Integrais Indefinidas, Integrais Definidas e Técnicas de Integração

Primitivas

Dada uma função $f(x)$, queremos encontrar $F(x)$ tal que $F'(x) = f(x)$.

Definição: Uma função $F(x)$ é chamada **primitiva (ou antiderivada)** de $f(x)$ em um intervalo I quando

$$F'(x) = f(x), \text{ para todo } x \in I.$$

Por exemplo, se $f(x) = x^5$, então $F(x) = \frac{x^6}{6}$ é uma primitiva de f, pois $\left(\frac{x^6}{6}\right)' = x^5$.

Na verdade, as funções $\frac{x^6}{6} + k$, com k constante, são primitivas de x^5.

Proposição: Seja F uma primitiva da função f. Se k é uma constante qualquer, então $G(x) = F(x) + k$ também é primitiva de f.

Proposição: Se F e G são primitivas de f em um intervalo I, então existe uma constante k tal que $G(x) - F(x) = k$, para todo $x \in I$, ou seja, as primitivas de uma função diferem por uma constante.

Se $F(x)$ é uma primitiva de $f(x)$, então dizemos que $F(x) + k$ é a *família de primitivas de* f.

Integral Indefinida

Definição: O conjunto de todas as primitivas de f é chamado de **integral indefinida** de f e é indicado por

$$\int f(x)\ dx.$$

É comum escrever

$$\int f(x)\ dx = F(x) + k, \text{ sendo } F \text{ uma primitiva de } f \text{ e } k \text{ uma constante.}$$

Na notação de integral indefinida $\int f(x)\ dx$:

- $\int$ é o símbolo da integral;
- $f(x)$ é o integrando;
- dx indica a variável de integração.

Exemplos

(a) $\int 1\, dx = x + k$

(b) $\int x^3\, dx = \dfrac{x^4}{4} + k$

(c) $\int \dfrac{1}{\sqrt{x}}\, dx = \int x^{-1/2}\, dx = \dfrac{x^{1/2}}{1/2} + k = 2\sqrt{x} + k$

(d) $\int \cos x\, dx = \operatorname{sen} x + k$

(e) $\int \sec^2 x\; dx = tg\; x + k$

(f) $\int e^x\, dx = e^x + k$

Algumas Primitivas Imediatas

$(\mathbf{1})\ \int c\ dx = cx + k\ \ (c \text{ constante})$

$(\mathbf{2})\ \int x^n\ dx = \dfrac{x^{n+1}}{n+1} + k\ \ (n \neq -1)$

$(\mathbf{3})\ \int \dfrac{1}{x}\ dx = \ln|x| + k$

$(\mathbf{4})\ \int e^x\ dx = e^x + k$

$(\mathbf{5})\ \int sen\ x\ dx = -\cos x + k$

$(\mathbf{6})\ \int \cos x\ \ dx = sen\ x + k$

$(\mathbf{7})\ \int tg\ x\ dx = -\ln|\cos x| + k$

$(\mathbf{8})\ \int cotg\ x\ dx = \ln|sen\ x| + k$

$(\mathbf{9})\ \int \sec x\ \ dx = \ln|\sec x + tg\ x| + k$

$(\mathbf{10})\ \int cossec\ x\ dx = \ln|cossec\ x - cotg\ x| + k$

$(\mathbf{11})\ \int \sec x\ tg\ x\ \ dx = \sec x + k$

$(\mathbf{12})\ \int cossec\ x\ cotg\ x\ dx = -cossec\ x + k$

$(\mathbf{13})\ \int \sec^2 x\ dx = tg\ x + k$

$(\mathbf{14})\ \int cossec^2 x\ dx = -cotg\ x + k$

$(\mathbf{15})\ \int \dfrac{1}{1+x^2}\ dx = arctg\ x + k$

$(\mathbf{16})\ \int \dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}\ dx = arcsen\ x + k$

$(\mathbf{17})\ \int -\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}} dx = \arccos x + k$

$(\mathbf{18})\ \int a^x\ dx = \dfrac{a^x}{\ln a} + k\ (a > 0, a \neq 1)$

$(\mathbf{19})\ \int \dfrac{1}{\sqrt{a^2 - x^2}}\ dx = arcsen\left(\dfrac{x}{a}\right) + k$

$(\mathbf{20})\ \int \dfrac{1}{a^2 + x^2}\ dx = \dfrac{1}{a} arctg\left(\dfrac{x}{a}\right) + k$

$(\mathbf{21})\ \int \operatorname{senh} x\ dx = \cosh x + k$

$(\mathbf{22})\ \int \cosh x\ \ dx = \operatorname{senh} x + k$

Propriedades: Sejam $f, g: I \to \mathbb{R}$ e k uma constante. Então:

(1) $\int kf(x)\,dx = k\int f(x)\,dx$, k constante

(2) $\int \big(f(x)+g(x)\big)\,dx = \int f(x)\,dx + \int g(x)\,dx$

Observação

A derivada de uma integral indefinida é igual ao seu integrando, ou seja,

$$\left(\int f(x)\,dx\right)' = f(x).$$

Exercícios

(1) Calcule as integrais indefinidas:

(a) $\int (3x^2 + 4x + \sqrt{x})\, dx$

(b) $\int \frac{x^3 + 1}{x}\, dx$

(c) $\int (e^x + \sqrt[3]{x} - 2)\, dx$

(d) $\int \left(2cos\ x - \frac{1}{x^2}\right) dx$

(e) $\int \frac{\sec^2 x}{\operatorname{cossec} x}\, dx$

(f) $\int \operatorname{tg}^2 x\ dx$

(g) $\int \frac{1}{\sqrt{7 - x^2}}\, dx$

(h) $\int \left(2^x - \sqrt{2}e^x + \cosh x\right) dx$

(2) Determine a função $y = y(x)$, $x > 0$ tal que

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{x} + \frac{1}{x^2} \quad \text{e} \quad y(1) = 1.$$

Técnica de Integração

Mudança de Variáveis na Integral (Substituição Simples)

Sejam f e g funções tais que $Im(g) \subset D(f)$. Suponhamos que F seja uma primitiva de f. Então, $F(g(x))$ é uma primitiva de $f\big(g(x)\big)g'(x)$, pois da Regra da Cadeia, temos que

$$\Big(F\big(g(x)\big)\Big)' = F'\big(g(x)\big)g'(x) = f\big(g(x)\big)g'(x).$$

Logo,

$$\int f\big(g(x)\big)g'(x)\,dx = F\big(g(x)\big) + k.$$

Assim, se fizermos a mudança de variável $u = g(x)$, obtemos

$$\int f\big(g(x)\big)g'(x)\,dx = F(u) + k = \int F'(u)\,du = \int f(u)\,du\,,$$

ou seja,

$$\boxed{\int f\big(g(x)\big)g'(x)\,dx = \int f(u)\,du\,.}$$

Exemplos: Calcule as seguintes integrais utilizando substituição simples:

(**1**) $\int (x-2)^5 \, dx$

(**2**) $\int e^{-2x} \, dx$

(**3**) $\int \sqrt{3x-1} \, dx$

(**4**) $\int x\sqrt{x^2+1} \, dx$

(**5**) $\int \frac{e^x}{e^x+4} \, dx$

(**6**) $\int sen^2 x \cos x \, dx$

(**7**) $\int x^2 e^{x^3} \, dx$

(**8**) $\int \cos(2x) \, dx$

(**9**) $\int \operatorname{sen}^2 x \, dx$

(**10**) $\int \cos^2 x \, dx$

(**11**) $\int \frac{\sqrt{x-1}}{x} \, dx$

(**12**) $\int \sec x \, dx$

Técnica de Integração

Integração por Partes

Sejam f e g funções deriváveis. Na regra de derivação do produto, temos que

$$\big(f(x)g(x)\big)' = f'(x)g(x) + f(x)g'(x).$$

Então,

$$\int \big(f(x)g(x)\big)'\,dx = \int f'(x)g(x)\,dx + \int f(x)g'(x)\,dx,$$

ou seja,

$$f(x)g(x) = \int f'(x)g(x)\,dx + \int f(x)g'(x)\,dx\,.$$

Logo,

$$\boxed{\int f(x)g'(x)\,dx = f(x)g(x) - \int g(x)f'(x)dx}$$

que é a fórmula de **integração por partes.**

Observação:

