다변수미분적분학.

※ 노트는 학습인트라넷에 올림.

노트 제목 2013-03-07

13.장. Vector Functions

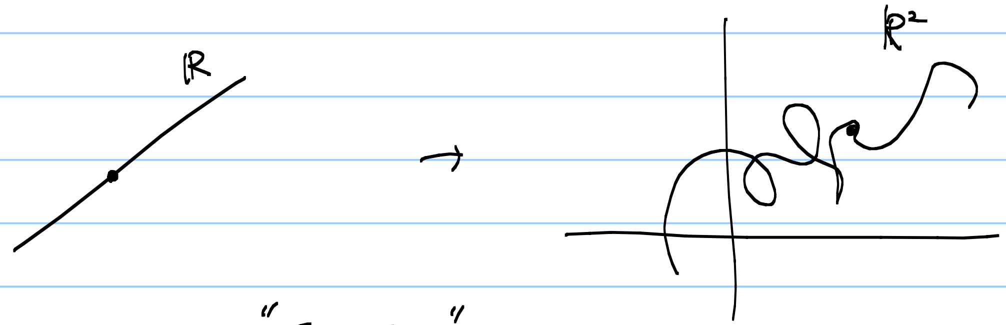
함수 $\mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ 일변수 함수

정의역 공역

$\downarrow$

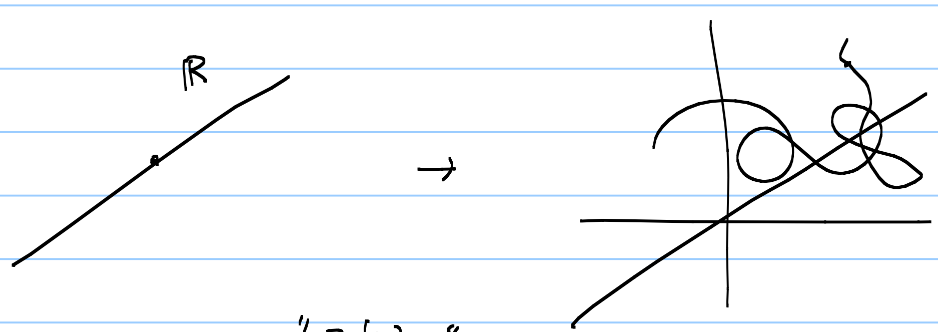
$\mathbb{R}^2, \mathbb{R}^3, \dots$: vector functions

$\mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$



"평면곡선"

$\mathbb{R} \to \mathbb{R}^3$



"공간곡선"

"성분함수"

$$\vec{r} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^3, \quad \vec{r}(t) = (r_1(t), r_2(t), r_3(t))$$

$$= r_1(t)\,\vec{i} + r_2(t)\,\vec{j} + r_3(t)\,\vec{k}$$

$$\left(\vec{i} = (1,0,0),\ \vec{j} = (0,1,0),\ \vec{k} = (0,0,1) \right)$$

연속: 벡터 함수의 극한

$$\boxed{\lim_{t \to a} \vec{r}(t) := \left(\lim_{t \to a} r_1(t),\ \lim_{t \to a} r_2(t),\ \lim_{t \to a} r_3(t) \right)}$$

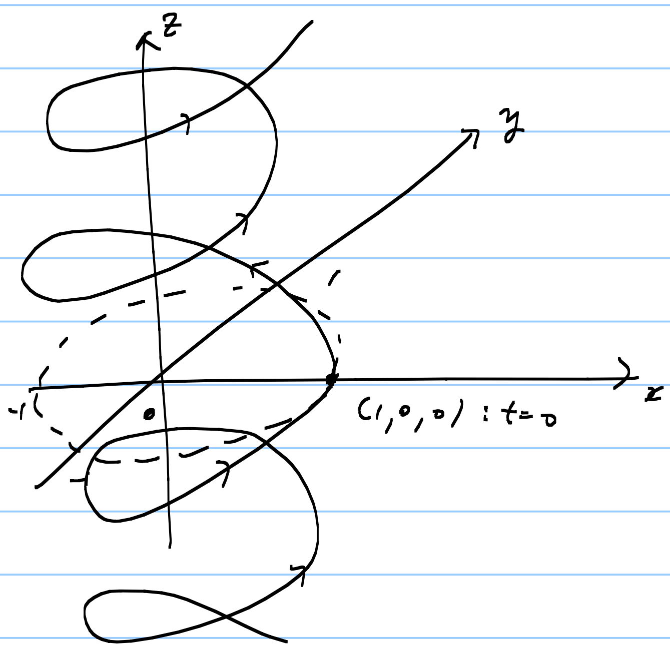
벡터함수의 연속

$$\lim_{t\to a} \vec{r}(t) = \vec{r}(a) \text{ 일 때,}$$

$\vec{r}$ 은 a 에서 연속이다라고 한다.

