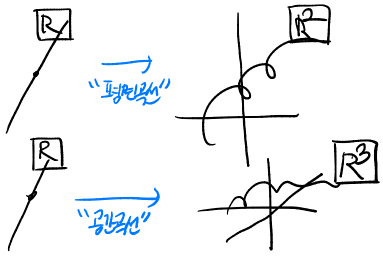
$\boxed{\text{Vector function}}$

지금까지 $\overset{\text{정의역}}{R} \to \underset{\text{공역}}{R}$ 일변수함수

↓

R^2, R^3



미분개념 → 연속: 벡터함수의 극한 ⇝ 벡터함수는 극한도 벡터다

$$\lim_{t\to a}\vec{r}(t) := \left(\lim_{t\to a} r_1(t), \lim_{t\to a} r_2(t), \lim_{t\to a} r_3(t)\right)$$

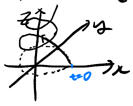
벡터함수의 연속

$\underbrace{\lim_{t\to a}\vec{r}(t)}_{\text{극한}} = \underbrace{\vec{r}(a)}_{\text{함숫값}}$ 일 때, $\vec{r}$은 a에서 연속이라고 한다

예) $\vec{r}(t) = (\cos t, \sin t, t)$

⇒ $\boxed{\text{나선}}$

⇒ 연속함수 → 기하학적으로 'Jump'가 없다



$\boxed{\text{벡터함수의 미분}}$

$\vec{r}(t) = (r_1(t), r_2(t), r_3(t))$

$\vec{r}'(t) = \frac{d}{dt}\vec{r} = \frac{d\vec{r}}{dt}$

$\underset{\text{정의}}{:=} \lim_{h\to 0}\frac{\vec{r}(t+h) - \vec{r}(t)}{h}$

Note

Module Multi-variable functions Introduction

1. 다변수 함수의 정의

$$f : R\times R \to R \quad \text{이변수 함수}$$
$$(a,b) \mapsto f(a,b)$$
$$f : R\times R\times R \to R \quad \text{삼변수 함수}$$
$$(a,b,c) \mapsto f(a,b,c)$$
$$f : R^n \to R \quad \text{변수가 n개인 함수}$$
$$R^n = R\times\cdots\times R = \{(x_1,\cdots,x_n) : x_j \in R, 1 \leqq j \leqq n\}$$

정의구역인 열린 구간인 1변수 함수 $f : (\alpha,\beta) \to R$

$$f : U \to R \qquad U \subset R^n$$
$$U = (\alpha_1,\beta_1)\times(\alpha_2,\beta_2) \subset R^2$$
$$U = \{X \in R^2 : |X - P| < r\}$$
$$f(x_1,\cdots,x_n) \text{ or } f(X) \text{ or } f(X)$$

예제)

$$f(x,y) = x + y$$
$$f(x,y) = x^2 + y^2$$
$$f(x,y,z) = e^x \cos(yz)$$
$$f(x,y) = \begin{cases} 1 & y > 0 \\ 0 & y \leqq 0 \end{cases}$$

2. 다변수 함수의 그래프

학생들은 2변수 함수의 그래프를 3차원에 그려봄으로 multivariable calculus에서 만나게 되는 기본적인 문제들을 경험해본다.

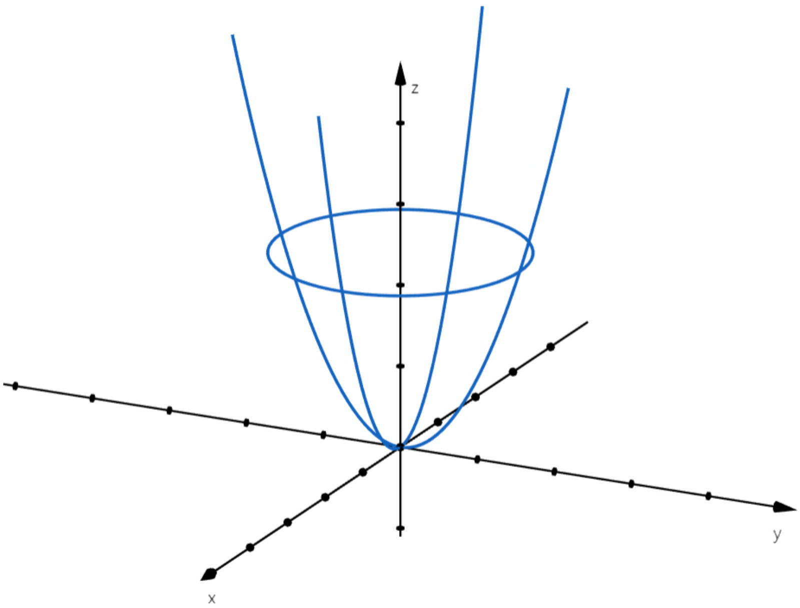
- 2변함수의 그래프를 그리는 법 배우기
- Level surface 생각하는 이유
- 다변수함수의 극한 정의
- 다변수함수의 불연속성 check 하는 법

다음 함수의 그래프를 그려보자

$$f(x,y)=x^2+y^2$$

$$z=x^2+y^2$$

yz-plane, xz-plane, plane $z=c$로 각각 자른 단면을 관찰한다.



$$\text{yz-plane} \Rightarrow x=0 \qquad z=y^2$$

$$\text{xz-plane} \Rightarrow y=0 \qquad z=x^2$$

$$z=c \quad \Rightarrow \quad x^2+y^2=c$$

그래프는 곡면으로 회전 포물면에 해당한다.

