SEÇÃO 1 – Retas Tangentes e Taxas de Variação

No estudo das derivadas, antes de defini-las, é interessante que você conheça a inclinação de retas tangentes.

Lembre-se que uma reta qualquer possui uma inclinação que é dada pelo ângulo formado entre a reta e o eixo horizontal. Veja a Figura 3.1:

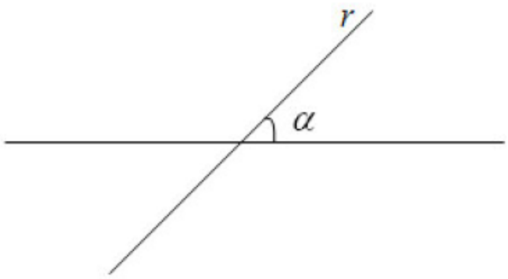

Figura 3.1 – Representação da inclinação de uma reta r.

Assim, a inclinação da reta é dada pela tangente do ângulo α $(tg\alpha)$.

Observe agora a Figura 3.2:

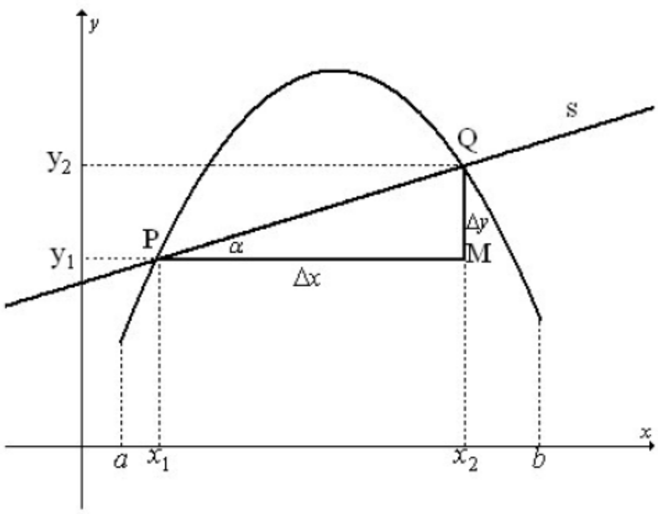

Figura 3.2 – Curva dada por *y=f(x)* e a reta secante s.

Nesta Figura 3.2 traçou-se o gráfico de uma função qualquer (por exemplo, uma função do segundo grau), bem como uma **reta secante** que passa pelos pontos P e Q.

Para determinar a inclinação da reta secante s, pode-se escrever a tangente de α já que o triângulo PMQ é retângulo:

$$tg\alpha = \frac{cateto\ oposto}{cateto\ adjacente} = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1}$$

Agora imagine que ao colocar um alfinete no ponto P para que fique fixo o ponto Q passa a se mover em direção ao ponto P. Perceba que a reta se move mas, com o alfinete imaginário, o ponto P não sai do lugar.

Quando Q chega próximo a P, a reta secante passa a se transformar em uma reta tangente. Neste processo, o que interessa é a análise das inclinações das retas mencionadas: a secante e a tangente. Se a reta secante se aproxima da reta tangente, então é possível dizer que o ponto Q tende para o ponto P, ou ainda, a inclinação da reta secante varia cada vez menos e tende a um valor limite constante.

Você percebeu que aparecem as tendências estudadas na unidade 2 que trata sobre os limites?

É possível escrever estas considerações da seguinte forma:

$$\lim_{Q \to P} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{x_2 \to x_1} \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1}$$

É interessante que o limite acima seja reescrito. Já que $\Delta x = x_2 - x_1$, então $x_2 = x_1 + \Delta x$, assim:

$$m(x_1) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x_1 + \Delta x) - f(x_1)}{\Delta x}$$

sendo $m(x_1)$ a inclinação da reta tangente à curva dada por $y=f(x)$ no ponto P.

Exemplos

Para entender melhor o assunto observe os exemplos a seguir!

Exemplo 1: Como determinar a inclinação da reta tangente à curva $y=x^2+1$ no ponto $P(1,2)$?

Lembre-se que a inclinação da reta tangente é dada por $m(1)$, visto que o ponto P possui $x=1$, e pode ser calculada pelo limite:

$$m(1) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(1+\Delta x) - f(1)}{\Delta x}$$

sendo

$$f(1+\Delta x) = (1+\Delta x)^2 + 1 = 1 + 2\Delta x + (\Delta x)^2 + 1 = 2 + 2\Delta x + (\Delta x)^2$$
$$f(1) = 1^2 + 1 = 2$$

Desta forma você obterá:

$$\begin{aligned} m(1) &= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{2 + 2\Delta x + (\Delta x)^2 - 2}{\Delta x} \\ &= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{2\Delta x + (\Delta x)^2}{\Delta x} \\ &= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta x(2+\Delta x)}{\Delta x} \\ &= \lim_{\Delta x \to 0} (2+\Delta x) \\ &= 2 + 0 = 2. \end{aligned}$$

Portanto, a inclinação da reta tangente à curva $y=x^2+1$ no ponto $P(1,2)$ é igual 2.

Veja a Figura 3.3 que representa a curva e a reta tangente no ponto $P(1,2)$.

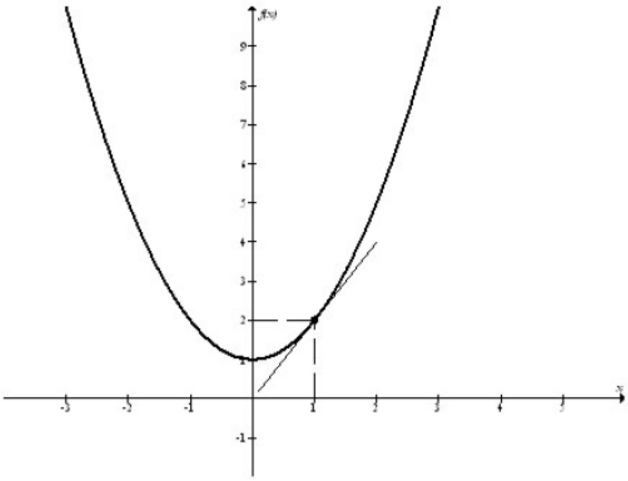

Figura 3.3 – Reta tangente à curva $y=x^2+1$ no ponto $P(1,2)$

Exemplo 2: Encontre a equação da reta tangente á curva $y=\sqrt{x}$ no ponto em que $x=4$.

Este problema solicita a equação da reta tangente. Para calcular esta equação, você deve inicialmente determinar a inclinação da reta calculando m e substituindo na equação da reta tangente, que é dada por:

$$y-f(x_1)=m(x-x_1)$$

Quando o limite que define m for infinito, então a equação da reta tangente é dada por $x=x_1$.

Inicialmente calcule o valor de $m(4)$

$$\begin{aligned} m(4) &= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(4+\Delta x)-f(4)}{\Delta x} \\ &= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\sqrt{4+\Delta x}-\sqrt{4}}{\Delta x} \\ &= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\sqrt{4+\Delta x}-2}{\Delta x} \end{aligned}$$

Este limite é uma indeterminação do tipo $\frac{0}{0}$. Portanto, é necessário tirar esta indeterminação, multiplicando numerador e denominador por $\left(\sqrt{4+\Delta x}+2\right)$:

$$m(4)=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\left(\sqrt{4+\Delta x}-2\right)}{\Delta x}\frac{\left(\sqrt{4+\Delta x}+2\right)}{\left(\sqrt{4+\Delta x}+2\right)}$$

$$=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\left(\sqrt{4+\Delta x}\right)^2-2^2}{\Delta x\left(\sqrt{4+\Delta x}+2\right)}$$

$$=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{4+\Delta x-4}{\Delta x\left(\sqrt{4+\Delta x}+2\right)}$$

$$=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{1}{\left(\sqrt{4+\Delta x}+2\right)}$$

$$=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{1}{\left(\sqrt{4+0}+2\right)}$$

$$=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{1}{\sqrt{4}+2}=\frac{1}{4}$$

A reta tangente será:

$$y-f(4)=m(x-4)$$

$$y-\sqrt{4}=\frac{1}{4}(x-4)$$

$$y-2=\frac{x}{4}-1$$

$$y=\frac{x}{4}-1+2$$

$$y=\frac{x}{4}+1$$

Você pode utilizar um software matemático para traçar o gráfico da função $y=\sqrt{x}$ e da reta $y=\frac{x}{4}+1$

Neste gráfico você poderá visualizar a reta tangente à curva no ponto (4,2).

