S_{16} = 16(0{,}5a_{16} \cdot h_{16}) = 0{,}5(16a_{16}) \cdot h_{16} = 0{,}5P_{16} \cdot h_{16}.$$

Площадь шестнадцатиугольника приближённо равна площади круга, периметр его приближённо равен длине окружности $P_{16} \approx 2\pi r$, а высота соответствующих треугольников приближённо равна радиусу окружности: $h_{16} \approx r$.

Получаем

$S_{16} = 0{,}5P_{16} \cdot h_{16} \approx 0{,}5 \cdot 2\pi r \cdot r = \pi r^2 = S.$ △

610. Найдите площадь круга, радиус которого равен:

1) 3 см; 2) 0,6 см; 3) 20,7 см; 4) $4\frac{2}{3}$ см. 188, 190

611●. 1) Во сколько раз увеличится площадь круга, если его радиус увеличить:

а) в 2 раза; б) в 3 раза; в) в n раз?

2) Во сколько раз увеличится площадь круга, если его радиус уменьшить:

а) в 2 раза; б) в 3 раза; в) в n раз?

612. Диаметр окружности увеличили на 10%. На сколько процентов увеличилась при этом:

1) длина окружности;

2) площадь круга, ограниченного данной окружностью?

613. Сколько граммов семян потребуется для посева цветов на круглой клумбе диаметром 7,3 м, если на 1 м^2 требуется 13 г семян?

614•. Найдите радиус круга, площадь которого равна 78,5 см^2, с точностью до 1 см.

615•. Найдите с точностью до 1 см^2 площадь круга, ограниченного окружностью, длина которой равна:

1) 12,56 см; 3) 34,54 см; 5) 15,7 см;

2) 25,12 см; 4) 18,84 см; 6) 31,4 см.

616. Найдите с точностью до 1 м^2 площадь арены цирка, зная, что во всех цирках мира длина окружности арены равна 40,8 м.

617°. Круг *касается* (имеет одну общую точку) каждой из четырёх сторон квадрата со стороной 6 см (рис. 103).

1) Найдите площадь круга.

2) На сколько процентов площадь круга меньше, чем площадь квадрата?

3) На сколько процентов длина окружности меньше периметра квадрата?

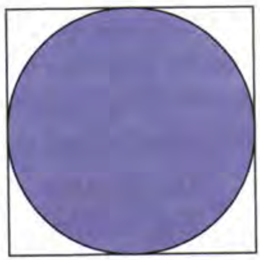


Рис. 103

618•. Окружность проведена через вершины равностороннего треугольника ABC (рис. 104). Центр окружности — точку O соединили с вершинами треугольника.

1) Чему равна сумма величин трёх углов с вершиной в центре окружности?

2) Чему равна величина каждого из этих углов?

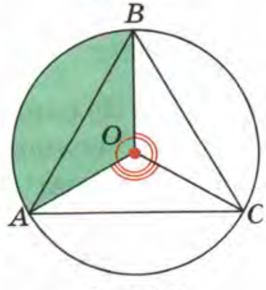


Рис. 104

Угол, образованный двумя радиусами окружности, называют *центральным углом*.

619. В окружность вписан правильный треугольник ABC.

1) Какую часть окружности на рисунке 104 составляет дуга AB, на которую опирается центральный угол AOB?

2) Какая часть площади круга приходится на фигуру (см. рис. 104), ограниченную радиусами OA, OB и дугой AB?

Часть круга, ограниченную двумя радиусами и дугой окружности, называют *круговым сектором*.

620. В окружности радиуса 5 см центральный угол равен 45°. Найдите: 1) с точностью до 0,01 см длину дуги, на которую он опирается; 2) с точностью до 0,01 см^2 площадь сектора, образованного этим углом.

621. Длина дуги окружности, на которую опирается центральный угол в 60°, равна 2 см. Найдите радиус окружности с точностью до 0,01 см и площадь сектора, образованного этим углом, с точностью до 0,1 см^2.

622•. Длина стороны квадрата (рис. 105) равна 4 см. Найдите с точностью до 0,1 см^2 площадь закрашенной фигуры.

а) *б)* *в)*

Рис. 105

623. Диаметр циферблата Кремлёвских курантов на Спасской башне Московского Кремля (рис. 106) равен 6,12 м, длина минутной стрелки 3,28 м, а длина часовой стрелки 2,97 м.

1) Найдите площадь циферблата Кремлёвских курантов.

2) На сколько больший путь проходит конец минутной стрелки за 1 ч, чем конец часовой стрелки за 12 ч, если равны меньшие части стрелок, выступающие за ось, к которой стрелки прикреплены?

Рис. 106

Задачи на смекалку

624. Земной шар стянули обручем по экватору. Затем увеличили длину обруча на 2 м. Пролезет ли кошка в образовавшийся зазор?

625. На окружности расположены 2000 белых точек и одна красная. Рассматриваются все многоугольники с вершинами в этих точках. Каких многоугольников больше — с красной вершиной или без неё?

626. Переднее колесо повозки имеет диаметр в 2 раза меньший, чем заднее колесо. Во время поездки заднее колесо совершило 500 оборотов. Сколько оборотов совершило переднее колесо?

627. Если сторона квадрата равна 4 см, то периметр (в см) и площадь (в см^2) этого квадрата выражаются одним и тем же числом. Существует ли такой круг, чтобы его площадь (в см^2) и длина окружности того же радиуса (в см) выражались одним и тем же числом?

Контрольные вопросы и задания

1. Как изменится длина окружности, если её радиус увеличить: 1) в 5 раз; 2) на 5 см?
2. Найдите длину окружности, радиус которой равен 0,5 см.
3. Что такое круг, центральный угол, дуга, круговой сектор?
4. Какую часть площади круга составляет его сектор с углом 30°?
5. Найдите угол сектора круга, площадь которого в 15 раз меньше площади круга. Тест 189

21 Осевая симметрия

На рисунке 107 представлена фотография деревьев, отражающихся в пруду. Обведём кроны деревьев оранжевой линией, их отражения — голубой и проведём белую прямую, разделяющую деревья и их отражения.

Рис. 107

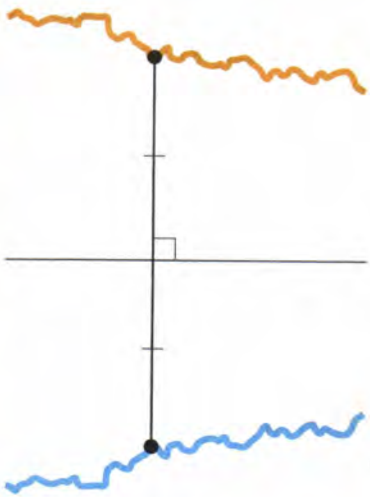


Рис. 108

Если соединить отрезком любую пару соответствующих друг другу точек оранжевой и голубой линий (рис. 108), то окажется, что, во-первых, получившийся отрезок перпендикулярен чёрной прямой и, во-вторых, делится этой прямой пополам.

Такое расположение точек относительно прямой встречается довольно часто.

Пусть на плоскости проведена прямая l.

① Возьмём какую-нибудь точку A и проведём через неё прямую AK, перпендикулярную прямой l.

② Отложим на прямой AK от точки K отрезок KA_1, равный отрезку AK, но по другую сторону от прямой l (рис. 109).

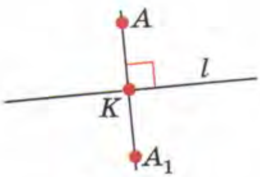


Рис. 109

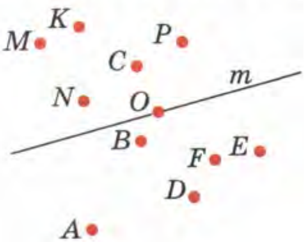


Рис. 110

Точки A и A_1 называют ***симметричными*** относительно прямой l, которую называют ***осью симметрии***.

Точка K и все другие точки оси симметрии симметричны сами себе.

628. Назовите точки, симметричные друг другу относительно прямой m на рисунке 110.

629. Проведите вертикальную прямую p и отметьте произвольные точки A и B слева, а точку C справа от этой прямой. Постройте точки, симметричные точкам A, B и C относительно прямой p. 191

630. Начертите треугольник ABC. Для каждой его вершины постройте точку, симметричную ей относительно прямой, содержащей противоположную этой вершине сторону треугольника.

Точки, симметричные всем точкам некоторой фигуры относительно прямой, составляют фигуру, равную данной. Так, например, фигура, симметричная отрезку AB относительно прямой c, является отрезком, равным отрезку AB. Для его построения достаточно знать, где расположены концы этого отрезка, т. е. достаточно построить точки A_1 и B_1, симметричные точкам A и B относительно прямой c, и соединить их (рис. 111).

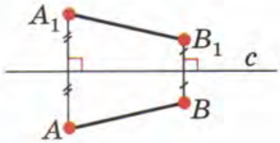


Рис. 111

631. 1) Скопируйте в свою тетрадь рисунок 112.

2) Постройте фигуру, симметричную прямоугольнику $ABCD$ относительно прямой b, проходящей через середины двух смежных сторон прямоугольника. 192—194

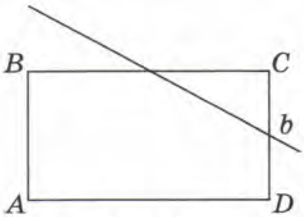


Рис. 112

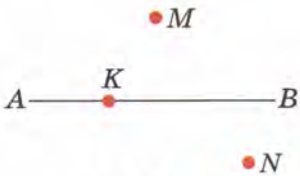


Рис. 113

632. 1) Скопируйте в свою тетрадь рисунок 113. 195

2) Постройте точки M_1 и N_1, симметричные точкам M и N относительно прямой AB.

3) Постройте отрезки, симметричные отрезкам KM, KN и MN относительно прямой AB.

4) Определите вид треугольников MKM_1 и NKN_1. На какие треугольники делит их прямая AB?

633. 1) Начертите ромб и постройте фигуру, симметричную ему относительно прямой, содержащей диагональ ромба.

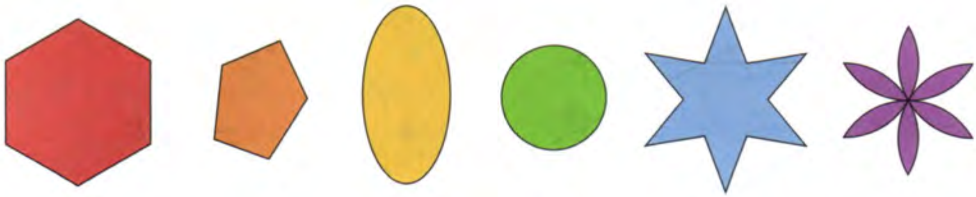
2) Начертите прямоугольник и постройте фигуру, симметричную ему относительно прямой, проведённой через середины двух противоположных сторон прямоугольника.

При построении фигуры, симметричной данной, в некоторых случаях получается исходная фигура, т. е. исходная фигура оказывается сама себе симметрична.

О фигурах, симметричных самим себе относительно некоторой прямой, говорят, что они имеют ось симметрии или что они симметричны относительно некоторой оси, а сама прямая называется *осью симметрии фигуры*.

634. Какие из фигур, изображённых на рисунке 114, имеют:

1) ось симметрии;
2) две и более оси симметрии;
3) центр симметрии;
4) и ось, и центр симметрии?



а) *б)* *в)* *г)* *д)* *е)*

Рис. 114

Осевая симметрия — довольно распространённое явление в животном и растительном мире. На рисунке 115 показаны лишь два примера такой симметрии.

Рис. 115

Часто симметрия используется в архитектуре. На рисунке 116 представлен вид здания Московского государственного университета им. М. В. Ломоносова на Воробьёвых горах, с которым вы уже встречались на страницах учебника. Здание имеет вертикальную ось симметрии.

Рис. 116

635. Отрезок AB оказался симметричен самому себе относительно некоторой пересекающей его прямой l. Сделайте соответствующий рисунок и опишите взаимное расположение отрезка AB и прямой l.

636. Начертите угол. Чем является ось симметрии этого угла? Проведите её. 197

637. 1) Как называется треугольник, который имеет:
а) одну ось симметрии; б) три оси симметрии?
2)● Может ли треугольник иметь только две оси симметрии?

638. 1) Как называются четырёхугольники, которые имеют:
а) четыре оси симметрии; б) две оси симметрии?
2)● Может ли у четырёхугольника быть только три оси симметрии?

639. 1) Начертите треугольник ABC.
2) Постройте фигуру, симметричную треугольнику ABC относительно прямой, проходящей через середины сторон AB и BC. Где оказалась точка B_1? 200

640. 1) Выпишите прописные буквы русского алфавита, которые имеют:
а) одну ось симметрии; б) две оси симметрии.
2) Есть ли в русском алфавите центрально-симметричные заглавные буквы?

641. 1) Какие цифры арабской нумерации имеют ось симметрии?

2) Запишите трёхзначное и четырёхзначное числа, имеющие:

а) одну ось симметрии;

б) две оси симметрии;

в) центр симметрии. 202

642•. Треугольник KMN симметричен треугольнику NAK относительно некоторой прямой. Сделайте соответствующие рисунки (рассмотрите два случая).

643•. Треугольник KMN симметричен треугольнику NAK относительно прямой KN.

1) Сколько осей симметрии может иметь четырёхугольник $AKMN$?

2) Каким должен быть треугольник KMN, чтобы четырёхугольник $AKMN$ имел:

а) одну ось симметрии;

б) две оси симметрии;

в) четыре оси симметрии?

644. Окружность симметрична относительно некоторой прямой.

1) Как проходит ось этой симметрии?

2) Сколько осей симметрии имеет окружность?

645. Начертите окружность и отметьте на ней две точки A и B. Проведите ось симметрии окружности, которая является осью симметрии отрезка AB. 203

646. Практическая работа.

1) Положите на лист бумаги круглое блюдце и обведите его карандашом.

2) Постройте центр получившейся окружности как точку пересечения осей симметрии двух её хорд.

647•. Верно ли утверждение: «Если параллелограмм имеет ось симметрии, то он или ромб, или прямоугольник»?

648●. Нарисуйте четырёхугольник, который имеет ось симметрии, но не имеет параллельных сторон. Как называются такие четырёхугольники?

649. 1) Сколько осей симметрии у правильного:

а) треугольника; в) пятиугольника;

б) четырёхугольника; г) шестиугольника?

2) Выскажите гипотезу о том, сколько осей симметрии имеет правильный n-угольник. 198, 199

▼ Игроки в бильярд используют отскок шара от борта в случаях, когда прямой путь шара к лузе закрыт другими бильярдными шарами. На рисунке 117 штриховой линией показана *траектория* (путь) движения бильярдного шара. Углы AOM и BON, отмеченные на рисунке, равны. Это равенство углов не случайно — на хорошем бильярдном столе угол, под которым шар ударяется в борт, равен углу, под которым он от борта отскакивает.

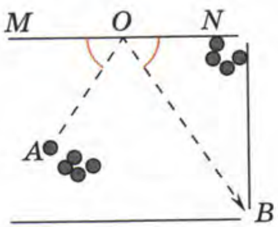


Рис. 117

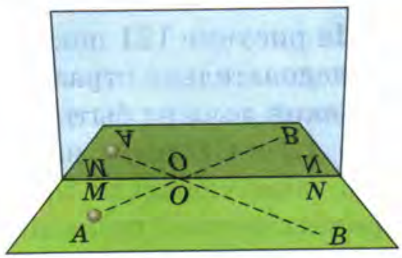


Рис. 118

Если приставить зеркало к отрезку MN, как показано на рисунке 118, то отражение в нём отрезка OB как бы продолжит отрезок AO — окажется с ним на одной прямой.

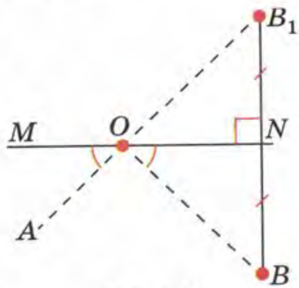


Рис. 119

Обозначим отражение точки B как B_1 (рис. 119). Можно заметить, что точки B и B_1 лежат на одном и том же перпендикуляре к прямой MN и на равных расстояниях от неё, т. е. точки B и B_1 симметричны относительно прямой MN. $\triangle$

650●. На берегу реки (рис. 120) нужно выбрать место для пристани так, чтобы сумма расстояний до неё от посёлков A и B была как можно меньшей. Скопируйте рисунок и постройте точку C, в которой должна располагаться пристань.

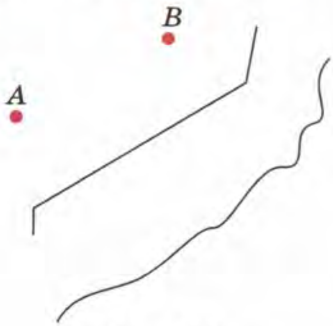


Рис. 120

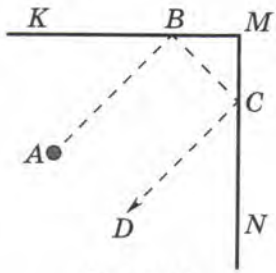


Рис. 121

651●. На рисунке 121 показана траектория бильярдного шара, последовательно отразившегося от двух бортов.

1) Какой должна быть сумма углов ABC и BCD, чтобы прямые AB и CD были параллельны? (Вспомните свойства углов, образующихся при пересечении двух параллельных прямых третьей прямой.)

2) Если $\angle ABK = x^\circ$, то чему равны величины углов MBC и ABC?

3) Чему равны величины углов MCB, NCD и BCD?

4) Чему равна сумма величин углов ABC и BCD? Какой из этого можно сделать вывод о взаимном расположении прямых AB и CD?

▼ Угол падения луча света на зеркало равен углу его отражения зеркалом (рис. 122).

Если поставить три зеркала под прямыми углами друг к другу (рис. 123), то, как и в рассмотренной только что задаче,

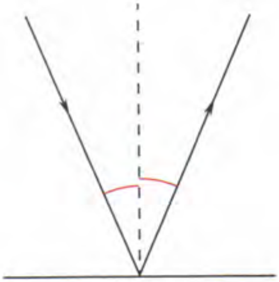


Рис. 122

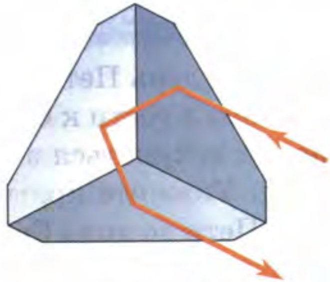


Рис. 123

падающий и отражённый лучи окажутся параллельны. Это свойство применяется в так называемых *уголковых отражателях*, которые устанавливают на автомобилях, велосипедах и на дорожных знаках.

Лучи фар отражаются угловыми отражателями обратно к автомобилю, и поэтому хорошо видны водителю. Проверьте это, направив луч фонарика на велосипедный отражатель, составленный из маленьких уголковых отражателей. △

652. Практическая работа.

1) Возьмите полоску бумаги шириной 5 см и длиной 20 см. Сложите её «гармошкой» и нарисуйте какой-нибудь рисунок. Вырежьте этот рисунок, разверните «гармошку», и у вас получится *трафарет*.

2) На рисунке 124 изображён трафарет. Как проявляется осевая симметрия в этом трафарете?

Рис. 124

Задачи на смекалку

653. В жаркий день Петя направился из своего дома в гости к Саше, но сначала решил искупаться в реке и поесть малины. Укажите кратчайший путь от дома Пети до дома Саши с заходом к реке и кустам малины. На рисунке 125 изображена река и кусты малины, буквой A обозначен дом Пети, точкой B — дом Саши.

Рис. 125

654. Прописными буквами выделены три слова. Выберите из списка предложенных слов четвёртое слово, которое так же связано с третьим, как второе с первым.

1) УГОЛ — БИССЕКТРИСА, КРУГ — ?

Список слов:

а) радиус; в) центр;
б) диаметр; г) сектор.

2) КВАДРАТ — ПЕРИМЕТР, ОКРУЖНОСТЬ — ?

Список слов:

а) длина; в) дуга;
б) диаметр; г) площадь.

655. Запишите печатными прописными буквами какое-нибудь слово, имеющее ось симметрии.

Контрольные вопросы и задания

1. В каком случае точки M и N симметричны друг другу относительно прямой a?

2. Нарисуйте фигуры, которые имеют:

а) 3 оси симметрии;

б) 4 оси симметрии;

в) 5 осей симметрии. **Тест** 201

22 Координаты

Место точки на координатной прямой определяется координатой этой точки. Нужный дом на улице можно найти по его номеру. Однако если ваши друзья живут в многоквартирном доме, то для визита к ним, кроме номера дома, нужно знать ещё и номер квартиры.

В квадрате 10×10 клеток игры «Морской бой» изображаются корабли: один четырёхклеточный, два трёхклеточных, три двухклеточных и четыре одноклеточных. При этом между любыми двумя соседними кораблями должен оставаться промежуток не меньше одной клетки. На рисунке 126 показан один из возможных вариантов расположения кораблей.

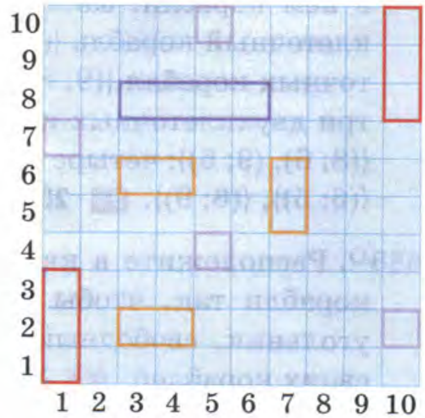


Рис. 126

Каждая клеточка квадрата обозначается парой чисел, стоящих вдоль нижней и левой сторон квадрата. Отсчёт чисел начинается от левого нижнего угла квадрата.

Числа, с помощью которых указывают, где находится некоторый объект, называют его *координатами*.

Термин координаты происходит от двух латинских слов *ко* — «совместно» и *оридинатус* — «определённый».

В игре «Морской бой» при обозначении положения клетки первой указывают горизонтальную её координату, а второй — вертикальную.

656. На рисунке 126 клетки четырёхклеточного корабля обозначаются координатами {(3; 8), (4; 8), (5; 8), (6; 8)}, а трёхклеточные корабли — {(1; 1), (1; 2), (1; 3)} и {(10; 8), (10; 9), (10; 10)}. 207

1) Какое число стоит в скобках координат клетки на первом месте: число, указанное у нижней стороны квадрата или у левой стороны?

2) Запишите координаты клеток, которые занимают остальные корабли.

657. Начертите квадрат для игры в «Морской бой» и расставьте в нём корабли, занимающие следующие клетки: четырёхклеточный корабль $\{(2; 1), (2; 2), (2; 3), (2; 4)\}$; два трёхклеточных корабля $\{(9; 8), (9; 9), (9; 10)\}$; $\{(8; 3), (9; 3), (10; 3)\}$; три двухклеточных корабля $\{(4; 5), (4; 6)\}$, $\{(1; 10), (2; 10)\}$, $\{(8; 6), (9; 6)\}$; четыре одноклеточных корабля $\{(1; 7)\}$, $\{(5; 2)\}$, $\{(6; 5)\}$, $\{(6; 9)\}$. 📖 204

658°. Расположите в квадрате для игры «Морской бой» свои корабли так, чтобы остался как можно больший прямоугольник, свободный от кораблей. Запишите координаты своих кораблей. 📖 205

659•. В квадрате для игры в «Морской бой» трёхклеточный корабль имеет координаты клеток $\{(2; 3), (2; 4), (2; 5)\}$.

1) Как изменится положение корабля, если первые и вторые координаты его клеток поменять местами? Отметьте новое положение корабля.

2) Отметьте крестиками клетки, в которых может располагаться одноклеточный корабль, если изменение порядка записи его координат не меняет его расположения. 📖 206

660•. Подумайте, какое отношение к координатам имеет посещение театра или кинотеатра.

Принцип определения положения клетки в игре «Морской бой» использован и при построении таблицы квадратов натуральных чисел от 10 до 99, помещённой на втором форзаце учебника. Так, например, квадрат числа 67 записан в клетке, стоящей на пересечении строки 60 и столбца 7, — это число 4489.

661. Найдите с помощью таблицы квадратов натуральных чисел от 10 до 99 (см. второй форзац) квадраты чисел: 208

1) 11; 37; 54; 98;

2)° 150; 480; 7700; 8300;

3)• 0,16; 0,53; 0,0049; 0,00094.

662. Квадратами каких чисел являются числа:

1) 225; 441; 4096; 9216;

2)• 0,7744; 0,6889; 0,0225; 0,007396?

663. Определите с помощью таблицы квадратов, какие из следующих чисел являются квадратами натуральных чисел: 1025; 7926; 5929; 3575; 8649; 9801; 9999.

Потребность в координатах и умении их определять первыми ощутили путешественники, особенно мореплаватели, ведь в море не у кого спросить дорогу, а плаванье только вдоль берегов существенно ограничивало разнообразие возможных маршрутов.

▼ На рисунке 127 изображён глобус — модель земного шара. На нём по изображениям океанов, морей, материков и островов проходит сеть линий, каждая из которых является окружностью. Одни окружности проходят через Северный и Южный полюсы — их называют ***меридианами***. Другие окружности пересекают меридианы под прямыми углами, постепенно уменьшаясь при приближении к полюсам — это ***параллели***. Самая большая из параллелей, как бы опоясывающая земной шар, называется ***экватором***.

Рис. 127

Через любую точку глобуса (кроме полюсов) можно провести параллель и меридиан. Чтобы указать координаты точки земного шара, нужно знать, как параллели и меридианы определяются и обозначаются. Отсчёт параллелей ведут от экватора по направлениям к Северному или Южному полюсу Земли. Меридианы отсчитывают от начального, *нулевого меридиана*, проходящего через маленький английский городок Гринвич, расположенный на берегу реки Темзы в пригороде Лондона. Этот меридиан так и называется — Гринвичский. Небольшая часть нулевого меридиана (рис. 128) проведена по мостовой Гринвича. От него меридианы отсчитываются на восток и на запад. При этом углы с вершиной в центре Земли измеряют в градусах (рис. 129).

Рис. 128

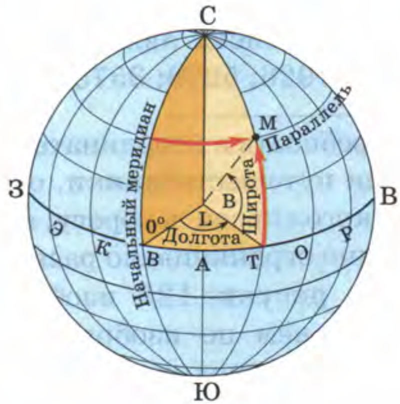


Рис. 129

Получающиеся координаты называют соответственно широтой и долготой. Москва, например, имеет такие координаты: 37° восточной долготы и 56,5° северной широты — Москва находится к востоку от Гринвича и к северу от экватора.

В знаменитом романе Жюля Верна «Дети капитана Гранта» герои в поисках капитана Гранта совершают увлекательное и опасное путешествие вдоль всей 37-й параллели южной широты. На карте (рис. 130) 37-я параллель пересекает Южную Америку.

Обратите внимание на то, как Жюль Верн задал масштаб карты. △

Координаты, с которыми вы уже познакомились на уроках математики, — координаты точек на прямой. Выбрав на любой прямой начало отсчёта, единичный отрезок и положительное на-

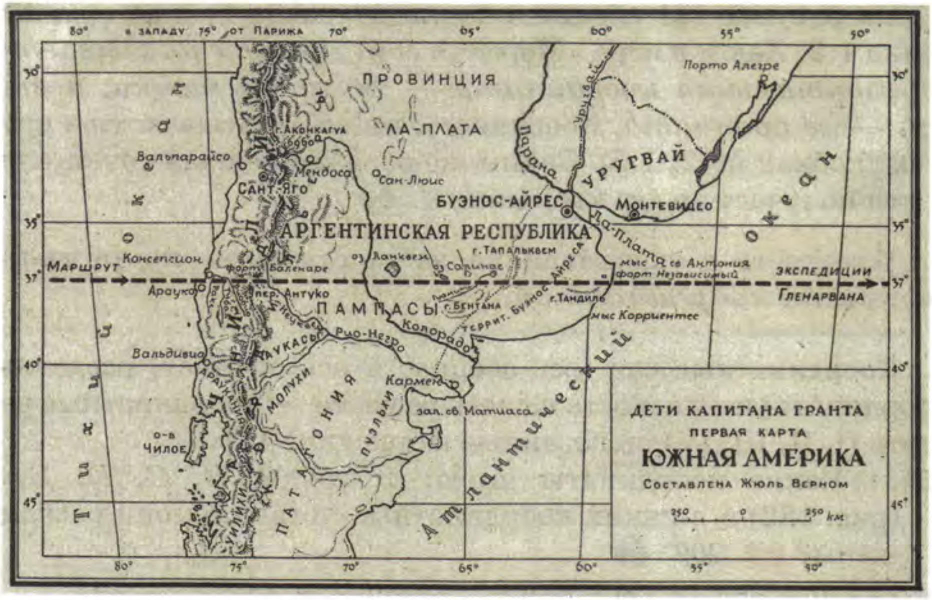


Рис. 130

правление, мы превращаем эту прямую в координатную. Каждой её точке соответствует своё число — координата.

Для определения положения точки на плоскости нужны два числа. Поэтому на *плоскости* проводят две взаимно перпендикулярные координатные прямые: горизонтальную и вертикальную с общим началом (рис. 131).

Из любой точки M плоскости к координатным прямым можно провести перпендикуляры и определить координаты точек их пересечения с координатными прямыми.

Координату точки на горизонтальной координатной прямой называют ***абсциссой***, на вертикальной — ***ординатой***. Горизонтальную координатную прямую называют ***осью абсцисс***, вертикальную прямую — ***осью ординат***.

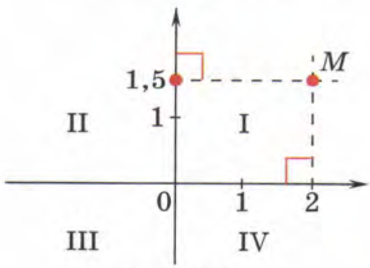


Рис. 131

На рисунке 131 абсцисса точки M равна 2, а её ордината равна 1,5. Как и в игре «Морской бой», *первой указывается горизонтальная координата — абсцисса точки, а второй — её ордината*. Координаты точки записываются в круглых скобках $M(2; 1{,}5)$. Таким же образом каждая точка плоскости получает по две координаты.

Плоскость с указанной на ней *системой координат* называют *координатной*.

Координатные оси (ось абсцисс и ось ординат) разделяют координатную плоскость на четыре части — координатные четверти (I, II, III, IV), показанные на рисунке 131.

664. 1) Какие координаты имеют точки A, B, C, D, E, F (рис. 132) и в каких координатных четвертях они расположены? 209

2) Какие абсциссы у точек, лежащих на оси ординат?

3) Какие ординаты у точек, лежащих на оси абсцисс?

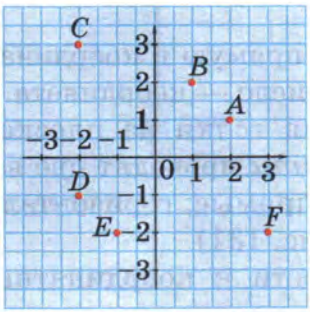


Рис. 132

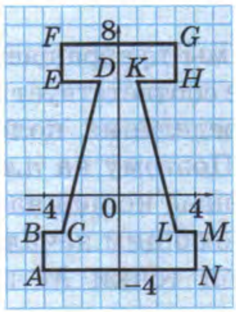


Рис. 133

665. Запишите координаты вершин многоугольника (рис. 133). Чем является ось ординат для данной фигуры?

Построение точки по данным координатам — задача обратная определению координат точки. Например, рассмотрим, как строится точка $M(2; 1{,}5)$ (см. рис. 131).

① На оси абсцисс отмечают точку с данной абсциссой.

② На оси ординат отмечают точку с данной ординатой.

③ Через отмеченные точки проводят перпендикуляры к осям, и точка их пересечения имеет заданные координаты.

666. Начертите в тетради координатные оси, взяв единичный отрезок длиной 1 см. Постройте точки:
$A(0; 3)$, $B(4; 1)$, $C(-2; 0)$, $D(-1; 4)$, $E(3; -2)$, $F(-3; -1)$.

667. Учитель дал классу задание найти площадь треугольника ABC, вершины которого имеют координаты: $A(0; 0)$, $B(0; 3)$ и $C(4; 1)$. Построив в своей тетради треугольник ABC (рис. 134), Петя понял, что может найти его площадь, ничего не измеряя.

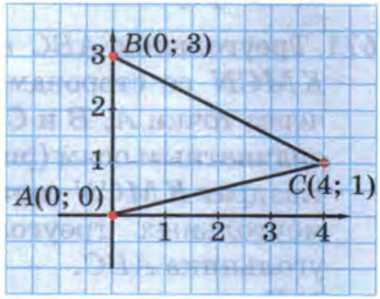


Рис. 134

1) Как рассуждал Петя?
2) Найдите площадь треугольника ABC, не производя измерений, если единичный отрезок равен 1 см. 210

668. 1) Начертите в тетради координатные оси, взяв единичный отрезок в 1 см.
2) Постройте треугольник ABC по координатам его вершин:
а) $A(1; 0)$, $B(5; 0)$ и $C(2; 5)$;
б) $A(-2; 0)$, $B(0; -3)$ и $C(2; 0)$;
в) $A(0; -3)$, $B(-4; 1)$ и $C(0; 3)$.
3) Вычислите площадь построенного треугольника.

669. 1) Начертите в тетради координатные оси, взяв единичный отрезок в 1 см.
2) Постройте треугольник ABC по координатам его вершин:
а) $A(1; 1)$, $B(-3; 1)$, $C(0; 5)$;
б) $A(-2; -3)$, $B(-1; 3)$, $C(2; -3)$;
в) $A(-1; 5)$, $B(-1; -1)$, $C(5; -1)$.
3) Вычислите площадь построенного треугольника. 217

670. 1) Начертите в тетради координатные оси, взяв единичный отрезок в 1 см.

2) Постройте треугольник ABC по координатам его вершин:

а) $A(1; 0)$, $B(-2; 4)$ и $C(2; 5)$;

б) $A(-2; 1)$, $B(1; -3)$ и $C(3; 2)$.

3) С помощью угольника проведите в построенном треугольнике высоту. Измерьте длину высоты и длину стороны треугольника, к которой высота проведена. Вычислите площадь треугольника.

671. Треугольник ABC вписан в квадрат $KMCN$ со сторонами, проходящими через точки A, B и C параллельно координатным осям (рис. 135).

Квадрат $KMCN$ состоит из трёх прямоугольных треугольников и треугольника ABC.

1) Вычислите площадь треугольника ABC, не проводя измерений.

2) Вычислите таким же способом площадь треугольника ABC с координатами вершин, указанными в задании 669, а) и б).

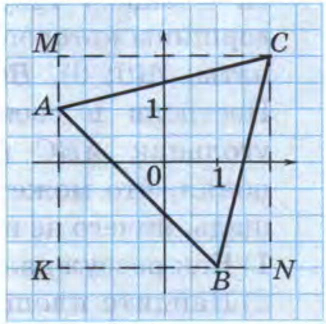


Рис. 135

672. 1) Начертите в тетради координатные оси, взяв единичный отрезок в 1 см.

2) Постройте четырёхугольник $ABCD$ по координатам его вершин:

а) $A(3; 2)$, $B(-2; 2)$, $C(-2; -1)$, $D(3; -1)$;

б) $A(4; 0)$, $B(0; 2)$, $C(-4; 0)$, $D(0; -2)$;

в) $A(4; 0)$, $B(0; 3)$, $C(-3; 2)$, $D(0; -1)$;

г) $A(4; 0)$, $B(1; 3)$, $C(-2; 3)$, $D(-3; 0)$;

д)● $A(-3; -2)$, $B(-4; 2)$, $C(3; 3)$, $D(2; -4)$.

3) Вычислите площадь четырёхугольника $ABCD$.

673. Постройте фигуру, последовательно соединив отрезками точки с координатами:

а) $(3; -2)$, $(-3; -2)$, $(-3; 2)$, $(0; 4)$, $(3; 2)$, $(3; -2)$, $(-3; 2)$, $(3; 2)$, $(-3; -2)$;

б) $(4; 0)$, $(1; -1)$, $(0; -4)$, $(-1; -1)$, $(-4; 0)$, $(-1; 1)$, $(0; 4)$, $(1; 1)$, $(4; 0)$. 215

674•. Придумайте фигуры, образованные ломаными, и последовательно запишите координаты вершин этих ломаных.