Chamando de $u = f(x)$ e $dv = g'(x)\,dx$, temos:

$$u = f(x) \qquad\qquad dv = g'(x)\,dx$$
$$du = f'(x)\,dx \qquad\qquad v = g(x)$$

Substituindo os valores acima na fórmula de integração por partes,

$$\int f(x)g'(x)\,dx = f(x)g(x) - \int g(x)f'(x)dx$$

obtemos:

$$\boxed{\int u\,dv = uv - \int v\,du\,.}$$

Esta expressão é uma maneira mais simples para representarmos a **fórmula de integração por partes.**

Exemplos: Calcule as seguintes integrais utilizando integração por partes:

(1) $\int x sen\, x\, dx$

(2) $\int \ln x \; dx$

(3) $\int t^2 e^t\, dt$

(4) $\int arctg\, x\, dx$

(5) $\int e^x sen\, x\, dx$

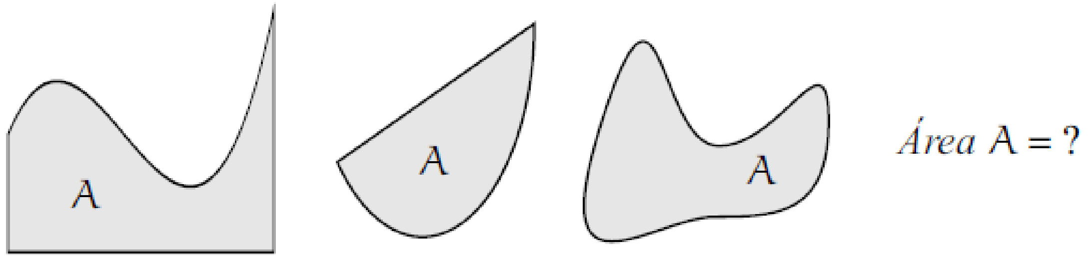
(6) $\int \sec^3 x \; dx$

(7) $\int x(ln\, x)^2\, dx$

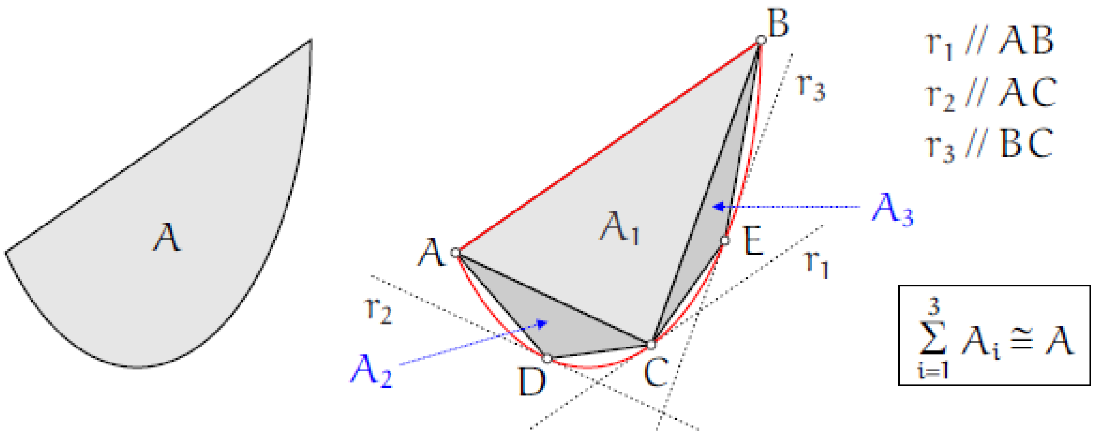
Integral Definida

A integral definida está relacionada com o *Problema das Áreas:*

Como calcular a área de figuras planas mais gerais que as elementares?

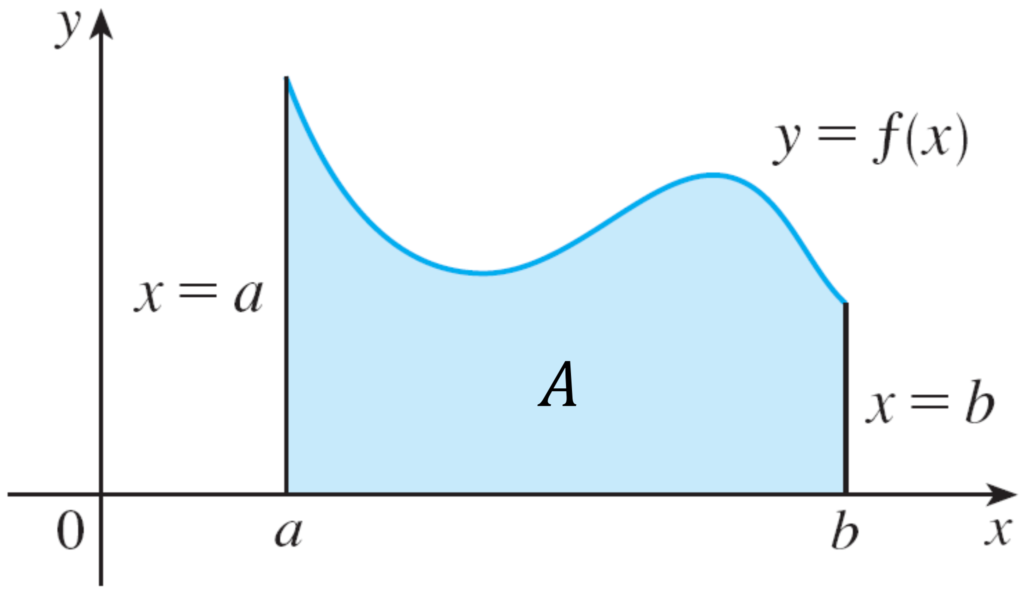


Por volta do século III a.C., Arquimedes estudou esse problema por meio do chamado "Método da Exaustão" que consiste em aproximar a área da figura em questão pela soma das áreas de figuras elementares (geralmente triângulos).