Agora é a sua vez!

Use folhas adicionais para realizar seus cálculos.

1) Determine a inclinação da reta tangente à curva $y=x^2+2x+1$ no ponto (1,4).

2) Qual a equação da reta tangente à esta mesma curva $y=x^2+2x+1$ no ponto (-1,0)?

Retomando o estudo...

Você pode achar estranho estarmos falando de **retas tangentes**, um assunto que parece ser da Geometria. Mas é a partir das retas tangentes que houve um aprofundamento no estudo do movimento de objetos.

A partir destes estudos, é possível definir a taxa média de variação e a taxa instantânea de variação.

A taxa média de variação é dada pela inclinação da reta secante, que pode ser escrita conforme você já viu anteriormente da seguinte forma:

$$tg\alpha = \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1}$$

A taxa de variação instantânea é dada pela inclinação da reta tangente, que pode ser escrita através do limite abaixo conforme visto anteriormente.

$$m(x_1) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x_1 + \Delta x) - f(x_1)}{\Delta x}$$

Exemplos

Para entender melhor o assunto observe os exemplos a seguir!

Seja a função $f(x)=x^2-1$.

a) Determine a taxa média de variação de y em relação a *x* no intervalo [1,3].

Aplicando a fórmula apresentada temos:

$$\text{Taxa média} = \frac{f(x_2)-f(x_1)}{x_2-x_1}$$

$$= \frac{f(3)-f(1)}{3-1}$$

$$= \frac{(3^2-1)-(1^2-1)}{2}$$

$$= \frac{9-1-0}{2}$$

$$= \frac{8}{2} = 4$$

b) Encontre a taxa de variação instantânea de *y* em relação a *x* no ponto *x=1*.

$$\text{Taxa instantânea} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(1+\Delta x)-f(1)}{\Delta x}$$

$$= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{(1+\Delta x)^2 - 1 - (1^2-1)}{\Delta x}$$

$$= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{1+2\Delta x+(\Delta x)^2-1-0}{\Delta x}$$

$$= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{2\Delta x+(\Delta x)^2}{\Delta x}$$

$$= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta x(2+\Delta x)}{\Delta x}$$

$$= \lim_{\Delta x \to 0} (2+\Delta x)$$

$$= 2+0 = 2$$

Na unidade 4 você terá a oportunidade de aprofundar os conceitos de taxa de variação média e instantânea, além de resolver problemas práticos que envolvem tais taxas.

Neste momento, você precisa entender as conexões entre o cálculo da inclinação da reta tangente e as taxas de variação com o conceito de derivada de uma função.

SEÇÃO 2 – Derivada de uma função

O conceito de derivada passa a ser simples se você entendeu as considerações apresentadas na seção 1 desta unidade.

A derivada de uma função *y=f(x)* é também uma função calculada pelo limite:

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{f\left(x+\Delta x\right)-f\left(x\right)}{\Delta x}$$

Não é uma coincidência!

Se este limite existe, representa a derivada de uma função, que escrevemos como *f'(x)* (lê-se *f* linha de *x*).

Além da notação f'(x) também é possível escrever:

$D_x f(x)$ - derivada de f(x) em relação a x.

$D_x y$ - derivada de y em relação a x

$\dfrac{dy}{dx}$ - derivada de y em relação a x

Perceba que, ao calcular uma derivada em um ponto P qualquer, você está calculando a inclinação da reta tangente à curva dada pela função neste mesmo ponto P. Além disso, a derivada pode representar a taxa de variação de uma grandeza em relação a outra.

A astronomia fascinava Newton, que estava sempre observando o movimento dos planetas. Acredita-se que, foi questionando as órbitas dos planetas, observando e estudando seus movimentos, que Newton iniciou sua longa produção científica, que englobou as derivadas e integrais, assim como a base da mecânica clássica.

Pode acontecer que o limite da definição da derivada de uma função em um ponto não exista. Nesse caso, dizemos que a derivada não existe. Esse fato é facilmente visualizado numa representação gráfica, pois um ponto anguloso é observável (veja a Figura 3.4).

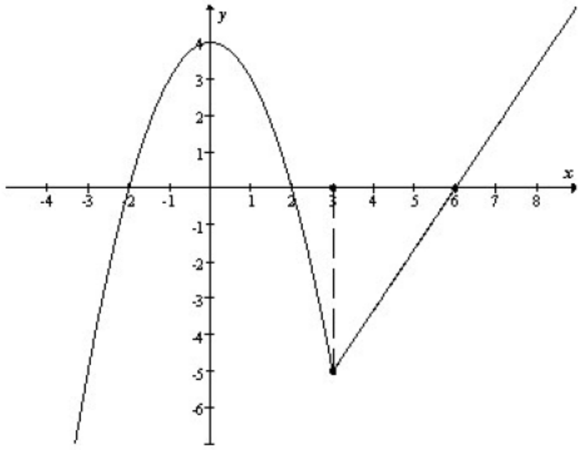

Figura 3.4 – Gráfico de uma função que possui um ponto anguloso em x=3

Exemplos

Para entender melhor o assunto observe os exemplos a seguir!

Exemplo 1: Calcule a derivada da função $f(x)=x^2-1$.

$$
\begin{aligned}
f'(x) &= \lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x} \\
&= \lim_{\Delta x\to 0}\frac{(x+\Delta x)^2-1-(x^2-1)}{\Delta x} \\
&= \lim_{\Delta x\to 0}\frac{x+2x\Delta x+(\Delta x)^2-1-x^2+1}{\Delta x} \\
&= \lim_{\Delta x\to 0}\frac{2x\Delta x+(\Delta x)^2}{\Delta x} \\
&= \lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta x(2x+\Delta x)}{\Delta x} \\
&= \lim_{\Delta x\to 0} 2x+0 = 2x
\end{aligned}
$$

Se a derivada da função *f(x)*=x^2-*1* é dada por *f'(x)=2x*, então para um ponto *x* qualquer, que pertence do domínio de *f(x)*, teremos a inclinação da reta tangente.

Por exemplo, para o ponto *x=0*, temos

$$f'(0)=2x0=0$$

Se a inclinação é igual a zero, isto significa que a $\text{tg}\alpha = 0$, ou seja, $\alpha = 0$. Veja na Figura 3.5 a representação da reta tangente no ponto (0,-1). Observe que esta reta tangente é paralela ao eixo *x*.

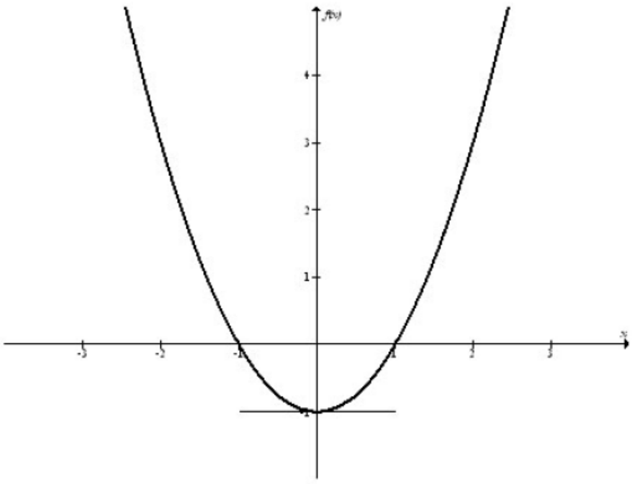

Figura 3.5: Gráfico de *f(x)*=x^2-*1* com a reta tangente no ponto (0,-1)

Exemplo 2: Qual a derivada da função $s(t) = \dfrac{1}{t+1}$?