675•. Не выполняя построения четырёхугольника с координатами вершин: (0; 0), (0; 3), (4; 3) и (4; 0), Петя догадался, что это прямоугольник, и смог вычислить его периметр и площадь. Постарайтесь объяснить, на что обратил внимание Петя, и вычислите периметр и площадь этого четырёхугольника, если единичные отрезки координатных осей равны 1 см.

676•. 1) Четырёхугольники заданы координатами своих вершин:

а) (−2; 1), (2; 1), (2; −1), (−2; −1);
б) (−3; 0), (−3; 2), (0; 3), (0; 0);
в) (3; 2), (4; 2), (3; 4), (2; 4);
г) (−3; −1), (1; −1), (1; −5), (−3; −5);
д)* (0; 0), (3; 3), (6; 0), (3; −3);
е)* (−5; 0), (−2; 3), (0; 1), (−3; −2).

2) Не выполняя построения, укажите среди данных четырёхугольников прямоугольники. Есть ли среди этих прямоугольников квадраты?

677•. Даны координаты трёх вершин прямоугольника:

1) (1; 0), (1; −3), (−1; −3);
2) (−2; 1), (3; 1), (3; 2);
3) (2; −1), (5; −1), (2; 3);
4) (−4; 2), (−4; 4), (−1; 4).

Не выполняя построения, определите координаты четвёртой его вершины.

678•. Найдите координаты точки M — середины отрезка AB, если:

1) $A(2; 4)$, $B(8; 6)$;
2) $A(-2; 4)$, $B(8; -6)$;
3) $A(-2; -4)$, $B(-8; 6)$;
4) $A(a; c)$, $B(b; d)$.

679. Отметьте на координатной плоскости множество точек:

1) абсциссы которых равны 2;
2) ординаты которых равны −3;

3) координаты которых равны между собой;
4) координаты которых противоположны;
5) абсциссы которых больше -2, но меньше 3;
6) ординаты которых больше 2, но меньше 3;
7) абсциссы которых больше 1, но меньше 3, а ординаты больше -2, но меньше 2;
8) координаты которых положительны;
9) координаты которых отрицательны;
10)● ординаты которых больше абсцисс. 214

680. 1) Отметьте на координатной плоскости три какие-нибудь точки и постройте точки, которые будут симметричны им относительно:

а) оси абсцисс; б) оси ординат; в) начала координат.

2) Определите координаты построенных точек. 213

3)● Как связаны между собой координаты точек, симметричных относительно:

а) оси абсцисс; б) оси ординат; в) начала координат?

681. Точки заданы координатами:

$A(2; 5)$, $B(-3; 7)$, $C(-0{,}273; -17{,}85)$, $D(55; -0{,}017)$.

Не отмечая точки на координатной плоскости, определите, в каких координатных четвертях лежат точки, симметричные данным относительно:

1) оси абсцисс; 2) оси ординат; 3) начала координат.

Каковы координаты этих точек? 218

682. 1) Отметьте на координатной плоскости точки: (0; 0), (1; 4), (1; 3), (2; 3), (3; 2), (3; 0), (1; –1), (2; –1), (1; –3), (0; –1). Соедините последовательно точки отрезками, и получится половина изображения. Вторую половину изображения найдите, отметив для каждой точки симметричную относительно оси ординат.

2) Отметьте на координатной плоскости точки: (0; 0), (6; 2), (3; 3), (2; 6), (0; 0), (–2; 6), (–3; 3), (–6; 2), (0; 0). Соедините последовательно точки отрезками, и получится половина изображения. Вторую половину изображения найдите, от-

метив для каждой точки симметричную относительно оси абсцисс. 📖 219

Задачи на смекалку

683. Если бы мы могли обойти земной шар по экватору, то макушка нашей головы описала бы более длинный путь, чем каждая точка на поясе. Как велика эта разница?

684. Даны координаты трёх вершин параллелограмма:

$$M(0;\ 1),\ N(1{,}5;\ 3),\ K(3;\ 1).$$

Какие координаты может иметь четвёртая вершина этого параллелограмма?

685. В квадрате игры «Морской бой» закрасьте клетки, сумма координат каждой из которых:

1) больше 15; 2) меньше 10; 3) равна 8.

Контрольные вопросы и задания

1. В вашем классе парты, наверное, стоят рядами. Считая ближний к окну ряд первым, а первой в каждом ряду — парту, ближнюю к доске, запишите координаты своей парты.

Сначала указывайте номер ряда, затем номер парты. Достаточно ли этих координат, чтобы точно определить место, на котором вы сидите?

2. Проведите координатные оси.

1) Какая из осей называется осью абсцисс? Как называется другая ось?

2) Какая из точек $A(-5;\ 4)$, $B(2;\ -7)$, $C(4;\ -1)$, $D(-3;\ 3)$ расположена:

а) ближе к оси абсцисс;

б) ближе к оси ординат;

в) на равных расстояниях от осей координат? Тест 📖 216

23 Геометрические тела

Геометрические тела представляют собой части пространства, ограниченные замкнутыми поверхностями. Если поверхность тела состоит из многоугольников, то тело называют *многогранником*.

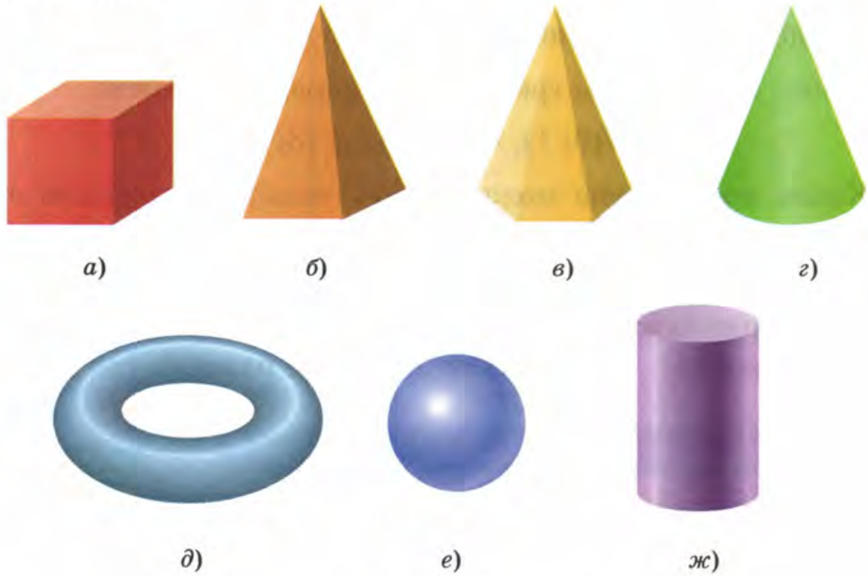


Рис. 136

686. 1) Какие из изображённых на рисунке 136 геометрических тел вам знакомы? Как они называются?

2) Какие из этих тел являются многогранниками?

Поверхность шара называют *сферой*. Сферу можно определить как *множество точек пространства, равноудалённых от центра шара*.

Получить шар можно вращением полукруга вокруг его диаметра (рис. 137). Вращая прямоуголь-

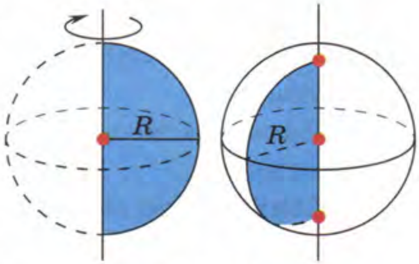


Рис. 137

ник вокруг его стороны, можно получить цилиндр (рис. 138), а если вращать прямоугольный треугольник вокруг катета, получится *конус* (рис. 139).

Поэтому шар, цилиндр и конус называют *телами вращения*.

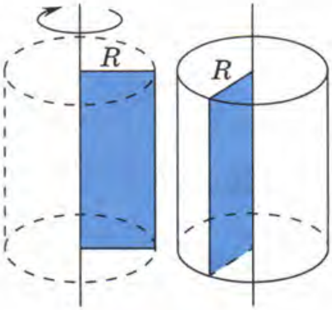


Рис. 138

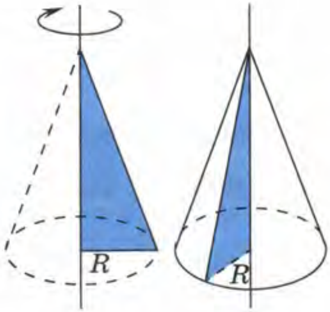


Рис. 139

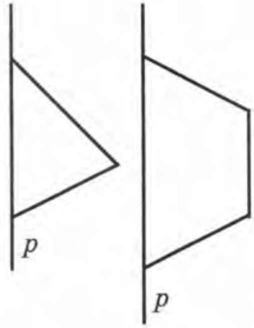


Рис. 140

687. 1) Нарисуйте тело, которое получится при вращении фигуры, изображённой на рисунке 140, вокруг оси p. 224, 226
2) Назовите геометрические тела, из которых оно состоит.

Названия большинства основных геометрических фигур и тел произошли от привычных действий человека или часто встречающихся предметов той или иной формы. Так, *точка* произошла от глагола «ткнуть», а названия *сфера*, *цилиндр* и *конус* на древнегреческом языке означали соответственно «мяч», «валик» и «сосновая шишка».

Одним из основных видов многогранников, известных людям с древних времен, является *призма*, что по древнегречески означало «опиленная».

Нам чаще будет встречаться ***прямая призма***, т. е. многогранник, две противоположные грани которого являются многоугольниками (их называют *основаниями*), а остальные грани — прямоугольниками (их называют *боковыми гранями*).

На рисунке 141 изображены три прямые призмы. На среднем из них вы видите четырёхугольную призму, которую вы знаете как прямоугольный параллелепипед.

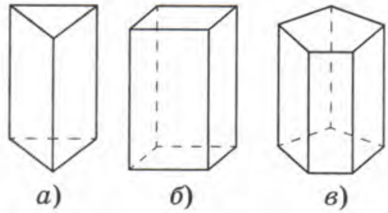


Рис. 141

688. 1) Назовите, какая фигура лежит в основании каждой призмы на рисунке 141.

2) Дайте название каждой призме.

3) Сколько граней у каждой призмы? 220–222

Название другого вида многогранников идёт из Древнего Египта, где мумии фараонов хоронили в величественных сооружениях — *пирамидах* (рис. 142). Египетские пирамиды имеют форму многогранника, в основании которого лежит квадрат, а боковые стороны — треугольники с общей вершиной.

Рис. 142

Пирамидой называют многогранник, одна из граней которого является многоугольником (её называют *основанием*), а остальные грани — треугольники с общей вершиной (их называют *боковыми гранями*).

689. 1) Какой многоугольник лежит в основании каждой пирамиды на рисунке 143?

2) Дайте название каждой пирамиде.

3) Сколько боковых граней у каждой пирамиды? 223

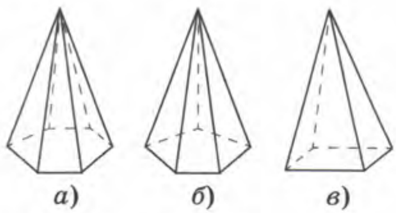


Рис. 143

Рассмотрим ещё одну группу многогранников, изображённых на рисунке 144. Все эти пять многогранников называются *правильными многогранниками*. Вместе с тем у каждого из них есть и своё собственное название.

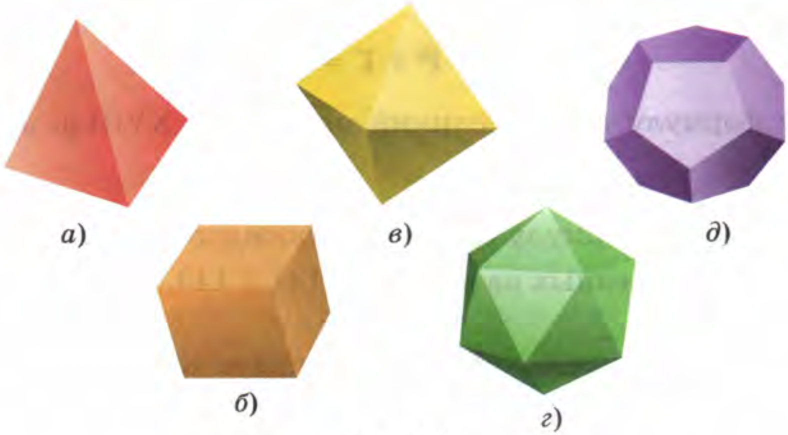


Рис. 144

а) Правильный многогранник, все четыре грани которого являются равносторонними треугольниками, называется *тетраэдром*.

б) Многогранник с шестью гранями — квадратами — называется *кубом* или *гексаэдром*.

в) Многогранник с восемью гранями — правильными треугольниками — называется *октаэдром*.

г) Многогранник, ограниченный двадцатью гранями — правильными треугольниками, — называется *икосаэдром*.

д) Многогранник, ограниченный двенадцатью гранями — правильными пятиугольниками, — называется *додекаэдром*.

Эти красивые названия составлены из древнегреческих слов: четырёхгранник (*тетра* — «четыре», *эдра* — «грань»), шестигранник (*гекса* — «шесть»), двенадцатигранник (*додека* — «двенадцать»).

690. Найдите число вершин, рёбер и граней многогранников, изображённых на рисунках 141 и 143.

▼ Если сравнить число граней **(Г)**, число вершин **(В)** и число ребер **(Р)** любого из рассмотренных нами многогранников, можно заметить, что эти числа связаны друг с другом формулой

$$\mathbf{В - Р + Г = 2.}$$

Эту формулу вывел великий математик XVIII в. Леонард Эйлер. △

691. Проверьте формулу Эйлера для каждого из многогранников, изображённых на рисунках 141 и 143. 225

Призма, пирамида, цилиндр и конус обладают важным свойством — их поверхности можно *развернуть на плоскости*, как показано на рисунке 145.

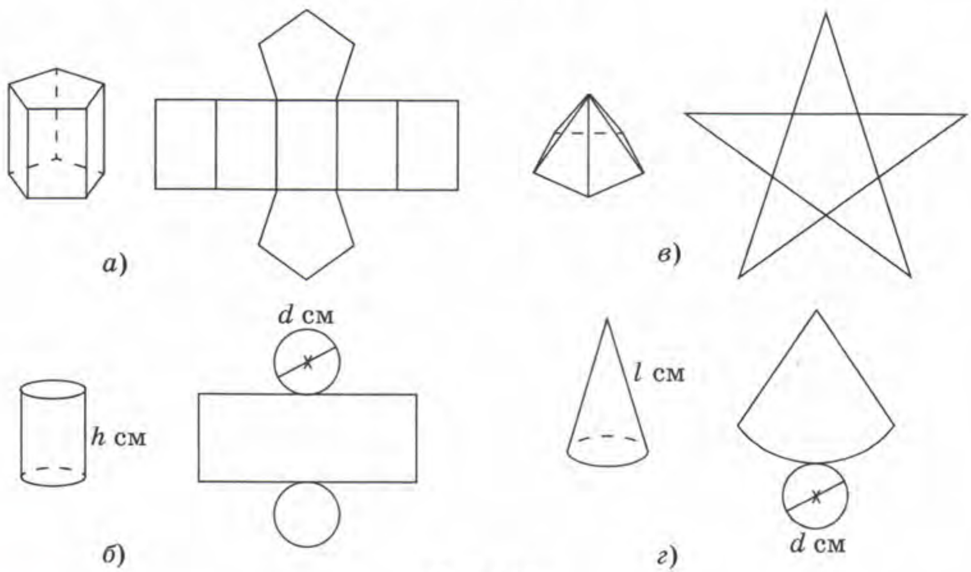


Рис. 145

Прямоугольники на рисунке 145, *а* и *б* представляют собой развёртки боковых поверхностей призмы и цилиндра. Боковая поверхность пирамиды развернулась в пять треугольников (рис. 145, *в*). Боковая поверхность конуса — сектор, длина дуги которого равна длине окружности основания (рис. 145, *г*).

692. Для цилиндра и конуса, изображённых на рисунке 145 (*б*, *г*), запишите формулы:

1) площади боковой поверхности;

2) площади полной (всей) поверхности. 227

Формулы объёма шара и площади сферы, как и формулы объёма круга и длины окружности, содержат число π и радиус шара r. 228

Объём шара **Площадь сферы**

$$V_{\text{шара}} = \frac{4}{3}\pi r^3 \qquad S_{\text{сферы}} = 4\pi r^2$$

693. 1) Найдите площадь поверхности шара (площадь сферы) радиусом 3 м.

2) Какой объём имеет этот шар?

694. Дан радиус шара: а) 4 см; б) 0,2 дм; в) $\frac{1}{2}$ м; г) $1\frac{1}{3}$ м.

1) Вычислите объём шара.

2) Вычислите площадь поверхности шара.

695. 1) Выразите через диаметр шара:

а) объём шара; б) площадь сферы.

2) Вычислите объём шара и площадь сферы, если известен диаметр:

а) 3 см; б) $\frac{2}{3}$ см; в) $1\frac{1}{2}$ см; г) 0,3 см.

696●. В куб вписан шар, который касается всех граней куба (рис. 146). Найдите:

1) отношение их объёмов;

2) отношение площадей их поверхностей.

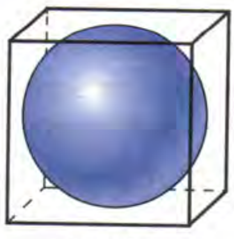


Рис. 146

В отличие от призмы, пирамиды, цилиндра и конуса, сферу невозможно развернуть на плоскости. Это проявляется, например, в географических картах. Так, на карте земных полушарий, которую вы изучаете на уроках географии, полярные области Земли изображены с нарушением масштаба — они как бы растянуты.

Объёмы небольших геометрических предметов можно найти с помощью мерного стакана. Для этого в мерный стакан наливают воду и полностью погружают в неё измеряемый предмет. Уровень воды при этом поднимается, и можно найти объём вытесненной предметом воды. Этот объём равен объёму предмета. Использование такого способа измерения объёмов, вероятно, и натолкнуло великого древнегреческого учёного Архимеда на открытие его знаменитого физического закона.

697. Практическая работа.

1) Измерьте дома с помощью линейки диаметр шарика для настольного тенниса, зажав его между двумя плоскостями, и найдите его объём.

2) Найдите объём шарика с помощью мерного стакана.

3) Сравните результаты измерений.

698●. Оцените диаметр и площадь поверхности арбуза массой 14 кг. (Арбуз на 99% состоит из воды. 1 дм^3 воды имеет массу 1 кг.)

Задачи на смекалку

699. Проверьте, что формула Эйлера верна для октаэдра, додекаэдра и икосаэдра.

700. Существует ли: а) призма; б) пирамида, любую грань которой можно считать основанием?

701. Прописными буквами выделены три слова. Выберите из списка предложенных слов четвёртое слово, которое так же связано с третьим, как второе с первым.

1) КВАДРАТ — КУБ, КРУГ — ?

Список слов: а) окружность; б) сектор; в) сфера; г) шар.

2) КРУГ — ПЛОЩАДЬ, ШАР — ?

Список слов: а) радиус; б) длина; в) объём; г) площадь поверхности.

702. В каждом ряду найдите лишнее геометрическое тело (рис. 147).

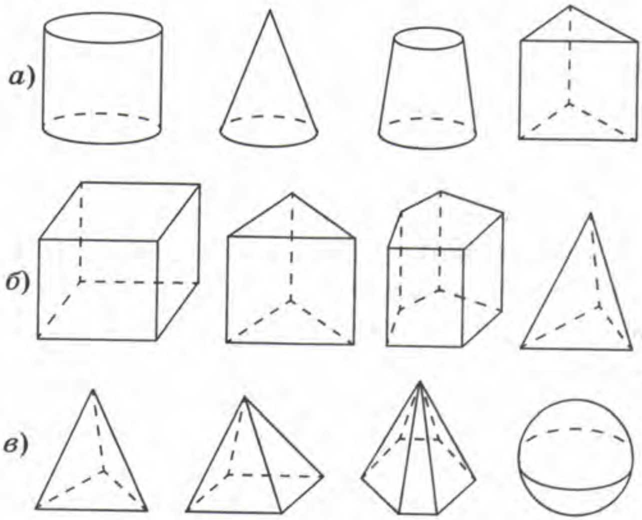


Рис. 147

Контрольные вопросы и задания

1. Как взаимосвязаны шар и сфера?
2. Найдите объём шара и площадь сферы, если:
   1) радиус равен 5 см; 2) диаметр равен 0,3 дм. Тест

24 Диаграммы

В трёх шестых классах проводилась контрольная работа. Результаты выполнения этой работы приведены в таблице 1.

Таблица 1

Класс	Число учеников, получивших отметку			
	«2»	«3»	«4»	«5»
6 «А»	2	10	11	7
6 «Б»	2	12	7	3
6 «В»	4	10	7	3

Из таблицы можно узнать, сколько учеников в том или ином классе получили, например, отметку «5». В 6 «Б» и в 6 «В» пятёрки получили по три школьника. Однако для сравнения успехов трёх классов нужно знать, какую часть всего класса составляют ученики, получившие ту или иную отметку. Такую информацию обычно представляют в процентах.

Найдём число учащихся 6 «А» класса: $2 + 10 + 11 + 7 = 30$.

Примем это число за 100% и найдём, какой процент учеников получили отметку «5»:

$$\frac{7}{30} \cdot 100 \approx 23{,}3\%.$$

703. Используя данные таблицы 1, найдите, сколько процентов учеников:
1) 6 «А» класса получили отметку: а) «2»; б) «3»; в) «4»;
2) 6 «Б» класса получили отметку: а) «3»; б) «4»; в) «5»;
3) 6 «В» класса получили отметку: а) «3»; б) «4»; в) «5».

704. Заполните таблицу 2, используя результаты предыдущего задания. 229

Таблица 2

Класс	Процент учеников, получивших отметку			
	«2»	«3»	«4»	«5»
6 «А»				23,3%
6 «Б»				
6 «В»				

Для повышения наглядности информацию об оценках можно представить в виде *круговой диаграммы* (рис. 148). На этой диаграмме площадь каждого из секторов составляет указанное рядом с ним число процентов от площади всего круга.

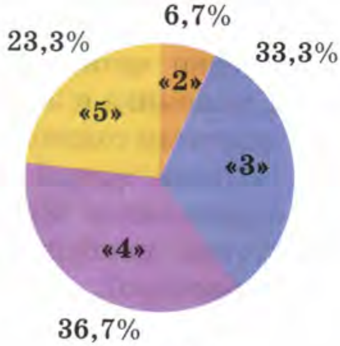


Рис. 148

Для построения круговой диаграммы нужно найти углы её секторов. Сумма величин всех углов составляет 360°, поэтому на одного ученика 6 «А» класса приходится $360° : 30 = 12°$.

Отметку «5» получили 7 учеников, значит, угол соответствующего им сектора равен $12° \cdot 7 = 84°$. Этот угол строится с помощью транспортира.

705. Найдите углы секторов, соответствующих числу школьников, получивших отметку (см. рис. 148):
1) «2»; 2) «3»; 3) «4».

706. Используя транспортир, постройте круговые диаграммы результатов (см. табл. 1), которые показали на контрольной работе ученики:
1) 6 «Б» класса;
2) 6 «В» класса.

707. По диаграмме соотношения площадей суши и Мирового океана (рис. 149) ответьте на вопросы.
1) Сколько градусов на круговой диаграмме отводится:
а) для суши;
б) для водной поверхности?
2)° Какая площадь поверхности Земли покрыта водой, если диаметр земного шара приблизительно равен 12,8 тыс. км? 230

Рис. 149

708. На круговой диаграмме (рис. 150) представлены категории читателей журнала «Экономика и жизнь» по результатам годовой подписки.

1) Среди какой категории подписчиков журнал пользуется наибольшей популярностью?

2) Сколько подписчиков относится к группе, составляющей 15% ?

3) Сколько всего подписчиков журнала? 231

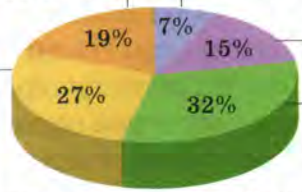


Рис. 150

709. Океаны Земли занимают приблизительно такие площади: Тихий — 180 млн км^2, Атлантический — 92 млн км^2, Индийский — 75 млн км^2, Северный Ледовитый — 13 млн км^2. Начертите круговую диаграмму площадей всех океанов по плану:

(1) найдите площадь Мирового океана;

(2) вычислите, сколько градусов круговой диаграммы приходится на 1 млн км^2;

(3) вычислите, сколько градусов круговой диаграммы приходится на площадь каждого океана;

(4) постройте круговую диаграмму. 232

710. Постройте круговую диаграмму площадей материков Земли, если известно, что Азия занимает приблизительно 43,4 млн км^2, Африка — 30,3 млн км^2, Северная Америка — 24,2 млн км^2, Южная Америка — 17,8 млн км^2, Антарктида — 14,1 млн км^2, Европа — 11,5 млн км^2, Австралия — 8,7 млн км^2.

711. Врачи рекомендуют дневную норму питания (в калориях) распределить на 4 приёма: утренний завтрак составляет 25% , второй завтрак — 15, обед — 45 и ужин — 15% .

Постройте круговую диаграмму распределения дневной нормы питания.

Результаты выполнения контрольной работы (рис. 151) 6 «А» класса, представленные в таблице 1, можно оформить в виде ***столбчатой диаграммы***. Принцип построения столбчатой диаграммы аналогичен построению системы координат на плоскости. В столбчатой диаграмме на оси абсцисс указаны отметки, а на оси ординат — процент школьников, получивших их (см. рис. 151).

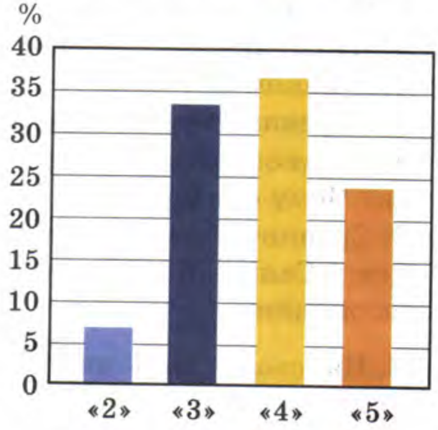


Рис. 151

Строить столбчатые диаграммы несколько проще, чем круговые, по крайней мере, можно обойтись без транспортира.

712. Рассмотрите столбчатую диаграмму среднемесячной температуры в г. Санкт-Петербурге в 2003 г. (рис. 152). Ответьте на вопросы.

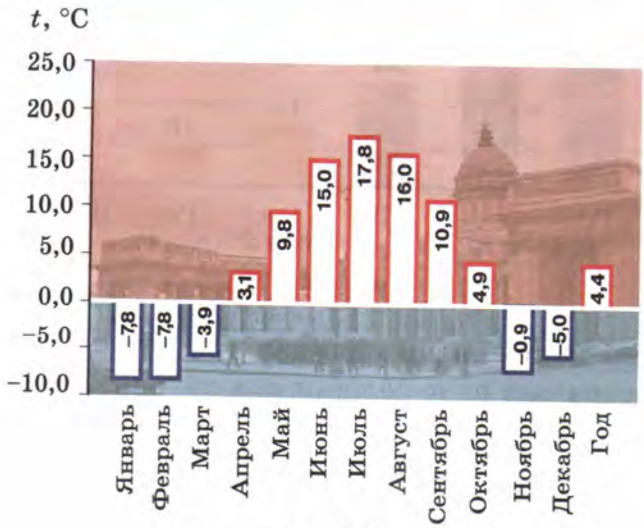


Рис. 152

1) Что на диаграмме откладывается по оси ординат?

2) Что обозначает одно деление оси ординат?

3) Что отмечается на оси абсцисс?

4) В каком месяце в г. Санкт-Петербурге была самая высокая средняя температура? Чему она равна?

5) В каком месяце была самая низкая средняя температура? Чему она равна?

6) Сравните среднемесячную температуру в одном из месяцев в Санкт-Петербурге и в населённом пункте, в котором вы живёте.

713●. На столбчатой диаграмме (рис. 153) представлен *рейтинг* российских телевизионных каналов, показывающий процент постоянных телезрителей указанного канала от общего числа телезрителей.

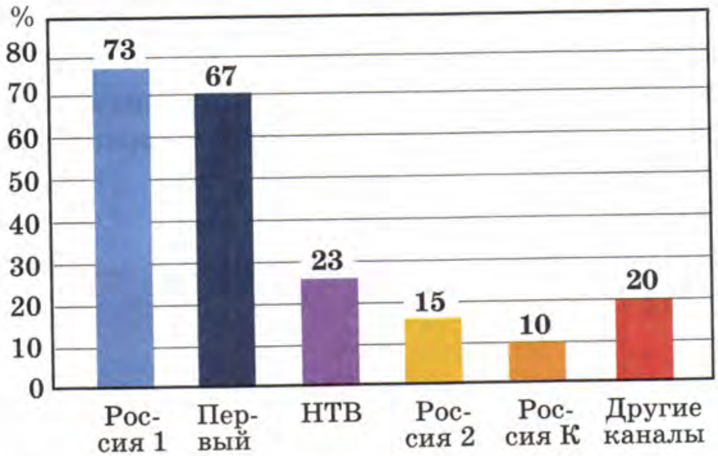


Рис. 153

1) Что отмечается на оси ординат?

2) Что обозначает одно деление оси ординат?

3) Что отмечается на оси абсцисс?

4) Какие выводы вы можете сделать из информации, представленной на этой диаграмме?

5) Почему в сумме число процентов больше 100?

714. Используя данные таблицы 2, полученные в задаче № 704, постройте столбчатые диаграммы результатов, которые показали на контрольной работе ученики:

1) 6 «Б» класса;

2) 6 «В» класса.

715. По диаграмме, показывающей распределение известных гор мира по высоте (рис. 154), ответьте на вопросы.

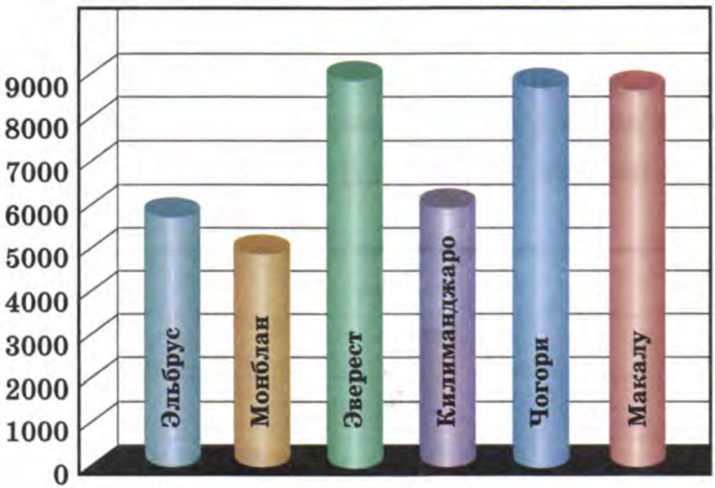


Рис. 154

1) Какая из гор самая высокая?

2) Какая из гор имеет наименьшую высоту на диаграмме?

3) Эльбрус — самая высокая вершина в России. Какова её высота?

4) Монблан — самая высокая вершина в Западной Европе. Какова её высота?

716. Постройте столбчатую диаграмму протяжённости рек мира по следующим данным: Амазонка — 6280 км, Нил — 6671 км, Миссисипи — 5970 км, Янцзы — 5800 км, Волга — 3531 км, Ганг — 2700 км. Одной единице вертикальной оси соответствует 1000 км.

Отметим ещё одно преимущество столбчатых диаграмм перед круговыми. Эти диаграммы можно использовать для сравнения результатов, показанных на нескольких круговых диаграммах.

Так, одна столбчатая диаграмма (рис. 155) показывает результаты выполнения контрольной работы, представленные ранее тремя диаграммами (см. рис. 148 и диаграммы, полученные при выполнении задания № 706). Из этой диаграммы видно, что самый высокий процент четвёрок и пятёрок и самый низкий процент двоек у 6 класса «А», что процент четвёрок и пятёрок у класса «Б» примерно такой же, как и у класса «В», что процент двоек у 6 «В» примерно в два раза выше, чем в двух других шестых классах. 233

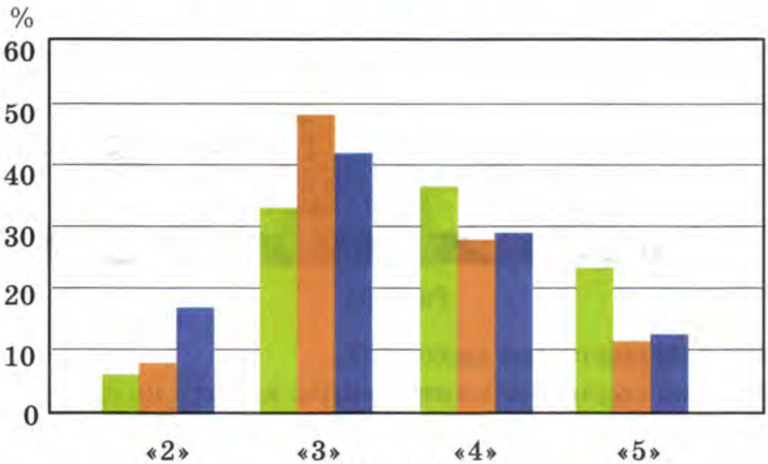


Рис. 155

717. 1) Постройте столбчатую диаграмму, позволяющую сравнить результаты последней контрольной работы по математике в вашем классе, выполненной девочками, с результатами мальчиков.

2) Постройте столбчатую диаграмму результатов, показанных вашим классом на трёх последних контрольных работах по математике. 234

3) Постройте столбчатую диаграмму результатов вашего класса на последних контрольных работах по математике и по русскому языку.

718. Составьте диаграммы по указанным ниже данным. Тип диаграммы выберите самостоятельно.

1) Распределение расходов в семье из трёх человек: 47% — на питание, 15 — на одежду, 9 — на жилье, 5 — на хозяйственные нужды, 8 — на транспорт, 16% — на досуг.

2) Люди, находясь в поисковой системе Интернета, интересуются информацией из разных областей: бизнесом — 14%, наукой и образованием — 7, компьютерами и другой техникой — 22, культурой и искусством — 5, развлечениями — 8, отдыхом и спортом — 7, музыкой и др. — 5%.

Задачи на смекалку

719. В классе процент мальчиков на 4 больше процента девочек. Сколько учеников в классе?

720. При опросе учеников 6 класса о том, чем они занимаются в свободное время, были получены следующие ответы: 57% учеников смотрят телевизор, 28% читают книги, остальные занимаются чем-то другим.

Попробуйте, ничего не измеряя и не вычисляя, на глаз найти диаграмму, на которой отражены данные опроса (рис. 156).

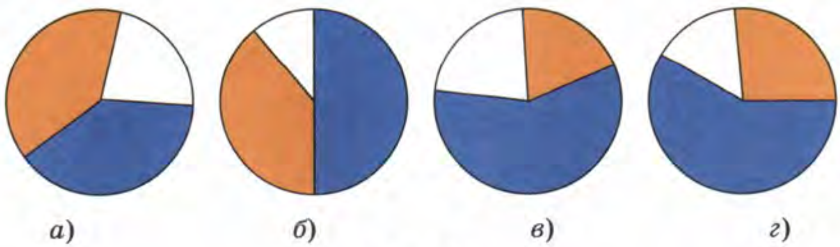


Рис. 156

Контрольные вопросы и задания

1. В каких случаях удобнее строить столбчатую диаграмму, а в каких — круговую?

2. Укажите с помощью столбчатой диаграммы высоты плотин гидроэлектростанций: Нурекская — 310 м, Ингурская — 301 м, Саяно-Шушенская — 234 м, Токтогульская — 215 м, Красноярская — 128 м, Братская — 125 м.

3. Для приготовления компота из свежих фруктов берут 700 г фруктов, 1000 г воды и 300 г сахара. Выразите процентное содержание ингредиентов и начертите круговую диаграмму.

Тест Ч. 2. С. 51

Глава

5 Повторение

Из истории математики

О натуральных числах

Считать люди научились в незапамятные времена. Однако первым назвал используемые при счёте числа *натуральными* римский математик Боэций, живший в V—VI вв. Множество натуральных чисел бесконечно.