(즉, $\vec{r}$ 의 성분함수 들이 모두 a 에서 연속이다.)

예) $\vec{r}(t) = (\cos t, \sin t, t) \to$ "나선 helix"



벡터함수의 미분

$\vec{r}(t) = (r_1(t), r_2(t), r_3(t))$

$$\vec{r}'(t) = \frac{d}{dt}\vec{r} = \frac{d\vec{r}}{dt}$$

$$\underset{\text{정의}}{:=} \lim_{h\to 0} \frac{\vec{r}(t+h) - \vec{r}(t)}{h}$$

Note 만일 이 극한이 존재하면, 그 결과는 다시 벡터함수가 된다.

예) $\vec{r}(t) = (1+t^3, e^{-t}, \sin t)$

$$\vec{r}'(t) \underset{\text{정의}}{=} \lim_{h\to 0} \frac{\vec{r}(t+h) - \vec{r}(t)}{h}$$

$= (3t^2, -e^{-t}, \cos t)$

$\vec{r}(t+h) - \vec{r}(t)$로 바꾼다.

$$= \lim_{h\to 0} \frac{\left(1+(t+h)^3,\ e^{-(t+h)},\ \sin(t+h)\right) - \left(1+t^3,\ e^{-t},\ \sin t\right)}{h}$$

$$= \lim_{h\to 0} \frac{\left(\{1+(t+h)^3\} - \{1+t^3\},\ e^{-(t+h)} - e^{-t},\ \sin(t+h) - \sin t\right)}{h}$$

$\frac{1}{h}$은 성분별로 곱한다.

$$= \lim_{h\to 0} \left(\frac{\{1+(t+h)^3\} - \{1+t^3\}}{h},\ \frac{e^{-(t+h)} - e^{-t}}{h},\ \frac{\sin(t+h) - \sin t}{h} \right)$$

$$= \left(\lim_{h\to 0} \frac{\{1+(t+h)^3\} - \{1+t^3\}}{h},\ \lim_{h\to 0} \frac{e^{-(t+h)} - e^{-t}}{h},\ \lim_{h\to 0} \frac{\sin(t+h) - \sin t}{h} \right)$$

⇒ 도함수의 정의

$$= \left((1+t^3)',\ (e^{-t})',\ (\sin t)' \right)$$

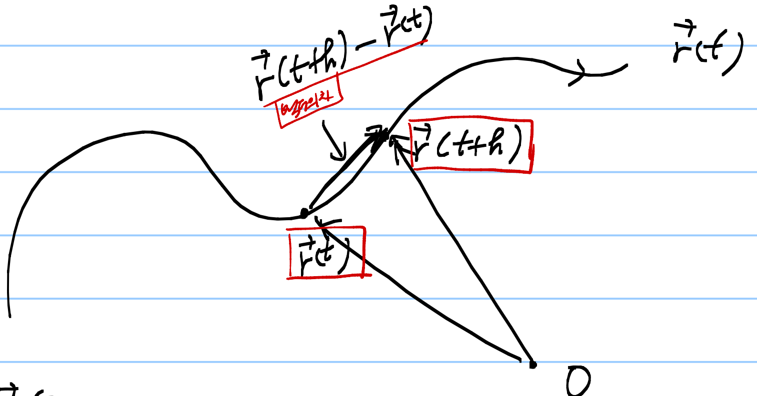
$$= \left(3t^2,\ -e^{-t},\ \cos t \right)$$

즉, ☆

$$\boxed{\begin{aligned} &\vec{r}(t) = (r_1(t),\ r_2(t),\ r_3(t)) \text{ 이면} \\ &\vec{r}\,'(t) = (r_1'(t),\ r_2'(t),\ r_3'(t)) \text{ 이다.} \end{aligned}}$$

벡터 함수의 미분의 기하학적 의미

$$\vec{r}\,'(t) \underset{\text{정의}}{:=} \lim_{h\to 0} \frac{\vec{r}(t+h) - \vec{r}(t)}{h}$$



$$\frac{\vec{r}(t+h) - \vec{r}(t)}{h} \xrightarrow[h\to 0]{} \vec{r}\,'(t)\ ;$$

곡선 $\vec{r}(t)$의 접선(진행) 방향

크기 : t에서의 $\vec{r}(t)$의 순간속력

$$\therefore \boxed{\vec{r}\,'(t) : \vec{r}(t) \text{의 "속도 벡터"}}$$

이때, t는 시간으로 생각하면 된다.

