- Determinação de autovalores e autovetores

Dado um operador qualquer T e se v é um autovetor associado ao autovalor λ, então $T(v) = \lambda \cdot v$. E também pela definição de operador linear $T(v) = A \cdot v$, onde A é a matriz associada ao operador T, ou seja, $\lambda \cdot v = A \cdot v$.

Por exemplo, seja $T : R^2 \to R^2$ tal que $T(x, y) = (3x + y, x + 3y)$ e tome o vetor $v = (1, 1)$. Como já vimos anteriormente, no exemplo 4.1, temos $T(1, 1) = 4 \cdot (1, 1)$, ou seja, $\lambda = 4$ é um autovalor do autovetor $v = (1, 1)$, ou seja, $T(v) = \lambda \cdot v$.

Do mesmo modo, tomando a matriz do operador T:

$$A = \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 3 \end{bmatrix}$$

temos que:

$$A \cdot v = \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 3 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 \\ 4 \end{bmatrix} = 4 \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} = 4 \cdot v = \lambda \cdot v$$

exatamente como na observação inicial.

De maneira geral, se multiplicarmos um autovetor v pelo autovalor associado λ, é o mesmo que multiplicarmos a matriz A do operador pelo autovalor λ, ou seja, $\lambda \cdot v = A \cdot v$.

Seja o operador T, cuja matriz associada é A, e considere v o autovetor de T associado ao autovalor λ. Pela observação anterior, tem-se $\lambda \cdot v = A \cdot v$. Reescrevendo temos:

$$A \cdot v - \lambda \cdot v = 0 \qquad (1)$$

Multiplique-se agora a matriz identidade I, em ambos os lados da equação (1), e obtemos:

$$I \cdot A \cdot v - I \cdot \lambda \cdot v = 0$$

$$A \cdot v - \lambda \cdot I \cdot v = 0$$

$$(A - \lambda \cdot I) \cdot v = 0$$

Essa equação matricial tem uma solução que é $v = 0$, mas, pela definição de autovetor, queremos $v \neq 0$. Assim, para que o sistema linear associado admita soluções diferentes da trivial, é necessário que $\det(A - \lambda \cdot I) = 0$. Essa equação é uma equação em λ, chamada de equação característica de T ou polinômio característico de T.

Lembre-se de que todo sistema linear tem uma equação matricial associada $A \cdot X = b$, e se $\det A \neq 0$, então A admite inversa e podemos encontrar a solução única do sistema fazendo $X = A–1 \cdot b$. Assim, fica justificado o porquê de o determinante de $A - \lambda \cdot I$ ter que ser igual a zero.

Para ilustrar as ideias anteriores, vamos tomar uma transformação $T : R^2 \to R^2$, cuja matriz A é dada por:

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix}$$

Assim, de $(A - \lambda \cdot I) \cdot v = 0$, temos:

$$\left(\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix} - \lambda \cdot \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \right) \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} a_{11} - \lambda & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} - \lambda \end{bmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \qquad (2)$$

Como $\det \begin{bmatrix} a_{11} - \lambda & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} - \lambda \end{bmatrix} = 0$, temos:

$$(a_{11} - \lambda)(a_{22} - \lambda) - a_{12} \cdot a_{21} = 0,$$

o que nos dá uma equação do 2º grau em λ. Com os λ´s calculados, substituímos na equação (2) para encontrar os autovetores associados.

.

4.3. Determine os autovalores e autovetores do operador

$T(x, y) = (3x + y, x + 3y)$.

1º) MATRIZ DO O.L. é $A = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$

2º) MONTAR MATRIZ $A - \lambda I$

$$\begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix} - \lambda \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3-\lambda & 1 \\ 1 & 3-\lambda \end{pmatrix}$$

3º) $Det(A - \lambda I)$

$$\begin{vmatrix} 3-\lambda & 1 \\ 1 & 3-\lambda \end{vmatrix} = (3-\lambda)^2 - 1 = 0$$

$$(3-\lambda) = \pm\sqrt{1}$$

$$-\lambda = -3 \pm 1$$

$$\lambda = 3 \pm 1$$

$$\lambda_1 = 4 \qquad \lambda_2 = 2$$

4º) Resolver $(A - \lambda I) \cdot v = 0$ para calcular os Auto valores.

se $\lambda_1 = 4$;

$$(A - I\lambda) \cdot v = 0$$

$$\begin{pmatrix} 3-\lambda & 1 \\ 1 & 3-\lambda \end{pmatrix} v = 0$$

$$\begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{cases} -1x + y = 0 \\ -x = -y \\ x = y \\ \hline x - y = 0 \\ y - y = 0 \\ 0 = 0. \end{cases}$$

$\therefore x = y$

ou $y = x$ } INFINITOS!