В наши дни с помощью степеней числа 10 мы можем компактно записывать очень большие числа. Так, например, масса Земли приближённо равна $6 \cdot 10^{21}$ кг.

721. Прочитайте числа:

104 590 045,	1 234 567 890,
807 706 504 302,	20 070 009,
7 007 070 777,	3 000 006.

722. Представьте число в виде суммы разрядных слагаемых:

1) 34 829;	4) 600 070 080;
2) 1 300 407;	5) 27 027 207;
3) 450 000 400;	6) 50 000 090.

723. Назовите натуральное число, которое:

1) непосредственно следует за числом 19 999;
2) предшествует числу 345 000;
3) в 10 раз больше числа 2048;
4) на 10 больше, чем 1995;

5) в 100 раз меньше, чем 350 000;
6) на 100 меньше, чем 6090;
7) стоит между 180 499 и 180 501;
8) стоит между 3 999 999 и 4 000 001.

724. 1) Запишите с помощью цифр число:
а) тридцать пять тысяч сто восемь;
б) шестьсот семь тысяч триста двенадцать;
в) один миллион три тысячи двести;
г) два миллиарда двадцать миллионов двадцать.
2) Представьте эти числа в виде суммы разрядных слагаемых. 235, 236

725. Сравните числа:
1) 0 и 1;
2) 205 и 1999;
3) 4860 и 4859;
4) 42 870 и 4287;
5) 405 682 и 405 711;
6) 2 054 790 и 3 000 000. 239

726. Выпишите все натуральные числа, которые можно поставить вместо буквы x так, чтобы получилось верное неравенство:
1) $x < 5$;
2) $x \leqslant 1$;
3) $2367 < x < 2372$;
4) $5689 \leqslant x \leqslant 5694$;
5) $20 < x - 1 \leqslant 27$;
6) $57 < x + 2 < 65$.

727. Округлите натуральные числа:
1) 916 до десятков;
2) 891 до сотен;
3) 10 023 до единиц тысяч;
4) 345 906 до сотен тысяч;
5) 23 968 294 до единиц миллионов;
6) 9 876 543 210 до сотен миллионов. 241, 242

728. 1) За 12 кг картофеля и 16 кг капусты заплатили 620 р. Сколько стоит 1 кг капусты, если 1 кг картофеля стоит 21 р.?
2) На велосипеде турист ехал 5 ч со скоростью 25 км/ч, а оставшуюся часть пути проделал на поезде. Поезд шёл со

скоростью 60 км/ч. Сколько часов турист ехал на поезде, если весь его путь оказался равен 305 км?

3) За какое время при движении против течения реки теплоход пройдёт 196 км, если его собственная скорость 16 км/ч, а скорость течения реки 2 км/ч?

4) За 8 ч токарь может выточить 24 детали, а его ученик — в 3 раза меньше. Какое количество деталей они могут выточить за 5 ч, работая вместе?

О делимости чисел

Десятичная позиционная система счисления, которая повсеместно используется в наши дни, зародилась в Индии, затем была усовершенствована в арабских странах и уже оттуда попала в Европу, где её до сих пор называют *арабской*. До этого в Европе использовалась известная вам римская система записи чисел. А задолго до Древнего Рима свои собственные системы счисления были в Древнем Египте, Древнем Вавилоне и Древней Греции.

Однако, как бы ни записывались натуральные числа, свойства их от этого не меняются. Так, например, число 27 в римской нумерации записывается как XXVII и делится на IX. Деление является самым сложным арифметическим действием даже в десятичной системе. Наверное, поэтому математики стали изучать свойства делимости чисел. Особый интерес у них вызывали простые числа, которые в любой системе счисления делятся только на единицу и на себя.

На втором форзаце учебника есть таблица простых чисел, в которой указаны все простые числа, меньшие 1000. Самое большое простое число в этой таблице равно 997. Следующее за ним простое число равно 1003, затем идёт простое число 1009 и т. д.

В 2008 г. было найдено простое число, равное $2^{43112609} - 1$. В десятичной записи этого числа около 13 млн цифр. В 2011 г. это было самое большое из известных простых чисел. Интерес к поиску всё больших простых чисел не ослабевает, так как эти числа используются в компьютерной обработке информации. Поиск простых чисел никогда не закончится, потому что *не существует самого большого простого числа.*

Бесконечность множества простых чисел ещё в IV в. до н. э. доказал знаменитый древнегреческий математик Евклид.

▼ Рассмотрим это доказательство.

Доказательство. Запишем первые n простых чисел: $2, 3, 5, 7, 11, \ldots, p_n$ и прибавим к их произведению единицу: $2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 11 \cdot \ldots \cdot p_n + 1$. Получившееся число, как и любое натуральное число, большее 1, имеет простой делитель p (возможно, равный самому числу). Но им не может оказаться ни одно из первых n простых чисел, так как слагаемое $2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 11 \cdot \ldots \cdot p_n$ им кратно, а 1 — нет. Это следует из свойства неделимости суммы (см. с. 62). Значит, простое число p не входит в число первых n простых чисел, а значит, оно больше любого из них. Проведённое рассуждение верно для любого натурального n, значит, какое бы простое число p_n мы ни взяли, можно указать ещё большее простое число. △

Способ выделения простых чисел из множества натуральных чисел изобрёл друг Архимеда Эратосфен. Эратосфен предложил записать подряд натуральные числа, а затем вычеркивать числа через одно, начиная от числа 2, затем через два, начиная от числа 3, затем через четыре, начиная от числа 5, и т. д. (рис. 157). В результате должны остаться только простые числа.

1	2	3	~~4~~	5	~~6~~	7	~~8~~	~~9~~	~~10~~
11	~~12~~	13	~~14~~	~~15~~	~~16~~	17	~~18~~	19	~~20~~
~~21~~	~~22~~	23	~~24~~	~~25~~	~~26~~	~~27~~	~~28~~	29	~~30~~
31	~~32~~	~~33~~	~~34~~	~~35~~	~~36~~	37	~~38~~	~~39~~	~~40~~
41	~~42~~	43	~~44~~	~~45~~	~~46~~	47	~~48~~	~~49~~	~~50~~

Рис. 157

Записи Эратосфен делал на листе папируса, натянутом на деревянную рамку, а числа не вычёркивал, а выкалывал. Папирус приобретал после этого вид решета. Поэтому такой способ получения простых чисел называют *решетом Эратосфена*.

В таблице простых чисел первой тысячи некоторые числа выделены цветом. Эти простые числа являются соседними нечётными натуральными числами. Математики назвали их *числами-близнецами*. Удивительно, но до сих пор никому не удалось выяснить, конечным или бесконечным является множество чисел-близнецов. А ведь за ответ на этот вопрос Математическим институтом Клея (США) назначена премия в миллион долларов.

С помощью компьютеров была найдена пара чисел-близнецов, в десятичной записи которых по 303 цифры.

729. Даны числа 23, 2, 18 570, 5790, 1234, 1, 2 034 051, 344. Назовите:

1) числа, делящиеся на 2;
2) числа, делящиеся на 3;
3) числа, делящиеся на 6;
4) числа, делящиеся на 2, но не делящиеся на 4. 243

730. Даны числа: 47 805, 2, 452 718, 997, 13 570, 17 507 026, 1, 575 700, 53 721, 8253, 41 556, 10 401.
Укажите: 1) простые числа; 2) составные числа. 244

731•. Числа 3, 5 и 7 образуют две пары чисел-близнецов. Докажите, что это единственная тройка последовательных нечётных чисел, каждое из которых является простым.

732°. Докажите, что разность двузначных чисел, у которых цифры единиц и десятков поменяли местами, делится на 9.

733. Какой цифрой оканчивается произведение:
1) $31 \cdot 32 \cdot 33 \cdot \ldots \cdot 39$; 2) $11 \cdot 13 \cdot \ldots \cdot 97 \cdot 99$?

734. Разложите на простые множители числа:
1) 468; 3) 1176; 5) 3625;
2) 930; 4) 2664; 6) 5400.

735. Найдите наименьшее общее кратное чисел:
1) 27 и 36; 3) 108, 216 и 135;
2) 25 и 38; 4) 270, 300 и 315.

736. Найдите наибольший общий делитель чисел:

1) 42 и 48;
2) 144 и 72;
3) 120, 144 и 324;
4) 126, 540 и 630.

737. Докажите, что:

1) $475 + 780$ делится на 5;
2) $900 - 350$ делится на 25;
3) $123 \cdot 13 + 663 \cdot 17$ делится на 3;
4) $572 \cdot 21 - 774$ делится на 2;
5) $667 \cdot 14 + 667 \cdot 16$ делится на 10;
6) $3456 \cdot 23 - 3456 \cdot 5$ делится на 9. 245, 246

738°. Сравните значения выражений, выполнив прикидку:

1) 18 144 : 756 и 19 920 : 83;
2) 52 140 : 395 и 91 316 : 74;
3) 12 636 : 54 и 23 115 : 67;
4) 9483 : 327 и 21 455 : 613;
5) $34 \cdot 15$ и $345 \cdot 2$;
6) $157 \cdot 9$ и $39 \cdot 84$;
7) $453 + 589$ и $372 + 692$;
8) $1847 - 483$ и $2683 - 999$.

739•. 1) Три бегуна стартовали одновременно в одном направлении на круговой дорожке длиной 400 м. Их скорости равны 10, 12 и 18 км/ч. Через сколько минут после старта все три бегуна впервые окажутся в одном и том же месте беговой дорожки?

2) На кольцевой трассе длиной 50 км проводят тренировку три гонщика. Они стартуют одновременно с одного места. Через какое время после старта они впервые окажутся рядом, если скорости автомобилей 50, 100 и 250 км/ч?

О законах арифметических действий

Переместительный, сочетательный и распределительный законы арифметических действий были известны уже в Древней Греции, где их обосновывали геометрически.

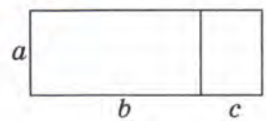


Рис. 158

Распределительный закон $a(b + c) = ab + ac$ следовал из двух способов вычисления площади прямоугольника (рис. 158).

Законы арифметических действий используют при упрощении выражений и вычислении их значений.

740. Вычислите рациональным способом:

1) $734 \cdot 100 - 734 \cdot 98$;
2) $8300 - 83 \cdot 99$;
3) $945 \cdot 123 - 745 \cdot 123 + 200 \cdot 877$;
4) $(1281 + 719) : 10 : 25 : 4$;
5) $456 \cdot 79 - 35 \cdot 163 + 544 \cdot 79 - 163 \cdot 65$;
6) $456 + 792 - 356 - 792 - 29$;
7) $(525 - 50) \cdot 2 : (373 - 323)$;
8) $777 \cdot 777 - 777 \cdot 767 - 7670$;
9) $13\,095 : 135 \cdot 5 - 10\,395 : 135 \cdot 5$. 247

741. Упростите выражение:

1) $2a + 9a + 3a$;
2) $13c - 8c - c$;
3) $26 + d + 9d - 27$;
4) $54 - (31b - 36) + b$;
5) $50 - 10(2m - 5)$;
6) $100 + 66k - 2(24k + 17)$. 248

742. Известно, что:

1) $10^2 + 11^2 + 12^2 = 13^2 + 14^2$;
2) $108^2 + 109^2 + 110^2 = 133^2 + 134^2$;
3) $3^3 + 4^3 + 5^3 = 6^3$;
4) $11^3 + 12^3 + 13^3 + 14^3 = 20^3$. 249

Используйте эти равенства для вычисления:

а) $(10^2 + 11^2 + 12^2 + 13^2 + 14^2) : 365$;
б) $(3^3 + 4^3 + 5^3 + 6^3) : (2^4 \cdot 3^3)$;
в) $(108^2 + 109^2 + 110^2 - 133^2 - 134^2) : 798$;
г) $(11^3 + 12^3 + 13^3 + 14^3 + 20^3) : 1000$.

743. Найдите значение выражения:

1) $(209 \cdot 37 - 29 \cdot 101 + 324 \cdot 9) : 20$;
2) $(807 \cdot 23 - 73^2 - 416 : 13) : 16$;
3) $(204 \cdot 37 + 34\,992 : 324 : 9) : 280$;
4) $((13^3 - 31^2) : 12 + 2055 : 15) : 12$;
5) $108\,114 : 487 - 10\,137 : 93$;
6) $(33\,100 - 5776) : (593 + 419)$.

744. С двух аэродромов, расстояние между которыми 2400 км, вылетели два самолёта. Скорости этих самолётов 700 км/ч и 500 км/ч. Какое расстояние будет между самолётами через 2 ч после вылета, если они летят:

1) навстречу друг другу;

2) вдогонку;

3) с отставанием;

4) в противоположных направлениях, удаляясь друг от друга?

О процентах

Чтобы делить целое на части, люди изобрели дроби. Сначала это были доли, т. е. дроби с числителем, равным единице. Особенно широкое распространение получили сотые доли, т. е. проценты.

745. Найдите:

1) 4% от 75;
2) 15% от 84 кг;
3) $18\frac{1}{3}$% от 330 м;
4) 160% от 82 р. 25 к.;
5) 35% от 72 р.;
6) 53,5% от 120 ц;
7) 12,6% от 35 л;
8) 102% от 6,7.

746. Найдите величину, если:

1) 40% её равны 12;
2) 1,25% её равны 55;
3) 0,8% её равны 1,84;
4) 15% её равны 1 р. 35 к.;
5) $16\frac{2}{3}$% её равны 2 ч 30 мин;
6) 132% её равны 66 км.

747. Найдите, сколько процентов составляет число:

1) 1 от 4;
2) 2 от 10;
3) 3 от 5;
4) 5 от 2;
5) 12,5 от 50;
6) 3,2 от 1,28.

748. 1) Израсходовали сначала 40% имевшихся денег, а затем ещё 30% оставшихся. После этого осталось 105 р. Сколько было денег первоначально?

2) Утром товар стоил 250 р., днём цена товара была увеличена на 30%, а вечером дневная цена была снижена на 30%. Найдите вечернюю цену товара.

3) Скорость водного мотоцикла 40 км/ч, скорость катера на подводных крыльях на 72% больше скорости водного мотоцикла, а скорость глиссера на 50% меньше скорости катера. Найдите скорость глиссера.

4) Турист, пройдя 5% всего пути, подсчитал, что оставшееся расстояние на 108 км больше пройденного. Найдите длину всего пути туриста.

5)● В сиропе 60% сахара. Сколько воды нужно добавить к 3 кг сиропа, чтобы снизить процентное содержание сахара в нём до 40%?

О дробях

Путь от долей к обыкновенным дробям занял у человечества несколько тысяч лет. Только в конце XVI в. обыкновенные дроби стали применять в Европе, но ещё долго арифметические действия с ними считались очень трудными. Тем более что примерно в это же время фламандский инженер Симон Стевин изобрёл десятичные дроби, действия с которыми совсем мало отличаются от действий с натуральными числами. Историческая правда требует сказать, что более чем за 100 лет до Стевина о десятичных дробях рассказал в своей книге «Ключ к арифметике» арабский математик Джемшид Гиясэддин ал-Каши.

В России учение о десятичных дробях впервые изложил Леонтий Филиппович Магницкий в учебнике «Арифметика, сиречь наука числительная...», вышедшем в 1703 г.

749. Сократите дробь:

1) $\frac{35}{45}$; 3) $\frac{66}{99}$; 5) $\frac{134}{226}$;

2) $\frac{58}{87}$; 4) $\frac{255}{340}$; 6) $\frac{123}{12\,345}$.

750. Вычислите:

1) $\frac{3}{7}+\frac{5}{14}$;
2) $2\frac{1}{8}+3\frac{5}{12}$;
3) $6\frac{15}{21}+2\frac{9}{14}$;
4) $5\frac{13}{15}+1\frac{7}{12}$;
5) $1-\frac{9}{11}$;
6) $\frac{8}{9}-\frac{7}{12}$;
7) $8-5\frac{4}{9}$;
8) $7\frac{3}{8}-3\frac{5}{6}$;
9) $\frac{3}{8}\cdot\frac{2}{9}$;
10) $2\frac{1}{10}\cdot1\frac{1}{14}$;
11) $1\frac{3}{7}\cdot14$;
12) $3\frac{3}{5}\cdot1\frac{1}{9}$;
13) $\frac{5}{9}:\frac{10}{27}$;
14) $\frac{5}{7}:\frac{3}{8}$;
15) $4\frac{4}{9}:2\frac{2}{3}$.

751. Найдите значение выражения:

1) $\frac{11}{50}-\frac{3}{25}+\frac{1}{20}$;
2) $\frac{11}{15}-\frac{3}{10}+\frac{1}{45}$;
3) $1\frac{5}{17}\cdot\left(7-2\frac{4}{11}\right)$;
4) $\left(3\frac{7}{15}+8\frac{9}{20}\right):\frac{11}{20}$.

752. 1) Расположите значения выражений в порядке возрастания:

$1\frac{2}{3}-\frac{5}{6}$; $1\frac{2}{3}\cdot\frac{5}{6}$; $1\frac{2}{3}+\frac{5}{6}$; $1\frac{2}{3}:\frac{5}{6}$.

2) Расположите значения выражений в порядке убывания:

$4-\frac{5}{6}\cdot2$; $1\frac{1}{3}+2\frac{1}{4}\cdot3$; $\left(\frac{1}{5}+\frac{1}{4}\right):1\frac{1}{8}$; $4:\left(2-1\frac{3}{7}\right)$; $4\frac{2}{3}:3\cdot5\frac{1}{4}$.

753. Вычислите рационально:

1) $2\frac{1}{3}\cdot3-1\frac{1}{2}\cdot2\frac{1}{3}$;
2) $\frac{1}{3}-\frac{4}{5}\cdot\frac{1}{3}$;
3) $\frac{2}{7}\cdot\frac{2}{3}+\frac{2}{3}\cdot\frac{3}{7}+\frac{5}{7}\cdot\frac{1}{3}$;
4) $2+3\frac{1}{7}\cdot1\frac{1}{3}-2\frac{1}{7}\cdot1\frac{1}{3}$;
5) $3\frac{3}{4}\cdot4\frac{1}{2}:6\frac{3}{4}$;
6) $\left(\frac{3}{7}+\frac{3}{14}-\frac{6}{35}\right):\frac{3}{7}$.

754. Представьте в виде суммы разрядных слагаемых числа:

1) 304,5;
2) 7,03;
3) 83,027;
4) 0,234;
5) 0,008;
6) 10203,40506. 237

755. Запишите в виде десятичной дроби число:

1) 7; 3) $3\frac{3}{4}$; 5) $\frac{13}{99}$; 7) $4\frac{5}{6}$;

2) $\frac{2}{5}$; 4) $1\frac{8}{9}$; 6) $\frac{11}{9}$; 8) $\frac{3137}{999}$.

756. Запишите в виде обыкновенной дроби десятичную дробь:

1) 0,25; 5)● 0,(7);
2) 3,125; 6)● 0,(3);
3) 5,95; 7)● 1,(12);
4) 18,13; 8)● 2,(23).

757. Какие цифры можно вставить вместо звёздочки, чтобы получилось верное неравенство:

1) $0,*9 > 0,78$; 3) $*,23 < 4,11$; 5) $25,7 > 24,*$;
2) $1,*5 < 1,24$; 4) $2*,8 < 30,8$; 6) $0 < 0,*1$?

758. 1) Запишите в порядке возрастания числа:
0; 0,1; 0,17; 0,28; 0,01; 0,03; 0,38.
2) Запишите в порядке убывания числа:
3,5; 13,7; 7,25; 4,82; 7,7; 5,01; 5,5.

759. Округлите числа:

1) 4,973 до единиц; 4) 123,45 до десятков;
2) 50,475 до единиц; 5) 9,2036 до сотых;
3) 72,253 до десятых; 6) 0,18745 до тысячных. 250

760. Округлите числа до сотых с недостатком и с избытком и запишите результат в виде двойного неравенства:

1) $\frac{3}{7}$; 3) $4\frac{13}{15}$; 5) 28,(17);

2) $1\frac{4}{9}$; 4) 63,(5); 6) 55,(83).

761. Выполните действия:

1) $12,3 + 5,26$; 5) $0,48 + 0,057$; 9) $0,013 : 0,1$;
2) $5 - 1,75$; 6) $4,04 \cdot 0,1$; 10) $53,3 : 26$;
3) $127,703 \cdot 10$; 7) $4,35 \cdot 18$; 11) $0,834 \cdot 1,2$;
4) $79,1 - 6,08$; 8) $6 : 24$; 12) $30,42 : 7,8$.

762. Найдите значение выражения:

1) $296{,}2 - 2{,}7 \cdot 6{,}6 + 6 : 0{,}15$;

2) $40 - 23{,}2 : 8 + 0{,}07$;

3) $42 : 0{,}35 - 3{,}24 : 5{,}4 - 7 : 56 + 2{,}8 : 0{,}56$;

4) $(5{,}136 - 1{,}128) : 0{,}48 - (4 \cdot 2{,}65 - 10{,}6) \cdot 2{,}72$.

763. Составьте выражение и дайте ответ.

1) За 3 ч автомобиль проехал 270 км. За первый час он преодолел 105 км, за второй — $\frac{5}{7}$ расстояния, пройденного за первый час. Какую часть пути он проехал за третий час?

2) Для двух котельных был сделан запас угля. Одной котельной этого угля хватит на 9 месяцев, а второй — на 15 месяцев. Какую часть угля израсходуют обе котельные за 5 месяцев?

3) За первую минуту спортсмен пробежал $\frac{2}{7}$, а за вторую минуту — $\frac{3}{14}$ дистанции. Какую часть дистанции спортсмену осталось пробежать?

4) В понедельник Саша прочитал $\frac{13}{28}$ книги, во вторник — $\frac{11}{18}$ оставшейся части, а в среду — последние 35 страниц. Сколько всего страниц в книге?

Об отрицательных числах

Как уже отмечалось, натуральные числа возникли для счёта предметов, дроби были нужны для решения различных задач, связанных с делением. Однако в практической деятельности людей долго не было потребности применения отрицательных чисел.

Отрицательные числа изобрели в Индии примерно в VII в. Отрицательные числа рассматривались как *долги*, а положительные — как *имущество*. Так, например, равенство $a + (-a) = 0$ объяснялось с помощью утверждения о том, что сумма имущества и равного ему долга равна нулю.

Из Индии отрицательные числа попали в арабские страны, а затем дошли и до Европы. Но только в XVII в. после работ Р. Декарта, который нашёл отрицательным числам место на координатных осях, эти числа стали широко использовать в вычислениях.

764. Укажите среди чисел

$0;\ 1;\ -1;\ \frac{6}{11};\ -1\frac{9}{17};\ 0{,}32;\ -56{,}903;\ 7{,}4(5);\ -2{,}(45)$:

1) натуральные числа;
2) целые числа;
3) рациональные числа;
4) целые неотрицательные числа;
5) рациональные неположительные числа.

765. Запишите в порядке возрастания числа:

$-16{,}3;\ -15{,}7;\ 16{,}3;\ -0{,}16;\ -106;\ 17;\ 0;\ |-16{,}8|$. 238, 240

766. Даны числа:

$\frac{1}{3};\ -5;\ 1;\ 19;\ 1\frac{2}{7};\ -3\frac{2}{5};\ -103;\ 1{,}7;\ 0{,}75$.

Запишите числа:

1) обратные данным; 2) противоположные данным.

767. Представьте в виде бесконечной периодической десятичной дроби число:

1) $\frac{14}{99}$;
2) $-301\frac{5}{9}$;
3) $-4\frac{2}{3}$;
4) $12\frac{23}{30}$;
5) $\frac{601}{495}$;
6) $\frac{13}{15}$.

768. Округлите числа до разряда:

1) единиц: $-0{,}8;\ 34{,}2;\ -7{,}(48)$;
2) десятков: $-199;\ -506{,}9;\ 15{,}15$;
3) сотых: $-6{,}061;\ 30{,}003;\ -6{,}(54)$;
4) тысяч: $4056;\ -150\,934;\ -7890$.

769. Упростите выражение:

1) $-4(3x - 2y) - 5(6x + 2y)$;

2) $-3(2 - 5b) - 2(3 - 4a) - 4(2a + 3b)$;

3) $0,5(-2a - 3b - 4) - 1,5(6a + 4b - 5)$;

4) $5(3 - 0,4y) - 0,6(5 + 0,2x) - 2,5(-6x - 3y)$.

770. Найдите значение выражения:

1) $\left(152\frac{3}{4} - 148\frac{3}{8}\right) \cdot 0,3 : 0,2$;

2) $\left(-\frac{2}{3}\right)^2 \cdot \left(\frac{3}{4}\right)^2 \cdot 1,5^3 \cdot \left(-1\frac{1}{3}\right)^3$;

3) $6,3 \cdot (2,5 \cdot 9 - 22,5)$;

4) $1,5 - \left(\frac{3}{4} - \frac{5}{6}\right) + \left(-2\frac{7}{12}\right)$.

771. Вычислите:

1) $\dfrac{0,375 \cdot 0,8 + \frac{1}{3} : \frac{5}{6}}{1,05 : \left(2\frac{1}{36} - 1\frac{5}{18}\right)} + \dfrac{1,2 \cdot 0,8 \cdot 7,6}{0,24 \cdot 1,9 \cdot 6,4}$;

2) $\dfrac{\left(7,083 - 6\frac{3}{4}\right) : (3,7 \cdot 0,3)}{\left(3,96 - 3\frac{3}{5}\right) : 120}$.

772. Отметьте на координатной прямой корни уравнения:

1) $|x| = 2$;

2) $|-x| = 3$;

3) $|x| = 0$;

4) $|x| : (-2) = -1$. 252

773. Отметьте на координатной прямой значения x, при которых верно неравенство:

1) $x < 5$;

2) $|x| < 5$;

3) $x > 0$;

4) $|x| > 0$;

5) $1 < x < 2$;

6) $1 < |x| < 2$. 253

774. При каких значениях x верно равенство:

1) $x = |x|$;

2) $-x = |-x|$;

3) $-x = |x|$;

4) $x + |x| = 0$?

775. Не вычисляя, сравните значения выражений:

1) $93 \cdot \frac{11}{12} \cdot \left(\frac{13}{17}\right)$ и $93 \cdot \frac{11}{12} \cdot \left(\frac{17}{13}\right)$;

2) $\frac{5}{7}\cdot\frac{9}{11}\cdot\frac{13}{15}$ и $\frac{5}{8}\cdot\frac{9}{12}\cdot\frac{13}{16}$;

3) $103\cdot787-103\cdot786$ и $687\cdot\frac{3}{19}-687\cdot\frac{2}{19}$;

4) $\frac{5}{6}\cdot\frac{6}{7}\cdot\frac{7}{8}\cdot\frac{8}{9}\cdot\frac{9}{10}$ и $\left(-\frac{5}{6}\right)\cdot\left(-\frac{6}{7}\right)\cdot\left(-\frac{7}{8}\right)\cdot\left(-\frac{8}{9}\right)\cdot\left(-\frac{9}{10}\right)$. 254

776. Найдите два числа:

1) сумма которых равна 70 и одно из них больше другого в 2,5 раза;

2) разность которых равна 12 и одно из них меньше другого в 1,5 раза;

3) сумма которых равна 60,2, а их разность 19,8;

4) сумма которых равна −24,6 и одно из них на 2,7 больше другого.

777. Найдите среднее арифметическое чисел:

1) 4123; 36 895;

2) 45,63; 63,8; 4,27;

3) $-1\frac{1}{3}$; $2\frac{5}{6}$; $3\frac{3}{4}$;

4) −60,07; −2,7; 47,82; 3,25;

5) 2,5; $3\frac{5}{6}$; −1,7;

6) $\frac{1}{7}$; $-\frac{3}{14}$; $\frac{5}{28}$; $-\frac{4}{21}$.

778°. 1) Туристы на автобусе проехали 28% всего пути, на поезде — $\frac{19}{27}$ оставшейся части маршрута, а завершали поездку на теплоходе. Сколько километров туристы проплыли на теплоходе, если на автобусе они проехали 126 км?

2) Геологи на поезде проехали 36% всего пути, автобусом — $\frac{9}{26}$ оставшегося пути, а затем летели на вертолёте. Сколько километров геологи пролетели на вертолёте, если на поезде они проехали 234 км?

3) В классе 36 учеников. Сколько мальчиков и сколько девочек в классе, если $\frac{5}{8}$ числа мальчиков равны 50% числа девочек?

Об уравнениях

Решать некоторые виды уравнений умели уже в Древнем Египте. Египтяне даже использовали специальный иероглиф для обозначения неизвестного. В первой половине IX в. Мухаммед ибн Муса ал-Хорезми написал «Книгу об исчислении ал-джабра и ва-ал-мукабалы». Слово *ал-джабр* в названии этой книги переводится с арабского языка как «восстановление». Так Мухаммед ал-Хорезми назвал знакомый вам приём переноса членов из одной части уравнения в другую с переменой знака: при переносе отрицательного слагаемого из одной части уравнения в другую оно там становилось положительным — *восстанавливалось*. Слово *ал-джабр* позже трансформировалось в слово *алгебра*, которым стали называть науку о решении различных уравнений. К изучению основ этой науки вы приступите в следующем учебном году.

779. 1) Расположите корни уравнений в порядке возрастания:

$$x + 2\frac{1}{3} = 7;\ \frac{1}{6}x + \frac{1}{3}x = 2{,}35;\ 5\frac{3}{5} : x = 2;\ 2x - \frac{1}{2}x + 5 = 8.$$

2) Расположите корни уравнений в порядке убывания:

$$6 - 2x = 2\frac{3}{4};\ \frac{1}{4}x - \frac{2}{3} = 1;\ 2\frac{3}{4} + 0{,}5x = 6\frac{1}{8};\ 5\frac{1}{3} - 0{,}5x = 2\frac{5}{6}.$$

780. Составьте уравнение и найдите его корень:

1) $3x$ больше $0{,}5x + 2$ в 12 раз;

2) $0{,}5y + 0{,}75$ на $\frac{1}{3}$ меньше, чем $\frac{5}{6} - \frac{1}{6}y$;

3) $1{,}6x + 3$ больше $2x - 1$ в 5 раз;

4) $\frac{5}{6}y - 2$ в 1,5 раза больше, чем $0{,}5y - 1$.

781. Даны уравнения:

1) $x^2 = 0{,}04$;	4) $\lvert x\rvert + 3 = 0$;	7) $5x + 1 = 5x$;
2) $x^2 = 0$;	5) $\lvert x\rvert = \frac{3}{7}$;	8) $3 = 13x$;
3) $x^2 = -1$;	6) $2x = 2\lvert x\rvert$;	9) $7x = -7$.

Назовите уравнения, которые:
а) имеют по одному корню;
б) имеют по два корня;
в) имеют бесконечное множество корней;
г) не имеют корней.

782. Решите уравнение:

1) $-7 - 5z = 4 - 3z$;

2) $-\frac{2}{3}x + 1\frac{1}{6} = 1{,}5x + 1$;

3) $\frac{1}{2}y - \frac{1}{3} = \frac{5}{18} - \frac{8}{9}y$;

4) $1\frac{2}{3} : 5 = 4\frac{1}{6} : y$;

5) $\frac{x}{1{,}6} = \frac{1{,}35}{0{,}36}$;

6) $\frac{5}{x+4} = \frac{8}{2x-1}$.

783. Решите уравнение:

1) $\frac{1}{3}(2x + 3) - \frac{3}{4}(4x - 1) = 2$;

2) $0{,}3x - 0{,}2 = 0{,}6x + 0{,}3$;

3) $5\frac{3}{8} : 0{,}5z = 0{,}75 : 2$;

4) $2{,}5y - 0{,}4(2y + 3) = 3 - 1{,}5\left(\frac{2}{3}y - 1\right)$.

784. Решите задачи с помощью уравнений.

1) За неделю переводчик перевёл в 3 раза меньше страниц романа, чем ему осталось перевести. После того как он перевёл ещё 60 страниц, количество переведённых страниц стало равным количеству оставшихся страниц. Сколько всего страниц в романе?

2) В двух мешках 140 кг муки. После того как $\frac{1}{8}$ часть муки из первого мешка переложили во второй, муки в мешках стало поровну. Сколько килограммов муки было в каждом мешке первоначально?

3) В саду было в 3 раза больше яблонь, чем груш. После того как 14 засохших яблонь вырубили и посадили 10 груш, деревьев обоих видов в саду стало поровну. Сколько яблонь и сколько груш было в саду первоначально?

О возникновении геометрии

Расстояния, углы, площади и объёмы люди научились находить уже в глубокой древности. Геометрические знания позволяли возводить величественные сооружения, некоторые из которых сохранились до наших дней.

В Древнем Египте самые плодородные земли располагались по берегам реки Нил. Разливы Нила смывали границы земельных участков, и каждый раз их приходилось размечать заново. Для этого нужно было проводить измерения. Так, по мнению древнегреческого историка Геродота, жившего в IV в. до н. э., возникла *геометрия*.

Египтяне могли находить площади и объёмы фигур. Например, чтобы получить площадь четырёхугольника, они перемножали длины отрезков, соединяющих середины его противоположных сторон. Площадь прямоугольника таким способом находится точно, а площадь параллелограмма — приближённо. Поэтому египтяне старались размечать прямоугольные участки.

Прямые углы они строили с помощью верёвки с узелками, растягивая её в *египетский треугольник* — прямоугольный треугольник со сторонами, относящимися как $3 : 4 : 5$.

785. 1) Найдите площадь параллелограмма, равную произведению основания на высоту (рис. 159).

2) Найдите произведение длин отрезков, соединяющих середины противоположных сторон параллелограмма.

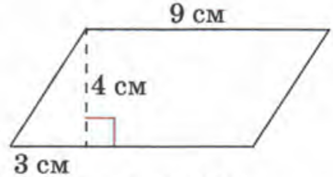


Рис. 159

3) На сколько процентов произведение, найденное в 2), отличается от площади параллелограмма?

786. Найдите площади фигур, изображённых на рисунке 160.

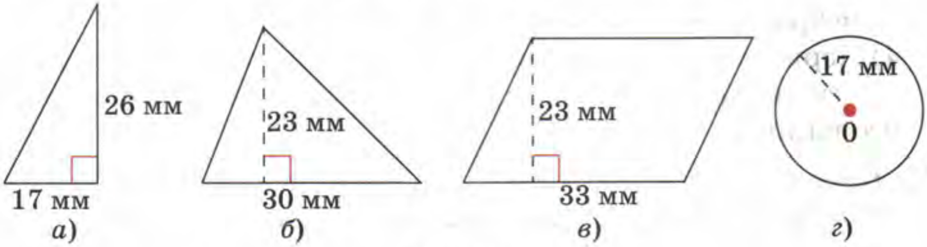


Рис. 160

787. Найдите:

1) периметр параллелограмма, если одна его сторона равна 3,7 см, а вторая — на 1,4 см больше;

2) сторону квадрата, периметр которого равен $35\frac{1}{5}$ дм;

3) сторону квадрата, площадь которого равна $\frac{25}{49}$ м^2;

4) ребро куба, объём которого равен 0,125 м^3;

5) площадь прямоугольного треугольника с катетами 3,7 см и $2\frac{4}{5}$ см;

6) длину прямоугольника, если известны его площадь $2\frac{1}{12}$ дм^2 и ширина 1,25 дм.

788. Существует ли треугольник со сторонами:

1) 23 см, 35 см, 56 см;

2) 4,5 м, 7,3 м, 5,8 м;

3) $\frac{1}{3}$ м, $\frac{1}{2}$ м, $\frac{5}{6}$ м;

4) 1,5 дм, $1\frac{1}{4}$ дм, $2\frac{1}{2}$ м?

789. 1) Площадь прямоугольника равна $1\frac{1}{6}$ м^2. Найдите периметр этого прямоугольника, если его длина 2,5 м.

2) Длина прямоугольника в 3,4 раза больше ширины. Найдите стороны прямоугольника, если его периметр равен 6,6 дм.

3) Ширина прямоугольника 48 см, что составляет $\frac{3}{16}$ его периметра. Найдите длину этого прямоугольника.

4) Периметр прямоугольника равен 21,6 м, причём одна из его сторон на 3 м больше другой. Найдите стороны прямоугольника.

