LÓGICA para CIÊNCIA da COMPUTAÇÃO e ÁREAS AFINS

Uma introdução concisa sobre os fundamentos da Lógica

JOÃO NUNES de SOUZA

11 de setembro de 2020

Importante mesmo são as pessoas.
Por elas, trabalhamos, pensamos e sonhamos.
Nanci, João Paulo e Tiago.
Minha mais importante lógica.

PREFÁCIO

A Lógica e o nosso contexto. O que é Lógica? Por que estudar Lógica? Qual a sua definição? Ao iniciar este estudo, vários autores apresentam definições populares sobre o tema. Por exemplo, conforme [Mendelson]: Lógica é a análise de métodos de raciocínio. No estudo desses métodos a Lógica está interessada principalmente na forma e não no conteúdo dos argumentos. Considere, por exemplo, os argumentos:

- Todo homem é mortal. Sócrates é um homem. Portanto, Sócrates é mortal.
- Todo cão late. Totó é um cão. Portanto, Totó late.

Do ponto de vista da Lógica, esses argumentos têm a mesma estrutura ou forma.

- Todo X é Y. Z é X. Portanto, Z é Y.

Sob esse ponto de vista, a Lógica é o estudo de tais estruturas. Alguns autores [Andrews] dizem que a Lógica é essencialmente o estudo da natureza do raciocínio e das formas de incrementar sua utilização. Seria, ainda, possível apresentar inúmeras outras definições. E algumas delas poderiam ser, segundo [Chauí], o estudo:

- do raciocínio;
- do pensamento correto e verdadeiro;
- das regras para demonstração científica verdadeira;
- das regras para pensamentos não científicos;
- das regras sobre o modo de expor o conhecimento;
- das regras para verificação da verdade ou falsidade de um pensamento.

Tais definições são muito gerais e sintéticas. Isso, porque não é fácil definir de forma precisa o que é Lógica, um tema tão amplo. É por isso que, para nós, basta, por enquanto, a pequena, e superficial, lista anterior. E por que estudar Lógica? Há inúmeras razões! Uma delas é porque estamos iniciando a era pós-industrial, na qual os principais produtos da mente humana são as ideias [DeMasi-1], [DeMasi-2]. E, geralmente, após o surgimento de uma grande ideia, seus fundamentos serão criticados e analisados logicamente. Portanto, uma das razões para se estudar Lógica é que ela nos confere a capacidade de análise crítica dos argumentos mentais utilizados na organização das ideias e dos processos criativos. Ao estudar Lógica, o indivíduo toma consciência dos elementos fundamentais à capacidade de argumentar e expor suas ideias. Obtendo essa habilidade, essa consciência, esse metaconhecimento, o indivíduo se torna mais capaz na racionalização e organização de suas ideias. Nesse contexto, é importante enfatizar que na Lógica não tentamos dizer como as coisas são, ou como as pessoas efetivamente raciocinam. Na Lógica estudamos como as pessoas devem raciocinar. Em suma, para saber raciocinar adequadamente e concretizar os sonhos, o primeiro passo é ter consciência da natureza do raciocínio, como devemos raciocinar, o que pode ser obtido estudando Lógica. A relação entre Lógica e raciocínio é considerada em inúmeras referências. Algumas boas referências são: [Epstein], [Gabbay], [Goldstein], [Haak], [Hurley], [Salmon] e [Mortari].

O contexto deste livro. Se não é fácil definir Lógica, também não é fácil justificá-la, muito menos ensiná-la. Principalmente quando consideramos alunos que estão iniciando cursos de graduação. Este é o desafio deste livro. Ensinar alguns dos principais fundamentos de Lógica, passo a passo, para alunos sem maturidade matemática e com qualquer formação. Assim, para simplificar, não consideramos os difíceis problemas filosóficos, aos quais os conceitos de Lógica estão intimamente ligados. O estudo da Lógica, de um ponto de vista filosófico, pode ser encontrado em: [Gabbay], [Goldstein] e [Haak]. E também não apresentamos a Lógica com ênfase no estudo de Argumentação Lógica. O estudo da Argumentação Lógica pode ser encontrado, por exemplo, em [Epstein], [Hurley], [Salmon]. Neste livro, consideramos apenas os elementos iniciais da Argumentação Lógica. Nosso objetivo é, portanto, uma introdução à Lógica Matemática, tendo como inspiração necessidades básicas de Computação e áreas afins que necessitam de fundamentos de Lógica. Entre tais áreas temos o Direito, a Filosofia e conceitos utilizados em vários concursos. Outras referências que consideram o estudo da Lógica, necessário à Ciência da Computação e áreas afins são: [Andrews], [Barwise], [Enderton], [Fitting], [Manna], [Manna], [Mendelson], [Kelly] e [Shoenfield]. Portanto, não é nosso objetivo o estudo da Lógica do ponto de vista filosófico, ou de argumentação lógica, mas a apresentação dos principais fundamentos da Lógica clássica necessários aos estudantes de Computação e áreas afins. Entretanto, mesmo considerando esse contexto restrito, ao longo do estudo proposto neste livro, o leitor é convidado a checar as definições de Lógica, dadas anteriormente, sempre que possível. O leitor pode verificar que a Lógica, considerada do ponto de vista dos itens citados, tem ligações imediatas com a Computação. Além disso, a Lógica clássica considerada neste livro é apenas uma, entre as inúmeras lógicas existentes. O seu estudo é importante pois é a introdução clássica ao estudo de todas as lógicas. Dessa forma, este livro é também uma introdução ao estudo dos fundamentos de Lógica Matemática e de suas aplicações em inúmeras áreas da Computação, Matemática, Filosofia etc. Este estudo pode ser encontrado em [Alencar], [Andrews], [Barwise], [Costa], [Enderton], [Epstein], [Gabbay], [Haak], [Hurley], [Mendelson], [Mortari], [Nolt], [Salmon], [Souza-2], [Souza-1] e [Velleman].

Este livro é o resultado de um longo processo de ensino de Lógica em disciplinas de graduação e de pós-graduação, lecionadas na Faculdade de Ciência da Computação da Universidade Federal de Uberlândia, a partir de 1991 até os dias atuais. No início, elaboramos notas de aulas. Em 2002, publicamos o livro *Lógica Para Ciência da Computação* [Souza-1]. Em 2008, revisamos e atualizamos a versão de 2002 [Souza-2]. Esta versão do livro é, portanto, o quarto passo de um processo. Neste caso, ela é mais do que uma mera revisão e atualização do livro de 2008. Isso, porque muitas explicações são remodeladas e adicionadas, facilitando a leitura e estudo da Lógica. Em mais de 25 anos lecionando Lógica para alunos de graduação e pós-graduação, foi possível determinar, com clareza, suas necessidades e, principalmente, suas dificuldades. Partindo de inúmeras dúvidas dos alunos, procuramos simplificar a forma de explicar a apresentação matemática necessária às definições da Lógica. De questões elaboradas em provas, ou de exemplos em sala de aula, propomos inúmeros exercícios. Eles formam o complemento da teoria apresentada, sendo, por isso, indispensáveis para um melhor aprendizado da Lógica. Nesse sentido, este livro espera apresentar os principais conceitos, necessários aos estudantes de computação, da forma mais simples possível. São omitidas, por exemplo, algumas demonstrações que requerem habilidades técnicas dos alunos iniciantes, mas os conceitos fundamentais são enfatizados. Para os alunos da pós-graduação o enfoque pode ser diferente. Nesse caso, podem ser consideradas com detalhes todas as demonstrações e os exercícios são mais difíceis e, além disso, o livro pode ser complementado por outras referências, [Andrews], [Barwise], [Boolos], [Enderton], [Fitting], [Leary], [Manna], [Manna], [Mendelson], [Shoenfield], [Silva], [Smith], [Souza-1] e [Souza-2]. Finalmente, este livro não requer nenhum pré-requisito, nem mesmo maturidade matemática, podendo ser utilizado como texto em disciplinas introdutórias de graduação e para o primeiro período de cursos de Computação. Mas, mesmo sendo introdutório, damos ênfase a uma apresentação matemática rigorosa e ao desenvolvimento de demonstrações mais elementares. Algumas demonstrações que requerem técnicas mais avançadas são omitidas. Nesses casos são relatadas apenas algumas análises de resultados. Como salientamos, apresentamos, neste livro, uma versão remodelada do livro *Lógica para Ciência da Computação* [Souza-2]. A necessidade dessas modificações, adições e simplificações sempre aparece após a verificação de que os temas contidos nos livros de versões anteriores nem sempre estão, inteiramente, adequados ao ensino de disciplinas semestrais de cursos de graduação em Computação. Assim, algumas partes são explicadas com mais cuidado, outras retiradas e outras adicionadas. Nesta nova versão, o material corresponde a um bom programa de ensino de Lógica para alunos que estão iniciando seus cursos de graduação ou para alunos de pós-graduação sem formação em Lógica.

Os principais objetivos deste livro. Neste livro, apresentamos, de forma concisa, os primeiros e principais fundamentos da Lógica Clássica necessários aos estudantes de Ciência da Computação, profissionais de Direito, Filosofia e estudantes de concursos em geral. Consideramos o estudo introdutório da Lógica Proposicional, da Lógica de Predicados e da Argumentação Lógica. Nesse estudo apresentamos inicialmente a linguagem da Lógica, sua sintaxe, a semântica e aplicações em Argumentação Lógica. Em seguida, estudamos métodos que produzam ou verifiquem fórmulas ou argumentos da Lógica. Nesse contexto, analisamos alguns sistemas de dedução formal, nos quais são consideradas as noções de prova e consequência lógica, que são fundamentais, por exemplo, para o entendimento de aplicações da Lógica em Ciência da Computação, da Argumentação Lógica e da Lógica exigida nos concursos em geral. A apresentação dos conceitos é feita da forma mais simples possível, com exercícios, considerando seu público alvo: alunos iniciantes com pouca formação básica, profissionais interessados no estudo de Argumentação Lógica e candidatos de concursos em geral.

A organização do livro. Dividimos o livro em duas partes. Na primeira, consideramos a Lógica Proposicional clássica e, na segunda parte, a Lógica de Predicados clássica. A divisão da Lógica em Proposicional e de Predicados é frequentemente seguida pela maioria dos autores. Em cada parte, o estudo da Lógica segue, fundamentalmente, os três passos básicos:

1. Especificação de uma linguagem, a partir da qual o conhecimento é representado. Nessa representação são considerados os conceitos de sintaxe e semântica associados à linguagem.
2. Estudo de métodos que produzam ou verifiquem as fórmulas ou os argumentos válidos. Temos, por exemplo, a verificação de conceitos semânticos como validade, satisfatibilidade, etc. a partir de expressões sintáticas da linguagem.
3. Definição de sistemas de dedução formal em que são consideradas as noções de prova e consequência lógica. A noção de prova estabelece formas para a derivação de novos argumentos a partir daqueles representados previamente, o que também define uma noção de consequência lógica.

A organização deste livro segue o esquema:

Primeira parte. Lógica Proposicional.

- O Capítulo 1 considera o estudo da linguagem da Lógica Proposicional, que corresponde ao passo 1 no estudo da Lógica Proposicional.
- A semântica da Lógica Proposicional é considerada nos Capítulos 2 e 3.
- O estudo de alguns métodos semânticos que verificam propriedades semânticas da Lógica Proposicional é visto no Capítulo 4.

- No Capítulo 5, apresentamos um sistema formal axiomático, ou seja, estudamos um método sintático de dedução.

Segunda parte. Na segunda parte do livro, temos uma sequência de passos análoga àquela apresentada até o Capítulo 5, só que considerando a Lógica de Predicados.

- O Capítulo 6 apresenta a linguagem da Lógica de Predicados, considerando apenas os elementos sintáticos.
- Nos Capítulos 7 e 8 apresentamos a semântica da Lógica de Predicados.
- Mecanismos que verificam as propriedades semânticas da Lógica de Predicados são considerados no Capítulo 9.
- No Capítulo 10, apresentamos um sistema formal axiomático na a Lógica de Predicados.

Como utilizar este livro. Este livro pode ser utilizado como texto básico em diferentes tipos de disciplinas de Lógica. Em uma disciplina elementar, demonstrações sobre completude, correção e aquelas que utilizam indução finita podem ser omitidas. Nesse caso, são consideradas apenas as demonstrações mais elementares. Entretanto, em qualquer caso, é necessário enfatizar os exercícios, que são fundamentais para o entendimento dos conceitos apresentados. O material deste livro também pode ser utilizado em uma disciplina semestral de final de graduação ou pós-graduação, que apresentaria toda a Lógica Proposicional e de Predicados considerada no texto. Em uma leitura rápida, apenas considerando os conceitos fundamentais da Lógica, alguns Capítulos, como 5, 9 e 10, podem até ser omitidos, sem comprometer, com isso, o entendimento do restante do livro. Em disciplinas de pós-graduação, este livro pode ser utilizado como referência para a introdução dos conceitos. Nesse caso, é recomendável complementar o estudo com outros livros. Nessas referências os alunos poderão encontrar resultados e demonstrações que também são fundamentais na Lógica, mas que não são consideradas com profundidade neste livro. Finalmente, este livro pode ser utilizado não apenas por alunos de Computação, mas por todos aqueles que se interessam pelo conhecimento da Lógica, como filósofos, matemáticos, físicos, engenheiros, advogados, etc.

Agradecimentos. Agradeço aos meus alunos de Ciência da Computação da Universidade Federal de Uberlândia, mais de dois mil alunos, que nos últimos anos utilizaram este livro e deram sugestões para o seu aprimoramento. O pessoal da Faculdade de Computação também deve ser lembrado. À minha família, que é a lógica que fundamenta todo este trabalho, servindo como inspiração. João Paulo e Tiago certamente ainda não compreendem o conteúdo deste livro, mas ajudaram. Como reconhecimento, os nomes de vários alunos, amigos e colegas aparecem nos exercícios.

João Nunes de Souza.
Uberlândia, 11 de setembro de 2020.

SUMÁRIO

CAPÍTULO 1

A LINGUAGEM DA LÓGICA PROPOSICIONAL

1.1 Introdução

Quando fazemos declarações, podemos, ou não, apresentar provas que apoiam o que estamos dizendo. E, se apresentamos, como devem ser essas provas? É a análise lógica que nos dará suporte na apresentação da prova que estamos procurando. Certamente, compreender como deve ser essa prova depende do entendimento de como as pessoas raciocinam. Pois, para justificar ou provar algo, o que fazemos é, geralmente, raciocinar. E, nesse contexto, as técnicas da Lógica podem ser aplicadas para compreendermos o nosso raciocínio, a nossa prova. Assim, um dos objetivos fundamentais da Lógica é proporcionar uma capacidade crítica que permita distinguir os argumentos, as inferências e as provas corretas. Para atingir o objetivo de desenvolver nossa capacidade crítica, iniciamos o estudo da Lógica considerando o sistema lógico mais simples: a Lógica Proposicional. O estudo dessa Lógica[1] segue fundamentalmente os três passos básicos:

1. Especificação de uma linguagem, a partir da qual o conhecimento é representado. Tal representação considera os conceitos de sintaxe e semântica associados é linguagem.
2. Estudo de métodos que produzam ou verifiquem as fórmulas ou os argumentos

[1] E também da Lógica de Predicados, considerada na segunda parte deste livro.

válidos. A verificação do conceito semântico de tautologia, ou validade, de fórmulas sintáticas da linguagem é um exemplo desse estudo.

3. Definição de sistemas de dedução formal em que são consideradas as noções de prova e consequência lógica. A noção de prova estabelece formas para a derivação de conhecimento a partir daquele representado previamente, o que também define a noção de consequência lógica.

Este capítulo analisa os elementos fundamentais da sintaxe da linguagem da Lógica Proposicional. Essa análise corresponde ao início do estudo do item 1 dos três passos básicos do estudo da Lógica. Os capítulos posteriores dão continuidade a análise, considerando os outros passos.

A definição da linguagem da Lógica Proposicional é semelhante a definição de outras linguagens, como a linguagem da língua portuguesa. O alfabeto, que é constituído pelos símbolos que formam as palavras da linguagem,é definido inicialmente. No caso do alfabeto da língua portuguesa, ele é formado pelo conjunto de letras $\{a, b, \ldots, z, A, B, \ldots, Z\}$. Em seguida, as palavras da linguagem são definidas. A concatenação das letras "d" e "e" forma a palavra "de", que pertence *à* linguagem da língua portuguesa. Por outro lado, a concatenação das letras "e" e "d", cujo resultado é "ed", não forma uma palavra dessa linguagem. Nas línguas naturais, como a portuguesa, em geral temos os dicionários, nos quais estão listadas todas as suas palavras. A partir da combinação dessas palavras, seguindo as regras da gramática do idioma, são formadas as sentenças. No caso de uma linguagem como a da Lógica, não há algo que corresponda a um dicionário, mas há regras gramaticais para a formação das sentenças. Uma gramática, a propósito, é um conjunto de regras que determinam como as palavras e os símbolos do alfabeto devem ser combinados para formar sentenças. Nas linguagens naturais, como o português, as sentenças podem ser classificadas de diversas formas: interrogativas ("Qual é o seu nome?"); imperativas ("Lave as panelas agora!"); ou declarativas ("José é uma pessoa legal"). No caso da Lógica considerada neste livro, as sentenças que são objetos de estudo são as sentenças declarativas.[2] Portanto, a linguagem da Lógica considerada neste texto tem como objetivo o estudo de sentenças do tipo: "está chovendo", que podem ser interpretadas como verdadeiras ou falsas. Além disso, para simplificar, desconsiderando uma análise filosófica [Gabbay], [Goldstein], consideramos, neste texto, que uma sentença é uma sequência de palavras que obedecem a certas regras gramaticais[3] e semânticas. Uma proposição, por exemplo, é uma sentença declarativa que pode ser interpretada como verdadeira ou falsa. Definir proposição dessa forma é uma grande simplificação, pois pode haver grandes discordências sobre o que são, exatamente, as sentenças declarativas que podem ser interpretadas como verdadeiras ou falsas. Como tratar, por exemplo, as sentenças ambóguas? Quando elas podem ser consideradas ambíguas? Assim, para simplificar, consideramos neste livro somente os casos nos quais as proposições não podem ser uma sentença ambígua como: "Eu

[2] há Lógicas não clássicas que consideram sentenças imperativas e interrogativas.
[3] As regras da gramática da linguagem natural.

vi José com uma luneta." Essa sentença é ambígua pois pode significar dois fatos: eu estava utilizando uma luneta e vi José; ou eu vi José, que estava utilizando uma luneta. Além disso, para simplificar, as sentenças: "José comeu o bolo" e "O bolo foi comido por José" são representações da mesma proposição, ou seja: são consideradas equivalentes. Isso ocorre porque a Lógica se preocupa apenas com o conteúdo e significado de uma sentença declarativa, e não com a sua sequência de palavras. Além disso, na Lógica apresentada neste livro, o tempo verbal também não seria considerado. "José come o bolo", "José comeu o bolo" e "José comeu o bolo" são sentenças que possuem a mesma representação. Os filósofos utilizam o termo "proposição" de muitas maneiras, e não é nosso objetivo uma análise profunda desse tema. Queremos apenas dizer que "proposição" é frequentemente usada como sinônimo de "conteúdo" e, portanto, nesse sentido, podemos dizer que as proposições são as portadoras primárias de verdade e falsidade. Quando dizemos que uma certa sentença declarativa é verdadeira ou falsa, estamos falando que seu conteúdo é verdadeiro, ou falso. Mas, afinal, por que devemos definir uma linguagem formal para estudar Lógica? Uma linguagem com símbolos proposicionais, de pontuação e conectivos? A resposta para essa questão é complexa e depende do estudo da Lógica propriamente dita. Entretanto, podemos elucidar algumas coisas a esse respeito. Considere o argumento: "Se está chovendo, então a rua está molhada. está chovendo. Portanto, a rua está molhada." Considere também o argumento: "Se tenho mais de um milhão de dólares, então sou milionário. Tenho mais de um milhão de dólares. Portanto, sou milionário." Observe que utilizamos com frequência esses tipos de argumentos, em variadas formas. Do ponto de vista da Lógica, o que interessa é a forma desses argumentos. E todos têm a forma:

1. Se tra-la-lá, então tro-lo-lô.
2. Tra-la-lá.
3. Portanto, tro-lo-lô.

No último caso, "tra-la-lá" é uma variável que representa alguma proposição. Igualmente, "tro-lo-lô" também representa alguma proposição. Escrevendo de uma maneira mais formal, os argumentos anteriores podem ser escritos como: "Se $\breve{P}$, então $\breve{Q}$. $\breve{P}$. Portanto, $\breve{Q}$." Assim, temos uma conclusão importante. Quando utilizamos símbolos proposicionais ou variáveis proposicionais em uma fórmula, estamos interessados na forma da fórmula. Nesse caso, se o argumento anterior tem alguma propriedade importante, isso depende da sua forma e não necessariamente daquilo que os símbolos $\breve{P}$ e $\breve{Q}$ representam. Por essas razíes, entre outras, a Lógica é chamada de Lógica Formal, dado que nela a ênfase não é o estudo de argumentos expressos em linguagem natural. Em vez disso, estudamos a forma dos argumentos, que é revelada pelo uso de símbolos, como os símbolos proposicionais $\breve{P}$ e $\breve{Q}$. A definição da linguagem da Lógica Proposicional, que é uma linguagem formal, segue os seguintes passos: inicialmente é definido o alfabeto da linguagem; em seguida, são definidas as regras gramaticais que são utilizadas na construção de proposições a partir do alfabeto.

1.2 Alfabeto da Lógica Proposicional

Para iniciar o estudo da Lógica Proposicional, o nosso primeiro passo é definir o conjunto de símbolos utilizados na sua linguagem. Observe a

com o estudo das linguagens naturais. Por exemplo: para iniciar o estudo do chinês, o primeiro passo é, certamente, conhecer algo sobre o alfabeto da língua chinesa. Na Matemática também temos a mesma situação. Um dos primeiros passos do estudo formal da Matemática é conhecer os símbolos utilizados na linguagem matemática. No caso da Lógica Proposicional, o alfabeto da sua linguagem é definido pelo conjunto de símbolos descritos a seguir.

Definição 1.1 (alfabeto da Lógica Proposicional) *O alfabeto da Lógica Proposicional é constituído por:*

1. *símbolos de pontuação:* $($, $)$*;*
2. *símbolos proposicionais:* $P, Q, R, S, P_1, Q_1, R_1, S_1, P_2, Q_2, \ldots$*;*
3. *conectivos proposicionais:* $\neg$,$\vee$,$\wedge$,$\rightarrow$,$\leftrightarrow$.

Observe que o alfabeto da linguagem da Lógica Proposicional é constituído de um conjunto infinito, enumerável de símbolos. Caso você não saiba, um conjunto é enumerável quando há uma correspondência biunívoca entre seus elementos e os números naturais, ou parte dos números naturais. No caso dos símbolos proposicionais, por exemplo, eles formam um conjunto infinito que é enumerável. Basta considerar a seguinte correspondência entre tal conjunto e os números naturais, como se segue: P corresponde ao número 0; Q corresponde ao número 1; R corresponde ao número 2; S corresponde ao número 3; P_1 corresponde ao número 4; Q_1 corresponde ao número 5; R_1 corresponde ao número 6; S_1 corresponde ao número 7; P_2 corresponde ao número 8; e assim por diante. Isso é diferente do que ocorre no alfabeto da língua portuguesa, que é formado por um conjunto finito de símbolos. O alfabeto da Lógica Proposicional é também dividido em três classes.

símbolos de pontuação. O alfabeto da Lógica Proposicional contém apenas dois símbolos para pontuação "(" e ")", que, evidentemente, são diferentes daqueles utilizados no alfabeto da língua portuguesa.

símbolos proposicionais. Os símbolos proposicionais são utilizados para representar as proposições na linguagem da Lógica. O símbolo P, por exemplo, pode ser utilizado para representar a proposição "está chovendo". Tal fato é indicado por: $P =$ "está chovendo", ou seja, P é igual a proposição "está chovendo". Como há um conjunto enumerável de símbolos proposicionais, é possível representar um conjunto enumerável de proposições. Isto é, como o conjunto dos símbolos proposicionais é infinito e enumerável, é possível representar um conjunto infinito e enumerável de proposições.

Conectivos proposicionais. Os conectivos proposicionais são símbolos utilizados frequentemente na matemática e possuem as seguintes denominações: o símbolo

$\neg$ é denominado por "não", $\vee$ por "ou", $\wedge$ por "e", $\rightarrow$ por "se então" ou "implica" e o símbolo $\leftrightarrow$ é denominado por "se, e somente se". O símbolo $\leftrightarrow$ também é denominado por "bi-implicação" e frequentemente é referenciado pelo acrônimo "sse".

Nota. Em geral, linguagens de computação utilizam, Além dos símbolos do alfabeto da Lógica Proposicional, os símbolos de verdade. Tais símbolos são símbolos proposicionais especiais, pois, como veremos mais a frente, eles possuem interpretação fixa. Em vários textos e linguagens de programação, esses símbolos são denotados por *true* e *false*. Os símbolos de verdade são as palavras da língua inglesa *true* e *false*, que no presente contexto são consideradas apenas como símbolos. Entretanto, há também livros onde tais símbolos são representados de forma diferente.[4] Observe, então, que os símbolos de verdade não necessariamente fazem parte do alfabeto da Lógica Proposicional. Então, a rigor, utilizamos a Definição 1.1 como a definição dos símbolos do alfabeto. Entretanto, como os símbolos de verdade *true* e *false* são muito utilizados em Computação, em vários contextos, eles são admitidos como símbolos extras ao alfabeto, quando necessários.

1.3 fórmulas da Lógica Proposicional

Na língua portuguesa, não é qualquer concatenação de letras que forma uma palavra, como também não é qualquer concatenação de palavras que forma uma sentença. Analogamente, não é qualquer concatenação de símbolos do alfabeto que é uma fórmula da Lógica Proposicional. O conjunto das fórmulas da Lógica Proposicional, que são formadas pela concatenação de símbolos do alfabeto, é definido a seguir.

Definição 1.2 (fórmulas da Lógica Proposicional) *As fórmulas da linguagem da Lógica Proposicional são construídas, de forma indutiva, a partir dos símbolos do alfabeto conforme as regras a seguir. O conjunto das fórmulas é o menor conjunto que satisfaz as regras:*

1. *todo símbolo proposicional é uma fórmula;*
2. *se H é uma fórmula, então $(\neg H)$, a negação de H, é uma fórmula;*
3. *se H e G são fórmulas, então a disjunção de H e G, dada por $(H \vee G)$, é uma fórmula;*
4. *se H e G são fórmulas, então a conjunção de H e G, dada por $(H \wedge G)$, é uma fórmula;*
5. *se H e G são fórmulas, então a implicação de H em G, dada por $(H \rightarrow G)$, é uma fórmula. Nesse caso, H é o antecedente e G o consequente da fórmula $(H \rightarrow G)$;*

[4] há livros em que *true* e *false* são representados respectivamente por $\top$ e $\bot$ ou por *verum* e *falsum*.

6. *se H e G são fórmulas, então a bi-implicação de H e G, dada por $(H \leftrightarrow G)$, é uma fórmula. Nesse caso, H é o lado esquerdo e G o lado direito da fórmula $(H \leftrightarrow G)$.*

Na Definição 1.2, cada item define uma regra para a construção de fórmulas a partir de fórmulas mais simples. Observe que, nesse aspecto, a linguagem da Lógica Proposicional é diferente da linguagem da língua portuguesa, na qual não há regras para a construção de palavras e sentenças. Conforme as regras da Definição 1.2, as fórmulas mais elementares são consideradas no primeiro item. A regra 1 estabelece que todo símbolo proposicional é uma fórmula. Dessa regra decorre que todos os símbolos $P, Q, R, S, P_1, Q_1, R_1, S_1, P_2, Q_2, \ldots$ são fórmulas. Em seguida, utilizando as outras regras, é possível obter um conjunto infinito, enumerável, de fórmulas a partir daquelas mais elementares. Além disso, na formação das fórmulas, a partir da regra 2, os símbolos de pontuação são sempre utilizados. A Definição 1.2 estabelece uma gramática para a construção de fórmulas bem formadas. é importante observar que na língua portuguesa não existe um método para a construção das palavras e sentenças da linguagem. Além disso, o conjunto das palavras da língua portuguesa é finito, o que não ocorre com o conjunto das fórmulas, que é infinito.

Nota. Como os símbolos de verdade são símbolos proposicionais especiais, então eles são também fórmulas. Ou seja, no caso em que temos símbolos de verdade no alfabeto, então todo símbolo de verdade é uma fórmula.

Exemplo 1.1 (construção de fórmulas) Neste exemplo, vamos construir algumas fórmulas a partir das regras da Definição 1.2.

a) Conforme a regra 1, o símbolo $P_{10.000}$ é uma fórmula. Observe que nesse caso, temos o símbolo P com o subíndice 10.000. Estamos querendo lembrar que os símbolos P, Q, R ou S, com qualquer subíndice, mesmo os grandes, são fórmulas.

b) Conforme a regra 1, os símbolos P e Q são fórmulas.

c) A partir das fórmulas P e Q obtidas no item b) e utilizando a regra 3, obtemos a fórmula $(P \vee Q)$.

d) Utilizando a fórmula $(P \vee Q)$ obtida no item c), a fórmula $P_{10.000}$ do item a) e utilizando a regra 5, obtemos a fórmula $((P \vee Q) \rightarrow P_{10.000})$. ■

Observe que o raciocínio do exemplo anterior pode ser repetido indefinidamente. Isto é, as regras da Definição 1.2 podem ser aplicadas inúmeras vezes e, nesse caso, podem ser obtidas fórmulas bem grandes. Entretanto, não é qualquer concatenação de símbolos que é uma fórmula, conforme explicamos no próximo exemplo.

Exemplo 1.2 (construção de fórmulas) As concatenações dos símbolos a seguir não constituem fórmulas: PR, $(RP_{10.000} \leftrightarrow)$ e $(P_{10.000} \rightarrow\leftrightarrow (RP_{10.000} \rightarrow))$. Nesses casos não é possível obter as concatenações a partir das regras da Definição 1.2. ■

Na linguagem da língua portuguesa, é frequente a omissão de símbolos de pontuação, ou acentos, o que nem sempre altera a compreensão dos significados das palavras e sentenças. Por exemplo, a palavra "José" é muitas vezes escrita como "Jose". A rigor, "Jose" não é uma palavra da língua portuguesa, pois não possui o acento necessário na letra "e". Mas, mesmo assim, não há dificuldade em compreender que a palavra "Jose" possa corresponder a correta palavra "José". Algo análogo também é considerado na Lógica Proposicional.

Notação. Neste livro, os parênteses ou símbolos de pontuação das fórmulas são omitidos quando não há problemas sobre a sua interpretação. Além disso, as fórmulas podem ser escritas em várias linhas para uma melhor leitura. Assim, a fórmula

$$(((P \vee R) \rightarrow P_{10.000}) \leftrightarrow (Q \wedge S))$$

pode ser escrita como:

$$\begin{gathered}(P \vee R) \rightarrow P_{10.000} \\ \leftrightarrow \\ Q \wedge S\end{gathered}$$

ou ainda como $((P \vee R) \rightarrow P_{10.000}) \leftrightarrow (Q \wedge S)$. Uma outra forma de simplificar a escrita das fórmulas, omitindo símbolos de pontuação, é definir uma ordem de precedência dos conectivos. Nesse caso, o raciocínio é o mesmo da aritmética, na qual há uma ordem de precedência entre operações como adição, subtração, multiplicação, etc. Nesse caso, a ordem de precedência entre as operações possibilita a eliminação de parênteses das fórmulas. Considere, por exemplo, na aritmética, a expressão $2 + 4 \times 5$ Mesmo com a ausência de parênteses, todos sabem que essa expressão equivale a $(2 + (4 \times 5))$. Isso ocorre porque foi convencionado que a multiplicação tem precedência sobre a adição. Nesse caso, a multiplicação é executada inicialmente. Isso significa que, ao colocar os parênteses, eles ficam inicialmente perto da multiplicação. Conforme as convenções da aritmética, há também operações sem ordem de precedência entre si, como a multiplicação e a divisão. A expressão $4 \times 6 \div 3$ pode ter duas leituras: $((4 \times 6) \div 3)$ ou $(4 \times (6 \div 3))$. Nesse caso, em alguns livros, há uma convenção adicional. A operação mais à esquerda tem precedência sobre a segunda. Entre os conectivos, podemos definir uma precedência análoga a da aritmética. E essa ordem de precedência permite a simplificação das fórmulas com a eliminação de símbolos de pontuação.

Definição 1.3 (ordem de precedência) *Na Lógica Proposicional, a ordem de precedência dos conectivos proposicionais é definida por:*

1. *maior precedência:* $\neg$*;*
2. *precedência intermediária:* $\rightarrow$, $\leftrightarrow$*;*
3. *menor precedência:* $\wedge$, $\vee$.

Conforme a regra 1 da Definição 1.3, o conectivo $\neg$ tem precedência sobre os outros. Isso significa que na ausência de símbolos de pontuação, ele deve ser considerado primeiro. Observe que algo similar ocorre na aritmética, na qual a negação aritmética "-" tem precedência sobre todas as outras operações. Ou seja, $3 + -5 \times 3$ corresponde a expressão $(3 + ((-5) \times 3))$. Nesse caso, antes de efetuar a adição e a multiplicação, o número 5 é negado, e obtemos (-5). Voltando aos conectivos proposicionais, como na aritmética, há também aqueles casos em que não há relação de precedência. Por exemplo, conforme a regra 2 da Definição 1.3, os conectivos $\rightarrow$ e $\leftrightarrow$ não possuem precedência um sobre o outro, e a fórmula $P \rightarrow Q \leftrightarrow R$ possui duas leituras correspondentes $((P \rightarrow Q) \leftrightarrow R)$ ou $(P \rightarrow (Q \leftrightarrow R))$. Nesse caso, podemos utilizar várias linhas para eliminar ambiguidades. A fórmula $((P \rightarrow Q) \leftrightarrow R)$ pode ser escrita como:

$$\begin{array}{c} P \rightarrow Q \\ \leftrightarrow \\ R \end{array}$$

Até agora, apresentamos o alfabeto e as fórmulas da linguagem da Lógica Proposicional. Demos os primeiros passos para entender essa linguagem e seus significados. Entretanto, observe que ainda não consideramos o significado das fórmulas. Neste ponto, cada fórmula é vista apenas como uma concatenação de símbolos. Isso equivale a apresentar a palavra da língua portuguesa "saudade" a uma pessoa que não sabe português. A pessoa sabe que "saudade" pertence à língua portuguesa porque está no dicionário. Entretanto, é necessário mais informação para que ela saiba o significado dessa palavra. As fórmulas estão sendo apresentadas apenas sintaticamente e seu significado é estudado no próximo capítulo.

1.4 Linguagem-objeto e Metalinguagem

Quando definimos uma linguagem, como a da Lógica, é necessário ter em mente a diferença entre linguagem-objeto e metalinguagem. Por exemplo: "I love New York"é uma sentença com quatro palavras da língua inglesa". Essa sentença expressa uma informação sobre a sentença: "I love New York". Temos uma sentença da língua portuguesa que expressa algo sobre outra sentença da língua inglesa. Nesse caso, a sentença "I love New York" pertence à linguagem-objeto, e, portanto, o inglês é a linguagem-objeto. Por outro lado, nesse caso, o português é a metalinguagem. Analogamente, na Lógica também há sentenças que expressam informação sobre fórmulas. Considere a sentença: "A concatenação de símbolos $((P \lor Q) \rightarrow P_{10.000})$ é uma fórmula da Lógica Proposicional." Nesse caso, a linguagem da Lógica Proposicional é a linguagem-objeto, e a linguagem portuguesa é a metalinguagem. Ou seja, as palavras da língua portuguesa: "A concatenação de símbolos ... é uma fórmula da Lógica Proposicional." pertencem a metalinguagem. Por outro lado, a fórmula: $((P \lor Q) \rightarrow P_{10.000})$ pertence à linguagem-objeto, que neste caso é a linguagem da Lógica Proposicional. Mas por que estamos tão preocupados em distinguir linguagem-objeto de metalinguagem? Porque fazer tal distinção facilita o entendimento das definições que estabelecem as regras para formação das fórmulas da Lógica Proposicional. Considere, por exemplo, a Definição 1.1. Nessa definição, temos os três itens:

1. símbolos de pontuação: (,);
2. símbolos proposicionais: $P, Q, R, S, P_1, Q_1, R_1, S_1, P_2, Q_2, \ldots$;
3. conectivos proposicionais: $\neg$,$\vee$,$\wedge$,$\rightarrow$,$\leftrightarrow$.

No item 1, a expressão "símbolos de pontuação:" pertence à metalinguagem, que nesse caso é o português. Isso significa que estamos utilizando o português para explicar os símbolos da linguagem-objeto. Já os símbolos "(" e ")" pertencem a linguagem-objeto. Isso, porque eles pertencem a linguagem da Lógica. Observe que a vírgula entre "($''$ e ")$''$ não pertence à linguagem-objeto, dado que tal vírgula não pertence ao alfabeto da Lógica. Algo semelhante ocorre no item 2. A expressão "símbolos proposicionais" pertence à metalinguagem. E os símbolos P e Q e R e S e P_1 e Q_1 e R_1 e S_1 e P_2 e Q_2, etc. pertencem a linguagem-objeto. Isso porque eles pertencem a linguagem da Lógica. Novamente, observe que as vírgulas entre os símbolos P e Q e R e S e P_1 e Q_1 e R_1 e S_1 e P_2 e Q_2 etc. não pertencem a linguagem-objeto, dado que tais vírgulas não pertencem ao alfabeto da Lógica. Na verdade, tudo isso parece um preciosismo. Mas não é bem assim. Isso também é importante para entender outros tipos de definição, principalmente, aquelas que utilizam variáveis da metalinguagem.

1.5 Variáveis

A utilização de variáveis em matemática é comum e facilita expressar leis como a igualdade $(x - y)(x + y) = (x^2 - y^2)$, na qual x e y são variáveis que representam números. Imagine descrever essa igualdade sem a utilização de variáveis. Certamente, seria bem mais difícil. Entretanto, o uso de variáveis facilita, pois x e y podem representar qualquer número. Da mesma forma, para expressar de maneira mais simples as leis da Lógica, as variáveis são também utilizadas. Entretanto, em Lógica há dois tipos de variáveis: as que pertencem a linguagem-objeto e aquelas que pertencem a metalinguagem. As primeiras serão consideradas na segunda parte deste livro, na Lógica de Predicados. Porém variáveis da metalinguagem podem ser utilizadas para representar símbolos proposicionais e fórmulas. Imagine a situação em que é necessário falar alguma coisa sobre qualquer símbolo proposicional. Dizer, por exemplo, que uma fórmula que contém apenas um símbolo proposicional tem comprimento igual a 1. Isso poderia ser expresso de várias formas, como por exemplo:

- comprimento de P é igual a 1; comprimento de Q é igual a 1; comprimento de R é igual a 1.

- se H é uma fórmula do tipo: P, ou Q, ou R, etc. então o comprimento de H é igual a 1.
- se $H = P$, ou $H = Q$, ou $H = R$, etc. então o comprimento de H é igual a 1.

Entretanto, se for utilizada a noção de variável da metalinguagem, tudo fica mais simples. Suponha que o símbolo, maluco, $\otimes$ seja um símbolo da metalinguagem, utilizado para se referir a qualquer símbolo proposicional. Ou seja, $\otimes$ é utilizado como a variável x da matemática que pode ser substituída por qualquer número. Portanto, podemos ter: $x = 1$, ou $x = 2$, etc. E, da mesma forma, podemos ter: $\otimes = P$, ou $\otimes = Q$ etc. Observe que $\otimes$ é utilizado como uma variável que varia no conjunto do símbolos proposicionais. E utilizando tal variável da metalinguagem, fica bem mais simples dizer que uma fórmula que contém apenas um símbolo proposicional tem comprimento igual a 1.

- se $H = \otimes$, então o comprimento de H é igual a 1.

Mas, é claro, não utilizaremos símbolos tão obscuros como $\otimes$ para denotar variáveis da metalinguagem.

Notação. As variáveis da metalinguagem que denotam os símbolos proposicionais são escritas como: $\breve{P}$, com possíveis subíndices. Portanto, por esta notação, temos a letra P com um pequeno risco na parte de cima. Isso significa, por exemplo, que $\breve{P}$ pode denotar qualquer um dos símbolos: $P, Q, R, S, P_1, Q_1, R_1, S_1, P_2, \ldots$. Analogamente, as variáveis A, B, C, D, E, H, G com possíveis subíndices denotam fórmulas. A variável H_2 pode denotar, por exemplo, a fórmula $(P \rightarrow Q)$. Portanto, letras como: $\breve{P}, A, B, C, D, E, H$ são elementos da metalinguagem que denotam símbolos proposicionais e fórmulas da Lógica Proposicional. Isso significa, por exemplo, que, a rigor, $(\breve{P}_1 \rightarrow \breve{P}_2)$ não é uma fórmula da Lógica Proposicional. Essa expressão é uma denotação de fórmulas do tipo $(P \rightarrow Q)$ e $(R \rightarrow S)$. Do mesmo modo, $(H \vee G)$ não é uma fórmula, mas a denotação de uma fórmula do tipo $((P \rightarrow Q) \vee (R \wedge S))$, onde H é substituída por $(P \rightarrow Q)$ e G por $(R \wedge S)$. Geralmente, expressões do tipo $(\breve{P}_1 \rightarrow \breve{P}_2)$ e $(H \vee G)$ são denominadas esquemas de fórmulas. Os esquemas de fórmulas se transformam em fórmulas quando as variáveis da metalinguagem são substituídas por símbolos e fórmulas da Lógica. Vale a pena observar nas definições a seguir, a utilização de variáveis que representam símbolos proposicionais e fórmulas.

1.6 Características sintáticas das fórmulas

Algumas características sintáticas, definidas a partir das fórmulas da Lógica Proposicional, como o comprimento e as subfórmulas, são consideradas a seguir. O comprimento de uma fórmula da Lógica Proposicional, por exemplo, é um conceito frequentemente utilizado em demonstrações que utilizam indução finita, como será visto a partir do capítulo 5.

Definição 1.4 (comprimento de uma fórmula) *Seja H uma fórmula da Lógica Proposicional. O comprimento de H, denotado por $comp[H]$, é definido como se segue.*

1. *Se $H = \breve{P}$, então $comp[H] = 1$;*
2. *$comp[\neg H] = comp[H] + 1$;*
3. *$comp[H \vee G] = comp[H] + comp[G] + 1$;*
4. *$comp[H \wedge G] = comp[H] + comp\ [G] + 1$;*
5. *$comp[H \rightarrow G] = comp[H] + comp[G] + 1$;*
6. *$comp[H \leftrightarrow G] = comp[H] + comp[G] + 1$.*

Conforme a Definição 1.4, os símbolos de pontuação não são considerados no cílculo do comprimento. O comprimento de uma fórmula é obtido contando apenas os símbolos proposicionais, tanto os de verdade quanto os conectivos proposicionais.

Exemplo 1.3 (comprimento de uma fórmula) As fórmulas

$$(P \rightarrow Q), \quad ((P \wedge Q) \leftrightarrow P)$$

têm comprimentos iguais a 3 e 5, respectivamente. ■

Outro conceito sintático sobre fórmulas é a ideia de subfórmula, que, informalmente, é um pedaão da fórmula que é fórmula.

Definição 1.5 (subfórmula) *Seja H uma fórmula da Lógica Proposicional, então:*

1. *H é uma subfórmula de H;*
2. *se H é uma fórmula do tipo $(\neg G)$, então G é uma subfórmula de H;*
3. *se H é uma fórmula do tipo: $(G \vee E)$, $(G \wedge E)$, $(G \rightarrow E)$ ou $(G \leftrightarrow E)$, então G e E são subfórmulas de H;*
4. *se G é subfórmula de H, então toda subfórmula de G é subfórmula de H.*

Exemplo 1.4 (subfórmulas) As subfórmulas de $(((P \vee S) \wedge Q) \leftrightarrow R)$ são:

$$(((P \vee S) \wedge Q) \leftrightarrow R), \ ((P \vee S) \wedge Q), \ R, \ (P \vee S), \ Q, \ P, \ S. \ ■$$

1.7 símbolos de Pontuação

Conforme a Definição 1.2, as únicas fórmulas que não possuem símbolos de pontuação são aquelas com um único símbolo proposicional. Tais fórmulas são determinadas conforme a regra 1 da definição. Daí para a frente, as outras regras sempre introduzem símbolos de pontuação para obter fórmulas maiores a partir de outras menores. A regra 2, por exemplo, diz que dada uma fórmula qualquer H, então $(\neg H)$, a negação de H, também é uma fórmula. Observe que nesse caso, a fórmula $(\neg H)$ é obtida a partir de H, pela adição dos símbolos de pontuação "(" e ")". O mesmo ocorre quando usamos as outras regras: 3, 4, 5 e 6, que também constroem fórmulas maiores a partir de outras menores. Assim, se tais regras forem repetidas muitas vezes, obtemos fórmulas com um comprimento grande e com muitos símbolos de pontuação, ou parênteses. Observe a sequência de fórmulas a seguir, que começa com fórmulas de comprimento igual a 1. Em seguida, as outras fórmulas são obtidas das precedentes, utilizando as regras da Definição 1.2 e introduzindo inúmeros parênteses.

1. pela regra 1, P, Q, R e S são fórmulas;
2. pela regra 5, $(P \to Q)$ é fórmula;
3. pela regra 2, $(\neg R)$ é fórmula;
4. pela regra 3, $(S \vee P)$ é fórmula;
5. pela regra 6, $((P \to Q) \leftrightarrow (\neg R))$ é fórmula;
6. pela regra 5, $((S \vee P) \to P)$ é fórmula;
7. pela regra 4, $(((P \to Q) \leftrightarrow (\neg R)) \wedge ((S \vee P) \to P))$;
8. pela regra 5,
   $((((P \to Q) \leftrightarrow (\neg R)) \wedge ((S \vee P) \to P)) \to ((P \to Q) \leftrightarrow (\neg R)))$
   é fórmula.

Observe a última fórmula:

$$((((P \to Q) \leftrightarrow (\neg R)) \wedge ((S \vee P) \to P)) \to ((P \to Q) \leftrightarrow (\neg R))).$$

Ela possui 20 símbolos de pontuação, que, a rigor, somente são utilizados para estabelecer a correta relação entres os símbolos proposicionais e conectivos presentes na fórmula. Em outras palavras, como analisamos no próximo capítulo, para interpretar uma fórmula como essa, devemos dar significados para os símbolos proposicionais e para os conectivos. Isso significa que para interpretar a fórmula anterior, a rigor, não é necessário interpretar os parênteses. Ou seja, os 20 parênteses são utilizados somente para separar, corretamente, os símbolos da fórmula. Do ponto de vista computacional, isso é uma perda de espaço. Isto é, armazenar os 20 parênteses exige memória do computador. Para solucionar esse problema, podemos escrever as fórmulas da Lógica Proposicional sem a utilização de símbolos de pontuação e sem que haja confusão na sua interpretação. Isso é obtido, utilizando a notação polonesa, que é definida a seguir. Conforme a Definição 1.2, os conectivos proposicionais diferentes de $\neg$ devem ser escritos na forma infixa. Isto é, o conectivo $\vee$, por exemplo, deve ser escrito entre duas fórmulas. A Definição 1.2 pode ser modificada, possibilitando escrever os conectivos na notação prefixa, estabelecendo uma nova notação, denominada notação polonesa.

Definição 1.6 (fórmula com notação polonesa) *Na notação polonesa, as fórmulas da linguagem da Lógica Proposicional são construídas, de forma indutiva, a partir dos símbolos do alfabeto, conforme as regras a seguir. O conjunto das fórmulas é o menor conjunto que satisfaz as regras:*

1. *todo símbolo proposicional é uma fórmula:*
2. *se H é uma fórmula, então $\neg H$, a negação de H, é uma fórmula;*
3. *se H e G são fórmulas, então a disjunção de H e G, dada por $\vee HG$, é uma fórmula;*
4. *se H e G são fórmulas, então a conjunção de H e G, dada por $\wedge HG$, é uma fórmula;*
5. *se H e G são fórmulas, então a implicação de H em G, dada por $\rightarrow HG$, é uma fórmula. Nesse caso, H é o antecedente e G o consequente da fórmula $\rightarrow HG$;*
6. *se H e G são fórmulas, então a bi-implicação de H e G, dada por $\leftrightarrow HG$, é uma fórmula. Nesse caso, H é o lado esquerdo e G o lado direito da fórmula $\leftrightarrow HG$.*

Conforme a Definição 1.6, as fórmulas são construídas sem a utilização de símbolos de pontuação. Nesse caso, para construir a fórmula

$$(((((P \rightarrow Q) \leftrightarrow (\neg R)) \wedge ((S \vee P) \rightarrow P))) \rightarrow ((P \rightarrow Q) \leftrightarrow (\neg R)))$$

utilizando a notação polonesa, temos a seguinte sequência.

