다변수 미분적분학.

노트 제목 2013-03-14

Quiz → 조교실

전시간 : 다변수 함수의 극한 $\lim_{(x,y)\to(a,b)} f(x,y) = L$

1 변수 함수의 경우 : $f(x)$ 가 $x=a$ 에서 연속

$\overset{}{\underset{\text{정의}}{\Leftrightarrow}}$ $\lim_{x\to a} f(x) = f(a)$

다변수 함수의 경우 연속의 정의

$f(x,y)$: 2변수 함수 (3, 4, ·· 변수도 마찬가지)

f 가 (a,b) 에서 연속이다

$\underset{\text{정의}}{\Leftrightarrow}$ $\lim_{(x,y)\to(a,b)} f(x,y) = f(a,b)$

$f(x,y)$ 가 $D \subset \mathbb{R}^2$ 에서 연속이다.

$\underset{\text{정의}}{\Leftrightarrow}$ f 가 D의 모든 점에서 연속이다.

예) 연속함수의 예 (check : $\varepsilon-\delta$)

$f(x,y)=1$ → "상수함수는 항상 연속"

$f(x,y)=x$ → 연속

$f(x,y)=y$ → 연속.

※ 연속 + 연속 → 연속 (check!)

$f(x,y) = x+y$

※ 연속 × 연속 → 연속 (check!)

$f(x,y) = xy$

$\rightarrow x^2,\ xy,\ y^2,\ x^3,\ \cdots$

$\therefore$ " x, y 에 대한 다항함수는 모두 연속이다. "

※ $\frac{\text{연속}}{\text{연속}} \rightarrow$ 연속 (check!)

(단, 분모 $= 0$ 인 곳은 제외)

예) $\dfrac{3x^2y + 5x^3y^2}{2x - 3y}$: 분모 $\neq 0$ 인 부분에서 연속.

$\therefore$ " x, y 에 대한 유리함수는 정의역에서 연속 "

예) $f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{x^2-y^2}{x^2+y^2} & (x,y) \neq (0,0) \\ ? & (x,y) = (0,0) \end{cases}$

그런데 $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^2-y^2}{x^2+y^2}$ 이 존재하지 않는다.

$\Rightarrow$ 어떤 값을 넣어도 $(0,0)$ 에서 연속이 될 수 없다.

예) $f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{3x^2y}{x^2+y^2} & (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & (x,y) = (0,0) \end{cases}$

$\Rightarrow$ 모든 점에서 연속

§14.3 Partial Derivatives 편미분

$z = f(x,y)$

예) $f(x,y) = x^3 + x^2y^3 - 2y^2$

$\rightarrow g(x) := f(x,1) = x^3 + x^2 - 2$

$\rightarrow g'(x) = 3x^2 + 2x$: " $y=1$ 일 때의 $f(x,y)$ 의 x 에 대한 편미분 "

$\rightarrow \quad g'(2) = 3\cdot 2^2 + 2\cdot 2 = 16$: "$(x,y)=(2,1)$ 에서의 $f(x,y)$ 의 x에 대한 편미분"

그렇다면:

같은 점 $(x,y)=(2,1)$ 에서의 $f(x,y)$ 의 y에 대한 편미분:

$$f(2,y) = 8 + 4y^3 - 2y^2 \xrightarrow[y\text{에 대해 미분}]{} 12y^2 - 4y \xrightarrow[y=1]{} 8$$

일변수 함수의 경우 : $y=f(x) \rightsquigarrow \underset{\text{미분계수}}{f'(a)} \rightsquigarrow \underset{\text{도함수}}{f'(x)}$.

$$f(x,y) = x^3 + x^2y^3 - 2y^2$$

$\rightarrow \begin{cases} f_x = 3x^2 + 2xy^3 & : \text{"}f\text{의 } x\text{에 대한 편도함수"} \\ f_y = 3x^2y^2 - 4y & : \text{" '' } y \text{ '' '' '' "} \end{cases}$

Notation 일변수 경우 : $y=f(x) \underset{\text{미분}}{\rightsquigarrow} f'(x),\ \frac{df}{dx},\ \frac{dy}{dx},\ y', \cdots$