$\left(\vec{r}\,''(t) \right.$: 가속도 벡터

$\vec{F} = m\vec{a} \longrightarrow \vec{F}(t) = m\,\vec{r}\,''(t) \left. \right)$

(벡터) (벡터) ⇒ 가속도 벡터

벡터 함수의 미분의 성질

1. $\frac{d}{dt}\left(\vec{u}(t) \pm \vec{v}(t)\right) = \frac{d}{dt}\vec{u}(t) \pm \frac{d}{dt}\vec{v}(t)$

2. $\frac{d}{dt}\left(c \cdot \vec{u}(t)\right) = c \cdot \frac{d}{dt}\vec{u}(t)$

3. $\frac{d}{dt}\left(f(t) \cdot \vec{u}(t)\right) = f'(t) \cdot \vec{u}(t) + f(t)\,\vec{u}\,'(t)$

   $f(t)$: scalar 함수, $\vec{u}(t)$: vector 함수

4. $\frac{d}{dt}\left(\vec{u}(t) \cdot \vec{v}(t)\right) = \vec{u}\,'(t) \cdot \vec{v}(t) + \vec{u}(t) \cdot \vec{v}\,'(t)$

5. $\frac{d}{dt}\left(\vec{u}(t) \times \vec{v}(t)\right) = \underline{\vec{u}\,'(t) \times \vec{v}(t)} + \vec{u}(t) \times \vec{v}\,'(t)$

   오더

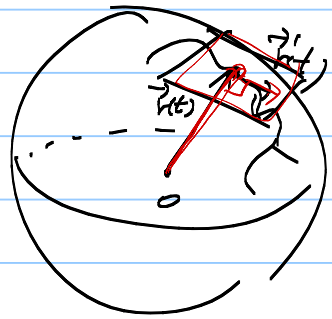
6. $\frac{d}{dt}\vec{u}\left(f(t)\right) = \vec{u}\,'\left(f(t)\right) \cdot f'(t)$

Check 해 볼 것.

예) $\vec{r}(t)$ 3차원 vector 함수.

$$\left|\vec{r}(t)\right| \equiv C, \quad \forall t$$

$\boxed{\text{구면곡선}}$을 미분하면 원래 곡선과 수직이다.



⇒ 주장: $\vec{r}(t) \perp \vec{r}\,'(t), \ \forall t$

$\boxed{\text{Proof}}$

∵)

$$\frac{d}{dt}\left(\left|\vec{r}(t)\right|^2\right) = \frac{d}{dt}\left(\vec{r}(t) \cdot \vec{r}(t)\right)$$

$$0 = \frac{d}{dt}C^2 = \vec{r}\,'(t) \cdot \vec{r}(t) + \vec{r}(t) \cdot \vec{r}\,'(t)$$

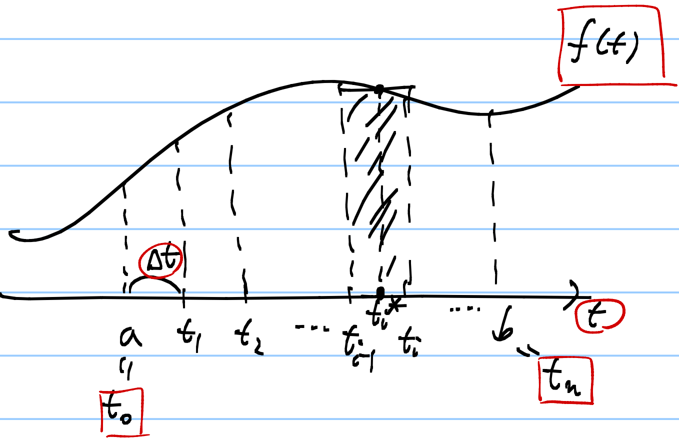
$$= 2\,\vec{r}(t) \cdot \vec{r}\,'(t) \quad ///$$

$\boxed{\text{내적이 0}}$

벡터함수의 적분.