1. pela regra 1, P, Q, R e S são fórmulas;
2. pela regra 5, $\rightarrow PQ$ é fórmula;
3. pela regra 2, $\neg R$ é fórmula;
4. pela regra 3, $\vee SP$ é fórmula;
5. pela regra 6, $\leftrightarrow \rightarrow PQ \neg R$ é fórmula;
6. pela regra 5, $\rightarrow \vee SPP$ é fórmula;
7. pela regra 4, $\wedge \leftrightarrow \rightarrow PQ \neg R \rightarrow \vee SPP$ é fórmula;
8. pela regra 5, $\rightarrow \wedge \leftrightarrow \rightarrow PQ \neg R \rightarrow \vee SPP \leftrightarrow \rightarrow PQ \neg R$ é fórmula.

Na notação polonesa, a fórmula resultante é:

$$\rightarrow \wedge \leftrightarrow \rightarrow PQ \neg R \rightarrow \vee SPP \leftrightarrow \rightarrow PQ \neg R$$

Observe que essa fórmula não possui nenhum símbolo de pontuação. Entretanto, só um computador para entender essa fórmula. é isso mesmo, as fórmulas na notação polonesa são adequadas para manipulação em computadores. Entretanto, sua leitura não é imediata. Na apresentação precedente, mostramos como construir uma fórmula na notação polonesa a partir da Definição 1.6. Entretanto, dada uma fórmula na notação convencional, temos um algoritmo para obter a correspondente fórmula na notação polonesa. Observe o exemplo a seguir.

Exemplo 1.5 (notação polonesa) Este exemplo transforma a fórmula a seguir para a fórmula correspondente na notação polonesa:

$$((((P \rightarrow Q) \leftrightarrow (\neg R)) \wedge ((S \vee P) \rightarrow P)) \rightarrow ((P \rightarrow Q) \leftrightarrow (\neg R))).$$

O processo de transformação para a notação polonesa inicia enumerando todos os conectivos da fórmula:

1. $((((P \rightarrow_1 Q) \leftrightarrow_2 (\neg_3 R)) \wedge_4 ((S \vee_5 P) \rightarrow_6 P)) \rightarrow_7 ((P \rightarrow_8 Q) \leftrightarrow_9 (\neg_{10} R)))$

No próximo passo, as subfórmulas mais internas são sublinhadas:

2. $(((\underline{(P \rightarrow_1 Q)} \leftrightarrow_2 \underline{(\neg_3 R)}) \wedge_4 (\underline{(S \vee_5 P)} \rightarrow_6 P)) \rightarrow_7 (\underline{(P \rightarrow_8 Q)} \leftrightarrow_9 \underline{(\neg_{10} R)}))$

Então, cada uma das subfórmulas sublinhadas é transformada para a notação polonesa. Além disso, o número associado ao seus conectivos são retirados. Isso, porque tais conectivos já foram transformados para a notação prefixa:

3. $(((\rightarrow PQ \leftrightarrow_2 \neg R) \wedge_4 (\vee SP \rightarrow_6 P)) \rightarrow_7 (\rightarrow PQ \leftrightarrow_9 \neg R))$

Em seguida, sublinhamos as subfórmulas mais internas, que correspondem a conectivos enumerados:

4. $((\underline{(\rightarrow PQ \leftrightarrow_2 \neg R)} \wedge_4 \underline{(\vee SP \rightarrow_6 P)}) \rightarrow_7 \underline{(\rightarrow PQ \leftrightarrow_9 \neg R)})$

Depois disso, as fórmulas sublinhadas são transformadas para a notação polonesa, considerando os conectivos enumerados:

5. $((\leftrightarrow \rightarrow PQ \neg R \wedge_4 \rightarrow \vee SPP) \rightarrow_7 \leftrightarrow \rightarrow PQ \neg R)$

Em seguida, a fórmula mais interna é sublinhada:

6. $(\underline{(\leftrightarrow \rightarrow PQ \neg R \wedge_4 \rightarrow \vee SPP)} \rightarrow_7 \leftrightarrow \rightarrow PQ \neg R)$

Transformando fórmula mais interna para a notação polonesa, temos.

7. $(\wedge \leftrightarrow \rightarrow PQ \neg R \rightarrow \vee SPP \rightarrow_7 \leftrightarrow \rightarrow PQ \neg R)$

Então, seguindo o raciocínio anterior, toda a fórmula é sublinhada, pois só há um conetivo enumerado.

8. $\underline{(\wedge \leftrightarrow \rightarrow PQ \neg R \rightarrow \vee SPP \rightarrow_7 \leftrightarrow \rightarrow PQ \neg R)}$

Finalmente, a fórmula é transformada para a notação polonesa.

9. $\rightarrow \wedge \leftrightarrow \rightarrow PQ \neg R \rightarrow \vee SPP \leftrightarrow \rightarrow PQ \neg R$ ■

Exemplo 1.6 (notação polonesa) Este exemplo transforma a fórmula a seguir, que está na notação polonesa, para a correspondente fórmula na notação usual.

$$\rightarrow \wedge \leftrightarrow \rightarrow PQ \neg R \rightarrow \vee SPP \leftrightarrow \rightarrow PQ \neg R$$

O processo de transformação inicia sublinhando as subfórmulas mais internas.

1. $\rightarrow \wedge \leftrightarrow \underline{\rightarrow PQ}\ \underline{\neg R} \rightarrow \underline{\vee SP}\ P \leftrightarrow \underline{\rightarrow PQ}\ \underline{\neg R}$

Então, cada uma das subfórmulas sublinhadas é transformada para a notação usual.

2. $\rightarrow \wedge \leftrightarrow (P \rightarrow Q)\ (\neg R) \rightarrow\ (S \vee P)\ P \leftrightarrow\ (P \rightarrow Q)\ (\neg R)$

Em seguida, sublinhamos as subfórmulas mais internas, cujos conectivos estão na forma prefixa.

3. $\rightarrow \wedge \underline{\leftrightarrow (P \rightarrow Q)\ (\neg R)}\ \underline{\rightarrow\ (S \vee P)\ P}\ \underline{\leftrightarrow\ (P \rightarrow Q)\ (\neg R)}$

Então, as fórmulas sublinhadas são transformadas para a notação usual.

4. $\rightarrow \wedge((P \rightarrow Q) \leftrightarrow (\neg R))\ ((S \vee P) \rightarrow P)\ ((P \rightarrow Q) \leftrightarrow (\neg R))$

Em seguida, a fórmula mais interna é sublinhada.

5. $\rightarrow \underline{\wedge((P \rightarrow Q) \leftrightarrow (\neg R))\ ((S \vee P) \rightarrow P)}\ ((P \rightarrow Q) \leftrightarrow (\neg R))$

Transformando fórmula mais interna para a notação polonesa, temos.

6. $\rightarrow (((P \rightarrow Q) \leftrightarrow (\neg R)) \wedge ((S \vee P) \rightarrow P))\ ((P \rightarrow Q) \leftrightarrow (\neg R))$

Então, seguindo o raciocínio anterior, toda a fórmula é sublinhada, pois só há um conetivo na forma prefixa.

7. $\underline{\rightarrow (((P \rightarrow Q) \leftrightarrow (\neg R)) \wedge ((S \vee P) \rightarrow P))\ ((P \rightarrow Q) \leftrightarrow (\neg R))}$

Finalmente, a fórmula é transformada para a notação usual.

8. $((((P \rightarrow Q) \leftrightarrow (\neg R)) \wedge ((S \vee P) \rightarrow P)) \rightarrow ((P \rightarrow Q) \leftrightarrow (\neg R)))$

Observe que a fórmula obtida, na notação usual, é a fórmula inicial utilizada no Exemplo 1.5. ■

1.8 Exercícios

1. Considere as concatenações de símbolos do alfabeto da Lógica Proposicional dadas a seguir. Identifique aquelas que são fórmulas da Lógica Proposicional. Considere a forma simplificada de representação de fórmulas, em que os símbolos de pontuação podem ser omitidos.
   (a) $(PQ \vee P_{10.000})$
   (b) $(P \wedge Q) \rightarrow ((Q \leftrightarrow P) \vee \neg\neg R)$
   (c) $\neg\neg P$
   (d) $\vee Q$
   (e) $(P \wedge Q) \rightarrow ((Q \leftrightarrow \neg R))$
2. Responda as questáes a seguir, justificando suas respostas.
   (a) Existe fórmula sem símbolo de pontuação?
   (b) Quantos tipos de símbolos possui o alfabeto da Lógica Proposicional? Quais são esses símbolos?
   (c) Existe fórmula da Lógica Proposicional com algum conectivo, mas sem símbolo de pontuação?

3. Determine o comprimento e as subfórmulas das fórmulas a seguir.

   (a) $((\neg\neg P \vee Q) \leftrightarrow (P \rightarrow Q)) \wedge P_{10.000}$

   (b) $P \rightarrow ((Q \rightarrow R) \rightarrow ((P \rightarrow R) \rightarrow (P \rightarrow R)))$

   (c) $((P \rightarrow \neg P) \leftrightarrow \neg P) \vee Q$

   (d) $\neg(P \rightarrow \neg P)$

4. Elimine o maior número possível de símbolos de pontuação das fórmulas a seguir, mantendo a representação da fórmula original.

   (a) $((\neg(\neg P)) \leftrightarrow ((\neg((\neg(\neg(P \vee Q))) \rightarrow R)) \wedge P))$

   (b) $(\neg P \rightarrow (Q \vee R)) \leftrightarrow ((P \wedge Q) \leftrightarrow (\neg\neg R \vee \neg P))$

   (c) $((P \vee Q) \rightarrow (P \rightarrow (\neg Q)))$

5. Considere as concatenações de símbolos a seguir. A partir da introdução de símbolos de pontuação, identifique quais fórmulas da Lógica Proposicional é possível obter.

   (a) $P \vee \neg Q \rightarrow R \leftrightarrow \neg R$

   (b) $Q \rightarrow \neg P \wedge Q$

   (c) $\neg P \vee Q \leftrightarrow Q$

   (d) $\neg\neg P \rightarrow Q \leftrightarrow P \wedge P \neg\neg R$

6. (a) Escreva as fórmulas dos Exercícios 3 e 4 utilizando a notação polonesa.

   (b) Determine quais sequências de símbolos, indicadas a seguir, são fórmulas da Lógica Proposicional que utilizam a notação polonesa. No caso em que a sequência de símbolos é uma fórmula, reescreva-a utilizando a notação convencional.
   $\vee \rightarrow PQ \leftrightarrow R \rightarrow \vee PQ \neg S$
   $\rightarrow \leftrightarrow PQ \vee \rightarrow PQ \rightarrow \neg RR$
   $\rightarrow \neg P \neg QR \vee \vee PQ \vee \neg R \neg P$
   $\leftrightarrow \rightarrow \neg P \vee QR \leftrightarrow \wedge PQ \vee \neg\neg R \neg P$

7. Responda, justificando sua resposta.

   (a) É possível encontrar uma fórmula H, da Lógica Proposicional, escrita na notação convencional e que corresponda a duas fórmulas diferentes escritas na notação polonesa?

   (b) É possível encontrar uma fórmula H escrita na notação polonesa, que corresponda a duas fórmulas diferentes da Lógica Proposicional escritas na notação convencional?

8. Faça os Exercícios 5 e 6 considerando a notação pós-fixa, indicada pelas correspondências.
   $(\neg P)$ corresponde a $P\neg$
   $(P \wedge Q)$ corresponde a $PQ\wedge$
   $(P \vee Q)$ corresponde a $PQ\vee$
   $(P \rightarrow Q)$ corresponde a $PQ \rightarrow$
   $(P \leftrightarrow Q)$ corresponde a $PQ \leftrightarrow$

9. Qual a paridade do número de símbolos de pontuação de uma fórmula da Lógica Proposicional?

10. Seja H uma fórmula que não contém o conectivo $\neg$.

    (a) Qual a paridade de $comp[H]$?

    (b) Qual a relação entre $comp[H]$ e o número de conectivos de H?

CAPÍTULO 2

A SEMÂNTICA DA LÓGICA PROPOSICIONAL

2.1 Introdução

Um conceito fundamental em Lógica é aquele que diferencia os objetos sintáticos de sua interpretação. Como exemplo, considere a palavra "rede". Essa palavra é formada por uma concatenação de letras do alfabeto da língua portuguesa. Sabemos que ela pertence a essa língua porque as pessoas que falam o português a utilizam. E a prova disso é que ela está contida em qualquer dicionário da língua portuguesa. Mas, qual é o significado da palavra "rede"? Temos vários: o objeto que pescadores utilizam para pescar, um conjunto de computadores interligados e outros mais. Portanto, não há uma correspondência, um a um, entre os significados semânticos das palavras e as palavras propriamente ditas. Certamente, há muito mais significados do que palavras para representá-los e nem sempre conseguimos expressar, de forma adequada, aquilo que pensamos. Tudo porque há uma diferença fundamental entre a ideia e o símbolo utilizado para representar tal ideia. A palavra "rede", por exemplo, é apenas uma concatenação de símbolos utilizada para representar algumas ideias. Este capítulo considera o início do estudo que diferencia, explicitamente, a semântica, ou significado, da sintaxe, ou símbolos. Como veremos a seguir, no contexto da Lógica Proposicional, associamos a cada objeto sintático um significado ou interpretação. Assim, quando escrevemos a fórmula $(P \wedge Q)$, dependendo das interpretações dos símbolos P e Q, essa fórmula pode ser interpretada como verdadeira ou falsa. Portanto, a fórmula pode ter diferentes interpretações, as quais dependem das interpretações de seus componentes.

Considere, por exemplo, que o símbolo sintático P representa a declaração: "Está chovendo" e Q representa a declaração: "A rua está molhada". Neste livro, escrevemos tais denotações como indicado a seguir: $P =$ "Está chovendo." $Q =$ "A rua está molhada." Nesse caso, os símbolos proposicionais P e Q representam duas declarações que podem ser interpretadas como verdadeiras ou falsas. Suponha, então, que a interpretação do conectivo proposicional $\wedge$ seja o da inclusão dos fatos, isto é, para que a fórmula $(P \wedge Q)$ seja verdadeira, as interpretações de P e Q devem ser verdadeiras. Considerando tudo isso, a fórmula $(P \wedge Q)$ pode ou não ser verdadeira. Isso depende das condições climáticas atuais, que determinam se a interpretação de P é verdadeira ou falsa. Neste livro, a interpretação de P é denotada por $I[P]$. Isso significa que se está chovendo lá fora, então $I[P] = T$. Mas, se não está chovendo, então $I[P] = F$. Logo, podemos ter $I[P] = T$ ou $I[P] = F$ e também $I[Q] = T$ ou $I[Q] = F$. Em cada caso, o símbolo T indica que o resultado da interpretação é verdadeira e F que esse resultado é falso. Por exemplo, no caso em que $I[P] = T$, $I[Q] = F$ e $\wedge$ é interpretado como a conjunção dos fatos, então $I[(P \wedge Q)] = F$. No caso anterior, os símbolos P e Q representam as declarações "Está chovendo" e "A rua está molhada". Entretanto, tais símbolos podem representar outras declarações, e as interpretações podem ter resultados diferentes. Considere, por exemplo:

1. $P =$ "Há um rapaz inteligente no curso de Computação";
2. $Q =$ "Não há rapaz inteligente no curso de Computação";
3. o símbolo $\vee$ representa[1] a semântica da palavra "ou";
4. o símbolo $\wedge$ representa a semântica da palavra "e".

Nesse caso, se $I[P] = T$, então $I[Q] = F$. Por outro lado, se $I[P] = F$, então $I[Q] = T$. Logo, considerando que a interpretação do conectivo proposicional $\vee$ seja o da disjunção dos fatos, a fórmula $(P \vee Q)$ é interpretada como verdadeira e a fórmula $(P \wedge Q)$ é interpretada como falsa. Ou seja, $I[(P \vee Q)] = T$, $I[(P \wedge Q)] = F$. Observe que os símbolos sintáticos definem as fórmulas, que nesse caso estão associados a interpretações. Nesse contexto, cada fórmula sintática está associada a uma interpretação e, por isso, o mundo lógico é dividido em duas partes: o mundo sintático e o mundo semântico. O primeiro é construído a partir dos símbolos do alfabeto. Nesse mundo, as fórmulas são consideradas apenas como concatenações de símbolos, que representam declarações. Por outro lado, é no mundo semântico onde ocorre o resultado das interpretações dos símbolos e fórmulas do mundo sintático. Assim, para que tudo funcione bem, é fundamental que as declarações representadas pelos símbolos possam ser interpretadas como verdadeiras ou falsas. Por isso, na Lógica Proposional, não consideramos qualquer tipo de declaração, mas apenas aquelas que possam ser, efetivamente, interpretadas. Tais declarações são denominadas por proposições.

[1] Pelo menos, tenta representar.

Definição 2.1 (proposição) *Uma proposição é uma sentença declarativa que pode ser interpretada como verdadeira ou falsa.*

Portanto, uma proposição é uma sentença declarativa que pode ser interpretada como verdadeira ou falsa. Isso parece simples, mas não é. Ou seja, identificar o que é uma proposição pode ser bem complicado. Isso, porque para identificá-la é necessário saber, claramente, o que é ser verdadeiro ou falso. E, também, saber o que é declarar, sem ambiguidades, alguma coisa. Como sempre, aquilo que a princípio parece ser simples, pode não ser. Mas, neste livro introdutório, não vamos nos preocupar muito com isso. Nosso mundo será o mais simples possível e nosso objetivo é apenas apresentar os conceitos iniciais sobre sintaxe e semântica. Essa visão que diferencia sintaxe e semântica é importante nas Ciências em geral e também na Filosofia. Na Ciência da Computação, por exemplo, o computador é uma máquina estritamente sintática, sendo necessário dar uma interpretação, significado ou semântica, aos símbolos por ela manipulados. Isso significa que o ato de programar somente é bem entendido se a diferença entre sintaxe e semântica fica bem clara.

Este capítulo trata, de forma introdutória, da semântica das fórmulas da Lógica Proposicional. Para isso, consideramos uma análise, mais ou menos, análoga à que ocorre na língua portuguesa. Por exemplo, como sabemos, a palavra "rede" pode ter várias interpretações ou significados. Isso, porque dependendo da pessoa ou contexto, uma ou outra interpretação pode ser considerada. De forma parecida, dado um símbolo proposicional P, ele pode ser interpretado de duas formas, como sendo verdadeiro ou como falso. Observe que no caso da Lógica Proposicional, a situação é mais simples. O resultado de uma interpretação é verdadeiro ou falso. Na língua portuguesa pode ser muito mais que isso. Além disso, deve ficar claro que a concatenação sintática das letras "r", "e", "d", "e", nessa ordem, é diferente dos possíveis significados de cada letra individualmente. A palavra "rede" é um objeto sintático que é considerado como um todo. Na Lógica Proposicional, para interpretar uma fórmula do tipo $(P \wedge Q)$ devemos interpretar, individualmente, seus símbolos, o que é diferente do ato de interpretar, como um todo, uma palavra da língua portuguesa. Além disso, cada palavra é diferente de sua interpretação. E é claro que deve ser assim, pois a palavra "rede" é muito diferente de uma rede de computadores ou uma rede de pesca. Analogamente, na Lógica Proposicional, dizer que $P =$ "Está chovendo." $Q =$ "A rua está molhada." não significa dizer que o símbolo P é estritamente igual a "Está chovendo". Significa, sim, dizer que P representa a proposição "Está chovendo". Antes de terminar esta seção, vale a pena lembrar: uma análise profunda de temas que envolvem sintaxe e semântica não é fácil, sendo um importante tema de pesquisa filosófica [Gabbay], [Goldstein] e [Haak]. Neste livro, apresentamos apenas alguns conceitos fundamentais, de forma simplificada, sem considerar controvérsias filosóficas.

2.2 Interpretação

Como interpretar alguma coisa? Responder essa questão é um dos grandes desafios do ser humano. E não é simples fazê-lo, pois a todo momento, verificamos como nossas interpretações são falhas. Nesse sentido, para estudar o ato de interpretar na Lógica Proposicional, vamos simplificar bastante as coisas.

A primeira simplificação. Como veremos a seguir, a interpretação ou semântica dos elementos sintáticos da linguagem da Lógica Proposicional é determinada por uma função I denominada interpretação. Recorde a definição básica de função.

Definição 2.2 (função) *Uma operação I é uma função se, para cada elemento x de seu domínio, existe apenas um elemento y no seu contradomínio tal que $y = I(x)$.*

Portanto, se I é uma função e x um elemento do seu domínio, então não podemos ter: $y = I(x)$ e $z = I(x)$, tal que $y \neq z$. Isso significa que interpretar na Lógica Proposicional corresponde à execução de uma função, que para cada elemento do seu domínio, existe apenas um resultado para a interpretação propriamente dita. E seria estranho considerar de outra forma. Imagine que uma dada fórmula pudesse ter mais de uma interpretação. Entretanto, observe que no mundo real nem sempre isso acontece e o ato de interpretar pode ser complexo e não ter as características de uma função.

A segunda simplificação. A função que interpreta associa a cada fórmula da Lógica Proposicional um valor de verdade "verdadeiro" ou "falso", que é representado, respectivamente, por T e F. Isso significa que, na Lógica Clássica, as fórmulas possuem apenas dois tipos de interpretação. Devido a esse fato, ela é denominada lógica bivalente.[2] Ela possui apenas dois estados semânticos, o "verdadeiro" e o "falso". Esse princípio é denominado princípio de bivalência e estabelece que o resultado da interpretação de toda proposição é necessariamente verdadeiro ou falso. Observe que na língua portuguesa é possível ter mais de duas interpretações ou significados diferentes para a mesma palavra, o que não ocorre no contexto da Lógica Proposicional Clássica, em que as possíveis interpretações das declarações são T ou F. Portanto, a função I é uma função binária.

Definição 2.3 (função binária) *Uma função é binária se seu contradomínio possui apenas dois elementos.*

Na Lógica Proposicional é possível representar proposições como: "Meu tio mora em São Paulo", que pode ser interpretada como verdadeira ou falsa. Entretanto, há sentenças declarativas cuja interpretação não é verdadeira e nem falsa. Considere, por exemplo, a sentença: "Esta sentença é falsa." Nesse caso, o resultado da interpretação da sentença não é verdadeiro e nem falso. Isso significa que não é possível representar esse tipo de conhecimento na Lógica Proposicional que estamos

[2] Há Lógicas não clássicas multivalentes, em que o resultado das interpretações podem ser diferentes de T e F.

estudando, a Lógica Clássica.[3] Além do princípio de bivalência, a semântica da Lógica Clássica é também uma semântica de condições de verdade, ou seja, a especificação da interpretação de uma proposição consiste em dizer como deve ser o mundo para que ela seja verdadeira. A proposição "Meu tio mora em São Paulo" somente será verdadeira se algumas condições forem satisfeitas. Nesse caso, é necessário definir vários conceitos como: "posse", "tio" e "morar" e também o que significa "cidade de São Paulo". Novamente, não é simples entender claramente o que significam tais condições de verdade, havendo muita controvérsia filosófica a respeito [Gabbay], [Goldstein] e [Haak].

A terceira simplificação. Na Lógica Proposicional, uma interpretação I é uma função total e, portanto, está necessariamente definida em todos os elementos de seu domínio.

Definição 2.4 (função total) *Uma função total é uma função definida em todos os elementos de seu domínio.*

No caso da Lógica Proposicional, como veremos, o domínio da função I é o conjunto de todas as fórmulas. Então, dado o símbolo $\breve{P}$, que representa qualquer símbolo proposicional, tal símbolo está contido no domínio de I. Isso significa que, dada a proposição $\breve{P}$, então necessariamente ocorre uma das possibilidades $I[\breve{P}] = T$ ou $I[\breve{P}] = F$. Esse é um princípio da Lógica Clássica denominado princípio da bivalência ou do terceiro excluído. Por esse princípio, toda proposição é verdadeira ou falsa. Nesse sentido, a Lógica Clássica simplifica a interpretação das sentenças e estabelece como pontos de partida o princípio da bivalência ou terceiro excluído e o fato de a função interpretação ser uma função total. Mas, se tais simplificações ajudam por um lado, elas também podem dificultar por outro. Considere, por exemplo, a sentença: "O atual rei da França é calvo." Como dizer se essa sentença é verdadeira ou falsa se não há rei na França atualmente? Do fato de esse rei não existir, será que podemos concluir que a sentença é falsa? Ou que a sentença não é nem verdadeira e nem falsa? Enfim, dizer se uma declaração é verdadeira ou falsa pode não ser tão fácil. Considere a seguinte situação, na qual Zé está com sua amiga Maria. Zé é um mentiroso incorrigível e Maria detesta esse defeito. Para tentar ajudá-lo, Maria tenta um tipo de psicologia comportamental. Ela diz a Zé que todas as vezes que ele falar uma verdade ganhará um real. Mas, se falar alguma mentira, levará um soco no nariz. Imediatamente Zé diz a Maria: "Isso é muito generoso de sua parte. Você é uma ótima pessoa". Dada tal afirmação, Maria o retribui com um real. Em seguida, Zé diz: "Dois mais dois é igual a quatro" e Maria lhe dá outro real. Zé fica animado e diz: "Agora, ganharei outro real" e a retribuição é um belo soco no nariz. Para Maria, que não quer dar outro real a Zé, a afirmação é falsa, ou seja: é mentira que Zé ganhará outro real. Portanto, ela lhe soca o nariz. Mas Zé, que não é bobo e está com o nariz vermelho, diz: "Agora, você me dará um soco no nariz." Maria fica indecisa. Dá o segundo soco no nariz de Zé, ou um real? Questões sobre

[3]Fatos como estes podem ser representados em outros tipos de Lógica.

a veracidade das declarações, como as apresentadas anteriormente, são importantes na Lógica e no debate filosófico. Tais questões são denominadas paradoxos e ao final deste capítulo apresentamos algumas, na forma de exercícios. Para mais detalhes, o leitor interessado pode consultar [Gabbay], [Goldstein] e [Haak]. Portanto, tendo essas simplificações como ponto de partida, a definição da interpretação dos símbolos do alfabeto da Lógica Proposicional é considerada a seguir.

Definição 2.5 (função interpretação) *Uma interpretação I, na Lógica Proposicional, é uma função binária total na qual:*

1. *o domínio de I é constituído pelo conjunto das fórmulas da Lógica Proposicional;*
2. *o contradomínio de I é o conjunto $\{T, F\}$.*

2.3 Interpretação de Fórmulas

A seção anterior define, de forma simplificada, o que é uma interpretação na Lógica Proposicional: uma função binária total cujo domínio é o conjunto das fórmulas e o contradomínio é o conjunto $\{T, F\}$. A seguir, definimos como I interpreta as fórmulas da Lógica Proposicional, o que é dado por um conjunto de regras. Observe que isso é muito melhor do que aquilo que ocorre na língua portuguesa, na qual não temos um conjunto de regras para interpretar as sentenças. Ou seja, na Lógica, nesse sentido, o ato de interpretar é bem mais simples. Como as fórmulas são formadas pela concatenação de símbolos do alfabeto, a sua interpretação é feita a partir da interpretação dos seus símbolos. Isto é, a interpretação de uma fórmula como $P \to Q$ é obtida a partir da interpretação dos símbolos P e Q. Na língua portuguesa não é assim. A interpretação da sentença "Eu vi José com uma luneta". não é obtida a partir da interpretação das palavras "Eu", "vi", "José", "com", "uma" e "luneta". Portanto, na Lógica Proposicional, a interpretação das fórmulas é feita segundo um conjunto de regras semânticas, obtidas a partir das interpretações dos símbolos proposicionais e dos conectivos proposicionais. Os procedimentos para interpretar as fórmulas da Lógica Proposicional a partir dos elementos que as constituem são considerados a seguir.

Definição 2.6 (interpretação de fórmulas) *Dadas uma fórmula E e uma interpretação I, então a interpretação de E, indicado por $I[E]$, é determinada pelas regras:*

1. *se E é do tipo $\check{P}$, então $I[E] = I[\check{P}]$ e $I[\check{P}] \in \{T, F\}$;*
2. *se E é do tipo $\neg H$, então*
   $I[E] = I[(\neg H)] = T$ *se* $I[H] = F$ *e*
   $I[E] = I[(\neg H)] = F$ *se* $I[H] = T$;
3. *se E é do tipo $(H \lor G)$, então*
   $I[E] = I[H \lor G] = T$ *se* $I[H] = T$ *e/ou* $I[G] = T$ *e*
   $I[E] = I[H \lor G] = F$ *se* $I[H] = F$ *e* $I[G] = F$;

4. *se* E *é do tipo* $(H \wedge G)$, *então*
$I[E] = I[H \wedge G] = T$ *se* $I[H] = T$ *e* $I[G] = T$ *e*
$I[E] = I[H \wedge G] = F$ *se* $I[H] = F$ *e/ou* $I[G] = F$;

5. *se* E *é do tipo* $(H \rightarrow G)$, *então*
$I[E] = I[H \rightarrow G] = T$ *se* $I[H] = F$ *e/ou* $I[G] = T$ *e*
$I[E] = I[H \rightarrow G] = F$ *se* $I[H] = T$ *e* $I[G] = F$;

6. *se* E *é do tipo* $(H \leftrightarrow G)$, *então*
$I[E] = I[H \leftrightarrow G] = T$ *se* $I[H] = I[G]$ *e*
$I[E] = I[H \leftrightarrow G] = F$ *se* $I[H] \neq I[G]$.

A visualização das regras semânticas fica muito mais fácil se elas são representadas por tabelas, denominadas tabelas-verdade. As tabelas-verdade associadas aos conectivos proposicionais são definidas pela Tabela 2.1 a seguir. A tabela indica, por exemplo, que dada uma interpretação I, se $I[H] = T$ e $I[G] = F$, então $I[\neg H] = F$. Analogamente:

se $I[H] = T$ e $I[G] = F$, então $I[H \vee G] = T$.

e assim por diante, como indicado na segunda linha da Tabela 2.1.

H	G	$\neg H$	$H \vee G$	$H \wedge G$	$H \rightarrow G$	$H \leftrightarrow G$
T	T	F	T	T	T	T
T	F	F	T	F	F	F
F	T	T	T	F	T	F
F	F	T	F	F	T	T

Tabela 2.1: Tabela-verdade associada a conectivos.

Nota. Para simplificar nossas referências sobre uma tabela-verdade, consideramos que a primeira linha da tabela, correspondenete à linha na qual estão escritas as fórmulas da tabela-verdade, não é contada. Nesse sentido, após a linha inicial, onde estão escritas as fórmulas, temos a linha 1, depois a linha 2 e assim por diante.

Exemplo 2.1 (interpretação) Considere uma interpretação I dada por:

$$I[P] = T,\ I[Q] = F,\ I[R] = T,\ I[S] = F.$$

Nesse caso, temos, por exemplo:

$$I[\neg P] = F,\ \ I[\neg Q] = T,\ I[\neg R] = F,\ \ I[\neg S] = T,\ I[P \vee Q] = T,\ \ I[Q \vee S] = F,$$
$$I[P \wedge Q] = F,\ I[P \wedge R] = T,\ \ I[P \rightarrow Q] = F,\ \ I[S \rightarrow R] = T,$$
$$I[P \leftrightarrow Q] = F,\ I[Q \leftrightarrow S] = T.$$

A Tabela 2.2, representa, de forma esquemática, alguns desses resultados.

P	Q	$P \lor Q$	$P \land Q$	$P \rightarrow Q$	$P \leftrightarrow Q$
T	F	T	F	F	F

Tabela 2.2: Tabela-verdade associada a conectivos.

■

Conforme as regras semânticas vistas na Definição 2.6, que determinam a interpretação das fórmulas, temos:

Regra 1. As interpretações dos símbolos proposicionais seguem o principio de bivalência e são iguais a T ou F. Essa é uma limitação, pois nem tudo pode ser interpretado como sendo verdadeiro ou falso.[4]

Nota. A interpretação dos símbolos de verdade é fixa. Isto é, para qualquer interpretação I, $I[true] = T$ e $I[false] = F$, ou seja, todas as interpretações têm a mesma "opinião" sobre essas interpretações. Nesse sentido, eles podem ser vistos como símbolos proposicionais especiais, com interpretação fixa.

Regra 2. A segunda regra estabelece uma regra para a interpretação da negação. Se consideramos que T é o oposto de F e vice-versa, então o valor de verdade de $I[\neg H]$ é o oposto de $I[H]$. Além disso, observe que nessa definição o símbolo H é um símbolo da metalinguagem e representa quaisquer fórmulas. Ou seja, a regra diz, por exemplo, que:

se $I[P] = T$, então $I[\neg P] = F$, se $I[(P \land Q)] = F$, então $I[\neg(P \lor Q)] = T$.

Regra 3. A terceira regra diz que o valor de $I[H \lor G]$ é igual a T se, e somente se, $I[H] = T$ e/ou $I[G] = T$. Nesse caso, $I[H \lor G] = T$ se as interpretações de H e de G são iguais a T ou apenas uma delas igual a T.

Observe que, de novo, como ocorre na regra 2, os símbolos H e G são símbolos da metalinguagem e representam quaisquer fórmulas. Nesse sentido, a regra diz, por exemplo, que:

Se $I[P] = T$ e $I[Q] = F$, então $I[(P \lor Q)] = T$;

Se $I[(P \rightarrow Q)] = T$ e $I[(\neg Q \leftrightarrow R)] = F$, então $I[((P \rightarrow Q) \lor (\neg Q \leftrightarrow R))] = T$.

Regra 4. A quarta regra estabelece que o valor de $I[H \land G]$ é igual a T, somente quando $I[H] = T$ e $I[G] = T$. Então a regra diz, por exemplo, que:

Se $I[P] = T$ e $I[Q] = F$, então $I[(P \land Q)] = F$;

Se $I[(P \rightarrow Q)] = T$ e $I[(\neg Q \leftrightarrow R)] = F$, então $I[((P \rightarrow Q) \land (\neg Q \leftrightarrow R))] = F$.

Regra 5. Conforme a regra 5, o valor de $I[H \rightarrow G]$ é verdadeiro se $I[H] = F$ e/ou $I[G] = T$. Além disso, $I[H \rightarrow G]$ é falso, somente se $I[H] = T$ e $I[G] = F$. Portanto:

Se $I[P] = T$ e $I[Q] = F$, então $I[(P \rightarrow Q)] = F$;

[4] O estudo e a aplicação de outros tipos de Lógica em que são consideradas diferentes formas de semântica é uma importante área de pesquisa em Computação.

Se $I[(P \to Q)] = F$ e $I[(\neg Q \leftrightarrow R)] = F$, então $I[((P \to Q) \to (\neg Q \leftrightarrow R))] = T$.

Regra 6. Finalmente, para determinar o valor de $I[H \leftrightarrow G]$, conforme a regra 6, basta checar se $I[H] = I[G]$. Em caso afirmativo, o resultado é $I[H \leftrightarrow G] = T$, caso contrário, $I[H \leftrightarrow G] = F$. Logo:

Se $I[P] = T$ e $I[Q] = F$, então $I[(P \leftrightarrow Q)] = F$;

Se $I[(P \to Q)] = F$ e $I[(\neg Q \leftrightarrow R)] = F$, então $I[((P \to Q) \leftrightarrow (\neg Q \leftrightarrow R))] = T$.

As regras semânticas, de acordo com a Definição 2.6, determinam a interpretação de $(H \land G)$ a partir de $I[H]$ e $I[G]$. Observe que não definimos isoladamente a interpretação apenas do conectivo $\land$ ou seja, não definimos $I[\land]$, que seria a interpretação do conectivo $\land$. A definição determina a interpretação da fórmula $(H \land G)$, que contém o conectivo $\land$ como um todo. Portanto, na Lógica Proposicional, não temos a interpretação dos conectivos considerados isoladamente. Isso ocorre porque tais conectivos não pertencem ao domínio da função interpretação I. Lembre que o domínio de I é o conjunto das fórmulas da Lógica Proposicional. Entretanto, para simplificar, abusando da forma de expressar, a interpretação de $(H \land G)$ é denotada como a interpretação de $\land$. Nesse sentido, as regras semânticas estabelecem interpretações fixas para os conectivos e símbolos de verdade. Já os símbolos proposicionais não possuem interpretações fixas e a única restrição é que se I é uma interpretação, então $I[\breve{P}] \in \{T, F\}$. Dada uma fórmula H, as tabelas-verdade associadas aos conectivos são utilizadas na construção de uma tabela-verdade associada a H. Veja, no exemplo a seguir, a Tabela 2.3.

Exemplo 2.2 (tabela-verdade) Considere a fórmula

$$H = ((\neg P) \lor Q) \to (Q \land P).$$

A tabela-verdade associada a H é dada pela Tabela 2.3.

P	Q	$\neg P$	$\neg P \lor Q$	$Q \land P$	H
T	T	F	T	T	T
T	F	F	F	F	T
F	T	T	T	F	F
F	F	T	T	F	F

Tabela 2.3: Tabela-verdade associada a fórmulas H.

Observe que a coluna da fórmula H é obtida a partir das colunas intermediárias associadas a $\neg P$, $\neg P \lor Q$ e $Q \land P$. ■

A definição das interpretações dos conectivos está relacionada com o significado semântico de algumas palavras da língua portuguesa. A interpretação do conectivo $\neg$, por exemplo, confere-lhe um significado semântico que lembra o significado da palavra "não". Ou seja, $I[\neg \breve{P}]$ tem como resultado a negação, ou "não", do significado do símbolo $\check{P}$. Da mesma forma, os conectivos $\vee$, $\wedge$, $\rightarrow$ e $\leftrightarrow$ têm interpretações que correspondem aproximadamente à disjunção, conjunção, implicação e equivalência, respectivamente. Nesse sentido, os conectivos são símbolos sintáticos, que possuem interpretações que correspondem a operadores lógicos da língua portuguesa. Mas tal correspondência não é exata, conforme é analisado a seguir.

A semântica do conectivo $\neg$. Conforme a Definição 2.6, $I[\neg P] = F$ se $I[P] = T$, ou seja, se $I[P] = T$, então $I[\neg P] = F$. O conectivo $\neg$ é uma tentativa de formalização da negação na Lógica Proposicional. Em português, geralmente essa negação é indicada pela palavra "não". Isso significa que se $P =$ "Zé é inteligente", então $\neg P =$ "Zé não é inteligente." Nesse caso, se $I[P] = T$, então $I[\neg P] = F$. Observe que, em português, a negação "não" é escrita no interior da sentença "Zé não é inteligente", enquanto na Lógica o conectivo $\neg$ é escrito no início da fórmula $\neg P$. Isso não significa necessariamente que há uma correspondência entre a posição da negação em português e na Lógica. Além disso, em português é possível negar utilizando palavras diferentes de "não", como, por exemplo: "não é verdade que", "é falso que" ou ainda utilizando prefixos como "in-" e "a-". Um problema nas linguagens naturais, como o português, é que nem sempre existe uma correspondência entre esses tipos de negação. Dizer, por exemplo, que alguém não é feliz não significa necessariamente dizer que essa pessoa seja infeliz. Há vários graus de felicidade. Suponha, por exemplo, que $P =$ "Maria é namorada de Zé". Observando os fatos, ou seja, a relação amorosa de Zé e Maria, suponha que a conclusão é: $I[P] = F$. Nesse caso, $\neg P =$ "Maria não é namorada de Zé". e, portanto, $I[\neg P] = T$. Mas, observando atentamente as informações, é possível também concluir que $I[\neg P] = F$. Isto é, não é verdade que Maria seja namorada de Zé, mas também não é verdade que Maria não seja namorada de Zé. Eles estão naquela fase do "estar com", "ficar com", etc. Maria é apenas mais ou menos namorada de Zé. Esses problemas com a negação são frequentes também em outras situações. É comum, por exemplo, aceitar que não ser rico não implique necessariamente ser pobre. Se eu não sou rico, não necessariamente significa que sou pobre. Há um meio-termo: a classe média. Tais situações não são consideradas na Lógica Clássica, na qual, por definição, se $I[P] = F$, então $I[\neg P] = T$.[5] Portanto, devemos ter muito cuidado na representação da negação do português para a linguagem da Lógica. A negação na Lógica Clássica não corresponde exatamente à negação na linguagem natural. Nesse processo, o objetivo é preservar, ao máximo, o significado da expressão original da linguagem natural.

A semântica do conectivo $\vee$. A interpretação do conectivo $\vee$ é a da disjunção de duas proposições. Nesse sentido, ele é um operador binário, diferente da negação, que é um operador unário. Em português, essa disjunção é expressa pelas palavras "ou .... ou ...", "ora ... ora ...", etc. Suponha, por exemplo, que $P =$ "Está chovendo" e $Q =$ "Está fazendo sol". Além disso, considere que $I[P \vee Q] = T$. Pela Definição 2.6, se $I[P \vee Q] = T$, então há três possibilidades: 1) $I[P] = T$ e $I[Q] = T$;

[5]Há Lógicas não clássicas multivalentes em que o resultado de uma interpretação pode ser diferente de T ou F.

2) $I[P] = T$ e $I[Q] = F$; 3) $I[P] = F$ e $I[Q] = T$. Em outras palavras, se é verdade que está chovendo ou fazendo sol, então há três possibilidades: "está chovendo e está fazendo sol"; "está chovendo e não está fazendo sol;" e "não está chovendo e está fazendo sol". A semântica do conectivo $\vee$ determina que se $I[P \vee Q] = T$, então é possível ocorrer $I[P] = T$ e $I[Q] = T$. Ao dizer que é verdade que está chovendo ou que está fazendo sol, então é possível que esteja chovendo e fazendo sol ao mesmo tempo. Na língua portuguesa, a palavra "ou" nem sempre tem esse significado. Suponha que $P =$ "Vou ao cinema" e $Q =$ "Vou ao teatro" e que $I[P \vee Q] = T$. Em português, dizer que é verdade que vou ao cinema ou ao teatro é o mesmo que dizer que seguramente irei a um desses lugares, mas não a ambos. Nesse caso, há apenas duas possibilidades: "irei ao cinema e não irei ao teatro" e "não irei ao cinema e irei ao teatro". Portanto, na Lógica Proposicional, a semântica do conectivo $\vee$ não corresponde, exatamente, à semântica da palavra "ou" utilizada em português. Observe que essa é uma das razões para se utilizar a expressão "e/ou" na Definição 2.6, que define a regra para que se tenha $I[H \vee G] = T$.

Considere, agora, uma outra situação. Suponha que $P =$ "Ulan Bator é a capital da Mongólia" e $Q =$ "Zé é bom de bola". Nesse caso, se I é uma interpretação "razoável",[6] então $I[P \vee Q] = T$, pois $I[P] = T$. Portanto, "Ulan Bator é a capital da Mongólia ou Zé é bom de bola" é considerada verdadeira apesar de não haver alternativa legítima ou relação entre as proposições que compõem a sentença. Portanto, na Lógica, para que uma disjunção seja verdadeira, não é necessária nenhuma relação entre suas alternativas. Por outro lado, na linguagem natural, quando expressamos uma disjunção, geralmente esperamos alguma relação entre as alternativas apresentadas.

A semântica do conectivo $\wedge$. A interpretação do conectivo $\wedge$ é a da conjunção de duas proposições. Como a disjunção, temos novamente um operador binário. Em português, a conjunção é expressa pelas palavras "e", "mas", "todavia", etc. Suponha que $P =$ "Maria é inteligente". e $Q =$ "Maria é preguiçosa". Nesse caso, a fórmula $P \wedge Q$ representa as sentenças: "Maria é inteligente e preguiçosa", "Maria é inteligente, mas é preguiçosa", "Maria é inteligente, todavia é preguiçosa", etc. Observe que, em português, os significados de "e", "mas", "todavia" não são exatamente os mesmos. As nuances que diferenciam tais significados são perdidas quando as sentenças são traduzidas para a Lógica Proposicional.

Considere um outro caso em que $P =$ "Tiago pulou na piscina" e $Q =$ "Tiago se molhou". Nesse caso, a fórmula $P \wedge Q$ representa a sentença: "Tiago pulou na piscina e se molhou". Mas, conforme a semântica do conectivo $\wedge$, se $I[P \wedge Q] = T$, então $I[Q \wedge P] = T$. Observe que o conectivo $\wedge$ é comutativo. Entretanto, se é verdade que "Tiago pulou na piscina e se molhou", nada podemos concluir a respeito da sentença "Tiago se molhou e pulou na piscina". Isso ocorre porque a interpretação do conectivo $\wedge$ não considera as relações temporais presentes no português.[7] As

[6]Interpretação razoável quer dizer: tem conhecimento de geografia e sabe que Ulan Bator é realmente a capital da Mongólia.

[7]As relações temporais são consideradas na Lógica Temporal.

representações na Lógica Proposicional fazem abstrações dos elementos temporais. Analogamente, como ocorre com os conectivos $\neg$ e $\vee$, o conectivo $\wedge$ não corresponde exatamente à semântica da conjunção na linguagem natural.

A semântica do conectivo $\rightarrow$. A interpretação do conectivo $\rightarrow$ é a da implicação material de duas proposições. Em português, há várias maneiras de expressar a implicação entre as proposições "Está chovendo" e "A rua está molhada". Podem ser: "se está chovendo, então a rua está molhada"; "se está chovendo, a rua está molhada'; "a rua está molhada, se está chovendo"; "estar chovendo é condição suficiente para que a rua esteja molhada"; "a rua molhada é condição necessária para que esteja chovendo". Todos esses casos podem ser representados por $P \rightarrow Q$, se $P =$ "Está chovendo" e $Q =$ "A rua está molhada". Entretanto, é importante observar que na Lógica Proposicional, a fórmula $P \rightarrow Q$ representa uma implicação material entre P e Q, que é diferente da implicação que utilizamos na língua portuguesa. Em outras palavras, ao dizer que P implica Q não, necessariamente, estamos dizendo que haja alguma conexão causal ou temporal entre P e Q. Na Lógica, quando escrevemos a fórmula $P \rightarrow Q$, não necessariamente pretendemos dizer que P é uma causa de Q. O objetivo é dizer que se é verdade que P, ou seja, $I[P] = T$, então também é verdade que Q, isto é, $I[Q] = T$. Conforme a definição da interpretação do conectivo $\rightarrow$, Definição 2.6, a tabela associada à fórmula $(H \rightarrow G)$ é dada pela Tabela 2.4.

H	G	$H \rightarrow G$
T	T	T
T	F	F
F	T	T
F	F	T

Tabela 2.4: Tabela-verdade associada ao conectivo $\rightarrow$.

Entretanto, essa definição poderia ser diferente, e a Tabela 2.4 poderia ser substituída por outra tabela, como, por exemplo, a Tabela 2.5. Observe a diferença entre a Tabela 2.5 e a Tabela 2.4, que define $I[H \rightarrow G]$. Os valores de verdade, que estão na coluna da fórmula $(H \rightarrow G)$ nas duas últimas linhas, são modificados.

H	G	$H \rightarrow G$
T	T	T
T	F	F
F	T	F
F	F	F

Tabela 2.5: Tabela-verdade associada ao conectivo $\rightarrow$.

Mas, se na definição for considerada a Tabela 2.5 no lugar da Tabela 2.4, algumas consequências indesejadas aparecem. A seguir, consideramos alguns argumentos a favor da interpretação do conectivo $\rightarrow$ conforme a Tabela 2.4 e não a 2.5.

Primeiro argumento a favor da Tabela 2.4. Conforme a Tabela 2.4:

$$I[H \rightarrow G] = T \text{ quando } I[H] = T \text{ e } I[G] = T$$

o que é "razoável", pois, dado que a implicação seja verdadeira, $I[H \rightarrow G] = T$, se H é verdadeira, devemos ter G verdadeira. Em outras palavras, dado que a implicação seja verdadeira, então um antecedente verdadeiro implica no consequente verdadeiro. Nesse caso, se as interpretações de H e G são verdadeiras, então a interpretação da fórmula $(H \rightarrow G)$ também é verdadeira. Observe que $I[H \rightarrow G]$ representa a interpretação da fórmula $(H \rightarrow G)$ como um todo. Isto é, a interpretação de toda a inferência é verdadeira quando as interpretações das fórmulas H e G são verdadeiras. Além disso, também não estamos supondo uma relação causal entre H e G.

Segundo argumento a favor da Tabela 2.4. Conforme a segunda linha da Tabela 2.4, $I[H \rightarrow G] = F$ quando $I[H] = T$ e $I[G] = F$. Nesse caso, é falso concluir uma declaração falsa a partir de outra verdadeira. Isso é "intuitivamente" correto, pois uma inferência que conclui um falso a partir de um verdadeiro é uma inferência falsa. Suponha que: $P =$ "Está chovendo" e $Q =$ "A rua está molhada". A implicação: "Se está chovendo, então a rua está molhada" é verdadeira, pois se P é verdadeiro (está chovendo), então necessariamente[8] Q é verdadeiro (a rua está molhada). Caso ocorresse P verdadeiro (está chovendo) e Q falso (a rua não está molhada), então a implicação: "Se está chovendo então a rua está molhada" seria uma implicação falsa. Portanto, se um enunciado falso é concluído a partir de outro verdadeiro, então a implicação é falsa.