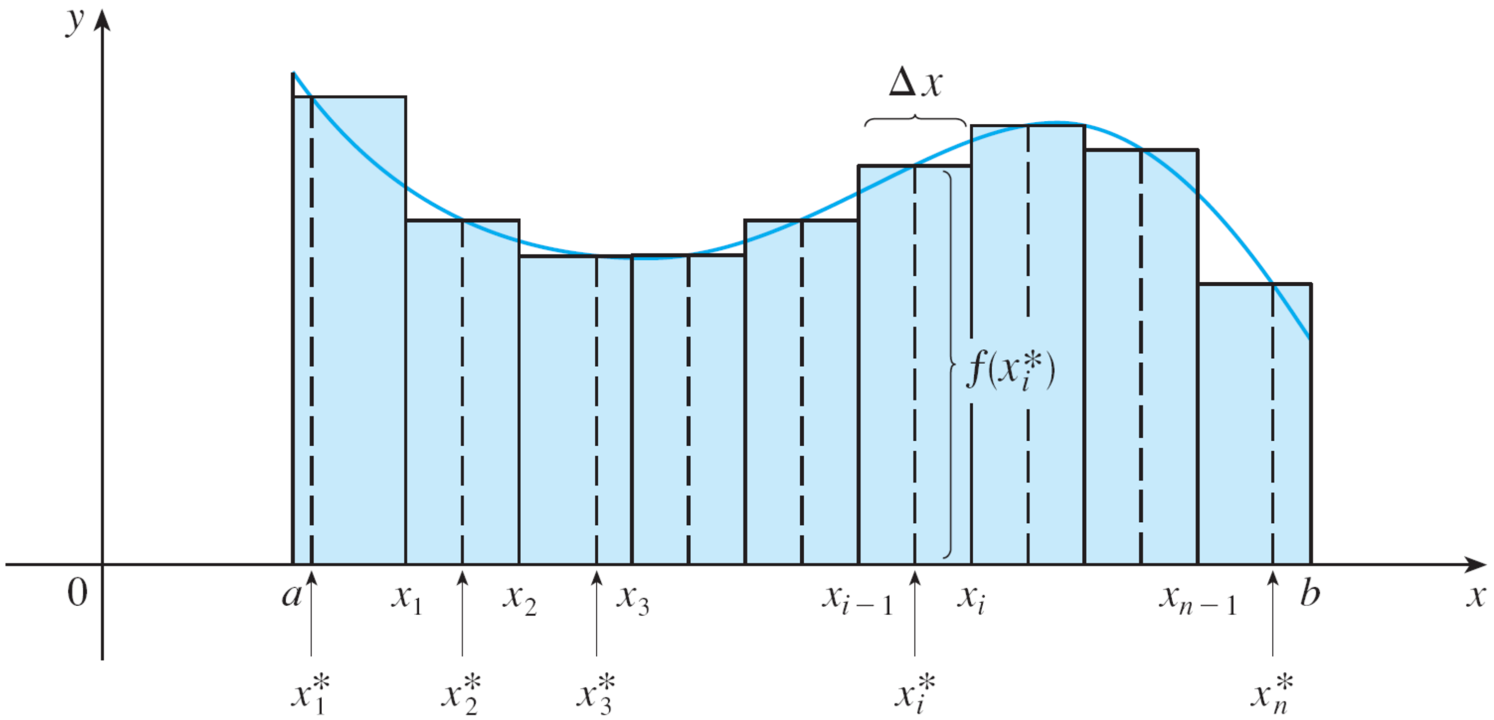


Seja $f: [a, b] \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $y = f(x)$ uma função contínua tal que $f(x) \geq 0$.

Queremos calcular a área A da região sob o gráfico de f, ou seja, a área da região limitada pelas retas $x = a, x = b, y = 0$ e pelo gráfico de f.



Seja $P = \{x_0, x_1, \dots, x_n\} \subset \mathbb{R}$ tal que $a = x_0 < x_1 < \cdots < x_n = b$.
O conjunto P é chamado de **partição** de $[a, b]$ e divide esse intervalo em n subintervalos. Além disso, suponha que o tamanho dos subintervalos da partição P sejam iguais.
Tomemos $x_i^* \in [x_{i-1}, x_i]$ com $i = 1, \dots, n$ e consideremos os retângulos R_i de base $[x_{i-1}, x_i]$ e altura $f(x_i^*)$.



Seja A_i a área do retângulo R_i. Logo, uma aproximação para a área A é dada por

$$A \cong \sum_{i=1}^{n} A_i = \sum_{i=1}^{n} \underbrace{f(x_i^*)}_{\text{altura}} \underbrace{(x_i - x_{i-1})}_{\text{base}}.$$

Fazendo $\Delta x = x_i - x_{i-1}$, então

$$A \cong \sum_{i=1}^{n} f(x_i^*) \, \Delta x .$$

A soma

$$S = \sum_{i=1}^{n} f(x_i^*)\,\Delta x\,,$$

é chamada de **Soma de Riemann** de f relativa à partição P e aos números x_i^*.

É claro que se aumentarmos o número de elementos na partição P, a área A será melhor aproximada por uma Soma de Riemann.

Desta forma, podemos definir a área A como sendo o *limite das Somas de Riemann de* f *quando* n *tende a infinito*, ou seja,

$$A = \lim_{n \to +\infty} \sum_{i=1}^{n} f(x_i^*)\,\Delta x\,.$$

Quando o limite acima existe, ele é chamado de **Integral Definida (ou Integral de Riemann)** de f no intervalo $[a, b]$ e denotamos por

$$\boxed{A = \int_a^b f(x)\,dx\,.}$$

Neste caso, dizemos que a função f é **integrável**.

Observação

(1) Diferentemente da integral indefinida, que representa uma família de funções, a integral definida é um **número.**

(2) Na notação de integral definida, temos que

Limite superior de integração

A função é o integrando.

Sinal de integral

x é a variável de integração.

$$\underbrace{\int_a^b f(x)\,dx}_{\text{Integral de } f \text{ de } a \text{ até } b}$$

Limite inferior de integração

(3) Pode-se mostrar que o limite

$$\lim_{n\to+\infty} \sum_{i=1}^{n} f(x_i^*)\,\Delta x$$

independe da escolha dos pontos x_i^*, ou seja, quando o limite existe, seu valor é o mesmo, independentemente dos pontos x_i^*.

(4) Por simplicidade, na definição de integral definida supomos que os comprimentos dos subintervalos de $[a,b]$ tinham o mesmo tamanho.

No entanto, em muitas situações é vantajoso trabalhar com subintervalos de tamanhos diferentes.

Se os comprimentos dos subintervalos forem $\Delta x_1, \Delta x_2, \dots, \Delta x_n$, precisamos garantir que todos esses comprimentos tendem a zero no processo do limite. Isso é possível quando o maior comprimento, $\max \Delta x_i$, tender a zero.

Portanto, neste caso, a definição de integral definida fica

$$\int_a^b f(x)\,dx = \lim_{\max \Delta x_i \to 0} \sum_{i=1}^{n} f(x_i^*)\,\Delta x_i\,.$$

(5) Por definição, $\displaystyle\int_k^k f(x)\,dx = 0.$

(6) O desenvolvimento que fizemos só faz sentido para $a < b$. Entretanto, há situações em que é interessante considerar a integral definida quando $a > b$. Neste caso, definimos

$$\int_a^b f(x)\,dx = -\int_b^a f(x)\,dx.$$

Teorema: Se f é uma função contínua, então f é integrável.

Propriedades

Sejam $f, g: [a, b] \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ integráveis em $[a, b]$.

(1) $\displaystyle\int_a^b \big(f(x) + g(x)\big)\, dx = \int_a^b f(x)\, dx + \int_a^b g(x)\, dx\,.$

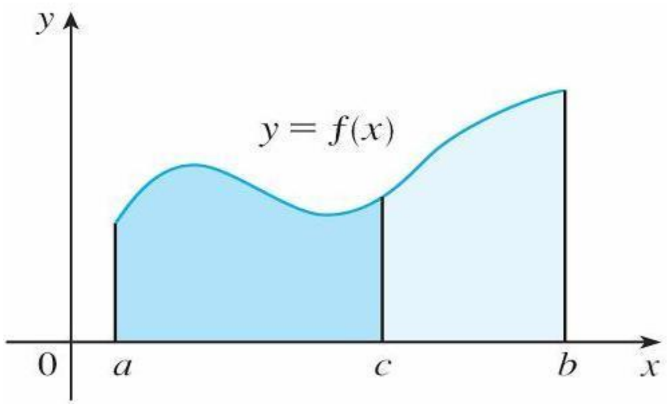
(2) $\displaystyle\int_a^b kf(x)\, dx = k\int_a^b f(x)\, dx\,,$ sendo k uma constante real.