Para calcular esta derivada, basta determinar o seguinte limite:

$$s'(t) = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{f(t+\Delta t) - f(t)}{\Delta t}$$

Perceba que a função apresentada está escrita usando-se as variáveis s e t. Portanto, é necessário fazer a troca de variáveis no limite a ser calculado.

$$
\begin{aligned}
s'(t) &= \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\dfrac{1}{t+\Delta t+1} - \dfrac{1}{t+1}}{\Delta t} \\
&= \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\dfrac{t+1-(t+\Delta t+1)}{(t+\Delta t+1)(t+1)}}{\Delta t} \\
&= \lim_{\Delta t \to 0} \frac{-(\Delta t)}{(t+\Delta t+1)(t+1)} \times \frac{1}{\Delta t} \\
&= \lim_{\Delta t \to 0} \frac{-1}{(t+\Delta t+1)(t+1)} \\
&= \lim_{\Delta t \to 0} \frac{-1}{(t+0+1)(t+1)} = \frac{-1}{(t+1)(t+1)} = \frac{-1}{(t+1)^2} = \frac{-1}{t^2+2t+1}
\end{aligned}
$$

Você viu na unidade 2 o conceito de continuidade de uma função qualquer. Existe um teorema que diz que **toda função que possui derivada no ponto x_1 é contínua nesse ponto**.

Analisando o exemplo 1), é possível dizer que no ponto $x=0$ a função $f(x)=x^2-1$ é contínua já que existe a derivada neste ponto.

Exemplo 3: Verifique se a função $f(x)=|x|$ não é derivável no ponto $x=0$.

Para verificar se a função $f(x)$ é derivável em $x=0$, você deve calcular o limite que define a derivada de uma função:

$$
\begin{aligned}
f'(0) &= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(0+\Delta x) - f(0)}{\Delta x} \\
&= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{|0+\Delta x| - |0|}{\Delta x} \\
&= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{|\Delta x|}{\Delta x}
\end{aligned}
$$

Perceba que o limite envolve uma função modular. Conforme você estudou na unidade 1, este módulo pode ser reescrito como:

$$
|\Delta x| = \begin{cases} \Delta x & ; \quad \Delta x \geq 0 \\ -\Delta x & ; \quad \Delta x < 0 \end{cases}
$$

Desta forma, será necessário calcular os limites laterais pois $\Delta x \to 0$:

$$\lim_{\Delta x \to 0^+} \frac{\Delta x}{\Delta x} = 1$$
$$\lim_{\Delta x \to 0^-} \frac{-\Delta x}{\Delta x} = -1$$

Se os limites laterais não são iguais, dizemos que o limite não existe, ou seja,

$$\lim_{\Delta x \to 0^+} \frac{\Delta x}{\Delta x} \neq \lim_{\Delta x \to 0^-} \frac{-\Delta x}{\Delta x} \Rightarrow \lim_{\Delta x \to 0^-} \frac{-\Delta x}{\Delta x} = \text{não existe}$$

Assim, verifica-se que a função $f(x)=|x|$ não é derivável no ponto $x=0$, visto que o limite neste ponto não existe.

Na Figura 3.6 você pode visualizar o gráfico desta função, e perceber a existência de um ponto anguloso em $x=0$.

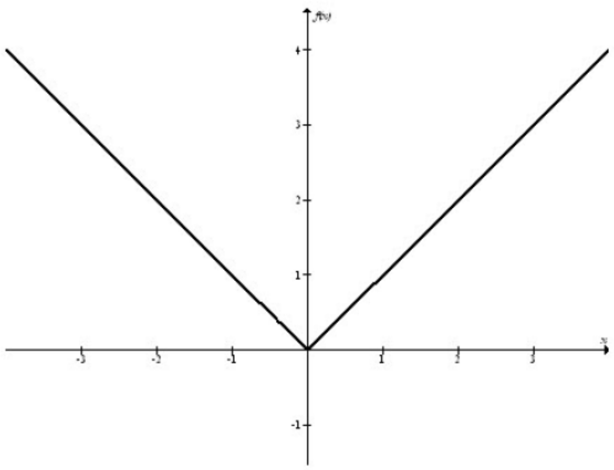

Figura 3.6 – Gráfico de f(x)=|x|

Agora é a sua vez!

Use folhas adicionais para realizar seus cálculos.

Determine a derivada das seguintes funções, usando a definição:

a) $g(x) = \sqrt{x}$

b) $v(t) = 4 - t^2$

c) $\mathrm{r}(\theta) = \dfrac{2}{\theta + 1}$

Em caso de dúvidas, consulte o seu professor tutor!

SEÇÃO 3 – Regras de derivação

Nesta seção você poderá perceber que calcular derivadas é ainda mais simples do que você pensava!

> Se você achou que calcular derivadas não era simples, aí vai um pensamento de Tsai Chih Chung para refletir:
>
> "É mais fácil encontrar resposta onde começa a dúvida".

Você quer saber como simplificar este processo?

É possível deduzir, a partir da definição, um conjunto de regras que são denotadas como **regras de derivação**. O uso dessas regras dispensa o desenvolvimento do limite da definição.

Veja a tabela para conhecer algumas regras de derivação.

REGRA	FUNÇÃO	DERIVADA
Derivada de uma constante	$f(x)=c$ c é uma constante	$f'(x)=0$
Regra da potência	$f(x)=x^n$ n inteiro positivo	$f'(x)=n\cdot x^{n-1}$
Derivada do produto de uma constante por uma função	$g(x)=c\cdot f(x)$ c é uma constante	$g'(x)=c\cdot f'(x)$
Derivada de uma soma	$h(x)=f(x)+g(x)$	$h'(x)=f'(x)+g'(x)$
Derivada de um produto	$h(x)=f(x)\cdot g(x)$	$h'(x)=f(x)\cdot g'(x)+f'(x)\cdot g(x)$
Derivada de um quociente	$h(x)=\dfrac{f(x)}{g(x)}$ $g(x)\neq 0$	$h'(x)=\dfrac{g(x)\cdot f'(x)-f(x)g'(x)}{\left[g(x)\right]^2}$

Leitura Opcional!

Seria relativamente fácil provar para você as regras que foram colocadas nesta tabela. Mas ficaríamos fazendo isto por um tempo razoável!

Vamos então mostrar apenas a regra da derivada de uma soma.

Suponha uma função *h(x)=f(x)+g(x)*.

Para calcular a derivada de   escreve-se o limite:

$$h'(x)=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{h(x+\Delta x)-h(x)}{\Delta x}$$
$$=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x+\Delta x)+g(x+\Delta x)-\left[f(x)+g(x)\right]}{\Delta x}$$

Apenas reescrevendo os termos desse limite, tem-se:

$$h'(x)=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x+\Delta x)-f(x)+g(x+\Delta x)-g(x)}{\Delta x}$$
$$=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x}+\lim_{\Delta x\to 0}\frac{g(x+\Delta x)-g(x)}{\Delta x}$$
$$=f'(x)+g'(x).$$

Exemplos

Para entender melhor o assunto observe os exemplos a seguir!