Terceiro argumento a favor da Tabela 2.4. A análise das outras linhas da tabela-verdade, que definem $I[H \rightarrow G]$, não é tão imediata como as primeiras linhas analisadas anteriormente. Nas linhas 3 e 4, $I[H \rightarrow G] = T$, dado que $I[H] = F$, independentemente do valor de $I[G]$. Uma justificativa, informal, é que, com base em uma declaração falsa é possível concluir qualquer tipo de declaração. Em outras palavras, a partir de um antecedente falso, uma inferência que conclui fatos verdadeiros ou falsos é uma inferência verdadeira. Parece que isso não é tão imediato. E se você está um pouco incomodado a respeito do fato de se ter $I[H \rightarrow G] = T$ partindo apenas do fato de que $I[H] = F$, você tem razão. Certamente, temos que explicar um pouco mais, pois é estranho supor verdadeira a conclusão de fatos falsos a partir de fatos falsos. Há uma história curiosa a esse respeito [Goldstein]. Contam que, certo dia, um aluno pediu ao famoso lógico e filósofo Bertrand Russell que provasse que qualquer coisa segue da contradição, ou seja, de uma sentença falsa. E o aluno completou: "É possível provar que do enunciado $2 + 2 = 5$, segue que o senhor é o Papa?" Russell apresentou a seguinte prova:

[8] Estamos considerando um mundo razoável, no qual as ruas são descobertas e os pingos d'água caem do céu, no chão da rua.

Suponha que $2 + 2 = 5$. Subtraia 2 de ambos os lados da igualdade e obtenha: $2 = 3$. Inverta os termos da igualdade, e obtenha $3 = 2$. Subtraia 1 de ambos os lados da igualdade, e obtenha $2 = 1$. E ele prosseguiu. "O Papa e eu somos dois. Mas, dado que dois é igual a um, então eu e o Papa somos um. Logo, eu sou igual ao Papa."

Quarto argumento a favor da Tabela 2.4. Uma outra justificativa para a Tabela 2.4 é a seguinte. Considere a fórmula: $(P \rightarrow (P \vee Q))$. Informalmente, essa fórmula diz que P implica (P ou Q). E é bastante razoável admitir que qualquer proposição deva implicar a si mesma ou qualquer outra coisa. Considerando esse fato, então a fórmula anterior deve ser verdadeira, independentemente das interpretações de P e Q. Nesse caso, P deve implicar P ou outra proposição qualquer. Assim, na Tabela 2.6, a coluna da fórmula $(P \rightarrow (P \vee Q))$ deve ser uma coluna que possui apenas valores iguais a T.

P	Q	$P \vee Q$	$P \rightarrow (P \vee Q)$
			T
			T
			T
			T

Tabela 2.6: Tabela-verdade associada à fórmula $P \rightarrow (P \vee Q)$.

Considere que a Tabela 2.4, que define a interpretação de $(H \rightarrow G)$, seja modificada para a Tabela 2.5. Se a semântica da fórmula $(H \rightarrow G)$ fosse definida conforme a Tabela 2.5 e as correspondências a seguir fossem utilizadas, $H = P$ e $G = (P \vee Q)$, então a tabela-verdade associada à fórmula $(P \rightarrow (P \vee Q))$ seria preenchida como na Tabela 2.7, a seguir:

P	Q	$P \vee Q$	$P \rightarrow (P \vee Q)$
T	T	T	T
T	F	T	T
F	T	T	F
F	F	F	F

Tabela 2.7: Tabela-verdade associada à fórmula $P \rightarrow (P \vee Q)$.

Logo, a interpretação da fórmula $(P \rightarrow (P \vee Q))$ não seria verdadeira, não importando as interpretações de P e Q. O que está acontecendo? A modificação da definição de $I[H \rightarrow G]$, da Tabela 2.4 para a Tabela 2.5, faz com que $I[P \rightarrow (P \vee Q)]$ seja igual a F nas linhas 3 e 4 da Tabela 2.7. Portanto, o correto é considerar a

Tabela 2.4 como definição da semântica do conectivo $\rightarrow$. Nesse caso, utilizando a Tabela 2.4 e as correspondências: $H = P$ e $G = (P \lor Q)$, obtemos a Tabela 2.8, que está de acordo com o fato intuitivo de que a fórmula $(P \rightarrow (P \lor Q))$ deve ter uma interpretação verdadeira, independentemente das interpretações de P e Q.

P	Q	$P \lor Q$	$P \rightarrow (P \lor Q)$
T	T	T	T
T	F	T	T
F	T	T	T
F	F	F	T

Tabela 2.8: Tabela-verdade associada à fórmula $P \rightarrow (P \lor Q)$.

Quinto argumento a favor da Tabela 2.4. Considere uma outra análise da semântica do conectivo $\rightarrow$. Suponha que estamos considerando números reais x, y tais que P = "$x > 10$" e Q = "$x^2 > 100$". Nesse caso, $I[P \rightarrow Q] = T$, pois, considerando números reais, se $I[P] = T$, então $I[Q] = T$. Ou seja, se é verdade que o número real x é tal que $x > 10$, então também é verdade que $x^2 > 100$. Em outras palavras, é impossível $x > 10$ ser verdadeiro e $x^2 > 100$ ser falso. Portanto, nesse caso, $I[P \rightarrow Q] = T$. Logo, conforme a Tabela 2.4, os símbolos P e Q somente podem ser interpretados conforme as linhas 1, 3 e 4 da tabela, que são as linhas nas quais temos $I[P \rightarrow Q] = T$. A segunda linha não ocorre, pois nesse caso $I[P \rightarrow Q] = F$. E dado que $I[P \rightarrow Q] = T$, então se $I[P] = T$, concluímos, pela primeira linha da Tabela 2.4, que $I[Q] = T$. Em outras palavras, se $x > 10$ e tendo que $I[P \rightarrow Q] = T$, então $x^2 > 100$. Mas o que ocorre se é falso que $x > 10$, ou seja, $I[x > 10] = I[P] = F$? Nesse caso, x é um número real menor, ou igual a 10. Isto é, $x \leqslant 10$. É possível ter, por exemplo, $x = 5$ ou $x = -20$. Suponha, então, que $x = 5$. Nesse caso, $I[x > 10] = I[P] = F$ e temos $x^2 = 25$. Logo, $x^2 \leq 100$ e $I[x^2 > 100] = I[Q] = F$. Suponha o outro caso, no qual $x = -20$. Nesse caso, também temos $I[x > 10] = I[P] = F$. Entretanto, diferentemente do caso anterior, $x^2 = 400$. Logo, $x^2 > 100$ e $I[x^2 > 100] = I[Q] = T$. Portanto, dado que $I[P \rightarrow Q] = T$, se $I[x > 10] = F$, nada podemos concluir a respeito de $I[x^2 > 100]$. É possível ter $I[x^2 > 100] = T$, ou $I[x^2 > 100] = F$, dependendo do valor de x. Tais casos são expressos na Tabela 2.4, do conectivo $\rightarrow$, nas duas últimas linhas.

A causalidade e a semântica do conectivo $\rightarrow$. Conforme a Tabela 2.4, temos dois fatos importantes.

Se $I[G] = T$, então $I[H \rightarrow G] = T$,

independentemente do valor de $I[H]$. Analogamente,

se $I[H] = F$, então $I[H \rightarrow G] = T$,

independentemente do valor de $I[G]$. Isso significa que o conectivo $\rightarrow$ não necessariamente expressa a causalidade, sendo, por essa razão, frequentemente denominado implicação material. Não é necessária a relação de causa e efeito entre

H e G para que se tenha $I[H \rightarrow G] = T$. Por exemplo, as linhas 3 e 4 da Tabela 2.4 determinam uma semântica toda própria do conectivo $\rightarrow$, sendo um pouco diferente daquela que ocorre nas linguagens naturais. Considere a implicação: "Se $2+2=5$, a lua é feita de queijo." Considerando que é falso que $2+2=5$, então pela linha 4 da Tabela 2.4, essa implicação é verdadeira. Isso causa um mal-estar, pois a implicação é verdadeira apesar de não haver relação alguma entre 2 mais 2 ser igual a 5 e a lua ser feita de queijo. Analogamente, pela linha 4 da Tabela 2.4 a implicação: "Se o mar é doce, então $3+3=6$" também é verdadeira. Isso é estranho, porém correto, pois a semântica do conectivo $\rightarrow$ não expressa a causalidade. E sem a causalidade, essa semântica foge ao senso comum, como ocorre no caso a seguir. Suponha: "O sol é redondo" e que I seja uma interpretação razoável tal que $I[Q] = T$. Nesse caso, $I[P \rightarrow Q] = T$ para qualquer proposição que P esteja representando. Até mesmo no caso em que temos: $P =$ "Todo político é honesto." Nesse caso $I[P \rightarrow Q] = T$ e não há relação de causa e efeito entre P e Q. Suponha, ainda, que $R =$ "O quadrado é redondo." Seja I uma interpretação, que obedece os conceitos usuais da geometria. Logo, $I[R] = F$. Nesse caso, $I[R \rightarrow S] = T$ para qualquer proposição que S esteja representando. Suponha agora que $S =$ "A lua é redonda." Neste caso $I[R \rightarrow S] = T$ e também não há relação de causa e efeito entre R e S. Esse problema todo que ocorre com a implicação é porque, a rigor, temos duas implicações: uma representada pelo conectivo $\rightarrow$ e outra da linguagem natural. E na linguagem natural, em português, por exemplo, ela geralmente está associada a uma relação de causa e efeito, o que não necessariamente ocorre na Lógica. A semântica dada ao conectivo $\rightarrow$ na Lógica Proposicional não corresponde exatamente ao significado dado às implicações que ocorrem nas linguagens naturais como o português. Essa semântica corresponde ao significado da implicação presente na matemática.[9] Há ainda outros problemas com o se-então das linguagens naturais. Qual o significado da implicação a seguir? "Se Zé é bom de bola, eu sou um astronauta" Na verdade, apesar dessa sentença utilizar "se ... então ... ", ela é apenas uma forma alternativa de dizer que Zé não é bom de bola. Portanto, a rigor, essa sentença não é uma implicação, apesar de ser expressa utilizando o "se ... então ... ".

A semântica do conectivo $\leftrightarrow$. O conectivo $\leftrightarrow$ é denominado bi-implicação ou bicondicional. Como o nome sugere, a semântica de $\leftrightarrow$ é um condicional nas duas direções e corresponde às expressões "... se, e somente se, ..." e "... equivale a ...". Suponha que: $P =$ "Maria é aprovada em Lógica" e $Q =$ "Maria totaliza mais de 60 pontos em Lógica". A fórmula $P \leftrightarrow Q$ representa: "Maria é aprovada em Lógica se, e somente se, ela totaliza mais de 60 pontos." Nesse caso, há dois condicionais envolvidos: "Se Maria é aprovada em Lógica, então ela totalizou mais de 60 pontos"[10] e "Se Maria totaliza mais de 60 pontos em Lógica, ela é aprovada". Portanto, o

[9] A maioria dos lógicos que desenvolveram a Lógica contemporânea eram também matemáticos.

[10] Observe que os tempos verbais são desconsiderados nesta representação. "Maria totaliza 60 pontos" se transforma em "ela totalizou mais de 60 pontos". Na Lógica Clássica os tempos verbais geralmente são desconsiderados.

significado da expressão "... se, e somente se, ..." corresponde ao significado de "se ... então ..." nas duas direções. Logo, todos os problemas indicados na análise da semântica do conectivo $\rightarrow$ também ocorrem na semântica de $\leftrightarrow$.

Uma outra forma de entender a semântica do conectivo $\leftrightarrow$ é pensar que se a interpretação de $H \leftrightarrow G$ é verdadeira, então H equivale a G. As interpretações de H e G devem ser iguais a T ou a F. Em outras palavras, as duas fórmulas têm interpretações iguais a T, ou as duas fórmulas têm interpretações iguais a F. No caso em que as interpretações de H e G são diferentes, a interpretação de $H \leftrightarrow G$ deve ser igual a F.

A Definição 2.6 determina interpretações fixas para os conectivos. Por outro lado, os símbolos proposicionais não têm interpretações fixas. Dado um símbolo proposicional $\check{P}$, e uma interpretação I, necessariamente $I[\check{P}] = T$ ou $I[\check{P}] = F$. Dada uma fórmula H, para determinar o valor de verdade de $I[H]$ é necessário especificar a interpretação dos símbolos proposicionais que ocorrem em H. Isso quer dizer que, para determinar o significado de uma sentença declarativa, basta dizer como o mundo interpreta as proposições que constituem a sentença. Este é um dos princípios básicos da Lógica Clássica: os conectivos são operadores ou funções de verdade cujo valor pode ser calculado a partir de seus componentes mais simples.[11]

Nota. Geralmente os símbolos com interpretações fixas são denominados símbolos lógicos e aqueles que não têm interpretação fixa são os símbolos não lógicos.

Os Exemplos 2.3 e 2.4 a seguir consideram a interpretação de fórmulas a partir de seus símbolos proposicionais. Esse princípio é denominado Princípio da Composicionalidade ou Princípio de Frege. Ele estabelece que o significado de uma sentença declarativa complexa é uma função do significado de suas partes e da forma como essas partes se combinam. O resultado da interpretação de uma fórmula é uma função da interpretação dos símbolos proposicionais e de como eles se combinam com os símbolos de verdade e os conectivos. Nas linguagens naturais, como o português, a interpretação das sentenças também depende de como as palavras são combinadas. Em português, o significado de uma sentença depende do significado das palavras envolvidas e de como elas estão dispostas na sentença. Por exemplo, "Zé ama Maria" expressa um conteúdo que não depende apenas do que entendemos, separadamente, por "Zé", "ama", e "Maria". A sentença "Zé ama Maria" pode até significar, dependendo do contexto, o oposto, ou seja que "Zé não ama Maria". Assim, uma dada sentença pode ser interpretada de várias formas. Observe que na Lógica Proposicional isso não ocorre.

Exemplo 2.3 (interpretação de uma fórmula) Considere a fórmula:

$$H = ((\neg P) \vee (\neg Q)) \rightarrow R$$

e uma interpretação I dada por: $I[P] = T, I[Q] = F, I[R] = T, I[S] = F$. Para determinar a interpretação de H conforme I, isto é, $I[H]$, observamos que

[11] Há Lógicas não clássicas, como a Lógica Modal, em que esse princípio não é satisfeito.

$I[\neg P] = F, I[\neg Q] = T$ e $I[\neg P \vee \neg Q] = T$. Logo, $I[H] = T$ Observe que para determinar a interpretação de H, as interpretações são feitas passo a passo, utilizando as regras semânticas definidas anteriormente. De início, são interpretados os símbolos proposicionais; em seguida, as subfórmulas que ocorrem em H, até que obtemos a interpretação de H.

Finalmente, observe que definimos $I[S] = F$ e o símbolo S não ocorre na fórmula H. Entretanto, isso não interfere no resultado da interpretação de H, visto que $I[S] = F$ representa apenas a interpretação de algo que não ocorre na fórmula. Ou seja, I interpreta mais do que o necessário para interpretar H. ■

Exemplo 2.4 (interpretação de fórmulas) Considere as fórmulas:

$$E = ((\neg P) \wedge Q)) \rightarrow (R \vee P), \ H = (false \rightarrow P)$$

e as interpretações I e J definidas a seguir: $I[P] = T$, $I[Q] = F$, $I[R] = T$, $I[P_1] = F$, $J[P] = F$, $J[Q] = T$, $J[R] = F$. Nesse caso, I interpreta a fórmula E conforme a Tabela 2.9 a seguir.

P	Q	R	$\neg P$	$\neg P \wedge Q$	$R \vee P$	E
T	F	T	F	F	T	T

Tabela 2.9: Tabela-verdade associada à fórmula E e interpretação I.

A interpretação J interpreta E conforme a Tabela 2.10.

P	Q	R	$\neg P$	$\neg P \wedge Q$	$R \vee P$	E
F	T	F	T	T	F	F

Tabela 2.10: Tabela-verdade associada à fórmula E e interpretação J.

As interpretações I e J interpretam o antecedente da fórmula H como sendo F. Devido a esse fato, são obtidos os resultados $I[H] = T$ e $J[H] = T$. Lembre-se que esse fato é geral. Isto é, quando uma interpretação interpreta o antecedente de uma implicação como sendo F, então a implicação é interpretada como sendo T. Isso significa que independentemente dos valores de $I[P]$ e $J[P]$, os resultados $I[H] = T$ e $J[H] = T$ são obtidos. ■

O número de interpretações. Quantas interpretações existem? Uma interpretação na Lógica Proposicional, conforme exposto na Definição 2.5, é uma função binária cujo domínio é o conjunto das fórmulas da Lógica Proposicional e o contradomínio é $\{T, F\}$. Como o conjunto das fórmulas é enumerável, e o contradomínio possui apenas dois elementos, o conjunto de todas as interpretações é enumerável. É, portanto, infinita e enumerável a quantidade de possíveis interpretações. Isto ocorre porque temos uma quantidade infinita e enumerável de símbolos proposicionais no alfabeto da linguagem da Lógica Proposicional. Logo, há infinitas formas de interpretar o conjunto de todos os símbolos proposicionais. Observe que, dado P, há apenas duas formas possíveis de interpretá-lo. P pode ser interpretado como verdadeiro ou falso. Logo, o conjunto de todas as interpretações pode ser subdividido em dois subconjuntos: as interpretações que interpretam P como T e aquelas que o interpretam como F. Considere agora P, Q e R. Nesse caso, há oito formas diferentes de interpretar P, Q e R, como é indicado na Tabela 2.11, a seguir.

P	Q	R
T	T	T
T	T	F
T	F	T
T	F	F
F	T	T
F	T	F
F	F	T
F	F	F

Tabela 2.11: Tabela-verdade associada aos símbolos P, Q e R

Isso significa que o conjunto de todas as interpretações pode ser subdividido em oito subconjuntos, cada um correspondendo a uma das linhas da Tabela 2.11. As oito possibilidades de interpretação de P, Q e R correspondem aos oito subconjuntos do conjunto de todas as interpretações. Em uma tabela-verdade, cada possibilidade é indicada por uma linha da tabela. A Tabela 2.11 possui oito linhas, que correspondem às diferentes possibilidades de interpretação de P, Q, e R. Para simplificar, cada linha da tabela é identificada como sendo uma interpretação. Observe que, na verdade, cada linha da Tabela 2.11 corresponde a um conjunto infinito, enumerável, de interpretações que coincidem nos símbolos P, Q e R. Para finalizar, é importante ter em mente o princípio da composicionalidade e a natureza das funções de verdade. São dois fatores que fundamentam a semântica da Lógica Clássica.

O princípio da composicionalidade. A interpretação de uma fórmula na Lógica é função da interpretação de suas partes e do modo como elas se combinam. Essa propriedade da interpretação é denominada princípio da composicionalidade. Algo semelhante ocorre nas linguagens naturais. Para interpretar as proposições "O cavalo carrega Zé" e "Zé carrega o cavalo", é necessário dar um significado para as palavras que definem essas sentenças e também como tais palavras são combinadas. Apesar de utilizarem as mesmas palavras, as proposições têm interpretações diferentes. Isso ocorre porque as palavras que as compõem se combinam de forma diferente. Entretanto, em geral, o princípio da composicionalidade não se aplica nas linguagens naturais. Por exemplo, suponha que alguem fale: "Todo político é honesto." Afinal, é verdadeiro, ou falso, que "Todo político é honesto"? Nesse caso, essa sentença pode ser um deboche que expressa o contrário: "Os políticos são desonestos."

Funções de verdade Na Lógica Clássica, o valor de verdade de uma fórmula é calculado a partir dos valores de verdade de suas subfórmulas. Um cálculo dessa forma só é possível porque os conectivos se comportam como funções de verdade, que tomam como argumentos valores de verdade e retornam valores de verdade.[12]

2.4 Representação de sentenças na Lógica Proposicional

Tudo que foi apresentado desde o início deste livro, pode até parecer bonito. O alfabeto e as fórmulas da Lógica Proposicional. Em seguida, a interpretação dessas fórmulas. Mas, isso, certamente, tem mais valor se existir alguma ligação com a realidade. Ou seja, as ideias semânticas do nosso dia a dia possuem alguma correspondência com as fórmulas da Lógica Proposicional e suas interpretações. Infelizmente, nem todo conceito semântico pode ser traduzido, adequadamente, em uma fórmula da Lógica Proposicional. Isso ocorre porque tal lógica tem uma linguagem bastante restrita. Entretanto, vários tipos de sentenças do nosso uso ainda podem ser bem traduzidas em fórmulas da Lógica Proposicional. E entender a técnica dessas traduções é um importante tema da lógica.

Exemplo 2.5 (representação de sentenças) Este exemplo considera a representação de uma sentença simples da língua portuguesa para a linguagem da Lógica Proposicional. Preste atenção no processo que se segue para obter a representação final. Tal processo é, em geral, utilizado para representar sentenças mais elaboradas. Considere, então, a sentença simples:

Se eu sou feliz, então você é feliz.

Para traduzir essa sentença, inicialmente, identifique as declarações, contidas nela, que são proposições. Tais proposições aparecem sublinhadas na sentença a seguir:

Se <u>eu sou feliz</u>, então <u>você é feliz</u>.

Em seguida, represente cada proposição por um símbolo proposicional. Considere: $P =$ "eu sou feliz" e $Q =$ "você é feliz". Utilizando tais representações, a sentença acima pode ser escrita como: "Se P, então Q." E, finalmente, o "se ... então ..." é representado pelo conectivo $\rightarrow$. Dessa forma, o resultado da representação da sentença anterior é a fórmula: $P \rightarrow Q$. ■

[12] Há Lógicas não clássicas que contêm conectivos que não agem como funções de verdade.

Exemplo 2.6 (tempo verbal na representação) Este exemplo mostra que nem sempre o tempo verbal é desconsiderado na representação de uma sentença da língua portuguesa para a linguagem da Lógica Proposicional. Considere a sentença: "Se eu era feliz, então você e eu somos felizes." Para traduzir essa sentença, identifique as proposições contidas nela:

Se <u>eu era feliz</u>, então <u>você e eu somos felizes</u>.

Em seguida, represente cada proposição por um símbolo proposicional. Considere: $P =$ "Eu era feliz" $P_1 =$ "Eu sou feliz" e $Q =$ "Você é feliz". Utilizando tais representações, o resultado da representação é: $P \rightarrow (P_1 \wedge Q)$. Observe que nessa representação o tempo verbal foi levado em conta. Ou seja, "eu era feliz" foi representado de forma diferente de "eu sou feliz". Entretanto, nem sempre o tempo verbal é considerado. E, para simplificar, em geral consideramos a mesma representação para "eu era feliz" e "eu sou feliz". Nesse caso, se $P =$ "Eu era feliz", $P =$ "Eu sou feliz" e $Q =$ "Você é feliz", então, a representação final é dada por $P \rightarrow (P \wedge Q)$. Dessa forma, é claro, a primeira representação é mais fiel à semântica da linguagem natural. ■

Exemplo 2.7 (traduções para o conectivo $\rightarrow$) Este exemplo considera diferentes sentenças que podem ser traduzidas, utilizando o conectivo $\rightarrow$. Considere as sentenças: "Se eu sou feliz, então você é feliz", "Se eu sou feliz, você é feliz", "Dado que eu sou feliz, então você é feliz", "Dado que eu sou feliz, você é feliz", "Você é feliz, se sou feliz", "Você é feliz, pois sou feliz", "Você é feliz, dado que sou feliz" e "Sou feliz, portanto você é feliz". Todas essas sentenças têm a mesma representação para a Lógica Proposicional. Se $P =$ "Eu sou feliz" e $Q =$ "Você é feliz", elas são todas traduzidas na fórmula: $P \rightarrow Q$. ■

Exemplo 2.8 (tradução para o conectivo $\neg$) Este exemplo considera a tradução de uma sentença que contém negações. Considere: "Se eu sou feliz, você é infeliz, e se você é infeliz, eu não sou feliz". Identifique as declarações, contidas nela, que são proposições.

"Se <u>eu sou feliz</u>, <u>você é infeliz</u>, e se <u>você é infeliz</u>, <u>eu não sou feliz</u>."

Nesse caso, há pares de proposições em que uma nega a outra. Então, não há sentido em considerar, por exemplo: $P =$ "Eu sou feliz" e $P_1 =$ "Eu não sou feliz". Temos uma representação melhor, quando consideramos: $P =$ "Eu sou feliz" e $\neg P =$ "Eu não sou feliz". Seguindo esse raciocínio, seja: $P =$ "Eu sou feliz" e $Q =$ "Você é feliz". Nesse caso, uma primeira representação da sentença é dada por:

"Se P, então $(\neg Q)$, e se $(\neg Q)$, $(\neg P)$".

O próximo passo é efetuar a tradução para o conectivo "se ... então ...", obtendo:

"$(P \rightarrow (\neg Q))$, e $((\neg Q) \rightarrow (\neg P))$".

O passo final é traduzir para o conectivo $\wedge$, obtendo-se a fórmula:
$(P \rightarrow (\neg Q)) \wedge ((\neg Q) \rightarrow (\neg P))$. ■

Exemplo 2.9 (representação de sentenças) Considere a sentença:

1. = "Irei ao teatro se for uma peça de comédia"

e as representações $P =$ "Irei ao teatro" e $Q =$ "O teatro está apresentando uma peça de comédia". Nesse caso, a sentença é traduzida pela fórmula $Q \rightarrow P$. Observe que se a sentença 1 é modificada para a sentença 2, tal que

2. = "Se eu for ao teatro, a peça será de comédia",

então, desconsiderando os tempos verbais, a representação é $P \rightarrow Q$. Percebeu a diferença quando o "se" ocorre no meio e no fim da sentença? No caso da sentença 1, se $I[Q] = T$, ou seja, a peça é de comédia, então irei ao teatro. Mas, se eu for ao teatro, não necessariamente podemos concluir que a peça é de comédia. Pode acontecer que eu também queira assistir a um drama. Nesse caso, irei ao teatro, mesmo que a peça não seja de comédia. Já no caso da sentença 2, se $I[P] = T$, então concluo, necessariamente, que a peça seja de comédia. Considere agora a sentença 1 com uma pequena modificação:

3. = "Irei ao teatro somente se for uma peça de comédia".

A sentença 3 diz algo diferente da sentença 1. Ela diz que irei ao teatro somente se a peça for de comédia. Caso não seja comédia, não irei ao teatro. Nesse caso, a sentença 3 equivale a:

"Se a peça não é de comédia, então não irei ao teatro".

Essa sentença é representada como $\neg Q \rightarrow \neg P$. Mas, como é analisado no próximo capítulo, as fórmulas $\neg Q \rightarrow \neg P$ e $P \rightarrow Q$ são equivalentes. Conclusão: a terceira 3 é representada pela fórmula $P \rightarrow Q$. Vamos colocar mais um "se" na sentença 3 e considerar:

4. = "Irei ao teatro se, e somente se, for uma peça de comédia."

Nesse caso, a representação é $P \leftrightarrow Q$. Observe que a sentença 1 tem apenas um "se" no seu interior. Em seguida, um "somente se" ocorre no interior da sentença 3. Finalmente, na sentença 4 temos "se, e somente se" no seu interior. Nessa ordem, as sentenças 1, 3 e 4 são traduzidas por: $Q \rightarrow P$, $P \rightarrow Q$ e $Q \leftrightarrow P$. Olhando dessa forma, é como se o "se, e somente se" fosse a "soma" de um "se" e de um "somente se". Em outras palavras, é como se o conectivo $\leftrightarrow$ fosse a "soma" de dois conectivos $\rightarrow$. Mais adiante, veremos que pensar dessa forma tem certo fundamento, pois $(Q \rightarrow P) \wedge (P \rightarrow Q)$ equivale a $Q \leftrightarrow P$. Podemos, ainda, ter um pouco mais de informação e considerar a sentença:

5. = "Se minha namorada vier, irei ao teatro somente se for uma peça de comédia".

Considerando as representações: $P =$ "Irei ao teatro", $Q =$ "O teatro está apresentando uma peça de comédia" e $R =$ "Minha namorada virá", temos a representação inicial:

"Se R, P somente se Q".

Nesse caso, pode ocorrer a seguinte dúvida, afinal, qual das duas fórmulas a seguir é a representação correta da sentença anterior? $R \rightarrow (P \rightarrow Q)$ ou $(R \rightarrow P) \rightarrow Q$?

Decidir entre essas duas fórmulas depende de uma atenção especial à semântica da língua portuguesa. Observe que, devido à vírgula depois do símbolo R, a representação correta é $R \rightarrow (P \rightarrow Q)$. Desconsiderando os tempos verbais e com uma pequena variação na sentença 5, temos:

6. = "Minha namorada veio. Fui ao teatro. Portanto, a peça é de comédia".

Considerando, novamente, as representações: $P =$ "Irei ao teatro", $Q =$ "O teatro está apresentando uma peça de comédia" e $R =$ "Minha namorada virá" e, equivalentemente, $P =$ "Fui ao teatro", $Q =$ "O teatro está apresentando uma peça de comédia" e $R =$ "Minha namorada veio", temos a representação inicial:

"R. P. Portanto, Q".

Nesse caso, a questão é decidir como representar as sentenças: "Minha namorada veio. Fui ao teatro." Essas duas sentenças parecem ser independentes. Apenas parecem, pois, na verdade, quando expressamos dessa forma, estamos considerando a conjunção das sentenças. Nesse sentido, a representação de "Minha namorada veio. Fui ao teatro." é $R \wedge P$. Logo, a representação da sentença 6 é $(R \wedge P) \rightarrow Q$. ■

2.5 Representação de argumentos lógicos

Frequentemente utilizamos argumentos para nos convencer ou convencer os outros de nossas opiniões. E os outros também fazem o mesmo: apresentam-nos argumentos sobre diferentes fatos, cujo objetivo é nos convencer. Mas o que é um argumento? É uma afirmação ou conjunto de afirmações utilizadas para convencer alguém. E, se são utilizados para convencer, esse conjunto de afirmações ou argumentos deve ser bom. Entretanto, nem todos os argumentos são bons. Utilizamos a seguir as propriedades semânticas da Lógica Proposicional como um fundamento da análise dos argumentos lógicos. Por enquanto, use sua intuição e responda: entre os argumentos a seguir, quais você considera que são bons?

1. = "Quem tem dinheiro é feliz. Zé tem dinheiro. Portanto, Zé é feliz."

Dizer que esse argumento é bom significa se convencer que Zé é feliz a partir das premissas de que quem tem dinheiro é feliz e de que Zé tem dinheiro. O que você acha? Esse é um bom argumento?

Podemos, ainda, utilizar conceitos metafísicos para formular outros argumentos[13].

2. = "Deus fez o homem. Deus é perfeitamente bom. Tudo o que é feito por alguém perfeitamente bom é perfeitamente bom. Tudo o que é perfeitamente bom não contém pecado. Portanto, o homem não tem pecado."

Afinal, a partir desse argumento, concluios que o homem não tem pecado? O argumento a seguir é denominado Argumento do Desígnio.

[13] Alguns dos argumentos que se seguem, e muitos outros, podem ser encontrados em [Nolt].

3. = "Deus existe pois a natureza e a vida são perfeitas e toda casa precisa de um arquiteto."

Ainda, mais dois argumentos sobre a existência de Deus.

4. = "Tudo que existe tem uma causa, logo é preciso existir uma causa primordial. Essa causa primordial é Deus."

5. = "O fato de termos ideia de Deus, significa que ele existe."

Outros exemplos de argumentos, que não são metafísicos são:

6. = "Existem mais pessoas no mundo do que fios de cabelos na cabeça de uma pessoa. Ninguém é careca. Portanto, pelo menos duas pessoas tem um mesmo número de fios de cabelos."

7. = "No interior da Antárctida, as temperaturas oscilam entre -50^oC e -20^oC. Se a água está a uma temperatura abaixo de 0^oC, então ela se congela. Portanto, a água no interior da Antárctida está congelada."

Não basta ficar apenas com a intuição. Temos que prosseguir e classificar de maneira mais formal tais argumentos. Antes, porém, preste atenção. "Argumentar" significa muitas vezes "discutir", "contender". Porém, na Lógica, a palavra "argumentar" não tem essa conotação. A Argumentação Lógica não tem como objetivo a discussão, sendo seus argumentos utilizados apenas para justificar uma conclusão, havendo ou não discordância. Na busca pela solução de uma divergência, os argumentos lógicos devem ser utilizados de forma inteligente, na justificação de uma ou outra ideia. Nesse sentido, os argumentos têm como principal função, o convencimento das partes envolvidas. E não interessa à Lógica o poder persuasivo, do ponto de vista psicológico, do argumento, mas, sim a relação objetiva entre as premissas e a conclusão expressas pelo argumento. Tudo isso significa que, por exemplo, o objetivo do argumento

"Quem tem dinheiro é feliz. Zé tem dinheiro. Portanto, Zé é feliz."

é nos convencer de que podemos concluir que Zé é feliz, dado que ele tem dinheiro e que toda pessoa de posses é feliz. É só isso, não se busca uma discussão e nem uma persuasão psicológica. Mas é função da Lógica a relação objetiva entre as premissas "Quem tem dinheiro é feliz", "Zé tem dinheiro" com a conclusão "Zé é feliz". Enfim, é função da Lógica dizer se um argumento é válido; correto ou incorreto; forte ou fraco. A nossa intuição nos diz que esse argumento não é um bom argumento, pois há pessoas ricas que não são felizes. Na verdade, a análise lógica prova que ele é incorreto. Além de provar a não correção de argumentos como esse, a análise lógica também compara os argumentos. E comparar argumentos pode não ser tão simples, dado que o conjunto dos argumentos não é um conjunto ordenado como o conjunto dos números inteiros. Mas os argumentos têm algo em comum. Todos eles correspondem a uma implicação, em que as premissas formam o antecedente; e a conclusão, o consequente. Temos uma implicação da forma:

$$\textbf{premissas} \rightarrow \textbf{conclusão.}$$

Além disso, as premissas são formadas por várias sentenças que são conjuntamente consideradas. Em outras palavras, as premissas são formadas pela conjunção de um conjunto de proposições. No caso do argumento anterior, as premissas são formadas pela conjunção: "Quem tem dinheiro é feliz" e "Zé tem dinheiro". Considere as representações: $P =$ "Quem tem dinheiro é feliz", $Q =$ "Zé tem dinheiro" e $R =$ "Zé é feliz". Nesse caso, as premissas são representadas por $P \wedge Q$ e a conclusão por R. Logo, o argumento é representado por $(P \wedge Q) \rightarrow R$. Observe que, nesse caso, o conectivo $\rightarrow$ é a representação, na linguagem da Lógica, do termo: "portanto".

Dificilmente, a não ser nos livros de Lógica, encontraremos os argumentos escritos de forma padronizada:

premissas portanto **conclusão.**

É necessário, portanto, aprender a identificar um argumento, quando ele é escrito ou falado de maneira informal. O primeiro passo é identificar as premissas e a conclusão do argumento, dados que não costumam estar explicitamente rotulados. Além disso, nem sempre as premissas vêm antes da conclusão. O argumento anterior, por exemplo, pode ser escrito, equivalentemente, na forma: "Zé é feliz. Isso, porque ele tem dinheiro e toda pessoa que tem dinheiro é feliz." Nesse caso, temos:

conclusão porque **premissas.**

Observe que as premissas e a conclusão continuam separadas. Entretanto, pode ocorrer até mesmo uma mistura de premissas e conclusões, como

"Uma vez que todo rico é feliz, Zé é feliz, pois ele tem dinheiro."

Quando apresentamos algum argumento, usualmente utilizamos algumas palavras para indicar que uma declaração está funcionando como premissa e outra como conclusão. Considere o argumento:

"Todo rico é feliz. Zé é rico. **Logo**, Zé é feliz."

Nesse caso, a palavra "logo" faz a ligação entre as premissas e a conclusão. As premissas estão escritas antes da palavra "logo" e a conclusão, após. No lugar da palavra "logo" podemos utilizar outras como: "daí decorre que", "em consequência disso". Outras expressões, como "assim" e "se segue que", também podem ser utilizadas para ligar premissas a conclusões, como nos argumentos anteriores. Em todos esses casos, as premissas antecedem as expressões indicadas e a conclusão vem após.

Quando queremos caracterizar que uma declaração constitui uma premissa, utilizamos expressões como "desde que" e "uma vez que". As sentenças que se seguem a essas expressões são as premissas. A conclusão vem logo após. Veja os exemplos: "Desde que todo rico é feliz e Zé é rico, Zé é feliz." "Uma vez que todo rico é feliz e Zé é rico, Zé é feliz." Outras palavras que podem ser utilizadas são: "pois" e "porque". Nesse caso, expressamos inicialmente a conclusão e em seguida, após a palavra, a premissa. Observe os argumentos a seguir, em que utilizamos algumas das expressões e palavras anteriores. "Zé é feliz, pois todo rico é feliz e Zé é rico." "Zé é feliz, porque todo rico é feliz e Zé é rico." Observe que independentemente das palavras utilizadas, "pois", "desde que", "portanto", a representação do argumento na Lógica é sempre a mesma:

premissas portanto **conclusão.**

De tudo isso, como numa argumentação, concluímos que identificar e analisar os argumentos pode não ser fácil. Eles são constituídos de diferentes palavras, em diferentes combinações. Nessa representação, quando escrevemos um argumento para expressar um conceito, alguma informação pode se perder. Como o ato da comunicação é difícil e obscuro, nem sempre o argumento é uma representação fiel daquilo que gostaríamos de expressar. Muitas vezes, até omitimos alguma premissa relevante para o entendimento do argumento. Considere o argumento: "Zé é feliz porque é rico." Nesse caso, o argumento é escrito omitindo uma premissa. A sua forma completa é: "Zé é feliz, porque todo rico é feliz e Zé é rico." Nesse caso, não há dificuldades em reconstruir o argumento completo a partir daquele incompleto. Entretanto, nem sempre isso é tão imediato. Nesse sentido, devemos enfatizar a necessidade dos argumentos serem apresentados de forma completa, sem a omissão de premissas. Quando alguém expõe um argumento, tem todo o direito de expressá-lo de forma incompleta. Mas, dessa forma, também corre o risco de não ser compreendido e o argumento poderá ter efeitos diversos. Frequentemente, a premissa omitida é uma declaração óbvia e talvez nem valha a pena ter o trabalho de a formular. Entretanto, isso pode ser uma grande cilada, pois o que é óbvio para alguém, pode não o ser para os outros. Assim, na Argumentação Lógica, quando fazemos a análise do discurso ou da fala de alguém, geralmente, seguimos três passos:

1. reconhecemos os argumentos;

2. quando encontramos um argumento, devemos identificar as premissas e a conclusão;

3. se um argumento é incompleto, devemos reconstituí-lo, fornecendo a premissa omitida.

Observe um exemplo:

"As mulheres devem ter, no máximo, um filho. Pois atualmente elas trabalham em casa e fora de casa."

Esse argumento tem a premissa: "Atualmente as mulheres trabalham em casa e fora de casa" e a conclusão: "As mulheres devem ter, no máximo, um filho". Observe que o argumento pretende nos convencer sobre a necessidade das mulheres terem no máximo um filho. Para isso, ele considera apenas uma premissa: a que diz que as mulheres trabalham em casa e fora de casa. Entretanto, esse argumento deve ser melhorado, pois, apenas a partir dessa premissa, talvez não seja convincente concluir que as mulheres devem ter poucos filhos. Isso ocorre porque podemos ter situações em que a mulher trabalha apenas 5 minutos por dia fora de casa. Ou ainda, outras razões diferentes da quantidade de trabalho que não implicam na necessidade de as mulheres terem poucos filhos.

2.6 Exercícios

1. No contexto deste livro, qual a diferença entre os símbolos?
   (a) $true$ e T
   (b) $false$ e F
   (c) $\rightarrow$ e $\Rightarrow$
   (d) $\leftrightarrow$ e $\Leftrightarrow$
   Os símbolos $\Rightarrow$ e $\Leftrightarrow$ são aqueles utilizados frequentemente em demonstrações na Matemática.
2. Comente, do ponto de vista lógico, a diferença entre sintaxe e semântica.
3. A interpretação do conectivo $\vee$, na Lógica Proposicional, corresponde ao exato significado da palavra "ou"? Justifique sua resposta. Nessa análise, considere, por exemplo, o significado da sentença: "Vou ao teatro OU ao cinema" como sendo verdadeiro. Desse fato, é possível concluir que irei ao teatro e ao cinema ao mesmo tempo? Faça uma análise análoga para os outros conectivos.
4. Sejam I uma interpretação e a fórmula $H = (P \rightarrow Q)$.
   (a) Se $I[H] = T$, o que se pode concluir a respeito de $I[P]$ e $I[Q]$?
   (b) Se $I[H] = T$ e $I[P] = T$, o que se pode concluir a respeito de I[Q]?
   (c) Se $I[Q] = T$, o que se pode concluir a respeito de I[H]?
   (d) Se $I[H] = T$ e $I[P] = F$, o que se pode concluir a respeito de I[Q]?
   (e) Se $I[Q] = F$ e $I[P] = T$, o que se pode concluir a respeito de $I[H]$?
5. Considere as fórmulas a seguir:
   (a) $(\neg P \vee Q) \leftrightarrow (P \rightarrow Q)$
   (b) $P \rightarrow ((Q \rightarrow R) \rightarrow ((P \rightarrow R) \rightarrow (P \rightarrow R)))$
   (c) $(P \rightarrow \neg Q) \leftrightarrow \neg P$
   (d) $(Q \rightarrow \neg P)$
   (e) $(P \rightarrow (Q \rightarrow R)) \leftrightarrow ((P \wedge Q) \rightarrow R)$
   (f) $(R \wedge \neg P) \leftrightarrow (P \wedge R)$
   (g) $(P \rightarrow Q) \rightarrow (((P \wedge Q) \leftrightarrow P) \wedge ((P \vee Q) \leftrightarrow Q))$
   (h) $(false \rightarrow Q) \leftrightarrow R$
   (i) $true \rightarrow Q$
   (j) $(P \rightarrow false) \leftrightarrow R$
   (k) $P \rightarrow true$

   - Determine a tabela-verdade associada a cada fórmula.

- Seja I uma interpretação tal que $I[P] = T$, $I[Q] = F$ e $I[R] = F$, o que podemos concluir a respeito do valor de verdade de cada fórmula?
- Seja J uma interpretação que interpreta todas as fórmulas anteriores como sendo verdadeiras. Além disso, $J[P] = T$. O que podemos concluir a respeito de $J[Q]$ e $J[R]$, em cada um dos casos?

6. Seja I uma interpretação tal que: $I[P \to Q] = T$. O que se pode deduzir a respeito dos resultados das interpretações a seguir?

   (a) $I[(P \lor R) \to (Q \lor R)]$

   (b) $I[(P \land R) \to (Q \land R)]$

   (c) $I[(\neg P \lor Q) \to (P \lor Q)]$

   Repita este exercício supondo $I[P \to Q] = F$.

7. Seja I uma interpretação tal que: $I[P \leftrightarrow Q] = T$. O que podemos deduzir a respeito dos resultados das interpretações a seguir?

   (a) $I[\neg P \land Q]$

   (b) $I[P \lor \neg Q]$

   (c) $I[Q \to P]$

   (d) $I[(P \land R) \leftrightarrow (Q \land R)]$

   (e) $I[(P \lor R) \leftrightarrow (Q \lor R)]$

   Repita este exercício supondo $I[P \leftrightarrow Q] = F$.

8. Seja H a fórmula a seguir e I uma interpretação.

   $$H = ((P \to Q) \to (((P \land Q) \leftrightarrow P) \land ((P \lor Q) \leftrightarrow Q))) \to P$$

   (a) Se $I[P] = F$, o que se pode concluir a respeito de $I[H]$?

   (b) Se $I[P] = T$, o que se pode concluir a respeito de $I[H]$?

9. Seja H uma fórmula da Lógica Proposicional. Analise a afirmação a seguir. “Cada linha da tabela-verdade associada a H corresponde a infinitas interpretações diferentes para H”.

10. Escreva as sentenças a seguir utilizando a linguagem da Lógica Proposicional. Utilize símbolos proposicionais para representar proposições.

    (a) José virá à festa e Maria não gostará, ou José não virá à festa e Maria gostará da festa.

    (b) A novela será exibida, a menos que seja exibido o programa político.

    (c) Se chover, irei para casa, caso contrário, ficarei no escritório.

    (d) Se Maria é bonita, inteligente e sensível e se Rodrigo ama Maria, então ele é feliz.

(e) Se sr. Oscar é feliz, sra. Oscar é infeliz, e se sra. Oscar é feliz, sr. Oscar é infeliz.

(f) Maurício virá à festa e Kátia não virá ou Maurício não virá à festa e Kátia ficará infeliz.

11. Formule cinco argumentos sobre temas de seu interesse. Em seguida, melhore cada um dos seus argumentos.

12. A sentença "Todo homem é mortal" pode ser representada na Lógica Proposicional, simplesmente fazendo: $P =$ "Todo homem é mortal". Assim, nesse caso, a sentença é representada pelo símbolo P. Entretanto, podemos dizer que essa não é uma representação que considera os detalhes da sentença, pois ela representa a sentença como um todo.

    Represente as sentenças a seguir utilizando a linguagem da Lógica Proposicional. Em cada caso, a sua representação considera elementos internos da sentença? Nos casos em que não for, justifique.

    (a) Possivelmente, irei ao cinema.

    (b) Fui gordo, hoje sou magro.

    (c) Existe no curso de Ciência da Computação um aluno admirado por todos.

    (d) Existe um aluno em minha sala que não gosta de nenhum colega.

    (e) Existe aluno de Ciência da Computação que é detestado por seus colegas.

    (f) Necessariamente algum político é desonesto.

    (g) Amanhã irei ao cinema e depois irei ao teatro.

    (h) Quase todo político é desonesto.

    (i) Adalton sempre foi amigo de João Augusto.

    (j) Toda regra tem exceção.

    (k) Quase todo funcionário da Sigma é um talento.

    (l) Poucos funcionários da Sigma não são empreendedores.

    (m) O presidente da Sigma é admirado por seus colaboradores.

    Os exercícios a seguir são curiosidades que utilizam raciocínio lógico na solução.

13. (Após a morte) Após a morte, o espírito de um homem foi conduzido às portarias do céu e do inferno.

    Nesse local, havia duas portas exatamente iguais, uma para o céu e outra para o inferno. Havia também dois porteiros, um perfeitamente honesto e outro completamente mentiroso. Os porteiros se conheciam, isto é, o mentiroso sabia que o outro era honesto e vice-versa. Entretanto, o espírito do homem que morreu não os conhecia.

Como o espírito descobriu a porta do céu fazendo uma única pergunta para um dos porteiros?

Após a descoberta da porta do céu, o espírito não necessariamente foi para o céu. Atualmente há inúmeros espíritos que gostam de um inferninho.

14. (Proposta complicada) O senhor Justino, apesar de trabalhador, não estava indo bem nos negócios. Devia muito dinheiro a um agiota da cidade.

    O agiota, um sucesso na vida profissional, era baixinho, barrigudo e careca. Tinha mau hálito, dentadura amarelada e um par de óculos bem grossos. Estava sempre usando um terno preto, com os ombros esbranquiçados pela caspa.

    No fim de semana, o agiota foi ao encontro de Justino. Queria um acerto de contas. O agiota, Justino e sua filha, uma linda moça no esplendor de sua juventude, saíram andando por uma estrada cheia de pedras brancas e pretas.

    Naquele momento, o agiota dirigiu-se a Justino. "Sr. Justino, quero fazer-lhe uma proposta. Caso aceite o jogo determinado pela proposta, perdoarei a dívida. Caso contrário, terá de pagá-la integralmente e à vista. A proposta consiste em colocar duas pedras, uma preta e uma branca, no interior deste saco de pano. Em seguida, sua filha retirará uma pedra. Se a pedra for preta, ela se casará comigo. Caso contrário, estará livre. Quero deixar claro que sua dívida será perdoada pelo simples fato de aceitar o jogo."

    O senhor Justino pensou por um momento e aceitou o jogo. Mas o agiota trapaceou e pegou duas pedras pretas e as colocou no saco. Entretanto, a bela filha do senhor Justino percebeu a trapaça do agiota. Mais inteligente que o sujeito, ela usou o fato de haver apenas pedras pretas no interior do saco. Fez *alguma coisa* e se saiu muito bem. O que a filha do senhor Justino fez para se livrar daquele casamento? Lembre-se de que a filha do Sr. Justino estudava Lógica desde o jardim de infância.

15. (Perdido na floresta) Um colecionador de borboletas andava pela floresta à procura dos belos insetos. De repente, foi capturado por índios antropófagos e levado ao centro da aldeia. Lá, os índios prepararam um caldeirão com tempero à vontade. Salsa, pimenta-do-reino, alho, cebola, etc.

    Ao lado do caldeirão se encontrava o chefe da tribo, que aprendera Lógica pela internet. Ele se dirigiu ao colecionador, fazendo a seguinte proposta: "Senhor Colecionador, faça uma afirmação! Se a sua afirmação for verdadeira, então o senhor será cozido em fogo brando neste caldeirão e em seguida devorado pelos companheiros da tribo. Por outro lado, se sua afirmação for falsa, então o senhor será comido vivo."

    O colecionador ficou aflito. Mas ele, assim como o chefe da tribo, também sabia um pouco de Lógica. Então fez uma afirmação e foi libertado pelo chefe. Qual a afirmação feita por ele? Esta questão mostra que nem toda afirmação pode ser interpretada como verdadeira ou falsa, como ocorre na Lógica Proposicional clássica.

16. (Nem tudo é verdadeiro ou falso) Na Lógica Proposicional, as fórmulas são interpretadas como sendo verdadeiras ou falsas. Entretanto, há sentenças, escritas em português, que não são verdadeiras e nem falsas. Não é possível interpretar todos os fatos como verdadeiros ou falsos. Escreva uma sentença que não é verdadeira e nem falsa.

17. (Na terra dos honestos e mentirosos) Um turista estava andando pela terra dos homens honestos e mentirosos. Lá, as pessoas são radicais e se classificam em duas categorias. São perfeitamente honestas ou completamente mentirosas. Elas só falam mentiras ou só falam verdades.