Como $y=x$, de $\lambda_1=4$

temos vetores associados $V=(x,y)=(x,x)=$

$$V=x(1,1)$$

ou seja, infinitos autovetores $V=x(1,1)$

4.2) $(A-I\lambda_2)\cdot V=0 \qquad \lambda_2=2$

$$\begin{pmatrix} 3-2 & 1 \\ 1 & 3-2 \end{pmatrix} V = 0$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$x+y=0$$

$$y=-x$$

parecido com o anterior, infinitos

vetores $V=(x,y)=(x,-x)=x(1,-1)$

Então, $\boxed{V_1=(1,1)}$ é autovetor do

autovalor $\boxed{\lambda_1=4.}$

$\boxed{V_2=(+1,-1)}$ é autovetor do

autovalor $\boxed{\lambda_2=2.}$

(mas, existem outros).

4.4. Seja $T: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$, tal que $T(x, y, z) = (x, 2x - 2y, -3x + y + 2z)$. Determine os autovalores e autovetores do operador T.

1) MATRIZ ASSOCIADA

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & -2 & 0 \\ -3 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

2)

$$A - \lambda I_3 = \begin{pmatrix} 1-\lambda & 0 & 0 \\ 2 & -2-\lambda & 0 \\ -3 & 1 & 2-\lambda \end{pmatrix}$$

3)

$$\det(A - \lambda I_3) = \begin{vmatrix} 1-\lambda & 0 & 0 \\ 2 & -2-\lambda & 0 \\ -3 & 1 & +2-\lambda \end{vmatrix} = (1-\lambda)(-2-\lambda)(2-\lambda)$$

$$(1-\lambda)(-2-\lambda)(2-\lambda) = 0$$

$1-\lambda=0$, $\lambda = 1$

$-2-\lambda=0$, $-\lambda = 2$, $\lambda=-2$

$2-\lambda=0$, $\lambda=2$

$$\therefore (\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3) = (-2, 1, 2)$$

4) a) $\lambda_1 = -2$

$$(A - \lambda_1 I_3)V_1 = 0$$

$$\begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 0 \\ -3 & 1 & 4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$\boxed{x=0} \longrightarrow \cancel{-3x} + y + 4z = 0$

$y + 4z = 0$

$\boxed{y = -4z}$

$$V_1 = (0, -4z, z) = z(0, -4, 1)$$

$\therefore$ Auto vetor $V_1 = (0, -4, 1)$ tem Auto valor $\lambda_1 = -2$

4a) $\lambda_2 = 1$

$(A - \lambda_2 I_3)V_2 = 0$

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 2 & -3 & 0 \\ -3 & 1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 2 & -3 & 0 & 0 \\ -3 & 1 & 1 & 0 \\ \cancel{0} & \cancel{0} & \cancel{0} & \cancel{0} \end{array}\right) \longrightarrow$$

$L_2 = 2L_2 + 3L_1$

$$\begin{pmatrix} 2 & -3 & 0 \\ 0 & -7 & 2 \end{pmatrix} \xrightarrow{L_1 = 7L_1 - 3L_2} \begin{pmatrix} 4 & 0 & -6 \\ 0 & -7 & 2 \end{pmatrix} \xrightarrow[L_2 = -\frac{1}{7}L_2]{L_1 = \frac{1}{4}L_1}$$

$$\begin{pmatrix} 2 & -3 & 0 \\ 0 & -7 & 2 \end{pmatrix} \xrightarrow{L_1 = 7L_1 - 3L_2} \begin{pmatrix} 14 & 0 & -6 \\ 0 & -7 & 2 \end{pmatrix} \xrightarrow[L_2 = -\frac{1}{7}L_2]{L_1 = \frac{1}{14}L_1}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & -3/7 & 0 \\ 0 & 1 & -2/7 & 0 \end{pmatrix}$$
$$\begin{matrix} 0 & 0 & 0 & 0 \end{matrix}$$

$x = \frac{3}{7}z \wedge y = \frac{2}{7}z$

$V_2\left(\frac{3}{7}z, \frac{2}{7}z, z\right)$

$V_2 = z\left(\frac{3}{7}, \frac{1}{7}, 1\right)$

$\therefore$

$V_2 = \left(\frac{3}{7}, \frac{2}{7}, 1\right)$ é autovetor do autovalor $\lambda_2 = 1$