Usando as regras de derivação, encontre as derivadas das funções dadas:

a) $f(x)=2$

Usando a derivada de uma constante:

$$f'(x)=0$$

b) $f(x)=x^3$

Usando a Regra da Potência:

$$f'(x)=3x^{3-1}=3x^2$$

c) $f(t)=3t^2$

Usando a derivada do produto de uma constante por uma função:

$$f'(t)=3\left(t^2\right)'$$

Para determinar $(t^2)'$ usamos a regra da potência, assim:

$$f'(t)=3\cdot\left(2t^{2-1}\right)=3\cdot 2t=6t$$

d) $g(x)=\dfrac{x^4}{4}$

Perceba que $g(x)=\frac{1}{4}\cdot x^4$, ou seja, pode ser vista como o produto de uma constante por uma função. assim, a derivada $g'(x)$ é dada por:

$$\begin{aligned} g'(x) &= \frac{1}{4}\cdot\left(x^4\right)' \\ &= \frac{1}{4}\cdot\left(4x^3\right) \\ &= x^3 \end{aligned}$$

$$h'(x) = \frac{(x+2)(10-x^3)' - (10-x^3)(x+2)'}{(x+2)^2}$$

$$= \frac{(x+2)(0-3x^2)-(10-x^3)(1+0)}{(x+2)^2}$$

$$= \frac{(x+2)(-3x^2)-(10-x^3)(1)}{(x+2)^2}$$

$$= \frac{-3x^3-6x^2-10+x^3}{(x+2)^2}$$

$$= \frac{-2x^3-6x^2-10}{x^2+4x+4}$$

O segredo da derivada está na realização de exercícios. Você precisa exercitar para conseguir identificar tranqüilamente qual a regra de derivação usará para cada exercício.

Então, mãos à obra!

Agora é a sua vez!

Use folhas adicionais para realizar seus cálculos.

Encontre a derivada das seguintes funções:

a) $y = 7 - \frac{3}{4}x^4$

b) $f(t)=4t^3-6t+3$

c) $g(s)=(s^3+1)(s^2+3s)$

d) $h(x) = \frac{4}{3} \cdot \frac{x-1}{x+1}$

e) $f(x) = (4-x^3)^{-1} \cdot (x+4)$

f) $y = \frac{2}{x^2} - \frac{5}{2x^6}$

g) $f(x) = \frac{x^2+6x}{x}$

h) $r(t) = \frac{t^3-3t^2+1}{2}$

Perceba que estamos usando a notação g′(x). No entanto também poderíamos escrever a derivada como $\frac{dg}{dx}$.

e) $h(x) = 4x^3 - x^2 + 3x - 2$

A função *h(x)* é a soma de outras quatro funções. Assim, usamos a derivada de uma soma:

$$\begin{aligned} h'(x) &= \left(4x^3\right)' + \left(-x^2\right)' + (3x)' + (-2)' \\ &= 4 \cdot 3x^2 + (-2x) + 3 + 0 \\ &= 12x^2 - 2x + 3 \end{aligned}$$

f) $y = \left(3x^2 + x\right)\left(4 - x^4\right)$

Perceba que a função y é dada pelo produto das funções $\left(3x^2 + x\right)$ e $\left(4 - x^4\right)$. Usando a derivada de um produto, teremos:

$$\begin{aligned} y' &= \left(3x^2 + x\right)\left(4 - x^4\right)' + \left(3x^2 + x\right)'\left(4 - x^4\right) \\ &= \left(3x^2 + x\right)\left(0 - 4x^3\right) + (3 \cdot 2x + 1)\left(4 - x^4\right) \\ &= \left(3x^2 + x\right)\left(-4x^3\right) + (6x + 1)\left(4 - x^4\right) \end{aligned}$$

É comum realizarmos as multiplicações para, quando possível, simplificar a expressão da derivada. Neste exemplo temos:

$$\begin{aligned} y' &= -12x^5 - 4x^4 + 24x - 6x^5 + 4 - x^4 \\ &= -18x^5 - 5x^4 + 24x + 4 \end{aligned}$$

g) $h(x) = \dfrac{10 - x^3}{x + 2}$

Usando a derivada de um quociente, temos que $f(x)=10-x^3$ e $g(x)=x+2$. Então, a derivada será dada por:

i) $y = \frac{-3}{4}(4-x)\left(x^3 - x\right)$

j) $g(x) = (x-1)\left(x^2-2\right)\left(x^3-3\right)$

Em caso de dúvidas, consulte o seu professor tutor!

SEÇÃO 4 – Regra da cadeia

No estudo das funções é comum tratarmos de funções compostas.

Por exemplo, se $f(x)=x+1$ e $g(x)=x^3$, então dizemos que $f \circ g$ (f composta com g) será dada por:

$$f \circ g = f\left(g(x)\right) = f\left(x^3\right) = x^3 + 1$$

Fazemos uma composição que envolve as funções $f(x)$ e $g(x)$.

Tendo em mente as funções compostas, o interesse desta seção é mostrar uma regra das derivadas que envolvem a composição de funções e, por este motivo, possibilita o cálculo de derivadas de funções mais complicadas.

A **regra da cadeia** enuncia que, se tivermos uma função $y=g(u)$, sendo que $u=f(x)$, é possível calcular $\frac{dy}{dx}$ se conhecemos $\frac{dy}{du}$ e $\frac{du}{dx}$

Podemos escrever:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du} \cdot \frac{du}{dx}$$

Assim, a derivada de y em relação a x é calculada pelo produto da derivada de y em relação a u e da derivada de u em relação a x.

Exemplos

Para entender melhor o assunto observe os exemplos a seguir!

Exemplo 1: Calcular a derivada $\frac{dy}{dx}$ sendo $y=u^3$ e $u=x^2+3x-1$.

Vamos calcular as derivadas $\frac{dy}{du}$ e $\frac{du}{dx}$:

$$\frac{dy}{du} = 3u^2$$
$$\frac{du}{dx} = \left(x^2\right)' + (3x)' - (1)' = 2x + 3 - 0 = 2x + 3$$

Usando a regra da cadeia dizemos que $\frac{dy}{dx}$ é dada pelo produto das derivadas calculadas:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du} \cdot \frac{du}{dx}$$
$$\frac{dy}{dx} = 3u^2 \cdot (2x + 3)$$

Substituindo $u=x^2+3x-1$ temos:

$$\frac{dy}{dx} = 3\left(x^2 + 3x - 1\right)^2 \cdot (2x + 3)$$

Você percebeu que a Regra da Cadeia possibilita o cálculo de derivadas de funções mais complicadas?

Mas mesmo usando esta regra, às vezes os cálculos são muito trabalhosos para serem feitos à mão. Por isto, existem softwares que realizam cálculos algébricos e nos auxiliam na determinação das derivadas. O Derive é um destes softwares, e sugiro que você tente calcular algumas derivadas usando esta ferramenta computacional!

Exemplo 2: Dada a função $y = \left(\frac{2x+5}{x^2+3}\right)^{10}$, encontre y'.

É possível reescrever a função y da seguinte forma:

$$y = u^{10}$$

sendo $u = \frac{2x+5}{x^2+3}$.

Usando a regra da cadeia, é possível encontrar $y' = \frac{dy}{dx}$ através do produto

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du} \cdot \frac{du}{dx}$$

Assim, temos:

$$\frac{dy}{du} = 10u^9$$

$$\frac{du}{dx} = \left(\frac{2x+5}{x^2+3}\right)'$$

Perceba que $\frac{du}{dx}$ pode ser calculada pela regra do quociente:

$$\begin{aligned}
\frac{du}{dx} &= \frac{(x^2+3)(2x+5)' - (2x+5)(x^2+3)'}{(x^2+3)^2} \\
&= \frac{(x^2+3)(2 \cdot 1 + 0) - (2x+5)(2x+0)}{(x^2+3)^2} \\
&= \frac{(x^2+3) \cdot 2 - (2x+5) \cdot 2x}{(x^2+3)^2} \\
&= \frac{2x^2+6-4x^2-10x}{(x^2+3)^2} \\
&= \frac{6-10x-2x^2}{(x^2+3)^2}
\end{aligned}$$

Assim, temos:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du} \cdot \frac{du}{dx}$$

$$\frac{dy}{dx} = 10u^9 . \left(\frac{6 - 10x - 2x^2}{\left(x^2 + 3\right)^2} \right)$$

$$\frac{dy}{dx} = 10\left(\frac{2x + 5}{x^2 + 3} \right)^9 . \left(\frac{6 - 10x - 2x^2}{\left(x^2 + 3\right)^2} \right)$$

Agora é a sua vez!