    Chegou a hora do almoço e o turista se encontrava em uma encruzilhada à procura de um restaurante. Nessa encruzilhada havia duas estradas: uma para um restaurante e a outra para *"lugar-algum"*. Ali, havia também um homem nativo. Naturalmente, o turista não sabia se aquele homem era honesto ou mentiroso.

    Como o turista descobre o caminho para o restaurante fazendo uma única pergunta ao homem da encruzilhada?

18. (Trabalhadores, capitalistas e estudantes) O turista do exercício anterior continuou suas férias. Dessa vez ele estava em um país onde cada pessoa é classificada como trabalhador, capitalista ou estudante. Os trabalhadores são honestos e só falam a verdade. Os capitalistas, ao contrário, são desonestos e mentem sempre. Os estudantes agem como trabalhadores e capitalistas. Às vezes, são honestos, mas podem agir de forma desonesta também.

    Como no exercício anterior, chegou a hora do almoço, e o turista se encontrava em uma encruzilhada à procura de um restaurante. Nessa encruzilhada havia duas entradas: uma para um restaurante e a outra para um abismo. Ali, havia um trabalhador, um capitalista e um estudante.

    Apenas olhando para aqueles nativos não era possível ao turista identificá-los. Portanto, ele não sabia quem era honesto ou mentiroso.

    Como o turista descobriu o caminho para o restaurante fazendo apenas duas perguntas? Cada pergunta devia ser dirigida a uma única pessoa de cada vez, mas a pergunta pode ser repetida para mais de um indivíduo.

CAPÍTULO 3

PROPRIEDADES SEMÂNTICAS DA LÓGICA PROPOSICIONAL

3.1 Introdução

O que é contradição? E implicação? Responder essas questões é um problema complexo que sempre foi considerados pelos matemáticos e filósofos. Mas, se em um contexto amplo tais questões são difíceis, a solução é restringir tal contexto. Nesse caso, podemos considerar o escopo da Lógica Proposicional e analisar o que são os conceitos de contradição, implicação e outros. Observe que estamos falando de conceitos semânticos, ou seja, contradição, implicação e outros conceitos semânticos. Em outras palavras, estamos arguindo sobre conceitos que falam do significado de coisas e símbolos. Não das coisas, ou dos símbolos em si. Essa é uma das razões em distinguir os mundos semânticos e sintáticos. Diferenciar os símbolos da linguagem e os seus significados. Este capítulo considera a análise de algumas propriedades semânticas da Lógica Proposicional que relacionam os resultados das interpretações das fórmulas. Isto é, são propriedades semânticas, pois correspondem a relações obtidas no mundo semântico, mas a partir de fórmulas que pertencem ao mundo sintático. Entender essa relação entre semântica e sintaxe é importante e o estudo dessas relações, também denominado teoria dos modelos, é um dos enfoques centrais da Lógica [Marker], sendo essa, também, uma das principais razões da aplicação da Lógica à Computação e a outras áreas. No restante deste livro, analisamos essa relação sob vários pontos de vista, pois, são inúmeras as propriedades semânticas e seu estudo é um dos principais temas da Lógica. Isso, porque, como já dissemos, diferenciar os mundos sintático e semântico e entender suas relações é um importante tema, que tem aplicações nas mais variadas subáreas da lógica e da atuação humana em geral.

3.2 Tautologia

Podemos dizer que algo é verdadeiro sob certo ponto de vista. Ou dizer que é verdadeiro sob todos os pontos de vista. Nesse caso, se é verdadeiro sob todos os pontos de vista, é "muito" verdadeiro. Na Lógica Proposicional, quando uma fórmula tem essa propriedade, ou seja, é verdadeira sob todos os pontos de vista, dizemos que ela é uma tautologia.

Definição 3.1 (tautologia) *Seja H uma fórmula da Lógica Proposicional. Então:*

H é uma tautologia, se, e somente se, para toda interpretação I, $I[H] = T$.

Uma fórmula H é uma tautologia quando qualquer interpretação I interpreta H como sendo verdadeira. $I[H] = T$ para toda interpretação I. Observe que o conceito de tautologia é muito mais que o da veracidade, satisfatibilidade. Uma fórmula G pode ser verdadeira segundo uma interpretação J, isto é, $J[G] = T$, mas não ser uma tautologia.

Exemplo 3.1 (tautologia) A fórmula $H = (P \lor \neg P)$ é uma tautologia. Observe que para toda interpretação $I, I[H] = T$, pois:

Para toda interpretação I, $I[H] = T$
$\Leftrightarrow$ para toda interpretação I, $I[(P \lor \neg P)] = T$,
$\Leftrightarrow$ para toda interpretação I, $I[P] = T$ ou $I[\neg P] = T$,
$\Leftrightarrow$ para toda interpretação I, $I[P] = T$ ou $I[P] = F$.

Como I é uma função binária tal que $I[P] \in \{T, F\}$, então $I[P] = T$ ou $I[P] = F$. Portanto, a afirmação: "$I[P] = T$ ou $I[P] = F$" é verdadeira. Logo, para toda interpretação I, $I[H] = T$. Observe que independentemente do valor de verdade de $I[P]$, temos que $I[H] = T$. Neste sentido, a interpretação da tautologia H não depende da interpretação do símbolo proposicional P contido em H. Uma outra forma de mostrar que a fórmula anterior é uma tautologia é utilizando uma tabela-verdade. Considere a tabela-verdade associada a $(P \lor \neg P)$.

P	$\neg P$	$P \vee \neg P$
T	F	T
F	T	T

Tabela 3.1: Tabela-verdade associada a $(P \vee \neg P)$.

Observe que na coluna da fórmula $(P \vee \neg P)$ só temos o símbolo "T". Isso significa que para qualquer linha da tabela, a interpretação de $(P \vee \neg P)$ é verdadeira. E como cada linha representa uma interpretação, então, para toda interpretação, $(P \vee \neg P)$ é verdadeira. Nesse sentido, lembrando que cada linha da tabela corresponde a uma interpretação, apresentamos a seguir uma demonstração informal de que $(P \vee \neg P)$ é uma tautologia.

$(P \vee \neg P)$ é tautologia
$\Leftrightarrow$ para toda linha da tabela, $(P \vee \neg P)$ é verdadeira,
$\Leftrightarrow$ para toda linha da tabela, P é verdadeiro ou $\neg P$ é verdadeira,
$\Leftrightarrow$ para toda linha da tabela, P é verdadeiro ou P é falso.

Mas, como P é verdadeiro ou P é falso, então concluímos que para toda interpretação $I, I[H] = T$. Isto é, $(P \vee \neg P)$ é uma tautologia. A demonstração informal anterior pode ser escrita, utilizando notação matemática. Observe a correspondência entre essa demonstração informal e a demonstração apresentada anteriormente. ■

Observação: Na demonstração do Exemplo 3.1, consideramos o símbolo $\Leftrightarrow$. Esse símbolo não pertence à linguagem da Lógica Proposicional. Ele é um símbolo da metalinguagem, sendo denominado "se e somente se". Apesar da mesma denominação, o símbolo $\Leftrightarrow$ não deve ser confundido com o símbolo $\leftrightarrow$, que pertence à linguagem lógica.

Observação: Na demonstração do Exemplo 3.1, podemos denotar "para toda interpretação I", utilizando a notação matemática "$\forall\ I$". Com essa notação, a demonstração do Exemplo 3.1, fica mais compacta, como indicada a seguir:

$$\begin{aligned} \forall I, I[H] = T &\Leftrightarrow \forall\ I,\ I[(P \vee \neg P)] = T, \\ &\Leftrightarrow \forall\ I,\ I[P] = T \ ou\ I[\neg P] = T, \\ &\Leftrightarrow \forall\ I,\ I[P] = T \ ou\ I[P] = F. \end{aligned}$$

Compreender a notação matemática das demonstrações é um importante passo para o entendimento de demonstrações mais elaboradas. Nesse sentido, a demonstração apresentada no Exemplo 3.1, como as que se seguem neste livro, tem como objetivo apresentar o uso de notação matemática e o raciocínio envolvido em demonstrações simples. Entender o raciocínio e a notação utilizada nestas demonstrações é, talvez, mais relevante do que os resultados propriamente ditos.

O princípio do terceiro-excluído. O Exemplo 3.1 mostra que a fórmula $(P \vee \neg P)$ é uma tautologia. O fato de essa fórmula ser uma tautologia está relacionado a um importante princípio da Lógica, denominado princípio do terceiro-excluído: "dada uma proposição e sua negação, pelo menos uma delas é verdadeira." Observe que tal princípio não é válido em todas as situações. Se digo que não sou feliz, então não necessariamente sou infeliz. Mais uma vez, a Lógica Clássica simplifica a interpretação das sentenças e estabelece como um dos pontos de partida o princípio do terceiro-excluído.

Exemplo 3.2 (tautologia) Considere a fórmula H a seguir:

$$H = (P_1 \wedge P_2 \wedge P_3 \wedge Q) \rightarrow Q.$$

Este exemplo mostra que H é uma tautologia. Inicialmente, observamos que a demonstração pode ser feita utilizando tabela-verdade. Mas, como a fórmula contém 4 símbolos proposicionais, sua tabela-verdade possui 16 linhas. É certamente uma tabela grande. Por isso, demonstramos a seguir que H é uma tautologia sem a utilização da tabela-verdade. Observe as equivalências:

$$\begin{aligned} H \text{ é tautologia} \; &\Leftrightarrow \; \forall\, I,\; I[H] = T, \\ &\Leftrightarrow \; \forall\, I,\; I[(P_1 \wedge P_2 \wedge P_3 \wedge Q) \rightarrow Q] = T. \end{aligned}$$

Portanto, para demonstrar que H é tautologia, devemos demonstrar que para toda interpretação I, $I[(P_1 \wedge P_2 \wedge P_3 \wedge Q) \rightarrow Q] = T$. Conforme a tabela-verdade do conectivo $\rightarrow$, Tabela 3.2,

H	G	$H \rightarrow G$
T	T	T
T	F	F
F	T	T
F	F	T

Tabela 3.2: Tabela-verdade associada ao conectivo $\rightarrow$.

a única possibilidade de se ter $I[H] = F$ corresponde à segunda linha da tabela, sendo esse o caso em que $I[P_1 \wedge P_2 \wedge P_3 \wedge Q] = T$ e $I[Q] = F$. Mas, se $I[P_1 \wedge P_2 \wedge P_3 \wedge Q] = T$, então $I[Q] = T$. Com isso, concluímos que $I[Q] = T$ e $I[Q] = F$, o que é um absurdo, pois sabemos que o resultado da interpretação de um símbolo proposicional é, necessariamente, igual a T ou F. Mas, nunca igual a T e F ao mesmo tempo. Conclusão: H é uma tautologia. ■

3.3 Satisfatibilidade

Nas tabelas-verdade, nem sempre as colunas das fórmulas contêm apenas o símbolo T. Se você observar as tabelas mostradas até agora, verificará que há inúmeras fórmulas que possuem símbolos T e F em suas colunas. Isso significa que nem toda fórmula é uma tautologia. No caso em que há pelo menos um símbolo T na coluna de uma fórmula, dizemos que essa fórmula é satisfatível.

Definição 3.2 (satisfatibilidade) *Seja H uma fórmula da Lógica Proposicional. Então:*

H é uma fórmula satisfatível[1]*, se, e somente se, existe interpretação I, $I[H] = T$.*

Uma fórmula H é satisfatível se existe pelo menos uma interpretação I que interpreta H como sendo verdadeira. Isto é, $I[H] = T$ para alguma interpretação I. Observe, então, que toda tautologia é satisfatível, mas nem toda fórmula satisfatível é uma tautologia. Em outras palavras, satisfatibilidade é "menos" que tautologia. Isso, porque uma fórmula H pode ser verdadeira segundo uma interpretação I, mas não ser verdadeira segundo todas as interpretações.

Exemplo 3.3 (satisfatibilidade) As fórmulas $(\neg P \vee Q)$ e $(Q \wedge P)$ são satisfatíveis, mas não são tautologias. Nesse caso, há interpretações que interpretam tais fórmulas como verdadeiras. Entretanto, nem todas as interpretações as interpretam como verdadeiras. Observe a tabela-verdade.

P	Q	$\neg P$	$\neg P \vee Q$	$Q \wedge P$
T	T	F	T	T
T	F	F	F	F
F	T	T	T	F
F	F	T	T	F

Tabela 3.3: Tabela-verdade associada a fórmulas.

Uma prova, informal, de que $(Q \wedge P)$ é satisfatível é dada a seguir.

$(Q \wedge P)$ é satisfatível
$\Leftrightarrow$ existe interpretação I, tal que $I[(Q \wedge P)] = T$,
$\Leftrightarrow$ existe linha da tabela tal que $(Q \wedge P)$ é verdadeira,
$\Leftrightarrow$ existe linha da tabela tal que P é verdadeiro e Q é verdadeiro.

[1] O termo "factível" é também usualmente utilizado como sinônimo de "satisfatível".

Como na primeira linha da Tabela 3.3, temos P verdadeiro e Q verdadeiro, então existe linha da tabela que interpreta a fórmula como verdadeira. Logo, segue que $(Q \wedge P)$ é satisfatível. Podemos escrever essa prova de maneira mais formal, utilizando notação matemática.

$$\begin{aligned} (Q \wedge P) \text{ é satisfatível} &\Leftrightarrow \exists\, I;\ I[(Q \wedge P)] = T, \\ &\Leftrightarrow \exists\, I;\ I[Q] = T \text{ e } I[P] = T. \end{aligned}$$

Supondo, então, I como sendo a interpretação determinada pela primeira linha da Tabela 3.3, temos que $I[Q] = T$ e $I[P] = T$. Logo, existe interpretação que interpreta a fórmula como verdadeira. Portanto, $(Q \wedge P)$ é satisfatível. ■

Notação. Observe o ponto-e-vírgula da demonstração do exemplo anterior. Neste livro, o ponto-e-vírgula ";" é utilizado para representar o texto "tal que". Assim, a sentença $\exists\, I;\ I[(Q \wedge P)] = T$ equivale a "existe interpretação I, tal que $I[(Q \wedge P)] = T$".

Uma fórmula H é uma tautologia se, e somente se, toda interpretação a interpreta como sendo verdadeira. Por outro lado, uma fórmula G é satisfatível se, e somente se, alguma interpretação a interpreta como sendo verdadeira. Dessas definições, podemos concluir que se uma fórmula é uma tautologia, ela é satisfatível. Mas, se ela é satisfatível, então não necessariamente ela é uma tautologia. As proposições a seguir demonstram tais fatos.

Proposição 3.1 (tautologia e satisfatibilidade) *Dada uma fórmula H, temos:*

Se H é tautologia, então H é satisfatível.

Demonstração. Apresentamos duas demonstrações, uma informal e outra mais formal, com notação matemática. Primeiro a informal:

H é tautologia
$\Leftrightarrow$ para toda linha da tabela-verdade associada a H, temos H é verdadeira,
$\Rightarrow$ existe linha da tabela-verdade associada a H, tal que H é verdadeira,
$\Leftrightarrow$ H é satisfatível.

A demonstração correspondente, utilizando notação matemática é:

$$\begin{aligned} H \text{ é tautologia} &\Leftrightarrow \forall\, I,\ I[H] = T, \\ &\Rightarrow \exists\, I;\ I[H] = T, \\ &\Leftrightarrow H \text{ é satisfatível.} \end{aligned}$$

Observe que na segunda linha dessa demonstração aparece o símbolo "$\Rightarrow$". Isso ocorre porque:

$$\{\ \forall\, I,\ I[H] = T\ \} \text{ implica } \{\ \exists\, I,\ I[H] = T\}.$$

O inverso, porém, é falso. Ou seja:

$$\{\ \exists\, I,\ I[H] = T\ \} \text{ não implica } \{\ \forall\, I,\ I[H] = T\}.$$

E, por isso, é falso que, se H é satisfatível, então H é tautologia. **cqd**[2] ■

Observe, novamente, o que é importante. Na demonstração da Proposição 3.1, o símbolo "$\Leftrightarrow$" substitui o texto "se, e somente se,". É importante estar ciente de que não há relação entre os símbolos "$\Leftrightarrow$" e "$\leftrightarrow$". Apesar de possuírem denominações iguais, o símbolo "$\leftrightarrow$" pertence à sintaxe da Lógica. Por outro lado, o símbolo "$\Leftrightarrow$" é utilizado para relacionar elementos da semântica e pertence à metalinguagem. O conectivo "$\leftrightarrow$" é o "se, e somente se" da linguagem da Lógica, enquanto o símbolo "$\Leftrightarrow$" é o "se, e somente se" da metalinguagem. Ao longo deste livro, o símbolo "$\Leftrightarrow$" e o texto "se, e somente se" são utilizados indistintamente. Analogamente, o símbolo "$\Rightarrow$" substitui o texto "se ... então". Vale a pena enfatizar que não há relação entre os símbolos "$\Rightarrow$" e "$\rightarrow$." O símbolo "$\rightarrow$" pertence à sintaxe da Lógica e "$\Rightarrow$" é utilizado para relacionar elementos da semântica. O conectivo "$\rightarrow$" é o "se ... então" da sintaxe lógica, enquanto "$\Rightarrow$" é o "se ... então". da metalinguagem. Ao longo deste livro, o símbolo "$\Rightarrow$" e o texto "se ... então". são utilizados indistintamente. Observe, ainda, o esquema da demonstração da Proposição 3.1. Ela é feita a partir de passos elementares, que nesse caso são representados pela passagem de uma linha a outra. O que justifica a passagem de uma linha a outra é, geralmente, um raciocínio elementar, muitas vezes determinado por uma definição ou resultado obtido anteriormente.

Exemplo 3.4 (satisfatível) Conforme o Exemplo 3.2, a fórmula H a seguir é uma tautologia.

$$H = (P_1 \land P_2 \land P_3 \land Q) \rightarrow Q.$$

Entretanto, com apenas uma modificação, trocando Q por $\neg Q$ no consequente da implicação, a nova fórmula não é tautologia. A fórmula G a seguir não é uma tautologia, embora seja satisfatível.
$G = (P_1 \land P_2 \land P_3 \land Q) \rightarrow \neg Q$. Para demonstrar que G é satisfatível, basta definir uma interpretação I tal que $I[G] = T$. Considere, então, a interpretação I tal que, $I[Q] = F$. Nesse caso, $I[\neg Q] = T$. Logo, como o consequente da implicação de G é verdadeiro, então $I[G] = T$. Para demonstrar que G não é tautologia, devemos definir uma outra interpretação J tal que $J[G] = F$. Considere, então, a interpretação J tal que,

$$J[Q] = T,\ J[P_1] = T,\ J[P_2] = T,\ J[P_3] = T.$$

Nesse caso, $J[(P_1 \land P_2 \land P_3 \land Q)] = T$ e $J[\neg Q] = F$. Logo, como o antecedente da implicação de G é verdadeiro e o consequente é falso, então $J[G] = F$. Ou seja, G não é uma tautologia, pois existe uma interpretação que a interpreta como falsa. ■

[2]Seguindo a tradição dos textos matemáticos, escrevemos, ao final de cada demonstração, o termo **cqd**, que significa: "como queríamos demonstrar".

O conceito da satisfatibilidade, como definido até agora, é considerado somente para uma fórmula. Mas, tal conceito, também é definido para conjuntos de fórmulas.

Definição 3.3 (satisfatibilidade) *Seja β o conjunto de fórmulas da Lógica Proposicional. $\beta = \{H_1, H_2, \ldots, H_n, \ldots\}$. Então:*

$$\beta \text{ é satisfatível, se, e somente se, existe interpretação } I,$$

$$I[H_1] = T, I[H_2] = T, \ldots = I[H_n] = T, \ldots.$$

Por definição, um conjunto vazio de fórmulas é satisfatível.

Um conjunto de fórmulas $\{H_1, H_2 \ldots H_n, \ldots\}$ é satisfatível quando existe pelo menos uma interpretação I, que interpreta as fórmulas $H_1, H_2 \ldots H_n, \ldots$ como sendo iguais a T. Além disso, observe que o conjunto de fórmulas pode ser finito ou não. O conceito de satisfatibilidade é importante em Computação. Uma propriedade desejável dos programas lógicos, por exemplo, é que eles sejam conjuntos de fórmulas satisfatíveis. Isso significa que deve haver pelo menos uma interpretação que interpreta todas as fórmulas do programa como verdadeiras. Quando um conjunto de fórmulas não é satisfatível, dizemos que ele é insatisfatível.

Exemplo 3.5 (insatisfatibilidade) O conjunto de fórmulas $\{P, \neg P\}$ é insatisfatível, ou seja, ele não é satisfatível. Dada uma interpretação I, se $I[P] = T$, então $I[\neg P] = F$ e vice-versa. Isso significa que não é possível encontrar uma interpretação que interprete P e $\neg P$ como sendo todas iguais a T. Logo, o conjunto de fórmulas $\{P, \neg P, \}$ é insatisfatível. E isso está de acordo com nossa intuição, pois não se pode admitir a satisfatibilidade de conjunto de afirmações contraditórias, ou que se negam mutuamente. ■

Exemplo 3.6 (satisfatibilidade de conjunto de fórmulas) O conjunto de fórmulas

$$\{(P \to Q), (Q \to R), (R \to P)\}$$

é satisfatível. Isto ocorre porque existe uma interpretação I, tal que

$$I[P \to Q] = I[Q \to R] = I[R \to P] = T.$$

Basta escolher a interpretação I, tal que $I[P] = I[Q] = I[R] = F$. ■

Exemplo 3.7 (insatisfatibilidade) O conjunto de fórmulas:

$$\{\ (P \to Q),\ (Q \to R),\ (R \to S),\ (S \to P),\ \neg(S \to Q)\ \}$$

é insatisfatível. Suponha, por absurdo, que existe uma interpretação I, que interpreta todas as fórmulas do conjunto como verdadeiras. Mas:

$$\begin{aligned} I[\neg(S \to Q)] = T \ &\Leftrightarrow\ I[S \to Q] = F, \\ &\Leftrightarrow\ I[S] = T \ \text{ e } \ I[Q] = F. \end{aligned}$$

Temos também que: $I[P \rightarrow Q] = T \Leftrightarrow I[P] = F$ ou $I[Q] = T$. Dos dois conjuntos de equivalências anteriores, concluímos que, necessariamente, devemos ter: a) $I[S] = T$ e $I[Q] = F$ e b) $I[P] = F$ ou $I[Q] = T$. Portanto, como $I[Q] = F$, concluímos que devemos ter $I[P] = F$. Considere agora a quarta fórmula do conjunto. Nesse caso, $I[S \rightarrow P] = T \Leftrightarrow I[S] = F$ ou $I[P] = T$. Mas, como $I[P] = F$, concluímos que $I[S] = F$, o que é um absurdo pois já foi concluído anteriormente que $I[S] = T$. Observe que não é possível ter $I[S] = T$ e $I[S] = F$. Conclusão final: o conjunto de fórmulas é insatisfatível. Isto é, não é possível interpretar todas as suas fórmulas como verdadeiras ao mesmo tempo. ■

Proposição 3.2 (satisfatibilidade) *Considere o conjunto de fórmulas*

$$conteúdo.\{H_1,\ H_2,\ H_3\}$$

$$\{H_1, H_2, H_3\} \text{ é satisfatível, se, e somente se, } (H_1 \wedge (H_2 \wedge H_3)) \text{ é satisfatível.}$$

Demonstração. Temos que:

$$\begin{aligned}\{H_1, H_2, H_3\} \text{ é satisfatível} &\Leftrightarrow \exists\ I \text{ tal que } I[H_1] = I[H_2] = I[H_3] = T,\\ &\Leftrightarrow \exists\ I \text{ tal que } I[(H_1 \wedge (H_2 \wedge H_3))] = T,\\ &\Leftrightarrow (H_1 \wedge (H_2 \wedge H_3)) \text{ é satisfatível.}\end{aligned}$$

Portanto, $\{H_1, H_2, H_3\}$ é satisfatível, se, e somente se, $(H_1 \wedge (H_2 \wedge H_3)$ é satisfatível. **cqd**

3.4 Contingência

Dizer que existe pelo menos uma interpretação que interpreta H como verdadeira é o mesmo que dizer que H é satisfatível. Mas, se uma interpretação interpreta H como verdadeira, há duas possibilidades quanto ao restante das interpretações. 1) Todas elas também interpretam H como verdadeira. Nesse caso, H é uma tautologia. 2) Ou existe uma outra interpretação que interpreta H como falsa. Nesse caso, dizemos que H é uma contingência.

Definição 3.4 (contingência) *Seja H uma fórmula da Lógica Proposicional. Então:*

H é uma contingência, se, e somente se, existem interpretações I e J, tais que $I[H] = T$ e $J[H] = F$.

Exemplo 3.8 (contingências) As fórmulas $(P \rightarrow Q)$ e $(P \leftrightarrow Q)$ são contingências. Nesse caso, há interpretações que interpretam tais fórmulas como verdadeiras e como falsas. Observe a tabela-verdade.

P	Q	$P \rightarrow Q$	$P \leftrightarrow Q$
T	T	T	T
T	F	F	F
F	T	T	F
F	F	T	T

Tabela 3.4: Tabela-verdade associada a fórmulas.

Uma prova, informal, de que $(P \rightarrow Q)$ é uma contingência é dada a seguir.

$(P \rightarrow Q)$ é uma contigência
$\Leftrightarrow$ existem duas interpretações $I,\ J;\ I[(P \rightarrow Q)] = T$ e $J[(P \rightarrow Q)] = F$,
$\Leftrightarrow$ existem duas linhas na tabela tais que numa $(P \rightarrow Q)$ é verdadeira e na outra ela é falsa.

Na primeira linha da Tabela 3.4, temos P verdadeiro e Q verdadeiro. Segue que $(P \rightarrow Q)$ é verdadeira. Na segunda linha, temos P verdadeiro e Q falso. Segue que $(P \rightarrow Q)$ é falsa. Portanto, existem duas linhas na tabela, uma que interpreta a fórmula como verdadeira e a outra, como falsa. Logo, segue que $(P \rightarrow Q)$ é uma contingência. Utilizando notação matemática, temos:

$(P \rightarrow Q)$ é uma contigência $\Leftrightarrow\ \exists\ I,\ J;\ \ I[(P \rightarrow Q)] = T$ e $J[(P \rightarrow Q)] = F$.
Considere, $I[P] = T,\ I[Q] = T,\ J[P] = T$, e $J[Q] = F$.
Nesse caso, temos, $I[(P \rightarrow Q)] = T$ e $J[(P \rightarrow Q)] = F$.

Portanto, como $I[(P \rightarrow Q)] = T$ e $J[(P \rightarrow Q)] = F$, concluímos que $(P \rightarrow Q)$ é uma contigência. ■

A Proposição 3.1 relaciona as propriedades semânticas tautologia e satisfatibilidade. Analogamente, podemos relacionar contingência com tautologia e satisfatibilidade.

Proposição 3.3 (contingência e tautologia) *Dada uma fórmula H, temos:*

Se H é tautologia, então H não é uma contingência.

Demonstração. Observe a demonstração informal:

H é tautologia $\Leftrightarrow$ para toda linha da tabela-verdade associada a H, temos H é verdadeira,
$\Leftrightarrow$ não existe linha da tabela-verdade associada a H, tal que H é falsa,
$\Rightarrow$ H não é contingência.

A demonstração correspondente, utilizando notação matemática, é:

$$\begin{aligned} H \text{ é tautologia} &\Leftrightarrow \ \forall\, I,\ I[H] = T, \\ &\Leftrightarrow \ \nexists\, I;\ I[H] = F, \\ &\Rightarrow \ H \text{ não é contingência.} \end{aligned}$$

Observe que na última linha dessa demonstração aparece o símbolo "$\Rightarrow$". Isso ocorre porque a afirmação a seguir é verdadeira.

"$\{\ \nexists\, I,\ I[H] = F\ \}$ implica $\{\ H$ não é contingência. $\}$"

O inverso dessa afirmação, porém, é falsa. Isto é, a afirmação a seguir é falsa:

"$\{\ H$ não é contingência $\}$ implica $\{\ \nexists\, I,\ I[H] = F\ \}$"

Por isso, é falso que se H não é contingência, então H é tautologia. **cqd** ■

Concluindo, é verdadeiro que "se H é tautologia, então H não é contingência." Mas, é falso que "se H não é contingência, então H é tautologia." Portanto, existe fórmula H que não é contingência e que também não é tautologia.

Exemplo 3.9 (contingência e tautologia) A fórmula $(P \wedge \neg P)$ não é uma contingência e, muito menos, uma tautologia. Observe a Tabela 3.5.

P	$P \wedge \neg P$
T	F
F	F

Tabela 3.5: Tabela-verdade associada a $P \wedge \neg P$.

A fórmula $(P \wedge \neg P)$ não é uma contingência porque não existe nenhuma linha da tabela que a interprete como verdadeira. Isto é, não existe interpretação I tal que $I[(P \wedge \neg P)] = T$. Por outro lado, é falso que todas as linhas da tabela interpretam a fórmula como verdadeira. Isto é, é falso que para toda interpretação I, $I[(P \wedge \neg P)] = F$. Logo, $(P \wedge \neg P)$ não é uma tautologia. A fórmula $(P \wedge \neg P)$ explicita o fato de a afirmação

"se H não é contingência, então H é tautologia"

ser falsa. Nesse sentido, dizemos que a fórmula $(P \wedge \neg P)$ é um contraexemplo para tal afirmação. Em outras palavras, a fórmula $(P \wedge \neg P)$ é um exemplo que mostra a falsidade da afirmação "se H não é contingência, então H é tautologia." ■

Consideramos agora a relação entre contingência e satisfatibilidade.

Proposição 3.4 (contingência e satisfatibilidade) *Dada uma fórmula H, temos:*

Se H é contingência, então H é satisfatível.

Demonstração. Observe a demonstração informal:

H é contingência $\Leftrightarrow$ existem duas linhas na tabela-verdade associada a H, tal que uma interpreta H como verdadeira e a outra como falsa,
$\Rightarrow$ existe linha da tabela-verdade associada a H, tal que H é verdadeira,
$\Leftrightarrow$ H é satisfatível.

A demonstração correspondente, utilizando notação matemática, é:

H é contingência $\Leftrightarrow \exists\ I,\ J;\ I[H] = T$ e $J[H] = F$,
$\Rightarrow \exists\ I;\ I[H] = T$,
$\Leftrightarrow$ H é satisfatível. **cqd** ■

Observe que na penúltima linha da demonstração da Proposição 3.4 aparece o símbolo "$\Rightarrow$". Isso ocorre porque a afirmação a seguir é verdadeira.

"$\{\ \exists\ I,\ J;\ I[H] = T$ e $J[H] = F\ \}$ implica $\{\ \exists\ I;\ I[H] = T\ \}$."

O inverso dessa afirmação, porém, é falsa. Isto é, a afirmação a seguir é falsa.

"$\{\ \exists\ I;\ I[H] = T\ \}$ implica $\{\ \exists\ I,\ J;\ I[H] = T$ e $J[H] = F\ \}$."

Portanto, é falso que se H é satisfatível, então H é contingência.

Exemplo 3.10 (contraexemplo) Este exemplo define um contraexemplo para a afirmação

"$\{\ \exists\ I;\ I[H] = T\ \}$ implica $\{\ \exists\ I,\ J;\ I[H] = T$ e $J[H] = F\ \}$."

Ou seja, se H é satisfatível, então não necessariamente H é uma contingência. A fórmula $(P \lor \neg P)$ é um contraexemplo para a referida afirmação. Observe a Tabela 3.6.

P	$P \lor \neg P$
T	T
F	T

Tabela 3.6: Tabela-verdade associada a $P \lor \neg P$.

A fórmula $(P \lor \neg P)$ é satisfatível, pois existe linha da tabela que a interpreta como verdadeira. Isto é, existe interpretação I tal que $I[(P \lor \neg P)] = T$. Por outro lado, é falso que existe linha na tabela que interpreta a fórmula como falsa. Ou seja, é falso que existe interpretação I, $I[(P \lor \neg P)] = F$. Logo, $(P \lor \neg P)$ não é uma contingência. Portanto, a fórmula $(P \lor \neg P)$ é um contraexemplo para a afirmação: "se H é satisfatível, então H é uma contingência." ■

3.5 Contradição semântica

Como visto no Exemplo 3.9, a fórmula $(P \wedge \neg P)$ é interpretada somente como falsa. Isto é, para toda interpretação I, temos que $I[(P \wedge \neg P)] = F$. As fórmulas que possuem essa propriedade são denominadas contraditórias.

Definição 3.5 (contradição) *Seja H uma fórmula da Lógica Proposicional. Então:*

H é uma contradição semântica, se, e somente se, para toda interpretação I, $I[H] = F$.

Uma fórmula H é uma contradição quando qualquer interpretação I interpreta H como sendo falsa. Ou seja, $I[H] = F$ para toda interpretação I. Observe que o conceito de contradição é o "oposto" de tautologia. Isto é, uma fórmula H é contraditória se, e somente se, $(\neg H)$ é tautologia.

Proposição 3.5 (tautologia e contradição) *Dada uma fórmula H, temos:*

H é contraditória, se, e somente se, $\neg H$ é tautologia.

Demonstração. A demonstração informal:

H é contraditória $\Leftrightarrow$ para toda linha da tabela-verdade associada a H, temos que H é falsa,
$\Leftrightarrow$ para toda linha da tabela-verdade associada a H, temos que $\neg H$ é verdadeira,
$\Leftrightarrow$ $\neg H$ é tautologia.

A demonstração correspondente, utilizando notação matemática, é:

$$
\begin{aligned}
H \text{ é contraditória} &\Leftrightarrow \forall\, I,\ I[H] = F,\\
&\Leftrightarrow \forall\, I,\ I[\neg H] = T,\\
&\Leftrightarrow \neg H \text{ é tautologia.}
\end{aligned}
$$

cqd ■

Exemplo 3.11 (contradição) Como a fórmula $(P \vee \neg P)$ é uma tautologia, então $\neg(P \vee \neg P)$ é contraditória. Observe que para toda interpretação $I, I[\neg(P \vee \neg P)] = F$. Conforme a Tabela 3.5, a fórmula $(P \wedge \neg P)$ é contraditória, pois na sua coluna só temos o símbolo F. Analogamente, $(Q \wedge \neg Q)$ também é uma contradição. Considere, então, a fórmula H a seguir. $H = (P \vee \neg P) \rightarrow (Q \wedge \neg Q)$. A fórmula H é uma contradição, pois:

$$
\begin{aligned}
H \text{ é contraditória} &\Leftrightarrow \forall\, I,\ I[H] = F,\\
&\Leftrightarrow \forall\, I,\ I[(P \vee \neg P) \rightarrow (Q \wedge \neg Q)] = F,\\
&\Leftrightarrow \forall\, I,\ I[(P \vee \neg P) = T \ \text{ e } \ I[(Q \wedge \neg Q)] = F.
\end{aligned}
$$

Como a última afirmação da sequência de equivalências é verdadeira, então a primeira afirmação também é verdadeira. Ou seja, como é verdadeiro que

$\forall\ I,\ I[(P \lor \neg P) = T$ e $I[(Q \land \neg Q)] = F$,

então também é verdadeiro que H é contraditória. Considere agora a fórmula: $(P \to Q) \leftrightarrow \neg(\neg P \lor Q)$. Essa fórmula é contraditória, o que é verificado pela Tabela 3.7, pois na sua coluna somente temos o símbolo F.

P	Q	$\neg P$	$P \to Q$	$\neg P \lor Q$	$\neg(\neg P \lor Q)$	$(P \to Q) \leftrightarrow \neg(\neg P \lor Q)$
T	T	F	T	T	F	F
T	F	F	F	F	T	F
F	T	T	T	T	F	F
F	F	T	T	T	F	F

Tabela 3.7: Tabela-verdade associada a $(P \to Q) \leftrightarrow \neg(\neg P \lor Q)$.

Como a fórmula $(P \to Q) \leftrightarrow \neg(\neg P \lor Q)$ é uma contradição, então pela Proposição 3.5, temos que a fórmula $\neg((P \to Q) \leftrightarrow \neg(\neg P \lor Q))$ é uma tautologia. ■

O princípio da não contradição. O Exemplo 3.11 mostra que a fórmula $(P \land \neg P)$ é uma contradição. Como no caso do princípio do terceiro-excluído, o fato dessa fórmula ser uma contradição está relacionado a um importante princípio da Lógica, denominado princípio da não contradição: "uma proposição e sua negação não podem ser verdadeiras para a mesma interpretação." Esse princípio não é válido em todas as situações. E existem lógicas, como a Paraconsistente, na qual o princípio da não contradição é desconsiderado.

Proposição 3.6 (contradição e satisfatibilidade) .
Dada uma fórmula H, temos:

H não é satisfatível, se, e somente se, H é contraditória.

Demonstração. A demonstração informal:

H não é satisfatível $\Leftrightarrow$ não existe linha da tabela-verdade associada a H, tal que H é verdadeira,
$\Leftrightarrow$ para toda linha da tabela-verdade associada a H, temos que H é falsa,
$\Leftrightarrow$ H é contraditória.

A demonstração correspondente, utilizando notação matemática, é:

H não é satisfatível $\Leftrightarrow \nexists\ I;\ I[H] = T$,
$\Leftrightarrow \forall\ I,\ I[H] = F$,
$\Leftrightarrow$ H é contraditória. **cqd** ■

3.6 Equivalência semântica

Se você é um bom observador, verificou que na Tabela 3.7, as colunas das fórmulas $(P \rightarrow Q)$ e $(\neg P \vee Q)$ são idênticas. Isso significa que, do ponto de vista semântico, elas são equivalentes.

Definição 3.6 (equivalência) *Sejam H e G duas fórmulas da Lógica Proposicional. Então:*

H e G são semanticamente equivalentes[3]*, se, e somente se,*
para toda interpretação I, $I[H] = I[G]$.

Nota. Neste livro, quando o contexto está claro, utilizamos indistintamente denominações como "equivalência", "equivalência semântica" e "equivalência lógica semântica". Duas fórmulas H e G são equivalentes se para qualquer interpretação I, as interpretações de H e G coincidem. Em outras palavras, $I[H] = I[G]$ para toda interpretação I. Isso significa que na tabela-verdade associada às fórmulas H e G, suas colunas são idênticas. Observe, ainda, que o conceito de equivalência não é "igual" ao de igualdade. Isto é, duas fórmulas podem ser equivalentes, mas diferentes. Por outro lado, é claro, que duas fórmulas iguais são equivalentes.

Exemplo 3.12 (equivalência) Conforme a Tabela 3.7, as fórmulas $(P \rightarrow Q)$ e $(\neg P \vee Q)$ são equivalentes, pois suas colunas são idênticas. Portanto, temos duas fórmulas diferentes que são equivalentes. ■

Muitas vezes, dizemos que dois conceitos são equivalentes se possuem interpretações iguais. Os conceitos podem até ser diferentes, porém, se são equivalentes, são interpretados igualmente. Nesse sentido, se dois conceitos são equivalentes, então o primeiro é verdadeiro se, e somente se, o segundo é verdadeiro. Analogamente, sabemos que a fórmula $(H \leftrightarrow G)$ é verdadeira, se as interpretações de H e G coincidem. De tudo isso, podemos concluir que a equivalência semântica, conforme a Definição 3.6, entre H e G ocorre se, e somente se, $(H \leftrightarrow G)$ é uma tautologia. Ou seja, há uma relação entre a equivalência semântica e o conectivo $\leftrightarrow$. Essa relação é analisada na Proposição 3.7.

Proposição 3.7 (equivalência e $\leftrightarrow$) *Dadas duas fórmulas H e G, temos:*

H é equivalente a G se, e somente se, $(H \leftrightarrow G)$ é tautologia.

Demonstração. A demonstração informal:

[3]A equivalência semântica na Lógica Proposicional é também, usualmente, denominada equivalência tautológica.

$$
\begin{aligned}
H \text{ é equivalente a } G \Leftrightarrow\ & \text{para toda linha da tabela-verdade associada a } H \text{ e } G, \\
& \text{as suas colunas coincidem,} \\
\Leftrightarrow\ & \text{para toda linha da tabela-verdade associada a } H \text{ e } G, \\
& H \text{ e } G \text{ são interpretadas igualmente,} \\
\Leftrightarrow\ & \text{para toda linha da tabela-verdade associada a } H \text{ e } G, \\
& (H \leftrightarrow G) \text{ é interpretada como sendo verdadeira,} \\
\Leftrightarrow\ & (H \leftrightarrow G) \text{ é tautologia.}
\end{aligned}
$$

A demonstração correspondente, utilizando notação matemática:

$$
\begin{aligned}
H \text{ é equivalente a } G \Leftrightarrow\ & \forall\, I,\ I[H] = I[G], \\
\Leftrightarrow\ & \forall\, I,\ I[H \leftrightarrow G] = T, \\
\Leftrightarrow\ & (H \leftrightarrow G) \text{ é tautologia. } \textbf{cqd} \ \blacksquare
\end{aligned}
$$

Cuidado com a Proposição 3.7. Ela parece nos dizer que o conceito de equivalência semântica coincide exatamente com a interpretação do conectivo sintático $\leftrightarrow$. Isso é verdade na Lógica Proposicional, como foi demonstrado na proposição. Entretanto, na lógica, as coisas não são tão simples assim. E nem sempre o conceito semântico de equivalência coincide, ou é representado ou capturado, de forma exata pelo conectivo sintático $\leftrightarrow$. Uma análise desse fato pode ser encontrada em [Smith]. Mas, como este livro é apenas introdutório, tal análise não é tratada no presente texto. Entretanto, vale a pena lembrar que é necessário definir o conceito semântico de equivalência, conforme a Definição 3.6. Além disso, tal conceito semântico não coincide com o conceito sintático representado pelo conectivo $\leftrightarrow$.

Exemplo 3.13 (equivalência) Este exemplo explica as Leis de De Morgan, que são estabelecidas a partir da equivalência de fórmulas.

Leis de De Morgan As Leis de De Morgan são definidas pelos pares de fórmulas equivalentes.

1. $\neg(P \vee Q)$ equivale a $(\neg P \wedge \neg Q)$,
2. $\neg(P \wedge Q)$ equivale a $(\neg P \vee \neg Q)$.

A Tabela 3.8 mostra que as fórmulas

$$\neg(P \vee Q) \text{ e } (\neg P \wedge \neg Q)$$

são equivalentes, pois suas colunas são idênticas.

P	Q	$\neg P$	$\neg Q$	$P \vee Q$	$\neg(P \vee Q)$	$\neg P \wedge \neg Q$
T	T	F	F	T	F	F
T	F	F	T	T	F	F
F	T	T	F	T	F	F
F	F	T	T	F	T	T

Tabela 3.8: Tabela-verdade associada a $(P \rightarrow Q) \leftrightarrow \neg(\neg P \vee Q)$.

De forma análoga, a Tabela 3.9 mostra que as fórmulas $\neg(P \wedge Q)$ e $(\neg P \vee \neg Q)$ são equivalentes, pois suas colunas são idênticas.

P	Q	$\neg P$	$\neg Q$	$P \wedge Q$	$\neg(P \wedge Q)$	$\neg P \vee \neg Q$
T	T	F	F	T	F	F
T	F	F	T	F	T	T
F	T	T	F	F	T	T
F	F	T	T	F	T	T

Tabela 3.9: Tabela-verdade associada a $(P \rightarrow Q) \leftrightarrow \neg(\neg P \vee Q)$.

Frequentemente, as pessoas que começam a estudar Lógica imaginam que é possível demonstrar tudo utilizando tabelas-verdade. Entretanto, isso é falso. Na verdade, somente alguns resultados elementares podem ser demonstrados utilizando tabelas-verdade. E, na maioria dos casos, temos que utilizar raciocínios matemáticos para demonstrar as propriedades da Lógica. Por causa disso, insistimos em apresentar demonstrações que não utilizam tabelas-verdades. A seguir, demonstramos a primeira lei de De Morgan sem o uso de tabela-verdade.

$\neg(P \vee Q)$ equivale a $(\neg P \wedge \neg Q)$

$$
\begin{aligned}
&\Leftrightarrow \ \forall\, I,\ I[\neg(P \vee Q)] = I[\neg P \wedge \neg Q],\\
&\Leftrightarrow \ \{\forall\, I,\ I[\neg(P \vee Q)] = F, \Leftrightarrow\ I[\neg P \wedge \neg Q] = F\},\\
&\Leftrightarrow \ \{\forall\, I,\ I[P \vee Q] = T, \Leftrightarrow\ \{I[\neg P] = F \ \text{ ou } \ I[\neg Q] = F\}\},\\
&\Leftrightarrow \ \{\forall\, I,\ I[P \vee Q] = T, \Leftrightarrow\ I[P] = T \ \text{ ou } \ I[Q] = T\}.
\end{aligned}
$$

Observe que a última afirmação das equivalências anteriores, que é indicada a seguir, é verdadeira.

$$\{\forall\, I,\ I[P \vee Q] = T \ \Leftrightarrow\ I[P] = T \ \text{ ou } \ I[Q] = T\}$$

Isto é, para toda interpretação I, se $I[P \vee Q] = T$, então $I[P] = T$ ou $I[Q] = T$. E, por outro lado, também para toda interpretação I, se $I[P] = T$ ou $I[Q] = T$, então $I[P \vee Q] = T$. Portanto, é verdadeira a última afirmação do conjunto de equivalências anteriores. Logo, a primeira afirmação desse conjunto também é verdadeira, pois, é claro, ela equivale à primeira. Ou seja, é verdadeiro que $\neg(P \vee Q)$ equivale a $(\neg P \wedge \neg Q)$. ■

Exemplo 3.14 (implicação e conjunção) Dadas três fórmulas A, B e C, então:

$$(A \rightarrow (B \rightarrow C)) \text{ equivale a } ((A \wedge B) \rightarrow C).$$

A demonstração da equivalência anterior é imediata, a partir da Tabela 3.10. Observe que as colunas das fórmulas $(A \rightarrow (B \rightarrow C))$ e $((A \wedge B) \rightarrow C)$ coincidem.

A	B	C	$A \to (B \to C)$	$(A \wedge B) \to C$
T	T	T	T	T
T	T	F	F	F
T	F	T	T	T
T	F	F	T	T
F	T	T	T	T
F	T	F	T	T
F	F	T	T	T
F	F	F	T	T

Tabela 3.10: Tabela-verdade associada às fórmulas $(A \to (B \to C))$ e $((A \wedge B) \to C)$. ■

3.7 Implicação semântica

Muitos até dizem que entender a implicação semântica é o fundamento mágico para compreender a Matemática e suas demonstrações. Porém, isso não ocorre apenas na Matemática. O raciocínio da implicação é importante até para os cachorros. Imagine a história[4]: Um cão quer ir pra casa e chega a uma encruzilhada com três estradas. Cada estrada chega a um rio e do outro lado está a casa do cão. No rio, no final de cada estrada, há uma ponte. Mas, sempre temos duas pontes fechadas e uma aberta. O cão sabe dessas coisas e também que uma das estrada o leva até uma ponte aberta e, portanto, à sua casa. Entretanto, como não sabe qual ponte está aberta, ele dá uma farejada e escolhe uma estrada aleatoriamente e caminha por ela. Chega ao fim da estrada e a ponte está fechada. Ele volta à encruzilhada, dá outra farejada e escolhe outra estrada. De novo, chega ao fim da estrada, no rio, e encontra a ponte fechada. Então, volta à encruzilhada e automaticamente, sem farejar, segue pela estrada que ainda não tinha sido escolhida e vai feliz pra casa. Que princípio segue o cão? Ele, que é inteligente, tem na cabeça uma implicação semântica do tipo: Ou bem a primeira, a segunda, ou a terceira; não a primeira; não a segunda; portanto, a terceira. Isto é, ele sabe que as afirmações:

1. Ou bem a primeira, a segunda, ou a terceira,
2. Não a primeira,
3. Não a segunda,

implicam semanticamente a afirmação:

4. Portanto, a terceira.

[4]Essa história foi apresentada pelo Grego Crísipo, por volta do ano de 380 a.C.

Em outras palavras, o cão sabe que se as afirmações 1, 2 e 3 são verdadeiras, então a afirmação 4 é verdadeira. Como o cão que é inteligente, certamente sua namorada, ou namorado, também sabe disso. Essa ideia é formalizada na Definição 3.7.

Definição 3.7 (implicação semântica) *Sejam H e G duas fórmulas da Lógica Proposicional. Então:*

H implica semanticamente[5] *G se, e somente se,*
para toda interpretação I, se $I[H] = T$, então $I[G] = T$.

Nesse caso, dizemos também que G é uma consequência lógica semântica de H.

A Definição 3.7 estabelece as condições para que H implique semanticamente G. Isso ocorre quando para toda interpretação I temos o seguinte: se $I[H] = T$, então $I[G] = T$. Observe que a definição não diz que para toda interpretação I, $I[H] = I[G]$, ou que $I[H] = T$ e $I[G] = T$. Fique atento quanto a essas diferenças, pois, frequentemente, os iniciantes no estudo da Lógica cometem erros devido a essas confusões.

Nota. Neste livro, quando o contexto está claro, utilizamos, indistintamente, denominações como " implicação," "implicação semântica" e "consequência lógica semântica".

Portanto, H implica G equivale dizer que:
para toda interpretação I, se (observe o "se") I interpreta H como T,
então (observe o "então"), I interpreta G como sendo T.