우선 scalar 함수의 적분 :

$$\int_a^b f(t)\,dt := \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} \boxed{f(t_i^*)} \cdot \Delta t$$



$$\Delta t = \frac{b-a}{n}$$

$$t_i = t_0 + i \cdot \Delta t, \quad t_0 = a$$

i 번째 구간 $[t_{i-1}, t_i] \ni t_i^*$

vector 함수의 적분. ⇝ vector 함수가 된다

$$\boxed{\int_a^b \vec{r}(t)\,dt := \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} \vec{r}(t_i^*)\,\Delta t}$$

만일 $\vec{r}(t) = (f(t), g(t), h(t))$ 라면.

$$\Rightarrow \boxed{\int_a^b \vec{r}(t)\,dt = \left(\int_a^b f(t)\,dt, \int_a^b g(t)\,dt, \int_a^b h(t)\,dt \right)}$$

$$= \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} \left(f(t_i^*), g(t_i^*), h(t_i^*) \right) \cdot \Delta t$$

$$= \left(\lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} f(t_i^*)\Delta t, \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} g(t_i^*)\Delta t, \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} h(t_i^*)\Delta t \right)$$

Scalar 함수의 경우 : $F(t)$ 가 $f(t)$의 원시함수라면 (즉 $F'(t) = f(t)$)

$$\Rightarrow \int_a^b f(t)\,dt = F(b) - F(a)$$: "미적분학의 기본정리"

vector 함수의 경우 : $\vec{R}(t)$ 가 $\vec{r}(t)$의 원시함수라면 (즉, $\vec{R}'(t) = \vec{r}(t)$)

★ $\Rightarrow$ $\boxed{\int_a^b \vec{r}(t)\,dt \overset{?}{=} \vec{R}(b) - \vec{R}(a)}$

$\vec{r}(t) = (f(t), g(t), h(t))$

$\vec{R}(t) = (F(t), G(t), H(t))$

$F' = f, \ G' = g, \ H' = h$

$\boxed{\text{벡터 함수에 관한 미적분학의 기본정리}}$

$$\left(\int_a^b f(t)\,dt, \int_a^b g(t)\,dt, \int_a^b h(t)\,dt\right) = (F(b), G(b), H(b)) - (F(a), G(a), H(a))$$

미적분학의 기본정리 →

$$= (F(b)-F(a),\ G(b)-G(a),\ H(b)-H(a))$$

예) $\vec{r}(t) = (2\cos t, \sin t, 2t) = 2\cos t\,\vec{i} + \sin t\,\vec{j} + 2t\,\vec{k}$

$$\Rightarrow \int \vec{r}(t)\,dt = \int 2\cos t\,dt\,\vec{i} + \int \sin t\,dt\cdot\vec{j} + \int 2t\,dt\cdot\vec{k}$$

부정적분

$$= (2\sin t + C_1)\vec{i} + (-\cos t + C_2)\vec{j} + (t^2 + C_3)\vec{k}$$

$$= \underbrace{(2\sin t\,\vec{i} - \cos t\cdot\vec{j} + t^2\cdot\vec{k})}_{\vec{R}(t)} + \underbrace{(C_1\vec{i} + C_2\vec{j} + C_3\vec{k})}_{\vec{C}}$$

$$\Rightarrow \int_0^{\frac{\pi}{2}} \vec{r}(t)\,dt = \vec{R}\left(\frac{\pi}{2}\right) - \vec{R}(0) = \left(2, 0, \frac{\pi^2}{4}\right) - (0, -1, 0)$$

벡터 함수에 관한 미적분학의 기본정리

$$= \left(2, 1, \frac{\pi^2}{4}\right)$$

1. 다음 함수의 편미분 $\dfrac{\partial f}{\partial x}$, $\dfrac{\partial f}{\partial y}$을 구하시오.

(a) $f(x,y) = x^2 - xy + y^2$

(b) $f(x,y) = \sqrt{x^2+y^2}$

(c) $f(x,y) = \dfrac{x}{x^2+y^2}$

(d) $f(x,y) = e^{-x}\sin(x+y)$

(e) $f(x,y) = \ln(x^2+5y^2)$