Use folhas adicionais para realizar seus cálculos.

Calcule a derivada $\frac{dy}{dx}$ das funções dadas:

a) $y = \left(4 - x^3\right)^8$

b) $y = \dfrac{4}{\left(3x^2 - x + 1\right)^3}$

c) $y = \left(x^2 + 3x - 1\right)^4 \left(x^2 - x\right)$

d) $y = \left(x^2 - \dfrac{4}{x^3} \right)^4$

Como conseqüência da regra da cadeia, é possível formular uma proposição, importante no cálculo de derivadas.

Proposição: Se $y=u^n$, sendo $u=g(x)$ e n um número inteiro não nulo, então

$$y' = n \cdot u^{n-1} \cdot u'$$

Podemos generalizar e torná-la uma regra para ser usada quando n é um número racional.

Para auxiliá-lo na resolução de exercícios, as regras de derivação foram agrupadas em uma **Tabela de Derivadas**, que você encontra no anexo deste livro.

Nesta tabela as regras de derivação já absorvem a regra da cadeia.

Veja as regras iniciais:

1) $y = c \Rightarrow y' = 0$

2) $y = x \Rightarrow y' = 1$

3) $y = c \times u \Rightarrow y' = c \times u'$

4) $y = u + v \Rightarrow y' = u' + v'$

5) $y = u.v \Rightarrow y' = u.v' + v.u'$

6) $y = \dfrac{u}{v} \Rightarrow y' = \dfrac{v.u' - u.v'}{v^2}$

7) $y = u^m, \quad (m \neq 0) \Rightarrow y' = m \ . \ u^{m-1}. \ u'$

Nos próximos exemplos você poderá visualizar a aplicação das regras de derivação e da regra da cadeia. Tenha a tabela de derivadas sempre à mão quando estiver analisando exemplos e resolvendo exercícios que envolvem as derivadas.

Exemplos

Para entender melhor o assunto observe os exemplos a seguir!

Encontre a derivada das funções:

a) $y = \dfrac{2x-1}{x+3}$

Inicialmente é preciso derivar a função encontrando

$y' = \left(\dfrac{2x-1}{x+3}\right)'$ através da regra do quociente:

$$
\begin{aligned}
y' &= \frac{(x+3)(2x-1)' - (2x-1)(x+3)'}{(x+3)^2} \\
&= \frac{(x+3)(2\cdot 1-0)-(2x-1)(1+0)}{(x+3)^2} \\
&= \frac{(x+3)\cdot 2-(2x-1)\cdot 1}{(x+3)^2} \\
&= \frac{2x+6-2x+1}{(x+3)^2} \\
&= \frac{7}{(x+3)^2}
\end{aligned}
$$

b) $y = (x^3+7x^2+8)(x^2-3)$

Usando a regra do produto, temos:

$$
\begin{aligned}
y' &= (x^3+7x^2+8)(x^2-3)' + (x^3+7x^2+8)'(x^2-3) \\
&= (x^3+7x^2+8)(2x-0)+(3x^2+7\cdot 2x+0)(x^2-3) \\
&= (x^3+7x^2+8)(2x)+(3x^2+7\cdot 2x+0)(x^2-3) \\
&= 2x^4+14x^3+16x+3x^4+14x^3-9x^2-42x \\
&= 5x^4+28x^3-9x^2-26x
\end{aligned}
$$

c) $y = (3+4x^4)^5$

Usando a generalização da regra da potência, temos:

$$
\begin{aligned}
y' &= 5(3+4x^4)^{5-1}(3+4x^4)' \\
&= 5(3+4x^4)^4(0+4\cdot 4x^3) \\
&= 5(3+4x^4)^4(16x^3) \\
&= 80x^3(3+4x^4)^4
\end{aligned}
$$

d) $y = \sqrt{x^2+1}$

É possível reescrever a função usando expoente fracionário:

$$y = (x^2+1)^{\frac{1}{2}}$$

Agora, basta derivar y usando a regra da potência:

$$y' = \frac{1}{2}\left(x^2+1\right)^{\frac{1}{2}-1}\left(x^2+1\right)'$$

$$= \frac{1}{2}\left(x^2+1\right)^{-\frac{1}{2}}(2x+0)$$

$$= \frac{2x}{2}\left(x^2+1\right)^{-\frac{1}{2}}$$

$$= x\cdot\frac{1}{\left(x^2+1\right)^{\frac{1}{2}}}$$

$$= x\cdot\frac{1}{\sqrt{\left(x^2+1\right)}}$$

e) $y = 4x^{-3} + 2\sqrt{x}$

Podemos reescrever a raiz quadrada usando expoente fracionário $y = 4x^{-3} + 2x^{\frac{1}{2}}$ e derivar a função y usando a regra da soma:

$$y' = \left(4x^{-3}\right)' + \left(2x^{\frac{1}{2}}\right)'$$

$$= 4\cdot(-3)x^{-3-1} + 2\cdot\frac{1}{2}x^{\frac{1}{2}-1}$$

$$= -12x^{-4} + x^{-\frac{1}{2}}$$

$$= \frac{-12}{x^4} + \frac{1}{\sqrt{x}}$$

f) $y = \dfrac{\sqrt{x^2+3}}{x^3+1}$

Para derivar esta função, vamos novamente reescrever a raiz quadrada como um expoente fracionário:

$$y = \frac{\left(x^2+3\right)^{\frac{1}{2}}}{x^3+1}$$

Assim, a derivada *y'* pode ser calculada a partir da regra do quociente:

$$y' = \frac{\left(x^3+1\right)\left[\left(x^2+3\right)^{\frac{1}{2}}\right]' - \left(x^2+3\right)^{\frac{1}{2}}\left(x^3+1\right)'}{\left(x^3+1\right)^2}$$

$$= \frac{\left(x^3+1\right)\left[\frac{1}{2}\left(x^2+3\right)^{\frac{1}{2}-1}\left(x^2+3\right)'\right] - \left(x^2+3\right)^{\frac{1}{2}}\left(3x^2+0\right)}{\left(x^3+1\right)^2}$$

$$= \frac{\left(x^3+1\right)\left[\frac{1}{2}\left(x^2+3\right)^{-\frac{1}{2}}\left(2x+0\right)\right] - \left(x^2+3\right)^{\frac{1}{2}}\left(3x^2\right)}{\left(x^3+1\right)^2}$$

$$= \frac{\left(x^3+1\right)\left[\frac{1}{2}\left(x^2+3\right)^{-\frac{1}{2}}\left(2x\right)\right] - \left(x^2+3\right)^{\frac{1}{2}}\left(3x^2\right)}{\left(x^3+1\right)^2}$$

g) $y = x^2\sqrt{x^3 - x}$

Reescrevendo a função temos: $y = x^2\left(x^3 - x\right)^{\frac{1}{2}}$. A derivada será dada pela aplicação da regra do produto das funções x^2 e $\left(x^3 - x\right)^{\frac{1}{2}}$:

$$y' = x^2\left[\left(x^3 - x\right)^{\frac{1}{2}}\right]' + \left(x^2\right)'\left(x^3 - x\right)^{\frac{1}{2}}$$

$$= x^2 \cdot \left[\frac{1}{2}\left(x^3 - x\right)^{\frac{1}{2}-1}\left(x^3 - x\right)'\right] + \left(2x\right)\left(x^3 - x\right)^{\frac{1}{2}}$$

$$= x^2 \cdot \left[\frac{1}{2}\left(x^3 - x\right)^{-\frac{1}{2}}\left(3x^2 - 1\right)\right] + \left(2x\right)\left(x^3 - x\right)^{\frac{1}{2}}$$

$$= \frac{x^2\left(x^3 - x\right)^{-\frac{1}{2}}\left(3x^2 - 1\right)}{2} + \left(2x\right)\left(x^3 - x\right)^{\frac{1}{2}}$$

Agora é a sua vez!