Devemos enfatizar que isso não significa que, para toda interpretação I, as interpretações de H e G, segundo I, são iguais a T. Além disso, caso H implica G, então quando $I[H] = F$ nada pode ser dito sobre $I[G]$. Isto é, nada se pode concluir a respeito de $I[G]$ no caso em que $I[H] = F$. Ou seja, se H implica G e $I[H] = F$, então podemos ter $I[G] = T$ ou $I[G] = F$.

Exemplo 3.15 (implicação semântica) Considere as fórmulas $((P \wedge Q) \vee Q)$ e $(P \rightarrow Q)$. As relações de implicação semântica entre tais fórmulas são analisadas a seguir.

P	Q	$(P \wedge Q) \vee Q$	$P \rightarrow Q$
T	T	T	T
T	F	F	F
F	T	T	T
F	F	F	T

Tabela 3.11: Tabela-verdade associada às fórmulas $((P \wedge Q) \vee Q)$ e $(P \rightarrow Q)$.

[5]A implicação semântica na Lógica Proposicional é também, usualmente, denominada como implicação tautológica.

Implicação. Temos que $((P \land Q) \lor Q)$ implica $(P \to Q)$. Conforme a Tabela 3.11, se o símbolo T ocorre na coluna da fórmula $((P \land Q) \lor Q)$, então T também ocorre na coluna da fórmula $(P \to Q)$. Isto é, para toda linha da Tabela 3.11, se $((P \land Q) \lor Q)$ é verdadeira, então $(P \to Q)$ é verdadeira. Entretanto, nas linhas em que $((P \land Q) \lor Q)$ é falsa, podemos ter $(P \to Q)$ verdadeira ou falsa. Na segunda linha, por exemplo, $((P \land Q) \lor Q)$ e $(P \to Q)$ são falsas. Na quarta linha, porém, $((P \land Q) \lor Q)$ é falsa e $(P \to Q)$ é verdadeira. Podemos provar a implicação entre essas fórmulas sem o uso da Tabela 3.11.

$$\begin{aligned} ((P \land Q) \lor Q) \text{ implica } (P \to Q), \Leftrightarrow\ & \forall\, I, \\ & \text{se } \ I[(P \land Q) \lor Q] = T \\ & \text{então } \ I[P \to Q] = T. \end{aligned}$$

Portanto, para demonstrar que $((P \land Q) \lor Q)$ implica $(P \to Q)$ devemos provar que para toda interpretação I, se $I[(P \land Q) \lor Q] = T$ então $I[P \to Q] = T$. Suponha, então, que $I[(P \land Q) \lor Q] = T$. Desse fato, concluímos as implicações.

$$\begin{aligned} I[(P \land Q) \lor Q] = T \ &\Rightarrow\ I[P \land Q] = T \ \text{ ou } \ I[Q] = T, \\ &\Rightarrow\ \{\ I[P] = T \ \text{ e } \ I[Q] = T\ \} \ \text{ ou } \ I[Q] = T. \end{aligned}$$

No caso em que $I[P] = T$ e $I[Q] = T$, temos que $I[P \to Q] = T$. Da mesma forma, se $I[Q] = T$, então $I[P \to Q] = T$. Portanto:

$$\begin{aligned} I[(P \land Q) \lor Q] = T \ &\Rightarrow\ I[P \land Q] = T \ \text{ ou } \ I[Q] = T, \\ &\Rightarrow\ \{\ I[P] = T \ \text{ e } \ I[Q] = T\ \} \ \text{ ou } \ I[Q] = T, \\ &\Rightarrow\ I[P \to Q] = T. \end{aligned}$$

E o resumo das implicações anteriores é que

se $I[(P \land Q) \lor Q] = T$ e $I[(P \land Q)] = T$ então $I[P \to Q] = T$.

E, portanto, $\{\ ((P \land Q) \lor Q),\ (P \land Q)\ \}$ implica $P \to Q$. **cqd** ■

Nota. Na demonstração anterior, aparece o símbolo $\Rightarrow$, que é denominado "implica". Esse símbolo pertence à metalinguagem e não deve ser confundido com o símbolo $\to$, que possui a mesma denominação, mas pertence à linguagem da Lógica.

Não implicação. Temos que $(P \to Q)$ não implica $((P \land Q) \lor Q)$. Inicialmente, observe a definição de não implicação. Tal definição é a negação da definição de implicação, Definição 3.7.

Definição 3.8 (não implicação semântica) *Sejam H e G duas fórmulas da Lógica Proposicional. Então:*

H não implica semanticamente G se, e somente se,
existe interpretação I, tal que $I[H] = T$ e $I[G] = F$.

Compare as Definições 3.7 e 3.8. Certifique-se de que uma é a negação da outra. Pela Definição 3.8, para demonstrar que $(P \to Q)$ não implica $((P \land Q) \lor Q)$, devemos encontrar uma interpretação que interpreta $(P \rightarrow Q)$ como verdadeira e $((P \wedge Q) \vee Q)$ como falsa. Conforme a Tabela 3.11, na última linha temos o símbolo T na coluna da fórmula $(P \rightarrow Q)$ e o símbolo F na coluna da fórmula $((P \wedge Q) \vee Q)$. Isto é, para a interpretação definida pela última linha, temos $(P \rightarrow Q)$ verdadeira e $((P \wedge Q) \vee Q)$ falsa. Portanto, $(P \rightarrow Q)$ não implica $((P \wedge Q) \vee Q)$. Podemos provar essa não implicação entre essas fórmulas sem o uso da Tabela 3.11.

$$\begin{aligned} (P \rightarrow Q) \text{ não implica } ((P \wedge Q) \vee Q) \Leftrightarrow\ & \exists\, I \ \text{ tal que} \\ & I[P \rightarrow Q] = T \text{ e } \ I[(P \wedge Q) \vee Q] = F. \end{aligned}$$

Assim, para demonstrar que $(P \rightarrow Q)$ não implica $((P \wedge Q) \vee Q)$, devemos encontrar uma interpretação I, tal que $I[P \rightarrow Q] = T$ e $I[(P \wedge Q) \vee Q] = F$. Considere a interpretação I tal que, $I[P] = F$ e $I[Q] = F$. Para essa interpretação, temos $I[P \rightarrow Q] = T$ e $I[(P \wedge Q) \vee Q] = F$. Portanto, $(P \rightarrow Q)$ não implica $((P \wedge Q) \vee Q)$. ■

Exemplo 3.16 (implicação semântica) Este exemplo mostra que

$$P \text{ implica } (P \vee Q).$$

Segue a demonstração:

$$\begin{aligned} P \text{ implica } (P \vee Q) \Leftrightarrow\ & \forall\, I, \\ & \text{se } \ I[P] = T \\ & \text{então } \ I[P \vee Q] = T. \end{aligned}$$

Como é evidente que se $I[P] = T$, então $I[P \vee Q] = T$, concluímos que P implica $(P \vee Q)$. Por outro lado, conforme a Tabela 3.12, a fórmula $(P \rightarrow (P \vee Q))$ é uma tautologia. Observe que na coluna dessa fórmula somente temos o símbolo T.

P	Q	$P \vee Q$	$P \rightarrow (P \vee Q)$
T	T	T	T
T	F	T	T
F	T	T	T
F	F	F	T

Tabela 3.12: Tabela-verdade associada à fórmula $(P \rightarrow (P \vee Q))$.

Conclusão: P implica $(P \vee Q)$. Além disso, $(P \rightarrow (P \vee Q))$ é tautologia. Desse exemplo, temos a indicação de uma equivalência verdadeira:
H implica G se, e somente se, $(H \rightarrow G)$ é uma tautologia.
Uma equivalência análoga àquela demonstrada na Proposição 3.7:
H é equivalente a G se, e somente se, $(H \leftrightarrow G)$ é tautologia. ■

O que significa dizer que um conceito implica outro? Dizemos que isso ocorre sempre que a partir da veracidade do primeiro, concluímos a veracidade do segundo. Nesse sentido, se um conceito implica outro, então se o primeiro é verdadeiro, concluímos que o segundo também é verdadeiro. Analogamente, para a fórmula $(H \rightarrow G)$ ser verdadeira, é necessário que quando H for verdadeiro, então G também o seja. Como no caso da equivalência semântica, podemos concluir que a implicação semântica, conforme a Definição 3.7, entre H e G ocorre se, e somente se, $(H \rightarrow G)$ é uma tautologia. Ou seja, há uma relação entre a implicação semântica e o conectivo $\rightarrow$. Essa relação é analisada na Proposição 3.8.

Proposição 3.8 (equivalência e $\rightarrow$) *Dadas duas fórmulas H e G, temos:*

H implica G, se, e somente se, $(H \rightarrow G)$ é tautologia.

Demonstração. A demonstração informal:

H implica G $\Leftrightarrow$ para toda linha da tabela-verdade associada a H e G, se a coluna de H contém T, então a coluna de G também contém T,
$\Leftrightarrow$ para toda linha da tabela-verdade associada a H e G, se H é verdadeira, então G é verdadeira,
$\Leftrightarrow$ para toda linha da tabela-verdade associada a H e G, $(H \rightarrow G)$ é interpretada como sendo verdadeira,
$\Leftrightarrow$ $(H \rightarrow G)$ é tautologia.

A demonstração correspondente, utilizando notação matemática:

$$\begin{aligned} H \text{ implica } G &\Leftrightarrow \forall\, I, \text{ se } I[H] = T, \text{ então } I[G] = T, \\ &\Leftrightarrow \forall\, I,\ I[H \rightarrow G] = T, \\ &\Leftrightarrow (H \rightarrow G) \text{ é tautologia.} \end{aligned}$$

cqd ■

Proposição 3.9 (equivalência e implicação semânticas) *Dadas duas fórmulas H e G:*

H equivale a G, se, e somente se, H implica G e G implica H.

Demonstração. Considere inicialmente que H equivale a G.

$$\begin{aligned} H \text{ equivale a } G &\Leftrightarrow \forall\, I,\ I[H] = I[G], \\ &\Leftrightarrow \forall\, I, \\ &\quad \text{se } I[H] = T, \text{ então } I[G] = T, \text{ e} \\ &\quad \text{se } I[G] = T, \text{ então } I[H] = T, \\ &\Leftrightarrow H \text{ implica } G \text{ e } G \text{ implica } H. \end{aligned}$$

cqd ■

Exemplo 3.17 (equivalência e implicação semânticas) Este exemplo mostra, inicialmente, que

$$(P \leftrightarrow Q) \text{ equivale a } ((P \wedge Q) \vee (\neg P \wedge \neg Q)).$$

Isso, contudo, é um fato. Verifique a Tabela 3.13, na qual as colunas das fórmulas $(P \leftrightarrow Q)$ e $((P \wedge Q) \vee (\neg P \wedge \neg Q))$ coincidem.

P	Q	$P \wedge Q$	$\neg P \wedge \neg Q$	$P \leftrightarrow Q$	$((P \wedge Q) \vee (\neg P \wedge \neg Q))$
T	T	T	F	T	T
T	F	F	F	F	F
F	T	F	F	F	F
F	F	F	T	T	T

Tabela 3.13: Tabela-verdade associada à fórmula $((P \wedge Q) \vee (\neg P \wedge \neg Q))$.

Mas, dada essa equivalência, concluímos, de acordo com a Proposição 3.9, que $(P \leftrightarrow Q)$ implica $((P \wedge Q) \vee (\neg P \wedge \neg Q))$. Igualmente, também, $((P \wedge Q) \vee (\neg P \wedge \neg Q))$ implica $(P \leftrightarrow Q)$. Tais implicações também são verificadas na Tabela 3.13. Finalmente, conforme a Proposição 3.8,

$$((P \wedge Q) \vee (\neg P \wedge \neg Q)) \rightarrow (P \leftrightarrow Q)$$

é uma tautologia. ■

Proposição 3.10 (transitividade e implicação semântica) *Dadas duas fórmulas H e G:*

se H implica G e G implica E, então H implica E.

Demonstração. Considere que H implica G e G implica E.

H implica G e G implica E $\Leftrightarrow$ $\forall\ I$,
se $I[H] = T$, então $I[G] = T$, e
se $I[G] = T$, então $I[E] = T$,
$\Rightarrow \forall\ I$,
se $I[H] = T$, então $I[E] = T$,
$\Leftrightarrow$ H implica E. **cqd** ■

Portanto, se H implica G e G implica E, então H implica E. Observe que o inverso dessa implicação não é verdadeiro. Ou seja, se H implica E, então não necessariamente H implica G e G implica E.

Proposição 3.11 (implicação e tautologia) *Sejam H e G duas fórmulas.*

Se H implica G e H é tautologia, então G é tautologia.

Demonstração. Suponha que H implica G e H é tautologia. É demonstrado a seguir que G é uma tautologia.

$$
\begin{aligned}
H \text{ implica } G \text{ e } H \text{ é tautologia} \Leftrightarrow\ & \forall\ I, \\
& \text{se } I[H] = T, \ \text{ então } \ I[G] = T \text{ e} \\
& I[H] = T, \\
\Rightarrow\ & \forall\ I, \ I[G] = T, \\
\Leftrightarrow\ & G \text{ é tautologia.}
\end{aligned}
$$

Portanto, se H implica G e H é tautologia, então G é tautologia. **cqd** ■

Proposição 3.12 (implicação e tautologia) *Sejam H e G duas fórmulas.*

Se G é tautologia, então H implica G.

Demonstração. Suponha que G é tautologia. É demonstrado a seguir que H implica G.

$$
\begin{aligned}
G \text{ é tautologia} \Leftrightarrow\ & \forall\ I, \ I[G] = T, \\
\Leftrightarrow\ & \nexists\ I, \ I[G] = F, \\
\Rightarrow\ & \nexists\ I, \ I[H] = T \ \text{ e } \ I[G] = F, \\
\Leftrightarrow\ & \forall\ I, \ \text{ se } \ I[H] = T, \ \text{ então } \ I[G] = T, \\
\Leftrightarrow\ & H \text{ implica } G.
\end{aligned}
$$

Portanto, se G é tautologia, então H implica G. **cqd** ■

Observe que o inverso dessa proposição não necessariamente é verdadeiro. Isto é, se H implica G, então não necessariamente temos que G é tautologia.

Proposição 3.13 (implicação e contradição) *Sejam H e G duas fórmulas.*

Se H é contraditória, então H implica G.

Demonstração. Suponha que H é contraditória. É demonstrado a seguir que H implica G.

$$
\begin{aligned}
H \text{ é contraditória} \Leftrightarrow\ & \forall\ I, \ I[H] = F, \\
\Leftrightarrow\ & \nexists\ I, \ I[H] = T, \\
\Rightarrow\ & \nexists\ I, \ I[H] = T \ \text{ e } \ I[G] = F, \\
\Leftrightarrow\ & \forall\ I, \ \text{ se } \ I[H] = T, \ \text{ então } \ I[G] = T, \\
\Leftrightarrow\ & H \text{ implica } G.
\end{aligned}
$$

Portanto, se H é contraditória, então H implica G. **cqd** ■

Observe que o inverso dessa proposição não necessariamente é verdadeiro. Isto é, se H implica G, então não necessariamente temos que H é contraditória.

Exemplo 3.18 (implicação, tautologia e contradição) Como já sabemos:

1. $(P \lor \neg P)$ é uma tautologia,
2. $(P \land \neg P)$ é uma contradição.

Este exemplo mostra que para qualquer fórmula H,

1. $(H \rightarrow (P \lor \neg P))$ é tautologia,
2. $((P \land \neg P) \rightarrow H)$ é tautologia.

Observe a Tabela 3.14.

P	Q	$P \lor \neg P$	$P \land \neg P$	H	$H \rightarrow (P \lor \neg P)$	$(P \land \neg P) \rightarrow H$
T	T	T	F	?	T	T
T	F	T	F	?	T	T
F	T	T	F	?	T	T
F	F	T	F	?	T	T

Tabela 3.14: Tabela-verdade associada às fórmulas $(H \rightarrow (P \lor \neg P))$ e $((P \land \neg P) \rightarrow H)$.

Nessa tabela, não preenchemos a coluna da fórmula H pois não sabemos como ela é. Entretanto, a coluna da fórmula $(H \rightarrow (P \lor \neg P))$ somente contém o símbolo T. Isso ocorre porque se o consequente do conectivo "'$\rightarrow$" é verdadeiro, então a fórmula toda também é verdadeira, independentemente da interpretação de seu antecedente. Isto é, não importando a interpretação de H. Por outro lado, na coluna da fórmula $((P \land \neg P) \rightarrow H)$ também temos apenas o símbolo T. Isso ocorre porque se o antecedente do conectivo "'$\rightarrow$" é falso, então a fórmula toda é verdadeira, independentemente da interpretação do seu consequente. Isto é, qualquer que seja a interpretação de H. ■

Até agora, consideramos o conceito de implicação semântica somente entre pares de fórmulas. Entretanto, esse conceito também é definido entre conjuntos de fórmulas.

Definição 3.9 (implicação semântica) *Sejam H uma fórmula e β o conjunto de fórmulas da Lógica Proposicional. $\beta = \{H_1, H_2, \ldots, H_n, \ldots\}$. Então:*

β implica semanticamente[6] H, se, e somente se,

para toda interpretação I, se $I[H_1] = T, I[H_2] = T, \ldots = I[H_n] = T, \ldots$, então $I[H] = T$.

Nesse caso, também dizemos que H é uma consequência lógica semântica de β. ■

[6] A implicação semântica, entre um conjunto de fórmulas e uma fórmula é comumente denominada consequência tautológica, ou consequência lógica na Lógica Proposicional.

O conjunto de fórmulas $\{H_1, H_2 \ldots H_n, \ldots\}$ implica semanticamente H se para toda interpretação I, se I interpreta as fórmulas $H_1, H_2 \ldots H_n, \ldots$ como sendo iguais a T, interpreta H, também, como T. Além disso, observe que o conjunto pode ser finito ou não. Por que o conceito de implicação semântica é importante em Computação? Porque um programa pode ser visto como um conjunto de fórmulas e o resultado de sua execução uma outra fórmula. Então, uma propriedade desejável dos programas lógicos, por exemplo, é que eles impliquem semanticamente seus resultados. Ou seja, se o programador "acredita" nas fórmulas do seu programa, ele também "acredita" nos seus resultados. Isso porque de nada serviria um programa com fórmulas verdadeiras, mas com resultados falsos.

Exemplo 3.19 (implicação semântica) Considere as fórmulas

$$((P \wedge Q) \vee Q), \ (P \wedge Q), \ \ (P \rightarrow Q).$$

Implicação. Temos que:

$$\{((P \wedge Q) \vee Q), \ (P \wedge Q)\} \text{ implica } (P \rightarrow Q).$$

P	Q	$(P \wedge Q) \vee Q$	$P \wedge Q$	$P \rightarrow Q$
T	T	T	T	T
T	F	F	F	F
F	T	T	F	T
F	F	F	F	T

Tabela 3.15: Tabela-verdade associada às fórmulas $((P \wedge Q) \vee Q)$, $(P \wedge Q)$ e $(P \rightarrow Q)$.

Isso ocorre porque, conforme a Tabela 3.15, se o símbolo T ocorre nas colunas das fórmulas $((P \wedge Q) \vee Q)$ e $(P \wedge Q)$, então T também ocorre na coluna da fórmula $(P \rightarrow Q)$. Isto é, para toda linha da Tabela 3.15, se $((P \wedge Q) \vee Q)$ e $(P \wedge Q)$ são verdadeiras, então $(P \rightarrow Q)$ também é verdadeira. Por outro lado, nas linhas em que $((P \wedge Q) \vee Q)$ ou $(P \wedge Q)$ é falsa, podemos ter $(P \rightarrow Q)$ verdadeira ou falsa. Na segunda linha, por exemplo, $((P \wedge Q) \vee Q)$ e $(P \wedge Q)$ são falsas. Da mesma forma, $(P \rightarrow Q)$ é falsa. Mas, na terceira linha, $((P \wedge Q) \vee Q)$ é verdadeira e $(P \wedge Q)$ é falsa. Porém, nesse caso, $(P \rightarrow Q)$ é verdadeira. Observe, agora, a prova dessa implicação sem o uso da Tabela 3.15.

$$\begin{aligned} &\{((P \wedge Q) \vee Q), \ (P \wedge Q)\} \text{ implica } (P \rightarrow Q) \\ &\qquad \Leftrightarrow \ \forall\, I, \text{ se } \ I[(P \wedge Q) \vee Q] = T \text{ e } I[(P \wedge Q)] = T, \\ &\qquad\quad\ \ \text{então } \ I[P \rightarrow Q] = T. \end{aligned}$$

Suponha, então, que $I[(P \wedge Q) \vee Q] = T$ e $I[(P \wedge Q)] = T$. Desse fato, concluímos as implicações:

$$\begin{aligned} I[(P \wedge Q) \vee Q] = T \ &\Rightarrow\ I[P \wedge Q] = T \ \text{ ou } \ I[Q] = T, \\ &\Rightarrow\ \{\ I[P] = T \ \text{ e } \ I[Q] = T\ \} \ \text{ ou } \ I[Q] = T. \end{aligned}$$

e

$$I[(P \wedge Q)] = T \ \Rightarrow\ I[P] = T \ \text{ e } \ I[Q] = T.$$

Portanto:

$$\begin{aligned} I[(P \wedge Q) \vee Q] = T \text{ e } I[(P \wedge Q)] = T \ &\Rightarrow\ I[P] = T \ \text{ e } \ I[Q] = T, \\ &\Rightarrow\ I[P \rightarrow Q] = T. \end{aligned}$$

E o resumo das implicações anteriores é que se $I[(P \wedge Q) \vee Q] = T$ e $I[(P \wedge Q)] = T$, então $I[P \rightarrow Q] = T$. E, portanto, $\{(P \wedge Q) \vee Q,\ (P \wedge Q)\}$ implica $(P \rightarrow Q)$.

Não implicação. Temos que:

$$\{((P \wedge Q) \vee Q), (P \rightarrow Q)\} \ \text{ não implica } \ (P \wedge Q).$$

A definição de não implicação entre um conjunto de fórmulas e uma fórmula específica é dada a seguir. Tal definição é a negação da definição de implicação, Definição 3.9.

Definição 3.10 (não implicação semântica) *Sejam H uma fórmula e β o conjunto de fórmulas da Lógica Proposicional. $\beta = \{H_1, H_2, \ldots, H_n, \ldots\}$. Então:*

β não implica semanticamente H, se, e somente se,
existe interpretação I,
tal que $I[H_1] = T, I[H_2] = T, \ldots = I[H_n] = T, \ldots,$ e $I[H] = F$.

Compare as Definições 3.9 e 3.10. Perceba que uma é a negação da outra. Pela Definição 3.10, para demonstrar que $\{((P \wedge Q) \vee Q), (P \rightarrow Q)\}$ não implica $(P \wedge Q)$, devemos encontrar uma interpretação que interpreta $((P \wedge Q) \vee Q)$ e $(P \rightarrow Q)$ como verdadeiras e $(P \wedge Q)$ como falsa. Conforme a Tabela 3.15, na quarta linha temos o símbolo T nas colunas das fórmulas $((P \wedge Q) \vee Q)$ e $(P \rightarrow Q)$ e o símbolo F na coluna da fórmula $(P \wedge Q)$). Isto é, para a interpretação definida pela quarta linha, temos que $((P \wedge Q) \vee Q)$ e $(P \rightarrow Q)$ são verdadeiras e $(P \wedge Q)$ falsa. Portanto, $\{((P \wedge Q) \vee Q), (P \rightarrow Q)\}$ não implica $(P \wedge Q)$. Uma demonstração mais formal dessa não implicação é dada a seguir.

$$\begin{aligned} &\{((P \wedge Q) \ \vee Q), (P \rightarrow Q)\} \text{ não implica } (P \wedge Q) \\ &\qquad \Leftrightarrow\ \exists\, I \ \text{ tal que } \ I[(P \wedge Q) \vee Q] = T,\ I[P \rightarrow Q] = T \\ &\qquad\quad \text{ e } \ I[(P \wedge Q)] = F, \\ &\qquad \Leftrightarrow\ \exists\, I \ \text{ tal que } \ \{I[(P \wedge Q)] = T \text{ ou } I[Q] = T,\} \ \text{ e} \\ &\qquad\quad \{I[P] = F \text{ ou } I[Q] = T\} \text{ e } \ \{I[P] = F \text{ ou } I[Q] = F\}, \\ &\qquad \Leftrightarrow\ \exists\, I \ \text{ tal que } \ \{\ \{I[P] = T \text{ e } I[Q] = T\ \} \text{ ou } I[Q] = T,\} \ \text{ e} \\ &\qquad\quad \{I[P] = F \text{ ou } I[Q] = T\} \text{ e } \ \{I[P] = F \text{ ou } I[Q] = F\}. \end{aligned}$$

Considere, então, a interpretação I tal que, $I[P] = F$ e $I[Q] = T$. Para essa interpretação, temos as três afirmações verdadeiras a seguir.

1. $\{ I[P] = T$ e $I[Q] = T \}$ ou $I[Q] = T$,
2. $I[P] = F$ ou $I[Q] = T$,
3. $I[P] = F$ ou $I[Q] = F$.

Portanto, $\{((P \wedge Q) \vee Q), (P \rightarrow Q)\}$ não implica $(P \wedge Q)$. ■

3.8 Deduções semânticas

Observação. Em uma primeira leitura, esta seção pode ser desconsiderada sem prejuízo do entendimento do resto do livro.

Sejam H e G duas fórmulas. Conforme a Proposição 3.7:

H equivale a G, se, e somente se, $(H \leftrightarrow G)$ é tautologia.

A partir desse resultado, que é correto, poderia se esperar que a afirmação a seguir, que é análoga, também o fosse.

Conjectura 3.1 (equivalência e tautologia) *Sejam H e G fórmulas da Lógica Proposicional, então:*

$\{H$ equivale a $G\}$,
se, e somente se,
$\{H$ é tautologia, se, e somente se, G é tautologia$\}$.

Uma conjectura é uma asserção a respeito da validade de uma afirmação. Observe que a conjectura é similar à afirmação:

"$\{H$ equivale a $G\}$, se, e somente se, $(H \leftrightarrow G)$ é tautologia".

A conjectura é obtida trocando

"$(H \leftrightarrow G)$ é tautologia"

por

"H é tautologia se, e somente se, G é tautologia".

A conjectura parece ser verdadeira, mas não é. Inicialmente, observe que a conjectura é uma bi-implicação que pode ser dividida nas duas implicações a seguir:

1. se $\{H$ equivale a $G\}$,
   então $\{H$ é tautologia se, e somente se, G é tautologia$\}$
2. se $\{H$ é tautologia se, e somente se, G é tautologia$\}$,
   então $\{H$ equivale a $G\}$

A segunda implicação não é verdadeira, conforme é demonstrado pelo contraexemplo a seguir.

Exemplo 3.20 (contraexemplo da conjectura) Este exemplo considera duas fórmulas H e G que contradizem a implicação 2 a seguir.

2. se { H é tautologia, se, e somente se, G é tautologia },
   então { H equivale a G }

Tais fórmulas definem um contraexemplo para essa implicação. Suponha, $H = P$ e $G = Q$. Logo, nesse caso é falso dizer que H equivale a G. Por outro lado, como P e Q não são tautologias, então as afirmações "H é tautologia" e "G é tautologia" são falsas. E por isso, a afirmação "{ H é tautologia, se, e somente se, G é tautologia }" é verdadeira, pois nesse caso, temos uma equivalência do tipo "Falso $\Leftrightarrow$ Falso". Portanto, para $H = P$ e $G = Q$, o antecedente da implicação

2. se { H é tautologia, se, e somente se, G é tautologia },
   então { H equivale a G }

é verdadeiro. Além disso, seu consequente é falso. Concluímos, portanto, que essa implicação é falsa, pois, nesse caso, temos uma implicação do tipo "verdadeiro $\Rightarrow$ falso". ■

Conclusão: a conjectura indicada anteriormente é falsa, pois é composta de duas implicações, sendo uma delas falsa. Entretanto, a primeira implicação, que define a conjectura, é verdadeira, conforme demonstrado a seguir.

Proposição 3.14 (equivalência e tautologia) *Sejam H e G duas fórmulas. Se $\{H$ equivale a $G\}$, então $\{H$ é tautologia, se, e somente se, G é tautologia$\}$.*

Demonstração. Pela Proposição 3.11, temos que se H implica G e H é tautologia, então G é tautologia. Mas, como $((A \wedge B) \rightarrow C)$ equivale a $(A \rightarrow (B \rightarrow C))$, então a afirmação "se H implica G e H é tautologia, então G é tautologia" equivale a "se H implica G,
então
se H é tautologia, então G é tautologia." Trocando H por G e vice-versa temos outra afirmação "se G implica H,
então
se G é tautologia, então H é tautologia." A conclusão de tudo isso são as duas afirmações:

1. se $\{H$ implica $G\}$, então $\{H$ é tautologia $\Rightarrow G$ é tautologia$\}$,
2. se $\{G$ implica $H\}$, então $\{G$ é tautologia $\Rightarrow H$ é tautologia$\}$.

E a partir dessas afirmações, concluímos
Se $\{H$ equivale $G\}$, então $\{H$ é tautologia se, e somente se, G é tautologia$\}$".
cqd ■

Apresentamos, a seguir, um importante resultado: o teorema da dedução. Esse teorema tem duas versões: uma semântica e outra sintática. A versão sintática é considerada mais tarde e a semântica é apresentada a seguir.

Teorema 3.1 (teorema da dedução - forma semântica) *Considere β um conjunto de fórmulas e A e B duas fórmulas da Lógica Proposicional. $\beta \cup \{A\}$ implica B, se, e somente se, β implica $(A \rightarrow B)$*

Notação. Dado um conjunto de fórmulas β e uma interpretação I, então se I interpreta todas as fórmulas de β como verdadeiras, denotamos esse fato por $I[\beta] = T$.

A demonstração que se segue, embora elementar, é um pouco mais caprichada do que as anteriores e o iniciante, talvez, necessite de várias leituras e reflexões sobre seu conteúdo.

Demonstração. A ida: "$\Rightarrow$". Nesse caso, temos $\beta \cup \{A\}$ implica B e devemos demonstrar que β implica $(A \rightarrow B)$. Mas:

$\beta \cup \{A\}$ implica $B \Leftrightarrow \forall\, I$, se $I[\beta \cup \{A\}] = T$, então $I[B] = T$,

Por outro lado:

β implica $(A \rightarrow B) \Leftrightarrow \forall\, I$, se $I[\beta] = T$, então $I[(A \rightarrow B)] = T$,

Portanto, devemos demonstrar que se $I[\beta] = T$, então $I[(A \rightarrow B)] = T$. Para demonstrar essa implicação, devemos supor $I[\beta] = T$ e demonstrar $I[(A \rightarrow B)] = T$. Por sua vez, para demonstrar $I[(A \rightarrow B)] = T$, devemos supor $I[A] = T$ e demonstrar $I[B] = T$. Além de tudo isso, devemos também utilizar a hipótese: $\beta \cup \{A\}$ implica B. Portanto, resumindo, devemos supor: $I[\beta] = T$, $I[A] = T$, $\beta \cup \{A\}$ implica B e demonstrar $I[B] = T$. Mas, se $I[\beta] = T$, e $I[A] = T$, então $I[\beta \cup \{A\}] = T$. Logo, como temos que $\beta \cup \{A\}$ implica B, concluímos que $I[B] = T$.

A volta: "$\Leftarrow$". Temos β implica $(A \rightarrow B)$ e devemos demonstrar que $\beta \cup \{A\}$ implica B. Portanto, devemos demonstrar que se $I[\beta \cup \{A\}] = T$, então $I[B] = T$. Para demonstrar essa implicação, devemos supor $I[\beta \cup \{A\}] = T$ e demonstrar $I[B] = T$. Além disso, devemos também utilizar a hipótese: β implica $(A \rightarrow B)$. Resumindo, devemos supor: $I[\beta \cup \{A\}] = T$, β implica $(A \rightarrow B)$ e demonstrar $I[B] = T$. Mas, se $I[\beta \cup \{A\}] = T$, então $I[\beta] = T$. Logo, como β implica $(A \rightarrow B)$, então concluímos que $I[(A \rightarrow B)] = T$. Por outro lado, se $I[\beta \cup \{A\}] = T$, temos também que $I[A] = T$. Logo, como $I[(A \rightarrow B)] = T$, concluímos que $I[B] = T$. **cqd**
■

Exemplo 3.21 (dedução semântica) Temos que $\{((P \wedge Q) \vee Q), (P \rightarrow Q), (\neg(P \leftrightarrow Q))\}$ implica $(\neg(P \wedge Q))$. Isso ocorre porque, conforme a Tabela 3.16, se o símbolo T ocorre nas colunas das fórmulas $((P \wedge Q) \vee Q), (P \rightarrow Q)$ e $(\neg(P \leftrightarrow Q))$, então T também ocorre na coluna da fórmula $(\neg(P \wedge Q))$. Isto é, para toda linha da Tabela 3.16, se $((P \wedge Q) \vee Q), (P \rightarrow Q)$ e $(\neg(P \leftrightarrow Q))$ são verdadeiras, então $(\neg(P \wedge Q))$ também é verdadeira.

Nota. Conforme a Tabela 3.16, apenas na quarta linha, a penúltima, é que as fórmulas

$((P \wedge Q) \vee Q), (P \rightarrow Q)$ e $(\neg(P \leftrightarrow Q))$

são verdadeiras. Então, parece estranho dizer "para todas as interpretações que interpretam tais fórmulas como verdadeiras". Isso, porque há somente uma linha na qual tais fórmulas são verdadeiras. Entretanto, não há nada de estranho nisso, pois devemos lembrar que cada linha da tabela-verdade corresponde a uma infinidade de interpretações. Perceba, também, que cada uma delas coincide nas interpretações dos símbolos proposicionais da tabela-verdade.

Portanto, conforme a Tabela 3.16, concluímos que:

$$\{((P \wedge Q) \vee Q), (P \rightarrow Q), (\neg(P \leftrightarrow Q))\} \text{ implica } (\neg(P \wedge Q)).$$

P	Q	$(P \wedge Q) \vee Q$	$P \rightarrow Q$	$\neg(P \leftrightarrow Q)$	$\neg(P \wedge Q)$
T	T	T	T	F	F
T	F	F	F	T	T
F	T	T	T	T	T
F	F	F	T	F	T

Tabela 3.16: Tabela-verdade associada às fórmulas

$$((P \wedge Q) \vee Q), (P \rightarrow Q), (\neg(P \leftrightarrow Q)) \text{ e } (\neg(P \wedge Q)).$$

Dedução semântica. Como:

$$\{((P \wedge Q) \vee Q), (P \rightarrow Q), (\neg(P \leftrightarrow Q))\} \text{ implica } (\neg(P \wedge Q)),$$

então, pelo Teorema 3.1, concluímos, também, que:

$$\{((P \wedge Q) \vee Q), (P \rightarrow Q)\} \text{ implica } \neg(P \leftrightarrow Q) \rightarrow \neg(P \wedge Q).$$

Verifique a Tabela 3.17. Observe que se as fórmulas $((P \wedge Q) \vee Q)$ e $(P \rightarrow Q)$ são verdadeiras, então $\neg(P \leftrightarrow Q) \rightarrow \neg(P \wedge Q)$ também é verdadeira.

P	Q	$(P \wedge Q) \vee Q$	$P \rightarrow Q$	$\neg(P \leftrightarrow Q) \rightarrow \neg(P \wedge Q)$
T	T	T	T	T
T	F	F	F	T
F	T	T	T	T
F	F	F	T	T

Tabela 3.17: Tabela-verdade associada às fórmulas

$$((P \wedge Q) \vee Q), (P \rightarrow Q) \text{ e } (\neg(P \leftrightarrow Q)) \rightarrow (\neg(P \wedge Q)).$$

Opa! Observe que $(\neg(P \leftrightarrow Q)) \rightarrow (\neg(P \wedge Q))$ é uma tautologia, pois sua coluna contém apenas o símbolo T. E, como não poderia deixar de ser, qualquer coisa implica uma tautologia. ■

3.9 Relações semânticas entre os conectivos

Esta seção considera o estudo das relações semânticas entre os conectivos da Lógica Proposicional. Nesta análise é demonstrado, por exemplo, que os conectivos "$\wedge$", "$\rightarrow$" e "$\leftrightarrow$" podem ser expressos, equivalentemente, utilizando apenas "$\neg$" e "$\vee$". Como consequência, qualquer fórmula da Lógica Proposicional pode ser reescrita, de forma equivalente, utilizando apenas seus símbolos proposicionais e os conectivos "$\neg$" e "$\vee$". Conjuntos de conectivos com tal propriedade são denominados completos e possuem inúmeras aplicações em Lógica e Computação. Por exemplo, uma das aplicações dos conjuntos de conectivos completos é a simplificação do alfabeto da Lógica Proposicional, Definição 1.1. Isso significa que o conjunto de conectivos da Definição 1.1 é redundante. Isto é, o conectivo "$\wedge$", por exemplo, pode ser representado de uma forma equivalente utilizando os conectivos "$\neg$" e "$\vee$". Esse fato é utilizado para reduzir o conjunto de conectivos proposicionais do alfabeto, mantendo a linguagem da Lógica Proposicional inalterada. Outra aplicação ocorre em arquitetura de computadores, na qual são projetados circuitos digitais que representam apenas um conjunto completo ou fundamental de conectivos. Um conjunto de conectivos proposicionais Ψ é completo quando é possível expressar, equivalentemente, os conectivos "$\neg$", "$\vee$", "$\wedge$", "$\rightarrow$" e "$\leftrightarrow$", utilizando apenas conectivos de Ψ. Observe a definição.

Definição 3.11 (conjunto de conectivos completo) *Seja Ψ um conjunto de conectivos. Ψ é um conjunto completo se as condições a seguir são satisfeitas. Dada uma fórmula H do tipo:*

$$\neg\breve{P},\ (\breve{P} \vee \breve{Q}),\ (\breve{P} \wedge \breve{Q}),\ (\breve{P} \rightarrow \breve{Q}) \text{ ou } (\breve{P} \leftrightarrow \breve{Q}),$$

então é possível determinar uma outra fórmula G, equivalente a H, tal que G contém apenas conectivos do conjunto Ψ e os símbolos $\breve{P}$ e $\breve{Q}$ presentes em H.

Exemplo 3.22 (conjunto completo) Este exemplo demonstra que o conjunto $\{\neg, \vee\}$ é completo. Isso significa que as fórmulas $\neg\breve{P}$, $(\breve{P} \vee \breve{Q})$, $(\breve{P} \wedge \breve{Q})$, $(\breve{P} \rightarrow \breve{Q})$ ou $(\breve{P} \leftrightarrow \breve{Q})$ podem ser expressas, equivalentemente, utilizando apenas os conectivos "$\neg$" e "$\vee$" e os símbolos proposicionais $\breve{P}$ e $\breve{Q}$.

Nota. Neste exemplo temos o cuidado de escrever $\breve{P}$, e $\breve{Q}$ no lugar de P, e Q. Lembre que $\breve{P}$, e $\breve{Q}$ são metavariáveis e representam quaisquer símbolos proposicionais.

Conforme a Definição 3.11, devemos encontrar fórmulas H_1, H_2, H_3, H_4 e H_5, que contêm apenas os conectivos "$\neg$" e "$\vee$" e os símbolos proposicionais $\breve{P}$, e $\breve{Q}$, e tais que as equivalências a seguir sejam satisfeitas.

1. $\neg\breve{P}$ equivale a H_1,
2. $(\breve{P} \vee \breve{Q})$ equivale a H_2,
3. $(\breve{P} \wedge \breve{Q})$ equivale a H_3,

4. $(\breve{P} \rightarrow \breve{Q})$ equivale a H_4,
5. $(\breve{P} \leftrightarrow \breve{Q})$ equivale a H_5.

Determinação de H_1 e H_2. No caso das duas primeiras fórmulas, definimos: $H_1 = \neg\breve{P}$, $H_2 = (\breve{P} \vee \breve{Q})$.

Nesses dois casos, as equivalências são óbvias, pois fórmulas idênticas são equivalentes. Além disso, H_1 e H_2 contêm apenas os conectivos "$\neg$" e "$\vee$" e os símbolos proposicionais $\breve{P}$ e $\breve{Q}$.

Determinação de H_3. Observe o método que usamos para determinar a fórmula H_3. Iniciamos com a equivalência:

$(\breve{P} \wedge \breve{Q})$ equivale a $\neg\neg(\breve{P} \wedge \breve{Q})$.

Isto é, a partir de $(\breve{P} \wedge \breve{Q})$, obtemos outra fórmula equivalente, escrevendo duas negações no seu início. Em seguida, utilizamos a lei de De Morgan e obtemos a equivalência:

$\neg\neg(\breve{P} \wedge \breve{Q})$ equivale a $\neg(\neg\breve{P} \vee \neg\breve{Q})$.

Portanto,

$(\breve{P} \wedge \breve{Q})$ equivale a $\neg(\neg\breve{P} \vee \neg\breve{Q})$.

Definimos, então, $H_3 = \neg(\neg\breve{P} \vee \neg\breve{Q})$.

Determinação de H_4. Nesse caso, basta observar a equivalência:

$(\breve{P} \rightarrow \breve{Q})$ equivale a $(\neg\breve{P} \vee \breve{Q})$.

Logo, definimos $H_4 = (\neg\breve{P} \vee \breve{Q})$.

Determinação de H_5. Para determinar a fórmula H_5, considere inicialmente a equivalência:

$(\breve{P} \leftrightarrow \breve{Q})$ equivale a $(\breve{P} \rightarrow \breve{Q}) \wedge (\breve{Q} \rightarrow \breve{P})$.

No próximo passo, utilizamos as equivalências

$(\breve{P} \rightarrow \breve{Q})$ equivale a $(\neg\breve{P} \vee \breve{Q})$

e

$(\breve{Q} \rightarrow \breve{P})$ equivale a $(\neg\breve{Q} \vee \breve{P})$

e obtemos:

$(\breve{P} \rightarrow \breve{Q}) \wedge (\breve{Q} \rightarrow \breve{P}))$ equivale a $(\neg\breve{P} \vee \breve{Q}) \wedge (\neg\breve{Q} \vee \breve{P})$.

Em seguida, consideramos a equivalência:

$(\breve{P} \wedge \breve{Q})$ equivale a $\neg(\neg\breve{P} \vee \neg\breve{Q})$

e obtemos:

$(\neg\breve{P} \vee \breve{Q}) \wedge (\neg\breve{Q} \vee \breve{P}))$ equivale a $\neg(\neg(\neg\breve{P} \vee \breve{Q}) \vee \neg(\neg\breve{Q} \vee \breve{P}))$.

Portanto, devido à transitividade das equivalências anteriores, concluímos que

$(\breve{P} \leftrightarrow \breve{Q})$ equivale a $\neg(\neg(\neg\breve{P} \vee \breve{Q}) \vee \neg(\neg\breve{Q} \vee \breve{P}))$

e definimos:

$$H_5 = \neg(\neg(\neg\breve{P} \vee \breve{Q}) \vee \neg(\neg\breve{Q} \vee \breve{P})).$$

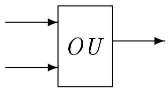
A conclusão geral do desenvolvimento anterior são as equivalências a seguir, que provam que o conjunto $\{\neg, \vee\}$ é completo.

1. $\neg\breve{P}$ equivale a $\neg\breve{P}$,
2. $(\breve{P} \vee \breve{Q})$ equivale a $(\breve{P} \vee \breve{Q})$,

3. $(\breve{P} \wedge \breve{Q})$ equivale a $\neg(\neg\breve{P} \vee \neg\breve{Q})$,
4. $(\breve{P} \rightarrow \breve{Q})$ equivale a $(\neg\breve{P} \vee \breve{Q})$,
5. $(\breve{P} \leftrightarrow \breve{Q})$ equivale a $\neg(\neg(\neg\breve{P} \vee \breve{Q}) \vee \neg(\neg\breve{Q} \vee \breve{P}))$.

■

Circuitos digitais. Uma aplicação evidente das relações semânticas entre os conectivos da Lógica Proposicional é no projeto de circuitos digitais. Esses circuitos são projetados, tendo como elementos básicos portas lógicas que simulam os conectivos da lógica. Por exemplo, uma porta lógica que simula o conectivo "$\vee$" é um circuito digital com duas entradas e uma saída, denominado Porta OU.



Porta *OU*.

Em cada entrada da esquerda, podemos ter uma tensão de 5v, ou 0v. Nesse caso, o correspondente a 5v é o valor de verdade "T" e a 0v é o valor de verdade "F". Então, se, por exemplo, temos em uma das duas entradas uma tensão de 5v, então a tensão na saída, do lado direito, também é de 5v. Caso contrário, se nas duas entradas temos 0v, então a tensão na saída é igual a 0v. De forma análoga à Porta *OU*, temos também as Portas *NÃO, E, IMPLICA* e *BI-IMPLICA*. Assim, os circuitos digitais podem são projetados, utilizando tais portas lógicas. Logo, dado que o conjunto $\{\neg, \vee\}$ é completo, então, para projetar circuitos digitais, basta considerar apenas as portas lógicas *NÃO* e *OU*.

Exemplo 3.23 (conjunto completo) Este exemplo demonstra que o conjunto $\{\neg, \wedge\}$ é completo. Isso significa que as fórmulas $\neg\breve{P}$, $(\breve{P} \vee \breve{Q})$, $(\breve{P} \wedge \breve{Q})$, $(\breve{P} \rightarrow \breve{Q})$ ou $(\breve{P} \leftrightarrow \breve{Q})$ podem ser expressas, equivalentemente, utilizando apenas os conectivos "$\neg$" e "$\wedge$" e os símbolos proposicionais $\breve{P}$ e $\breve{Q}$. Novamente, conforme a Definição 3.11, devemos encontrar fórmulas H_1, H_2, H_3, H_4 e H_5, que contêm apenas os conectivos "$\neg$" e "$\wedge$" e os símbolos proposicionais $\breve{P}$ e $\breve{Q}$, tais que as equivalências a seguir sejam satisfeitas.

1. $\neg\breve{P}$ equivale a H_1,
2. $(\breve{P} \vee \breve{Q})$ equivale a H_2,
3. $(\breve{P} \wedge \breve{Q})$ equivale a H_3,
4. $(\breve{P} \rightarrow \breve{Q})$ equivale a H_4,
5. $(\breve{P} \leftrightarrow \breve{Q})$ equivale a H_5.

Determinação de H_1 e H_3. No caso das duas primeiras fórmulas, definimos $H_1 = \neg\breve{P}$,
$H_3 = (\breve{P} \wedge \breve{Q})$. Como no Exemplo 3.22, as equivalências são óbvias, pois fórmulas idênticas são equivalentes.

Determinação de H_2. Considere, inicialmente:
$(\breve{P} \vee \breve{Q})$ equivale a $\neg\neg(\breve{P} \vee \breve{Q})$.

Isto é, a partir de $(\breve{P} \vee \breve{Q})$, obtemos outra fórmula equivalente, escrevendo duas negações no seu início. Em seguida, utilizamos a lei de De Morgan e obtemos:
$\neg\neg(\breve{P} \vee \breve{Q})$ equivale a $\neg(\neg\breve{P} \wedge \neg\breve{Q})$.

Portanto,
$(\breve{P} \vee \breve{Q})$ equivale a $\neg(\neg\breve{P} \wedge \neg\breve{Q})$.

Definimos, então, $H_2 = \neg(\neg\breve{P} \wedge \neg\breve{Q})$.

Determinação de H_4. Iniciamos com a equivalência:
$(\breve{P} \rightarrow \breve{Q})$ equivale a $(\neg\breve{P} \vee \breve{Q})$.

Em seguida, consideramos:
$(\neg\breve{P} \vee \breve{Q})$ equivale a $\neg\neg(\neg\breve{P} \vee \breve{Q})$.

Depois:
$\neg\neg(\neg\breve{P} \vee \breve{Q})$ equivale a $\neg(\neg\neg\breve{P} \wedge \neg\breve{Q})$.

E, finalmente:
$\neg(\neg\neg\breve{P} \wedge \neg\breve{Q})$ equivale a $\neg(\breve{P} \wedge \neg\breve{Q})$.

Logo, definimos: $H_4 = \neg(\breve{P} \wedge \neg\breve{Q})$.

Determinação de H_5. Para determinar a fórmula H_5, considere, inicialmente, a equivalência.
$(\breve{P} \leftrightarrow \breve{Q})$ equivale a $(\breve{P} \rightarrow \breve{Q}) \wedge (\breve{Q} \rightarrow \breve{P})$.

No próximo passo, utilizamos:
$(\breve{P} \rightarrow \breve{Q})$ equivale a $\neg(\breve{P} \wedge \neg\breve{Q})$
e
$(\breve{Q} \rightarrow \breve{P})$ equivale a $\neg(\breve{Q} \wedge \neg\breve{P})$,
e obtemos:
$(\breve{P} \rightarrow \breve{Q}) \wedge (\breve{Q} \rightarrow \breve{P})$ equivale a $\neg(\breve{P} \wedge \neg\breve{Q}) \wedge \neg(\breve{Q} \wedge \neg\breve{P})$.