790. Начертите:

1) смежные углы, если один из углов равен $110°$;

2) треугольник MKL, в котором угол K равен $59°$;

3) четырёхугольник, у которого один угол прямой, другой равен $137°$, а одна из сторон имеет длину 4,5 см.

791. 1) Найдите длину окружности, если её диаметр равен 3,4 см. Число π округлите до десятых.

2) Найдите площадь круга, радиус которого равен 6 см. Число π округлите до десятых.

792. 1) Начертите:

а) квадрат со стороной 3,5 см;

б) окружность с диаметром 3 см;

в) прямоугольный равнобедренный треугольник с катетами, равными 4,2 см;

г) угол, равный $130°$.

2) Проведите ось симметрии каждой фигуры.

Об измерении углов

Градусная мера угла, которой пользуются, например, при измерении углов транспортиром, была изобретена в Вавилоне. А о том, что углы треугольника в сумме образуют развёрнутый угол, знали уже в Древнем Египте.

793. Острые углы одного чертёжного угольника $60°$ и $30°$, а другого — $45°$ и $45°$. Какие углы можно построить без транспортира, используя эти угольники?

794. 1) Постройте угол AOB, равный $70°$. Отметьте на стороне OB точку M и проведите через неё прямые, перпендикулярные сторонам угла OAB.

2) Постройте угол COB, равный $120°$. Отметьте внутри угла точку K и проведите через неё прямые, параллельные сторонам угла.

795. Постройте угол, равный $120°$, и проведите биссектрису этого угла.

796. Найдите смежные углы, если один из них:

1) в 3 раза больше второго;
2) на $72°$ больше второго;
3) составляет $\frac{2}{3}$ второго;
4) составляет 20% второго.

797. Найдите величины смежных углов, которые относятся:

1) как $7 : 3$;
2) как $4 : 5$;
3) как $2 : 3$;
4) как $7 : 11$.

798. Найдите сумму величин углов правильного семиугольника.

799. Найдите сумму углов *1*, *2* и *3* на рисунке 161.

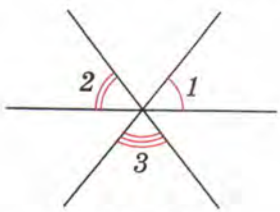


Рис. 161

800. Найдите величину угла ACB на рисунке 162.

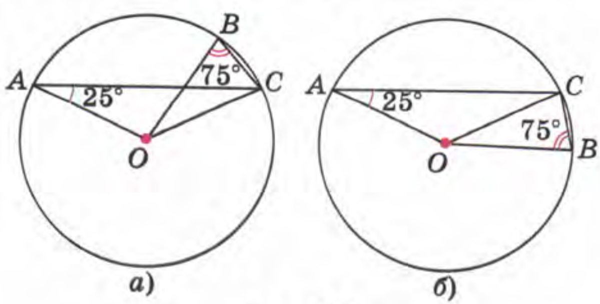


Рис. 162

О равенстве фигур

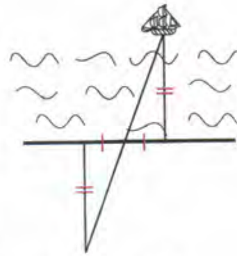


Рис. 163

Своего расцвета геометрия достигла в Древней Греции, где она из набора разрозненных правил превратилась в науку. До сих пор названия многих теорем геометрии носят имена их древнегреческих авторов. С одной из них вы уже знакомы — это теорема Пифагора, в которой утверждается, что сумма квадратов катетов прямоугольного треугольника равна квадрату гипотенузы. С некоторыми другими теоремами вы будете знакомиться начиная со следующего учебного года в курсе геометрии. Древние греки знали о параллельности и перпендикулярности прямых, использовали понятие равенства фигур.

Так в VI в. до н. э. греческий купец Фалес из Милета, который считается отцом греческой науки, с помощью равенства треугольников находил расстояние от берега до корабля в море (рис. 163).

801. Найдите гипотенузу прямоугольного треугольника, если его катеты равны:

1) 12 см, 5 см;
2) 3,6 см, 2,7 см;
3) $\frac{2}{3}$ м, $\frac{1}{2}$ м;
4) $1\frac{1}{2}$ м, 3,6 м.

802. Равны ли:

1) отрезки, если равны их длины;
2) прямоугольники, если равны их периметры;
3) окружности, если равны их длины;
4) круги, если равны их площади;
5) прямоугольники, если равны их площади?

803. Постройте две равные окружности, у которых:

1) нет точек пересечения;
2) одна точка пересечения;
3) две точки пересечения.

804●. Докажите, что из точки, не лежащей на прямой, нельзя провести к этой прямой двух разных перпендикуляров, т. е. что ситуация, изображённая на рисунке 164, невозможна.

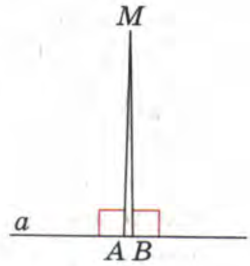


Рис. 164

О подобии фигур

В Древней Греции уже широко применяли подобие фигур и решали пропорции, к которым приводит, например, рассмотрение подобных треугольников. Знали греки и *основное свойство* пропорций.

805. Найдите пары подобных треугольников на рисунке 165.

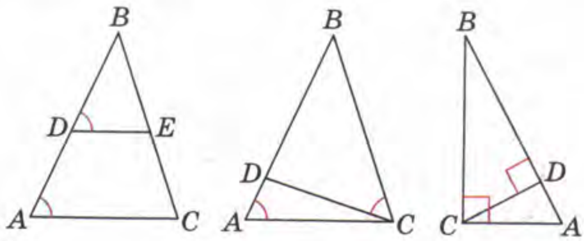


Рис. 165

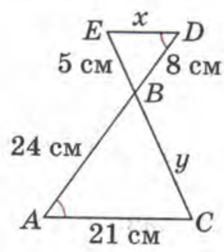


Рис. 166

806. Является ли пропорцией равенство:

1) $3{,}75 : 10{,}4 = 3\frac{11}{13} : 10\frac{2}{3}$; 2) $13\frac{1}{3} : 3\frac{1}{3} = 6 : 1{,}5$?

807. Найдите длины отрезков, обозначенных буквами x и y на рисунке 166.

808●. Докажите, что длины сторон треугольника обратно пропорциональны длинам высот, проведённых к ним.

809. Разделите число 196 на части в отношении:

1) $3 : 7 : 11$;
2)● $\frac{1}{3} : \frac{4}{3} : 3$;
3) $1 : 2 : 4$;
4) $5 : 7{,}5 : 15{,}5$.

810. Стороны треугольника относятся как $2 : 3 : 4$, а его периметр равен 22,5 см. Найдите длину наименьшей из сторон этого треугольника.

811°. Существует ли треугольник, стороны которого относятся как:

1) $7 : 3 : 4$;
2) $11 : 3 : 7$;
3) $7 : 5 : 11$;
4) $3 : 5 : 9$;
5) $5 : 10 : 5$;
6) $1 : 2 : 3$?

812●. Длина наименьшей стороны треугольника равна 1 см, а высоты этого треугольника относятся как $1 : 1 : 2$. Найдите периметр этого треугольника.

813●. Существует ли треугольник, высоты которого относятся как $3 : 3 : 1$?

Об объёмах

Объёмы призмы, цилиндра, пирамиды и конуса умели находить уже в Древнем Египте. Однако формулы эти были получены опытным путём. Общий метод вычисления объёмов тел первым разработал Архимед, опередив своё время на полторы тысячи лет. Только в XVIII в. великие учёные Ньютон и Лейбниц разработали теорию, позволяющую, в частности, вычислять объёмы. С элементами этой теории вы познакомитесь в старших классах при изучении «Начал математического анализа».

▼ Рассмотрим, как рассуждения, похожие на рассуждения Архимеда, позволяют получить формулу объёма призмы. Пусть у нас есть сосуд, имеющий форму прямой призмы площадью основания S см^2 и высотой h см. Будем насыпать в него мелкие одинаковые песчинки кубической формы с ребром a см. Первый слой песчинок закроет дно — основание призмы.

Площадь основания призмы при этом будет практически равна сумме площадей оснований песчинок, а объём этого слоя будет равен произведению площади основания призмы на высоту слоя $S \cdot a$ см^3.

Заполним теперь песчинками весь сосуд. При этом в нём окажется много слоёв, каждый из которых состоит из такого же числа песчинок, что и первый их слой (рис. 167). Объём каждого слоя песчинок, как и первого их слоя, равен произведению площади основания на высоту песчинки. Объём призмы будет равен сумме объёмов всех заполняющих её слоёв:

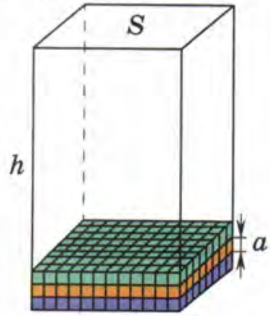


Рис. 167

$$V = S \cdot a + S \cdot a + \ldots + S \cdot a = S(a + a + \ldots + a).$$

Высоты слоёв в сумме дадут высоту призмы, и мы получим ***формулу объёма призмы***:

$$\boldsymbol{V_{\text{призмы}} = S_{\text{осн}} \cdot h.}$$

Аналогично выводится и ***формула объёма прямого кругового цилиндра*** с высотой h и с радиусом основания r:

$$\boldsymbol{V_{\text{цилиндра}} = \pi r^2 h.} \qquad \triangle$$

814. Найдите объём цилиндра:

1) $r = 0{,}5$ м, $h = 2$ м;
2) $r = \frac{2}{3}$ дм, $h = 6$ дм;
3) $r = 1\frac{1}{2}$ дм, $h = 8{,}4$ дм;
4) $r = 1\frac{1}{4}$ дм, $h = 0{,}8$ дм.

815. В цилиндр вписан шар радиуса 5 см, который имеет с боковой поверхностью общую окружность и касается обоих оснований цилиндра (рис. 168).
1) Найдите объёмы цилиндра и шара.
2) Какой процент объёма цилиндра составляет объём этого шара?


Рис. 168

816. Высота треугольной призмы равна 3,7 дм. В основании призмы лежит равнобедренный прямоугольный треугольник с катетами, равными 2,3 дм. Найдите объём этой призмы.

817. 1) Ширина прямоугольного параллелепипеда в 1,4 раза меньше его длины, а его высота равна 5 дм. Найдите объём этого прямоугольного параллелепипеда, если его ширина равна 4,7 дм.

2) Найдите высоту прямоугольного параллелепипеда, объём которого равен 25,2 дм^3, длина $3\frac{1}{2}$ дм, а ширина 8 см.

818. 1) Ширина прямоугольного параллелепипеда, равная $1\frac{1}{5}$ м, составляет $\frac{2}{3}$ его длины, а высота в 1,5 раза меньше ширины. Что меньше и на сколько: объём данного параллелепипеда или объём куба с ребром 1,2 м?

2) Объём прямоугольного параллелепипеда в 3 раза больше объёма куба с ребром $1\frac{1}{3}$ дм. Высота параллелепипеда, равная $2\frac{1}{3}$ дм, составляет $\frac{5}{6}$ его длины. Найдите ширину параллелепипеда.

О системе координат

Многие математические расчёты в Древней Греции выполняли с помощью геометрических чертежей. Затем на первый план надолго вышли действия с числами. А в XVI в. знаменитый французский математик Рене Декарт изобрёл систему координат, состоящую из двух взаимно перпендикулярных осей с общим началом. Декартова система координат дала возможность объединить числовую и геометрическую линии математики.

819. Отметьте на координатной прямой точки $C(-4{,}5)$, $K(3{,}7)$, $M\left(-1\frac{3}{4}\right)$. Постройте точки, им симметричные относительно начала координат. 255

820. Отметьте на координатной прямой точки $H(-2{,}4)$, $P(4{,}2)$. В какую точку перейдут данные точки при перемещении по координатной прямой: 256

1) на -5 единиц;

2) на $+3$ единицы?

821. Отметьте на координатной плоскости точки $B(-2;\ 3)$, $D(4;\ -3)$, $L(-1;\ -3)$.

1) Постройте точки, симметричные данным относительно оси абсцисс.

2) Постройте точки, симметричные данным относительно оси ординат. 257

822. 1) Постройте отрезок KM, где $K(1;\ 4)$, $M(-4;\ -1)$, и запишите координаты точек пересечения этого отрезка с осями координат.

2) На координатной плоскости постройте отрезок AB и прямую KL, если

$$A(-4;\ 6),\ B(-1;\ 0),\ K(-8;\ -1),\ L(6;\ 6).$$

Запишите координаты точек пересечения прямой KL с отрезком AB. 258

823. Постройте четырёхугольник $ABCD$ по координатам его вершин $A(6;\ 2)$, $B(6;\ 6)$, $C(9;\ 6)$, $D(12;\ 2)$.

1) Измерьте углы четырёхугольника $ABCD$.

2) Найдите периметр четырёхугольника $ABCD$. 259

824●. Отметьте на координатной плоскости множество точек $M(x;\ y)$, абсцисса x которых не меньше чем -1 и не больше чем 3, а ордината y которых имеет модуль, больший 2. 260

Вычислительный практикум

Натуральные числа

825. Поднимаясь по лесенке (рис. 169), выполните указанные арифметические действия.

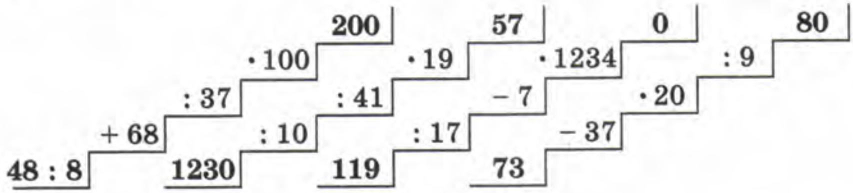


Рис. 169

826. Сравните устно значения выражений:

1) $45 - 18$ и $19 + 9$;
2) $72 : 4$ и $73 - 45$;
3) $23 \cdot 5$ и $58 + 57$;
4) $96 : 3$ и $3 \cdot 11$;
5) $79 : 79$ и $56 \cdot 0$;
6) $39 \cdot 30$ и $38 \cdot 40$. 261

827. Найдите устно значение выражения:

1) $56 - 28 + 15 - 34$;
2) $56 : 2 : 14 \cdot 35$;
3) $58 + 16 \cdot 4 : 2 - 17$;
4) $39 + (58 + 6) : 8$;
5) $(63 - 19) : (28 : 7)$;
6) $(15 + 39) : 7 \cdot 4$. 262

828. Вычислите устно: 263

1) $400 - 237$;
2) $457 - 137$;
3) $738 + 262$;
4) $450 + 90$;
5) $307 - 28$;
6) $561 + 337$;
7) $123 \cdot 3$;
8) $248 : 2$;
9) $500 : 25$;
10) $570 : 10$;
11) $79 \cdot 10$;
12) $305 : 5$;
13) $461 \cdot 5$;
14) $540 : 90$;
15) $1000 : 100$.

829. Вычислите устно рациональным способом:

1) $73 \cdot 58 + 58 \cdot 27$;
2) $83 \cdot 69 - 69 \cdot 73$;
3) $561 + 679 - 261$;
4) $783 - 106 - 383$;
5) $(620 - 270) : 10$;
6) $25 \cdot 73 \cdot 4 \cdot 3$. 264

830. Найдите устно значение выражения:

1) $(1100 - 20 \cdot 22 : 10 + 35) : 11$;
2) $(22 \cdot 40 - 11 \cdot 20 - 10 \cdot 10) : 8$;
3) $450 - 30 \cdot 4 + 70 : 10$;
4) $820 + (1420 - 1400) \cdot 8$;
5) $12 \cdot 171 + 29 \cdot 9 + 171 \cdot 13 + 29 \cdot 16$;
6) $961 - (59 + 64) \cdot 7 - 160 : 2 + 43 \cdot 20$;
7) $(27 + 3) \cdot 30 - (768 - 397 + 92 \cdot 30) \cdot 0$;
8) $650 + 350 - 80 : 2 \cdot 5$;
9) $510 \cdot 6 - (780 - 20) + (230 + 470)$. 265

831. Вычислите:

1) $589 + 377$;
2) $782 - 399$;
3) $25\,741 + 832$;
4) $7853 - 265$;
5) $137 \cdot 7$;
6) $22 \cdot 45$;
7) $3291 \cdot 27$;
8) $20\,386 \cdot 37$;
9) $3756 : 4$;
10) $768 : 64$;
11) $528 : 132$;
12) $578\,757 : 309$.

832. Найдите значение выражения:

1) $421 - (572 + 139) : 79$;
2) $58 \cdot 17 - 666 : 37$;
3) $342 : (326 - 269) \cdot 187$;
4) $(297 : 99 + 520 : 65) \cdot 67$;
5) $8014 - 132 \cdot 54 + 44\,892 : 36$;
6) $1285 - 282 \cdot 75 : 47 + 14\,472 : 18$;
7) $(199\,430 - 119 \cdot 805) : (148 + 8536 : 88)$;
8) $(770 + 126\,828 : 542) : (406 \cdot 117 - 47\,000)$.

833. Проверьте устно, верно ли выполнено деление с остатком:

1) $72 : 5 = 14$ (ост. 2);
2) $88 : 13 = 5$ (ост. 10);
3) $750 : 213 = 3$ (ост. 111);
4) $1121 : 506 = 2$ (ост. 209).

834•. Найдите ошибку в выполнении деления 700 на 300 с остатком $700 : 300 = 7 : 3 = 2$ (ост. 1).

835. Выполните деление с остатком:

1) $8960 : 29$;
2) $70\,537 : 54$;
3) $18\,786 : 37$;
4) $33\,367 : 164$;
5) $155\,264 : 604$;
6) $369\,628 : 123$.

836. Решите устно уравнение:

1) $290 + a = 510$;
2) $800 - b = 527$;
3) $24 \cdot c = 480$;
4) $d : 16 = 80$;
5) $910 : x = 13$;
6) $y - 370 = 420$.

837. Решите уравнение и сделайте проверку:

1) $(x + 853) : 5 + 936 = 1133$;
2) $(6003 - 2472 : y) \cdot 7 = 41\,300$;
3) $(592 + 181 \cdot z) : 32 + 2051 = 2160$;
4) $x : 27 \cdot 287 - 112 \cdot 5 = 7910 : 565$.

838. 1) Найдите наибольшее из натуральных значений x, при которых верно неравенство

$x \leqslant 104 \cdot 205 - 174 \cdot 105 : 90$.

2) Найдите все натуральные значения x, при которых верно двойное неравенство

$4\,119\,321 : 37 - (19\,385 + 2774) \cdot 5 < x \leqslant 32 \cdot 12 + 79 \cdot 2$.

Обыкновенные дроби

839. Вычислите устно:

1) $\frac{7}{23} + \frac{16}{23}$;
2) $\frac{5}{13} + \frac{15}{26}$;
3) $\frac{3}{10} + \frac{49}{100}$;
4) $1 - \frac{9}{17}$;
5) $20 - 15\frac{18}{21}$;
6) $\frac{31}{35} - \frac{3}{7}$;
7) $\frac{2}{7} \cdot \frac{3}{5}$;
8) $\frac{4}{9} \cdot \frac{15}{24}$;
9) $\frac{15}{17} \cdot \frac{34}{90}$;
10) $\frac{8}{15} : \frac{16}{45}$;
11) $\frac{11}{36} : \frac{33}{72}$;
12) $\frac{19}{81} : \frac{38}{90}$.

266

840. Сократите дроби:

1) $\frac{5}{45}$; $\frac{4}{32}$; $\frac{9}{81}$; $\frac{8}{56}$; $\frac{7}{63}$; $\frac{6}{54}$;
2) $\frac{12}{54}$; $\frac{25}{40}$; $\frac{36}{60}$; $\frac{14}{42}$; $\frac{13}{52}$; $\frac{17}{85}$;
3) $\frac{76}{114}$; $\frac{112}{126}$; $\frac{75}{105}$; $\frac{37}{222}$; $\frac{98}{168}$;
4) $\frac{515}{927}$; $\frac{345}{483}$; $\frac{246}{1476}$; $\frac{1110}{1332}$; $\frac{1425}{2736}$.

841. Верно ли равенство:

1) $\frac{118}{7} = 16\frac{6}{7}$; 3) $\frac{145}{17} = 8\frac{9}{17}$;

2) $17\frac{8}{10} = \frac{178}{10}$; 4) $15\frac{4}{9} = \frac{138}{9}$?

842. Сравните устно значения выражений:

1) $3\frac{3}{4} : 3$ и $1 : \frac{3}{11}$;

2) $0 : 7\frac{2}{3}$ и $5\frac{3}{7} : \frac{38}{7}$;

3) $6\frac{2}{5} : 1$ и $37 : 6$;

4) $8 : \frac{4}{5}$ и $310 : 31$. 267

843. Найдите значение выражения:

1) $\left(3\frac{1}{6} - 2\frac{7}{16}\right) : 1\frac{2}{5}$;

2) $\left(\left(1\frac{1}{2}\right)^2 - \frac{3}{4}\right) : \frac{7}{8}$;

3) $\left(1\frac{2}{3} + 2\frac{4}{9}\right) : \left(4\frac{26}{27} - 2\frac{2}{9}\right)$;

4) $\left(3\frac{1}{2} : 4\frac{2}{3} + 4\frac{2}{3} : 3\frac{1}{2}\right) \cdot 4\frac{4}{5}$;

5) $\left(1\frac{4}{9} + 2\frac{5}{6} - 2\frac{3}{4}\right) \cdot \left(\frac{5}{11} + \frac{10}{20}\right)$;

6) $2\frac{3}{4} : \left(1\frac{1}{2} - \frac{2}{5}\right) + \left(\frac{3}{4} + \frac{5}{6}\right) : 3\frac{1}{6}$.

844. Решите устно уравнение:

1) $\frac{x}{9} + \frac{4}{9} = 1$; 5)○ $\left(x - 6\frac{5}{12}\right) : \frac{5}{8} = 4$;

2) $\frac{9}{17} - \frac{x}{17} = 1$; 6)○ $\left(x + \frac{3}{8}\right) \cdot \frac{12}{19} = \frac{1}{2}$;

3) $x + \frac{6}{13} = 1$; 7)○ $x : \frac{9}{32} \cdot \frac{15}{16} + \frac{1}{2} = 1$;

4) $1 - x = \frac{26}{31}$; 8)● $\frac{3}{2} \cdot \left(\frac{5}{3} - x\right) \cdot 13 = 0$. 268

845. Решите уравнение:

1) $15\frac{4}{7} - 4\frac{3}{8}\cdot\left(1\frac{3}{7} - x\right) = 13\frac{4}{7}$;

2) $\frac{21}{25}\cdot\frac{5}{7} - \frac{3}{16}x = \frac{11}{20}$;

3) $\left(x - 1\frac{1}{3}\right) : 1\frac{5}{12} = \frac{4}{51}$;

4) $\left(4x + 3\frac{5}{8}\right)\cdot\frac{4}{9} = 2\frac{1}{2}$.

846. Докажите, что корень уравнения:

1) $15\frac{3}{8} : \left(2\frac{3}{4}x + 5\frac{5}{6}\right) - 1\frac{1}{2} = \frac{3}{4}$ равен $\frac{4}{11}$;

2) $3\frac{1}{3} - \left(4\frac{1}{5}x + x\right) : 5\frac{4}{7} = \frac{8}{15}$ равен 3.

Десятичные дроби

847. Спускаясь по лесенке (рис. 170), выполните указанные арифметические действия.

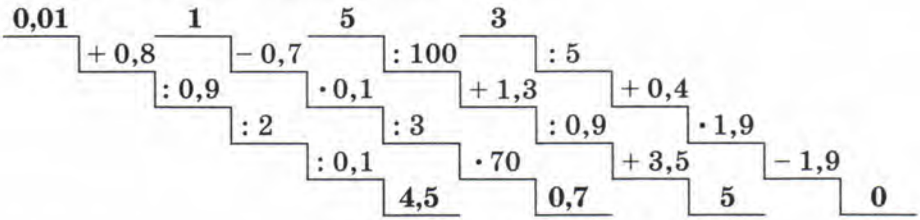


Рис. 170

848. Вычислите устно:

1) $2{,}7 + 9{,}3$;
2) $4{,}5 + 4{,}05$;
3) $0{,}91 + 0{,}19$;
4) $6{,}7 + 0{,}23$;
5) $1 - 0{,}58$;
6) $5 - 3{,}27$;
7) $11{,}7 - 4{,}09$;
8) $23{,}7 - 18{,}23$;
9) $3{,}04\cdot 10$;
10) $6{,}2\cdot 3$;
11) $0{,}7\cdot 0{,}9$;
12) $4{,}6\cdot 5$;
13) $4{,}5 : 0{,}9$;
14) $0{,}93 : 10$;
15) $0{,}35 : 7$. 269

849. Найдите значение выражения:

1) $(0{,}293 + 0{,}877)\cdot(5{,}38 - 2{,}58) - 52{,}48 : (8{,}5 + 7{,}9)$;

2) $38{,}5\cdot 9{,}04 - (9{,}86 + 303{,}64) : (7{,}35 - 6{,}4)$.

850. Верно ли, что если:

1) $a = (18 - 16{,}9)\cdot 3{,}3 + 3 : 7{,}5$, то $4 < a < 5$;

2) $c = 6{,}75 : 27\cdot 3{,}8 - 0{,}8$, то $0 < c < 1$?

851. Вычислите рационально:

1) $4 \cdot 3{,}18 \cdot 2{,}5$;
2) $0{,}5 \cdot 0{,}4 \cdot 0{,}25$;
3) $30{,}5 \cdot 20{,}3 - 30{,}5 \cdot 0{,}3$;
4)● $2{,}4 \cdot 4{,}8 + 0{,}26 \cdot 48$;
5)● $4{,}9 \cdot 6{,}8 + 5{,}1 \cdot 6{,}8 + 4{,}9 \cdot 1{,}2 + 5{,}1 \cdot 1{,}2$;
6)● $7{,}7 \cdot 9{,}9 + 2{,}3 \cdot 9{,}9 - 7{,}7 \cdot 0{,}29 - 2{,}3 \cdot 0{,}29$.

852. Решите устно уравнение:

1) $(14{,}7 - x) \cdot 2 = 24$;
2) $152 : (y + 36) = 0{,}1$;
3) $(3x + 0{,}8) \cdot 7 = 9{,}8$;
4) $2x : 10 = 0{,}42$;
5) $y : 2 - 3{,}8 = 1{,}8$;
6) $x : 0{,}5 + 3{,}5 = 7{,}5$. 270

853. Решите уравнение:

1) $(x + 12{,}4) : 8{,}3 = 12{,}4$;
2) $(x - 23{,}74) - 2 = 1737$;
3) $3{,}5x + 2{,}8x + 3{,}7x = 26{,}5$;
4) $20{,}402 : (x - 2{,}96) = 5{,}05$.

854. Выясните, какие выражения равны нулю, а какие — не имеют смысла:

1) $((4{,}4 : 2 - 1{,}8) \cdot 0{,}75 - 0{,}3) : (5{,}7 \cdot 10)$;
2) $(3{,}75 : 0{,}5 + 4{,}5) : (2{,}4 : 0{,}6 - 4)$;
3) $(3{,}1 : 2 + 5{,}3) \cdot (8{,}5 : 5 \cdot 0{,}2 - 0{,}34)$;
4) $(14{,}4 : 3{,}6 + 15{,}9) : (6{,}7 \cdot 3 - 20{,}1)$.

Целые числа

855. Поднимаясь по лесенке (рис. 171), выполните указанные арифметические действия.

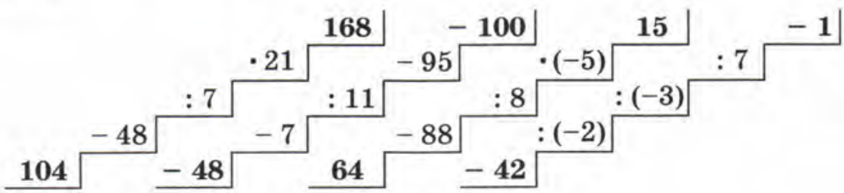


Рис. 171

856. Вычислите устно: 271

1) $-17 + 9$;
2) $-23 - 67$;
3) $-105 + 78$;
4) $-47 + 83$;
5) $-34 \cdot 4$;
6) $-51 \cdot (-100)$;
7) $17 \cdot (-4)$;
8) $-12 \cdot (-7)$;
9) $-59 : (-10)$;
10) $67 : (-2)$;
11) $-45 : 15$;
12) $-618 : (-103)$.

857. Сравните значения выражений:

1) $23 - 31$ и $31 - 23$;
2) $56 \cdot (-30)$ и $(-29) \cdot (-30)$;
3) $-45 : 10$ и $45 : (-0{,}1)$;
4) $-6{,}3 : (-0{,}2)$ и $63 : 2$;
5) $9{,}7 \cdot (-2)$ и $9{,}7 : 2$;
6) $-12 : 2{,}4$ и $1{,}2 : (-0{,}24)$. 272

858. Найдите значение выражения:

1) $(-2)^3 \cdot (-15) + 13 \cdot (-7) - 784 : 7$;
2) $(-16 + 23) \cdot 123 : (-91 + 88) - 313$;
3) $(42 - 3^2 - 51) : (-6) - 38 + 178 : (-2)$;
4) $((-13)^3 + 17 \cdot (-12) - 1118) : (-17)$;
5) $6082 - (706 \cdot (-350) + 47\,000) : (-300)$;
6) $207 \cdot (-32) : 72 - (21\,140 : (-7) + 43 \cdot (-70)) : 5$.

859●. Какие числа должны стоять в пустых клетках цепочки вычислений: 273

1) $\boxed{} \xrightarrow{:(-3)} \boxed{} \xrightarrow{-\,150} \boxed{} \xrightarrow{\cdot(-5)} \boxed{} \xrightarrow{:(-250)} 6$;

2) $-2400 \xrightarrow{:\,\boxed{}} -30 \xrightarrow{+\,\boxed{}} -180 \xrightarrow{\cdot\,\boxed{}} 900 \xrightarrow{-\,\boxed{}} 0$?

860. Решите уравнение:

1) $4x - 39 = 5x + 87 + 2x$;
2) $-15y - 109 = 269 + 27y$;
3) $18z + 38 = 30z - 58$;
4) $-27x + 600 = 29x + 152$;
5) $-3(5y - 7) = 6(2y + 34) + 60$;
6) $45 - 5(12z + 3) = 186 + 3(3z - 6)$.

Рациональные числа

861. Вычислите устно:

1) $-0{,}28 - 4{,}72$;
2) $-4{,}7 + 5$;
3) $-59 + 73$;
4) $5 : \left(-\frac{1}{10}\right)$;
5) $-\frac{4}{9} \cdot \left(-\frac{3}{8}\right)$;
6) $23 : (-10)$;
7) $-0{,}8 : (-0{,}1)$;
8) $-5{,}23 \cdot 0{,}1$;
9) $0{,}049 \cdot (-10)$;
10) $-3 - \frac{5}{7}$;
11) $1 - \frac{16}{15}$;
12) $1 - 2{,}36$. 274

862. Верно ли, что если a — значение выражения:

1) $\frac{8}{45} \cdot (-1{,}25) - \left(-\frac{11}{75}\right) \cdot \left(-2\frac{8}{11}\right)$, то $-1 < a < 0$;
2) $\frac{42}{45} : \left(\frac{2}{3} + \frac{8}{15}\right) - 1 : (3 - 1{,}2)$, то $0{,}2 < a < 1$;
3) $-1{,}456 : \frac{7}{25} + \frac{5}{16} : (-0{,}125) - 4\frac{1}{2} \cdot 0{,}8$, то $-12 < a < -11$?

863°. Вычислите:

1) $\dfrac{1\frac{2}{9} \cdot 3\frac{4}{7} \cdot 4\frac{1}{2}}{5\frac{1}{2} \cdot 6\frac{3}{7} \cdot 2\frac{7}{9}} \cdot \dfrac{12{,}1 \cdot \frac{2}{11} + 4{,}2 : 2\frac{1}{3}}{1\frac{5}{13} \cdot 0{,}16 - \frac{5}{13} \cdot 0{,}16}$;

2) $\dfrac{\left(1{,}75 + 2\frac{1}{3}\right) \cdot 1\frac{5}{7}}{\frac{3}{250} : \left(1{,}23 - \frac{3}{5} \cdot 1{,}05\right) + 0{,}12}$;

3) $\dfrac{5\frac{4}{5} + 0{,}2\left(3{,}8 \cdot 1\frac{2}{7} - 2{,}8 \cdot 1\frac{2}{7}\right) \cdot 8\frac{5}{9}}{\left(\frac{5}{9} - \frac{11}{36}\right) \cdot 6{,}4}$;

4) $\dfrac{\left(2\frac{5}{6} - 7\frac{1}{9}\right) \cdot (-0{,}54) : (-0{,}7)}{\left(\frac{4}{23} \cdot \left(-\frac{5}{19}\right) - \frac{3}{23} \cdot \left(-\frac{3}{19}\right)\right) \cdot (-5{,}75)}$.

864. Найдите значение выражения:

1) $-\frac{7}{11}\cdot 1\frac{5}{17}:(-0{,}75)$;

2) $\left(1{,}2-2\frac{7}{25}\right):1\frac{2}{25}+1\frac{4}{13}$;

3) $\left(4{,}25\cdot\frac{16}{51}-\frac{17}{18}:8{,}5\right)\cdot\left(\frac{3}{11}\right)^2$;

4) $\left(-12{,}6\cdot 1\frac{1}{9}+10{,}8\right):6\frac{6}{7}+2\frac{3}{10}$;

5) $\left(1-\frac{7}{15}+0{,}4\right):\left(0{,}3+\frac{3}{19}-\frac{15}{38}\right)$;

6) $2:\left(1\frac{1}{5}-2{,}2\right)+\frac{1}{10}:\left(2{,}8-\frac{3}{8}\right)$;

7) $\left(\frac{15}{98}-\frac{17}{28}\right):1\frac{40}{49}+(0{,}1-0{,}15)\cdot 21\frac{3}{7}$;

8) $\left(5{,}4\cdot\left(-3\frac{1}{3}\right)+13{,}8\right):1\frac{13}{15}+3\frac{5}{6}$.

865°. Решите уравнение:

1) $-0{,}21x-\frac{15}{56}=\frac{3}{16}+\frac{257}{800}x$;

2) $\frac{2}{11}x+\frac{5}{14}=1{,}2+0{,}45x$;

3) $3\frac{1}{3}-\frac{2}{3}x-1{,}7=3{,}9$;

4) $\frac{2}{3}\left(\frac{1}{3}x-0{,}5\right)=4x+2{,}5$;

5) $\frac{3}{4}\left(0{,}5x+\frac{2}{3}\right)=3x+2\frac{1}{4}$;

6) $76-2{,}5x-4\frac{7}{25}=8{,}28$;

7) $6{,}76-2{,}2x=7\frac{5}{28}-3\frac{1}{4}$;

8) $0{,}75x-1\frac{2}{3}=1{,}5+0{,}2x$.

Практикум по решению текстовых задач

866. Решите устно задачи.

1) Чашка стоит 20 р., а чайник — 200 р. Во сколько раз чайник дороже, чем чашка?

2) На школьную новогоднюю ёлку повесили 125 шаров, а игрушек — на 37 меньше, чем шаров. Сколько игрушек повесили на ёлку?

3) Для освещения на одной из улиц установили 324 фонаря, а на другой — в 3 раза меньше. Сколько фонарей установили на второй улице?

4) В саду 72 яблони, и их в 3 раза больше, чем груш. Сколько в саду яблонь и груш?

5) Спортсмен прыгнул в длину на 7 м 20 см. Это в 4 раза больше, чем его рост. Найдите рост спортсмена.

6) После того как продали 450 кг крупы, осталось на 125 кг крупы меньше, чем продали. Сколько килограммов крупы было до продажи?

7) Штангист в первой попытке поднял штангу массой 106 кг, а во второй — на 27 кг больше. Найдите общую массу, поднятую штангистом за две попытки.

867. Решите задачи.

1) В магазин привезли 2 т 82 кг картофеля, лука — в 6 раз меньше, чем картофеля, а моркови — на 53 кг больше, чем лука. Сколько килограммов овощей привезли в магазин?

2) Общая масса трёх кусков гранита равна 156 кг. Кусок серого гранита тяжелее куска красного на 18 кг, а кусок красного гранита легче куска белого на 15 кг. Найдите массу куска красного гранита.