Use folhas adicionais para realizar seus cálculos.

Encontre a derivadas das funções:

a) $f\left(x\right) = \sqrt[3]{x} + \dfrac{4}{x^3}$

b) $y=\left(x^4+x^3-2x\right)^4$

c) $f(x)=\left(x^{-3}+2\right)\left(x^2-x\right)$

d) $y=\dfrac{5-x^3}{(x+2)^2}$

e) $g(x)=\dfrac{x^2-x}{\sqrt{4-x^4}}$

f) $h(x)=\sqrt{\dfrac{x^4-4}{16}}$

SEÇÃO 5 – Derivadas das funções exponencial e logarítmica

Após estudar a regra da cadeia e as principais regras de derivação, você pode agora conhecer as regras de derivação que envolvem **funções elementares**, tais como, **exponenciais e logarítmicas**.

As funções trigonométricas e hiperbólicas não serão estudadas neste texto por não terem aplicações diretas com o seu curso.

Lembre-se que estas funções foram revisadas na unidade 1 e a derivada de cada uma delas representa a inclinação da reta tangente em um ponto *x* qualquer. Além disso, na Tabela de Derivadas você encontrará todas as regras de derivação que serão apresentadas nesta seção.

Veja na tabela as regras de derivação para as funções exponencial e logarítmica, lembrando que foram deduzidas a partir do cálculo do limite que define a derivada de uma função qualquer.

REGRA	FUNÇÃO	DERIVADA
Derivada da função exponencial	$y=a^u$ $a>0$ $a \neq 1$	$y'=a^u \ln a\, u'$ $a>0$ $a \neq 1$
Derivada da função logarítmica	$y=\log_a u$ $a>0$ $a \neq 1$	$y' = \frac{u'}{u}\log_a e$ $a>0$ $a \neq 1$
Derivada da função exponencial composta	$y=u^v$	$y' = vu^{v-1}u' + u^v \ln u v'$ $u>0$

Exemplos

Para entender melhor o assunto observe os exemplos a seguir!

Determine as derivadas das funções, usando as regras de derivação.

a) $y=3^x$

$$\begin{aligned} y' &= 3^x \ln 3 (x)' \\ &= 3^x \ln 3 (1) \\ &= 3^x \ln 3 \end{aligned}$$

b) $y=e^x$

$$y' = e^x \ln e (x)'$$

Como $\ln e = 1$ e $(x)' = 1$, temos:

$$\begin{aligned} y' &= e^x \cdot 1 \cdot 1 \\ &= e^x \end{aligned}$$

Veja que é possível generalizar a regra da derivada da função exponencial para o caso em que *a=e*, pois *ln e=1*:

$$y = e^u \Rightarrow y' = e^u \cdot u'$$

c) $y = \left(\frac{1}{2}\right)^{x^2-2x}$

$$\begin{aligned} y' &= \left(\frac{1}{2}\right)^{x^2-2x} \ln\left(\frac{1}{2}\right)\left(x^2-2x\right)' \\ &= \left(\frac{1}{2}\right)^{x^2-2x} \ln\left(\frac{1}{2}\right)(2x-2) \\ &= (2x-2)\left(\frac{1}{2}\right)^{x^2-2x} \ln\left(\frac{1}{2}\right) \end{aligned}$$

d) $y = \log\left(\frac{1}{x}\right)$

$$\begin{aligned} y' &= \frac{\left(\frac{1}{x}\right)'}{\frac{1}{x}}\log e \\ &= \frac{\left(x^{-1}\right)'}{\frac{1}{x}}\log e \\ &= \frac{\left(-1x^{-2}\right)}{\frac{1}{x}}\log e \\ &= -x^{-2}\frac{x}{1}\log e \\ &= -\frac{x}{x^2}\log e \\ &= -\frac{1}{x}\log e \\ &= -\frac{\log e}{x} \end{aligned}$$

e) $y=ln\ x$

Veja que $\ln x = \log_e x$:

$$y' = \frac{x'}{x}\log_e e$$
$$= \frac{1}{x}\cdot 1$$
$$= \frac{1}{x}\cdot 1$$
$$= \frac{1}{x}$$

É possível generalizar a regra da derivada da função logarítmica quando $y= ln\ x$, pois $\log_e e = 1$. Assim,

$$y = \ln x \Rightarrow y' = \frac{u'}{u}$$

f) $y = \left(x^2 - 2\right)^{x^3}$

$$y' = x^3\left(x^2 - 2\right)^{x^3-1}\left(x^2 - 2\right)' + \left(x^2 - 2\right)^{x^3}\ln\left(x^2 - 2\right)\left(x^3\right)'$$
$$= x^3\left(x^2 - 2\right)^{x^3-1}\left(2x - 0\right) + \left(x^2 - 2\right)^{x^3}\ln\left(x^2 - 2\right)\left(3x^2\right)$$
$$= 2x^4\left(x^2 - 2\right)^{x^3-1} + \left(x^2 - 2\right)^{x^3}\ln\left(x^2 - 2\right)\left(3x^2\right)$$

Agora é a sua vez!

Use folhas adicionais para realizar seus cálculos.

Determine as derivadas das funções, usando as regras de derivação.

a) $y = e^{\frac{x^2}{4}}$

b) $y=log_3(x^2+4)$

c) $y=(x+1)^{2x+1}$

d) $y = 4^{\frac{x+1}{x}}$

Que tal falar de coisas chatas e interessantes....

Não há aluno que não pense dessa forma: algumas disciplinas são interessantes. Outras são chatas.

Faça uma lista das disciplinas que você considera chatas e outra de disciplinas interessantes.

Depois analise a lista das chatas. Identifique a mais chata das chatas.

Mas veja: se ela é a mais chata das chatas, passa a ser extremamente interessante e muda de lista.

Agora, outra disciplina será a mais chata das chatas, o que a torna interessante também.

Assim, a certa altura, todas as disciplinas serão interessantes.

Será assim??!

Pense nisso...

SEÇÃO 6 – Derivadas sucessivas

Após ter estudado e exercitado as regras de derivação, veja que é possível derivar quantas vezes você achar interessante!

É o que se chama de **derivação sucessiva**, a derivada da derivada, da derivada, da derivada etc.

As derivadas sucessivas de uma função *f* são denotadas por:

REGRA	FUNÇÃO	DERIVADA
f'	$\dfrac{df}{dx}$	Derivada de *f* ou derivada de primeira ordem de *f*.
$f''=(f')'$	$\dfrac{d^2 f}{dx^2}$	Derivada segunda de *f* ou derivada de segunda ordem de *f*.
$f'''=(f'')'$	$\dfrac{d^3 f}{dx^3}$	Derivada terceira de *f* ou derivada de terceira ordem de *f*.
$f^{IV}=(f''')'$	$\dfrac{d^4 f}{dx^4}$	Derivada quarta de *f* ou derivada de quarta ordem de *f*.
$f^{(10)}=(f^{(9)})'$	$\dfrac{d^{10} f}{dx^{10}}$	Derivada de ordem 10 de *f*.
. . .	. . .	. . .
$f^{(n)}=(f^{(n-1)})'$	$\dfrac{d^n f}{dx^n}$	Derivada de ordem n de *f*.

Exemplos

Para entender melhor o assunto observe os exemplos a seguir!

Exemplo 1: Calcule a derivada de 3ª ordem da função $y=x^3-4x+3$.

Para calcular a derivada de 3ª ordem, é necessário derivar 3 vezes a função dada:

$$y' = 3x^2 - 4$$
$$y'' = 6x$$
$$y''' = 6$$

Exemplo 2: Determine a derivada de 2ª ordem da função $f(x)=\sqrt[3]{4-x^3}$.