Q: 그래프를 관찰하면서 발견할 수 있는 것은 무엇인가?

예제) 다음 함수의 그래프를 그려보라

$$f(x,y) = 1 - x - y$$

$$z = 1 - x - y$$

$$x + y + z = 1 \qquad \text{평면의 방정식}$$

=> 일차함수의 그래프는 기하학적으로 평면이다.

3. Level curve and level surface

예제)

$$f(x,y,z) = x^2 + y^2 + z^2$$

$$w = x^2 + y^2 + z^2 \subset R^4$$

같은 함숫값을 갖는 점들의 집합

$$\{(x,y,z) : f(x,y,z) = c\} \subset R^3$$

$$x^2 + y^2 + z^2 = c$$

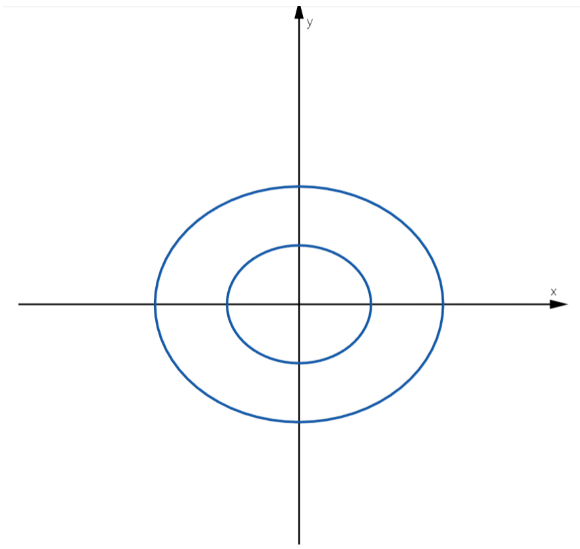
level surface를 통해서 f에 대해서 알 수 있는 것은 무엇인가?

예제)

$$f(x,y) = 2x^2 + 3y^2$$

$$z = x^2 + y^2$$

$$f(x,y) = c, \quad 2x^2 + 3y^2 = c$$



원점을 중심으로 한 원 위에서는 함수 값이 일정하다. level curve is circle.

일반적으로 $f: R^n \rightarrow R$ $\left\{X=(x_n, \cdots, x_n) \in R^n : f(X)=C\right\}$ is called "level set"

4. 함수의 극한과 연속성

정의)

$\lim_{x \to p} f(x) = L \quad \Leftrightarrow \quad |f(x) - L|$ is getting smaller as $|x - p|$ is getting smaller

예제)

$$\lim_{(x,y) \to (0,4)} \frac{x}{\sqrt{y}}$$

$$|(x,y) - (0,4)| \to 0$$

$$\Rightarrow \quad |x - 0| \to 0 \quad \text{and} \quad |y - 4| \to 0$$

$$\frac{x}{\sqrt{y}} \to \frac{0}{\sqrt{4}} = \frac{0}{2} = 0$$

예제)

$$\lim_{(x,y) \to (0,0)} \cos \frac{x^2 + y^2}{x + y + 1}$$

2.3

$$u \subset R^n \qquad f : u \to R$$

$$p \in u$$

<u>정의</u> f is continuous at p

$$\Leftrightarrow \quad \lim_{X \to P} f(X) = f(P)$$

예제)

$$f(x,y) = x + y$$

$$\lim_{(x,y) \to (a,b)} f(x,y) = \lim_{(x,y) \to (a,b)} x + y$$

$$= a + b = f(a,b)$$

예제)

$$f(x,y) = \frac{1}{x^2 + y^2 + 1}$$

$$\lim_{(x,y) \to (a,b)} \frac{1}{x^2 + y^2 + 1} = \frac{1}{a^2 + b^2 + 1}$$

예제)

$f(x,y) = \dfrac{x + y}{x^2 + y^2 + 1}$ is continuous everywhere

예제)

$$f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{x^2-y^2}{x^2+y^2} & (x,y)\neq (0,0)\\ 0 & (x,y)=(0,0)\end{cases}$$

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y)$$

Take line $x=0$ $\quad f(0,y)=-\dfrac{y^2}{y^2}=-1$

$$y=0 \quad f(x,0)=\frac{x^2}{x^2}=1$$

limit does not 예제)ist. f is not continuous at $(0,0)$

Q: 연속이 되는 것은 어떻게 보일 수 있는가?

예제)e 2.9 어떻게?

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y)=f(0,0)=0$$

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{xy}{\sqrt{x^2+y^2}}=0 \quad ?$$

$$x^2+y^2\geqq 2xy$$

$$\frac{1}{2}\geqq \frac{xy}{x^2+y^2}$$

$$\frac{\sqrt{x^2+y^2}}{2}\geqq \frac{xy}{\sqrt{x^2+y^2}}$$

$$\left|\frac{xy}{\sqrt{x^2+y^2}}-0\right|\to 0$$

$$0\leqq \left|\frac{xy}{\sqrt{x^2+y^2}}\right|\leqq \frac{1}{2}\sqrt{x^2+y^2}\to 0$$