$\downarrow$ 확장

다변수 경우 : $z = f(x,y)$

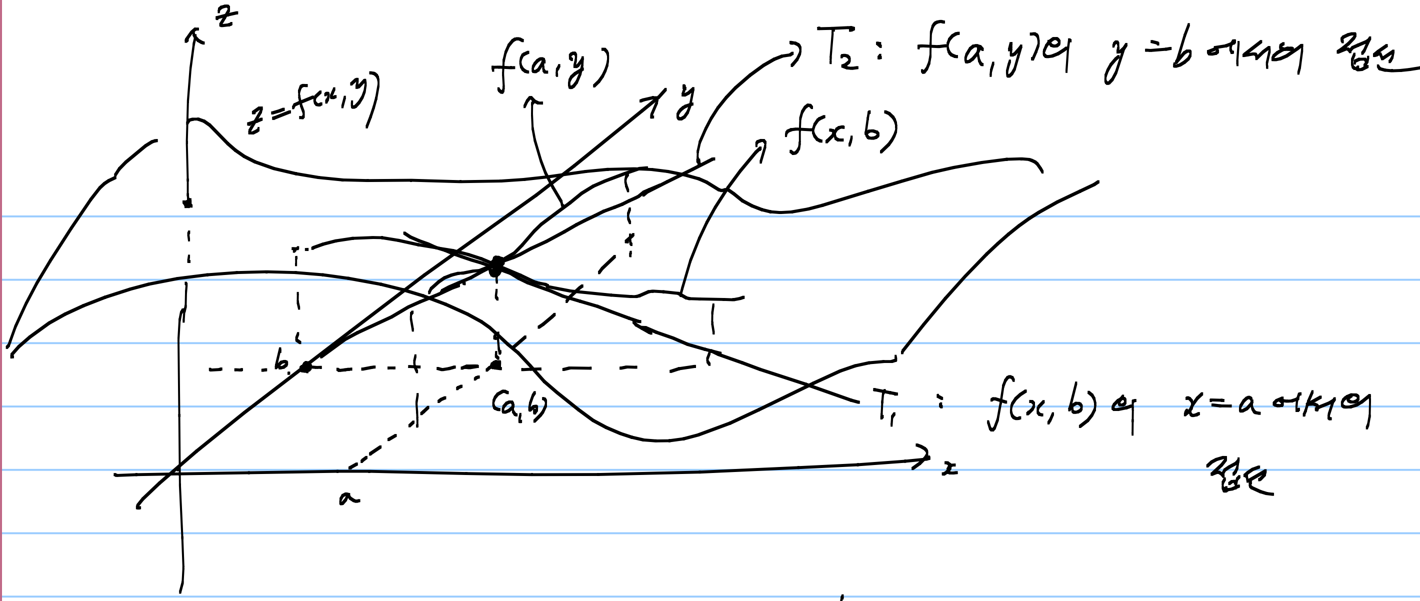
x에 대한 편도함수 : $\frac{\partial f}{\partial x},\ \frac{\partial z}{\partial x},\ \frac{\partial}{\partial x} f(x,y), \cdots$

∂ : "round", "d" $\qquad D_x f,\ D_1 f$

정의

$$\boxed{\begin{aligned} f_x(x,y) &:= \lim_{h\to 0} \overbrace{\frac{f(x+h,y)-f(x,y)}{h}}^{f_x} \\ f_y(x,y) &:= \lim_{h\to 0} \frac{f(x,y+h)-f(x,y)}{h} \end{aligned}}$$

기하학적 의미 $\qquad z = f(x,y) \longrightarrow \begin{cases} f_x(x,y) \\ f_y(x,y) \end{cases}$



$$\rightarrow \begin{cases} f_x(a,b) = \dfrac{d}{dx} f(x,b) \Big|_{x=a} \rightarrow T_1 \text{ 의 기울기.} \\ f_y(a,b) = \dfrac{d}{dy} f(a,y) \Big|_{y=b} \rightarrow T_2 \text{ 의 기울기} \end{cases}$$

Implicit Differentiation

$z = f(x,y)$: 양함수

$F(x,y,z) = 0$: 음함수 (implicit function)

예) $x^2+y^2+z^2=1 \rightarrow z = \sqrt{1-x^2-y^2}$

예) $x^3+y^3+z^3+6xyz=1$: $z \leftarrow (x,y)$

$\rightarrow \dfrac{\partial z}{\partial x}, \dfrac{\partial z}{\partial y}$?

$$x^3+y^3+z(x,y)^3+6xy \cdot z(x,y) \equiv 1$$

"x,y 에 대한 함수로서"

↓ 편미분.

$$0 = \frac{\partial}{\partial x}(좌) = 3x^2 + 3z(x,y)^2 \cdot \frac{\partial z}{\partial x} + 6y\left\{1 \cdot z(x,y) + x \cdot \frac{\partial z}{\partial x}\right\}$$

$$0 = \frac{\partial}{\partial y}(좌) = 3y^2 + 3z(x,y)^2 \cdot \frac{\partial z}{\partial y} + 6x \cdot \left\{1 \cdot z(x,y) + y \cdot \frac{\partial z}{\partial y}\right\}$$

$$\rightarrow \begin{cases} (3z^2+6xy)\cdot \dfrac{\partial z}{\partial x} = -(3x^2+6yz) \\ (3z^2+6xy)\cdot \dfrac{\partial z}{\partial y} = -(3y^2+6xz) \end{cases}$$

$$\rightarrow \begin{cases} \dfrac{\partial z}{\partial x} = -\dfrac{3x^2+6yz}{3z^2+6xy} \\ \dfrac{\partial z}{\partial y} = -\dfrac{3y^2+6xz}{3z^2+6xy} \end{cases}$$