3) На расчистку дороги от снежных заносов из первого села пришло 187 человек, из второго — в 2 раза больше, чем из первого, а из третьего — на 189 человек меньше, чем из второго. Сколько человек пришло на расчистку снежных заносов из трёх сёл?

4) Размах крыльев у орла 260 см, у цапли — на 80 см меньше, чем у орла, а у глухаря — в 3 раза меньше, чем у цапли. Каков размах крыльев у глухаря?

5) Завод выпустил в январе 3457 мини-тракторов, в феврале — на 657 мини-тракторов больше, а в марте — на 289 меньше, чем в январе. Сколько мини-тракторов выпустил завод за весь квартал?

868. Решите устно задачи и назовите формулы, которые вы использовали.

1) Килограмм яблок стоит 35 р. Сколько стоит 5 кг яблок?

2) За 4 кг мандаринов заплатили 160 р. Сколько стоит 1 кг мандаринов?

3) Сколько килограммов бананов можно купить на 84 р., если цена бананов 28 р. за 1 кг?

4) Машинистка напечатала 78 страниц за 2 ч. С какой скоростью печатала машинистка?

5) Комбайнёр убирал по 805 ц пшеницы в день. Сколько дней работал комбайнёр, если он убрал всего 4025 ц пшеницы?

6) Найдите площадь поверхности прямоугольного параллелепипеда, если его длина равна 12 см, ширина 10 см, а высота 5 см.

7) Длина проволоки, из которой изготовлен каркас куба, 96 см. Найдите объём куба.

8) Два мастера выкладывают пол кухни плиткой. Один мастер за час выкладывает в среднем 18 плиток, другой — 20 плиток. За какое время они смогут выложить 380 плиток, работая вместе?

9) За 18 одинаковых ручек заплатили 90 р. Сколько надо заплатить за 20 таких же ручек?

10) Саша и Маша купили одинаковые тетради по цене 12 р. за тетрадь. Маша заплатила за свои тетради на 24 р. больше, чем Саша. На сколько больше тетрадей купила Маша, чем Саша?

869. Решите задачи.

1) В первый магазин привезли 27 коробок с печеньем, а во второй — 30 таких же коробок. Сколько килограммов печенья привезли в каждый магазин, если известно, что во второй магазин привезли на 51 кг печенья больше, чем в первый?

2) На платья одной модели израсходовали 520 м ситца, а на платья другой — на 45 м меньше. Сколько всего получилось платьев, если на каждое пошло 5 м ткани?

3) Магазин получил 8 ящиков с печеньем и 6 ящиков с конфетами. Масса всего печенья 72 кг. Масса одной коробки с печеньем в 3 раза меньше массы ящика с конфетами. Сколько всего килограммов печенья и конфет получил магазин?

4) Машина в первый день проехала 522 км за 9 ч. Во второй день машина двигалась с той же скоростью и была в пути 7 ч. Сколько километров проехала машина за 2 дня?

5) В магазин привезли 280 кг бананов в одинаковых коробках. Когда продали 130 кг бананов, то осталось ещё 15 коробок с бананами. Сколько килограммов бананов было в одной коробке?

6) В магазин привезли 180 кг винограда, по 6 кг в каждом ящике, и столько же ящиков со сливами, по 5 кг в каждом. Сколько килограммов слив привезли в магазин?

870. Решите устно задачи на движение и назовите формулы, которыми пользовались.

1) Велосипедист едет со скоростью 15 км/ч. Какое расстояние он проедет за 3 ч?

2) Теплоход движется со скоростью 35 км/ч. За сколько часов он пройдёт 700 км?

3) Самолёт за 2 ч пролетел 1900 км. С какой скоростью летел самолёт?

871. Решите задачи на движение.

1) В первый день туристы шли 4 ч, а во второй день они шли 6 ч с той же скоростью, что и в первый день. Сколько

километров туристы прошли за первый день, если за второй день они прошли на 10 км больше, чем за первый?

2) Грузовая машина проехала 336 км со скоростью 42 км/ч. На обратный путь машина затратила на 1 ч меньше. С какой скоростью ехала машина обратно?

3) Товарный поезд за 6 ч прошёл 240 км, а пассажирский за 5 ч прошёл 300 км. На сколько скорость пассажирского поезда больше скорости товарного?

4) От Москвы до Киева 870 км. Поезд, вышедший из Москвы, первые 6 ч шёл со скоростью 85 км/ч, а остальной путь до Киева он прошёл за 5 ч. Какова была скорость поезда на втором участке пути?

5) Расстояние 5040 км от Москвы до Иркутска пассажирский поезд прошёл за 84 ч, а товарный поезд — за 126 ч. На сколько скорость пассажирского поезда больше скорости товарного?

872. Поезд шёл 5 ч со скоростью 60 км/ч и столько же часов со скоростью 40 км/ч. Объясните, что показывает каждое выражение:

1) $60 \cdot 5$;   3) $5 + 5$;

2) $40 \cdot 5$;   4) $(60 \cdot 5 + 40 \cdot 5) : (5 + 5)$.

873. Решите задачи.

1) Пассажирский поезд прошёл 75 км за первый час, 60 км за второй час и 75 км за третий час. Какова была средняя скорость поезда за эти три часа?

2) Поезд 3 ч шёл со скоростью 63 км/ч и 4 ч — со скоростью 77 км/ч. Найдите среднюю скорость поезда на всём пути.

874. Решите устно задачи на движение по реке.

1) По течению теплоход идёт со скоростью 42 км/ч. Скорость течения реки 3 км/ч. Найдите собственную скорость теплохода.

2) Собственная скорость катера 32 км/ч, а скорость течения реки 4 км/ч. Найдите скорость катера против течения реки.

875. Решите задачи на движение по реке.

1) Прогулочный катер при движении по течению реки проходит 48 км за 3 ч. Какова собственная скорость катера, если скорость течения реки 2 км/ч?

2) Двигаясь против течения реки, теплоход проходит 60 км за 4 ч. Какова скорость течения реки, если собственная скорость теплохода 16 км/ч?

3) При движении против течения реки моторная лодка проходит 88 км за 8 ч. Какова скорость лодки в стоячей воде, если плот то же расстояние проходит за 22 ч?

4) Теплоход, двигаясь по течению реки, 48 км проходит за 3 ч, а плот — за 24 ч. Какова собственная скорость теплохода?

5) Теплоход идёт по течению реки со скоростью 25 км/ч, а против течения — со скоростью 17 км/ч. Найдите скорость течения реки и собственную скорость теплохода.

6) Катер двигался 3 ч по течению реки и такое же время против течения. Всего он прошёл 60 км. Найдите собственную скорость катера.

876. Решите задачи на совместное движение. Назовите виды движения.

1) Два спортсмена одновременно стартовали навстречу друг другу. Первый спортсмен бежал со скоростью 305 м/мин, второй — 312 м/мин. Какое расстояние было между спортсменами, если известно, что встретились они через 4 мин?

2) От пристани в противоположных направлениях одновременно отошли два теплохода. Через 4 ч они были уже на расстоянии 268 км друг от друга. Скорость первого теплохода 35 км/ч. Найдите скорость второго теплохода.

3) Автомобиль и мотоцикл едут по одной дороге в одном направлении. Автомобиль, отстававший от мотоцикла на 105 км, двигаясь со скоростью 90 км/ч, догнал его через 3 ч. Какова была скорость мотоцикла?

4) Пункты A, B и C расположены на одном шоссе. Два велосипедиста выехали одновременно в пункт C из пунктов A

и B, расстояние между которыми 4500 м. Скорость велосипедиста, выехавшего из пункта A, 200 м/мин, скорость велосипедиста, выехавшего из пункта B, 210 м/мин. Каким будет расстояние между велосипедистами через 3 мин после начала движения, если:

а) пункт B расположен между пунктами A и C;

б) пункт C расположен между пунктами A и B;

в) пункт A расположен между пунктами B и C?

877. Решите задачи с помощью уравнений.

1) Можно ли число 286 записать в виде суммы числа 37 и трёх других равных между собой натуральных чисел?

2) Можно ли число 385 записать в виде разности суммы четырёх равных между собой натуральных чисел и числа 49?

3) Маша купила три одинаковых фломастера и ручку. Ручка стоила 17 р. Сколько стоил фломастер, если за всю покупку Маша заплатила 74 р.?

4) Имеются три одинаковые канистры, полностью заполненные бензином. Когда из каждой канистры отлили по 3 л, всего в них осталось 51 л. Найдите вместимость каждой канистры.

5) На утренней тренировке велосипедист проехал на 20 км больше, чем на вечерней. Найдите расстояние, которое проехал велосипедист на вечерней тренировке, если за две тренировки он проехал 190 км.

6) Сергей купил по шесть пачек сливочного и молочного мороженого. Всего он заплатил 72 р. Сколько стоит одна пачка сливочного мороженого, если одна пачка молочного стоит 5 р.?

7) У матери два сына. У неё спросили: «Сколько лет твоим сыновьям?» Она ответила: «Сейчас один из них вдвое старше другого, а год назад он был втрое старше другого». Сколько лет детям?

878. Решите устно задачи на части.

1) В классе 30 учеников, $\frac{3}{5}$ из них девочки. Сколько девочек в классе?

2) Катя поровну разделила с тремя подругами пять шоколадок. Сколько досталось каждой из девочек?

3) За месяц было отремонтировано 35 км дороги, что составило $\frac{5}{7}$ её длины. Найдите длину дороги.

4) Из бочки отлили $\frac{5}{8}$ имевшейся в ней воды, после чего в бочке осталось 15 л воды. Сколько литров воды было в бочке?

5) Какую часть периметра квадрата составляет длина его стороны?

6) Длина прямоугольника составляет $\frac{3}{8}$ его периметра. Какую часть периметра составляет ширина прямоугольника?

879. 1) Часы отстают за сутки на $3\frac{3}{5}$ мин. На сколько минут они отстанут за $\frac{2}{3}$ суток?

2) Дорога от посёлка до автобусной остановки идёт по мосту через речку. Найдите расстояние от поселка до остановки, если от остановки до моста $2\frac{1}{3}$ км, а от моста до посёлка — в $1\frac{2}{5}$ раза больше.

3) В первый день из цистерны отлили $5\frac{1}{6}$ т бензина, а во второй день — на $1\frac{5}{7}$ т больше. После этого в цистерне осталось $\frac{3}{35}$ т. Сколько бензина было в цистерне первоначально?

4) Когда от бревна отпилили $2\frac{5}{8}$ м, оставшаяся часть оказалась на $3\frac{3}{4}$ м длиннее отпиленной. Найдите первоначальную длину бревна.

5) Путешественники за три дня прошли $\frac{31}{36}$ всего пути. В первый день они прошли $\frac{5}{18}$, а во второй — $\frac{4}{15}$ пути. Какую часть пути прошли путешественники в третий день?

880. Решите задачи на выполнение работы.

1) За 1 ч наполняется $\frac{5}{17}$ объёма бассейна. За сколько времени наполнится весь бассейн?

2) За $2\frac{1}{2}$ ч наполняется $\frac{5}{7}$ объёма бассейна. За сколько времени наполнится весь бассейн и какая часть бассейна наполняется за час?

3) Для наполнения бассейна водой могут использоваться три трубы. Первая труба может наполнить бассейн за 12 ч, вторая — за 15 ч, а третья — за 18 ч. Какую часть бассейна могут наполнить за один час три трубы, если они будут открыты одновременно?

4) Работник за $2\frac{1}{3}$ ч выполняет $\frac{7}{10}$ работы. За сколько времени работник может закончить работу и какую часть работы он выполняет за один час?

881. Решите задачи на движение.

1) Двигаясь с постоянной скоростью, автомобиль за 3 ч проехал 200 км. Сколько километров он проехал за 2 ч?

2) Поезд проходит $138\frac{2}{3}$ км за $2\frac{2}{3}$ ч. Какова скорость поезда?

3) Первый спортсмен бежал $\frac{1}{3}$ ч со скоростью $\frac{1}{2}$ км/мин, а второй — $\frac{1}{2}$ ч со скоростью $\frac{1}{3}$ км/мин. Сколько километров пробежал каждый из спортсменов?

4) Турист прошёл в первый день половину, а во второй — $\frac{2}{7}$ расстояния от турбазы до города. При этом в первый день

он прошёл на 12 км больше, чем во второй. Чему равно расстояние от турбазы до города?

5) Путешественник, отправившись из Москвы в Орёл, проехал в первый день $\frac{2}{5}$ всего пути, во второй — половину, а в третий — оставшиеся 38 км. Какое расстояние от Москвы до Орла?

6) Моторная лодка по течению реки идёт со скоростью 21 км/ч, а против течения — со скоростью 15 км/ч. Какую часть от собственной скорости лодки составляет скорость течения реки?

882. Решите задачи с помощью уравнения.

1) В первой коробке на $14\frac{1}{2}$ кг печенья больше, чем во второй. Сколько килограммов печенья во второй коробке, если в ней в 3 раза меньше печенья, чем в первой?

2) Сестра с братом собрали $12\frac{1}{4}$ кг клубники, причём брат собрал в 2 раза больше, чем сестра. Сколько килограммов клубники собрала сестра?

883. Решите устно задачи.

1) Первый арбуз имеет массу 6,4 кг, а второй — на 3,7 кг больше. Какую массу имеет второй арбуз?

2) В первый день турист прошёл 14,3 км, а во второй — в 2 раза больше. Какое расстояние прошёл турист во второй день?

3) Велосипедист за 10 ч проехал 225 км. С какой скоростью ехал велосипедист?

4) Площадь квадрата равна 9,61 см^2. Чему равна сторона квадрата?

5) Объём куба равен 0,027 м^3. Чему равно ребро куба?

6) Один килограмм колбасы стоит 167,8 р. Сколько стоит 0,5 кг колбасы?

7) Скорость катера против течения реки 18,3 км/ч. Чему равна собственная скорость катера, если скорость течения реки равна 2,5 км/ч?

884. Решите задачи на движение по реке.

1) Собственная скорость катера 20,4 км/ч, а скорость течения реки 2,5 км/ч. По течению реки катер шёл 1,5 ч, а против течения — 1,8 ч. Сколько всего километров прошёл катер?

2) Туристы шли на байдарке 2,4 ч по течению реки и такое же время против течения. Всего они прошли 31,2 км. Найдите скорость течения реки, если по течению туристы двигались со скоростью 8,1 км/ч.

3) Собственная скорость теплохода 24,5 км/ч, скорость течения реки 1,3 км/ч. Сначала теплоход 0,4 ч плыл по озеру, а затем 3,5 ч по реке против её течения. Какой путь прошёл теплоход за всё это время?

4)● Моторная лодка двигалась 3 ч вверх по реке и 3 ч вниз по реке. Скорость течения реки 2,5 км/ч. Какой путь лодки — вверх по реке или вниз по реке — больше и на сколько километров?

885. Решите задачи на движение двух объектов. Назовите виды движений.

1) Из городов, расстояние между которыми 651 км, одновременно навстречу друг другу вышли два поезда. Скорость одного из них равна 96,7 км/ч. Найдите скорость другого поезда, если они встретились через 3,5 ч.

2) Два рейсовых автобуса выехали одновременно с одной остановки в противоположных направлениях. Один автобус едет со скоростью 57,3 км/ч, а другой — 65,5 км/ч. Какое расстояние будет между автобусами через 2 ч?

3)● Лодка догоняет плот, который находится от неё на расстоянии 2,7 км вниз по течению реки. Собственная скорость лодки 4,5 км/ч. Через какое время лодка догонит плот?

4) Два рейсовых автобуса выехали одновременно от автостанции и поехали в одном направлении. Один автобус едет со скоростью 57,3 км/ч, а другой — 65,5 км/ч. Какое расстояние будет между автобусами через 3 ч?

886. Во время тренировки спортсмен пробежал 10 000 м за 34,5 мин. Первую тысячу метров он пробежал за 3,2 мин, следующие 5000 м — за 14,5 мин. Найдите:

1) среднюю скорость спортсмена при пробеге первой тысячи метров;

2) среднюю скорость спортсмена при пробеге следующих 5000 м;

3) среднюю скорость спортсмена на всей дистанции.

887. 1) Легковой автомобиль ехал 2 ч со скоростью 55,4 км/ч и ещё 4 ч со скоростью 63,5 км/ч. Найдите среднюю скорость автомобиля на всём пути.

2) Поезд 3 ч шёл со скоростью 63,2 км/ч и 4 ч со скоростью 76,5 км/ч. Найдите среднюю скорость поезда на всём пути.

888. Решите задачи, округлив ответы.

1) Диаметр земного шара приближённо равен 12,8 тыс. км. Чему равна длина экватора Земли?

2) Диаметр Солнца в 109 раз больше диаметра земного шара. Чему равна длина экватора Солнца?

3) Один из самых больших глобусов Земли был изготовлен в 1889 г. для Парижской всемирной выставки, его диаметр составлял 12,8 м. В каком масштабе был сделан глобус Земли?

4) Длина экватора планеты Меркурий приближённо равна 15,3 тыс. км. Чему равен диаметр Меркурия?

5) Площадь поверхности Луны приближённо равна 38 млн км^2. Найдите радиус Луны.

889. Решите с помощью уравнений задачи.

1) Масса первой детали в 3 раза больше массы второй, а масса третьей детали на 1,9 кг больше массы второй. Найдите

массу каждой детали, если их общая масса составляет 53,5 кг.

2) В школе 793 ученика, причём девочек среди них в 1,6 раза больше, чем мальчиков. Сколько девочек и сколько мальчиков учится в школе?

3) В одной бочке в 3 раза больше бензина, чем в другой. Если из первой бочки отлить 78,4 л бензина, а во вторую добавить 42,8 л, то в бочках станет бензина поровну. Сколько литров бензина в каждой бочке?

4) В одном киоске в 4 раза больше килограммов яблок, чем в другом. Если в первом киоске продадут 37,8 кг яблок, а во второй киоск привезут ещё 50,4 кг яблок, то яблок в обоих киосках станет поровну. Сколько килограммов яблок в каждом киоске?

5) Маршрут длиной 310,5 км туристы проделали, двигаясь 6 ч на теплоходе и 3 ч на автобусе. Какова была скорость теплохода, если она в 2,6 раза меньше скорости автобуса?

6) В магазине стояли две равные по массе коробки с печеньем. После того как из первой коробки продали 10,6 кг печенья, а из второй — 24,8 кг, в первой коробке стало в 3 раза больше печенья, чем во второй. Сколько килограммов печенья стало в каждой коробке?

890. Решите задачи с помощью пропорций.

1) Стальной шарик объёмом 6 см^3 имеет массу 46,8 г. Какова масса шарика из той же стали, объём которого равен 2,5 см^3?

2) Лыжник проходит 4,5 км за 15 мин. За какое время лыжник пройдёт 15 км, если будет идти с такой же скоростью?

3) Бригада из 8 человек может построить дом за 36 дней. За сколько дней может построить этот дом бригада из 9 человек?

4) Для приготовления компота требуется вода, ягоды и сахар, массы которых должны быть взяты в отношении 4 : 3 : 2 соответственно. Сколько надо взять воды, ягод и сахара для приготовления 13,5 кг компота?

5) Для приготовления драгоценного сплава взяли золото, серебро и платину, массы которых относились как $3:4:9$ соответственно. Найдите массу серебра в 120 г такого сплава.

891. Решите задачи на проценты.

1) За год фабрика изготовила 3860 пар мужской и женской обуви. Из них 45% составляла мужская обувь. Сколько пар женской обуви изготовила фабрика за год?

2) Сплав содержит 11% меди. Сколько меди содержится в 370 кг такого сплава?

3) Авансом рабочий получил 5530 р., что составило 35% его заработной платы. Какова зарплата рабочего?

4) Из медной руды получают 8% меди. Сколько руды нужно взять, чтобы получить 18 т меди?

5) Бригада школьников собрала 135 кг яблок, что составило 108% плана. Сколько килограммов яблок планировали собрать?

6) Найдите процент содержания железа в руде, если 350 кг руды содержат 238 кг железа.

7) За первую неделю на завод привезли 3,5 т сырья, а за вторую — 4,13 т. На сколько процентов больше сырья привезли за вторую неделю, чем за первую?

8) Цена товара снизилась с 240 до 150 р. На сколько процентов подешевел товар?

9) Туристы были в пути 3 дня. За это время они прошли 62 км, причём во второй день они прошли на 30% больше, а в третий — на 20% меньше, чем в первый день. Сколько километров туристы проходили каждый день?

10) В вазе лежали яблоки и груши, причём яблоки составляли 40% всех фруктов. После того как в вазу положили ещё 2 яблока, число яблок стало равно числу груш. Сколько всего фруктов было в вазе первоначально?

11) Банк ежемесячно начисляет 5% к находящейся на вкладе сумме. На сколько рублей увеличится вклад через 2 месяца, если первоначальный вклад составил 4000 р.?

Геометрический практикум

892. Определите на глаз расстояния между точками на рисунке 172, а затем проверьте свои ответы, измерив расстояния с помощью линейки.

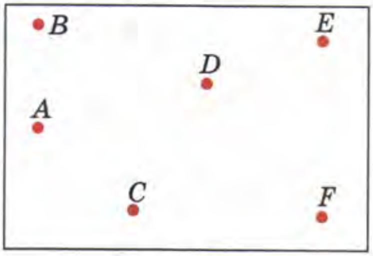


Рис. 172

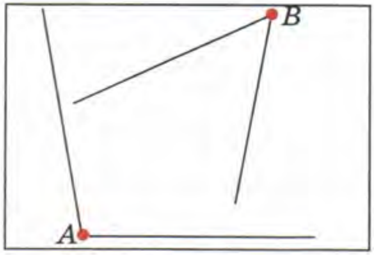


Рис. 173

893. Известно, что $AB = 3$ см и $AC = 5$ см. Какой может быть длина отрезка BC, если точки A, B и C лежат на прямой?

894. Определите на глаз величины углов, изображённых на рисунке 173, а затем проверьте свои ответы, измерив углы с помощью транспортира.

895. 1) Выпишите названия:

а) отрезков;

б) прямых;

в) лучей;

г) углов, изображённых на рисунке 174.

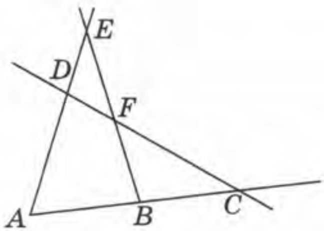


Рис. 174

2) Есть ли на рисунке: а) смежные углы; б) вертикальные углы?

3) Измерьте с помощью транспортира величины углов: ABF, DAB, DFE.

4) Используя результаты измерений, определите величины углов: ADF, DEF, BCF.

896. 1) На какой угол повернётся минутная стрелка часов за 1 мин, за 10 мин, за 15 мин?

2) На какой угол повернётся часовая стрелка за 1 ч, за 4 ч 30 мин?

3) Какой угол между минутной и часовой стрелками в момент, когда часы показывают 2 ч, 3 ч, 5 ч, половину восьмого утра или вечера?

4) Перемена началась в 10 ч. На сколько градусов изменится угол между стрелками за 10 мин перемены? Изменился бы ваш ответ, если начало перемены было, например, в 10 ч 30 мин, в 11 ч 55 мин?

897●. На плоскости отметили: 1) 3 точки; 2) 4 точки; 3) 5 точек. Через каждые две точки провели прямую. Сколько проведено прямых? Проиллюстрируйте каждый из возможных случаев рисунком.

898●. Отметьте на плоскости шесть точек так, чтобы только три из них лежали на одной и той же прямой. Через каждые две точки проведите прямую. Сколько получилось прямых?

899●. На плоскости отмечены четыре точки A, B, C и D так, что $AB = 4$ см, $AC = 6$ см, $BC = 5$ см, $BD = 7$ см, $CD = 2$ см. Через каждые две из этих точек проведена прямая. Сколько при этом образовалось прямых?

900. Могут ли длины сторон треугольника относиться как:
1) 2 : 4 : 7; 2) 3 : 5 : 4; 3) 7 : 10 : 16?

901. В таблице указаны длины отрезков a см, b см и c см.

	1	2	3	4
a	2	2	2	2
b	5	7	1	5
c	4	4	3	5

1) Могут ли эти три отрезка быть сторонами некоторого треугольника?

2) Что можно сказать о треугольнике, длины сторон которого указаны в последнем столбце таблицы? Как называется такой треугольник?

3) Нарисуйте равнобедренный треугольник. Как называются его стороны?

4) Может ли основание равнобедренного треугольника быть в k раз больше, чем его боковая сторона, если:

а) $k = 1{,}5$; б) $k = 2$; в) $k = 2{,}5$?

5) Может ли длина какой-нибудь стороны равнобедренного треугольника быть в 3 раза меньше, чем его периметр? Как называется такой треугольник?

902. Найдите периметр равнобедренного треугольника, две из трёх сторон которого имеют длины:

1) 5 см и 11 см;

2)● 5 м и 8 м.

903●. На плоскости отмечены 4 точки. Сколько может существовать треугольников, вершины которых расположены в этих точках? Рассмотрите возможные случаи и сделайте соответствующие рисунки.

904. Есть ли на рисунке 175 смежные углы с вершинами в точках M или N?

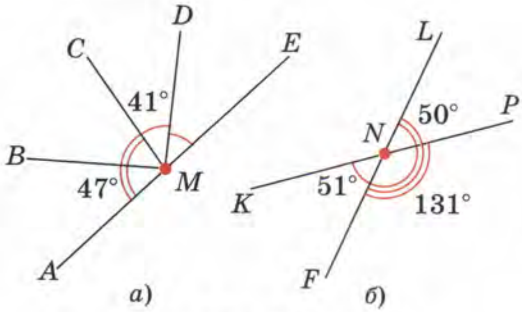


Рис. 175

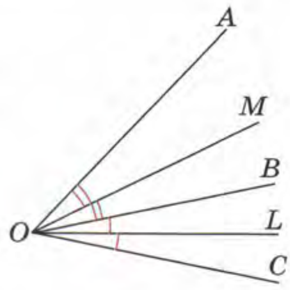


Рис. 176

905. Известно, что один из смежных углов:

1) на 20°; 2) в 1,5 раза меньше другого.

Постройте с помощью транспортира эти углы.

906. Величины смежных углов относятся как 11 : 25. Постройте с помощью транспортира эти углы.

907. 1) Найдите величину угла MOL на рисунке 176, если известно, что $\angle AOB = 30°$, $\angle COB = 18°$.

2) Найдите величину угла MOA на рисунке 177, если известно, что $\angle AOB = 54°$ и AC — прямая.

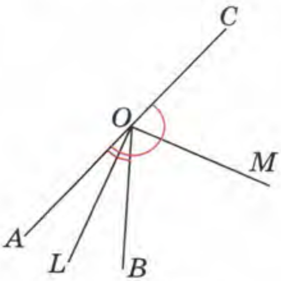


Рис. 177

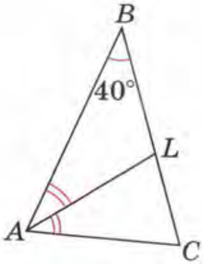


Рис. 178

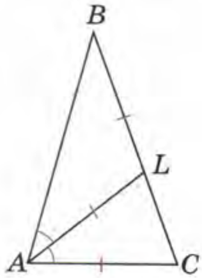


Рис. 179

908. Развёрнутый угол разделён лучами на три угла. Второй угол больше первого на $15°$, а третий больше второго на $18°$.

1) Найдите величины углов, на которые разделён развёрнутый угол.

2) Найдите величину угла, образованного биссектрисами меньшего и большего из этих углов.

909. На рисунке 178 изображён треугольник ABC, в котором $AB = BC$. Найдите величину угла ALB.

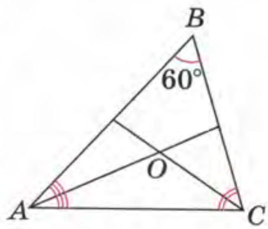


Рис. 180

910•. Найдите величины углов A, B и C треугольника ABC, изображённого на рисунке 179.

911•. В треугольнике ABC проведены биссектрисы его углов A и C (рис. 180). Найдите величину угла AOC.

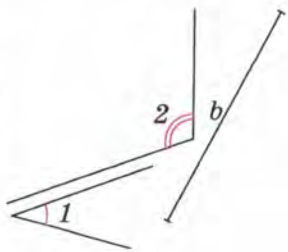


Рис. 181

912. На рисунке 181 изображён отрезок и два угла. На рисунке 182 показано, в какой последовательности производится построение треугольника ABC, у которого $\angle A = \angle 1$, $\angle C = \angle 2$ и $AC = b$. Цифры в кружочках показывают, в каком порядке выполнялись построения:

① — точка A на прямой;

② — точка C на расстоянии b от A;

③ — сторона угла A;

④ — сторона угла C.

1) Объясните, с помощью каких инструментов выполняются пронумерованные действия.

2) Постройте треугольник ABC, у которого сторона $AC = 4$ см, а углы $\angle A = 45°$ и $\angle C = 70°$.

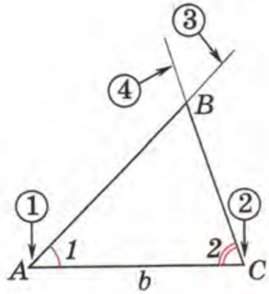


Рис. 182

913. На рисунке 183 показана последовательность построения треугольника ABC по величине угла BAC и длинам сторон AB и AC.

1) Объясните, с помощью каких инструментов выполняются пронумерованные действия.

2) Постройте треугольник ABC, у которого $AB = 4$ см, $AC = 5$ см и $\angle A = 70°$.

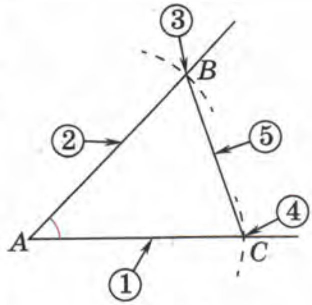


Рис. 183

914. На рисунке 184 показана последовательность построения треугольника ABC по длинам его сторон AB, AC и BC.

1) Объясните, с помощью каких инструментов выполняются пронумерованные действия.

2) Постройте треугольник ABC, у которого $AB = 4$ см, $AC = 5$ см и $BC = 6$ см.

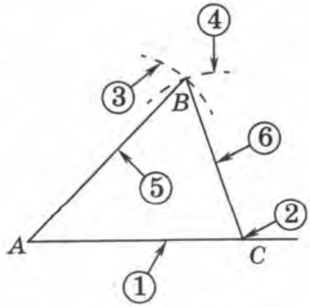


Рис. 184

915. По данным, приведённым в строках таблицы, постройте треугольники. Проведите необходимые измерения и заполните пустые клетки. 275

AB	AC	BC	$\angle A$	$\angle B$	$\angle C$
2 см	4 см		70°		
	5 см		60°		50°
3 см	4 см	5 см			
5 см			45°	80°	

916. Пользуясь только циркулем, постройте вершины треугольника, равного треугольнику, изображённому на рисунке 185.

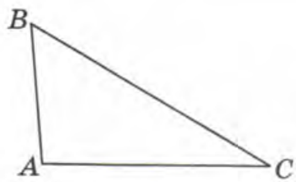


Рис. 185

917•. В таблице даны радиусы r_1, r_2 и расстояние d между центрами O_1 и O_2 двух окружностей.

r_1	5	5	5	5	5	5
r_2	2	2	2	2	2	2
d	1	3	4	6	7	8

1) Определите, каково взаимное расположение окружностей, т. е. какой из случаев имеет место:

а) окружности не имеют общих точек;

б) окружности имеют одну общую точку — *касание*;

в) имеют две общих точки — *пересечение*.

2) Проиллюстрируйте каждый случай рисунком.

918. Найдите на рисунке 186 расстояния от точек M, N и K до прямых a и b.

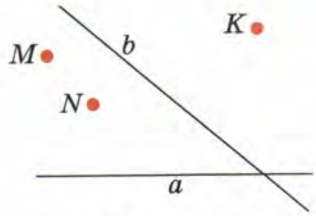


Рис. 186

919●. В таблице дан радиус r окружности и расстояние l от её центра O до прямой m.

r	3	3	3	3
l	5	2	0	3

1) Определите взаимное расположение окружности и прямой, т. е. какой из случаев имеет место:

а) окружность с прямой не имеет общих точек;

б) окружность и прямая имеют одну общую точку — *касание*;

в) окружность и прямая имеют две общие точки — *пересечение*.

2) Проиллюстрируйте каждый случай рисунком.

920●. Квадрат 8×8 клеток разрезали на несколько частей и затем сложили из них прямоугольник 5×13 клеток (рис. 187).

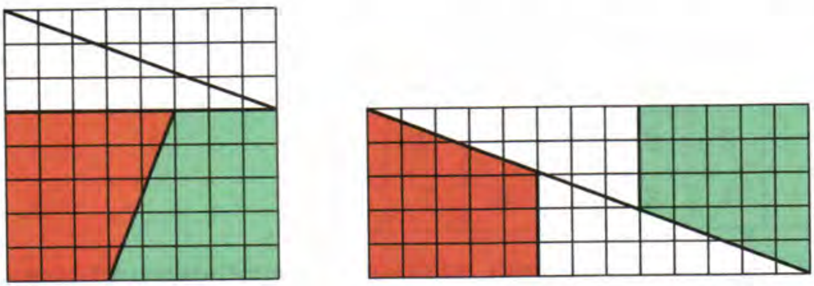


Рис. 187

В квадрате 8×8 имеется $8 \cdot 8 = 64$ клеточки, а в прямоугольнике $5 \cdot 13 = 65$. Откуда взялась в прямоугольнике лишняя клетка?

921●. Скопируйте изображённые на рисунке 188 фигуры в тетрадь и проведите по сторонам или диагоналям клеток в каждой из фигур линию, которой она разрезается на две равные фигуры.

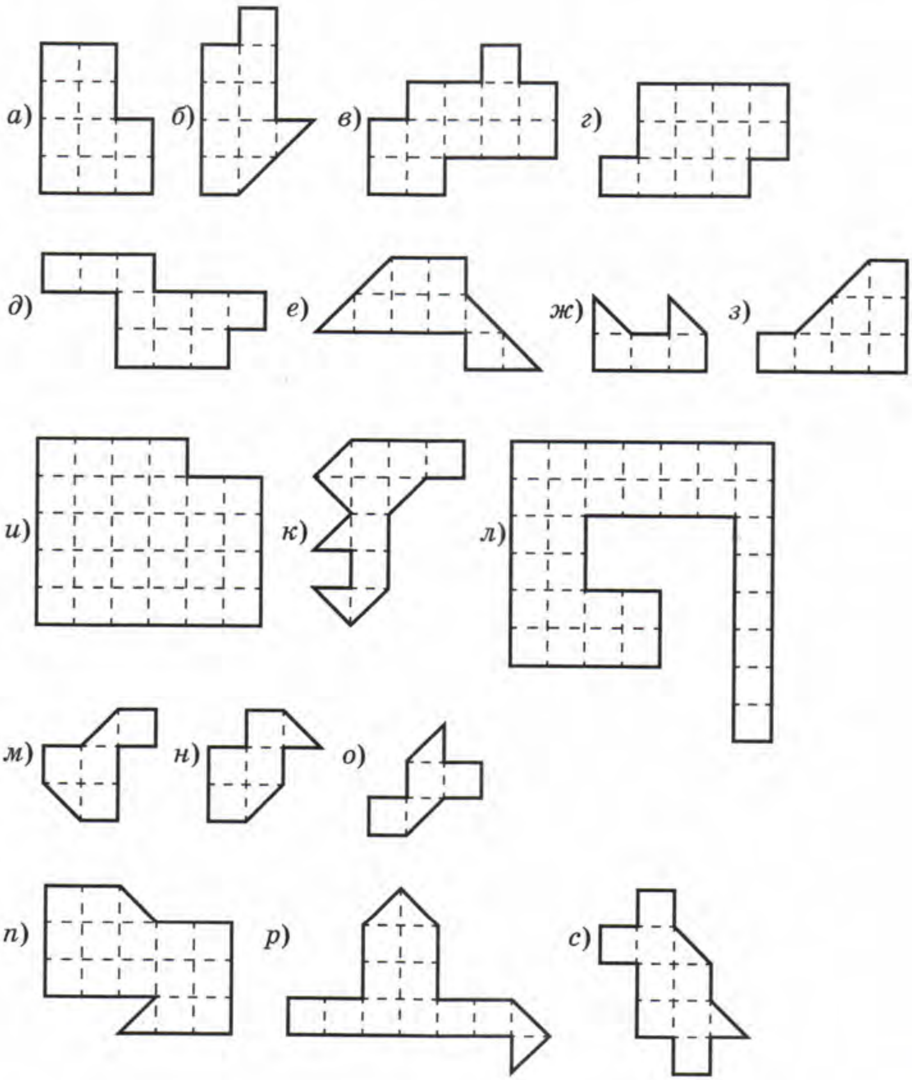


Рис. 188

Практикум по развитию пространственного воображения

922. На каркасе пирамиды натянут шнур (рис. 189). Укажите, какие отрезки этого шнура соприкасаются друг с другом не на каркасе пирамиды.