Logo, devido à transitividade das equivalências anteriores, concluímos que:
$(\breve{P} \leftrightarrow \breve{Q})$ equivale a $\neg(\breve{P} \wedge \neg\breve{Q}) \wedge \neg(\breve{Q} \wedge \neg\breve{P})$
e definimos: $H_5 = \neg(\breve{P} \wedge \neg\breve{Q}) \wedge \neg(\breve{Q} \wedge \neg\breve{P})$. A conclusão geral do desenvolvimento anterior são as equivalências a seguir, que provam que o conjunto $\{\neg, \vee\}$ é completo.

1. $\neg\breve{P}$ equivale a $\neg\breve{P}$,
2. $(\breve{P} \vee \breve{Q})$ equivale a $\neg(\neg\breve{P} \wedge \neg\breve{Q})$,
3. $(\breve{P} \wedge \breve{Q})$ equivale a $(\breve{P} \wedge \breve{Q})$,
4. $(\breve{P} \rightarrow \breve{Q})$ equivale a $\neg(\breve{P} \wedge \neg\breve{Q})$,
5. $(\breve{P} \leftrightarrow \breve{Q})$ equivale a $\neg(\breve{P} \wedge \neg\breve{Q}) \wedge \neg(\breve{Q} \wedge \neg\breve{P})$.

■

Transformação de fórmulas. Dada uma fórmula H, sempre é possível encontrar uma fórmula equivalente G, que contém apenas os símbolos de H e os conectivos de um conjunto completo de conectivos. O Exemplo 3.24 a seguir indica como transformar uma fórmula H em outra equivalente que contém apenas os conectivos "$\neg$" e "$\vee$" e seus símbolos proposicionais.

Exemplo 3.24 (transformação para conectivos "$\neg$" e "$\vee$".) Dada uma fórmula H, este exemplo demonstra como obter uma fórmula G, equivalente a H, que contém apenas os conectivos "$\neg$" e "$\vee$" e os símbolos proposicionais de H. Considere

$$H = (P \leftrightarrow Q) \vee (R \rightarrow S).$$

Inicialmente utilizamos a equivalência:
$(P \leftrightarrow Q)$ equivale a $\neg(\neg(\neg P \vee Q) \vee \neg(\neg Q \vee P))$.
Então, substituímos a subfórmula $(P \leftrightarrow Q)$ em H por $\neg(\neg(\neg P \vee Q) \vee \neg(\neg Q \vee P))$, obtendo:
$H_1 = \neg(\neg(\neg P \vee Q) \vee \neg(\neg Q \vee P)) \vee (R \rightarrow S)$.
Em seguida, utilizamos:
$(R \rightarrow S)$ equivale a $(\neg R \vee S)$
e substituímos a subfórmula $(R \rightarrow S)$ em H_1 por $(\neg R \vee S)$, obtendo:
$G = \neg(\neg(\neg P \vee Q) \vee \neg(\neg Q \vee P)) \vee (\neg R \vee S)$.

Mas, afinal, por que G é equivalente a H? Parece que isso é verdade, pois G é obtida e H, substituindo suas subfórmulas por fórmulas equivalentes. Isto é, G equivale a H porque G equivale a H_1 e, por sua vez, H_1 equivale a H. Logo, G equivale a H. Além disso, H contém apenas os conectivos $\neg$ e $\vee$. Entretanto, em Lógica não basta dizer que algo parece ser válido. Devemos demonstrar, pois nossa intuição frequentemente nos ilude. Nesse caso, o raciocínio anterior é realmente válido, conforme a Proposição 3.15 a seguir. ■

Notação. Para denotar que A é uma subfórmula de H, escrevemos: $H_{[A]}$. Suponha, por exemplo, $H = (P \leftrightarrow Q) \vee (R \rightarrow S)$ e a subfórmula $A = (P \leftrightarrow Q)$. Nesse caso, denotamos que A é uma subfórmula de H, escrevendo $H_{[A]}$. Observe que essa notação somente dá ênfase ao fato de A ser uma subfórmulas de H, pois continuamos tendo $H_{[A]} = (P \leftrightarrow Q) \vee (R \rightarrow S)$.

Proposição 3.15 (regra da substituição) *Sejam $H_{[A]}$ e $G_{[B]}$ duas fórmulas da Lógica Proposicional, que contêm, respectivamente, as subfórmulas A e B. Suponha que:*

1. *$G_{[B]}$ é obtida de $H_{[A]}$, substituindo alguma ocorrência da subfórmula A em $H_{[A]}$ por B,*
2. *A equivale a B,*

Então, então $G_{[B]}$ equivale a $H_{[A]}$.

Nota. A demonstração da regra da substituição, Proposição 3.15, utiliza o princípio da indução finita e não é considerada neste livro.

Utilizando a regra da substituição, o resultado do Exemplo 3.24 é generalizado pela proposição a seguir.

Proposição 3.16 (transformação para conectivos "$\neg$" e "$\vee$".) *Seja H uma fórmula da Lógica Proposicional. Então existe uma fórmula G, equivalente a H, que possui apenas os conectivos $\neg$ e $\vee$ e os símbolos proposicionais que ocorrem em H.*

Nota. Novamente, a demonstração da Proposição 3.16, utiliza o princípio da indução finita e não é considerada neste livro.

Até agora demonstramos que os conjuntos $\{\neg, \vee\}$ e $\{\neg, \wedge\}$ são completos. Além desses conjuntos, há outros conjuntos completos? Claro que sim. Um deles é o conjunto Φ a seguir: $\Phi = \{\neg, \vee, \wedge, \rightarrow, \leftrightarrow\}$. Mas é óbvio que Φ é completo, pois ele contém todos os conectivos. Um outro conjunto completo é $\{\neg, \rightarrow\}$. Você é convidado a demonstrar isso nos exercícios. Além disso, uma pergunta seria a seguinte: existe algum conjunto com apenas um conectivo, entre os conectivos do conjunto Φ, que é completo? A resposta é não. Ou seja, nenhum dos conjuntos a seguir é completo: $\{\neg\}$, $\{\vee\}$, $\{\wedge\}$, $\{\rightarrow\}$ e $\{\leftrightarrow\}$. De novo, há um convite aos exercícios para a demonstração de tal fato. Mas será que existe conjunto com apenas um conectivo e que é completo? Responder tal questão é importante, pois se a resposta for afirmativa, então todos os circuitos digitais poderão ser projetados a partir de apenas uma porta lógica. Felizmente, a resposta à nossa questão é afirmativa. E, evidentemente, tal conectivo não é nenhum dos conectivos usuais: $\{\neg\}$, $\{\vee\}$, $\{\wedge\}$, $\{\rightarrow\}$ e $\{\leftrightarrow\}$. Portanto, observe que existe um conectivo diferente dos usuais e que, além disso, um conjunto com apenas esse conectivo é completo. Veja a definição desse conectivo.

Definição 3.12 (conectivo *nand***)** *O conectivo nand é definido pela correspondência:* $(\breve{P}\ nand\ \breve{Q}) = \neg(\breve{P} \wedge \breve{Q})$.

A Definição 3.12 diz que a operação do conectivo binário "*nand*" aplicado sobre os símbolos proposicionais $\breve{P}$ e $\breve{Q}$ corresponde a aplicar, inicialmente, o conectivo binário "$\wedge$" sobre os símbolos proposicionais $\breve{P}$ e $\breve{Q}$ e, em seguida, negar o resultado. Portanto, "*nand*" é um conectivo definido a partir dos conectivos "$\neg$" e "$\wedge$". Além disso, "*nand*" é diferente dos conectivos usuais. A prova disso é simples. Basta verificar que a tabela-verdade de "*nand*" é diferente da tabela-verdade dos conectivos usuais, conforme indicado na Tabela 3.18.

P	Q	$\neg P$	$P \vee Q$	$P \wedge Q$	$P \rightarrow Q$	$P \leftrightarrow Q$	$P\ nand\ Q$
T	T	F	T	T	T	T	F
T	F	F	T	F	F	F	T
F	T	T	T	F	T	F	T
F	F	T	F	F	T	T	T

Tabela 3.18: Tabela-verdade associada a conectivos.

Exemplo 3.25 (conjunto completo) Este exemplo mostra que o conjunto $\{nand\}$ é completo. Isso significa que as fórmulas $\neg\breve{P}$, $(\breve{P} \vee \breve{Q})$, $(\breve{P} \wedge \breve{Q})$, $(\breve{P} \rightarrow \breve{Q})$ ou $(\breve{P} \leftrightarrow \breve{Q})$ podem ser expressas, equivalentemente, utilizando apenas o conectivo "*nand*" e os símbolos proposicionais $\breve{P}$ e $\breve{Q}$. Para demonstrar que $\{nand\}$ é completo, poderíamos seguir o raciocínio dos Exemplos 3.22 e 3.23. Nesse caso, determinaríamos fórmulas H_1, H_2, H_3, H_4 e H_5, que contêm apenas o conectivo "*nand*" e os símbolos proposicionais $\breve{P}$ e $\breve{Q}$, tais que as equivalências a seguir sejam satisfeitas.

1. $\neg\breve{P}$ equivale a H_1,
2. $(\breve{P} \vee \breve{Q})$ equivale a H_2,
3. $(\breve{P} \wedge \breve{Q})$ equivale a H_3,
4. $(\breve{P} \rightarrow \breve{Q})$ equivale a H_4,
5. $(\breve{P} \leftrightarrow \breve{Q})$ equivale a H_5.

Podemos utilizar o resultado do Exemplo 3.23 para obter uma demonstração mais curta. Dado que o conjunto $\{\neg, \wedge\}$ é completo, então isso significa que as fórmulas $\neg\breve{P}$, $(\breve{P}\vee\breve{Q})$, $(\breve{P}\wedge\breve{Q})$, $(\breve{P} \rightarrow \breve{Q})$ ou $(\breve{P} \leftrightarrow \breve{Q})$ podem ser expressas, equivalentemente, utilizando apenas os conectivos "$\neg$" e "$\wedge$" e os símbolos proposicionais $\breve{P}$ e $\breve{Q}$. Assim, para mostrar que as fórmulas $\neg\breve{P}$, $(\breve{P} \vee \breve{Q})$, $(\breve{P} \wedge \breve{Q})$, $(\breve{P} \rightarrow \breve{Q})$ ou $(\breve{P} \leftrightarrow \breve{Q})$ podem ser expressas, equivalentemente, utilizando apenas o conectivo "*nand*" e os símbolos proposicionais $\breve{P}$ e $\breve{Q}$, basta considerar as fórmulas $\neg\breve{P}$ e $(\breve{P} \wedge \breve{Q})$. Ou seja, determinamos apenas duas fórmulas H_1 e H_2, que contém apenas o conectivo "*nand*" e os símbolos proposicionais $\breve{P}$ e $\breve{Q}$, tais que as equivalências a seguir sejam satisfeitas.

1. $\neg\breve{P}$ equivale a H_1
2. $(\breve{P} \wedge \breve{Q})$ equivale a H_2

Determinação de H_1. Definimos $H_1 = \breve{P}\ nand\ \breve{P}$. Observe a Tabela 3.19 e certifique-se de que as colunas de $\neg\breve{P}$ e $\breve{P}\ nand\ \breve{P}$ são idênticas. Logo, $\neg\breve{P}$ equivale a H_1.

P	$\neg P$	$P\ nand\ P$
T	F	F
F	T	T

Tabela 3.19: Tabela-verdade associada a "$\neg$" e "*nand*".

Determinação de H_2. Considere inicialmente:
$(\breve{P} \wedge \breve{Q})$ equivale a $\neg\neg(\breve{P} \wedge \breve{Q})$.
Em seguida, utilizando a definição do conectivo "*nand*", temos:
$\neg\neg(\breve{P} \wedge \breve{Q})$ denota $\neg(\breve{P}\ nand\ \breve{Q})$.
Então, dado que:
$(\neg A)$ equivale a $(A\ nand\ A)$,
obtemos, finalmente, a equivalência:
$\neg(\breve{P}\ nand\ \breve{Q})$ equivale a $((\breve{P}\ nand\ \breve{Q})\ nand\ (\breve{P}\ nand\ \breve{Q}))$.

Definimos, então:

$$H_2 = ((\breve{P} \ nand \ \breve{Q}) \ nand \ (\breve{P} \ nand \ \breve{Q})).$$

■

Exemplo 3.26 (transformação para o conectivo *nand*) Dada uma fórmula H, este exemplo demonstra como obter uma fórmula G, equivalente a H, que contém apenas o conectivo *nand* e os símbolos de H. Considere a fórmula: $H = P \wedge (R \rightarrow S)$. A sequência de equivalências a seguir deriva a fórmula G.

$$\begin{array}{ll} H = P \wedge (R \rightarrow S) & \text{equivale a } (P \wedge (\neg R \vee S)), \\ & \text{equivale a } \neg\neg(P \wedge \neg\neg(\neg R \vee S)), \\ & \text{equivale a } \neg\neg(P \wedge \neg(R \wedge \neg S)), \\ & \text{equivale a } \neg(P \ nand \ (R \ nand \ \neg S)), \\ & \text{equivale a } \neg(P \ nand \ (R \ nand \ (S \ nand \ S))). \end{array}$$

Portanto, H equivale a G, onde:

$$G = (P \ nand \ (R \ nand \ (S \ nand \ S))) \ nand \ (P \ nand \ (R \ nand \ (S \ nand \ S))).$$

A fórmula G equivale a H e contém apenas o conectivo *nand* e os símbolos de H. Observe que nas transformações anteriores, não foi necessário obter uma fórmula que contém apenas os conectivos $\neg$ e $\vee$, para depois obter a fórmula G. ■

O resultado do Exemplo 3.26 é generalizado pela proposição a seguir.

Proposição 3.17 (conjunto completo) *O conjunto $\{nand\}$ é completo.*

Nota. O Exemplo 3.25 mostra que o conjunto $\{nand\}$ é completo. Observe que naquele exemplo não temos uma demonstração rigorosa de que o conjunto $\{nand\}$ é completo. Essa demonstração utiliza a Regra da Substituição, Proposição 3.15, e indução matemática no comprimento das fórmulas. Ela não está no escopo deste livro e não é considerada.

Proposição 3.18 (relação semântica entre conectivos) *Seja E uma fórmula qualquer da Lógica Proposicional. E pode ser expressa, equivalentemente, utilizando apenas o conectivo nand e os símbolos proposicionais e de verdade presentes em E.*

Nota. A demonstração da Proposição 3.18 utiliza o princípio da indução finita e não é considerada neste livro.

O conectivo *nand* é importante, dado que o conjunto $\{nand\}$ é completo. Uma boa questão é saber se existe algum outro conjunto unitário, de conectivo, que também é completo. A resposta para esta questão é positiva e podemos dizer que o conectivo que forma tal conjunto, denominado *nor*, é o dual de *nand*.

Definição 3.13 (conectivo *nor*) *O conectivo nor é definido pela correspondência:* $(P \ nor \ Q) = \neg(P \vee Q)$.

Proposição 3.19 (conjunto de conectivo completo) *O conjunto $\{nor\}$ é completo.*

Nota. A demonstração da Proposição 3.19 utiliza a Regra da Substituição, Proposição 3.15, e indução matemática no comprimento das fórmulas. Ela não está no escopo deste livro e não é considerada.

Proposição 3.20 (relação semântica entre conectivos) *Seja E uma fórmula qualquer da Lógica Proposicional. E pode ser expressa, equivalentemente, utilizando apenas o conectivo nor e os símbolos proposicionais e de verdade presentes em E.*

Nota. A demonstração da Proposição 3.20 utiliza o princípio da indução finita e não é considerada neste livro.

3.10 Alfabeto na forma simplificada

Na definição do alfabeto da Lógica Proposicional, Definição 1.1, consideramos todos os conectivos. Ou seja, os conectivos estabelecidos no alfabeto da Lógica Proposicional são $\neg, \vee, \wedge, \rightarrow$ e $\leftrightarrow$. Entretanto, sabemos que esse conjunto de conectivos é redundante. Isto é, alguns podem ser expressos, equivalentemente, a partir de outros. Por exemplo, o conjunto $\{\neg, \vee\}$ é completo e isso significa que os outros conectivos podem ser expressos, equivalentemente, a partir de $\neg$ e $\vee$. Por isso, qualquer fórmula H, que contém conectivos $\wedge$, $\rightarrow$ e $\leftrightarrow$, pode ser expressa equivalentemente por outra fórmula G, que contém apenas os conectivos $\neg$ e $\vee$ e os símbolos proposicionais contidos em H. Levando tudo isso em conta, podemos redefinir o alfabeto da Lógica Proposicional. E nesta nova definição, são considerados apenas os conectivos $\neg$ e $\vee$, que formam um conjunto de conectivos completo. Observe que essa nova definição não modifica, do ponto de vista semântico, a linguagem da Lógica Proposicional.

Definição 3.14 (alfabeto na forma simplificada) *O alfabeto da Lógica Proposicional é constituído por:*

1. *símbolos de pontuação: $($, $)$;*
2. *símbolos proposicionais: $P, Q, R, S, P_1, Q_1, R_1, S_1, P_2, Q_2, \ldots$;*
3. *conectivos proposicionais: $\neg$,$\vee$.*

Como há outros conjuntos de conectivos completos, o alfabeto da Lógica Proposicional também pode ser redefinido de outras formas. O conjunto $\{\neg, \wedge\}$, por exemplo, é completo. Logo, na Definição 3.14, o conectivo $\vee$ pode ser trocado por $\wedge$ e outra definição equivalente é obtida. E, portanto, há várias definições para o alfabeto da Lógica Proposicional, todas equivalentes, pois expressam a mesma linguagem. Isso, porque as fórmulas da Lógica Proposicional podem ser expressas utilizando vários tipos de conjuntos de conectivos completos.

3.11 Formas normais na Lógica Proposicional

Dada uma fórmula H da Lógica Proposicional, existe uma fórmula G, equivalente a H, que está na forma normal. Mas quando é que uma fórmula está na forma normal? Quais são os tipos de formas normais? E para que servem? Entre várias aplicações, as formas normais são utilizadas, por exemplo, em Programação em Lógica. Como definimos a seguir, tais fórmulas possuem estruturas predefinidas, consideradas a seguir, a partir do conceito de literal.

Definição 3.15 (literal na Lógica Proposicional) *Um literal, na Lógica Proposicional, é um símbolo proposicional ou sua negação.*

Exemplo 3.27 (literais) Os literais são símbolos proposicionais ou a negação de símbolos proposicionais. Veja os exemplos de literais: $\neg P, Q, \neg R, \neg Q, P, S$. ■

As formas normais são formadas utilizando os literais.

Definição 3.16 (forma normal) *Há dois tipos de formas normais:*

1. *Uma fórmula H está na forma normal disjuntiva (fnd) se é uma disjunção de conjunção de literais.*
2. *Uma fórmula H está na forma normal conjuntiva (fnc) se é uma conjunção de disjunção de literais.*

Certamente, a melhor forma de entender o que são as fórmulas normais é mostrando alguns exemplos. Mas, antes disso, observe o que é uma conjunção de literais: $\neg R \wedge \neg Q \wedge P$. Essa fórmula é uma conjunção de literais por ser formada pelo conectivo $\wedge$ e os literais. Daí o nome conjunção, que dá a ideia da inclusão determinada pelo conectivo $\wedge$. Uma disjunção de literais é: $\neg R \vee \neg Q \vee P$. Essa fórmula é uma disjunção de literais porque ela é formada pelo conectivo $\vee$ e os literais. De forma similar ao caso anterior, o nome disjunção, que dá a ideia da exclusão, é determinado pelo conectivo $\vee$.

Exemplo 3.28 (formas normais) Considere, inicialmente, as três conjunções de literais: $(\neg P \wedge Q)$,
$(\neg R \wedge \neg Q \wedge P), (P \wedge S)$. Uma disjunção dessas conjunções de literais forma uma fórmula na forma normal disjuntiva. Ou seja, a fórmula H, a seguir, está na forma normal disjuntiva.

$H = (\neg P \wedge Q) \vee (\neg R \wedge \neg Q \wedge P) \vee (P \wedge S)$.

De forma análoga, considerando inicialmente as disjunções de literais:

$$(\neg P \vee Q), (\neg R \vee \neg Q \vee P), (P \vee S),$$

construímos a fórmula G, a seguir, que é uma conjunção de disjunção de literais. Isto é, G na forma normal conjuntiva.

$G = (\neg P \vee Q) \wedge (\neg R \vee \neg Q \vee P) \wedge (P \vee S)$. ■

Observe que as formas normais contém somente os conectivos $\neg$, $\vee$ e $\wedge$. E como já sabemos que os conjuntos de conectivos $\{\neg, \vee\}$ e $\{\neg, \wedge\}$ são completos, concluímos que o conjunto $\{\neg, \vee, \wedge\}$ também é completo. Daí, concluímos a Proposição 3.21, a seguir.

Proposição 3.21 (formas normais) *Seja H uma fórmula qualquer da Lógica Proposicional.*

1. *Existe uma fórmula H_{fnd} na forma normal disjuntiva que é equivalente a H,*
2. *Existe uma fórmula H_{fnc} na forma normal conjuntiva que é equivalente a H.*

Nota. A demonstração da Proposição 3.21 utiliza o princípio da indução finita e não é considerada neste livro.

Portanto, conforme a Proposição 3.21, toda fórmula da Lógica Proposicional é equivalente a alguma fórmula na forma normal conjuntiva ou na forma normal disjuntiva. O exemplo a seguir mostra como obter tais formas normais.

Exemplo 3.29 (obtenção de formas normais) Considere a fórmula

$$H = (P \rightarrow Q) \wedge R.$$

Este exemplo apresenta dois algoritmos para a obtenção de duas fórmulas H_{fnd} e H_{fnc}, equivalentes a H e tais que H_{fnd} é fnd e H_{fnc} é fnc. Analisamos, inicialmente, o algoritmo para a obtenção de H_{fnd}.

Algoritmo fnd

Primeiro passo do Algoritmo fnd**.** Construa a tabela-verdade associada a H.

P	Q	R	$(P \rightarrow Q) \wedge R$
T	T	T	T
T	T	F	F
T	F	T	F
T	F	F	F
F	T	T	T
F	T	F	F
F	F	T	T
F	F	F	F

Tabela 3.20: Tabela-verdade associada à fórmula $(P \rightarrow Q) \wedge R$.

Segundo passo do Algoritmo fnd**.** Extraia da Tabela 3.20 as linhas que interpretam a fórmula H como T, obtendo a Tabela 3.21.

P	Q	R	$(P \to Q) \land R$
T	T	T	T
F	T	T	T
F	F	T	T

Tabela 3.21: Subtabela-verdade associada à fórmula $(P \to Q) \land R$.

Terceiro passo do Algoritmo fnd**.** A primeira linha da Tabela 3.21 indica que, para se que uma interpretação de H igual a T, é necessário ter $I[P] = T$ e $I[Q] = T$ e $I[R] = T$. Construa, a partir dessas igualdades, a conjunção de literais: $P \land Q \land R$. A segunda linha diz que devemos ter $I[P] = F$ e $I[Q] = T$ e $I[R] = T$, ou seja: $I[\neg P] = T$ e $I[Q] = T$ e $I[R] = T$, o que determina a conjunção de literais $\neg P \land Q \land R$. Observe que nesse caso, como $I[P] = F$, consideramos $\neg P$ na conjunção. Finalmente, a terceira linha indica que para $I[H] = T$, devemos ter $I[P] = F$ e $I[Q] = F$ e $I[R] = T$, o que determina a conjunção: $\neg P \land \neg Q \land R$.

Quarto passo do Algoritmo fnd**.** A fórmula H é interpretada como verdadeira quando ocorre a primeira linha ou a segunda ou a terceira (observe a palavra "*ou*"). A disjunção das três conjunções obtidas é a forma normal disjuntiva associada a H. Isto é:

$$H_{fnd} = (P \land Q \land R) \lor (\neg P \land Q \land R) \lor (\neg P \land \neg Q \land R).$$

Nesse caso, H_{fnd} equivale a H e está na forma normal disjuntiva.

O algoritmo para determinar H_{fnc} é análogo ao Algoritmo fnd. Podemos dizer que o Algoritmo fnd é o dual do Algoritmo fnc, que determina a forma normal conjuntiva equivalente a H. Mas o que significa um algoritmo ser o dual de outro? O significa o conceito "dual"? Dual significa que é relativo a dois. É um adjetivo que qualifica aquilo que é composto de duas partes. Dual é um número gramatical que em certas línguas, como no grego, indica duas pessoas, ou duas coisas, e que na língua portuguesa é expressado na palavra "ambos". Dual é uma expressão inglesa que significa duplo, binário, que tem duas unidades. Na música indica dois tempos, dois compassos. Portanto, dizer que duas coisas são duais, não significa dizer necessariamente que são iguais ou equivalentes. Significa dizer que formam uma dupla e estão, intimamente, relacionadas. No nosso contexto, dizer que o Algoritmo H_{fnc} é o dual do Algoritmo H_{fnd}, significa dizer que ambos formam um todo de duas partes. E que cada parte corresponde a outra, formando uma dupla. Além disso, para que cada algoritmo corresponda ao outro, de forma dual, é preciso que as partes de um algoritmo tenha correspondentes no outro que são, também, duais. Nesse sentido, para definir o Algoritmo fnc, o primeiro passo é estabelecer dualidades entre pares de conceitos. Considere, então, a Tabela 3.22, que relaciona conceitos duais.

conceito	conceito dual
Algoritmo fnd	Algoritmo fnc
Algoritmo fnc	Algoritmo fnd
T	F
F	T
$\vee$	$\wedge$
$\wedge$	$\vee$
disjunção	conjunção
conjunção	disjunção

Tabela 3.22: Tabela de dualidades.

Algoritmo fnc

Primeiro passo do Algoritmo fnc**.** Construa a tabela-verdade associada a H.

Segundo passo do Algoritmo fnc**.** O Algoritmo fnc é o dual do Algoritmo fnd. Isso significa que o Algoritmo fnc segue passos análogos ao Algoritmo fnd, só que de forma dual. No segundo passo do Algoritmo fnd, extraímos da Tabela 3.20 as linhas que interpretam a fórmula H como T, obtendo a Tabela 3.21. Logo, de forma dual, como o dual de T é F, então no segundo passo do Algoritmo fnc, extraímos da Tabela 3.20 as linhas que interpretam a fórmula H como F, obtendo a Tabela 3.23.

P	Q	R	$(P \rightarrow Q) \wedge R$
T	T	F	F
T	F	T	F
T	F	F	F
F	T	F	F
F	F	F	F

Tabela 3.23: Subtabela-verdade associada à fórmula $(P \rightarrow Q) \wedge R$.

Terceiro passo do Algoritmo fnc**.** A primeira linha da Tabela 3.23 indica que, para se ter uma interpretação de H igual a F, é necessário ter $I[P] = T$ e $I[Q] = T$ e $I[R] = F$. Construa, a partir dessas igualdades, a disjunção dos literais. Observe que nesse caso construímos a disjunção, que é o conceito dual da conjunção. Além disso, no Algoritmo fnd, a partir de uma igualdade do tipo $I[P] = T$, consideramos o literal P. Por outro lado, a partir de uma igualdade $I[P] = F$, consideramos o literal $\neg P$. Assim, de forma dual, no Algoritmo fnc, a partir de uma igualdade do tipo $I[P] = T$, consideramos o literal $\neg P$. E a partir de uma igualdade $I[P] = F$ consideramos o literal P. Portanto, no Algoritmo fnc, a partir das igualdades $I[P] = T$ e $I[Q] = T$ e $I[R] = F$, construímos a disjunção de literais: $\neg P \vee \neg Q \vee R$. Observe que nesse caso, de forma dual, como $I[P] = T$, consideramos $\neg P$ na conjunção. Por outro lado, como $I[R] = F$, consideramos R na conjunção. A segunda linha diz que devemos ter $I[P] = T$ e $I[Q] = F$ e $I[R] = T$, o que determina a disjunção de literais: $\neg P \vee Q \vee \neg R$. De forma análoga, sempre considerando o dual do Algoritmo fnd, o resultado da análise da terceira linha é: $\neg P \vee Q \vee R$, da quarta linha é: $P \vee \neg Q \vee R$, e da quinta linha é: $P \vee Q \vee R$.

Quarto passo do Algoritmo fnc. Nesse caso, consideramos o dual do quarto passo do Algoritmo fnd. Ou seja, fazemos a conjunção das disjunções obtidas no terceiro passo do Algoritmo fnc. A conjunção das cinco disjunções obtidas é a forma normal conjuntiva associada a H. Isto é:

$H_{fnc} = (\neg P \vee \neg Q \vee R) \wedge (\neg P \vee Q \vee \neg R) \wedge (\neg P \vee Q \vee R) \wedge (P \vee \neg Q \vee R) \wedge (P \vee Q \vee R)$.

Nesse caso, H_{fnc} equivale a H e está na forma normal conjuntiva. Por fim, observe que a fórmula $H = (P \rightarrow Q) \wedge R$ equivale à fórmula $H_{fnc_1} = (\neg P \vee Q) \wedge R$, que está na forma normal conjuntiva. Nesse caso, H equivale a duas fórmulas na forma normal conjuntiva, H_{fnc} e H_{fnc_1}. Isso significa que as formas normais equivalentes a uma fórmula H não são únicas. ∎

O Exemplo 3.29 considera uma fórmula H que é uma contigência. Por isso, na Tabela 3.29, temos símbolos T e F na coluna de H. Uma boa questão é adaptar o algoritmo exposto para fórmulas que não são contingências. Ou seja, como aplicar o algoritmo a uma tautologia, ou a uma contradição?

3.12 Classificação dos argumentos lógicos

Afinal, o que é a Lógica? Ela pode ser entendida como a ciência da avaliação de argumentos [Hurley]. É uma pequena e incompleta resposta para uma grande pergunta. Mas essa resposta nos mostra a importância do estudo dos argumentos na Lógica. Desse estudo, da Argumentação Lógica, podemos entender melhor o que é a Lógica. Mas, o que são argumentos? Já falamos um pouco a respeito disso. Eles possuem a forma:

premissas $\rightarrow$ conclusão.

Observando essa definição, temos a seguinte questão: Qual deve ser a relação entre as premissas e a conclusão, para um argumento ser bom? Geralmente, em um bom argumento, as premissas devem ser verdadeiras e apresentar provas pertinentes que corroborem a conclusão. Em outras palavras, as premissas devem ser declarações favoráveis à prova da conclusão. Portanto, as premissas não devem ser declarações sabidamente falsas e devem ser ligadas casualmente às conclusões. Para o argumento ser bom, suas premissas devem, necessariamente, ser verdadeiras e justificar a conclusão. Isto é, em um bom argumento, o conectivo "$\rightarrow$" não deve ser apenas uma implicação material. Mas, nem todas as passagens do tipo:

$$\textbf{premissas} \rightarrow \textbf{conclusão.}$$

é um argumento lógico. Por exemplo, um aviso é uma forma de expressão que procura chamar a atenção de alguém para algo que pode, por exemplo, ser perigoso. Os avisos não procuram provar nada a ninguém. Nesse sentido, eles não são argumentos. Veja um exemplo: "Se houver incêndio, então não use o elevador.". Outros importantes tipos de passagens que não são argumentos lógicos são as explicações. Uma explicação é um conjunto de sentenças cujo objetivo é elucidar algum fenômeno ou evento. As explicações não procuram provar nada a ninguém. Nesse sentido, elas não são argumentos. Este parágrafo, por exemplo, é uma explicação, não é um argumento.

Uma opinião também pode não ser um argumento. Nesse caso, a opinião, em geral, é uma expressão de alguma coisa em que alguém acredita. Quando o autor da opinião não demanda nenhuma prova sobre o objeto de sua crença, a opinião não é um argumento. Por exemplo: "Se alguém tem no coração a piedade, então ama o próximo". E como a Lógica que estamos estudando lida com os argumentos lógicos, é importante saber identificá-los. Em geral, uma passagem contém um argumento se é seu objetivo provar alguma coisa. Se não é esse o caso, não há o objetivo de provar coisa alguma, então a passagem não contém um argumento. Para uma passagem ser um argumento lógico, pelo menos duas condições devem ser satisfeitas: estamos afirmando alguma coisa e deve haver também alguma implicação a partir da qual se conclui algo. Portanto, para uma passagem ser um argumento lógico, pelo menos três condições devem ser satisfeitas:

1. há na passagem alguma proposição que afirma alguma coisa;
2. há alguma implicação a partir da proposição afirmada;
3. a implicação conclui algo.

Portanto, dada uma implicação, se dela não provamos qualquer conclusão, então ela não é um argumento. E entre as passagens que são argumentos, as melhores são aquelas que definem os bons argumentos.

Argumento bom. Um argumento é bom quando suas premissas são verdadeiras e justificam a conclusão.

Portanto, a classificação de um argumento corresponde à classificação da relação entre as premissas e a conclusão e da veracidade das premissas. Considere o exemplo. Mas o que significam premissas verdadeiras, ou falsas? Quando alguma coisa é verdadeira? Isso pode depender da forma de ver a questão. Para um argumento ser bom, é necessário que suas premissas sejam verdadeiras. Logo, essa qualidade de um argumento depende da forma que vemos e interpretamos suas premissas. E isso pode não ser muito simples, pois as pessoas podem discordar sobre a veracidade das premissas. Observe o exemplo.

Exemplo 3.30 (argumento 1) Considere:

Argumento 1: "Quem tem dinheiro é feliz. Zé tem dinheiro. Portanto, Zé é feliz."

Considere as representações: $P =$ "Quem tem dinheiro é feliz" $Q =$ "Zé tem dinheiro" e $R =$ "Zé é feliz". Nesse caso, o argumento é representado por

Argumento 1: $(P \wedge Q) \rightarrow R$

O argumento 1 não é tão bom, pois não necessariamente as premissas são verdadeiras. Isto é, nem sempre é verdade que quem tem dinheiro é feliz. Além disso, as premissas não apresentam provas pertinentes que corroborem a conclusão. Tais premissas não necessariamente são declarações favoráveis à prova da conclusão: "Zé é feliz". Ou seja, as premissas não são ligadas casualmente à conclusão. ■

Um argumento é bom, quando suas premissas são verdadeiras e justificam a conclusão. É claro, quando as premissas não são verdadeiras, o argumento não pode ser bom. Isso ocorre porque a partir de sentenças falsas, podemos concluir qualquer coisa. Isto é, se as premissas são falsas, então a implicação que define o argumento é verdadeira.

$$\forall\, I,\ I[\text{ premissas }] = F \quad\Rightarrow\quad I[\text{ premissas } \rightarrow \text{ conclusão }] = T$$

E com premissas falsas a implicação que define o argumento é sempre verdadeira e, por isso, destituída de significado não material. Além de tudo isso, para ser um bom argumento, as premissas também devem justificar a conclusão. De nada adianta premissas verdadeiras que não justificam a conclusão.

Exemplo 3.31 (argumento 2) Considere:

Argumento 2: "Este livro que você está lendo fala de Lógica. Lógica é um tema importante. Portanto, Zé sabe Lógica."

Nesse caso, as premissas que dizem que este livro tem como tema a Lógica e que a Lógica é importante é verdadeira. Certamente, há um consenso sobre tais fatos. Entretanto, tais premissas não justificam a conclusão. Isso, porque pode ocorrer o caso no qual as premissas são verdadeiras e a conclusão é falsa. Nesse caso temos:

$$\exists\, I;\ I[\text{ premissas }] = T \text{ e } I[\text{ conclusão }] = F$$

Logo,

$$\exists\, I;\ I[\text{ premissas } \rightarrow \text{ conclusão }] = F$$

Portanto, apesar de serem verdadeiras, as premissas não justificam a conclusão. ■

Na maioria das vezes, conseguimos detectar quando as premissas não justificam a conclusão. Nesses casos, geralmente temos argumentos que nos incomodam. Entretanto, nem sempre é fácil mostrar que as premissas são verdadeiras. Alguns argumentos até podem parecer bons, mas na verdade são falácias: argumentos ruins, que se parecem bons. Tudo isso porque não sabemos exatamente o que é verdadeiro e nem o que é falso. Essa é uma questão difícil, pois pode depender até de nossos sonhos. E por isso, nem sempre é objetivo da análise lógica dos argumentos, determinar se alguma coisa é verdadeira ou falsa. Portanto, como pode ser difícil saber se as premissas de um argumento são verdadeiras ou não, então também pode ser difícil saber se o argumento é bom ou não. Nesse sentido, quando um argumento é submetido à analise lógica, para simplificar, a questão observada nem sempre é a veracidade das premissas, ou saber se ele é bom ou ruim. O que observamos é se as premissas são, ou não, relevantes para a conclusão, ou seja, se o argumento é correto ou incorreto.

Argumento correto. Um argumento é correto quando suas premissas justificam a conclusão.

Portanto, em um argumento correto, não podemos ter premissas verdadeiras e conclusão falsa. Além disso, em um argumento correto, não necessariamente suas premissas são verdadeiras. Logo, se o argumento é correto, não necessariamente ele é bom. Mas, se é bom, então é correto.

Exemplo 3.32 (argumento correto) Considere:

Argumento 3: "O mal existe no mundo. Se o mal existe no mundo, então Deus não pode evitar o mal, ou então Ele não quer evitar o mal. Se Deus não pode evitar o mal, então Ele não é onipotente. Se Deus não quer evitar o mal, não é benevolente. Portanto, ou Deus não é onipotente, ou Ele não é benevolente."

Queremos saber se esse argumento é correto. Então, considere as representações: $P_1 =$ "O mal existe no mundo." $P_2 =$ "Deus não pode evitar o mal." $P_3 =$ "Deus não quer evitar o mal." $P_4 =$ "Deus não é onipotente." $P_5 =$ "Deus não é benevolente." Nesse caso, o argumento é representado por:

Argumento 3: $(P_1 \land (P_1 \to (P_2 \lor P_3)) \land (P_2 \to P_4) \land (P_3 \to P_5)) \to (P_4 \lor P_5)$

O argumento 3 é uma tautologia. Construa uma tabela-verdade e certifique-se desse fato. Caso fique desanimado com o tamanho da tabela, estude o próximo capítulo e utilize um método mais interessante para demonstrar que esse argumento é mesmo uma tautologia. Mas, se o argumento 3 é uma tautologia, então não existe interpretação que interpreta as premissas como verdadeiras e a conclusão como falsa. Resta saber se suas premissas justificam sua conclusão. Se for o caso, o argumento é correto. Além disso, ele é bom se suas premissas são também verdadeiras. Com certeza, saber se uma declaração como: "O mal existe no mundo." é verdadeira não é objeto do estudo da Lógica. Nesse sentido, para nós, basta saber que o argumento é uma tautologia. E que ele é correto se suas premissas justificam a conclusão. Nesse sentido, somente a partir de um estudo teológico podemos discutir se o argumento é bom, ou não. ■

Os argumentos 1 e 2 dos Exemplos 3.30 e 3.31 não são corretos. Por outro lado, o argumento 3, do Exemplo 3.32, é uma tautologia. Apesar disso não podemos concluir que ele é correto. Pois, para ser correto, além de ser uma tautologia, as premissas do argumento devem justificar a sua conclusão. Portanto,

1. se um argumento é correto, então ele é uma tautologia;
2. se um argumento é uma tautologia, não necessariamente ele é correto. Pois podemos ter argumentos que são tautologias, nos quais as premissas não justificam a conclusão.

Então, para identificar se um argumento é, ou não, correto, o primeiro passo é saber se existe alguma interpretação que interpreta suas premissas como verdadeiras e a conclusão como falsa. Ou seja,

1. Argumento tautológico: $\nexists\ I;\ I[\text{ premissas }] = T$ e $I[\text{ conclusão }] = F$;
2. Argumento incorreto: $\exists\ I;\ I[\text{ premissas }] = T$ e $I[\text{ conclusão }] = F$.

Então, dado que a implicação: **premissas** $\rightarrow$ **conclusão** é uma tautologia, o segundo passo, para identificar se o argumento é correto, é saber se as premissas justificam a conclusão. Observe que podemos ter tautologia com premissas falsas. Além disso, se as premissas são falsas, o argumento é uma tautologia, mas não é correto, pois suas premissas não justificam a conclusão. Observe mais um exemplo.

Exemplo 3.33 (argumento 4) Considere uma fila infinita de dominós, todos enfileirados de forma que se o primeiro da fila cair, ele empurra o segundo, que empurra o terceiro, que empurra o quarto e assim por diante. É uma fila análoga àquela que aparece na TV. A única diferença da nossa fila de dominós para aquela que aparece na TV, é que temos uma fila infinita de dominós. Na TV, por maior que seja a fila de dominós, ela é finita, pois lá temos um número finito de dominós. A respeito dessa fila de dominós, temos uma questão relevante: qual é a condição suficiente para que todos os dominós caiam? Muitos concordam que uma condição suficiente é a seguinte:

1. Empurrar o primeiro.
2. Todo dominó deve estar perto do dominó da frente. Assim, quando ele cair, ele empurra o da frente.

Vamos, agora, generalizar essa história. Denote a ideia "derrubar o dominó número n" por $\varphi(x)$. Isto é, a propriedade $\varphi(x)$ é verdadeira se, e somente se, "o dominó número n cai". Considere, então, as representações:

- $P =$ "$\varphi(1)$ é verdadeira";
- $Q =$ "se $\varphi(n)$ é verdadeiro, então $\varphi(n+1)$ é verdadeiro";
- $R =$ "para todo n, $\varphi(n)$ é verdadeiro".

Com essas representações, temos: "se P e Q, então R". Nesse caso, temos o argumento.

Argumento 4. $(P \wedge Q) \rightarrow R$

Esse argumento é correto ou não? O argumento 4 tem importância fundamental na Matemática, pois é um paradigma que corresponde aproximadamente ao princípio da indução finita. E será que na Matemática, todos os matemáticos aceitam que a premissa $(P \wedge Q)$ justifica a conclusão R? Não! Nem todo matemático aceita como válida essa implicação. Raciocine informalmente da seguinte forma. Quando o primeiro dominó cai, ele leva um "tempinho" para derrubar o segundo dominó. O segundo também leva um tempinho para derrubar o terceiro e assim por diante. Portanto, a qualquer momento, quando olhamos para a fila infinita de dominós, ainda temos dominós em pé. Logo, é falso que todos cairão. Então, concluímos que o argumento 4 não é correto. Mas podemos raciocinar de maneira diferente. Escolha um dominó qualquer na fila. Em algum momento, no futuro, ele cairá. Logo, todos os dominós cairão. Dessa forma, concluímos que o argumento 4 é correto. Mas, afinal, onde está o verdadeiro problema que gera a controvérsia sobre o argumento 4? Sem considerar tal questão do ponto de vista filosófico e simplificando bastante, podemos dizer que o argumento 4 possui premissas que representam conceitos bem diferentes da conclusão. A premissa fala sobre o primeiro dominó e também como a fila é disposta, olhando sempre para dominós vizinhos. Por outro lado, a conclusão fala sobre algo que acontece em um conjunto infinito de dominós, que todos cairão. Então, nesse sentido, simplificando muito e sem detalhar o possível debate filosófico, podemos dizer que o argumento 4 corresponde a uma implicação que tem premissas sobre fatos que definem certa disposição dos dominós e uma conclusão que fala de coisas infinitas. Certamente, uma implicação dessa natureza pode ser bem problemática. ■

A vida seria ótima se todos os argumentos fossem bons. Isto é, com premissas verdadeiras, que justificam a conclusão. Entretanto, isso não ocorre. Veja, o exemplo.

Exemplo 3.34 (melhoria de argumentos) Considere:

Argumento 5: "Todo rico é feliz. Zé tem dinheiro. Portanto, Zé é feliz."

E as representações: $Q =$ "Todo rico é feliz", $P_1 =$ "Zé tem dinheiro" e $R =$ "Zé é feliz". Nesse caso, o argumento é representado por:

Argumento 5: $(Q \wedge P_1) \rightarrow R$.

Esse argumento é horrível. Pode até ser verdadeira a sua premissa, mas ele não é correto. E, portanto, não é bom. Mas, podemos melhorá-lo um pouco. Suponha,

Argumento 6: "Todo rico é feliz. Zé tem dinheiro. Zé tem uma família que ele ama. Portanto, Zé é feliz."

E a representação adicional: $P_2 =$ "Zé tem uma família que ele ama". Nesse caso, o argumento é representado por:

Argumento 6: $(Q \wedge P_1 \wedge P_2) \rightarrow R$.

Temos agora um argumento melhor. Isto é, apesar de não ser correto, o argumento 6 é melhor, ou mais forte, que o argumento 5. Podemos adicionar, ainda, outras premissas ao argumento 5 e fazê-lo mais forte ainda. Considere:

Argumento 7: "Todo rico é feliz. Zé tem dinheiro. Zé tem uma família que ele ama. A família de Zé o ama. Zé tem uma relação ética e com bons valores com sua família. Zé estima e é estimado por seus amigos. Zé tem uma relação ética e com bons valores com seus amigos. Zé ama tudo que faz. Zé é otimista. Zé ama a vida e ama viver. Portanto, Zé é feliz."

E as representações adicionais: $P_3 =$ "A família de Zé o ama", $P_4 =$ "Zé tem uma relação ética e com bons valores com sua família", $P_5 =$ "Zé estima e é estimado por seus amigos", $P_6 =$ "Zé tem uma relação ética e com bons valores com seus amigos", $P_7 =$ "Zé ama tudo que faz", $P_8 =$ "Zé é otimista", $P_9 =$ "Zé ama a vida e ama viver". Nesse caso, o argumento é representado por:

Argumento 7: $(Q \wedge P_1 \wedge P_2 \wedge P_3 \wedge P_4 \wedge P_5 \wedge P_6 \wedge P_7 \wedge P_8 \wedge P_9) \rightarrow R$.

O argumento 7 ainda não é correto, pois pode existir um tal Zé que mesmo vivendo conforme as premissas desse argumento, ainda consegue ser infeliz. Mas, temos que admitir que o argumento 7, apesar de não ser correto, é muito forte, pois um Zé assim é muito raro. Por isso, ele é bem mais forte que os argumentos 5 e 6. Além disso, o argumento 7 é obtido a partir do argumento 5, adicionando novas premissas. E devemos observar que uma nova premissa somente deve ser adicionada a um argumento, se o argumento se torna mais forte. Também, uma nova premissa somente deve ser adicionada a um argumento, se a premissa é plausível para nós e para as outras pessoas e se a premissa é mais plausível que a conclusão. ■

Os argumentos lógicos incorretos são classificados dos mais fortes, até os mais fracos, dependendo das implicações que os definem. Dado o argumento, se somente em situações raras conseguimos interpretar como verdadeiras as premissas; e como falsa a conclusão, dizemos então que o argumento em questão não é correto, mas é forte.

Argumento forte. Um argumento incorreto é forte se são raras as situações em que as premissas são verdadeiras e a conclusão, falsa.

Por outro lado, se em situações frequentes conseguimos interpretar como verdadeiras as premissas e como falsa a conclusão, dizemos que o argumento não é correto e é fraco.

Argumento fraco. Um argumento incorreto é fraco se são frequentes as situações em que as premissas são verdadeiras e a conclusão falsa.

Em geral, para classificar um argumento como forte, ou fraco, é necessário ter informações sobre o contexto do argumento. E, se temos tais informações, podemos dizer que no Exemplo 3.34, o argumento 7 é mais forte que o 6, e este é mais forte que o 5. Além disso, dada a cultura matemática, podemos dizer que o argumento 4, do Exemplo 3.33, é forte, muito forte. Finalmente, os argumentos 1 e 2, dos Exemplos 3.30 e 3.31, são fracos. Considere o exemplo a seguir.

Exemplo 3.35 (argumento 8) Um colecionador de borboletas andava pela floresta à procura dos belos insetos. De repente, foi capturado por índios antropófagos e levado ao centro da aldeia. Lá, os índios prepararam um caldeirão com tempero à vontade. Ao lado do caldeirão se encontrava o chefe da tribo. Acontece que o chefe aprendera Lógica pela Internet. Então, ele se dirigiu ao colecionador e fez a seguinte proposta: "Senhor colecionador, faça uma afirmação! Se a sua afirmação for falsa, então o senhor será cozido em fogo brando neste caldeirão e em seguida devorado pelos companheiros da tribo. Por outro lado, se sua afirmação for verdadeira, então o senhor será comido vivo." No começo, o colecionador ficou aflito. Mas ele, como o chefe da tribo, também sabia um pouco de Lógica. O colecionador fez uma afirmação e foi libertado pelo chefe. Qual a afirmação feita por ele? Ele disse: "Eu serei cozido no caldeirão!" E dada essa afirmação, o chefe deixou o colecionador ir embora. Por quê? Considere inicialmente as representações:
$P =$ "Afirmação do colecionador é falsa",

$P_1 =$ "O colecionador é cozido em fogo brando no caldeirão",
$Q =$ "Afirmação do colecionador é verdadeira",
$Q_1 =$ "O colecionador é comido vivo",
$R =$ "O colecionador afirma: Eu serei cozido no caldeirão",
$S =$ "A afirmação do colecionador não é verdadeira e nem falsa."
A partir dessas representações, temos o argumento:

Argumento 8: $((P \to P_1) \land (Q \to Q_1) \land R) \to S$.