4c) $\lambda_3 = 2$

$(A - \lambda_3 I_3) V_3 = 0$

$$\begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 2 & -4 & 0 \\ -3 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$-x = 0$ $\qquad$ $\cancel{2x} - 4y = 0$ $\qquad$ $-3\cancel{x} + y = 0$

$x = 0$ $\qquad$ $y = 0$ $\qquad$ $y = 0$

$z \in \mathbb{R}$. $\qquad$ $V_3 = (0, 0, z) = z(0, 0, 1)$

$\therefore$ $V_3 = (0, 0, 1)$ é autovetor do autovalor $\lambda_3 = 2$

$\therefore$ $T(x, y, z) = (x, 2x - 2y, -3x + y + 2z)$

$\lambda_1 = -2$; $V_1 = (0, -4, 1)$

$\lambda_2 = 1$; $V_2 = (\frac{3}{7}, \frac{2}{7}, 1)$

$\lambda_3 = 2$; $V_3 = (0, 0, 1)$

PROVA REAL.

$T(x,y,z) = (x,\ 2x-2y,\ -3x+y+2z)$

$\lambda_1 = -2$

$T(V_1) = T(0,-4,1) = (0,\ 0+8,\ 0-4+2)$

$= (0,+8,-2) = -2(0,-4,1) = \lambda_1 V_1$

$\therefore\ T(V_1) = \lambda_1 V_1$

$T(V_2) = T\left(\frac{3}{7}, \frac{2}{7}, 1\right)$

$= \left(\frac{3}{7},\ \frac{6}{7} - \frac{4}{7},\ -\frac{9}{7} + \frac{2}{7} + 2\right)$

$= \left(\frac{3}{7}, \frac{2}{7}, 1\right) = 1\left(\frac{3}{7}, \frac{2}{7}, 1\right) = \lambda_2 V_2$

$\therefore\ T(V_2) = \lambda_2 V_2$

$T(V_3) = T(0,0,1) = (0,0,2)$

$= 2(0,0,1) = \lambda_3 V_3$

$\therefore\ T(V_3) = \lambda_3 V_3.$

4.5. Encontre os autovetores e autovalores da matriz:

$$A = \begin{bmatrix} 10 & -9 \\ 4 & -2 \end{bmatrix}$$

$$A - \lambda I = \begin{pmatrix} 10-\lambda & -9 \\ 4 & -2-\lambda \end{pmatrix}$$

$$\det(A-\lambda I) = \begin{vmatrix} 10-\lambda & -9 \\ 4 & -2-\lambda \end{vmatrix} = (10-\lambda)(-2-\lambda)+36=0$$

$$-20-10\lambda+2\lambda+\lambda^2+36=0$$

$$\lambda^2-8\lambda+16=0$$

$$(\lambda-4)^2=-16+16$$

$$\lambda-4=0$$

$$\boxed{\lambda_1=\lambda_2=4.}$$

$\therefore$, p/ $\lambda=4$; $AX=\vec{0}$

$$\begin{pmatrix} 6 & -9 \\ 4 & -6 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\left(\begin{array}{cc|c} 6 & -9 & 0 \\ 4 & -6 & 0 \end{array}\right) \longrightarrow \left(\begin{array}{cc|c} 2 & -3 & 0 \\ 2 & -3 & 0 \end{array}\right) \longrightarrow$$

$$\rightarrow \begin{pmatrix} 2 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{array}{l} 2x-3y=0 \\ 2x=3y \\ y=\frac{3}{2}x \end{array}$$

$$V=(x,y)=(x,\tfrac{3}{2}x)=x(1,\tfrac{3}{2})$$

$\therefore$ O autovetor $(1,\frac{3}{2})$ é associado ao autovalor $\lambda=4$ com multiplicidade 2

4.6 Encontre os autovalores e autovetores da matriz:

$$A = \begin{bmatrix} -2 & -7 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$$

$$A - \lambda I = \begin{pmatrix} -2-\lambda & -7 \\ 1 & 2-\lambda \end{pmatrix}$$

$$\det(A-\lambda I) = \begin{vmatrix} -2-\lambda & -7 \\ 1 & 2-\lambda \end{vmatrix} = -1(2+\lambda)(2-\lambda) + 7 = 0$$

$$-(4-\lambda^2) = -7$$

$$4-\lambda^2 = 7$$

$$+\lambda^2 = -3$$

$$\lambda = \pm\sqrt{-3}$$

$$\lambda \notin \mathbb{R}$$

$\therefore$ Não há autovalores reais para a matriz.

AGORA, ESTUDE OS EXERCÍCIOS 4 E 5 DO FINAL DO MATERIAL COMPLETO, COM RESOLUÇÕES LOGO APÓS.