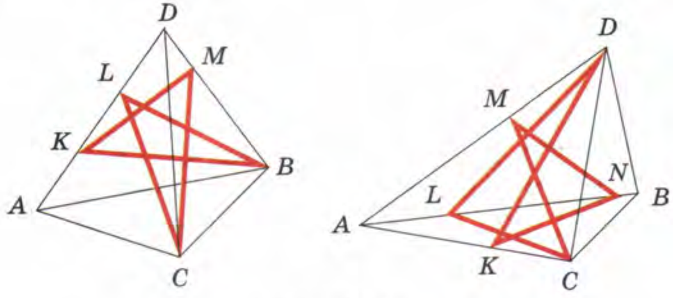


Рис. 189

923. На каркасе прямой призмы натянут шнур (рис. 190). Укажите, какие отрезки этого шнура соприкасаются друг с другом не на каркасе призмы.

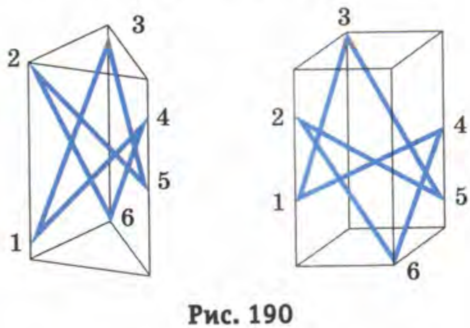


Рис. 190

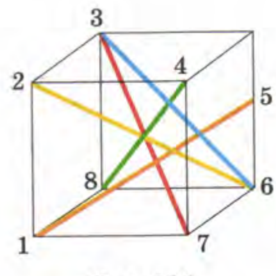


Рис. 191

924. На каркасе куба натянуты разноцветные шнуры (рис. 191).

1) Какие из шнуров соприкасаются внутри куба?

2) Сравните длины шнуров.

925. На рисунке 192 хотели изобразить 5 одинаковых кубиков, но изображение последнего кубика не закончили. Какие фигуры должны быть на его гранях? 276

Рис. 192

926. На любых двух противоположных гранях игрального кубика в сумме 7 очков. Это значит, что у кубика на рисунке 193 на задней грани 4 очка, на левой — 5 очков, а на нижней — 6 очков. Кубик перекатывают с грани на грань по пути, который изображён квадратами на рисунке 193. Укажите число очков грани, которая встанет на соответствующий квадрат маршрута кубика.
277

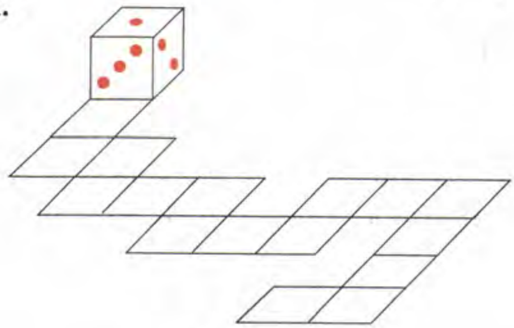
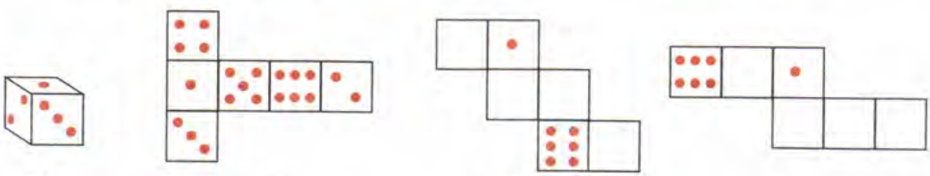


Рис. 193

927. На рисунке 194 изображён кубик (*игральная кость*) и его развёртка. Заполните пустые квадраты других вариантов его развёртки. 278



а) *б)* *в)* *г)*

Рис. 194

928. На рисунке 195 показаны все шесть граней одного и того же куба. Укажите несколько возможных вариантов заполнения пустых квадратов развёртки.

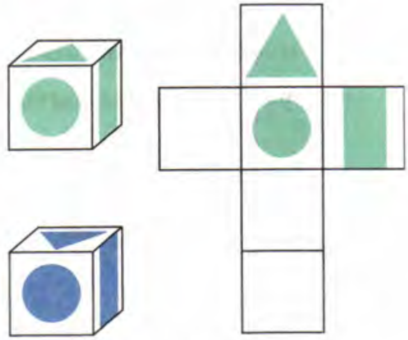


Рис. 195

929. Только один из пяти изображённых на рисунке 196 кубиков имеет указанную развёртку. Какой буквой обозначен этот кубик? 279

а) *б*) *в*) *г*) *д*)

Рис. 196

930. На рисунке 197 изображён куб. Найдите угол ABC между диагоналями AB и BC его граней.

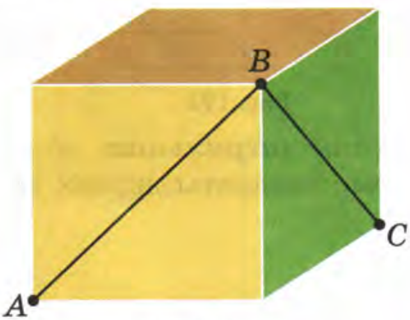


Рис. 197

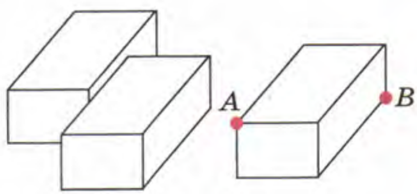


Рис. 198

931. Имеется три одинаковых кирпича (рис. 198) и линейка с миллиметровыми делениями. Как *измерить* этой линейкой длину отрезка AB — *диагональ* кирпича?

932. Стоит ли одалживать свои карандаши человеку, который складывает их так, как показано на рисунке 199?

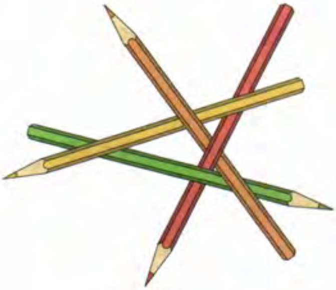


Рис. 199

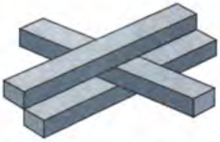


Рис. 200

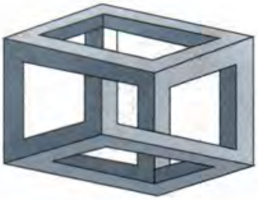


Рис. 201

933. Можно ли сложить деревянные брусья так, как показано на рисунке 200?

934. Посмотрите внимательно на рисунок 201.
С этим ящиком явно не всё в порядке. Что в нём неправильно?

Рис. 202

Рис. 203

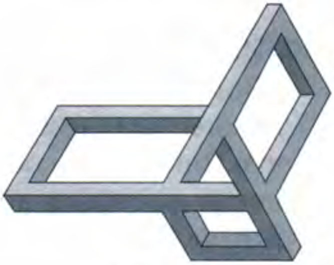


Рис. 204

935. По-видимому, кто-то пытался сложить из кубиков треугольник. Присмотритесь к рисунку 202 и скажите, удалась ли эта попытка.

936. Можно ли изготовить треугольник, изображённый на рисунке 203?

937. Посмотрите внимательно на удивительную конструкцию, изображённую на рисунке 204. Постарайтесь объяснить, что в этой конструкции неправильно.

938. На рисунке 205 приведён фрагмент знаменитой картины М. Эшера «Вверх и вниз по лестнице». Попробуйте вообразить, что вы поднимаетесь по этой лестнице. Почему в конце концов вы, не прекращая подниматься, снова оказываетесь на том же месте?

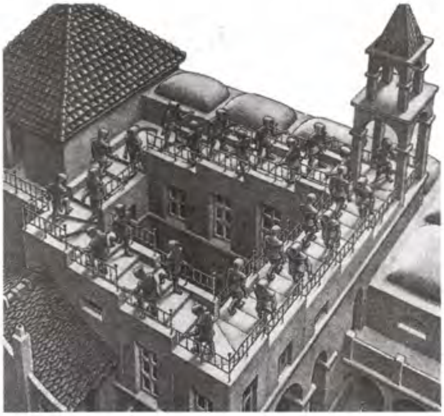


Рис. 205

Рис. 206

939. На рисунке 206 вы видите фрагмент картины М. Эшера «Водопад». Падающая вода вращает колесо, затем стекает по специальному жёлобу и снова падает на колесо. Похоже, что Эшеру удалось изобрести вечный двигатель, невозможность которого доказана наукой. Попробуйте разобраться в этой ситуации.

Ч. 2. С. 76

Ответы. Советы. Решения

Глава 1. **Пропорциональность**

4. 2) Прямоугольник 4 подобен прямоугольнику 2 с коэффициентом подобия 1,5. Указание. Два прямоугольника подобны, если измерения каждого из них (длина и ширина) отличаются в одно и то же число раз. **5.** 1) Да, коэффициент подобия равен 2; 2) да, коэффициент подобия равен 0,25; 3) нет; 4) нет. **6.** Частное периметров равно коэффициенту подобия, частное площадей — квадрату коэффициента подобия. 1) $P_{ABCD} = 10$ см, $P_{KLMN} = 30$ см, $S_{ABCD} = 6$ см^2, $S_{KLMN} = 54$ см^2. 2) $P_{KLMN} = 46$ см, $P_{ABCD} = 9{,}2$ см, $S_{KLMN} = 130$ см^2, $S_{ABCD} = 5{,}2$ см^2. 3) $P_{ABCD} = 23{,}4$ см, $P_{KLMN} = 18$ см, $S_{ABCD} = 33{,}8$ см^2, $S_{KLMN} = 20$ см^2. 4) $P_{ABCD} = 30$ см, $P_{KLMN} = 20$ см, $S_{ABCD} = 54$ см^2, $S_{KLMN} = 24$ см^2. **7.** 16 см или 6,25 см. Решение. Если меньшая сторона второго прямоугольника равна 10 см, то она в 2 раза больше меньшей стороны первого прямоугольника, тогда его большая сторона $8 \cdot 2 = 16$ (см). Если большая сторона второго прямоугольника равна 10 см, то она в $\frac{10}{8}$ раза больше соответствующей стороны первого прямоугольника. Тогда вторая сторона равна $5 \cdot \frac{10}{8} = \frac{25}{4} = 6{,}25$ (см). **8.** 50 м^2. Решение. Длина большего участка 20 м. Меньший участок подобен большему с коэффициентом $\frac{1}{2}$. Значит, площадь меньшего участка в 4 раза меньше площади большего участка, т. е. $200 : 4 = 50$ (м^2). **9.** 1) а) $\frac{2}{3}$; б) 30 см и 20 см; в) 54 см^2 и 24 см^2; 2) а) $\frac{1}{2}$; б) 24 см и 12 см; в) 32 см^2 и 8 см^2; 3) а) $\frac{1}{2}$; б) 9,6 дм и 4,8 дм;

в) 5,12 дм^2 и 1,28 дм^2; 4) а) $\frac{1}{4}$; б) 17,5 м и 4,375 м; в) $12\frac{1}{4}$ м^2 и $\frac{49}{64}$ м^2. Р е ш е н и е. 1) Большая сторона отрезанного прямоугольника равна 6 см, значит, коэффициент подобия равен $\frac{6}{9}$. Меньшая сторона равна $6 \cdot \frac{2}{3} = 4$ (см). 4) Большая сторона отрезанного прямоугольника равна $1\frac{3}{4}$ м, значит, коэффициент подобия равен $1\frac{3}{4} : 7 = \frac{1}{4}$. Меньшая сторона равна $1\frac{3}{4} \cdot \frac{1}{4} = \frac{7}{16}$ (м). **10.** Нет. **11.** Подобны равносторонние треугольники NOP и XYZ, равнобедренные прямоугольные треугольники ABC и STR. **12.** 2,5 см и 5 см. Коэффициент подобия равен $\frac{1}{2}$. **13.** 1) а) Коэффициент подобия треугольника DEF равен 2. Длины его сторон 4 см, 8 см и 10 см. б) Коэффициент подобия треугольника KLM равен 5. Длины его сторон 10 см, 20 см и 25 см; 2) в) 2,5. **14.** 1) $\angle BAC = \angle BMN$, $\angle BCA = \angle BNM$. **15.** 1) Д о к а з а т е л ь с т в о. Поскольку сумма углов любого треугольника равна 180°, имеем $\angle BAC + \angle ABC + \angle BCA = \angle BNM + \angle NBM + \angle BMN$. Первые два слагаемых в равных суммах равны, значит, должны быть равны и третьи слагаемые, т. е. $\angle C = \angle M$. 2) Поскольку углы треугольников попарно равны, треугольники подобны. **16.** 1) Увеличится в 25 раз; 2) уменьшится в 1,69 раза; 3) увеличится в $\frac{16}{9}$ раза. **17.** 1) а) Увеличится в 8 раз; б) уменьшится в 8 раз; 2) а) увеличится в 27 раз; б) уменьшится в 27 раз. **18.** 1,5. **19.** Поверхность куба состоит из 6 граней-квадратов. Площадь грани первого куба равна 9 см^2, а второго — 144 см^2. Ребро первого куба 3 см, а второго — 12 см. Коэффициент подобия второго куба равен 4. **20.** Р е ш е н и е. Коэффициент подобия может быть равен 30, 15 или 12. Объём первого параллелепипеда равен 40 см^3, а площадь его поверхности равна 76 см^2. При коэффициенте подобия, равном 30, объём второго куба равен $40 \cdot 30^3 = 1\,080\,000$ см^3, а площадь его поверхности равна $76 \cdot 30^2 = 68\,400$ см^2. При коэффициенте подобия, равном 15, объём равен 135 000 см^3, а площадь поверхности — 17 100 см^2. При коэффициенте подобия, равном 12, объём равен 69 120 см^3, а площадь поверхности —

10 944 см^2. **21.** 1, 2, 3, 4, 5, 6, 8, 10. **22.** 6,25 см^2, 4,5 см^2, 9 см^2, 12,5 см^2. **26.** 1) 0,01; 2) 0,0001; 3) 0,00001; 4) 0,000001; 5) 0,001; 6) 0,000001. **27.** 1) а) 1 : 1 000 000; б) 1 : 2 000 000; в) 1 : 500 000; г) 1 : 5 000 000; 2) на г). **28.** 1) 3 км; 2) 4 см. **29.** 1) в) 1 : 5 000 000. **30.** На карте это расстояние изображается отрезком длиной более 1 м и, конечно, не уместится на странице тетради. **31.** 1) 1 : 400 000; 2) 56 км. **34.** 1) Уменьшен в 10 раз; 2) увеличен в 10 раз; 3) уменьшен в 100 раз; 4) уменьшен в 2 раза; 5) увеличен в 2 раза. **36.** Длина детали равна 36 см. 1) 12 см; 2) 72 см; 3) 3,6 см. **37.** 75 м, 45 м. **41.** 1) Площадь дачи больше площади её изображения на плане в 1000^2 раз. Значит, она равна 3000 м^2. 2) 1 : 200; 3) 4,8 см^2. **44.** 25 см. **48.** 1) а) Коэффициент подобия этих квадратов; б) скорость автомашины; в) цену книги; г) время печати; д) ширину прямоугольника; е) площадь основания прямоугольного параллелепипеда; 2) а, г. **49.** 1) а) 2 : 5; б) 3 : 5; в) 2 : 3; 2) а) в $\frac{3}{2}$ раза; б) в $\frac{5}{3}$ раза; в) в $\frac{5}{2}$ раза. **50.** 1) 1 : 30; 2) 1 : 40; 3) 4 : 25; 4) 8 : 1. **54.** 1) 15; 3) 7,2; 5) 0,3; 7) 1,5; 9) $3\frac{4}{7}$. **55.** 1) $\frac{4}{5}$; 2) 4 : 5; 3) 0,8. **56.** 3 : 5 = 15 : 25, 7 : 9 = 3,5 : 4,5. **57.** 1) 6 : 36 = 7 : 42; 2) 9 : 4,5 = 3 : 1,5; 3) $\frac{3}{5} : 0{,}2 = 2{,}4 : 0{,}8$; 4) $\frac{7}{11} : \frac{2}{3} = 1\frac{5}{22} : 1\frac{2}{7}$. **58.** Является в 1) и 2). **60.** $\frac{AB}{MB} = \frac{AC}{MN}$, $\frac{AB}{MB} = \frac{BC}{BN}$, $\frac{AC}{MN} = \frac{BC}{BN}$. **61.** Например: 1) 12 : 39 = 120 : 390; 2) 72 : 8 = 54 : 6; 3) 2,5 : 5 = 1 : 2; 4) $6 : 1{,}2 = 3\frac{1}{3} : \frac{2}{3}$. **64.** Верно в 2), 3), 5). **65.** Например: 1) 15 : 9 = 10 : 6; 2) 1,2 : 0,6 = 10 : 5; 3) $5 : \frac{2}{3} = 10 : 1\frac{1}{3}$; 4) $7{,}8 : 4 = 1{,}3 : \frac{2}{3}$. **67.** Можно в 4). **69.** 1) а) 18 : 2 = 90 : 10; б) 10 : 18 = 2 : 3,6; 4) а) $4 : 6 = \frac{16}{27} : \frac{8}{9}$; б) $4 : 6 = \frac{8}{9} : \frac{4}{3}$. Для каждой тройки чисел можно подобрать три числа. **70.** 1) $\frac{8}{3}$; 2) 84; 3) 2,42;

4) 0,243; 5) 0,972; 6) $\frac{3}{20}$. **71.** 1) $3\frac{3}{7}$; 2) $22\frac{1}{7}$; 3) $\frac{105}{64}$; 4) $\frac{21}{8}$; 5) 0,22; 6) 0,5; 7) 250; 8) $\frac{7}{3}$. Р е ш е н и е. 1) $x + 3 = 3 \cdot 15 : 7$, $x = \frac{45}{7} - 3$, $x = 3\frac{3}{7}$.

72. 1) Р е ш е н и е. Длина отрезка a относится к длине отрезка b, как длина отрезка x к длине отрезка d. Поскольку точка a расположена посередине между 0 и b, то x — посередине между 0 и d.

73. 1) 108 кг; 2) 82 кг. Р е ш е н и е. 1) Меди x кг. $\frac{90}{100} = \frac{x}{120}$, $x = 108$ (кг). 2) Латуни x кг. $\frac{60}{40} = \frac{123}{x}$, $x = 82$ (кг). **74.** 2. **75.** 250%.

76. 20 шаров. **77.** 1) 12; 2) ни при каком; 3) 16; 5) при любом, кроме нуля. **78.** 1) 135 р.; 2) 1620 р. **79.** 1) Увеличится соответственно в 2 раза, в 3 раза, в 10 раз. **80.** Пропорциональны: 1), 4), 5).

81. 1)

Время работы, ч	2	4	5	7	8
Объём работы, деталей	50	100	125	175	200

2)

Количество товара, шт.	2	14	27	115	237
Стоимость покупки, р.	4,6	32,2	62,1	264,5	545,1

82. На 125%. **83.** 1) На 174,4%; 2) на 96%. **84.** 1) 3 банки; 2) 12 банок. **85.** 1) 70 км/ч; 2) 1,5 ч. **86.** 1) 12 кг; 2) 0,75 кг.

87. 1)

Производительность труда, деталей в час	8000	250	500	400	1000
Время работы, ч	0,25	8	4	5	2

2)

Цена товара, р.	25	15	75	600	120
Количество товара, шт.	120	200	40	5	25

88. 1) Прямо пропорциональны в а), г), д), о), р); 2) обратно пропорциональны в б), в), е), п); 3) не являются ни теми, ни другими в ж), з), и), к), л), м), н). **89.** 1) $\frac{5}{x} = \frac{45}{72}$; 2) $\frac{50}{x} = \frac{3}{5{,}4}$. **92.** 1) 900 г. 2) 30 цистерн; 3) 1,82 кг; 4) 32 трактора; 5) 360 м^3; 6) 3 стакана молока; 7) 24,2 см; 8) 720 колебаний. Р е ш е н и е. 1) Масса йогурта в 6 стаканчиках x г. $\frac{4}{600} = \frac{6}{x}$, $x = 900$ (г). **93.** 1) 6670 км; 2) 29,85 см. Р е ш е н и е. 1) Длина реки Нил x км. $\frac{x}{3530} = \frac{33{,}35}{17{,}65}$, $x = 6670$ (км). 2) Длина реки Миссисипи на карте y км. $\frac{y}{17{,}65} = \frac{5970}{3530}$, $y = 29{,}85$ (см). **95.** 1) 14 км/ч, 4 км/ч; 2) за 3 ч. Р е ш е н и е. 1) Пусть скорость пешехода x км/ч, тогда $\frac{x}{x+10} = \frac{2}{7}$, $7x = 2(x + 10)$, $7x = 2x + 20$, $5x = 20$, $x = 4$ (км/ч). 2) За 1 ч мастер штампует $480 : 4 = 120$ деталей, а ученик — $120 : 3 = 40$ деталей. Вместе за 1 ч они штампуют $120 + 40 = 160$ деталей. Значит, на 480 деталей у них уйдёт $480 : 160 = 3$ ч. **96.** 1) Можно. **97.** За 6 ч. Р е ш е н и е. За 2 ч первый насос мог бы осушить $\frac{2}{3}$ котлована, а второй за это время осушил бы $\frac{1}{3}$ котлована, т. е. в 2 раза меньше. Значит, на осушение котлована ему потребуется в 2 раза больше времени, чем первому насосу, т. е. $3 \cdot 2 = 6$ ч. **98.** 1) Через 24 мин; 2) 96 мин. Р е ш е н и е. 1) Мотоциклист проехал до встречи в 4 раза больше, чем велосипедист, т. е. $\frac{4}{5}$ всего пути из B в A. На это у него ушло $\frac{4}{5}$ всего времени движения из B в A, т. е. $\frac{4}{5} \cdot 30 = 24$ (мин). 2) Велосипедист после встречи ехал в 4 раза дольше, чем мотоциклист до встречи, т. е. $24 \cdot 4 = 96$ (мин). **99.** 9 дней. Р е ш е н и е. За 6 дней первая бригада выполняет $6 : 18 = \frac{1}{3}$ работы, значит, вторая за это же время выполняет $\frac{2}{3}$ работы, т. е. производительность второй бригады в 2 раза больше. Поэтому у второй бригады на всю работу уйдёт в 2 раза меньше времени, чем у первой, т. е. $18 : 2 = 9$ (дн.). **100.** За 10 ч. Р е ш е н и е. Обозначим искомое время работы второго насоса как x ч. За 6 ч первый насос может выполнить $\frac{6}{15} = \frac{2}{5}$ всей работы, значит, второй насос за это время может выполнить $\frac{3}{5}$ всей работы, и производительность первого насоса относится к производительности второго насоса как 2 : 3. Поскольку производительность и время работы обратно пропорциональны, получим пропорцию $\frac{2}{3} = \frac{x}{15}$. Отсюда $x = 10$ (ч). **101.** 6 котов (если, конечно, они будут поедать мышей с той же скоростью). **102.** 24 см^2. **103.** 2) $\frac{4}{3}$; 3) 150 см^2; 4) $\frac{5}{3}$. **104.** Велосипедист. **105.** 1) Отношение массы молока в первом бидоне к массе молока во втором; 2) отношение массы молока во втором бидоне к массе молока в третьем; 4) отношение массы молока в первом и втором бидонах вместе к массе молока в третьем бидоне. **106.** а) 2 : 7; б) 5 : 13. **107.** 1) 1 : 5; 2) 5 : 31; 3) 1 : 1; 4) 1 : 3. **110.** 2) а) 8 и 12; г) 50 и 40; д) 1 и 4,6; е) $3\frac{3}{8}$ и $2\frac{1}{4}$. Р е ш е н и е. а) $2x + 3x = 20$, $5x = 20$, $x = 4$; $2x = 8$, $3x = 12$; г) $\frac{1}{4} : \frac{1}{5} = 5 : 4$; $5x + 4x = 90$, $x = 10$; $5x = 50$, $4x = 40$; д) $1{,}25x + 5{,}75x = 5{,}6$, $7x = 5{,}6$, $x = 0{,}8$; $1{,}25x = 1$, $5{,}6 - 1 = 4{,}6$; е) $\frac{1}{2} : \frac{1}{3} = 3 : 2$, $3x + 2x = 5\frac{5}{8}$, $x = 1\frac{1}{8}$; $3x = 3\frac{3}{8}$, $2x = 2\frac{1}{4}$. **111.** 1) Длины сторон 3,5 см и 5,6 см; 2) могут в а) и в). **112.** 1) 40 и 70; 2) 1,2 и 2,1; 3) 16 и 28; 4) 0,04 и 0,07; 5) 2 и 3,5; 6) 12 и 21. Р е ш е н и е. 5) $4x \cdot 7x = 7$, $28x^2 = 7$, $x = 0{,}5$, $4x = 2$, $7x = 3{,}5$; 6) $4x \cdot 7x = 252$, $28x^2 = 252$, $x^2 = 9$, $x = 3$, $4x = 12$, $7x = 21$. **113.** 225 р. и 360 р. **114.** Первой машинистке нужно дать 50 страниц, а второй — 40 страниц. **115.** 1) $3\frac{1}{3}$ стакана; 2) 40%. **116.** 1) 35,84 кг и 76,16 кг; 2) 33,2 кг; 3) 46,5 кг. **117.** 1) 18; 2) 7,5 и 10,5; 3) $C(45{,}5)$. **118.** $C(190)$. **119.** 16, 24, 40 и 48. Р е ш е н и е. $2x + 3x + 5x + 6x = 128$, $x = 8$; $2x = 16$, $3x = 24$, $5x = 40$, $6x = 48$. **120.** 1) С о в е т. Обозначьте первую часть как kx, тогда вторая часть будет равна mx, а третья — nx. Приравняйте сумму частей данному числу p, получите $kx + mx + nx = p$. Найдите x, а затем и сами части. 2) а) 30, 50 и 90; б) 1,5, 3,5 и 5; в) 8, 1,6 и 4,8; г) 5,4, 4,5 и 3,6. Р е ш е н и е. в) Приведём дроби к общему знаменателю и заменим их отношение отношением натуральных чисел $\frac{1}{3} : \frac{1}{15} : 0{,}2 = \frac{5}{15} : \frac{1}{15} : \frac{3}{15} = 5 : 1 : 3$. $5x + x + 3x =$

$= 14{,}4$, $x = 1{,}6$; $5x = 8$, $x = 1{,}6$, $3x = 4{,}8$. г) Приведём дроби к общему знаменателю и заменим их отношение отношением натуральных чисел, получим $0{,}2 : \frac{1}{6} : \frac{2}{15} = \frac{6}{30} : \frac{5}{30} : \frac{4}{30} = 6 : 5 : 4$, $6x + 5x + 4x = 13{,}5$, $x = 0{,}9$; $6x = 5{,}4$, $5x = 4{,}5$, $4x = 3{,}6$. **121.** 1) 25 : 2 : 1. 2) 437,5 г глины, 35 г песка и 17,5 г гипса. Решение. $25x + 2x + x = 490$, $x = 17{,}5$, $2x = 35$, $25x = 437{,}5$. **122.** 1) 1 : 2 : 3; 2) 45°, 60° и 75°. Решение. $3x + 4x + 5x = 180$, $x = 15$; $3x = 45$, $4x = 60$, $5x = 75$. **123.** 8,6 см, 12,9 см и 17,2 см. **124.** 1) Это египетский треугольник; 2) катеты равны 15,2 см и 11,4 см; площадь треугольника равна 86,64 см^2. **125.** Длины сторон треугольника равны 3 см, 7,5 см и 9 см. **126.** Могут в 1), 4). **127.** 1) 20%; 2) 6,0 кг воды, 1,5 кг ягод и 1 кг сахара. **128.** 1) 25%; 2) 67,5 г. **129.** 1) $58\frac{1}{3}$% яблок, $33\frac{1}{3}$% груш и $8\frac{1}{3}$% вишен; 2) 30% грузинского чая, 45% индийского и 25% китайского чая. **130.** 8000 р., 12 000 р. и 16 000 р. **131.** 299,5 р. **132.** $B(381)$, $C(407)$. **133.** 5, 10, 15, 20, 25. **134.** 176, 264, 330, 385. Совет. Замените отношения так, чтобы первое число в следующем отношении совпало со вторым числом в предыдущем: $2 : 3$, $3 : \frac{15}{4}$, $\frac{15}{4} : \frac{35}{8}$. Приведите дроби к общему знаменателю и запишите, в каком отношении нужно разделить число 1155. Затем, как обычно, введите x и получите ответ. **135.** На 24 км. **136.** 45 страниц и 35 страниц или 44 страницы и 36 страниц.

Глава 2. **Делимость чисел**

138. Можно в 2) и 3). **139.** 1) 130 : 13 = 10; 2) является. **140.** 1) 420 437 : 593 = 709; 2) является. **141.** 1) 3; 2) 16; 3) 45. **142.** 2) Можно упростить поиск делителей, называя пары делителей, дающих в произведении само число, — это 1, 16, 2, 8, 4. 3) а) 1, 2, 4; б) 1, 3, 9; в) 1, 12, 2, 6, 3, 4; г) 1, 32, 2, 16, 4, 8; д) 1, 50, 2, 25, 5, 10; е) 1, 125, 5, 25. **143.** 1) 500 : 100 = 5; 2) умножать натуральные числа на число 7; 3) а) 10 и 20; б) 34 и 170; в) 30 и 45. **144.** 1) Кратны числу 2; 2) кратны числу 10. **145.** 1) 108; 2) 50. **146.** 1) 6, 12, 42, 54, 72, 90;

2) все данные числа; 3) 14, 28, 56; 4) 2, 30. **147.** 1) 1, 48, 2, 24, 3, 16, 4, 12, 6, 8; 2) да; 3) 1, 2, 3, 6; 4) 6. **148.** 1) Да, это число 1; 2) да, это число 2. **149.** 1) 12, 24, 48, 60, 120; 2) 30, 60, 75, 90, 120, 150; 3) 60, 120. Наименьшее общее кратное равно 60. **150.** 1) Нельзя; 2) можно, это число 10. **151.** Доказательство. 1) и 2) следует из равенства $n : n = 1$, верного для любого натурального числа n; 3) b кратно c, значит, есть натуральное число n такое, что $b : c = n$, отсюда $b = cn$, a кратно b, значит, есть такое натуральное число m, что $a = bm$. Отсюда $a = (cn)m = c(nm)$. Значит, $a : c = mn$. Поскольку произведение натуральных чисел m и n само является натуральным числом, делаем вывод о том, что a делится на c. **152.** 1) 1; 2) у 1; 3) да, например, 2; 4) нет, ведь число должно быть равно произведению своего делителя на натуральное число, а наименьшим это произведение будет, когда второй множитель равен 1; при этом делитель равен самому числу. **153.** 1) Да, это следует из доказанного в задании 151 (3) утверждения о кратности. **154.** 1) 6 = НОД (12; 18); 2) 5 = НОД (15; 20). **155.** 1) 70 : 7 = 10, 126 : 7 = 18. 2) Делители числа 70 — это 1, 2, 5, 7, 14, 35, 70. Из них делителями числа 126 являются числа 1, 2, 7, 14. НОД (70; 126) = 14. **156.** 1) 1, 2, 3, 4, 6, 12; 2) НОД (48; 60) = 12, $\frac{48}{60} = \frac{4}{5}$. **157.** 1) 15; 2) 9; 3) 8; 4) 7. **158.** 1) 1; 2) 6; 3) 9; 4) 6; 5) 25; 6) 11; 7) 6; 8) 7; 9) 3. **159.** 1) $\frac{2}{5}$; 2) $\frac{1}{4}$; 3) $\frac{1}{3}$; 4) $\frac{2}{3}$; 5) $\frac{2}{7}$; 6) $\frac{4}{5}$; 7) $\frac{4}{45}$; 8) $\frac{7}{120}$; 9) $\frac{2}{5}$; 10) $\frac{1}{15}$. **160.** 1) 6, 12, 24, 54, 36, 72; 2) 1, 2, 3, 6; 3) 12, 24, 36, 72; 4) 1, 2; 5) 2; 6) 12. **161.** 1) Является; 2) нет; 3) 6. **162.** 1) 60, 120, 180, 240, 300, ... и 75, 150, 225, 300, 375, ... 2) Можно, НОК (60; 75) = 300. **163.** 1) 320; 2) 37; 3) 15; 4) 10. **164.** 1) 6; 2) 20; 3) 63; 4) 30; 5) 60; 6) 60. **165.** 1) $\frac{13}{40}$; 2) $\frac{46}{105}$; 3) $\frac{5}{18}$; 4) $\frac{5}{36}$; 5) $\frac{5}{72}$; 6) $\frac{31}{300}$. **166.** Да, раз у них есть общие кратные, например произведение всех этих чисел, то среди них должно быть и наименьшее. **167.** Например, 5, но можно сумму 5 и любого кратного 7 числа конфет. **168.** Печенье можно, а вафли нельзя. **169.** Можно 2) и 4). **170.** Через 2 ч. **171.** Через 180 м. **172.** 1) 9 ящиков; 2) 6 ящи-

ков. **175.** 180 карандашей. **176.** 3) 3551 не делится на 19. Решение. 1) $68\,601 = 39 \cdot 1759$; 3) $19 \cdot 186 < 3551 < 19 \cdot 187$, значит, нет такого натурального числа m, что $3551 = 19 \cdot m$, т. е. 3551 не делится на 19. **177.** Нельзя сказать, что число n делится на число d, если: 1) число n не является ни натуральным, ни нулём; 2) число d не является натуральным; 3) числа n и d натуральные, но нет такого натурального числа m, что $n = dm$. **178.** Можно, так как число учебников делится на 3. Например, каждому магазину дать по 12 пачек и ещё по 8 учебников. **179.** 1) $(15 \cdot 18) : 5 = 3 \cdot 18$; 6) $(64 \cdot 68 \cdot 65) : 5 = 64 \cdot 68 \cdot 13$. Совет. Не следует перемножать данные множители. Лучше разделить на 5 тот из них, который делится на 5. **180.** 1) $19 \cdot 30 = 3 \cdot (19 \cdot 10)$; 3) $63 \cdot 28 = 7 \cdot (63 \cdot 4)$. **181.** При подстановке в эту формулу вместо n любых натуральных чисел или нуля значение m будет чётным, и, кроме того, любое чётное значение m может быть получено по этой формуле. **182.** Является формулой чисел, делящихся: 1) на 7; 2) на 4; 3) на 8; 4) на 17. **183.** 1) $a = 3n$; 2) $a = 5n$; 3) $a = 13n$. **184.** Можно, так как одно из них наверняка является чётным. **185.** 2) Любой из делителей этого произведения является произведением делителя 8 и делителя 9. Составим таблицу, в верхней строке которой запишем делители 8, а в левом столбце — делители 9. На пересечении строки и столбца запишем произведение соответствующих чисел. В таблице указаны все делители, число которых оказалось равным $3 \cdot 4 = 12$.