Preste atenção! O colecionador disse: "Eu serei cozido no caldeirão." Se essa afirmação for verdadeira, então, como combinado pelo chefe, o colecionador deveria ser comido vivo. Mas se ele for comido vivo, então a afirmação dita por ele é falsa. E se a afirmação for falsa, então, como combinado pelo chefe, o colecionador deveria ser cozido no caldeirão. Mas, se for cozido no caldeirão, então a afirmação dita é verdadeira. E aí temos a seguinte conclusão: Se a afirmação é verdadeira, então ela é falsa. Por outro lado, se ela é falsa, então é verdadeira. Isso nos mostra que nem toda afirmação pode ser interpretada como verdadeira ou falsa, como ocorre na Lógica que estamos estudando. Além disso, as premissas desse argumento justificam sua conclusão. Ou seja, se as premissas do argumento são verdadeiras, então a conclusão também é verdadeira. Por isso, suas premissas justificam a conclusão. E dado que a conclusão do argumento nos diz que a afirmação do colecionador não é verdadeira e nem falsa, então, por isso, o chefe da tribo o libertou. Um final feliz. Isso significa que o argumento 8 é bom, pois, suas premissas são verdadeiras, conforme a história. E, além disso, suas premissas justificam a conclusão. Ou seja, se as premissas são verdadeiras, então a conclusão também é verdadeira. Por tudo isso, o colecionador, com um bom argumento, convenceu o chefe a libertá-lo. ■

3.12.1 As propriedades semânticas e os argumentos lógicos

Em geral, quando estudamos a classificação dos argumentos lógicos, tentamos relacionar os conceitos apresentados com as propriedades semânticas da Lógica Proposicional. E, com certeza, essa relação ocorre.

Tautologia. Se um argumento é uma tautologia, isso não significa que ele é correto ou bom. Nesse caso, temos apenas que suas premissas implicam na conclusão. Observe que podemos ter uma tautologia com premissas falsas. E, nesse caso, suas premissas não justificam a conclusão. Isto é, o argumento não é correto e nem bom. O bom mesmo é conseguir argumentos que são tautologias e que possuem premissas verdadeiras que justificam a conclusão.

Implicação. Estamos à procura de bons argumentos, ou, pelo menos, argumentos corretos. E para o argumento ser correto, um primeiro passo é que suas premissas implicam a conclusão. Nesse caso:

$$\nexists\, I;\ I[\text{ premissas }] = T \ \text{ e } \ I[\text{ conclusão }] = F$$

Satisfatibilidade. Nem sempre, temos argumentos corretos. Na maioria das vezes, há casos nos quais as premissas são verdadeiras e a conclusão, falsa. Isto é:

$$\exists\ I;\ I[\text{ premissas }] = T \text{ e } I[\text{ conclusão }] = F$$

Entretanto, pelo menos alguém deve interpretar no argumento como verdadeiro. Pelo menos aquele que o formula. Nesse sentido, o argumento deve ser, pelo menos, satisfatível. Mas, dado que é satisfatível, melhor ainda é se ele, além disso, for forte.

Contradição. É claro que de nada serve um argumento contraditório. Ou seja, um argumento no qual:

$$\forall\ I;\ I[\text{ premissas }] = T \text{ e } I[\text{ conclusão }] = F$$

Nesse caso, nem mesmo aquele que formula o argumento o interpreta como verdadeiro.

Contingência. Se um argumento não é correto, então:

$$\exists\ I;\ I[\text{ premissas }] = T \text{ e } I[\text{ conclusão }] = F$$

Mas, se ele é forte, ou fraco, alguém interpreta o argumento como verdadeiro. Portanto, argumentos fortes ou fracos são contingências.

3.13 Exercícios

1. Demonstre se as afirmações são verdadeiras.
   (a) Se $(E \leftrightarrow G)$ e $(G \leftrightarrow H)$ são tautologias, então $(E \leftrightarrow H)$ é tautologia.
   (b) $(E \leftrightarrow G)$ é tautologia, se, e somente se, $(E \wedge G)$ é tautologia ou $(\neg E \wedge \neg G)$ é tautologia.
   (c) Se $I[E \leftrightarrow G] = T$, então $I[E \wedge G] = T$ ou $I[\neg E \wedge \neg G] = T$.
   (d) $\neg(E \leftrightarrow G)$ é tautologia, se, e somente se, E e $\neg G$ são tautologias.
   (e) Se $I[\neg(E \rightarrow G)] = T$, então $I[E] = I[\neg G] = T$.
   (f) Comente a relação entre os resultados dos itens b) e c) com os itens d) e e), respectivamente.

2. Sejam H e G as fórmulas indicadas a seguir. Identifique, justificando sua resposta, os casos em que H implica G.
   (a) $H = P \wedge Q, G = P$
   (b) $H = P \vee Q, G = P$
   (c) $H = P \vee \neg Q, G = false$
   (d) $H = false, G = P$
   (e) $H = P, G = true$

3. Considere as fórmulas $H_1, \ldots, H_{10}$, que são formadas utilizando os símbolos proposicionais P e Q e possuem a tabela-verdade indicada na Tabela 3.24.

   (a) Identifique os valores de i tais que H_i implica H_j para todo j.

   (b) Identifique os valores de i tais que $\mathrm{H}_i \nvDash H_j$ para todo j.

   (c) Identifique valores de i, j, k diferentes entre si, tais que H_i implica H_j e H_j implica H_k. Certifique-se de que H_i implica H_k.

   (d) Existem valores de i, j diferentes entre si, tais que H_i implica H_j e H_j implica H_i? Como deve ser a relação entre as colunas de H_i e H_j para que essas relações de implicação ocorram?

   (e) Existem valores de i, j tais que H_i implica H_j e $H_j \nvDash H_i$?

   (f) Existem valores de i, j, k diferentes entre si, tais que H_i implica H_j, H_j implica H_k e H_k implica H_i? Como deve ser a relação entre as colunas de H_i, H_j e H_k para que essas relações de implicação ocorram?

   (g) O conjunto de fórmulas H_2,H_3,H_4,H_5 é satisfatível?

   (h) Qual o maior conjunto satisfatível obtido das fórmulas H_1,...,H_{10}?

   (i) Identifique as fórmulas H_i que são tautologias, as que são satisfatíveis e as que são contraditórias.

   (j) Construa as fórmulas H_1,...,H_{10} a partir dos símbolos proposicionais P e Q.

P	Q	H_1	H_2	H_3	H_4	H_5	H_6	H_7	H_8	H_9	H_{10}
T	T	T	T	T	T	F	T	F	T	F	F
T	F	T	T	T	F	T	T	F	F	T	F
F	T	T	T	F	T	T	F	T	F	T	F
F	F	T	F	T	T	T	F	T	T	F	F

Tabela 3.24: Tabela-verdade associada às fórmulas $H_1, \ldots, H_{10}$.

4. Considere as fórmulas H e G, que são formadas utilizando apenas os símbolos proposicionais P e Q e a tabela associada (Tabela 3.25).

P	Q	H	G
T	T		
T	F		
F	T		
F	F		

Tabela 3.25: Tabela-verdade associada às fórmulas H e G.

   (a) Como deve ser a relação entre as colunas de H e G para que H seja equivalente a G?
   (b) Como deve ser a relação entre as colunas de H e G para que H implique G?

5. Considere as fórmulas: A, B, C e D. Demonstre que $\{A, B, C, D\}$ é insatisfatível se, e somente se, $\neg(A \wedge (B \wedge (C \wedge D)))$ é tautologia.
6. Sejam H e G as fórmulas indicadas a seguir. Identifique, justificando sua resposta, os casos em que H é equivalente a G.
   (a) $H = P$, $G = Q$.
   (b) $H = P$, $G = P$.
   (c) $H = ((P \rightarrow Q) \rightarrow R) \rightarrow (P \rightarrow S), G = true$.
   (d) $H = (P \rightarrow Q) \leftrightarrow (\neg P \vee Q), G = true$.
   (e) H é tautologia, $G = true$.
   (f) H é contraditória, $G = false$.
   (g) H é contraditória, G é contraditória.
   (h) H é tautologia, G é tautologia.
   (i) H é satisfatível, G é satisfatível.
7. Demonstre se as afirmações a seguir são verdadeiras ou falsas.
   (a) H não é satisfatível, se, e somente se, H é contraditória.
   (b) H é satisfatível, se, e somente se, H não é contraditória.
   (c) $\neg H$ é tautologia, se, e somente se, H é contraditória.
   (d) H não é tautologia, se, e somente se, H é contraditória.
   (e) H é satisfatível, se, e somente se, $\neg H$ é satisfatível.
   (f) H é contraditória, se, e somente se, $\neg H$ é satisfatível.
   (g) H é tautologia, se, e somente se, $\neg H$ é contraditória.
   (h) H é tautologia, se, e somente se, H é satisfatível.
   (i) Se H é contraditória, então $\neg H$ é satisfatível.
   (j) Se H é tautologia, então $H \wedge G$ equivale a G.
8. Demonstre se as afirmações a seguir são verdadeiras ou falsas.
   (a) H é tautologia, se, e somente se, $H \wedge G$ equivale a G.
   (b) Se H é tautologia, então $H \vee G$ equivale a G.
   (c) Se $H \vee G$ equivale a G, então H é tautologia.

(d) Se H é satisfatível, então $(H \vee G)$ equivale a G.

(e) Se H implica G e G é tautologia, então H é tautologia.

(f) Se H implica G e H é tautologia, então G é tautologia.

(g) Se H é satisfatível, então $H \wedge G$ equivale a G.

(h) H é tautologia ou G é tautologia $\Rightarrow$ se $\neg H$ é contraditória, então G é tautologia.

(i) Se H implica G, então $(H \rightarrow E)$ implica $(G \rightarrow E)$.

(j) Se H e $(\neg G \rightarrow \neg H)$ são tautologias, então G é tautologia.

(k) Se H é satisfatível e $(H \rightarrow G)$ é satisfatível, então G é satisfatível.

(l) Se H é satisfatível e $(H \rightarrow G)$ é tautologia, então G é satisfatível.

9. Demonstre se as afirmações a seguir são verdadeiras ou falsas.

(a) Se H é satisfatível, então H é tautologia.

(b) Se H equivale a G, então H implica G.

(c) Se H implica G, então H equivale a G.

(d) Se H implica G, então $(H \vee E)$ implica $(G \vee E)$.

(e) Se H implica G, então $(H \wedge E)$ implica $(G \wedge E)$.

(f) Se H implica G, então $(G \rightarrow E)$ implica $(H \rightarrow E)$.

(g) Se H implica G e G implica E, então H implica E.

(h) Se G e E são tautologias, então G equivale a E.

(i) Se H é tautologia, então E implica H para toda fórmula E.

(j) Se H é contraditória, então H implica E para toda fórmula E.

10. Demonstre se as afirmações a seguir são verdadeiras ou falsas.

(a) Se β é um conjunto de tautologias, então β implica E para toda fórmula E.

(b) Se $(H_1 \wedge H_2 \wedge \ldots \wedge H_n)$ é tautologia, então $\{H_1, H_2, \ldots., H_n\}$ é satisfatível.

(c) Se $\{H_1, H_2, \ldots., H_n\}$ é satisfatível, então $(H_1 \wedge H_2 \wedge \ldots \wedge H_n)$ é tautologia.

(d) Se $\{H_1, H_2, \ldots., H_n\}$ é satisfatível, então $(H_1 \wedge H_2 \wedge \ldots \wedge H_n)$ é satisfatível.

(e) $\{H_1, H_2, \ldots., H_n\}$ é insatisfatível se, e somente se, $\neg(H_1 \wedge H_2 \wedge \ldots \wedge H_n)$ é tautologia.

(f) Se $\{H_1, H_2, \ldots, H_n\}$ é satisfatível, então $H_1, H_2 \ldots .. H_n$ são equivalentes entre si.

(g) Se H é satisfatível, então existem infinitas interpretações I, tais que $I[H] = T$.

(h) As fórmulas contraditórias são equivalentes entre si.

(i) As fórmulas que são tautologias são equivalentes entre si.

(j) As fórmulas satisfatíveis são equivalentes entre si.

(k) Se H é satisfatível, então $\neg H$ é satisfatível?

(l) Toda tautologia é uma fórmula satisfatível.

(m) Dada uma fórmula contraditória H, é possível encontrar uma interpretação I tal que $I[H] = T$.

(n) Se H é uma tautologia, então não existe interpretação I tal que $I[\neg H] = T$.

(o) Se $H_1, H_2, \ldots, H_n$ é um conjunto satisfatível de fórmulas, então para toda interpretação I, $I[H_i] = T$.

11. Demonstre que

    (a) H é contraditória $\Rightarrow (H \rightarrow G)$ é tautologia.

    (b) H é tautologia e G é contraditória $\Rightarrow (H \rightarrow G)$ é contraditória.

    (c) $\{H$ é satisfatível, $(H \rightarrow G)$ é satisfatível $\} \Rightarrow \{G$ é satisfatível $\}$.

    (d) $\{H$ é tautologia, $\neg G \rightarrow \neg H$ é tautologia $\} \Rightarrow \{G$ é tautologia $\}$.

    (e) Demonstre se é verdadeiro ou falso o inverso das implicações expressas nos itens anteriores.

12. Seja I uma interpretação e as fórmulas H e G. Demonstre que:

    (a) Se $I[H] = T$ e $I[H \rightarrow G] = T$, então $I[G] = T$.

    (b) Se $I[H \rightarrow G] = T$, então não necessariamente $I[G] = T$.

13. Demonstre que:

    (a) H implica $G \Leftrightarrow$ não existe interpretação I; $I[H] = T$ e $I[G] = F$.

    (b) $H \nvDash G \Leftrightarrow$ existe interpretação I; $I[H] = T$ e $I[G] = F$.

    (c) H implica $G \Leftrightarrow$ para toda interpretação I; $I[H] = F$ ou $I[G] = T$.

14. Sejam H e G duas fórmulas tais que H implica G. A partir desse fato, é possível concluir que para toda interpretação I, $I[H] = T$ e $I[G] = T$? Justifique sua resposta.

15. Considere os conjuntos de fórmulas a seguir. Determine quais conjuntos são satisfatíveis.

    (a) $\{P, \neg P\}$.

    (b) $\{S \rightarrow Q, P \vee \neg(S \wedge P), S\}$.

    (c) $\{\neg(\neg Q \vee P), P \vee \neg R, Q \rightarrow \neg R\}$.

(d) $\{(\neg Q \wedge R) \rightarrow P, Q \rightarrow (\neg P \rightarrow R), P \leftrightarrow \neg R\}$.

(e) $\{P \rightarrow Q, Q \rightarrow R, R \rightarrow S, S \rightarrow P\}$.

(f) $\{P \rightarrow Q, (P \wedge R) \rightarrow (P \wedge Q \wedge R), (Q \vee R \vee S)\}$.

(g) $\{P \rightarrow Q, \neg(Q \wedge \neg R), R \rightarrow S, \neg(S \wedge P)\}$.

16. É possível encontrar duas fórmulas H e G que contradizem as afirmações:

(a) H equivale a $G \Rightarrow H$ é tautologia se, e somente se, G é tautologia.

(b) H equivale a G, se, e somente se, $H \leftrightarrow G$ é tautologia.

(c) H equivale a G, se, e somente se, H é tautologia $\Leftrightarrow G$ é tautologia.

17. Suponha que H implica G e H equivale a $\neg E$. Demonstre se o conjunto de fórmulas:

$$\{\neg G, E \rightarrow \neg H, H\}$$

é satisfatível.

18. Comente, do ponto de vista lógico:

(a) A diferença entre tautologia e veracidade.

(b) A diferença entre falsidade e contradição.

19. Demonstre que as fórmulas H e G são equivalentes.
$H = (P \leftrightarrow Q) \vee (R \rightarrow S)$
$G = \neg(\neg(\neg P \vee Q) \vee \neg(\neg Q \vee P)) \vee (\neg R \vee S)$

20. Considere as afirmações a seguir. Demonstre quando elas forem verdadeiras ou dê uma justificativa quando forem falsas.

(a) $(P \vee Q)$ pode ser expressa equivalentemente utilizando apenas o conectivo $\rightarrow$ e os símbolos P e Q.

(b) $(P \wedge Q)$ pode ser expressa equivalentemente utilizando apenas o conectivo $\rightarrow$ e os símbolos P e Q.

(c) $(P \leftrightarrow Q)$ pode ser expressa equivalentemente utilizando apenas o conectivo $\rightarrow$ e os símbolos P e Q.

(d) $(\neg P)$ pode ser expressa equivalentemente utilizando apenas o conectivo $\vee$ e o símbolo P.

(e) $(\neg P)$ pode ser expressa equivalentemente utilizando apenas o conectivo $\wedge$ e o símbolo P.

(f) $(P \vee Q)$ pode ser expressa equivalentemente utilizando apenas o conectivo $\leftrightarrow$ e os símbolos P e Q.

(g) $(P \wedge Q)$ pode ser expressa equivalentemente utilizando apenas o conectivo $\leftrightarrow$ e os símbolos P e Q.

(h) $(P \rightarrow Q)$ pode ser expressa equivalentemente utilizando apenas o conectivo $\leftrightarrow$ e os símbolos P e Q.

(i) $(\neg P)$ pode ser expressa equivalentemente utilizando apenas o conectivo $\leftrightarrow$ e o símbolo P.

21. Considere os conjuntos de conectivos:
$\{\vee, \wedge\}$, $\{\neg, \wedge\}$, $\{\rightarrow, \vee\}$, $\{\vee, \neg\}$, $\{\rightarrow, \neg\}$, $\{\rightarrow, \leftrightarrow\}$, $\{\neg\}$, $\{\leftrightarrow\}$, $\{\rightarrow, \wedge\}$, $\{\leftrightarrow, \wedge\}$ e $\{\leftrightarrow, \vee\}$
Identifique quais conjuntos são completos. Para identificar se um conjunto é completo, estabeleça as regras de conversão dos conectivos.

22. Considere o conectivo *nor* definido pela correspondência:

$$(P \ nor \ Q) = \neg(P \vee Q).$$

(a) Construa a tabela-verdade para o conectivo *nor*.

(b) Demonstre a Proposição 3.19.

(c) Demonstre a Proposição 3.20.

(d) Repita o análogo dos itens a, b e c considerando o conectivo definido pela correspondência:

$$(P \ nnse \ Q) = \neg(\neg P \rightarrow Q).$$

(e) Repita este exercício considerando o conectivo definido pela correspondência:

$$(P \ nsen \ Q) = \neg(P \rightarrow \neg Q).$$

Neste caso, $\{nsen\}$ é completo?

(f) Mostre que *nnse* e *nsen* não são novos conectivos. Isto é, mostre que:

$$(P \ nnse \ Q) \text{ equivale a } (P \ nor \ Q)$$

e

$$(P \ nsen \ Q) \text{ equivale a } (P \wedge Q)$$

(g) Mostre que $\{nor\}$ e $\{nand\}$ são os únicos conjuntos unitários de conectivos completos.

23. Demonstre que as fórmulas a seguir são tautologias.

(a) $\neg P \leftrightarrow (P \ nand \ P)$

(b) $(P \vee Q) \leftrightarrow (\neg P \ nand \ \neg Q)$

24. Considere as fórmulas:
$H = (P \rightarrow Q) \leftrightarrow (R \wedge P)$
$G = (P \leftrightarrow Q) \rightarrow (P \vee Q)$
$E = (P \rightarrow Q) \rightarrow ((((P \wedge Q) \leftrightarrow P) \rightarrow ((P \vee R) \leftrightarrow R)) \rightarrow P)$
Determine as formas normais disjuntivas fnd e conjuntivas fnc associadas a H, G e E.

25. Considere as funções de verdade unárias h_1, h_2, h_3, e h_4, indicadas a seguir.
$h_1(T) = T, h_1(F) = T$.
$h_2(T) = T, h_2(F) = F$.
$h_3(T) = F, h_3(F) = T$.
$h_4(T) = F, h_4(F) = F$.

(a) Essas funções de verdade podem ser representadas por fórmulas da Lógica Proposicional que possuem a mesma tabela-verdade. Temos:

P	h_3	$\neg P$
T	F	F
F	T	T

Como as colunas de $\neg P$ e h_3 coincidem, então $\neg P$ representa a função h_3. Identifique as fórmulas que representam as outras funções.

(b) Determine todas as funções de verdade binárias sobre os valores de verdade. Entre tais funções há, por exemplo, a função $g(X, Y)$ definida a seguir: $g(T, T) = T, g(T, F) = F, g(F, T) = T$ e $g(F, F) = T$.

(c) Determine as fórmulas que representam as funções de verdade binárias. A fórmula $(P \rightarrow Q)$, por exemplo, representa a função $g(X, Y)$, pois as colunas de $g(X, Y)$ e de $(P \rightarrow Q)$, na tabela-verdade a seguir coincidem.

P	Q	g	$(P \rightarrow Q)$
T	T	T	T
T	F	F	F
F	T	T	T
F	F	T	T

(d) Represente todas as funções de verdade binárias utilizando os conectivos $\neg$ e $\vee$. Isso significa que todas as funções de verdade binárias podem ser representadas utilizando composições das funções associadas aos conectivos $\neg$ e $\vee$.

(e) É possível identificar uma função de verdade binária $h(X, Y)$, tal que todas as outras podem ser representadas como composições de $h(X, Y)$?

(f) Qual o número de funções de verdade n-árias?

26. Analise, do ponto de vista da Lógica, os argumentos a seguir.

(a) Deus existe pois a natureza e a vida são perfeitas e toda casa precisa de um arquiteto.

(b) O fato de termos ideia de Deus, significa que ele existe.

(c) Se há fé, há amor. Se há amor, há paz. Se há paz, há Deus. Se há Deus, nada faltará.

(d) No interior da Antárctida, as temperaturas oscilam entre -50^oC e -20^oC. Se a água está a uma temperatura abaixo de 0^oC, então ela se congela. Portanto, a água no interior da Antárctida está congelada.

CAPÍTULO 4

MÉTODOS SEMÂNTICOS DE DEDUÇÃO NA LÓGICA PROPOSICIONAL

4.1 Introdução

Estabelecer critérios e métodos para identificar a verdade é um dos principais objetivos do trabalho cognitivo humano, pois frequentemente perguntamos se alguma coisa é verdadeira ou não. Podemos ter algo verdadeiro em uma situação, de um certo ponto de vista, e falso em outra. Mas, o melhor mesmo seria encontrar um método para identificar a verdade que correspondesse, de forma exata, ao critério semântico de verdade que temos na cabeça. Em posse de tal aparato, poderíamos buscar por verdades universais, ou seja, algo verdadeiro em todas as situações, de todos os pontos de vista. Entretanto, é claro, um aparato assim está muito além do que podemos fazer. Isso é definitivamente um problema não trivial, pois, para começo de conversa, entender o que significa a verdade é um profundo tema filosófico. Mais ainda, estabelecer critérios e métodos para definir tal verdade parece estar além da nossa capacidade congnitiva. E sobre isso tem até alguns resultados, em textos mais avançados de Lógica[1]. Mas, nem tudo está perdido, pois no contexto da

[1] O teorema de Henkin demonstra que, para boas teorias, o conceito de verdade é indefinível [Smith].

Lógica Proposicional, tais conceitos são mais simples e são tratáveis. Ou seja, nesse contexto, é possível definir verdades universais, as tautologias, e encontrar métodos para identificá-las. Um dos passos frequentemente utilizados no estudo da Lógica corresponde à análise desses métodos, ou mecanismos, que verificam propriedades semânticas das fórmulas da Lógica Proposicional. Este capítulo analisa três métodos de dedução: tabela-verdade, negação, ou redução ao absurdo e *tableaux* semânticos. Como é visto a seguir, esses métodos se equivalem em muitos aspectos. Entretanto, dependendo da fórmula, há métodos mais eficientes na demonstração de propriedades semânticas. E tal eficiência é um importante tema de estudo em Computação.

4.2 Método da Tabela-Verdade

O método da tabela-verdade é o método da força bruta, utilizado na determinação de propriedades semânticas de fórmulas da Lógica Proposicional. Isso ocorre porque nesse método, temos que analisar as linhas da tabela-verdade. E tal fato é, às vezes, um problema custoso. Veja por que: dada uma fórmula H, suponha que ela contenha apenas os símbolos proposicionais P e Q. Nesse caso, como já vimos inúmeras vezes, a tabela-verdade associada a H contém quatro linhas. Mas, se H contém os símbolos P, Q e R, então a tabela contém oito linhas. Suponha, por exemplo, o caso particular no qual $H = ((P \rightarrow Q) \wedge R)$. Nesse caso, a tabela-verdade associada a H, Tabela 4.1, contém oito linhas. Lembre que não contamos a primeira linha da tabela. Observe que a Tabela 4.1 contém todas as combinações de valores de verdade dos símbolos proposicionais.

P	Q	R	H
T	T	T	?
T	T	F	?
F	F	T	?
F	F	F	?
T	T	T	?
T	T	F	?
F	F	T	?
F	F	F	?

Tabela 4.1: Tabela-verdade associada a H.

Suponha, então, que, dada uma fórmula H tal que $H = ((P \rightarrow Q) \wedge R)$, se queira determinar se ela é satisfatível. Isto é, dado H e utilizando a sua tabela-verdade, queremos determinar se existe uma interpretação I tal que $I[H] = T$. Qual é o custo dessa operação, ou seja, de determinar se H é satisfatível? Para responder tal questão, devemos fazer duas análises.

Custo para verificar se $I[H] = T$. Dada uma linha qualquer da tabela, qual é o custo para saber se para tal linha, H é interpretada como verdadeira? Ou seja, qual o custo para determinar se $I[H] = T$? Nesse caso, devemos apenas analisar os símbolos de H. Ou seja, no pior caso, o custo dessa operação é proporcional à quantidade de símbolos de H. Um resultado de computação estabelece que, no pior caso, a quantidade de operações elementares necessárias para determinar se uma linha da tabela-verdade interpreta H como verdadeira é proporcional ao quadrado do número de símbolos de H[2]. Isso significa que, no caso da Tabela 4.1, o custo para determinar se $I[H] = T$, conforme a interpretação de uma linha da tabela-verdade, é, no pior caso, proporcional a 3^2, pois estamos supondo que H tem três símbolos.

Nota. Quando dizemos que H possui m símbolos, não estamos falando que H possui m símbolos proposicionais. Por exemplo, a fórmula:

$$((P \rightarrow Q) \wedge R) \rightarrow (Q \vee P)$$

possui 5 símbolos, apesar de conter apenas 3 três tipos diferentes de símbolos proposicionais.

Custo para percorrer as linhas da tabela-verdade. Para saber se $H = ((P \rightarrow Q) \wedge R)$ é satisfatível, devemos encontrar uma interpretação I tal que $I[H] = T$. No caso dessa fórmula em particular, a primeira linha já dá certo. Nessa linha, H é interpretada como sendo verdadeira. Mas, no caso geral, para encontrar tal interpretação, temos, no pior caso, que percorrer as 8 linhas da Tabela 4.1. Ou seja, devemos verificar, para cada uma das 2^3 linhas, se $I[H] = T$. E o custo para percorrer as linhas da tabela-verdade é proporcional a 2^3, que é igual ao número de linhas da tabela.

Custo para determinar se H é satisfatível. Para determinar se H é satisfatível, devemos procurar na Tabela 4.1 por uma interpretação I tal que $I[H] = T$. Logo, em geral, temos, no pior caso, que percorrer as 8 linhas da Tabela 4.1 e, além disso, verificar para cada uma delas se $I[H] = T$. Ou seja, o custo para determinar se H é satisfatível é igual ao produto dos dois custos anteriores. Esse custo é, no caso da Tabela 4.1, proporcional a $2^3 \times 3^2$.

Nota. O que significa o pior caso na determinação de um custo? No caso da verificação se $I[H] = T$, o pior caso ocorre quando é necessário analisar todos os símbolos de H. Já, no caso do custo para percorrer as linhas da tabela-verdade, o pior caso ocorre quando é necessário ir até à última linha da tabela-verdade.

Nota. O que significa dizer que o custo de uma operação é proporcional a $2^3 \times 3^2$ ou da ordem de $2^3 \times 3^2$? A rigor, estamos dizendo que para efetuar a operação necessitamos executar uma quantidade de operações elementares proporcional a $2^3 \times 3^2$. Por operações elementares estamos supondo operações básicas de um computador,

[2]Também, como pode ser demonstrado em Análise de Algoritmos, a rigor, esse custo tem uma ordem menor que o quadrado dos símbolos de H. Entretanto, na análise que se segue isso não tem importância e consideramos o custo proporcional ao quadrado do número de símbolos de H.

como adição, subtração, movimento entre posições de memória, operações lógicas, etc.

Suponha, agora, a fórmula $G = ((P \to Q) \wedge R) \to S$, que contém quatro símbolos proposicionais. Nesse caso, qual é o custo para determinar se G é satisfatível? Nesse caso, a tabela-verdade associada a G contém dezesseis linhas. Qual o custo para determinar uma interpretação I tal que $I[H] = T$?

P	Q	R	S	G
T	T	T	T	?
T	T	T	F	?
T	T	F	T	?
T	T	F	F	?
T	F	T	T	?
T	F	T	F	?
T	F	F	T	?
T	F	F	F	?
F	T	T	T	?
F	T	T	F	?
F	T	F	T	?
F	T	F	F	?
F	F	T	T	?
F	F	T	F	?
F	F	F	T	?
F	F	F	F	?

Tabela 4.2: Tabela-verdade associada a G.

Custo para verificar se $I[G] = T$. Conforme a análise anterior, o custo dessa operação é, no pior caso, proporcional ao quadrado do número de símbolos de G. Isso significa que, dado I, o custo para determinar se $I[G] = T$ é, no pior caso, proporcional a 4^2, pois G tem quatro símbolos proposicionais.

Custo para percorrer as linhas da tabela-verdade. Conforme a análise anterior, para encontrar uma interpretação I tal que $I[G] = T$, temos, no pior caso, que percorrer 16 linhas da Tabela 4.2. Isso significa que o custo para percorrer as linhas da tabela-verdade é proporcional a 2^4.

Custo para determinar se G é satisfatível. Conforme a análise anterior, para determinar se G é satisfatível, temos, no pior caso, um custo proporcional ao produto $2^4 \times 4^2$. A importante questão, nessa análise, é entender como evoluem os custos à medida que o número de símbolos proposicionais da fórmula aumenta. Essa evolução é obtida, generalizando o resultado anterior.

O caso geral. Considere, então, uma fórmula A que contém n símbolos proposicionais diferentes. Além disso, como alguns desses símbolos podem repetir, suponha que em A apareçam m símbolos proposicionais, com possíveis repetições. Nesse caso, temos:

Custo para determinar se A é satisfatível. Conforme a análise anterior, para determinar se A é satisfatível, temos, no pior caso, um custo proporcional ao produto $2^n \times m^2$. Veja, na Tabela 4.3, como esses custos evoluem à medida que n e m crescem. Verifique que o custo para percorrer as linhas cresce muito mais rápido do que o custo para verificar se uma linha da tabela interpreta a fórmula como verdadeira. Isso porque o custo para percorrer as linhas da tabela é proporcional a uma exponencial em n, dada por 2^n. E o custo de verificação é proporcional ao quadrado de m, isto é, m^2. Esse custo é proporcional a um polinômino em m, dado por m^2. E, como sabemos, a exponencial cresce muito mais rápido que o polinômio. Observe, na Tabela 4.3, como os números da terceira coluna crescem muito mais rápido do que os da segunda coluna. Na última linha, por exemplo, calculamos $20^2 = 400$. Por outro lado, o número 2^{20} é tão grande que não é possível escrevê-lo, sem utilizar a notação exponencial 2^{20}.

x	x^2	2^x
2	4	4
3	9	8
4	16	16
5	25	32
6	36	64
7	49	128
8	64	256
20	400	2^{20}

Tabela 4.3: Custo para encontrar I tal que $I[H] = T$.

Temos, pelo menos, quatro conclusões dessa análise.

1. O custo de verificação se uma linha da tabela-verdade interpreta uma fórmula como verdadeira é insignificante em relação ao custo para percorrer as linhas da tabela, que tem custo exponencial.
2. O custo para determinar se uma fórmula H é satisfatível corresponde, a grosso modo, ao custo para percorrer as linhas da tabela-verdade.
3. O custo para determinar se uma fórmula H é satisfatível é maior que um custo polinomial no número de símbolos de H.
4. O custo para determinar se uma fórmula H é satisfatível depende exponencialmente do número de símbolos de H.

Essa notícia é horrível, pois imagine uma fórmula com 20 símbolos proposicionais. Para determinar se ela é satisfatível, no pior caso, temos um custo da ordem de 2^{20} operações. Surge, então, uma questão óbvia. Existe algum método para identificar se uma fórmula H é satisfatível e que seja mais eficiente do que o método da tabela-verdade? Ou seja, existe algum método cujo custo tem ordem inferior a uma função exponencial? Um método que tenha, por exemplo, custo de ordem polinomial? Se você conseguir responder essa questão, afirmativa ou negativamente, ficará famoso e receberá um prêmio de um milhão de dólares. Isso, porque essa questão corresponde à solução do problema $P = NP$[3], que está em aberto e ainda não foi resolvido por ninguém. Vale a pena tentar! Portanto, para determinar a satisfatibilidade de uma fórmula H, não sabemos se existe método mais eficiente do que o da tabela-verdade. Entretanto, isso não nos impede de desenvolver outros métodos que têm vantagens sobre o método da tabela-verdade, mesmo não sendo mais eficientes do ponto de vista computacional.

O problema SAT. Até esse ponto, analisamos o custo para determinar se uma fórmula é satisfatível. Foi feito assim porque esse problema corresponde ao importante problema SAT, que resolve exatamente essa questão. Isto é, o problema SAT é o problema de identificar as fórmulas da Lógica Proposicional que são satisfatíveis. Entretanto, nada há de especial em relação à propriedade semântica da satisfatibilidade. Podemos, de forma inteiramente equivalente, considerar, no lugar da satisfatibilidade, outras propriedades semânticas como tautologia, contradição, etc. E nesses casos, toda a análise de custo feita anteriormente se aplica.

Considerando o custo exponencial, o método da tabela-verdade é mais adequado para fórmulas que contêm um pequeno número de símbolos proposicionais. Nesses casos, as tabelas são pequenas. Entretanto, quando a fórmula contém muitos símbolos proposicionais, isso não ocorre. Considere a fórmula

$$P_1 \to ((P_2 \land P_3) \to ((P_4 \land P_5) \to ((P_6 \land P_7) \to P_1))).$$

Nesse caso, há sete símbolos proposicionais e a tabela-verdade associada a essa fórmula possui 128 linhas. Uma tabela um pouco grande para ser elaborada manualmente.

O método da tabela-verdade é um método de decisão. Dada uma fórmula H, utilizando o método da tabela-verdade é possível decidir se H possui, ou não possui, alguma propriedade semântica. Nesse sentido, dizemos que o método da tabela-verdade é um mecanismo de decisão. Ele sempre fornece uma decisão sobre a pergunta: H possui, ou não possui, determinada propriedade semântica?

4.3 Método da negação, ou redução ao absurdo

O método da negação, ou redução ao absurdo, analisado a seguir, é um método geral de demonstração que, neste contexto, é utilizado para demonstrar propriedades

[3]Para maiores detalhes sobre o problema $P = NP$, consulte [Cooper] e [Sipser].

semânticas de fórmulas da Lógica Proposicional. Observamos que seus princípios podem ser visto como gerais e, dessa forma, podem ser utilizados em outros tipos de demonstração, como aquelas por refutação, que é uma técnica de demonstração comum em várias áreas da Computação e da Matemática. Apesar desse método, do ponto de vista do custo computacional, não ser mais eficiente que o método da tabela-verdade, ele tem suas vantagens para alguns tipos de fórmulas, como é analisado a seguir.

4.3.1 Os fundamentos do método da negação

Nesse método, consideramos a seguinte linha de raciocínio.

1. Negamos inicialmente aquilo que pretendemos demonstrar. Assim, dada uma fórmula H, se o objetivo é demonstrar, por exemplo, que H é uma tautologia, suponha então que H não é uma tautologia.
2. A partir da suposição inicial, é utilizado um conjunto de deduções. Se ao final do raciocínio, concluímos um fato contraditório ou absurdo, então temos que rever nossa suposição inicial.
3. Dessa forma, caso se obtenha um absurdo, a conclusão é que a suposição inicial é falsa. Em outras palavras, se a suposição inicial diz que H não é uma tautologia; e após uma sequência de deduções é concluído um absurdo, então a afirmação "H não é uma tautologia" é um absurdo. Portanto, a conclusão final é que H é uma tautologia.

Observe que, neste contexto, estamos utilizando o princípio do terceiro excluído, pois se é absurdo que H não é uma tautologia, só resta concluir que H é uma tautologia. Não temos uma terceira possibilidade. Dessa forma, é verdadeiro que H é tautologia ou não é tautologia. O exemplo a seguir ilustra o método da negação, ou redução ao absurdo, que também é denominado refutação.

4.3.2 Prova de que H é uma tautologia

Utilizamos, inicialmente, o método da negação para provar que uma fórmula H é uma tautologia. Nesse caso, supomos, a princípio, que H não é uma tautologia. Em seguida, se a partir de uma sequência de deduções semânticas, concluímos um absurdo, então H é uma tautologia.

Exemplo 4.1 (lei da transitividade) Este exemplo demonstra a lei da transitividade para o conectivo $\rightarrow$. Essa lei é definida pela fórmula H a seguir, que é uma tautologia.

$$H = ((P \rightarrow Q) \wedge (Q \rightarrow R)) \rightarrow (P \rightarrow R).$$

Observe que a transitividade diz que se $(P \rightarrow Q)$ e $(Q \rightarrow R)$ são fórmulas verdadeiras, então $(P \rightarrow R)$ também é uma fórmula verdadeira. A demonstração de que H é uma tautologia, segundo o método da negação, ou redução ao absurdo, segue os passos subsequentes.

1. Suponha, por absurdo, que H não é uma tautologia. Logo, existe uma interpretação I tal que $I[H] = F$.

Esse fato é denotado colocando o símbolo F como um subíndice do conectivo $\rightarrow$ na fórmula H, como é indicado a seguir.

$$((P \rightarrow Q) \wedge (Q \rightarrow R)) \rightarrow_F (P \rightarrow R)$$

A leitura dessa fórmula, na qual temos o conectivo com o subíndice "F", é que o conectivo "$\rightarrow_F$" é falso. Mas, se $I[H] = F$, ou seja, "$\rightarrow_F$" é falso, então:

$$I[(P \rightarrow Q) \wedge (Q \rightarrow R)] = T \text{ e } I[(P \rightarrow R)] = F.$$

Ou seja, o antecedente de H é verdadeiro e o consequente é falso, segundo a interpretação I. Isso é indicado colocando T e F como subíndices dos principais conectivos no antecedente e no consequente de H. Dessa forma, iniciamos o passo dois do método.

2. A partir da suposição inicial, de que "$\rightarrow_F$" é falso, concluímos que:

$$I[(P \rightarrow Q) \wedge (Q \rightarrow R)] = T \text{ e } I[(P \rightarrow R)] = F.$$

Para indicar essas interpretações, nesse caso, dizemos que o conectivo "$\wedge_T$" é verdadeiro e o conectivo "$\rightarrow_F$" é falso. Tais fatos são descritos na fórmula inicial como a seguir.

$$((P \rightarrow Q) \wedge_T (Q \rightarrow R)) \rightarrow_F (P \rightarrow_F R)$$

A partir dos valores de verdade dos conectivos indicados na fórmula anterior, os valores de verdade das outras subfórmulas são obtidos. Assim, o próximo passo é dado pela fórmula a seguir.

$$((P \rightarrow_T Q) \wedge_T (Q \rightarrow_T R)) \rightarrow_F (P_T \rightarrow_F R_F)$$

Nesse ponto, já é possível concluir que $I[P] = T$ e $I[R] = F$. Esses valores de verdade são distribuídos pela fórmula, obtendo:

$$((P_T \rightarrow_T Q) \wedge_T (Q \rightarrow_T R_F)) \rightarrow_F (P_T \rightarrow_F R_F)$$

Observe que na fórmula anterior há duas subfórmulas: $(P_T \rightarrow_T Q)$ e $(Q \rightarrow_T R_F)$. A partir da subfórmula $(P_T \rightarrow_T Q)$ conclui-se que $I[Q] = T$. Entretanto, com base na subfórmula $(Q \rightarrow_T R_F)$, temos outro resultado: $I[Q] = F$. Logo, há um absurdo, pois Q não pode ser interpretado como verdadeiro e falso ao mesmo tempo, o que é indicado por:

$$((P_T \rightarrow_T Q_{(T,F)}) \wedge_T (Q_{(F,T)} \rightarrow_T R_F)) \rightarrow_F (P_T \rightarrow_F R_F)$$

Nesse ponto, estamos iniciamos o terceiro passo do método.

3. Apareceu um absurdo. Logo, a conclusão é que a suposição inicial é falsa. A suposição inicial diz que H não é uma tautologia. Portanto, a conclusão final é que H é uma tautologia.

Portanto, a suposição inicial é falsa, isto é, não existe interpretação I tal que $I[H] = F$. Não é possível interpretar H como sendo falsa. Logo, H é uma tautologia. ■

Exemplo 4.2 (tautologia e ausência de absurdo) Este exemplo demonstra que a fórmula

$$H = ((P \rightarrow Q) \rightarrow ((Q \rightarrow R) \rightarrow (R \rightarrow S)))$$

não é uma tautologia. Imagine que não sabemos que H não é uma tautologia. Então, vamos tentar demonstrar, utilizando o método da negação, que H é uma tautologia.

1. Suponha, por absurdo, que H não é uma tautologia. Logo, existe uma interpretação I tal que $I[H] = F$.

Esse fato é denotado colocando o símbolo F como um subíndice do conectivo $\rightarrow$ na fórmula H, como é indicado a seguir.

$$((P \rightarrow Q) \rightarrow_F ((Q \rightarrow R) \rightarrow (R \rightarrow S))).$$

Logo, o conectivo "$\rightarrow_F$" é falso. Mas, se $I[H] = F$, ou seja, "$\rightarrow_F$" é falso, então $I[(P \rightarrow Q)] = T$ e $I[((Q \rightarrow R) \rightarrow (R \rightarrow S))] = F$. Isto é, o antecedente de H é verdadeiro e o consequente é falso, segundo a interpretação I. Dessa forma, iniciamos o passo dois do método.

2. A partir da suposição inicial, concluímos que

$$((P \rightarrow_T Q) \rightarrow_F ((Q \rightarrow R) \rightarrow_F (R \rightarrow S))).$$

Seguindo o mesmo raciocínio, obtemos:

$$((P \rightarrow_T Q) \rightarrow_F ((Q \rightarrow_T R) \rightarrow_F (R \rightarrow_F S))).$$

E, em seguida:

$$((P \rightarrow_T Q) \rightarrow_F ((Q \rightarrow_T R_T) \rightarrow_F (R_T \rightarrow_F S_F))).$$

Não chegamos a nenhum absurdo. O que fazer? Conforme o terceiro passo do método, se tivesse ocorrido um absurdo, poderíamos concluir da seguinte forma.

3. Apareceu um absurdo. Logo, a conclusão é que a suposição inicial é falsa. A suposição inicial diz que H não é uma tautologia. Portanto, a conclusão final é que H é uma tautologia.

Mas, como não ocorreu o absurdo, não podemos concluir dessa forma. Como temos na fórmula, os símbolos proposicionais R_T e S_F com os respectivos subíndices, então considere: $I[R] = T$ e $I[S] = F$. Observe que a interpretação de R e S corresponde à interpretação estabelecida pelos subíndices. Para os símbolos P e Q, devemos escolher uma interpretação que seja coerente com os valores de verdade das subfórmulas: $(P \rightarrow_T Q)$ e $(Q \rightarrow_T R_T)$. Suponha, então, que $I[P] = I[Q] = T$. Nessas condições, temos que

$I[(P \rightarrow_T Q)] = T$ e $I[(Q \rightarrow_T R_T)] = T$.

Logo, concluímos que $I[H] = F$. Isto é, H pode ser interpretada como falsa e não é uma tautologia. ■

4.3.3 Prova de que H é uma contradição

Dada uma fórmula H, o método da negação, ou redução ao absurdo, também se aplica para demonstrar se H é contraditória. Nesse caso, a afirmação inicial deve ser negada. Logo, para demonstrar que H é contraditória, devemos inicialmente supor que H não é contraditória, isto é, que existe pelo menos uma interpretação I tal que $I[H] = T$. O raciocínio segue de maneira análoga ao descrito. Caso se obtenha uma contradição ou absurdo, então é demonstrado que H é contraditória.

Exemplo 4.3 (contradição) Este exemplo montra que a fórmula a seguir é uma contradição.

$$H = (P \rightarrow Q) \wedge (\neg(\neg P \vee Q)).$$

A demonstração de que H é uma contradição segue os passos:

1. Suponha, por absurdo, que H não é uma contradição. Logo, existe uma interpretação I tal que $I[H] = T$.

Esse fato é denotado colocando o símbolo T como um subíndice do conectivo $\wedge$ da fórmula H, como é indicado a seguir.

$$(P \rightarrow Q) \wedge_T (\neg((\neg P) \vee Q)).$$

A leitura dessa fórmula, na qual temos o conectivo com o subíndice "T", é que o conectivo "$\wedge_T$" é verdadeiro. Mas, se $I[H] = T$, ou seja, "$\wedge_T$" é verdadeiro, então $I[(P \rightarrow Q)] = T$ e $I[(\neg((\neg P) \vee Q))] = T$. Seguindo o raciocínio, escrevemos T como subíndice do principal conectivo das subfórmulas: $(P \rightarrow Q)$, $(\neg((\neg P) \vee Q))$. E, dessa forma, já iniciamos o passo dois do método.

2. A partir da suposição inicial, temos:

$$(P \rightarrow_T Q) \wedge_T (\neg_T((\neg P) \vee Q)).$$

Em seguida, colocamos o subíndice F no conectivo "$\vee$". Isso porque se $(\neg_T((\neg P) \vee Q))$ é verdadeira, então $((\neg P) \vee_F Q)$ é falsa. Dessa forma, obtemos o resultado:

$$(P \rightarrow_T Q) \wedge_T (\neg_T((\neg P) \vee_F Q)).$$

Em seguida, dado que "$\vee_F$" é falso, então temos:

$$(P \rightarrow_T Q_F) \wedge_T (\neg_T((\neg_F P) \vee_F Q_F)).$$

Seguindo o raciocínio, temos:

$$(P_T \rightarrow_T Q_F) \wedge_T (\neg_T((\neg_F P_T) \vee_F Q_F)).$$

Observe, então, a subfórmula $(P_T \rightarrow_T Q_F)$. Ela é um absurdo, pois se P é verdadeiro e Q é falso, então a subfórmula é falsa. Ou seja, o conectivo "$\rightarrow_{(T,F)}$" é verdadeiro e falso. $(P_T \rightarrow_{(T,F)} Q_F)$.

3. Apareceu um absurdo. Logo, a conclusão é que a suposição inicial é falsa. A suposição inicial diz que H não é uma contradição. Portanto, a conclusão final é que H é uma contradição.

■

Exemplo 4.4 (contradição e ausência de absurdo) Este exemplo mostra que a fórmula H, a seguir, não é uma contradição.

$$H = (P \rightarrow Q) \wedge ((Q \rightarrow R) \wedge ((R \rightarrow S) \wedge (S \rightarrow \neg P))).$$

Imagine que, de forma incorreta, supomos que H é uma contradição e para demonstrar esse fato, utilizamos o método da negação. Veja o que acontece. A demonstração de que H é uma contradição, segue os passos:

1. Suponha, por absurdo, que H não é uma contradição. Logo, existe uma interpretação I tal que $I[H] = T$.

Esse fato é denotado colocando o símbolo T como um subíndice do conectivo $\wedge$, que é o principal conectivo da fórmula H, como é indicado a seguir.

$$(P \rightarrow Q) \wedge_T ((Q \rightarrow R) \wedge ((R \rightarrow S) \wedge (S \rightarrow \neg P))).$$

A leitura dessa fórmula, na qual temos o conectivo com o subíndice "T", é que o conectivo "$\wedge_T$" é verdadeiro. Mas, se $I[H] = T$, ou seja, "$\wedge_T$" é verdadeiro, então
$I[(P \rightarrow Q)] = T$ e
$I[(Q \rightarrow R) \wedge ((R \rightarrow S) \wedge (S \rightarrow \neg P))] = F$.

Seguindo o raciocínio, escrevemos T como subíndice do principal conectivo das subfórmulas:

$$(P \rightarrow_T Q)$$

$$(Q \rightarrow R) \wedge_T ((R \rightarrow S) \wedge (S \rightarrow \neg P))$$

E, dessa forma, já iniciamos o passo dois do método.

2. A partir da suposição inicial, temos:

$$(P \rightarrow_T Q) \wedge_T ((Q \rightarrow R) \wedge_T ((R \rightarrow S) \wedge (S \rightarrow \neg P))).$$

Em seguida, colocamos o subíndice T nos conectivos "$\rightarrow$" e "$\wedge$" e o resultado é:

$$((P \rightarrow_T Q) \wedge_T ((Q \rightarrow_T R) \wedge_T ((R \rightarrow S) \wedge_T (S \rightarrow \neg P)))).$$

Mais um passo, colocando os respectivos subíndices, temos:

$$((P \rightarrow_T Q) \wedge_T ((Q \rightarrow_T R) \wedge_T ((R \rightarrow_T S) \wedge_T (S \rightarrow_T \neg P)))).$$

Não chegamos a nenhum absurdo e, conforme o terceiro passo do método, se tivesse ocorrido um absurdo, poderíamos concluir da seguinte forma.

3. Apareceu um absurdo. Logo, a conclusão é que a suposição inicial é falsa. A suposição inicial diz que H não é uma contradição. Portanto, a conclusão final é que H é uma contradição.