(3) Se $f(x) \geq 0$ em $[a, b]$, então $\displaystyle\int_a^b f(x)\, dx \geq 0\,.$

(4) Se $f(x) \leq g(x)$, para qualquer x em $[a, b]$, então $\displaystyle\int_a^b f(x)\, dx \leq \int_a^b g(x) dx.$

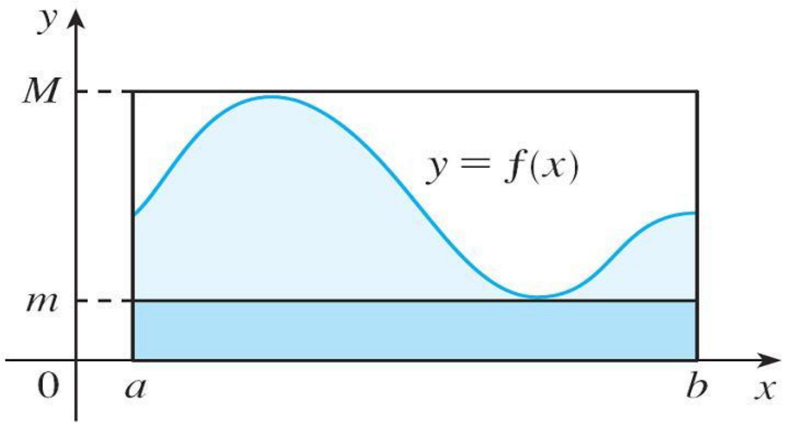
$(\mathbf{5})$ Se $a < c < b$, então

$$\int_a^b f(x)\,dx = \int_a^c f(x)\,dx + \int_c^b f(x)\,dx\,.$$



$(\mathbf{6})$ Se m e M são os valores mínimo e máximo de f em $[a, b]$, então

$$m(b-a) \leq \int_a^b f(x)\,dx \leq M(b-a)\ .$$



$(\mathbf{7})$ $\left|\int_a^b f(x)\,dx\right| \leq \int_a^b |f(x)|\,dx\,.$

Exercício: Considere uma função f contínua em $[-5,5]$ tal que $\int_0^5 f(x)\,dx = 4$.

Se f é uma função par, qual é o valor de $\int_{-5}^{5} f(x)\,dx$?

Solução: Como f é par, seu gráfico é simétrico em relação ao eixo y.
Logo,

$$\int_{-5}^{0} f(x)\,dx = \int_0^5 f(x)\,dx = 4\,.$$

Assim,

$$\int_{-5}^{5} f(x)\,dx = \int_{-5}^{0} f(x)\,dx + \int_0^5 f(x)\,dx = 4 + 4 = 8\,.$$

O Teorema Fundamental do Cálculo

O Teorema Fundamental do Cálculo estabelece uma conexão entre os dois ramos do cálculo: o cálculo diferencial e o cálculo integral. Ele dá a relação inversa precisa entre a derivada e a integral.

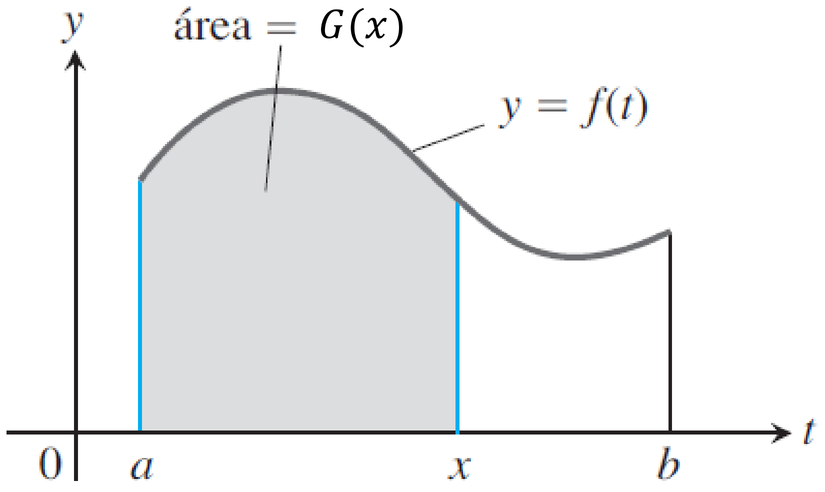
O Teorema Fundamental do Cálculo – Parte 1

Seja f uma função contínua em $[a, b]$. Assim, se $x \in [a, b]$, temos que f é contínua em $[a, x]$ e podemos considerar $\int_a^x f(t)\, dt$.

Essa integral define uma função G com domínio $[a, b]$, isto é,

$$G(x) = \int_a^x f(t)\, dt.$$

Quando f é não negativa e $x > a$, a função G fornece a área sob o gráfico de f de a até x.



O Teorema Fundamental do Cálculo – Parte 1 nos ensina a derivar uma função dada por uma integral.

Teorema Fundamental do Cálculo – Parte 1

Se f for contínua em $[a, b]$, então a função G definida por

$$G(x) = \int_a^x f(t)\, dt, \qquad a \leq x \leq b,$$

é contínua em $[a, b]$ e derivável em (a, b) e $G'(x) = f(x)$.

Exemplo: Determine a derivada da função $G(x) = \int_0^x \sqrt{1+t^2}\, dt$.

Solução: Pelo Teorema Fundamental do Cálculo – Parte 1, segue que

$$G'(x) = \frac{d}{dx}\left(\int_0^x \sqrt{1+t^2}\, dt\right) = \sqrt{1+x^2}.$$

Observação: Embora uma expressão da forma

$$G(x) = \int_a^x f(t)\, dt$$

possa parecer uma maneira estranha de definir uma função, elas aparecem com frequência na Física, Química e Estatística.

O Teorema Fundamental do Cálculo – Parte 2

O Teorema Fundamental do Cálculo – Parte 2 nos fornece um método simples para calcular integrais definidas.

Teorema Fundamental do Cálculo – Parte 2

Se f é uma função contínua em $[a, b]$, então

$$\int_a^b f(x)\,dx = F(b) - F(a),$$

onde F é uma primitiva de f em $[a, b]$.

Notação: É comum escrever

$$\int_a^b f(x)\,dx = F(x)\Big|_a^b = F(b) - F(a).$$

Exemplos

(1) Calcule as seguintes integrais definidas:

(a) $\displaystyle\int_0^2 x^2\,dx = \left.\frac{x^3}{3}\right|_0^2 = \frac{2^3}{3} - \frac{0^3}{3} = \frac{8}{3}$

(b) $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} sen\,x\,dx = -\cos x\Big|_0^{\frac{\pi}{2}} = -\cos\left(\frac{\pi}{2}\right) - (-\cos(0)) = 0 + 1 = 1$

(c) $\displaystyle\int_0^1 \frac{1}{1+t^2}\,dt = \operatorname{arctg} t\Big|_0^1 = \operatorname{arctg} 1 - \operatorname{arctg} 0 = \frac{\pi}{4} - 0 = \frac{\pi}{4}$

$(\mathbf{d})\ \int_{-1}^{3}|x-1|\,dx$

Temos que $|x-1| = \begin{cases} x-1, se\ x \geq 1 \\ -x+1, se\ x < 1 \end{cases}.$

Logo,

$$\int_{-1}^{3}|x-1|\,dx = \int_{-1}^{1}|x-1|\,dx + \int_{1}^{3}|x-1|\,dx$$

$$= \int_{-1}^{1}(-x+1)\,dx + \int_{1}^{3}(x-1)\,dx$$

$$= \left(-\frac{x^2}{2}+x\right)\Bigg|_{-1}^{1} + \left(\frac{x^2}{2}-x\right)\Bigg|_{1}^{3}$$

$$= 4$$

(2) Calcule as seguintes integrais definidas, utilizando o método da substituição:

(a) $\int_0^1 e^{-2x}\,dx$

Fazendo:

$u = -2x \qquad x = 0 \Rightarrow u = 0$

$du = -2dx \qquad x = 1 \Rightarrow u = -2$

Então:

$$\int_0^1 e^{-2x}\,dx = -\frac{1}{2}\int_0^{-2} e^u\,du$$

$$= \frac{1}{2}\int_{-2}^{0} e^u\,du$$

$$= \frac{1}{2}\,e^u\Big|_{-2}^{0}$$

$$= \frac{1}{2}\left(e^0 - e^{-2}\right) = \frac{1}{2}\left(1 - \frac{1}{e^2}\right)$$