1	2	4	8
3	6	12	24
9	18	36	72

186. 1) $3 \cdot 4 = 12$, 12 делится на 6, но ни 3, ни 4 на 6 не делятся. **187.** 1) 2, 4, 6; 2) 1, 3, 5; 3) 7, 14, 21; 4) 6, 15, 22. **188.** 2) В первом столбце оба слагаемых делятся на 7, во втором столбце ни одно из слагаемых не делится на 7, в третьем — одно из слагаемых делится, а другое не делится на 7. **189.** 1) Сумма делится на 4, и, значит, она делится на 2; 2) нет, например, $4 + 2$; 3) нет, например, ни 3, ни 5 не делятся на 2, но их сумма является чётным числом; 4) нет; 5) натуральное число m в этом случае равно произведению натуральных чисел n и k. Это произведение равно сумме k слагаемых, каждое из которых равно n. **190.** 1) $\frac{1}{3}$; 2) $\frac{8}{7}$; 3) $\frac{4}{7}$; 4) $\frac{1}{3}$. **191.** Любое нечётное число можно получить по этой формуле, подставив в неё вместо n соответствующее натуральное число. **192.** 1) а) $m = 5n - 4$; б) $m = 5n - 3$; 2) 1, 2, 3 или 4. **194.** 1) 2, 4, 6; 2) 1, 3, 5; 3) 13, 26, 39; 4) 12, 27, 40. **195.** 2) В первом столбце и уменьшаемое и вычитаемое делятся на 11, во втором — ни то, ни другое не делится на 11, в третьем — один из членов разности делится, а другой не делится на 11. **196.** Р е ш е н и е. 1) $\frac{65-13}{130-26} = \frac{13(5-1)}{13(10-2)} = \frac{4}{8} = \frac{1}{2}$. **197.** 2) $11x - 9y$; 4) $8k - 5$. **198.** 1) $7a + 4 = 7(a + 2) - 10$. И уменьшаемое, и вычитаемое делятся на 5, значит, на 5 делится и разность. 2) $a + b = (2000 + a) + (b - 999) + 1001 = (2000 + a) + (b - 999) + 11 \cdot 91$. Все три слагаемых делятся на 11, значит, и сумма делится на 11. **199.** 1) Ни 5, ни 3 не делятся на 2, а их разность делится. **200.** При подстановке числа 5 вместо x в левой части равенства получится число, которое не делится на 5, а в правой его части число 0, которое делится на 5. Значит, это равенство неверно, и число 5 не является корнем данного уравнения. **201.** 2) Число 1 не является корнем данного уравнения, при подстановке любого другого натурального числа вместо x левая часть равенства не будет делиться на это число, а правая делится на любое натуральное число. **202.** 1) а) 131 310 + 1; б) 130 000 + + 1300 + 11; 4) а) 22 066 090 − 1; в) 22 000 000 + 66 000 + 88 + 1. **203.** 1) б) 181 819 = 181 818 + 1, остаток 1; 4) в) 14 285 607 + 5, остаток 5. С о в е т. Найдите ближайшее меньшее натуральное число, которое делится на данное число. **205.** 1) 14; 2) 5; 3) 3; 4) 54; 5) 2; 6) 1. **206.** 1) $\frac{2}{3}$; 2) $\frac{3}{5}$; 3) $\frac{7}{9}$; 4) $\frac{7}{8}$; 5) $\frac{5}{7}$; 6) $\frac{3}{5}$. **207.** 17 автобусов, в каждом из которых 53 места. **208.** Набор стоит 17 р. или 1 р. (цена 1 р. маловероятна). **209.** 1) а) 14; б) 37; в) 23; г) 5; 2) а) $\frac{27}{275}$; б) $\frac{15}{19}$; в) $\frac{17}{56}$; г) $\frac{89}{1133}$; д) $\frac{113}{191}$; е) $\frac{89}{3345}$. **210.** 1) 414; 2) $\frac{3}{2}$; 3) 44,5; 4) $\frac{21}{25}$. **212.** 72. **215.** 1) 45; 2) 18; 3) 36. **219.** 4) Нет. **221.** Множитель, кратный 5, но не делящийся на 25, при умножении на чётное число даст один нуль.

Таких чисел 16. Множитель, кратный 25, при умножении на число, кратное 4, даст два нуля. Таких чисел 4. Таким образом, данное произведение заканчивается $16 + 2 \cdot 4 = 24$ нулями. **222.** Число 3 751 467 нечётное, значит, оба множителя должны быть нечётными. Разность двух натуральных чисел нечётна, если одно из них чётно, а другое — нет. В этом случае произведение этих чисел чётно. Значит, произведение разности и произведения не может быть равным нечётному числу 3 751 467. **223.** Чтобы произведение было нечётным, все множители должны быть нечётными. Сумма любых двух нечётных чисел — число чётное, а значит, и сумма 18 нечётных чисел — число чётное. Прибавив к нему 19-е нечётное число, получим нечётную сумму, которая не может быть равной чётному числу 98. **224.** 1) В этой сумме чётное число нечётных слагаемых, поэтому сумма нечётных слагаемых чётна и вся данная сумма чётна. 2) В сумме нечётное число нечётных слагаемых, поэтому сумма нечётных слагаемых нечётна, нечётна и вся данная сумма. **225.** Середина отрезка будет иметь натуральную координату, если координаты его концов имеют одинаковую чётность, т. е. либо оба чётные, либо оба нечётные. Возьмём точки A и B. Если чётность их координат одинаковая, то середина отрезка имеет натуральную координату. Если же координаты точек A и B имеют разную чётность, то чётность одной из них совпадает с чётностью координаты точки C. Взяв эту точку вместе с точкой C, получим отрезок, концы которого имеют координаты одинаковой чётности. **226.** 3, 4, 2, 4, 1, 3, 2. **227.** Доказательство. Пусть каждое из этих чисел при делении на 5 даёт остаток, равный r. Тогда каждое из них можно представить в виде суммы числа, кратного 5, и r, например $a = 5n + r$, $b = 5m + r$. Тогда $a - b = 5n + r - (5m + r)$. По правилу вычитания суммы получим $5n + r - 5m - r = 5n - 5m$. Это число делится на 5, что и требовалось доказать. **235.** 2) б) Нельзя, так как сумма этих цифр не делится на 9. **236.** Можно. **237.** Можно. **239.** Ошибся. **240.** 1) 225; 2) 630. **241.** Например, 1) 7365; 2) 5124. **242.** 75 780 или 25 785. **243.** 4 284 284 284 242. **244.** 1) 1; 2) 7. **251.** 1) На 1 и 3; 2) на 1, 2, 3 и 6; 3) на 1 и 3. **252.** 1) $\frac{135}{68}$; 2) $\frac{41}{33}$; 3) $\frac{17}{28}$; 4) $\frac{31}{67}$; 5) $\frac{39}{28}$; 6) $\frac{3}{2}$. **253.** 1) $\frac{5}{66}$; 2) $\frac{80}{21}$; 3) $\frac{3}{20}$; 4) $\frac{1}{36}$. **254.** 1) Может в б) и в). **255.** 4975. **256.** Верны 3) и 4). **258.** Нет. **259.** 9. **261.** 2) [1], [2, 3, 5, 7], [4, 9], [6, 8, 10]. **262.** Верны утверждения: 1), 3), 4), 5), 6), 7). **263.** 2) 11, 13, 31. **264.** Это число делится: 1) на 3, на 9; 2) на 3, на 9. **267.** Первое из них кратно 5, второе кратно 4, третье кратно 9. **268.** 1) В задании а); 2) б) $2^3 \cdot 7 \cdot 10 = 2^4 \cdot 7 \cdot 5$; в) $5^3 \cdot 9 \cdot 17 = 5^3 \cdot 3^2 \cdot 17$; г) $2^4 \cdot 21 \cdot 29 = 2^4 \cdot 3 \cdot 7 \cdot 29$. **269.** 1) а) $48 = 2^4 \cdot 3$; б) $112 = 2^4 \cdot 7$; 2) а) $\frac{8}{49}$; б) $\frac{25}{18}$; в) $\frac{27}{50}$; г) $\frac{4}{7}$. **270.** Является в 1), 3). **271.** 2) НОД $(k; m) = 30$, НОД $(m; n) = 10$, НОД $(k; n) = 10$; 3) НОК $(k; m) = 90$, НОК $(m; n) = 360$, НОК $(k; n) = 120$; НОК $(k; m; n) = 360$. **272.** 1) а) $1, p, p^2$; б) $1, q, q^2, q^3$; в) $1, p, p^2, q, q^2, q^3, pq, pq^2, pq^3, p^2q, p^2q^2, p^2q^3$; 2) а) p; б) q^2; в) pq; 3) а) p^2; б) q^3; в) p^2q^3. **273.** 1) $2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 79$; 2) $3^2 \cdot 401$; 3) $5^3 \cdot 53$; 4) $2^2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 181$; 5) $2^2 \cdot 5^2 \cdot 277$; 6) $2^3 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 269$. **274.** Доказательство. Общий делитель составлен из общих простых множителей, на которые раскладываются данные числа. Показатель степени такого простого множителя меньше или равен показателям степени, с которыми он входит в разложения чисел. В наибольшем общем делителе этот показатель не меньше. Значит, в общем делителе нет ни одного простого множителя, которого нет в наибольшем общем делителе, следовательно, наибольший общий делитель кратен любому общему делителю. **275.** 1) 6; 2) 10; 3) 36; 4) 15; 5) 120; 6) 50. **276.** 1) $\frac{31}{73}$; 2) $\frac{676}{17}$; 4) $\frac{87}{95}$; 6) $\frac{66}{155}$; 7) 111; 8) 10 001; 9) $\frac{41}{37}$. **277.** 3) а) $2^5 \cdot 3^5$; б) $2^3 \cdot 3 \cdot 5^3 \cdot 11 \cdot 13$; в) $2^3 \cdot 3^3 \cdot 5 \cdot 11 \cdot 31 \cdot 41$; г) $2^5 \cdot 3^2 \cdot 5 \cdot 7^2 \cdot 17^2$. **278.** $\frac{7514}{10\,608}$, $\frac{1014}{10\,608}$, $\frac{867}{10\,608}$. **279.** 1) $\frac{161}{29^9 \cdot 37^6}$; 2) $\frac{33}{13^5 \cdot 23^4 \cdot 2}$; 3) $\frac{43}{1944}$; 4) $\frac{71}{72\,000}$; 5) $\frac{709}{3960}$; 6) $\frac{4}{1\,009\,125}$. **280.** 1) $\frac{163}{2 \cdot 3^6 \cdot 5^2}$; 2) $\frac{64}{7^2 \cdot 3^4 \cdot 5^2}$; 3) $\frac{151}{65\,000}$; 4) $\frac{4307}{262\,548}$. **281.** 1) $\frac{15}{28}$; 2) $\frac{110}{819}$; 3) $\frac{105}{68}$; 4) $\frac{77}{9}$. **282.** 3). **283.** 37. **284.** 2400 м. **285.** 1) $10 = 7 + 3$; 2) $36 = 31 + 5$; 3) $54 = 47 + 7$. **286.** 5 лет. **287.** Получили 210. **289.** 1) Простое число взаимно просто с любым отличным от него натуральным числом. 4 и 9, 8 и 9, 9 и 10 — пары взаимно простых составных чисел. **290.** Имеют в 1), 3), 5). **291.** 1) а) 1 и 77; б) 6 и 60; в) 3 и 63; г) 72 и 2160. **292.** $\frac{1}{9}$, $\frac{2}{9}$, $\frac{4}{9}$, $\frac{5}{9}$, $\frac{7}{9}$, $\frac{8}{9}$. **293.** Нет. **294.** Нет, например, 1, 2, 4. **295.** Нет. **296.** Взаимно просты все пары, в которые входит 1. Кроме того, взаимно просты пары чисел, одно из которых является степенью числа 2, а другое — степенью числа 5. **297.** 1) $5^6 \cdot 3^5$; 2) $2^4 \cdot 5^5 \cdot 7$; 3) 121 000; 4) 1372. **298.** 1) 30; 2) 12; 3) 170; 4) 192; 5) 2700; 6) 17 787. **299.** 1) 6; 2) 36; 3) 180; 4) 126; 5) 900; 6) 540. **300.** 1) 473; 2) 210; 3) 1270; 4) 180; 5) 212; 6) 91. **301.** 1) $\frac{4}{11} < \frac{3}{7}$; 2) $\frac{7}{13} < \frac{2}{3}$; 3) $\frac{4}{21} < \frac{7}{28}$; 4) $\frac{13}{24} > \frac{17}{36}$; 5) $1\frac{11}{30} < 1\frac{23}{50}$; 6) $1\frac{14}{59} < 1\frac{2}{5}$. **302.** 1) $\frac{71}{105}$; 2) $\frac{6}{5}$; 3) $\frac{98}{3}$; 4) $\frac{18}{11}$. **305.** Верно в 1), 3), 4), 5), 6). **306.** На 15, 21, 35 и 105. **307.** Верны утверждения 1), 2) и 5). **308.** 450 и 495. **309.** 1) а) $x = 1$, $y = 4$; б) $x = 4$, $y = 7$; в) $x = 2$, $y = 7$; г) $x = 8$, $y = 3$. 2) Нет. **310.** 7 задач. **311.** 1) Числа простые; 2) НОД (864; 875) = НОД (875; 9) = 1. **312.** 1) $44 = 2^2 \cdot 11$, $117 = 3^2 \cdot 13$, $175 = 5^2 \cdot 7$; НОК (44; 117; 175) = $2^2 \cdot 3^2 \cdot 5^2 \cdot 7 \cdot 11 \cdot 13$ = 900 900. 2) $44 \cdot 117 \cdot 175$ = НОК (44; 117; 175). 3) Наименьшее общее кратное попарно взаимно простых чисел равно их произведению. **313.** 1) 25; 2) 1; 3) $11\frac{1}{2}$; 4) 80; 5) 6; 6) 14; 7) $\frac{55}{28}$; 8) 1. **315.** 1) 2; 2) $\frac{9}{23}$. **316.** Совет. Обратите внимание, что каждое слагаемое во второй сумме в два раза больше, чем в первой. **317.** 1) 24; 2) 90. **318.** 1) При $a = 2$ это неверно; 2) это неверно, например, при $a = 1$; 3) в этом случае НОД $(a, b) > 1$. Поскольку НОД (a, b) = НОД $(a - b, b)$ = НОД $(a + b, b)$, все указанные дроби можно сократить на НОД (a, b); 4) это неверно, например, при $a = 3$, $b = 5$. **320.** 1) 8; 2) 7, 8. **321.** 32 ученика в 6 «А», 36 учеников в 6 «Б», 34 ученика в 6 «В». **322.** 1) а) Множество натуральных чисел; б) множество чётных чисел, больших нуля; в) множество чисел, кратных 10; г) множество делителей числа 18; д) множество чисел, больших 3, которые при делении на 3 дают в остатке 1; е) множество двузначных чисел, кратных 13. 2) Бесконечные: а), б), в), д); конечные г), е). **323.** 1) а) 4, 3, 6; б) 30, 60, 90; в) невозможно; г) 2, 3, 6; д) 1; е) 1, 3. 2) а) 6; б) бесконечное множество; в) 0; г) 4; д) 1; е) 2. **325.** 1) $\frac{1}{5}$, $\frac{2}{5}$, $\frac{3}{5}$, $\frac{4}{5}$; 2) $\frac{4}{1}$, $\frac{4}{2}$, $\frac{4}{3}$, $\frac{4}{4}$. **326.** 1) $m = 2n - 1$;

2) $m = 5^n$; 3) $m = 3n$; 4) $m = n^2$; 5) $m = n^3$; 6) $m = 1 + 5n$. **327.** 1) Пустыми являются множества а) и в). **328.** 1) 1, 5, 25, 125; 2) 1 и 5. **329.** В этом множестве 6 элементов. **330.** Верны утверждения 1), 2), 5), 6). **332.** 1) Множество, в котором только один элемент — число 2; 2) A; 3) множество чисел, кратных 63; 4) множество чётных двузначных чисел; 5) $\varnothing$; 6) множество квадратов. **333.** Во всех формулах буквы n и k принимают натуральные значения. 1) $m = 6n$; 3) $m = 63n$; 5) $m = \dfrac{2n}{3k-1}$. **335.** Ни одного, один или два. **337.** 1) Множеством учеников класса; 2) 29 учеников. **338.** Принадлежат: 1) 31 и 132; 2) 10 и 123; 3) 11, 6 и 2; 4) квадрат и равносторонний треугольник; 5) 1 и 3. **340.** 1) а, г, е, и, к, м, р, т; 2) а, и, к, м, т. **341.** Является в 1), 4), 5). **342.** 1) Множество натуральных чисел; 2) множество прямоугольников или множество ромбов; 3) множество обыкновенных дробей; 4) множество чисел 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6; 5) множество натуральных чисел; 6) множество натуральных чисел. **344.** $A = D = C$, $E = F$. **345.** а)—г) $A \cap B \neq \varnothing$; б) $A \subset B$; в) $B \subset A$; г) $A = B$; д) $A \cap B = \varnothing$. **348.** У 14 школьников. **349.** 2) а) $\varnothing$; б) множество чисел, кратных 105; в) множество ромбов; г) $\left\{\dfrac{2}{7}, \dfrac{4}{7}, \dfrac{6}{7}\right\}$; д) $\{5\}$. **351.** 3) а) $m = 15n$; б) $m = 6n$; в) $m = 10n$; г) $m = 30n$. **352.** 1) $\{1, 3, 5, 15\}$; 2) $\{1, 3, 5, 7, 9, 15, 21, 35, 45, 63, 105, 315\}$; 3) $\{1, 3, 5, 15\}$; 4) $\{1, 3, 5, 15\}$; 5) $\{1, 3, 5, 15\}$. **355.** 1) $a \cdot 0 = 0$; 2) $a + 0 = a$. **356.** 4). **357.** 1) 34; 2) 91.

Глава 3. **Отрицательные числа**

363. A и F, C и G, D и K. **368.** 1) Фигура, симметричная углу ABC относительно точки B, является углом, вертикальным углу ABC. **369.** Окружность такого же радиуса, касающаяся данной окружности в точке P. **371.** $ACKM$, $ACDF$, $FDKM$. **373.** Сам прямоугольник $ABCD$. **374.** 1, 3, 5, 6, 7, 9. **375.** 1) Середина отрезка; 2) центр окружности; 3) точка пересечения диагоналей. **376.** 1) D, F, A, C; 2) ED, CB, DA; 3) $\triangle DOE$. **377.** Может, если точка O лежит на прямой AB. **378.** Доказательство. При симметрии образуются пары взаимно симметричных вершин. У треугольника и пятиугольника одна вершина при этом окажется «лишней», не имеющей пары. Значит, она должна быть симметрична сама себе, т. е. являться центром симметрии. Но тогда стороны многоугольника, выходящие из этой вершины, составляют отрезок и не являются звеньями ломаной, образующей многоугольник. **380.** Второй. **381.** Второй. **382.** Первый. **383.** Первый. **384.** 1) 10 °С; 2) −15 °С. **388.** а) $A(-9)$, $B(-7)$, $C(-5)$, $D(-3)$, $E(-1)$, $K(3)$, $L(6)$, $M(9)$, $N(12)$; б) $M(-1{,}8)$, $E(-1{,}4)$, $D(-1)$, $F(-0{,}4)$, $K(1{,}4)$, $L(2)$, $N(2{,}4)$; в) $K(-5{,}5)$, $B(-4{,}5)$, $A(-3)$, $M(5)$. **394.** 1) $K_1(-3{,}071)$; 2) $T_1\left(\frac{2}{3}\right)$; 3) $M_1(9)$; 4) $E_1(-1)$; 5) $O(0)$; 6) $H_1\left(-6\frac{5}{11}\right)$. **395.** 1) −3 и −2; 2) −3 и 2; 3) −2 и 3; 4) −2 и 2. **396.** 1) а) $A(0)$; б) $A(5)$; в) $A(-3)$; 2) а) $B(-6)$; б) $B(1)$; в) $B(-9)$. **397.** 1) $A(0)$, $B(7)$, $C(1)$; 2) $A(-7)$, $B(0)$, $C(-6)$; 3) $A(-1)$, $B(6)$, $C(0)$. **398.** 1) а) $K(-6)$; б) $K(-4)$; в) $K(-8)$; г) $K(-10)$; 2) а) $K(5)$; б) $K(7)$; в) $K(-1)$; г) $K(-3)$. **399.** 1) $M(-2)$; 2) $M(-3{,}5)$. **400.** 1) $N(-3)$; 2) $N(0)$; 3) $N(-8)$; 4) $N(-20)$. **401.** Верно 1), 2), 3), 5), 7), 8). **405.** $A(-2{,}5)$, $A_1(2{,}5)$, $B(0{,}5)$, $B_1(-0{,}5)$. **406.** 1) $A(-3)$; 2) $A(5)$. **408.** Верны все неравенства. **410.** 2) $7\frac{2}{3} > 0$; 3) $-3 < 0$; 4) $-5 > -7$; 5) $6{,}9 > -2$; 6) $-1\frac{2}{9} < 2\frac{3}{7}$. **411.** 2) −100; −6; −4; −3,5; 6; 15. **413.** 1) $8 = |-3| + |5|$; 2) $9 = |7| + |-2|$; 3) $2 = |-5| - |-3|$; 4) $2 = |5| - |3|$. **414.** 1) $|m| + |n|$; 2) $|n| - |m|$. **415.** 6) $-3\frac{5}{8}$. **416.** 8) $-0{,}25 = -\frac{1}{4}$; 9) $-\frac{1}{3} < -0{,}3$. **417.** 1) а) −10; б) −13; в) −13,5; г) −13,49; д) −13,487; 2) а) −70; б) −74; в) −73,9; г) −73,83; д) −73,828. **418.** 1) $-4\frac{2}{3} \approx -4{,}67$; 2) $-\frac{5}{6} \approx -0{,}83$; 3) −15,38; 4) −1,29. **424.** 4) $\{-3, -2, -1\}$; 5) $\{-1; 0\}$. **425.** 2) −10 и −9; 3) −1 и 0; 4) −6 и −5. **426.** 1) $5{,}3 > 0$; 2) $-41{,}3 < 0$; 3) $a < 0$; 4) $c \geqslant 0$; 5) $b > 0$; 6) $m \leqslant 0$. **429.** 4 или −4. **430.** 3) Нуля. **437.** 1) 2,7; 2) $-2\frac{1}{5}$; 3) 7,03; 4) $-7\frac{2}{9}$; 5) a; 6) $-b$. **439.** 2) а) $x = -3$; б) $x = -5{,}2$, $x = 5{,}2$; в) нет корней; г) $x = 3\frac{2}{7}$. **441.** 12) $-0{,}36 > -0{,}(360)$; 13) $-0{,}(75) < -0{,}756$; 14) $-0{,}(47) < -0{,}(473)$. **444.** 1) 0; 2) 0; 3) 1, 2; 4) 0; 5) 1, 2 или 3; 6) 1, 2, 3, 4 или 5. **445.** 1) $|a|$; 2) $2|a|$; 3) $|a|$; 4) $4|a|$. **446.** Верно в 1), 4), 5), 6), 7). **447.** 1) Можно; 2) нельзя. **448.** 1) Можно; 2) нельзя. **449.** 1) $A(-5)$; 2) $A(6)$. **450.** 1) На

12 вправо; 2) на 16 влево. Поскольку модуль не изменился, координата точки заменилась на противоположную. **451.** 1) 0; 2) 2; 3) 0; 4) 0. **452.** 1) 9; 2) −1; 3) −2; 4) 2; 5) 5; 6) 1; 7) 3; 8) 0; 9) 0. **455.** 1) 1; 2) −9; 3) −8; 4) −2; 5) −5; 6) −3; 7) 3; 8) 0; 9) 0. **456.** а) −8; б) −15; в) 6; г) −27; е) −7; ж) −30; з) 30. **457.** а) 19 + 23 − 53 = −11; б) 24 − 66 + + 39 = −3; в) 37 − 42 + 50 = 45; г) −37 + 21 + 27 − 38 = −27; д) −30 + + 35 + 39 − 76 = −32; е) −7 + 25 + 17 − 38 − 23 = −26. **458.** 1) −12; 2) 10; 3) −141; 4) −210; 5) −225; 6) −16; 7) −13; 8) 22. **459.** 1) 4 − 9 + + 10 = 5; 2) −3 + 4 + 7 = 8; 3) 2 + 3 − 5 + 7 = 7; 4) −1 − 6 + 15 − 5 = 3. **460.** 1) а) −10 + 10 + 8; б) −10 + 20 − 2; в) −10 − 1 + 19. 2) а) −10 + 1 + + 2; б) −10 + 5 − 2; в) −10 − 2 + 5. **461.** 1) 3; 2) −20; 3) −7; 4) −10; 5) 3; 6) −1. **462.** 1) 10; 2) 22; 3) 34; 4) −10; 5) 2; 6) 63. **463.** 1) −24 + 33 + (−8) + + (−12); 2) 56 + 32 + (−70) + (−65); 3) −61 + (−29) + 12 + 7; 4) 33 + 87 + + (−13); 5) −45 + (−24) + 15; 6) −29 + 71 + (−95). **470.** 1) $\frac{47}{72}$; 2) $\frac{14}{105}$; 3) $-\frac{1}{2}$; 4) $-\frac{5}{22}$; 5) $13\frac{19}{21}$; 6) $-43\frac{37}{210}$; 7) $-1\frac{53}{3150}$; 8) $-5\frac{6821}{6930}$; 9) $\frac{1063}{1110}$. **471.** 1) а) $4 + \frac{4}{9}$; б) $-5 + \frac{5}{9}$; в) $7 + \frac{3}{4}$; г) $-8 + \frac{1}{4}$; д) $1 + \frac{2}{7}$; е) $-2 + \frac{5}{7}$; ж) $5 + \frac{4}{11}$; з) $-6 + \frac{7}{11}$; 2) а) $5 - \frac{5}{9}$; б) $-4 - \frac{4}{9}$; в) $8 - \frac{1}{4}$; г) $-7 - \frac{3}{4}$; д) $2 - \frac{5}{7}$; е) $-1 - \frac{2}{7}$; ж) $6 - \frac{7}{11}$; з) $-5 - \frac{4}{11}$. **473.** 6) 0,2; 9) $\frac{1}{2}$; 10) $-1\frac{2}{9}$. **474.** 1) 0,9; 2) −4,4; 3) −2,1; 4) −4; 5) −16; 6) 0. **476.** 1) $-2\frac{19}{84}$; 2) $-5\frac{26}{45}$; 3) $-2\frac{29}{105}$; 4) $-3\frac{7}{27}$; 5) $\frac{113}{135}$; 6) $-\frac{55}{144}$. **477.** 4) $x = 0{,}05$; 6) $x = 188$; 7) $x = 4{,}3$; 8) $x = -\frac{17}{420}$. **478.** 1) −364,5; 2) −835; 3) 111; 4) −45,9; 5) 7,84; 6) $-1\frac{12}{23}$. **480.** Все утверждения верные. **486.** 1) $a < -7$; 2) $a < 5$. **487.** Может. **488.** 1) $(-7) \cdot 5$; 2) $\left(-\frac{3}{4}\right) \cdot 4$; 3) $(-a) \cdot 5$; 4) $(-2c) \cdot 3$. **489.** 2) $-13\frac{2}{7}$; 3) −6,42; 4) $-\frac{9}{2}$; 5) −8,7; 6) $-\frac{2}{3}$. **490.** 1) 3084; 2) 401 000; 3) 35; 4) $\frac{2}{3}$; 5) 1620; 6) 51,7. **491.** 1) −33,48; 2) 2101; 3) −29,45; 4) $\frac{6}{5}$;

5) $-\frac{9}{5}$; 6) 11. **495.** 1) $-\frac{89}{60}$; 2) 2,1; 3) −1750; 4) $-\frac{1350}{11}$. **496.** Положительным в 1), 2), 3), 5), 6), 7), 9). **498.** 1) $\frac{5}{36}$; 2) $-\frac{64}{49}$; 3) $\frac{32}{15}$; 4) −10. **499.** 1) а) $(-5)^n > (-6)^n$; б) $5^n > (-6)^n$; в) $(-5)^n < 6^n$. 2) а) $(-5)^n < (-6)^n$; б) $5^n < (-6)^n$; в) $(-5)^n < 6^n$. **500.** Чётным в 1), 2), 5); нечётным в 3); невозможно определить в 4) и 6). **501.** а) −69; б) 0,159; в) 77; г) −23; д) 1; е) −56; ж) −9,1; з) 0. **502.** 1) $-4x - 4y + 28$; 2) $-14 + 2a + 2b$; 6) $-15c + 10d - 12$. **503.** 1) $2(x - 2y + 3)$; 2) $3(3c - a - 2b)$; 4) $-16x$; 5) $5{,}8a$; 6) $0{,}9b$. **504.** 1) $-3b$; 2) −1,3; 3) $\frac{2}{35}a$; 4) $-1{,}8d - \frac{1}{9}$; 5) $-2y - 7{,}8$; 6) $-0{,}89z + 11{,}2x$; 7) $\frac{2}{9}b - 1\frac{2}{7}c$; 8) $-\frac{1}{2}m$. **505.** 1) $6c + 10$; 2) $9{,}1 - 2b$; 3) 0; 4) $-5c + 2d$; 5) $-2x + 10y$; 6) $6a - 6b$; 7) $9c - 2{,}6d$; 8) $-0{,}5m + 0{,}6$. **506.** 1) $\frac{3}{2}$; 2) $\frac{15}{4}$. **508.** 1) −8,76; 2) 38,91; 3) 0,41; 4) $7\frac{2}{7}$; 5) $-4\frac{1}{3}$; 6) 0,5. **510.** 4) $-3\frac{2}{15}$; 5) $-6\frac{1}{3}$; 9) 0,0005; 10) 0. **511.** 1) $3{,}2(2 + 5) + 2{,}8(11 - 4) = 7(3{,}2 + 2{,}8) = 42$. **512.** 1) 0 и 1; 2) 0, 1 и −1; 3) 0 и 1; 4) 0; 5) для неположительных; 6) для неотрицательных. **515.** Отрицательным в 1), 3) и 6); положительным в 4) и 5), нулём в 2). **516.** 1) Верно; 2) нет. **517.** 1) $|a + b| \leqslant |a| + |b|$; 2) $|a - b| \geqslant |a| - |b|$. **519.** 3) 1 и −1; 4) у нуля. **520.** 3) 46; 6) −8; 7) 2; 8) 1; 9) −0,9. **523.** 1) −22,5; 2) 18,025; 3) −12,3; 4) 1,7; 5) 3,7; 6) 0,4. **524.** 1) −9; 2) 2,3; 3) $\frac{2}{7}$; 4) $-\frac{1}{6}$; 5) −4; 6) $\frac{5}{18}$; 7) $-\frac{6}{5}$; 8) −0,1. **525.** 1) 0,355; 2) −4; 3) 1; 4) −3; 5) −1,2; 6) −1; 7) 26; 8) $\frac{10}{89}$. **526.** Совет. Перед тем как подставлять данные значения, упростите выражение. **527.** 1) −12,83; 2) $123\frac{23}{25}$; 3) $3\frac{1}{3}$; 4) $-\frac{16}{75}$. **529.** 1) A — множество делителей числа −35, $A = \{-35, -7, -5, -1, 1, 5, 7, 35\}$; B — множество делителей числа −20, $B = \{-20, -10, -5, -4, -2, -1, 1, 2, 4, 5, 10, 20\}$. 2) $A \cap B = \{-5, -1, 1, 5\}$; $A \cup B = \{-35, -20, -10, -7, -5, -4, -2, -1, 1, 2, 4, 5, 7, 10, 20, 35\}$. 3) Сохраняет. **530.** Совет. В заданиях 5—8 при поиске наибольшего делителя используйте свойство делимости разности.

1) $\frac{5}{7}$; 2) $-\frac{7}{4}$; 3) $-\frac{1}{5}$; 4) $-\frac{112}{9}$; 5) $-\frac{39}{28}$; 6) $-\frac{31}{67}$; 7) $-\frac{66}{155}$; 8) $\frac{41}{37}$. **534.** 1) $-\frac{7}{15}$; 2) $-\frac{48}{7}$; 3) $-\frac{1}{50}$; 4) $-\frac{1}{4}$. **535.** 1) $\frac{-5}{6}$; 2) $\frac{-2}{3}$; 3) $\frac{-5}{9}$; 4) $\frac{5}{6}$; 5) $\frac{-3}{4}$; 6) $\frac{-5}{9}$. **536.** 1) $\frac{8}{105}$; 2) $\frac{-4}{3}$; 3) $\frac{-4}{1}$; 4) $\frac{259}{50}$. **537.** $\boldsymbol{Z} \subset \boldsymbol{Q}$, $\boldsymbol{N} \subset \boldsymbol{Z}$. **538.** 2) Неположительные целые числа; 3) дробные числа. **539.** 1) $\frac{13}{15}$; 2) 8; 3) $45\frac{5}{7}$; 4) $\frac{281}{400}$. **540.** 1) $43\frac{5}{6}$; 2) $-\frac{5}{9}$; 3) 602; 4) 8,79. **541.** Одинаковы в 1) и 4). **542.** 1) -19; 2) $\frac{1}{3}$; 3) $-10\frac{2}{3}$. **543.** 1) 16,3; 2) 377.

Глава 4. **Формулы и уравнения**

548. 1) -4; 2) 2; 3) $-2{,}5$; 4) 4; 5) -5; 6) 90. **549.** Один корень в 1), 2), 4); ни одного корня в 3) и 5); два корня в 6). **551.** 1) $-\frac{19}{4}$; 2) $-\frac{2}{3}$; 3) -42; 4) 0,5; 5) $-\frac{39}{14}$; 6) 2,7. **552.** 1) $-5{,}2$; 2) -29; 3) -2; 4) 0,23; 5) $-0{,}375$; 6) $-7{,}4$. **553.** 1) $-\frac{34}{13}$; 2) 2; 3) 1,5; 4) 0; 5) $-\frac{10}{11}$; 6) 3. **555.** Прав ученик, составивший уравнение 1). **556.** 1) б); 2) а). **557.** 1) Пусть число верных ответов n, тогда $7n - 12(30 - n) = 77$. 2) Пусть груша стоит x р., тогда $8x = 12(x - 5)$. 3) Пусть каждый получил x орехов, тогда $3(x - 4) = x$. 4) Пусть сыну x лет, тогда $3(x + 10) = 7x + 10$. 5) Пусть сыну x лет, тогда $2(x + 15) = 5x + 15$. **558.** 1) 90 и 9; 2) 77 и 7; 3) 24 л; 4) 44 кг и 52 кг. **559.** 1) Пусть расстояние AB равно x км, тогда $\frac{x}{20} - \frac{x}{24} = 2$. 2) Пусть скорость лодки x км/ч, тогда $6(x + 2) = 8(x - 2)$. 3) Пусть скорость течения x км/ч, тогда $13(22 + x) = 15(22 - x)$. 4) Пусть второй поезд догонит первый через x ч, тогда $36(x + 2) = 48x$. 5) Пусть на теплоходе туристы проехали x км, тогда $\frac{x}{25} = \frac{x + 420}{60}$. 6) Пусть брат встретил сестру через x ч, тогда $\left(5 : 1\frac{1}{4}\right)x + 5x = 21$. **560.** 1) 240 км; 2) 14 км/ч; 3) $1\frac{4}{7}$ км/ч; 4) через

6 ч; 5) 1020 км; 6) 2 ч 20 мин. **561.** 1) 3, 4, 5, 6, 7; 2) -8, -6, -4, -2; 3) -9, -7, -5, -3; 4) -18, -15, -12. Совет. Обозначьте меньшее число буквой n. **563.** 1) 320 р.; 2) 15 ч. **564.** -21. **565.** 25 учеников. **566.** 15 марок. **567.** 28 лет, 42 года. **568.** 1) d; 2) $0{,}12d$; 3) $c = 0{,}88d$. **569.** 1) $a = 1{,}03b$; 2) $a = 0{,}93b$; 3) $a = 0{,}65b$; 4) $a = 1{,}77b$. **570.** 1) а) На 100%; б) на 50%; 2) а) на 50%; б) на $33\frac{1}{3}\%$; 3) а) на 25%; б) на 20%.