Num primeiro momento, vamos reescrever a função *f(x)*

$$f(x)=\left(4-x^3\right)^{\frac{1}{3}}$$

A derivada de 2ª ordem é a derivada da derivada:

$$
\begin{aligned}
f'(x) &= \frac{1}{3}\left(4-x^3\right)^{\frac{1}{3}-1}\left(4-x^3\right)' \\
&= \frac{1}{3}\left(4-x^3\right)^{\frac{-2}{3}}\left(0-3x^2\right) \\
&= \frac{-3x^2}{3}\left(4-x^3\right)^{\frac{-2}{3}} \\
&= -x^2\left(4-x^3\right)^{\frac{-2}{3}}
\end{aligned}
$$

Para derivar novamente, perceba que agora a função está escrita como o produto de $-x^2$ por $\left(4-x^3\right)^{\frac{-2}{3}}$. Assim, usando a regra do produto temos:

$$
\begin{aligned}
f''(x) &= \left(f'(x)\right)' \\
&= \left(-x^2\right)\left(\left(4-x^3\right)^{\frac{-2}{3}}\right)' + \left(4-x^3\right)^{\frac{-2}{3}}\left(-x^2\right)' \\
&= \left(-x^2\right)\left(-\frac{2}{3}\left(4-x^3\right)^{\frac{-2}{3}-1}\left(4-x^3\right)'\right) + \left(4-x^3\right)^{\frac{-2}{3}}\left(-2x\right) \\
&= \left(-x^2\right)\left(-\frac{2}{3}\left(4-x^3\right)^{\frac{-5}{3}}\left(0-3x^2\right)\right) + \left(4-x^3\right)^{\frac{-2}{3}}\left(-2x\right) \\
&= \left(-x^2\right)\left(\frac{-2\cdot\left(-3x^2\right)}{3}\left(4-x^3\right)^{\frac{-5}{3}}\right) + \left(4-x^3\right)^{\frac{-2}{3}}\left(-2x\right) \\
&= \left(-x^2\right)\left(2x^2\left(4-x^3\right)^{\frac{-5}{3}}\right) + \left(4-x^3\right)^{\frac{-2}{3}}\left(-2x\right) \\
&= \left(-2x^4\right)\left(4-x^3\right)^{\frac{-5}{3}} + \left(4-x^3\right)^{\frac{-2}{3}}\left(-2x\right)
\end{aligned}
$$

Agora é a sua vez!

Use folhas adicionais para realizar seus cálculos.

1) Encontre a derivada de 4ª ordem da função $y = x^5 - x^4 + 3x^2 - \frac{x}{3}$

2) Determine a derivada de 2ª ordem da função $f(x) = \frac{x+1}{x}$

3) Determine a derivada de 3ª ordem da função $y = -ln\ x$.

SEÇÃO 7 – Derivação implícita

Existem algumas funções que são escritas na forma implícita.

Para entender, veja a equação:

$$x^2+y-3=0$$

Perceba que, ao isolar a variável y, você terá uma função do segundo grau, dada por:

$$y=3-x^2$$

Portanto, uma função $y=f(x)$ é definida na forma implícita se puder se escrita como uma equação $F(x,y)=0$ e, ao substituir y por $f(x)$, esta equação se torna uma identidade.

Na equação $x^2+y-3=0$, ao substituir $y=3-x^2$, tem-se:

$$\begin{aligned} x^2+\left(3-x^2\right)-3&=0 \\ x^2+3-x^2-3&=0 \\ 0&=0 \end{aligned}$$

ou seja, uma identidade.

Mas por que falar em derivação de funções na forma implícita?

Isto acontece, pois nem sempre é possível encontrar a função na forma explícita, ou ainda, se possível, há casos em que existem infinitas formas explícitas de uma mesma função.

Por exemplo, não é possível encontrar $y=f(x)$ na equação

$$y^3+x^2y-\ln xy=0$$

Em $x^2+y^2=9$ existem infinitas maneiras de escrever $y=f(x)$, dentre elas,

$$y=\sqrt{9-x^2}$$
$$y=-\sqrt{9-x^2}$$

Portanto, justifica-se a importância de se determinar a derivada das funções escritas na forma implícita, sem que seja necessário isolar uma das variáveis em relação às demais.

Para derivar uma função escrita na forma $F(x,y)=0$ aplicam-se as regras de derivação e a regra da cadeia sem que seja necessário escrever $y=f(x)$.

Exemplos

Para entender melhor o assunto observe os exemplos a seguir!

Exemplo 1: Encontre y' da função derivável $y=f(x)$, definida implicitamente pela equação $x^2+y^2=9$.

Para encontrar y' vamos derivar ambos os lados da equação:

$$\left(x^2+y^2\right)'=(9)'$$
$$\left(x^2\right)'+\left(y^2\right)'=(9)'$$

Usando a regra da cadeia temos:

$$2x+2yy'=0$$

Perceba que quando derivamos $\left(y^2\right)'$ deixamos indicado y', que é a derivada a ser calculada.

Isolando *y'* teremos:

$$2yy' = -2x$$

$$y' = -\frac{2x}{2y}$$

$$y' = -\frac{x}{y}$$

2) Determine *y'* da função *y=f(x)* definidas implicitamente pela equação: $xy^3+2x^3=y-4y$

$$\left(xy^3+2x^3\right)' = \left(y-4y\right)'$$

$$\left(xy^3\right)' + \left(2x^3\right)' = \left(y\right)' - \left(4y\right)'$$

$$x\left(y^3\right)' + x'y^3 + 6x^2 = y' - 4y'$$

$$x \cdot 3y^2y' + 1y^3 + 6x^2 = y' - 4y'$$

$$3xy^2y' - y' + 4y' = -y^3 - 6x^2$$

$$y'\left(3xy^2 - 1 + 4\right) = -y^3 - 6x^2$$

$$y'\left(3xy^2 + 3\right) = -y^3 - 6x^2$$

$$y' = \frac{-y^3 - 6x^2}{3xy^2 + 3}$$

Agora é a sua vez!

Use folhas adicionais para realizar seus cálculos.

Encontre *y'* das funções definidas implicitamente pelas equações:

a) $xy-3x^2y^3=4$

b) $3x-x^2+y^2=9y-4$

SEÇÃO 8 – Diferencial

Até esta seção, quando você determinava *y'* estava, automaticamente, determinando $\frac{dy}{dx}$ que é uma outra notação para a derivada da função *y=f(x)*.

Nesta seção, você entenderá o significado de *dy* e *dx* que permite tratar   como uma razão que representa taxas de variação.

Você Sabia?

Newton e Leibniz usaram diferentes notações para a derivada de uma função. Por mais de 50 anos, houve uma grande disputa sobre qual era a melhor notação. Venceu a notação de Leibniz, que denota a derivada $\frac{dy}{dx}$ como uma razão das diferenciais *dy* e *dx*.

Para entender o conceito de diferencial, veja a Figura 3.7.

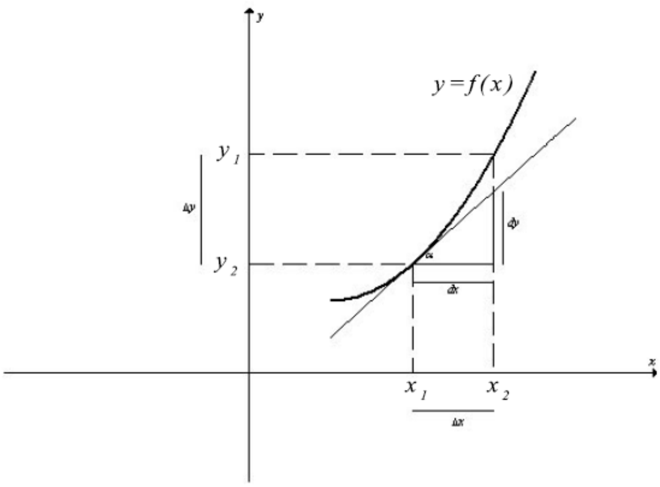

Figura 3.7 – Representação dos acréscimos e diferenciais

É possível representar uma variação na variável x como sendo $\Delta x = x_2 - x_1$. A variação de x origina uma variação de y, chamada Δy e representada por:

$$\Delta y = f(x_2) - f(x_1)$$
$$\Delta y = f(x_1 + \Delta x) - f(x_1)$$

Veja na Figura 3.7 a representação de Δx e Δy.