(b) $\displaystyle\int_{-1}^{0} x\sqrt{x+1}\,dx$

Fazendo:

$u = x + 1 \qquad x = -1 \Rightarrow u = 0$

$du = dx \qquad x = 0 \Rightarrow u = 1$

Então:

$$\int_{-1}^{0} x\sqrt{x+1}\,dx = \int_{0}^{1} (u-1)\sqrt{u}\,du$$

$$= \int_{0}^{1} (u-1)u^{1/2}\,du$$

$$= \int_{0}^{1} u^{3/2} - u^{1/2}\,du$$

$$= \left(\frac{2}{5}u^{\frac{5}{2}} - \frac{2}{3}u^{\frac{3}{2}}\right)\Bigg|_{0}^{1} = -\frac{4}{15}$$

$(\mathbf{c})\ \int_0^{2\pi} x\cos x^2\ dx$

Fazendo:

$u = x^2 \qquad x = 0 \Rightarrow u = 0$

$du = 2xdx \qquad x = 2\pi \Rightarrow u = 4\pi^2$

Então:

$$\int_0^{2\pi} x\cos x^2\ dx = \frac{1}{2}\int_0^{4\pi^2} \cos u\ du$$

$$= \frac{1}{2} sen\ u\Big|_0^{4\pi^2}$$

$$= \frac{1}{2}\left(sen(4\pi^2) - sen(0)\right)$$

$$= \frac{1}{2} sen(4\pi^2)$$

$$(\mathbf{d}) \int_0^1 \frac{x}{1+x^2}\, dx$$

Fazendo:

$u = 1 + x^2$ $\qquad x = 0 \Rightarrow u = 1$

$du = 2xdx$ $\qquad x = 1 \Rightarrow u = 2$

Então:

$$\int_0^1 \frac{x}{1+x^2}\, dx = \frac{1}{2}\int_1^2 \frac{1}{u}\, du$$

$$= \frac{1}{2}\ln u\Big|_1^2$$

$$= \frac{1}{2}(\ln 2 - \ln 1)$$

$$= \frac{1}{2}\ln 2$$

(3) Obtenha o valor das integrais abaixo, utilizando integração por partes:

(a) $\int_0^1 xe^x \, dx$

$$\boxed{\int_a^b u\,dv = uv\Big|_a^b - \int_a^b v\,du}$$

Fazendo:

$u = x \qquad dv = e^x dx$

$du = dx \qquad v = e^x$

Logo,

$$\int_0^1 xe^x \, dx = xe^x\Big|_0^1 - \int_0^1 e^x \, dx$$

$$= xe^x\Big|_0^1 - e^x\Big|_0^1$$

$$= (1e^1 - 0e^0) - (e^1 - e^0)$$

$$= e - e + 1$$

$$= 1$$

$$(\mathbf{b}) \int_1^2 \ln x \ dx$$

Já vimos que: $\displaystyle\int \ln x \, dx = x \ln x - x + k$

Logo,

$$\int_1^2 \ln x \ dx = (x \ln x - x)\Big|_1^2$$

$$= (2 \ln 2 - 2) - (1 \ln 1 - 1)$$

$$= 2 \ln 2 \ - 1$$

$(\mathbf{c})\ \int_0^{\pi} e^x sen\ x\ dx$

Já vimos que: $\int e^x\ sen\ x\ dx = \frac{1}{2} e^x (sen\ x - \cos x) + k$

Logo,

$$\int_0^{\pi} e^x sen\ x\ dx = \left(\frac{1}{2} e^x (sen\ x - \cos x)\right)\Big|_0^{\pi}$$

$$= \left[\frac{1}{2} e^{\pi} (sen\ \pi - \cos \pi)\right] - \left[\frac{1}{2} e^0 (sen\ 0 - \cos 0)\right]$$

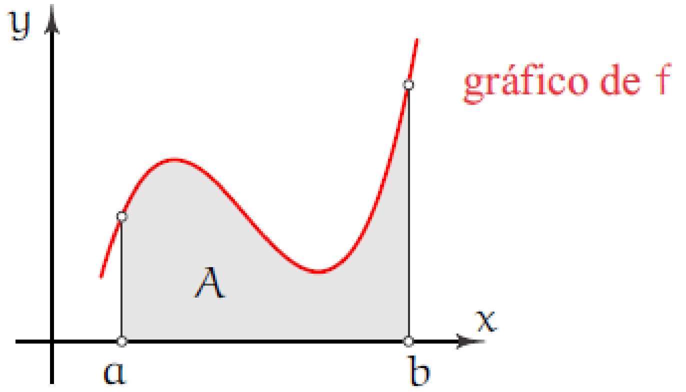
$$= \frac{1}{2} e^{\pi} + \frac{1}{2}$$

$$= \frac{1}{2} (e^{\pi} + 1)$$

Cálculo de Áreas

Seja $f\colon[a,b]\subset\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ uma função contínua.
Vimos que se $f(x)\geq 0$ em $[a,b]$, então a área da região limitada pelas retas $x=a, x=b, y=0$ e pelo gráfico de f é dada por

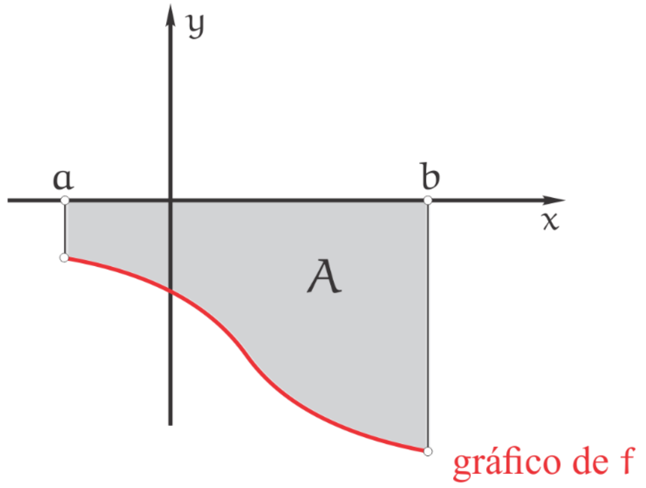
$$\boxed{A=\int_a^b f(x)\,dx.}$$



Se $f(x)\leq 0$, então $\displaystyle\int_a^b f(x)\,dx\leq 0.$

Assim, a área A, neste caso, é dada por

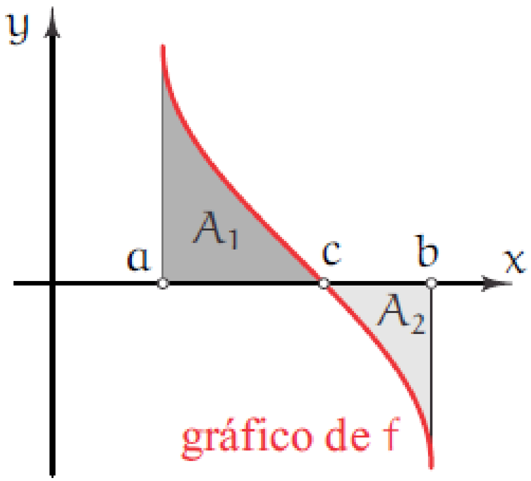
$$\boxed{A=-\int_a^b f(x)\,dx.}$$



Observação

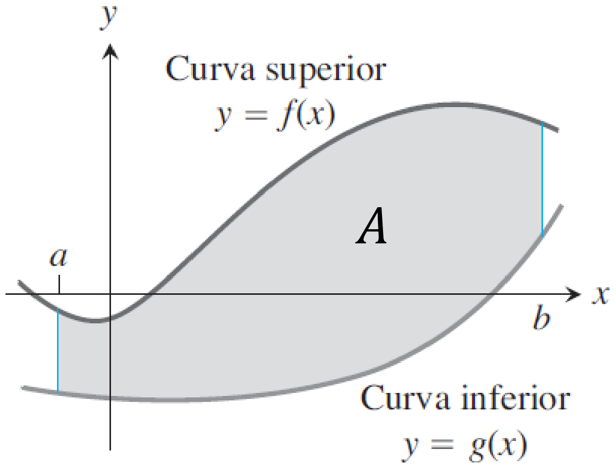
(1) Se $f(x) \geq 0$ para $a \leq x \leq c$ e $f(x) \leq 0$ para $c \leq x \leq b$, então a área, neste caso, é dada por:

$$\boxed{\begin{aligned} A &= A_1 + A_2 \\ &= \int_a^c f(x)\,dx - \int_c^b f(x)\,dx \end{aligned}}$$