571. 1) На 25%; 2) на 20%; 3) на $11\frac{1}{9}\%$; 4) на 10%. **572.** 1) 40 кг; 2) а) 15 ц; б) 140 кг. Решение. 1) Пусть масса сырого кофе x кг, тогда $0{,}875x = 35$, $x = 40$ (кг). 2) а) Пусть масса хлеба x ц, тогда $0{,}7x = 10{,}5$, $x = 15$ (ц); б) $200 \cdot 0{,}7 = 140$ (кг). **573.** 1) 60%; 2) 40%. **574.** 1) 0,6 кг; 2) 2,8 кг. Решение. 1) Пусть нужно добавить x кг серебра, тогда $\frac{x}{1{,}4 + x} \cdot 100 = 30$, $x = 0{,}6$ (кг). 2) Пусть нужно добавить x кг золота, тогда $\frac{1{,}2}{1{,}2 + x} \cdot 100 = 30$, $x = 2{,}8$ (кг). **575.** 1) а) $12{,}5\%$; б) $28{,}125\%$; в) $53{,}125\%$; 2) 2 т. **576.** 1) 25 г; 2) 13 г; 3) 4 г. **577.** 1) 5%; 2) 20%; 3) $11\frac{1}{9}\%$; 4) 20%; 5) 25%. **578.** Уменьшилась на 1%. **579.** 1) 11 340 р.; 2) 10 260 р. **580.** Во втором магазине. **581.** 1) 33 тыс. р.; 2) 36 300 р.; 3) 39 930 р. **582.** На $17{,}7\%$. **583.** 1) 45%; 2) 30%. **584.** 1) 1 кг; 2) 2 кг. Решение. 1) Пусть в сплаве было x кг золота, тогда $\frac{x + 1}{4 + 1} \cdot 100 - \frac{x}{4} \cdot 100 = 15$, $20x + 20 - 25x = 15$, $5x = 5$, $x = 1$ (кг). 2) Пусть в сплаве было x кг серебра, тогда $\frac{x}{4} \cdot 100 - \frac{x}{4 + 1} \cdot 100 = 10$, $25x - 20x = 10$, $5x = 10$, $x = 2$ (кг). **585.** 6 кг. Решение. Пусть меди в сплаве стало x кг, тогда $\frac{x}{12} \cdot 100 - \frac{x - 2}{10} \cdot 100 = 10$, $25x - 30x + 60 = 30$, $-5x = -30$, $x = 6$ (кг). **586.** 1) 50 г; 2) 60 г. Решение. 1) Пусть нужно добавить x г сахара, тогда $\frac{25 + x}{100 + x} \cdot 100 = 50$, $\frac{25 + x}{100 + x} \cdot 2 = 1$, $50 + 2x = 100 + x$, $x = 50$ (г). 2) Пусть нужно добавить x г воды, тогда $\frac{120 \cdot 0{,}75}{120 + x} \cdot 100 =$

$= 75 - 25$, $\frac{90}{120 + x} \cdot 2 = 1$, $90 \cdot 2 = 120 + x$, $x = 60$ (г). **587.** 50 г. **588.** 1) 320 г; 2) 17 г. Решение. 1) Пусть нужно добавить x г воды, тогда $\frac{30 \cdot 0{,}7}{30 + x} \cdot 100 = 6$, $x = 320$ (г). 2) Пусть нужно взять x г эссенции, тогда $\frac{0{,}7x}{200} \cdot 100 = 6$, $7x = 120$, $x \approx 17$ (г). **589.** 36 учеников. **590.** 40%. **591.** Примерно на 16%. **592.** 30%. **593.** 10 кг. **594.** 96, 120 и 168. **600.** 20,7 м. **601.** Приблизительно 424 м. **602.** 1) $\frac{20}{7}$ м; 2) $\frac{40}{7}$ м; 3) 10 м. **603.** На рисунке 97, *а* синяя линия состоит из двух полуокружностей. Обозначим длину диаметра красной полуокружности буквой d, а длины диаметров синих полуокружностей d_1 и d_2. Тогда $d = d_1 + d_2$. Длина красной полуокружности равна $0{,}5\pi d$, а длина синей линии равна сумме $0{,}5\pi d_1 + 0{,}5\pi d_2$. Вынесем за скобки общий множитель $0{,}5\pi(d_1 + d_2) = 0{,}5\pi d$. Значит, длины красной и синей линий равны. **604.** 1) 15,7 см; 2) 62,8 см; 3) 4,5 см; 4) 11,5 см. **605.** 1) $r = \frac{C}{2\pi}$; 2) а) 5,6 дм; б) 7,5 дм; в) 4,4 дм; г) 4 см. **606.** 1) На 2π см; 2) приблизительно на 1 м. **607.** Приблизительно 13 км/с. **608.** 4) 120°. **610.** 1) 28,3 см^2; 2) 1,13 см^2; 3) 13,5 дм^2; 4) 68,4 см^2. **611.** а) В 4 раза; б) в 9 раз; в) в n^2 раз. **612.** 1) На 10%; 2) на 21%. **613.** 544 г. **614.** 5 см. Совет. Сначала найдите квадрат радиуса. **615.** 1) 13 см^2; 2) 50 см^2; 3) 95 см^2; 4) 28 см^2; 5) 20 см^2; 6) 78 см^2. Совет. Сначала найдите радиус круга. **616.** Приблизительно 132 м^2. **617.** 1) 28,26 см^2; 2) на 21,5%; 3) на 21,5%. **618.** 2) 120°. **619.** $\frac{1}{3}$. **620.** 1) 3,93 см; 2) 9,81 см^2. **621.** 1,91 см; 1,9 см^2. **622.** а) 41,1 см^2; б) 9,1 см^2; в) 9,1 см^2. **623.** 1) Приблизительно 29 м^2; 2) приблизительно на 2 м. **624.** Пролезет. **626.** 1000 оборотов. **627.** Существует. **632.** 4) Треугольники равнобедренные. Прямая AB делит их на прямоугольные треугольники. **634.** 1) Все; 2), 3), 4) а), в)—е). **636.** Ось симметрии угла содержит его биссектрису. **637.** 1) а) Равнобедренный; б) равносторонний. 2) Нет. Если у треугольника есть две оси симметрии, то одна из его сторон равна каждой из двух других, т. е. треугольник равносторонний. Но равносторонний треугольник имеет 3 оси симметрии. **638.** 1) а) Квадраты; б) ромбы или прямоугольники. 2) Нет. Если у четырёхугольника есть 2 оси симметрии, то он ромб или прямоугольник. Добавление третьей оси симметрии приведёт к равенству либо смежных сторон, либо смежных углов. И в том, и в другом случае четырёхугольник оказывается квадратом, а у квадрата 4 оси симметрии. **639.** На прямой AC. **640.** 1) а) А, В, Е, З, К, М, П, С, Т, Ш, Э, Ю; б) Ж, Н, О, Ф, Х. 2) Есть, Ж, И, Н, О, Ф, Х. **641.** 1) 3, 8, 0; 2) а) 303, 3333; б) 808, 8008. **643.** 1) Одну, две или четыре; 2) а) стороны KM и KN должны иметь разные длины; б) стороны KM и MN должны быть равными; в) стороны KM и MN должны быть равными, а угол M — прямым. **644.** 1) Ось симметрии проходит через центр окружности. **647.** Верно. **648.** Дельтоидами. **649.** 1) а) Три; б) четыре; в) пять; г) шесть. 2) У правильного n-угольника n осей симметрии. **656.** 1) На первом месте в скобках стоит число, указанное у нижней стороны квадрата. 2) Двухклеточные: {(3; 2), (4; 2)}, {(3; 6), (4; 6)}, {(7; 5), (7; 6)}. Одноклеточные: {(1; 7)}, {(5; 4)}, {(5; 10)}, {(10; 2)}. **659.** 1) Новое положение корабля симметрично его первоначальному положению относительно прямой, проходящей через диагонали клеток (1; 1), (2; 2), (3; 3) и т. д. **660.** На билете указаны координаты места. **661.** 3) 0,0256; 0,2809; 0,00002401; 0,0000008836. **662.** 2) 0,88; 0,83; 0,15; 0,086. **663.** 5929, 8649, 9801. **664.** 1) $A(2;\ 1)$, $B(1;\ 2)$, $C(-2;\ 3)$, $D(-2;\ -1)$, $E(-1;\ -2)$, $F(3;\ -2)$; 2) равные нулю; 3) равные нулю. **665.** Осью симметрии. **667.** Петя увидел, что он может сказать без измерений, чему равна высота треугольника и сторона, к которой она проведена. 2) $S_{ABC} = 6$ (см^2). **668.** 3) а) 10 см^2; б) 6 см^2; в) 12 см^2. **671.** 1) 7,5 см^2. **672.** 3) а) 15 см^2; б) 16 см^2; в) 14 см^2; г) 15 см^2; д) 33 см^2. **675.** Периметр равен 14 см, площадь равна 12 см^2. **676.** Прямоугольники в а), г), д), е); 2) квадрат в г) и д). **677.** 1) $(-1;\ 0)$; 2) $(-2;\ 2)$; 3) $(5;\ 3)$; 4) $(-1;\ 2)$. **678.** 1) $M(5;\ 5)$; 2) $M(3;\ -1)$; 3) $M(-5;\ 1)$; 4) $M\left(\frac{a+b}{2};\ \frac{c+d}{2}\right)$. **680.** 3) а) Абсциссы точек равны, а ординаты противоположны; б) абсциссы точек противоположны, а ординаты равны; в) абсциссы точек противоположны и ординаты точек противоположны.

681. 1) $A_1(2;\ -5)$, $B_1(-3;\ -7)$, $C_1(-0{,}273;\ 17{,}85)$, $D_1(55;\ 0{,}017)$; 2) $A_2(-2;\ 5)$, $B_2(3;\ 7)$, $C_2(0{,}273;\ -17{,}85)$, $D_2(-55;\ -0{,}017)$; 3) $A_3(-2;\ -5)$, $B_3(3;\ -7)$, $C_3(0{,}273;\ 17{,}85)$, $D_3(-55;\ 0{,}017)$. **683.** Если расстояние от точки на поясе до макушки равно 0,5 м, то 3,14 м. **684.** $(-1{,}5;\ 3)$, $(4{,}5;\ 3)$ и $(1{,}5;\ -1)$. **687.** 2) а) Два конуса; б) два конуса и цилиндр. **688.** 3) а) 5; б) 6; в) 7. **689.** 3) а) 7; б) 6; в) 5. **693.** 1) 36π м^2; 2) 36π м^3. **694.** 1) а) $\frac{256}{3}\pi$ см^3; б) $\frac{32\pi}{3}$ см^3; в) $\frac{1}{6}\pi$ м^3; г) $\frac{256}{81}\pi$ м^3; 2) а) 64π см^2; б) 16π см^2; в) π м^2; г) $\frac{64}{9}\pi$ м^2. **695.** 1) а) $V = \frac{\pi d^3}{6}$; б) $S = \pi d^2$; 2) а) $4{,}5\pi$ см^3; 9π см^2; б) $\frac{4}{81}\pi$ см^3; $\frac{4}{9}\pi$ см^2; в) $\frac{9\pi}{16}$ см^3; $2{,}25\pi$ см^2; г) $0{,}0045\pi$ см^3; $0{,}09\pi$ см^2. **696.** Диаметр шара равен ребру куба a. 1) $V_{\text{шара}} = \frac{\pi a^3}{6}$, $V_{\text{куба}} = a^3$. $V_{\text{шара}} : V_{\text{куба}} = \frac{\pi a^3}{6a^3} = \frac{\pi}{6} \approx 0{,}5$; 2) $S_{\text{сферы}} = \pi a^2$, $S_{\text{пов. куба}} = 6a^2$. $S_{\text{сферы}} : S_{\text{пов. куба}} = \frac{\pi a^2}{6a^2} = \frac{\pi}{6} \approx 0{,}5$. **698.** 30 см. Р е ш е н и е. $\frac{3{,}14d^3}{6} \approx 14$, $d^3 \approx 27$, $d \approx 3$ (дм). **700.** Существует. 1) Треугольная пирамида; 2) прямоугольный параллелепипед. **703.** 1) а) 6,7%; 2) б) 29,2%; 3) в) 12,5%. **705.** 1) 24°; 2) 120°; 3) 132°. **707.** 2) 365 млн км^2. **708.** 2) 16 200; 3) 108 000. **712.** 1) Температура; 2) 5 °С; 3) месяцы; 4) в июле. Средняя температура равна 17,8 °С; 5) в январе и феврале. Средняя температура равна −7,8 °С. **719.** 25 учеников. **720.** Диаграмма г).

Глава 5. **Повторение**

722. 5) $2 \cdot 10^7 + 7 \cdot 10^6 + 2 \cdot 10^4 + 7 \cdot 10^3 + 2 \cdot 10^2 + 7$. **723.** 1) 20 000; 2) 344 999; 3) 20 480; 4) 2005; 5) 3500; 6) 5990; 7) 180 500; 8) 4 000 000. **724.** 1) г) 2 020 000 020; 2) г) $2 \cdot 10^9 + 2 \cdot 10^7 + 2 \cdot 10$. **727.** 2) 900; 6) 9 900 000 000. **728.** 1) 23 р.; 2) 3 ч; 3) 14 ч; 4) 20 деталей. Р е ш е н и е. 1) $(164 - 12 \cdot 7) : 16 = 5$ (р.); 2) $(305 - 5 \cdot 25) : 60 = 3$ (ч); 3) $196 : (16 - 2) = 14$ (ч); 4) $5\left(\frac{24}{8} + \frac{24}{8} : 3\right) =$

= 20 (деталей). **729.** 3) 18 570, 5790; 4) 2, 18 570, 5790, 1234. **730.** 1) 2 и 997. **731.** Одно из трёх последовательных нечётных чисел обязательно делится на 3. Простым оно при этом является только в случае, когда число равно 3. **732.** Доказательство. Пусть в двузначном числе x десятков и y единиц. Тогда $10x + y - (10y + x) = 9x - 9y = 9(x - y)$. В скобках целое число, и скобка умножается на 9, значит, произведение делится на 9. **733.** 1) 0; 2) 5. **734.** 4) $2664 = 2^3 \cdot 3^2 \cdot 37$. **736.** 1) 6; 4) 18. **737.** В 1)—4) оба слагаемых делятся на указанное число; в 5) и 6) можно вынести за скобки общий множитель. **739.** 1) Через 12 мин; 2) через 1 ч. Решение. 1) Разность скоростей третьего и второго бегунов в 3 раза больше разности скоростей второго и первого. Значит, второй бегун оказывается в одном месте дорожки с третьим в 3 раза чаще, чем с первым. Таким образом, все три бегуна окажутся в одном и том же месте дорожки в момент, когда второй бегун впервые поравняется с первым. Это произойдёт через $0,4 : (12 - 10) = 0,2$ (ч). **740.** 5) 62 700; 9) 100. **741.** 6) $18k + 66$. **742.** а) 2; б) 1; в) 0; г) 16. **743.** 1) 386; 2) 825; 3) 27; 4) 20; 5) 113; 6) 27. **744.** 1) Самолёты встретятся; 2) 2000 км; 3) 2800 км; 4) 4800 км. **745.** 1) 3; 2) 12,6 кг; 3) 60,5 м; 4) 131 р. 60 к. **746.** 1) 30; 2) 4000; 3) 230; 4) 9 р.; 5) 15 ч; 6) 50 км. **747.** 1) 25%; 2) 20%; 3) 60%; 4) 250%; 5) 25%; 6) 250%. **748.** 1) 250 р.; 2) 227 р. 50 к.; 3) 34,4 км/ч; 4) 120 км; 5) 1,5 кг. **749.** 1) $\frac{7}{9}$; 2) $\frac{2}{3}$; 3) $\frac{2}{3}$; 4) $\frac{3}{4}$; 5) $\frac{67}{113}$; 6) $\frac{41}{4115}$. **750.** 1) $\frac{11}{14}$; 3) $9\frac{5}{14}$; 5) $\frac{2}{11}$; 6) $\frac{11}{36}$; 7) $2\frac{5}{9}$; 8) $3\frac{13}{24}$; 9) $\frac{1}{12}$; 10) $2\frac{1}{4}$; 11) 20; 12) 4; 13) $\frac{3}{2}$; 14) $\frac{40}{21}$; 15) $\frac{5}{3}$. **751.** 1) $\frac{3}{20}$; 2) $\frac{41}{90}$; 3) 6; 4) $21\frac{2}{3}$. **753.** 1) $\frac{7}{2}$; 2) $\frac{1}{15}$; 3) $\frac{5}{7}$; 4) $3\frac{1}{3}$; 5) $\frac{5}{2}$; 6) 1,1. **754.** 3) $83,027 = 80 + 3 + 0,02 + 0,007$. **755.** 1) 7,0; 2) 0,4; 3) 3,75; 4) 1,(8); 5) 0,(13); 6) 1,(2); 7) 4,8(3); 8) 3,(140). **756.** 1) $\frac{1}{4}$; 2) $\frac{25}{8}$; 3) $\frac{119}{20}$; 4) $\frac{1813}{100}$; 5) $\frac{7}{9}$; 6) $\frac{1}{3}$; 7) $\frac{37}{33}$; 8) $\frac{221}{99}$. **759.** 1) 5; 2) 50; 3) 72,3; 4) 120; 5) 9,20; 6) 0,187. **760.** 1) $0,42 < \frac{3}{7} < 0,43$; 6) $55,83 < 55,(83) < 55,84$. **761.** 1) 17,56; 2) 3,25; 3) 1277,03; 4) 73,02; 5) 0,537; 6) 0,404; 7) 78,3; 8) 0,25;

9) 0,13; 10) 2,05; 11) 1,0008; 12) 3,9. **762.** 1) 318,38; 2) 37,17; 3) 124,275; 4) 8,35. **763.** 1) $\frac{1}{3}$ часть пути; 2) $\frac{8}{9}$ запаса угля; 3) половину дистанции; 4) 168 страниц. **767.** 1) 0,(14); 3) -4,(6); 4) 12,7(6); 5) 1,2(14); 6) 0,8(6). **769.** 1) $-42x - 2y$; 2) $3b - 12$; 4) $14{,}88x + 5{,}5y + 12$. **770.** 1) $\frac{105}{16}$; 2) -2; 3) 0; 4) -1. **771.** 1) 3; 2) 100. **774.** 1) При $x \geqslant 0$; 2) при $x \leqslant 0$; 3) при $x \leqslant 0$; 4) при $x \leqslant 0$. **776.** Совет. Обозначьте одно из чисел буквой x и решите уравнение. 1) 20 и 50; 2) 36 и 24; 3) 40 и 20,2; 4) $-10{,}95$ и $-13{,}65$. **777.** 1) 20 509; 2) 37,9; 3) $1\frac{3}{4}$; 4) $-2{,}925$; 5) $1\frac{49}{90}$; 6) $-\frac{1}{48}$. **778.** 1) 96 км; 2) 272 км; 3) 16 мальчиков и 20 девочек. Решение. 3) Пусть в классе x мальчиков. Тогда $\frac{5}{8}x = \frac{1}{2}(36 - x)$, $5x = 144 - 4x$, $9x = 144$, $x = 16$. **779.** 1) 2; $2\frac{4}{5}$; $4\frac{2}{3}$; 4,7; 2) $6\frac{3}{4}$; $6\frac{2}{3}$; 5; $1\frac{5}{8}$. **780.** 1) $3x = 12(0{,}5x + 2)$, $x = -8$; 2) $0{,}5y + 0{,}75 + \frac{1}{3} = \frac{5}{6} - \frac{1}{6}y$, $y = -\frac{3}{8}$; 3) $1{,}6x + 3 = 5(2x - 1)$, $x = \frac{20}{21}$; 4) $\frac{5}{6}y - 2 = 1{,}5(0{,}5y - 1)$, $y = 6$. **781.** а) 2, 8, 9; б) 1, 5; в) 6; г) 3, 4 и 7. **782.** 1) $-5{,}5$; 2) $\frac{1}{13}$; 3) $\frac{11}{25}$; 4) $12\frac{1}{2}$; 5) 6; 6) 18,5. **783.** 1) $-\frac{3}{28}$; 2) $-1\frac{2}{3}$; 3) $28\frac{2}{3}$; 4) $2\frac{1}{9}$. **784.** 1) 240 страниц; 2) 80 кг и 60 кг; 3) 12 груш и 36 яблонь. Решение. 1) Пусть за неделю переведено x страниц. Тогда $x + 60 = 3x - 60$, $x = 60$. 2) Пусть в первом мешке x кг муки. Тогда $x - \frac{1}{8}x = 140 - x + \frac{1}{8}x$, $x = 80$. **785.** 1) 36 см^2; 2) 45 см^2; 3) на 25%. **787.** 1) 17,6 см; 2) $8\frac{4}{5}$ дм; 3) $\frac{5}{7}$ м; 4) 0,5 м; 5) 5,18 см^2; 6) $\frac{5}{3}$ дм. **788.** Существует в 1) и 2); не существует в 3) и 4). **789.** 1) $5\frac{14}{15}$ м; 2) 7,5 см и 25,5 см; 3) 80 см; 4) 3,9 м и 6,9 м. **791.** 1) 10,5 м; 2) 112 см^2. **796.** 1) 45°, 135°; 2) 126°, 54°; 3) 72°, 108°; 4) 30°, 150°. **797.** 1) 126°, 54°; 2) 80°, 100°. **798.** 900°. **799.** 180°.

800. а) 50°; б) 100°. **801.** 2) 4,5 см; 3) $\frac{5}{6}$ м; 4) 3,9 м. **802.** Равны в 1), 3) и 4). **804.** Совет. Подумайте, какой будет сумма углов треугольника AMB. **806.** Является. **807.** $x = 7$ см, $y = 15$ см. Решение. $\angle A = \angle D$, значит, AC параллелен DE и $\angle E = \angle C$. Углы треугольников ABC и DBE соответственно равны, значит, треугольники подобны и их сходственные стороны пропорциональны: $x : 21 = 8 : 24$, $x = 7$ (см); $y : 5 = 24 : 8$, $y = 15$ (см). **808.** Произведение длины любой из сторон треугольника на длину проведённой к ней высоты равно удвоенной площади треугольника. Из равенства произведений получаем обратную пропорциональность сторон и высот. **809.** 1) 28, $65\frac{1}{3}$ и $102\frac{2}{3}$; 2) 14, 56 и 126. **810.** 5 см. **811.** Существует в 3). **812.** 5 см. **813.** Нет. **814.** 1) 1,57 м³; 4) 3,93 дм³. **815.** 1) $V_ц \approx 785$ см³, $V_ш \approx 523$ см³; 2) 67%. **816.** 9,7865 дм³. **817.** 1) 154,63 дм³; 2) 9 дм. **818.** 1) Объёмы равны; 2) $\frac{160}{147}$ дм. **832.** 1) 412; 2) 968; 3) 1122; 4) 737; 5) 2133; 6) 1639; 7) 423. **833.** Верно в 1 и 3; неверно в 2 и 4. **835.** 1) 308 (ост. 28); 2) 1306 (ост. 13); 3) 507 (ост. 27); 4) 203 (ост. 75); 5) 257 (ост. 36); 6) 3005 (ост. 13). **837.** 1) 132; 2) 24; 3) 16; 4) 54. **838.** 1) 21 117; 2) 539, 540, 541, 542. **839.** 5) $4\frac{1}{7}$; 6) $\frac{16}{35}$; 9) $\frac{1}{3}$; 10) $\frac{3}{2}$; 12) $\frac{5}{9}$. **840.** 3) $\frac{2}{3}$; $\frac{8}{9}$; $\frac{5}{7}$; $\frac{1}{6}$; $\frac{7}{12}$; 4) $\frac{5}{9}$; $\frac{5}{7}$; $\frac{1}{6}$; $\frac{5}{6}$; $\frac{25}{48}$. **841.** Верно 1, 2 и 3. **843.** 1) $\frac{25}{48}$; 2) $\frac{12}{7}$; 3) $\frac{3}{2}$; 4) 10; 5) $\frac{35}{24}$; 6) 3. **844.** 5) $8\frac{11}{12}$; 6) $\frac{5}{12}$; 7) $\frac{3}{20}$; 8) $\frac{5}{3}$. **845.** 1) $\frac{34}{35}$; 2) $\frac{4}{15}$; 3) $1\frac{4}{9}$; 4) $\frac{1}{2}$. **846.** Достаточно решить уравнение. **849.** 1) 0,076; 2) 18,04. **850.** Верно. **851.** 1) 31,8; 2) 0,05; 3) 610; 4) 24; 5) 80; 6) 96,1. **852.** 1) 2,7; 2) 1484; 3) 0,2; 4) 2,1; 5) 11,2; 6) 2. **853.** 1) 90,52; 2) 892,24; 3) 2,65; 4) 7. **854.** Равны нулю 1 и 3; не имеют смысла 2 и 4. **858.** 1) −83; 2) −600; 3) −124; 4) 207; 5) 5415; 6) 1114. **860.** 1) −42; 2) −9; 3) 8; 4) 8; 5) −9; 6) −2. **862.** Верно во всех трёх случаях. **863.** 1) 5; 2) 50; 3) 5; 4) $-22\frac{4}{5}$. **864.** 1) $1\frac{5}{51}$; 2) $\frac{4}{13}$; 3) $\frac{1}{11}$; 4) $\frac{11}{6}$; 5) $\frac{133}{9}$; 6) $-\frac{190}{97}$; 7) $-\frac{37}{28}$; 8) $\frac{19}{12}$. **865.** 1) $-\frac{6}{7}$; 2) $-\frac{22}{7}$; 4) $-\frac{3}{4}$; 5) $-\frac{2}{3}$; 6) 25,376; 7) $\frac{991}{770}$;

8) $\frac{190}{33}$. **866.** 1) В 10 раз; 2) 88 игрушек; 3) 108 фонарей; 4) 96 яблонь и груш; 5) 1 м 80 см; 6) 775 кг; 7) 239 кг. **867.** 1) 2 т 829 кг; 2) 41 кг; 3) 746 человек; 4) 60 см; 5) 10 739 мини-тракторов. **869.** 1) 459 кг и 510 кг; 2) 199 платьев; 3) 234 кг; 4) 928 км; 5) 10 кг; 6) 150 кг. **871.** 1) 20 км; 2) 48 км/ч; 3) на 20 км/ч; 4) 72 км/ч; 5) на 20 км/ч. **873.** 1) 70 км/ч; 2) 71 км/ч. **875.** 1) 14 км/ч; 2) 1 км/ч; 3) 7 км/ч; 4) 14 км/ч; 5) 4 км/ч и 21 км/ч; 6) 10 км/ч. **876.** 1) 2468 м; 2) 32 км/ч; 3) 55 км/ч; 4) а) 4530 м; б) 3270 м; в) 4470 м. **877.** 1) $286 = 37 + 3x$, $x = 83$, можно; 2) $385 = 4x - 49$, $x = 108{,}5$, нельзя; 3) 19 р.; 4) 20 л; 5) 85 км; 6) 7 р.; 7) 2 года и 4 года. **878.** 1) 18 девочек; 2) 1,25 шоколадки; 3) 49 км; 4) 40 л; 5) $\frac{1}{4}$; 6) $\frac{1}{8}$. **879.** 1) На $2\frac{2}{5}$; 2) 5,6 км; 3) $12\frac{2}{15}$ т; 4) 9 м; 5) $\frac{19}{60}$ пути. **880.** 1) За 3 ч 24 мин; 2) за $3\frac{1}{2}$ ч, $\frac{2}{7}$ объёма бассейна за час; 3) $\frac{37}{180}$ бассейна; 4) за $3\frac{1}{3}$ ч, $\frac{3}{10}$ части всей работы за час. **881.** 1) $133\frac{1}{3}$ км; 2) 52 км; 3) спортсмены пробежали по 10 км; 4) 56 км; 5) 380 км; 6) $\frac{1}{6}$. **882.** 1) $7\frac{1}{4}$ кг; 2) $4\frac{1}{12}$ кг. **883.** 1) 10,1 кг; 2) 28,6 км; 3) 22,5 км/ч; 4) 3,1 см; 5) 0,3 м; 6) 83,9 р.; 7) 20,8 км/ч. **884.** 1) 66,57 км. 2) Туристы прошли по реке такое же расстояние, как если бы они шли по озеру. Скорость течения 1,6 км/ч. 3) 91 км. 4) Путь вниз по реке больше на 15 км. **885.** 1) Движение навстречу; 89,3 км/ч; 2) движение в противоположных направлениях; 245,6 км; 3) движение вдогонку; через 0,6 ч; 4) движение с отставанием; 24,6 км. **886.** 1) 312,5 м/мин; 2) $344\frac{24}{29}$ м/мин; 3) $289\frac{59}{69}$ м/мин. **887.** 1) 60,8 км/ч; 2) 70,8 км/ч. **888.** 1) 40 тыс. км; 2) 4,4 млн км; 3) 1 : 1 000 000; 4) 4,9 тыс. км; 5) 1,7 тыс. км. **889.** 1) 30,96 кг, 10,32 кг и 12,22 кг; 2) 488 девочек и 305 мальчиков; 3) 181,8 л и 60,6 л; 4) 117,6 кг и 29,4 кг яблок; 5) 22,5 км/ч; 6) 21,3 кг и 7,1 кг печенья. **890.** 1) 19,5 г; 2) за 50 минут; 3) за 32 дня; 4) 6 кг воды, 4,5 кг ягод и 3 кг сахара; 5) 30 г. **891.** 1) 2123 пары; 2) 40,7 г; 3) 15 800 р.; 4) 225 т руды; 5) 125 кг; 6) 68%; 7) на 18%; 8) на 37,5%; 9) 20 км, 26 км и 16 км; 10) 10 фруктов; 11) на 410 р. **893.** 2 см или

8 см. **896.** 1) На 6°, на 60°, на 90°; 2) на 30°, на 120°, на 15°; 3) 60°, 90°, 150°, 45°; 4) если перемена началась в 10 ч, то угол между стрелками увеличился на 55°; если перемена начнётся в 10 ч 30 мин, то угол уменьшится на 55°, а если перемена начнётся в 11 ч 55 мин, то к концу перемены угол окажется тем же самым, т. е. не изменится. **897.** 1) 1 или 3 прямых; 2) 1, 3 или 6 прямых; 3) 1, 5, 6, 8 или 10 прямых. **898.** 13 прямых. **899.** 4 прямых. **900.** Могут в 2 и 3, не могут в 1. **901.** 1) Могут в 1 и 4, не могут в 2 и 3; 2) это равнобедренный треугольник; 4) может в а), не может в б) и в); 5) может, если треугольник равносторонний. **902.** 1) 27 см; 2) 18 м или 21 м. **903.** Ни одного, три или четыре. **905.** Величины углов: 1) 80° и 100°; 2) 72° и 108°. **906.** Величины углов 55° и 125°. **907.** 1) 24°; 2) 117°. **908.** 1) 44°, 59° и 77°; 2) 119,5°. **909.** 105°. **910.** $\angle B = 36°$, $\angle A = \angle C = 72°$. **911.** 120°.

Предметный указатель

Абсцисса 205
Алгебра 244
Алгоритм Евклида 65
Величины пропорциональные 32
— обратно пропорциональные 33
— прямо пропорциональные 35
Геометрия 246
Диаграмма круговая 221
— столбчатая 223
Делитель 50, 57, 158
Длина окружности 183
Дробь несократимая 53
Египетский треугольник 246
Контрпример 62
Конус 213
Концентрация 176
Координатная прямая 116
— плоскость 206, 241, 254
— четверть 206
Координаты точки 201, 205
Корень уравнения 164
Коэффициент 165
— подобия 7
Кратное 50
Круг Эйлера 93
Круговой сектор 189
Куб 215
Масштаб 15
Многогранник 212
— правильный 215
Многоугольник правильный 185
Множество 91
— бесконечное 91
— конечное 91
— пустое 91
Множества равные 98
Модуль числа 122, 127
Наибольший общий делитель 53, 80
Наименьшее общее кратное 54
Объединение множеств 96, 100
Объём призмы 253
— цилиндра 253
— шара 217
Ордината 205
Основная теорема арифметики 77
Основное свойство пропорции 27, 251

Ось абсцисс 205
— ординат 205
— симметрии 192
Отношение величин 22
Пересечение множеств 93, 97, 100
Пирамида 214
Площадь круга 185
Подмножество 97
Подобные фигуры 7
— треугольники 9
— слагаемые 149
Призма 213
Признаки делимости
— на 2 67
— на 3 71
— на 4 69
— на 5 67
— на 6 87
— на 9 71
— на 10 67
Пропорция 25
— крайние члены 26
— средние члены 26
Процентное содержание 174
Развёртка 216
Разложение на множители 77
Раскрытие скобок 151
Решить уравнение 164
Решето Эратосфена 233
Свойства деления 157
Свойство делимости произведения 58
— суммы 59
— разности 61
— целых чисел 159
Симметрия 106
— центральная 107
— осевая 191
Симметричная фигура 194
Сфера 212, 213
Сходственные стороны 10
Тела вращения 213
Формула
— длины окружности 183
— нечётного числа 61
— объёма призмы 253
— объёма цилиндра 253
— объёма шара 217
— площади круга 185
— площади сферы 217
— чётного числа 59
— Эйлера 216
Уравнение 164
Центр симметрии 107
Центрально-симметричные точки 110
— фигуры 110
Центральный угол 189
Цилиндр 213
Число натуральное 229
— неотрицательное 115
— неположительное 115
— отрицательное 113, 240
— положительное 114
— простое 75, 231
— рациональное 160
— составное 75
— целое 125
Числа взаимно простые 84
— противоположные 124
— взаимно обратные 155

Пропорции

В пропорции $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$ или $a : b = c : d$

числа a и d называют крайними членами,
b и c — средними.

• ОСНОВНОЕ СВОЙСТВО ПРОПОРЦИЙ •

В пропорции $a : b = c : d$ произведение крайних членов равно произведению средних: $ad = bc$.

Делители и кратные

$$\text{НОД}(n;\ m) = \text{НОД}(n - m;\ m)$$

$$mn = \text{НОД}(m;\ n) \cdot \text{НОК}(m;\ n)$$

Если $\text{НОД}(m;\ n) = 1$, то $\text{НОК}(m;\ n) = mn$.

Арифметические действия с числами разных знаков

$$a - b = a + (-b) \qquad a + b = a - (-b)$$

$$(-1) \cdot a = a \cdot (-1) = -a$$

• МОДУЛЬ ЧИСЛА •

$|a| = a$, если $a \geqslant 0$, и $|a| = -a$, если $a < 0$

• ПРАВИЛА ПРОИЗВЕДЕНИЯ И ДЕЛЕНИЯ ЧИСЕЛ С РАЗНЫМИ ЗНАКАМИ •

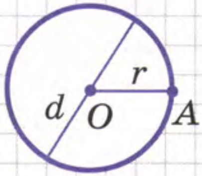
плюс на плюс дает плюс
минус на минус дает плюс
плюс на минус дает минус

$$(+) \cdot (+) \longrightarrow (+) \qquad (-) \cdot (-) \longrightarrow (+) \qquad (+) \cdot (-) \longrightarrow (-)$$

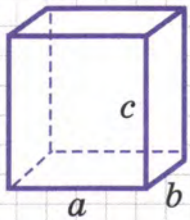
• ПРАВИЛО РАСКРЫТИЯ СКОБОК •

$$-(a + b - c) = -a - b + c \qquad +(a + b - c) = +a + b - c$$

Формулы



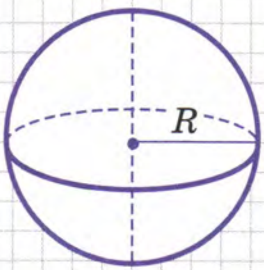
Диаметр окружности $d = 2r$,
где d — диаметр, r — радиус.
$C = \pi d$, $C = 2\pi r$, $S = \pi r^2$, где $\pi \approx 3{,}14$



Объем прямоугольного параллелепипеда $V = abc$, где a, b, c — три его измерения.
Площадь поверхности прямоугольного параллелепипеда $S = 2(ab + ac + bc)$.

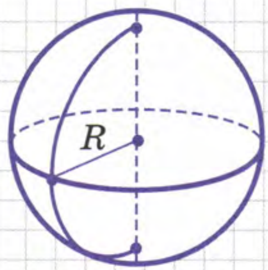
Объем шара

$$V_{\text{шара}} = \frac{4}{3}\pi R^3$$



Площадь сферы

$$S_{\text{сферы}} = 4\pi R^2$$



Латинский алфавит

Aa	**Bb**	**Cc**	**Dd**	**Ee**	**Ff**	**Gg**	**Hh**	**Ii**	**Jj**	**Kk**	**Ll**	**Mm**
а	бэ	цэ	дэ	е	эф	же	аш	и	жи	ка	эл	эм
Nn	**Oo**	**Pp**	**Qq**	**Rr**	**Ss**	**Tt**	**Uu**	**Vv**	**Ww**	**Xx**	**Yy**	**Zz**
эн	о	пэ	ку	эр	эс	тэ	у	вэ	дубль-вэ	икс	игрек	зет