Os símbolos dy e dx que aparecem na derivada são chamados de diferenciais. Assim, temos que a diferencial da variável independente x será dada por:

$$dx = \Delta x$$

Já no século XVII Leibniz introduz os conceitos de variável, constante e parâmetro, bem como a notação dx e dy para designar a menor das diferenças em x e em y.

Por outro lado, a diferencial da variável dependente y, será dada por:

$$dy = f'(x)\,\Delta x$$

Como $dx = \Delta x$, então

$$dy = f'(x)\,dx$$
$$\frac{dy}{dx} = f'(x)$$

Veja na Figura 3.7 a representação dos diferenciais dy e dx.

Ainda nesta figura, perceba que quando a distância Δx for pequena, então a diferença entre Δy e dy torna-se cada vez menor. Na prática, quando considera-se Δx tendendo a zero, é possível dizer que Δy é aproximadamente igual a $\Delta y \cong dy$.

Exemplos

Para entender melhor o assunto observe os exemplos a seguir!

Exemplo 1: Calcular o acréscimo Δy e a diferencial dy para a função $f(x)=x^2+2x+1$ quando $x=2$ e $\Delta x = 0,01$.

Num primeiro momento, vamos determinar Δy fazendo:

$$\begin{aligned}
\Delta y &= f(x_2) - f(x_1) \\
&= f(x_1 + \Delta x) - f(x_1) \\
&= f(2+0,01) - f(2) \\
&= f(2,01) - f(2) \\
&= (2,01)^2 + 2\times 2,01 + 1 - (2^2 + 2\times 2 + 1) \\
&= 4,0401 + 4,02 + 1 - (4+4+1) \\
&= 4,0401 + 4,02 + 1 - 9 \\
&= 0,0601
\end{aligned}$$

A diferencial dy será $dy=f'(x)dx$, sendo $f'(x)$ a derivada de $f(x)=x^2+2x+1$:

$$f'(x)=2x+2$$

Ainda, $dx=\Delta x=0,01$ e $x=2$:

$$\begin{aligned}
dy &= (2x+2)dx \\
dy &= (2\times 2+2)0,01 \\
dy &= (4+2)0,01 \\
dy &= 6\times 0,01 \\
dy &= 0,06
\end{aligned}$$

Exemplo 2: Determinar Δy e dy na função $y = \sqrt{x}$ no ponto *x=4* com Δx*=0,5*.

$$\begin{aligned}\Delta y &= f(4+0,5) - f(4)\\ &= \sqrt{4,5} - \sqrt{4}\\ &= 0,12132\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}dy &= \left(\sqrt{x}\right)' dx\\ &= \frac{1}{2\sqrt{x}} \cdot 0,5\\ &= \frac{1}{2\sqrt{4}} \cdot 0,5\\ &= \frac{1}{2 \cdot 2} \cdot 0,5\\ &= \frac{0,5}{4} = 0,125\end{aligned}$$

Exemplo 3: Use diferenciais para estimar o erro na medida da resistência elétrica R de um fio, que é dada por $R = \frac{k}{r^2}$, sendo k uma constante e r o raio do fio. No momento em que o raio r=2 foi medido, acredita-se que houve um erro de 0,05.

Podemos escrever a função que mede a resistência elétrica de um fio como sendo *R=f(r)*. Do enunciado do problema, é possível dizer que Δr*=0,05* e, portanto, *dr*= Δr*=0,05*.

Vamos então calcular *dR*, que é o erro na medida da resistência elétrica do fio, fazendo:

$$\begin{aligned}dR &= R' dr\\ &= \left(\frac{k}{r^2}\right)' \Delta r\\ &= k\left(r^{-2}\right)' \Delta r\\ &= k\left(-2r^{-3}\right) \cdot 0,05\\ &= \frac{-2 \cdot k \cdot 0,05}{2^3}\\ &= -0,0125k\end{aligned}$$

Portanto, o erro de R é de, aproximadamente, *-0,0125k* unidades de resistência elétrica.

Agora é a sua vez!

Use folhas adicionais para realizar seus cálculos.

1) Encontrar Δy e dy para as funções indicadas:

a) $y = \dfrac{1}{3x^3}$, $\Delta x = 0,001$, $x = 1$

b) $y = (x+2)^2$, $\Delta x = 0,03$, $x = \dfrac{1}{2}$

2) Use diferenciais para estimar o volume de cobre na cobertura de um cubo de aço com 20cm de lado e coberto com 0,01cm de cobre.

Síntese

A definição de derivada de uma função real de uma variável foi apresentada nesta unidade. Você teve a oportunidade, com o estudo desta unidade, de discutir o cálculo das derivadas usando regras e propriedades. Destaca-se que muitas outras funções podem ser discutidas, mas neste momento não são aplicáveis para o seu curso.

Atividades de auto-avaliação

Use folhas adicionais para realizar seus cálculos

1) Determine a derivada das funções, usando a definição:

a) $g(x) = \sqrt[3]{x}$

b) $h(x) = \dfrac{\sqrt{x+1}}{3}$

2) Determine a equação da reta tangente ao gráfico da função $y=x^2-3x$ no ponto $x=3$.

3) Seja a função $y=3x^3+x^2-3$:

a) Ache a taxa de variação média de y em relação a x no intervalo [1,4].

b) Ache a taxa de variação instantânea de y em relação a x.

c) Ache a taxa de variação instantânea de y em relação a x no ponto $x = \dfrac{1}{2}$.

4) Determine a derivada das funções dadas:

a) $y = \dfrac{4}{x^3} - \dfrac{2}{x^4}$

b) $y = \dfrac{2x+3}{4-x^3}$

c) $y = \sqrt{(2x^4 - 1)(5x^3 + 6x)}$

d) $y=\sqrt[4]{x^2+2x+1}$

e) $f(t)=\sqrt{3t}+\sqrt{\dfrac{4}{t}}$

f) $r(\theta)=\left(\dfrac{4}{5\theta}\right)^{\sqrt{\theta}}$

g) $f(x)=x^3\ln\left(\dfrac{3x+1}{x^3}\right)$

h) $y=e^{\frac{x^2}{4}}$

i) $y=\log_3\left(x^2+4\right)$

j) $y=4^{\frac{x+1}{x}}$

k) $y=7-\dfrac{3}{4}x^4$

l) $f(t)=4t^3-6t+3$

m) $g(s)=\left(s^3+1\right)\left(s^2+3s\right)$

n) $h(x)=\dfrac{4}{3}\cdot\dfrac{x-1}{x+1}$

o) $f(x)=\left(4-x^3\right)\cdot(x+4)$

p) $y=\sqrt[4]{x^2+2x+1}$

q) $y=\frac{4}{x^3}-\frac{2}{x^4}$

5) Para as funções escritas na forma implícita, calcule a derivada $\frac{dy}{dx}$:

a) $y^2=4x-8$

b) $x^2+y^2-4\sqrt{y}=9$:

c) $xy^2-x^4=3y$

6) Calcule a derivada sucessiva até a ordem n indicada:

a) $y=\frac{3}{x-4}$, $n=4$

b) $f(x)=\frac{1}{2e^x}$, $n=3$

c) $v(t)=\ln 3t$, $n=2$

7) O volume de um cano flexível varia, aproximadamente, 0,1cm³. Sabendo-se que a altura é constante e sempre igual a três vezes o raio da base, use diferenciais para determinar a correspondente variação do raio (o volume de um cilindro é $V=\pi r^2 h$)