(2) (Área entre Curvas) Sejam $f, g\colon [a,b] \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ funções contínuas com $f(x) \geq g(x)$, para todo $x \in [a,b]$. Então a área entre as curvas $y = f(x)$ e $y = g(x)$ é dada por:

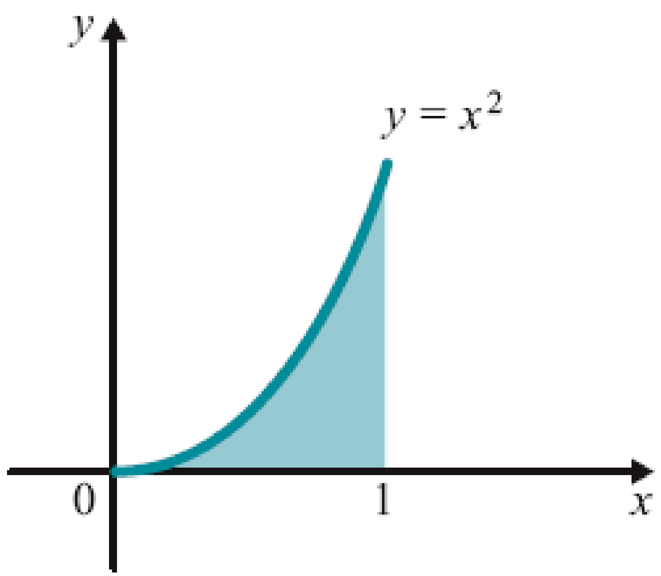
$$\boxed{A = \int_a^b (f(x) - g(x))\,dx}$$



Exemplos

(1) Calcule a área da região limitada pelas retas $x = 0, x = 1, y = 0$ e pelo gráfico de $f(x) = x^2$.

Solução: Um esboço da região é dado na figura ao lado.



A área da região é dada por

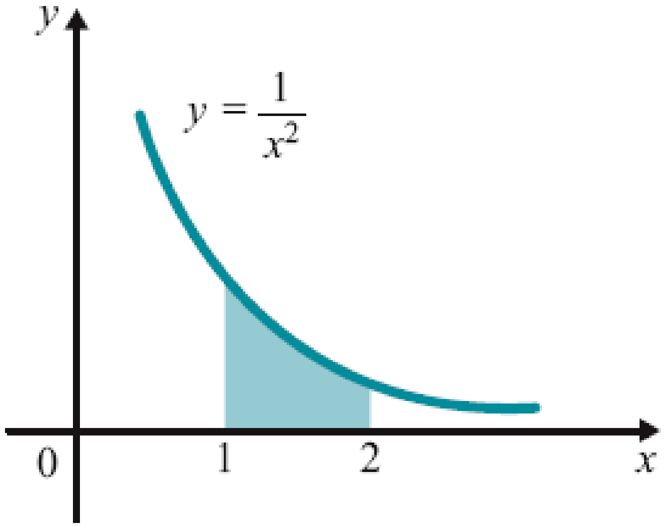
$$A = \int_0^1 x^2\, dx = \left.\frac{x^3}{3}\right|_0^1 = \left(\frac{1}{3} - 0\right) = \frac{1}{3}.$$

$\color{red}{(2)}$ Calcular a área do conjunto $S = \left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \colon 1 \leq x \leq 2 \text{ e } 0 \leq y \leq \frac{1}{x^2}\right\}$.

Solução: O conjunto S é igual à região do plano limitada pelas retas $x = 1, x = 2, y = 0$ e pelo gráfico da função $y = \frac{1}{x^2}$.

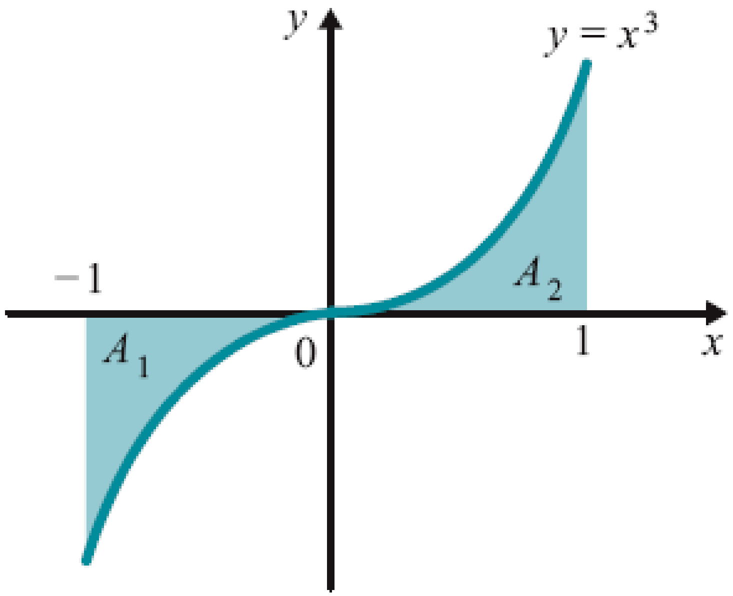
A área de S é dada por:

$$A = \int_1^2 \frac{1}{x^2}\, dx = -\frac{1}{x}\bigg|_1^2 = \left(-\frac{1}{2} - (-1)\right) = -\frac{1}{2} + 1 = \frac{1}{2}.$$



(**3**) Calcule a área da região limitada pelo gráfico de $f(x) = x^3$, pelo eixo x e pelas retas $x = -1$ e $x = 1$.

Solução: Um esboço da região é dada na figura a seguir.



Temos que a área A da região é dada por

$$A = A_1 + A_2.$$

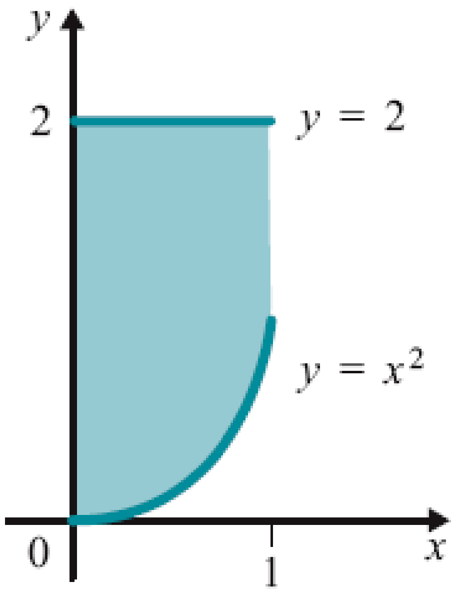
$$A_1 = -\int_{-1}^{0} x^3\,dx = \left.\frac{x^4}{4}\right|_{-1}^{0} = \frac{1}{4}$$

$$A_2 = \int_{0}^{1} x^3\,dx = \left.\frac{x^4}{4}\right|_{0}^{1} = \frac{1}{4}$$

Logo, a área da região é $A = \frac{1}{4} + \frac{1}{4} = \frac{1}{2}$.

