19. $Ax=0$이면 $A^TAx=0$

$Ax=0 \quad [\overset{\to\mathbb{R}^m}{a_1} \cdots a_n]\begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}$

$= a_1x_1 + \cdots + a_nx_n = 0$

$A^TAx=0 \quad \begin{bmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_n \end{bmatrix}[a_1 \cdots a_n]\begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_1^2 & \cdots & a_1a_n \\ \vdots & & \\ a_na_1 & \cdots & a_n^2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}$

$\Rightarrow a_1(a_1x_1 + \cdots a_nx_n) = 0$

$\vdots$

$a_n(\underbrace{a_1x_1 + \cdots a_nx_n}_{0\text{이므로}}) = 0$

$\therefore \boxed{A^TAx=0}$

(b) $x^TA^TAx=0$

$\sim (Ax)^TAx=0 \rightarrow t^Tt = 0$이 된다.

$Ax = 0 = t$라고하자

20. A^TA는 invertible

$A^TA = \begin{bmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_n \end{bmatrix}[a_1 \cdots a_n] = \begin{bmatrix} a_1^2 & \cdots & a_1a_n \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_na_1 & \cdots & a_n^2 \end{bmatrix}$

각열은 일차독립이므로 $\begin{bmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_n \end{bmatrix}a_1 \cdots\cdots \begin{bmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_n \end{bmatrix}a_n$은 모두 독립

이때 $\begin{bmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_n \end{bmatrix} = t \cdots [ta_1 \cdots ta_n]$이 모두 독립이기

위해서는 $[a_1 \cdots a_n]$이 모두

독립이어야 하므로 A는 linearly independent 하다.

21. (a) $A^TA = \begin{bmatrix} a_1^2 & \cdots & a_1a_n \\ & \ddots & \\ a_na_1 & & a_n^2 \end{bmatrix}$이고 n by n matrix이므로,

A^TA는 linearly independent 이므로, invertible 하다.

(b) A가 linear independent 이기 위해서는 최소 n개의 pivot position을 가져야하므로

$m \geq n$

(c) n