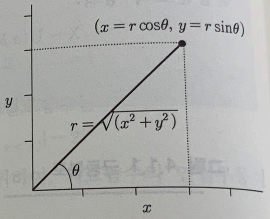
인 일대일 함수로서, 미분가능하고 그 야코비안 행렬식이

$$J_{\omega}(y) = \det\begin{pmatrix} \frac{\partial x}{\partial r} & \frac{\partial y}{\partial r} \\ \frac{\partial x}{\partial \theta} & \frac{\partial y}{\partial \theta} \end{pmatrix}$$

$$= \det\begin{pmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ -r\sin\theta & r\cos\theta \end{pmatrix} = r$$

임을 알 수 있다. 따라서 극좌표 변환 w의 역함수를 $u = w^{-1}$라고 하면 역함수 정리로부터 함수 $u(x,y)$가 <정리 4.1.1>의 조건을 만족시키는 것을 알 수 있다.

그림 4.1.3 직교좌표와 극좌표



그러므로 <정리 4.1.1>로부터 R, Θ의 결합확률밀도함수는

$$pdf_{R,\Theta}(r,\theta) = \frac{1}{2\pi}e^{-\frac{1}{2}r^2(\cos^2\theta + \sin^2\theta)} I_{[0,+\infty)}(r) I_{[0,2\pi)}(\theta)|r|$$

$$= re^{-\frac{1}{2}r^2} I_{[0,+\infty)}(r)\frac{1}{2\pi} I_{[0,2\pi)}(\theta)$$

로 주어진다. 즉 R, Θ는 서로 독립이고

$$R^2/2 \sim \mathrm{Exp}(1),\ \Theta \sim U[0,2\pi)$$

왜 이렇게 되는지 모르겠습니다 ㅠ

예 4.1.9