(4) Calcule a área da região limitada pelas retas $x = 0, x = 1, y = 2$ e pelo gráfico de $y = x^2$.

Solução: Um esboço da região é dada na figura a seguir.



A área da região é dada por:

$$A = \int_0^1 (2 - x^2)\, dx = \left(2x - \frac{x^3}{3}\right)\Bigg|_0^1 = \frac{5}{3}.$$

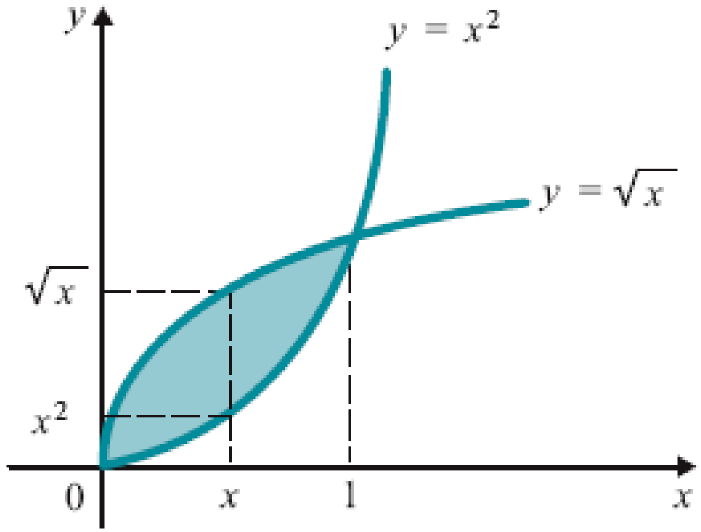
(5) Calcule a área limitada pelas curvas $y = \sqrt{x}$ e $y = x^2$.

Solução:

- Pontos de intersecção:

$$\begin{cases} y = \sqrt{x} \\ y = x^2 \end{cases} \Rightarrow x^2 = \sqrt{x} \Rightarrow x = 0 \text{ ou } x = 1.$$

- Um esboço da região é dado a seguir.



A área da região é dada por:

$$A = \int_0^1 (\sqrt{x} - x^2)\, dx = \left(\frac{2}{3} x^{\frac{3}{2}} - \frac{x^3}{3} \right) \Bigg|_0^1 = \frac{1}{3}.$$

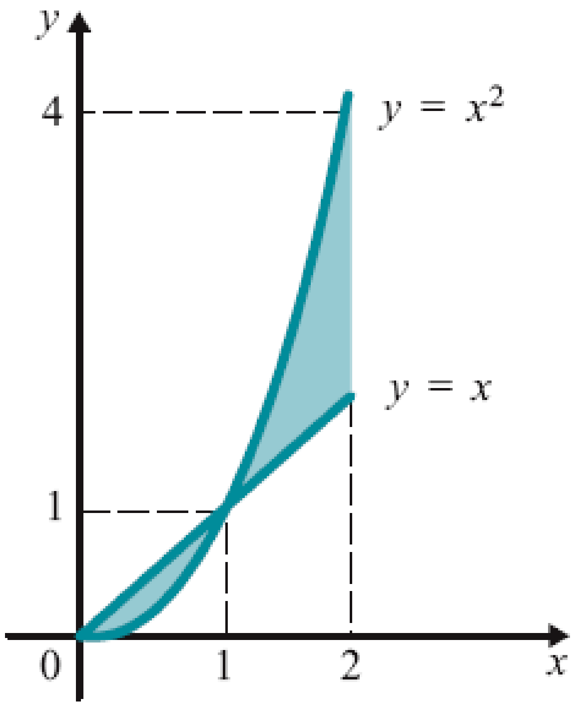
(6) Calcule a área da região compreendida entre os gráficos de $y = x$ e $y = x^2$, com $0 \leq x \leq 2$.

Solução:

- Pontos de intersecção:

$$\begin{cases} y = x \\ y = x^2 \end{cases} \Rightarrow x = x^2 \Rightarrow x = 0 \text{ ou } x = 1.$$

- Um esboço da região é dado a seguir.



A área da região é dada por:

$$A = \int_0^1 (x - x^2)\, dx + \int_1^2 (x^2 - x)\, dx$$

$$= \left(\frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{3}\right)\Bigg|_0^1 + \left(\frac{x^3}{3} - \frac{x^2}{2}\right)\Bigg|_1^2$$

$$= \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{3}\right) + \left[\left(\frac{8}{3} - \frac{4}{2}\right) - \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{2}\right)\right]$$

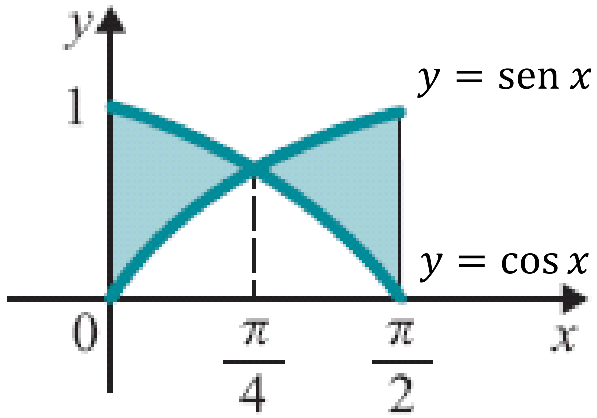
$$= 1$$

(7) Calcule a área do conjunto do plano limitado pelas retas $x = 0, x = \frac{\pi}{2}$ e pelos gráficos de $y = \operatorname{sen} x$ e $y = \cos x$.

Solução:

- O ponto de intersecção de $y = sen\, x$ e $y = \cos x$, com $0 \leq x \leq \frac{\pi}{2}$, é dado por $x = \frac{\pi}{4}$.

- Um esboço da região é dado na figura ao lado.



A área da região é dada por:

$$A = \int_0^{\pi/4} (\cos x - sen\, x)\, dx + \int_{\pi/4}^{\pi/2} (sen\, x - \cos x)\, dx$$

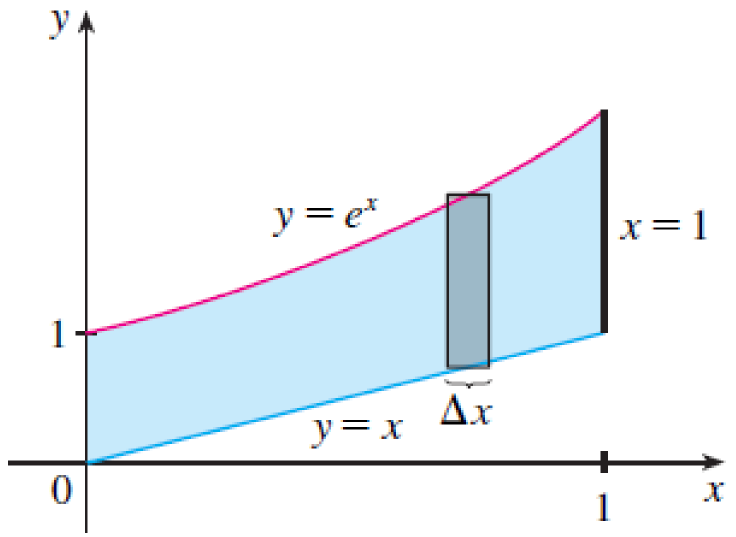
$$= (sen\, x + \cos x)\Big|_0^{\pi/4} + (-\cos x - sen\, x)\Big|_{\pi/4}^{\pi/2}$$

$$= \left[\left(sen\left(\frac{\pi}{4}\right) + \cos\left(\frac{\pi}{4}\right)\right) - (sen\,(0) + \cos(0))\right] + \left[\left(-\cos\left(\frac{\pi}{2}\right) - sen\left(\frac{\pi}{2}\right)\right) - \left(-\cos\left(\frac{\pi}{4}\right) - sen\left(\frac{\pi}{4}\right)\right)\right]$$

$$= 2(\sqrt{2} - 1)$$

(8) Calcular a área da região limitada acima por $y = e^x$, limitada abaixo por $y = x$ e limitada nos lados por $x = 0$ e $x = 1$.

Solução: Um esboço da região é mostrado a seguir.

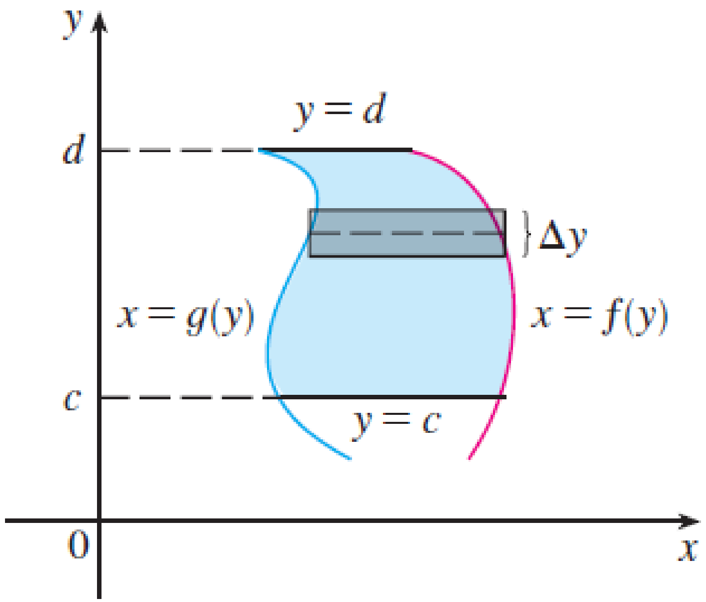


A área é dada por:

$$A = \int_0^1 (e^x - x)\, dx = \left(e^x - \frac{x^2}{2}\right)\Bigg|_0^1 = e - \frac{3}{2}$$

Observação:

Se uma região é delimitada por curvas com equações $x = f(y), x = g(y), y = c$ e $y = d$, em que f e g são contínuas e $f(y) \geq g(y)$ para $c \leq y \leq d$, então sua área é:



$$\boxed{A = \int_c^d (f(y) - g(y))\, dy}$$

(9) Encontre a área delimitada pela reta $y = x - 1$ e pela parábola $y^2 = 2x + 6$.

Solução: Temos que

$$\begin{cases} x = y + 1 \\ y^2 - 2x - 6 = 0 \end{cases} \Rightarrow y^2 - 2(y+1) - 6 = 0 \Rightarrow y^2 - 2y - 8 = 0 \Rightarrow y = -2 \text{ ou } y = 4,$$

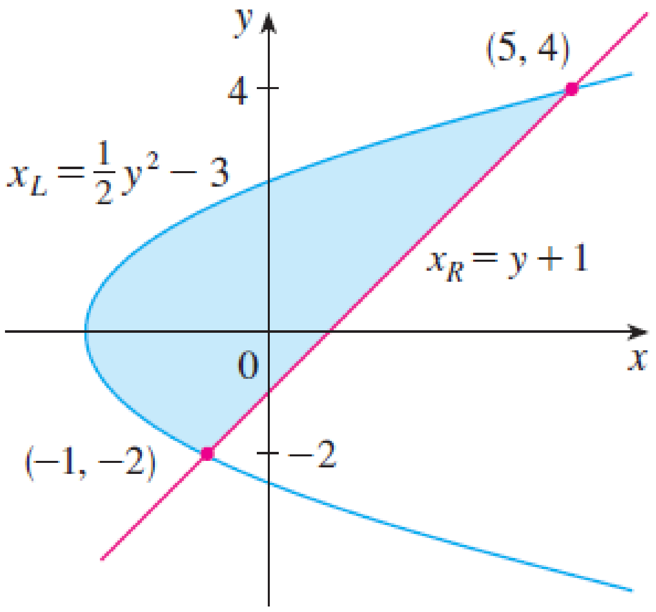
logo os pontos de intersecção são $(-1, -2)$ e $(5, 4)$.
Isolando x nas equações, segue que as curvas de fronteira à esquerda e à direita são dadas por $x_L = \frac{y^2}{2} - 3$ e $x_R = y + 1$.

Logo,

$$A = \int_{-2}^{4} \left[(y+1) - \left(\frac{y^2}{2} - 3 \right) \right] dy$$

$$= \int_{-2}^{4} \left(-\frac{y^2}{2} + y + 4 \right) dy$$

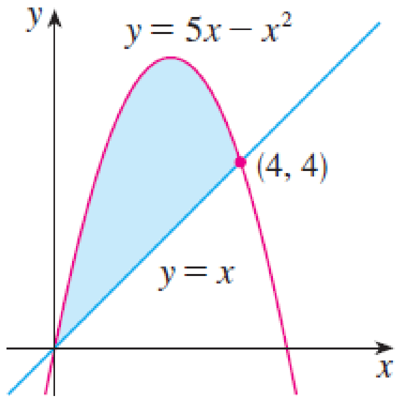
$$= 18$$



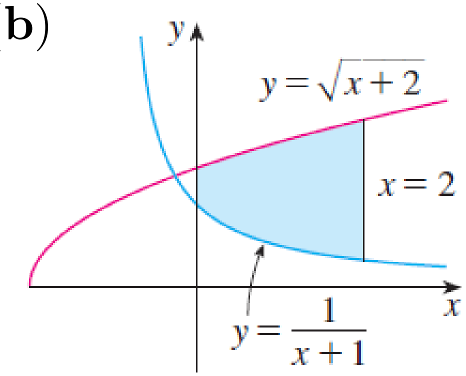
Exercícios

(1) Encontre a área da região indicada:

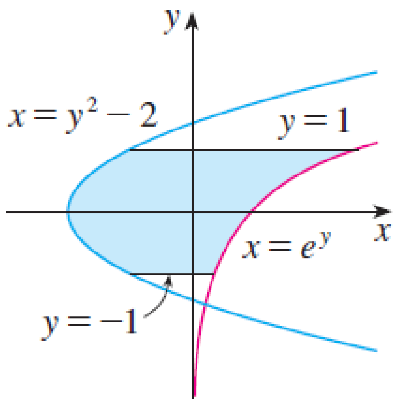
(a)



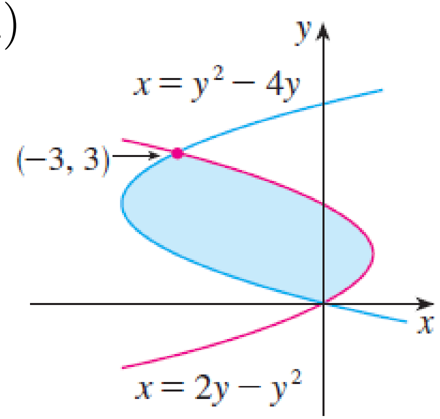
(b)



(c)



(d)



Respostas: (a) $\frac{32}{3}$, (b) $\frac{16}{3} - \ln 3 - \frac{4}{3}\sqrt{2}$, (c) $e - \frac{1}{e} + \frac{10}{3}$, (d) 9

(2) Esboce a região delimitada pelas curvas indicadas e encontre sua área.

(a) $y = e^x, y = x^2 - 1, x = -1, x = 1$ $\quad R\text{:}\ e - \frac{1}{e} + \frac{4}{3}$

(b) $y = sen\, x, y = x, x = \frac{\pi}{2}, x = \pi$ $\quad R\text{:}\ \frac{3\pi^2}{8} - 1$

(c) $y = \sqrt{x-1},\ x - y = 1$ $\quad R\text{:}\ \frac{1}{6}$

(d) $x = 1 - y^2, x = y^2 - 1$ $\quad R\text{:}\ \frac{8}{3}$