Mas, como não ocorreu o absurdo, não podemos concluir dessa forma. A interpretação dos símbolos P, Q, R e S deve ser coerente com as interpretações das subfórmulas de H. Isto é, devemos definir $I[P], I[Q], I[R]$ e $I[S]$ de tal forma que:

$$I[(P \rightarrow_T Q)] = T, \ I[(Q \rightarrow_T R)] = T, \ I[(R \rightarrow_T S)] = T \ \text{ e } \ I[(S \rightarrow_T \neg P))] = T.$$

Suponha, então, que $I[P] = I[Q] = I[R] = I[S] = F$. Nessas condições, temos que $I[H] = T$. Isto é, H é satisfatível e, por isso, não é uma contradição. ■

4.3.4 Várias possibilidades no desenvolvimento da prova

O método da negação, ou redução ao absurdo, geralmente determina demonstrações mais simples nos casos em que a negação da fórmula tem como consequência apenas uma possibilidade de desenvolvimento da prova. Considere, por exemplo, o conectivo "$\rightarrow$". Nesse caso, supondo a falsidade de uma fórmula do tipo: $(H \rightarrow G)$, obtemos uma única possibilidade para as interpretações do antecedente H e do consequente G. O antecedente deve ser verdadeiro e o consequente, falso. Assim, no desenvolvimento da prova, obtemos a fórmula $(H_T \rightarrow_F G_F)$. E, de maneira geral, a existência de uma única possibilidade para as interpretações das subfórmulas simplifica a demonstração. Ainda, de forma análoga às observações anteriores, supondo a falsidade de uma fórmula do tipo $(H \vee G)$, obtemos uma única possibilidade para as interpretações de H e G. As subfórmulas H e G, que compõem a disjunção, devem ser falsas. Nesse caso, a fórmula obtida no desenvolvimento da prova é $(H_F \vee_F G_F)$. O método da negação, ou redução ao absurdo, em geral, também determina demonstrações mais simples nos casos em que supomos a veracidade do conectivo $\wedge$. Supondo a veracidade de uma fórmula do tipo: $(H \wedge G)$, obtemos uma única possibilidade para as interpretações das subfórmulas H e G, que compõem a conjunção. Essas subfórmulas devem ser verdadeiras e a fórmula que obtemos no desenvolvimento da prova é $(H_T \wedge_T G_T)$. Conforme as observações anteriores, o método da negação se aplica com uma única possibilidade de desenvolvimento, quando:

1. interpretamos como falso os conectivos "$\rightarrow$", "$\vee$",
2. interpretamos como verdadeiro o conectivo "$\wedge$" e
3. interpretamos como verdadeiro, ou falso, o conectivo "$\neg$".

Por outro lado, para outros tipos de combinações entre interpretações e conectivos, o desenvolvimento da prova, conforme o método da negação, não implica uma única possibilidade. Considere, por exemplo, o conectivo "$\leftrightarrow$". Nesse caso, supondo a falsidade de uma fórmula do tipo $(H \leftrightarrow G)$, obtemos duas possibilidades para as interpretações de H e G. Nesse caso temos as duas possibilidades: na primeira H é verdadeira e G é falsa, enquanto na segunda H é falsa e G é verdadeira.

Possibilidade 1. $(H_T \leftrightarrow_F G_F)$;

Possibilidade 2. $(H_F \leftrightarrow_F G_T)$.

Exemplo 4.5 (prova com várias possibilidades) Este exemplo utiliza o método da negação, ou redução ao absurdo, para demonstrar se a fórmula H é uma tautologia.

$$H = (P \rightarrow Q) \leftrightarrow (\neg P \rightarrow \neg Q).$$

Suponha, por absurdo, que H não é uma tautologia. Tal fato é expresso pelo símbolo F escrito como subíndice do conectivo "$\leftrightarrow$" em H, conforme indicado a seguir.

$$(P \rightarrow Q) \leftrightarrow_F (\neg P \rightarrow \neg Q).$$

A partir dessa fórmula, temos duas possibilidades:

Possibilidade 1. $(P \rightarrow_T Q) \leftrightarrow_F (\neg P \rightarrow_F \neg Q)$;

Possibilidade 2. $(P \rightarrow_F Q) \leftrightarrow_F (\neg P \rightarrow_T \neg Q)$.

Desenvolvimento da possibilidade 1. Desenvolvendo a possibilidade 1, obtemos a fórmula:

$$(P_F \rightarrow_T Q_T) \leftrightarrow_F (\neg_T P_F \rightarrow_F \neg_F Q_T)$$

Observe que na fórmula anterior, não há nenhum absurdo. Como não é obtido absurdo nessa possibilidade, não podemos concluir que H é uma tautologia. De fato, H não é uma tautologia, pois, conforme a interpretação dos símbolos proposicionais na fórmula anterior, é possível definir uma interpretação I tal que $I[H] = F$. Como temos na fórmula P_F e Q_T, considere uma interpretação I tal que $I[P] = F$ e $I[Q] = T$. Neste caso, $I[H] = F$.

Desenvolvimento da possibilidade 2. Desenvolvendo a possibilidade 2, obtemos a fórmula

$$(P_T \rightarrow_F Q_F) \leftrightarrow_F (\neg_F P_T \rightarrow_T \neg_T Q_F)$$

Novamente, não há absurdo nessa possibilidade. De fato, H não é uma tautologia, pois, a partir das interpretações dos símbolos proposicionais da fórmula, é possível definir outra interpretação I tal que $I[H] = F$. Como temos na fórmula P_T e Q_F, considere uma interpretação I tal que $I[P] = T$ e $I[Q] = F$. Neste caso, $I[H] = F$. Nesse exemplo, não ocorreu absurdo em nenhuma das possibilidade. Entretanto isso nem sempre ocorre. ■

Exemplo 4.6 (prova com várias possibilidades) Este exemplo utiliza o método da negação, ou redução ao absurdo, para demonstrar se a fórmula H é uma tautologia. $H = (P \wedge Q) \leftrightarrow (\neg P \vee Q)$. Suponha por absurdo que H não é uma tautologia. Tal fato é expresso pelo símbolo F sob o conectivo "$\leftrightarrow$" em H, conforme indicado a seguir.

$$(P \wedge Q) \leftrightarrow_F (\neg P \vee Q).$$

A partir dessa fórmula, temos duas possibilidades:

Possibilidade 1. $(P \wedge_T Q) \leftrightarrow_F (\neg P \vee_F Q)$;

Possibilidade 2. $(P \wedge_F Q) \leftrightarrow_F (\neg P \vee_T Q)$.

Desenvolvimento da possibilidade 1. Desenvolvendo a possibilidade 1, obtemos a fórmula

$$(P_T \wedge_{(T,F)} Q_F) \leftrightarrow_F (\neg_F P_T \vee_F Q_F).$$

Na fórmula anterior, temos um absurdo no conectivo "$\wedge$". Mas, será que a partir desse absurdo, já podemos concluir que H é tautologia? Cuidado! Temos duas possibilidades. E esse desenvolvimento mostra que é impossível ocorrer a possibilidade 1, pois ela leva a um absurdo. É como se essa possibilidade fosse uma porta fechada. Mas, se ela está fechada, não necessariamente podemos concluir que a outra porta também está fechada. Ou seja, que a outra possibilidade também nos leva a um absurdo.

Desenvolvimento da possibilidade 2. Desenvolvendo a possibilidade 2, obtemos a fórmula:

$$(P_F \wedge_F Q_F) \leftrightarrow_F (\neg_T P_F \vee_T Q_F).$$

Na fórmula anterior, não temos absurdo. Como não é obtido absurdo nessa possibilidade, não podemos concluir que H é uma tautologia. De fato, H não é uma tautologia, pois, a partir das interpretações dos símbolos proposicionais da fórmula, é possível definir uma interpretação I tal que $I[H] = F$. Como temos na fórmula P_F e Q_F, considere uma interpretação I tal que $I[P] = F$ e $I[Q] = F$. Neste caso, $I[H] = F$.

Conclusão final: H não é uma tautologia. ■

Generalização do método. É importante observar a utilização do método da negação, ou redução ao absurdo, no presente contexto, na demonstração de propriedades semânticas de fórmulas da Lógica Proposicional. Devemos enfatizar que os princípios desse método possuem ampla aplicação em outros tipos de demonstrações. Nesses casos, é negada a afirmação que desejamos demonstrar. Após um conjunto de deduções, caso obtenhamos um absurdo, então a afirmação inicial é verdadeira.

Exemplo 4.7 (consequência semântica) Sejam H e G duas fórmulas da Lógica Proposicional. Então, conforme a Definição 3.7:

H implica semanticamente G, se, e somente se,
para toda interpretação I, se $I[H] = T$, então $I[G] = T$.

A partir dessa definição, é sempre bom lembrar, temos a importante questão: o conceito de consequência semântica corresponde ao conceito de consequência que utilizamos no dia a dia? Como já vimos, a semântica dos conectivos da Lógica Proposicional não corresponde exatamente ao uso que temos deles em linguagem natural. Da mesma forma, a consequência semântica também não corresponde, de forma exata, ao uso que fazemos da palavra "consequência" na linguagem natural. Considere, por exemplo, a seguinte situação. Zé sabe que Maria viajou para a região norte e deve estar em Rio Branco, no Acre, ou em Boa Vista, em Roraima. Zé fica então pensando:

"Se Maria está em Rio Branco, então ela está no Acre.
Ou, se está em Boa Vista, então está em Roraima".

É possível representar essa implicação na Lógica Proposicional, como se segue. Suponha que: $P =$ "Maria está em Rio Branco". $Q =$ "Maria está em Boa Vista". $R =$ "Maria está no Acre". $S =$ "Maria está em Roraima". Nesse sentido, o que Zé está pensando pode ser representado pela fórmula: $(P \to R) \lor (Q \to S)$. Digamos que, por um momento, Zé fique confuso. Ele não sabe, ao certo, quais são as capitais dos estados da região norte. Ele sempre confunde as capitais do Acre e de Roraima. Às vezes ele acha que Boa Vista é a capital do Acre e que Rio Branco é a capital de Roraima. Zé então fica imaginando.

"Puxa, se Maria está em Rio Branco, então em qual estado ela está?"

Zé ficaria mais confuso ainda se utilizasse o conceito de consequência semântica. Isso ocorre porque as implicações a seguir são válidas.

$(P \to R) \lor (Q \to S)$ implica $(P \to S) \lor (Q \to R)$, e

$(P \to S) \lor (Q \to R)$ implica $(P \to R) \lor (Q \to S)$.

Conforme a Proposição 3.8, essas implicações ocorrem se, e somente se, as fórmulas H e G, a seguir, são tautologias.

$H = ((P \to R) \lor (Q \to S)) \to ((P \to S) \lor (Q \to R))$, e

$G = ((P \to S) \lor (Q \to R)) \to ((P \to R) \lor (Q \to S))$.

Provamos, a seguir, utilizando o método da negação, que H é uma tautologia. Suponha, inicialmente, que H não é tautologia. Interpretamos o conectivo "$\to$" como falso.

$H = ((P \to R) \lor (Q \to S)) \to_F ((P \to S) \lor (Q \to R))$.

Os outros passos da prova são indicados pela sequência de fórmulas.

$$((P \to R) \lor_T (Q \to S)) \to_F ((P \to S) \lor_F (Q \to R))$$

$$((P \to R) \lor_T (Q \to S)) \to_F ((P \to_F S) \lor_F (Q \to_F R))$$

$$((P_T \to R_F) \lor_T (Q_T \to S_F)) \to_F ((P_T \to_F S_F) \lor_F (Q_T \to_F R_F))$$

$$((P_T \to_F R_F) \lor_T (Q_T \to_F S_F)) \to_F ((P_T \to_F S_F) \lor_F (Q_T \to_F R_F))$$

E a última fórmula:

$$H = ((P_T \rightarrow_F R_F) \vee_{(T,F)} (Q_T \rightarrow_F S_F)) \rightarrow_F ((P_T \rightarrow_F S_F) \vee_F (Q_T \rightarrow_F R_F))$$

Na última fórmula, temos um absurdo na interpretação do conectivo "$\vee_{(T,F)}$". Portanto, H é uma tautologia. De forma análoga, provamos que G também é uma tautologia. A partir disso, Zé concluiria que: dado que:

Se Maria está em Rio Branco, então ela está no Acre.
Ou, se está em Boa Vista, então está em Roraima.

então é possível concluir, por consequência semântica, que:

Se Maria está em Rio Branco, então ela está em Roraima.
Ou, se está em Boa Vista, então está no Acre.

Tudo isso é um pouco confuso. Parece que mesmo que Zé esteja errado, então ele está certo. E se ele está certo, então ele também está errado. Esse problema ocorre porque a consequência semântica, conforme definida na Lógica Proposicional, não representa adequadamente o conceito de consequência que utilizamos em linguagem natural. A consequência semântica é uma representação muito simplificada do rico conceito de consequência, que utilizamos em linguagem natural. Vale observar que esse estudo das implicaturas é um importante tema de estudo em Lógica e Filosofia [Gabbay], [Goldstein] e [Haak]. ■

4.3.5 Custo computacional do método da negação

Conforme análise feita no início deste capítulo, o custo computacional para determinar se uma fórmula H é uma tautologia, utilizando o método da tabela-verdade, é exponencial. Mas, afinal, qual é o custo computacional para executar a mesma tarefa, utilizando o método da negação? Também, conforme já foi dito, tal custo deve ser exponencial, pois ainda não foi descoberto nenhuma maneira de determinar as fórmulas que são tautologias, executando algum algoritmo com custo inferior ao exponencial. Conclusão: o custo computacional do método da negação também é exponencial. Mas, se o custo do método da negação é exponencial, qual é a vantagem desse método? Para responder um pouco dessa questão, considere o exemplo a seguir.

Exemplo 4.8 (tautologia) Este exemplo utiliza o método da negação, ou redução ao absurdo, para demonstrar que a fórmula H é uma tautologia.

$$H = P_1 \rightarrow ((P_2 \wedge P_3) \rightarrow ((P_4 \wedge P_5) \rightarrow ((P_6 \wedge P_7) \rightarrow P_1))).$$

Suponha por absurdo que H não é uma tautologia. Tal fato é expresso pelo símbolo F sob o conectivo "$\rightarrow$" em H, conforme indicado a seguir:

$$P_1 \rightarrow_F ((P_2 \wedge P_3) \rightarrow ((P_4 \wedge P_5) \rightarrow ((P_6 \wedge P_7) \rightarrow P_1))).$$

A partir dessa fórmula, desenvolvendo o método da negação, temos a sequência:

$$P_{1_T} \rightarrow_F ((P_2 \wedge P_3) \rightarrow_F ((P_4 \wedge P_5) \rightarrow ((P_6 \wedge P_7) \rightarrow P_1))),$$

$$P_{1_T} \rightarrow_F ((P_2 \wedge_T P_3) \rightarrow_F ((P_4 \wedge P_5) \rightarrow_F ((P_6 \wedge P_7) \rightarrow P_1))),$$

$$P_{1_T} \rightarrow_F ((P_{2_T} \wedge_T P_{3_T}) \rightarrow_F ((P_4 \wedge_T P_5) \rightarrow_F ((P_6 \wedge P_7) \rightarrow_F P_1))),$$

$$P_{1_T} \rightarrow_F ((P_{2_T} \wedge_T P_{3_T}) \rightarrow_F ((P_{4_T} \wedge_T P_{5_T}) \rightarrow_F ((P_{6_T} \wedge_T P_{7_T}) \rightarrow_F P_{1_F}))).$$

Na fórmula anterior, há um absurdo, pois temos P_{1_T} no início e P_{1_F} no final da fórmula. Logo, H é uma tautologia. Certamente, a análise anterior é mais fácil do que fazer uma tabela-verdade com 128 linhas para determinar se H é uma tautologia. Por isso, poderia se esperar que o custo do método da negação fosse inferior ao custo do método da tabela-verdade. Entretanto, isso não ocorre. No caso da fórmula anterior, a análise foi rápida devido a presença de inúmeros conectivos "$\rightarrow$" e "$\wedge$". E, devido a tais conectivos, não ocorreu a presença de múltiplas possibilidades, como no Exemplo 4.6. Logo, esse não é o pior caso. ■

Exemplo 4.9 (tautologia?) Este exemplo utiliza o método da negação, ou redução ao absurdo, para tentar demonstrar se a fórmula G é uma tautologia.

$$G = P_1 \leftrightarrow ((P_2 \vee P_3) \leftrightarrow ((P_4 \vee P_5) \leftrightarrow ((P_6 \vee P_7) \leftrightarrow P_1))).$$

Inicialmente, observe como a fórmula G é semelhante à fórmula H do Exemplo 4.8. A fórmula G pode ser obtida de H trocando os conectivos "$\rightarrow$" e "$\wedge$" por "$\leftrightarrow$" e "$\vee$", respectivamente. Suponha, então, que se tente demonstrar se G é tautologia, utilizando o método da negação. Nesse caso, suponha, por absurdo, que G não é uma tautologia. Tal fato é expresso pelo símbolo F sob o conectivo "$\leftrightarrow$" em G, conforme indicado a seguir.

$$G = P_1 \leftrightarrow_F ((P_2 \vee P_3) \leftrightarrow ((P_4 \vee P_5) \leftrightarrow ((P_6 \vee P_7) \leftrightarrow P_1))).$$

Observe que já começamos com um problema. Se o conectivo "$\leftrightarrow_F$" é falso, temos duas possibilidades:

Possibilidade 1. $G = P_{1_T} \leftrightarrow_F ((P_2 \vee P_3) \leftrightarrow_F ((P_4 \vee P_5) \leftrightarrow ((P_6 \vee P_7) \leftrightarrow P_1)));$

Possibilidade 2. $G = P_{1_F} \leftrightarrow_F ((P_2 \vee P_3) \leftrightarrow_T ((P_4 \vee P_5) \leftrightarrow ((P_6 \vee P_7) \leftrightarrow P_1))).$

Desenvolvimento da possibilidade 1. Desenvolvendo a possibilidade 1, temos mais duas possibilidades:

Possibilidade 1.1. $G = P_{1_T} \leftrightarrow_F ((P_2 \vee_T P_3) \leftrightarrow_F ((P_4 \vee P_5) \leftrightarrow_F ((P_6 \vee P_7) \leftrightarrow P_1)));$

Possibilidade 1.2. $G = P_{1_T} \leftrightarrow_F ((P_2 \vee_F P_3) \leftrightarrow_F ((P_4 \vee P_5) \leftrightarrow_T ((P_6 \vee P_7) \leftrightarrow P_1))).$

Seguindo o método, o desenvolvimento da possibilidade 1.1 temos, também, outras duas possibilidades:

Possibilidade 1.1.1. .

$G = P_{1_T} \leftrightarrow_F ((P_2 \vee_T P_3) \leftrightarrow_F ((P_4 \vee_T P_5) \leftrightarrow_F ((P_6 \vee P_7) \leftrightarrow_F P_1)));$

Possibilidade 1.1.2. .

$G = P_{1_T} \leftrightarrow_F ((P_2 \vee_T P_3) \leftrightarrow_F ((P_4 \vee_F P_5) \leftrightarrow_F ((P_6 \vee P_7) \leftrightarrow_T P_1))),$

E vamos parar por aqui. Observe que nessa análise aparecem inúmeras possibilidades. Ou seja, dependendo da fórmula, o custo da análise de todas as possibilidades é semelhante ao custo da análise da fórmula, utilizando a tabela-verdade. Mas, afinal, G é tautologia? Parece que não. Mas, em Lógica, "parecer" nada significa. Prove se G é, ou não, uma tautologia. ■

Dada uma fórmula H, o custo para determinar se H é satisfatível é o mesmo, utilizando o método da tabela-verdade, ou o método da negação. Mas preste atenção: esse é o custo do pior caso. Não saia por aí, fazendo tabela-verdade para analisar as propriedades semânticas de todas as fórmulas da Lógica Proposicional. Isso, porque para alguns tipos de fórmulas, o uso, por exemplo, do método da negação é muito mais vantajoso, dado que nesses casos ele tem um custo bem menor. Veja o caso do Exemplo 4.8. Entretanto, há também casos, nos quais não temos tais vantagens, Exemplo 4.9. Surge, então, outra questão. Como identificar as fórmulas que são boas para se usar o método da negação? Responder tal questão, no caso geral, não é fácil e tem custo semelhante ao custo do uso do método da tabela-verdade. Ou seja, responder se a fórmula é adequada para a aplicação do método da negação tem custo semelhante ao uso do método da tabela-verdade. Conclusão: não vale a pena tentar elaborar um método para responder se uma fórmula é adequada ao uso do método da negação. Seria melhor usar logo o método da tabela-verdade. Mas, mesmo assim, devemos prestar atenção em alguns detalhes das fórmulas e tentar, na medida do possível, usar o método da negação, antes de se aventurar pela tabela-verdade. Se o uso do método da negação implica em uma análise com poucas possibilidades de desenvolvimento, então o método é indicado. Veja o exemplo 4.8.

O método da negação, ou redução ao absurdo, é um método de decisão. Como no caso do método da tabela-verdade, dada uma fórmula H, utilizando o método da negação é possível decidir se H possui, ou não possui, alguma propriedade semântica. Nesse sentido, dizemos que o método da negação é um mecanismo de decisão. Ele sempre fornece uma decisão quanto à pergunta: H possui, ou não possui, determinada propriedade semântica?

4.4 *Tableaux* semânticos na Lógica Proposicional

Já sabemos que nenhum método semântico para determinação da satisfatibilidade de fórmulas da Lógica Proposicional é mais eficiente que o método da tabela-verdade.

Mas, mesmo assim, a aplicação do método da negação tem suas vantagens em alguns casos, principalmente para fórmulas cuja análise não implica em muitas possibilidades de desenvolvimento. Isso significa que para algumas fórmulas o custo da aplicação do método da negação é menor que o da tabela-verdade. Observe que estamos sempre atentos à questão do custo. Entretanto, há outros elementos importantes a serem considerados. Por exemplo, uma relevante questão é a seguinte: existe algum método que determina a satisfatibilidade de fórmulas da Lógica Proposicional, cuja implementação em computadores é facilitada? A resposta é sim e esse método é o método dos *tableaux* semânticos. Portanto, mesmo tendo um custo computacional semelhante ao método da tabela-verdade, o método dos *tableaux* semânticos é mais adequado às implementações em computadores. Além disso, o método dos *tableaux* semânticos tem uma extensão para a Lógica de Predicados, o que não ocorre com o método da tabela-verdade. Além dessa característica o método dos *tableaux* semânticos tem outras relevâncias práticas e teóricas, cujo estudo não consideramos neste livro. Também é importante observar que vários sistemas de *tableaux* semânticos podem ser encontrados na literatura [Fitting], [Kelly], todos eles equivalentes entre si, mas com diferenças sintáticas.

4.4.1 Elementos básicos

Mas, afinal, o que é um *tableau* semântico na Lógica Proposicional? Primeiro, observe que *"tableau"* significa, em português, quadro. Então, estamos falando de um método que utiliza quadros semânticos. E são nesses quadros que escrevemos as fórmulas do nosso sistema de dedução semântico. Na verdade, uma sequência de fórmulas construída de acordo com um conjunto de regras. Além disso, as fórmulas são escritas no quadro, ou *tableau*, sob a forma de uma árvore. Portanto, no método dos *tableaux* semânticos utilizamos quadros, onde escrevemos sequências de fórmulas, tudo na forma de árvores. Formalmente, os elementos básicos que compõem o método dos *tableaux* semânticos são definidos a seguir.

Definição 4.1 (elementos básicos) *Os elementos básicos do método dos tableaux semânticos na Lógica Proposicional são:*

- *o alfabeto da Lógica Proposicional, Definição 1.1;*
- *o conjunto das fórmulas da Lógica Proposicional;*
- *um conjunto de regras de dedução.*

Os elementos básicos do método dos *tableaux* semânticos determinam sua estrutura fundamental. De forma análoga, a tabela-verdade também determina a estrutura básica do método da tabela-verdade. Entretanto, no caso do método dos *tableaux* semânticos não consideramos tabelas-verdade e sim, quadros semânticos. Observe que nos dois casos, temos como elemento básico a linguagem da Lógica Proposicional. Mas, diferentemente do que ocorre no método da tabela-verdade, no método dos *tableaux* semânticos temos regras de dedução. E são essas regras que definem o mecanismo de inferência do método e permitem a dedução de conhecimento e que podem ser implementadas em computadores. As regras são definidas a seguir, e seguem ideias apresentadas por [Kelly].

Definição 4.2 (regras de inferência) *Sejam A e B duas fórmulas da Lógica Proposicional. As regras de inferência do método dos tableaux semânticos na Lógica Proposicional são as regras $R_1, \ldots, R_9$ indicadas a seguir.*

$$R_1 = \begin{array}{c} A \wedge B \\ A \\ B \end{array} \qquad R_2 = \begin{array}{cc} \multicolumn{2}{c}{A \vee B} \\ \swarrow & \searrow \\ A & B \end{array} \qquad R_3 = \begin{array}{cc} \multicolumn{2}{c}{A \rightarrow B} \\ \swarrow & \searrow \\ \neg A & B \end{array}$$

$$R_4 = \begin{array}{cc} \multicolumn{2}{c}{A \leftrightarrow B} \\ \swarrow & \searrow \\ A \wedge B & \neg A \wedge \neg B \end{array} \qquad R_5 = \begin{array}{c} \neg\neg A \\ A \end{array} \qquad R_6 = \begin{array}{cc} \multicolumn{2}{c}{\neg(A \wedge B)} \\ \swarrow & \searrow \\ \neg A & \neg B \end{array}$$

$$R_7 = \begin{array}{c} \neg(A \vee B) \\ \neg A \\ \neg B \end{array} \qquad R_8 = \begin{array}{c} \neg(A \rightarrow B) \\ A \\ \neg B \end{array} \qquad R_9 = \begin{array}{cc} \multicolumn{2}{c}{\neg(A \leftrightarrow B)} \\ \swarrow & \searrow \\ \neg A \wedge B & A \wedge \neg B \end{array}$$

E agora, o que fazer com as regras? Sabemos que elas são utilizadas no método dos *tableaux* semânticos. Elas são aplicadas às fórmulas da Lógica Proposicional, deduzindo-se novas fórmulas. Então, utilizando essas fórmulas deduzidas, o quadro semântico é preenchido. Mas, afinal, como tudo isso é feito? Para entender como se aplica o método dos *tableaux* semânticos e, portanto, a utilização das regras da Definição 4.2, vamos seguir o roteiro.

1. Entender o significado de cada uma das regras $R_1, \ldots, R_9$;
2. Entender como as regras $R_1, \ldots, R_9$ são selecionadas e aplicadas às fórmulas da Lógica Proposicional;
3. Dada uma fórmula H, ou um conjunto de fórmulas, entender como construir um *tableau* semântico a partir de H, ou do conjunto de fórmulas;
4. Analisar o *tableau* semântico obtido e entender como se podem deduzir propriedades semânticas a partir do *tableau*.

4.4.2 O significado das regras dos *tableaux* semânticos

A ferramenta básica no desenvolvimento dos *tableaux* semânticos é o seu conjunto de regras. Portanto, entender o que cada uma diz, do ponto de vista semântico, é o primeiro passo para a compreensão do método.

O significado da regra R_1. Observe, inicialmente, como é escrita a regra R_1:

$$R_1 = \begin{array}{c} A \wedge B \\ A \\ B \end{array}$$

Na parte de cima, escrevemos a fórmula $(A \wedge B)$ e logo abaixo, em duas linhas consecutivas, escrevemos as fórmulas A e B. A forma de escrever a regra está intimamente ligada ao seu significado semântico. Ela diz que dada a fórmula $(A \wedge B)$, deduzimos as fórmulas A e B. Em outras palavras, se $(A \wedge B)$ foi deduzida no *tableau*, então deduzimos A e também B. Para denotar que deduzimos A e B, escrevemos as fórmulas A e B em duas linhas consecutivas. Do ponto de vista semântico, essa regra está dizendo que podemos deduzir A e B a partir de $(A \wedge B)$, o que é claro, pois se $A \wedge B$ é verdadeira, então A e B são verdadeiras.

O significado da regra R_2. Observe como é escrita a regra R_2:

$$\begin{array}{c} R_2 = A \vee B \\ \swarrow \quad \searrow \\ A \qquad B \end{array}$$

Na parte de cima, escrevemos a fórmula $(A \vee B)$. Mas, logo abaixo, escrevemos duas setas com as fórmulas A e B nas suas pontas. Isso é diferente do caso da regra R_1. Como no caso da regra R_1, a forma de escrever a regra R_2 está intimamente ligada ao seu significado semântico. Ela diz que se a fórmula $A \vee B$ já foi deduzida no *tableau*, então deduzimos a fórmula A ou a fórmula B. Em outras palavras, se $(A \vee B)$ foi deduzida, então deduzimos A ou B. Para denotar essa disjunção, que A ou B é verdadeira, escrevemos as fórmulas A e B nas pontas das setas. Portanto, as setas têm um significado de disjunção lógica. Isto é, um lado ou o outro da ponta da seta é deduzido. Devemos ainda observar que a disjunção determinada pelas setas tem o mesmo significado semântico do conectivo $\vee$. Isso significa que A ou B é verdadeira. E nesse caso, como ocorre com o conectivo $\vee$, podemos ter A e B verdadeiras[4]. Do ponto de vista semântico, essa regra está dizendo que podemos deduzir A ou B, a partir de $(A \vee B)$. Tal fato é claro, pois se $A \vee B$ é verdadeira, então A ou B, é verdadeira.

O significado da regra R_3. A regra R_3 é dada por:

$$\begin{array}{c} R_3 = A \rightarrow B \\ \swarrow \quad \searrow \\ \neg A \qquad B \end{array}$$

Na parte de cima, escrevemos a fórmula $A \rightarrow B$. E, logo abaixo, escrevemos duas setas com as fórmulas $\neg A$ e B nas suas pontas. Essa regra diz que se deduzimos a fórmula $A \rightarrow B$, então deduzimos a fórmula $\neg A$ ou a fórmula B. Em outras palavras, se $A \rightarrow B$ foi deduzida, então deduzimos que $\neg A$ é verdadeira, ou que B é verdadeira. Como no caso da regra R_2, para denotar essa disjunção, que $\neg A$ ou B é deduzida, escrevemos as fórmulas $\neg A$ e B nas pontas das setas. Portanto, novamente, as setas têm um significado de disjunção. Do ponto de vista semântico, essa regra está dizendo que podemos deduzir $\neg A$ ou B, a partir de $(A \rightarrow B)$. Tal fato é claro, pois

[4]Observe que essa disjunção não é uma disjunção exclusiva. Aquela em que apenas uma, e somente uma, das fórmulas é verdadeira.

$A \rightarrow B$ é verdadeira, então $\neg A$ é verdadeira, ou B é verdadeira. Observe que já demonstramos que $(A \rightarrow B)$ equivale a $(\neg A \vee B)$. Por isso, novamente, se $A \rightarrow B$ é verdadeira, então $\neg A$ é verdadeira, ou B é verdadeira.

O significado da regra R_4. A regra R_4 é dada por:

$$\begin{array}{ccc} & R_4 = A \leftrightarrow B & \\ & \swarrow \quad \searrow & \\ A \wedge B & & \neg A \wedge \neg B \end{array}$$

Essa regra diz que se já foi deduzida a fórmula $(A \leftrightarrow B)$, então deduzimos a fórmula $(A \wedge B)$ ou a fórmula $(\neg A \wedge \neg B)$. Como no caso da regra R_2, para denotar essa disjunção escrevemos as fórmulas $(A \wedge B)$ e $(\neg A \wedge \neg B)$ nas pontas das setas. E, novamente, as setas têm um significado de disjunção. Do ponto de vista semântico, essa regra está dizendo que podemos deduzir $(A \wedge B)$ ou $(\neg A \wedge \neg B)$, a partir de $(A \leftrightarrow B)$. Observe que se $A \leftrightarrow B$ é verdadeira, então $(A \wedge B)$ ou $(\neg A \wedge \neg B)$, é verdadeira. Nos exercícios, você é convidado a demonstrar que $(A \leftrightarrow B)$ equivale a $(A \wedge B) \vee (\neg A \wedge \neg B)$. E é por isso que, se $A \leftrightarrow B$ é verdadeira, então $(A \wedge B)$ é verdadeira, ou $(\neg A \wedge \neg B)$ é verdadeira.

O significado da regra R_5. A regra R_5 é dada por:

$$\begin{array}{l} R_5 = \neg\neg A \\ \qquad\quad A \end{array}$$

Essa regra é simples. Ela diz que da dedução da fórmula $(\neg\neg A)$, deduzimos a fórmula A. Do ponto de vista semântico isso é claro, pois $(\neg\neg A)$ tem uma dupla negação e sabemos que $(\neg\neg A)$ equivale a A.

O significado da regra R_6. Observe como é escrita a regra R_6 e a sua semelhança com a regra R_1. A fórmula inicial da regra R_6 é a negação da fórmula inicial de R_1:

$$\begin{array}{ccc} & R_6 = \neg(A \wedge B) & \\ & \swarrow \quad \searrow & \\ \neg A & & \neg B \end{array}$$

Mas R_6 tem duas setas e R_1 não. Por que isso ocorre? Observe inicialmente pela lei de De Morgan, vista no Exemplo 3.13, que $\neg(A \wedge B)$ equivale a $(\neg A \vee \neg B)$. Logo, se já foi deduzida a fórmula $(\neg A \vee \neg B)$, então, aplicando a regra R_2, deduzimos $\neg A$ ou $\neg B$. Portanto, a regra R_6 é uma reescrita, disfarçada, da regra R_2.

O significado da regra R_7. A regra R_7 é escrita a seguir. Observe sua semelhança com a regra R_2:

$$\begin{array}{l} R_7 = \neg(A \vee B) \\ \qquad\quad \neg A \\ \qquad\quad \neg B \end{array}$$

A fórmula inicial de R_7 é a negação da fórmula inicial de R_2. E pela lei de De Morgan, vista no Exemplo 3.13, temos que $\neg(A \vee B)$ equivale a $(\neg A \wedge \neg B)$. Logo, se já foi deduzida a fórmula $(\neg A \wedge \neg B)$, então, aplicando a regra R_1, deduzimos $\neg A$ e $\neg B$. Portanto, a regra R_7 é simplesmente a regra R_1 escrita em outra forma.

O significado da regra R_8. A regra R_8 é escrita a seguir:

$$\begin{array}{rc} R_8 = & \neg(A \rightarrow B) \\ & A \\ & \neg B \end{array}$$

A fórmula inicial de R_8 é $(\neg(A \rightarrow B))$. E, conforme o Exemplo 3.12, temos que $\neg(A \rightarrow B)$ equivale a $(A \wedge \neg B)$. Então, se já foi deduzida a fórmula $(A \wedge \neg B)$, então, aplicando a regra R_1, deduzimos A e $\neg B$. Portanto, a regra R_8 é uma reescrita da regra R_1.

O significado da regra R_9. A regra R_9 é dada por:

$$\begin{array}{rccc} R_9 = & & \neg(A \leftrightarrow B) & \\ & & \swarrow \quad \searrow & \\ & A \wedge \neg B & & \neg A \wedge B \end{array}$$

Essa regra diz que se já foi deduzida a fórmula $(\neg(A \leftrightarrow B))$, então deduzimos a fórmula $(A \wedge \neg B)$ ou a fórmula $(\neg A \wedge B)$. Observe como essa regra é semelhante à regra R_4. Primeiro, a fórmula inicial de R_9 é a negação da fórmula inicial de R_4. Segundo, a partir da fórmula inicial, nas duas regras, deduzimos uma disjunção, que é indicada pela presença das setas. Na regra R_9, se $(\neg(A \leftrightarrow B))$ é deduzida, então deduzimos $(A \wedge \neg B)$ ou $(\neg A \wedge B)$. Do ponto de vista semântico, essa regra está dizendo que podemos deduzir $(A \wedge \neg B)$ ou $(\neg A \wedge B)$, a partir de $(\neg(A \leftrightarrow B))$. E isso está correto, pois, conforme é proposto nos exercícios, temos que $\neg(A \leftrightarrow B)$ equivale a $(A \wedge \neg B) \vee (\neg A \wedge B)$. Por isso, se $(\neg(A \leftrightarrow B))$ é verdadeira, então $(A \wedge \neg B)$ é verdadeira, ou $(\neg A \wedge B)$ é verdadeira.

A primeira etapa do nosso roteiro foi vencida. Agora passamos para o segundo passo.

4.4.3 Aplicação das regras do *tableau* semântico

No método dos *tableaux* semânticos, o preenchimento do quadro semântico sempre é feito a partir de uma, ou mais fórmulas iniciais. E, a partir dessas fórmulas iniciais, para desenvolver o método, devemos aplicar as regras. Surgem, então, duas questões:

1. Dada uma fórmula H, qual é a regra adequada para ser aplicada a H?
2. Dada uma fórmula H, como aplicar a regra adequada a H?

Considere, inicialmente, a primeira questão. Qual é a regra adequada para aplicar a uma determinada fórmula? Nesse caso, dada uma fórmula H, para identificar a regra a ser aplicada, basta comparar H com as fórmulas iniciais das regras

$$R_1, \ldots, R_9$$

Ou seja, dadas as fórmulas iniciais das regras:

$$(A \wedge B),\ (A \vee B),\ (A \rightarrow B),\ (A \leftrightarrow B),$$
$$\neg\neg A,\ \neg(A \wedge B),\ \neg(A \vee B),\ \neg(A \rightarrow B),\ \text{ou}\ \neg(A \leftrightarrow B),$$

devemos identificar qual delas corresponde à forma de H. Em seguida, a partir da correspondência, determinar as fórmulas A e B. Em relação à segunda questão, a respeito de como aplicar a regra, basta escrever no quadro semântico as fórmulas A e B, conforme é indicado em cada uma das regras $R_1, \ldots, R_9$. O exemplo a seguir esclarece tais procedimentos.

Exemplo 4.10 (aplicação da regra R_1.) Este exemplo mostra como selecionar e aplicar a regra R_1. Considere a fórmula H_1 tal que

$$H_1 = (\neg\neg P) \wedge (Q \vee (R \rightarrow (S \leftrightarrow P))).$$

Observe que H_1 é uma fórmula do tipo $A \wedge B$, na qual:

$$A = (\neg\neg P)$$
$$B = (Q \vee (R \rightarrow (S \leftrightarrow P)))$$

Portanto, a regra adequada para ser aplicada a H_1 é a regra R_1. E, nesse caso, o resultado da aplicação de R_1 em H_1 é descrito no *tableau* como é indicado a seguir:

1.	$(\neg\neg P) \wedge (Q \vee (R \rightarrow (S \leftrightarrow P)))$	H_1
2.	$(\neg\neg P)$	$R_1, 1.$
3.	$(Q \vee (R \rightarrow (S \leftrightarrow P)))$	$R_1, 1.$

O quadro, ou *tableau* semântico, é escrito em três colunas. Na primeira, escrevemos a enumeração das linhas do *tableau*. Na segunda coluna, indicamos as fórmulas envolvidas. E, para facilitar a leitura do *tableau,* indicamos na terceira coluna como são deduzidas as fórmulas da segunda coluna. No caso do *tableau* acima, a fórmula da linha 1 é H_1, o que é indicado na terceira coluna. Na linha 2, temos uma fórmula que foi deduzida da fórmula da linha 1, utilizando a regra R_1. Tal fato é indicado na terceira coluna, escrevendo $R_1, 1$. De forma análoga, a fórmula da linha 3 também é deduzida da fórmula da linha 1, utilizando a regra R_1. E, por isso, escrevemos $R_1, 1$ na terceira coluna da terceira linha. ■

Exemplo 4.11 (aplicação da regra R_2.) Este exemplo mostra como selecionar e aplicar a regra R_2. Considere a fórmula

$$H_2 = ((\neg\neg P) \wedge Q) \vee (R \rightarrow (S \leftrightarrow P)).$$

Observe que H_2 é uma fórmula do tipo $A \vee B$, na qual:

$$A = ((\neg\neg P) \wedge Q)$$
$$B = (R \rightarrow (S \leftrightarrow P))$$

A regra adequada para ser aplicada a H_2 é a regra R_2. E, nesse caso, o resultado da aplicação de R_2 em H_2 é descrito no *tableau* como é indicado a seguir:

1.	$((\neg\neg P) \land Q) \lor ((R \rightarrow (S \leftrightarrow P)))$	H_2
	$\swarrow \ \searrow$	
2.	$((\neg\neg P) \land Q) \qquad (R \rightarrow (S \leftrightarrow P))$	$R_2, 1.$

Como no Exemplo 4.10, o quadro, ou *tableau* semântico, é escrito em três colunas. Na primeira coluna temos a enumeração das linhas, na segunda as fórmulas e setas, e na terceira, indicamos como são obtidas as fórmulas da segunda coluna. Mas, observe que a linha das setas não é enumerada. Além disso, escrevemos $R_2, 1.$ na linha 2, terceira coluna, para indicar que as fórmulas da linha 2 foram deduzidas, utilizando a aplicação da regra R_2 na fórmula da linha 1. ■

Exemplo 4.12 (aplicação das regras R_3, R_4 e R_5.) Este exemplo mostra como selecionar e aplicar as regras R_3, R_4 e R_5.

Aplicação da regra R_3. Considere a fórmula H_3 tal que

$$H_3 = (((\neg\neg P) \land Q) \lor R) \rightarrow (S \leftrightarrow P).$$

Observe que H_3 é uma fórmula do tipo $A \rightarrow B$, na qual:

$$A = (((\neg\neg P) \land Q) \lor R)$$

$$B = (S \leftrightarrow P)$$

A regra adequada para ser aplicada a H_3 é a regra R_3. E, nesse caso, o resultado da aplicação de R_3 em H_3 é descrito no *tableau* como indicado a seguir:

1.	$(((\neg\neg P) \land Q) \lor R) \rightarrow (S \leftrightarrow P)$	H_3
	$\swarrow \ \searrow$	
2.	$\neg(((\neg\neg P) \land Q) \lor R) \qquad (S \leftrightarrow P)$	$R_3, 1.$

Aplicação da regra R_4. Considere a fórmula

$$H_4 = ((((\neg\neg P) \land Q) \lor R) \rightarrow S) \leftrightarrow P.$$

H_4 é uma fórmula do tipo $A \leftrightarrow B$, na qual

$$A = ((((\neg\neg P) \land Q) \lor R) \rightarrow S)$$

$$B = P$$

A regra adequada para ser aplicada a H_4 é a regra R_4. O resultado da aplicação de R_4 em H_4 é descrito no *tableau* como é indicado a seguir.

1.	$((((\neg\neg P) \land Q) \lor R) \rightarrow S) \leftrightarrow P$	H_4
	$\swarrow \ \searrow$	
2.	$((((\neg\neg P) \land Q) \lor R) \rightarrow S) \land P \qquad \neg((((\neg\neg P) \land Q) \lor R) \rightarrow S) \land \neg P$	$R_4, 1.$

1.	$\neg\neg(((P \rightarrow Q) \wedge \neg(P \leftrightarrow Q)) \wedge \neg\neg P)$	H

Figura 4.1: *Tableau* semântico associado à fórmula H.

Aplicação da regra R_5. Considere a fórmula

$$H_5 = \neg\neg(P \wedge (Q \vee (R \rightarrow (S \leftrightarrow P)))).$$

H_5 é uma fórmula do tipo $\neg\neg A$, na qual:

$$A = (P \wedge (Q \vee (R \rightarrow (S \leftrightarrow P))))$$

A regra adequada para ser aplicada a H_5 é a regra R_5. O resultado da aplicação de R_5 em H_5 é descrito no *tableau* como é indicado a seguir.

1.	$\neg\neg(P \wedge (Q \vee (R \rightarrow (S \leftrightarrow P))))$	H_5
2.	$(P \wedge (Q \vee (R \rightarrow (S \leftrightarrow P))))$	$R_5, 1.$

■

Para não lhe cansar com tanta repetição, simplesmente observamos que a seleção e aplicação das regras $R_6, \ldots, R_9$ segue os mesmos passos indicados nos exemplos anteriores. Para entender o método dos *tableaux* semânticos, o nosso objetivo é esclarecer os tópicos.

1. Entender o significado de cada uma das regras $R_1, \ldots, R_9$;
2. Entender como as regras $R_1, \ldots, R_9$ são selecionadas e aplicadas às fórmulas da Lógica Proposicional;
3. Dada uma fórmula H, ou um conjunto de fórmulas, entender como construir um *tableau* semântico a partir de H, ou do conjunto de fórmulas;
4. Analisar o *tableau* semântico obtido e entender como se pode deduzir propriedades semânticas.

Os dois primeiros já superamos. Considere, então, o terceiro tópico da lista: dada uma fórmula H, entender como construir um *tableau* semântico a partir de H. Nesse caso, a melhor forma de entender tal fato é utilizando um exemplo.

Exemplo 4.13 (construção de *tableau* semântico) Considere a fórmula H, tal que:

$$H = \neg\neg(((P \rightarrow Q) \wedge \neg(P \leftrightarrow Q)) \wedge \neg\neg P).$$

Vamos construir um *tableau* a partir de H e o primeiro passo, claro, é escrever H no *tableau*, na linha 1, como indicado na Figura 4.1. A regra adequada a aplicação em H é a regra R_5 e o resultado é mostrado na Figura 4.2. Na sequência, aplicamos a regra

1.	$\neg\neg(((P \rightarrow Q) \wedge \neg(P \leftrightarrow Q)) \wedge \neg\neg P)$	H
2.	$((P \rightarrow Q) \wedge \neg(P \leftrightarrow Q)) \wedge \neg\neg P$	$R_5, 1.$

Figura 4.2: *Tableau* semântico associado à fórmula H.

1.	$\neg\neg(((P \rightarrow Q) \wedge \neg(P \leftrightarrow Q)) \wedge \neg\neg P)$	H
2.	$((P \rightarrow Q) \wedge \neg(P \leftrightarrow Q)) \wedge \neg\neg P$	$R_5, 1.$
3.	$(P \rightarrow Q) \wedge \neg(P \leftrightarrow Q)$	$R_1, 2.$
4.	$\neg\neg P$	$R_1, 2.$

Figura 4.3: *Tableau* semântico associado à fórmula H.

R_1 e obtemos o *tableau* da Figura 4.3. Nesse ponto, temos duas opções. Aplicar a regra R_1 na fórmula da linha 3, ou a regra R_5 na fórmula da linha 4. Felizmente, no método dos *tableaux* semânticos não importa a escolha feita. Independentemente da escolha em cada passo, o resultado final, ou seja, a conclusão final do *tableau* é sempre a mesma. Isso ficará mais claro no desenvolvimento do método dos *tableaux* semânticos e, por enquanto, basta você saber que não faz diferença aplicar R_1 na fórmula da linha 3, ou R_5 na fórmula da linha 4. Escolhemos, então, aplicar R_1 na fórmula da linha 3 e depois R_5 na fórmula da linha 4. O resultado é o *tableau* da Figura 4.4. A partir das fórmulas derivadas, novamente, temos duas opções de aplicação das regras. Podemos aplicar R_3 na fórmula da linha 5, ou R_9 na fórmula da linha 6. Observe que não é possível aplicar regra alguma na fórmula da linha 7. O resultado da aplicação de R_3 é o *tableau* da Figura 4.5. No *tableau* da Figura 4.5, já aplicamos alguma regra nas fórmulas da linhas 1, 2, 3, 4 e 5. Nas fórmulas das linhas 7 e 8 não é possível aplicar nenhuma regra. Sobra somente a fórmula da linha 6. Essa é a única fórmula que ainda não aplicamos nenhuma regra e que, além disso, é possível aplicar alguma regra do *tableau*. O resultado da aplicação de R_9 na fórmula

1.	$\neg\neg(((P \rightarrow Q) \wedge \neg(P \leftrightarrow Q)) \wedge \neg\neg P)$	H
2.	$((P \rightarrow Q) \wedge \neg(P \leftrightarrow Q)) \wedge \neg\neg P$	$R_5, 1.$
3.	$(P \rightarrow Q) \wedge \neg(P \leftrightarrow Q)$	$R_1, 2.$
4.	$\neg\neg P$	$R_1, 2.$
5.	$(P \rightarrow Q)$	$R_1, 3.$
6.	$\neg(P \leftrightarrow Q)$	$R_1, 3.$
7.	P	$R_5, 4.$

Figura 4.4: *Tableau* semântico associado à fórmula H.

$$
\begin{array}{lccr}
1. & & \neg\neg(((P \rightarrow Q) \wedge \neg(P \leftrightarrow Q)) \wedge \neg\neg P) & H \\
2. & & ((P \rightarrow Q) \wedge \neg(P \leftrightarrow Q)) \wedge \neg\neg P & R_5, 1. \\
3. & & (P \rightarrow Q) \wedge \neg(P \leftrightarrow Q) & R_1, 2. \\
4. & & \neg\neg P & R_1, 2. \\
5. & & (P \rightarrow Q) & R_1, 3. \\
6. & & \neg(P \leftrightarrow Q) & R_1, 3. \\
7. & & P & R_5, 4. \\
 & & \swarrow \qquad \searrow & \\
8. & & \neg P \qquad\qquad Q & R_3, 5.
\end{array}
$$

Figura 4.5: *Tableau* semântico associado à fórmula H.

da linha 6 é o *tableau* da Figura 4.6. Algo importante ocorre na aplicação da regra R_9 na fórmula da linha 6. Preste atenção! O resultado da aplicação de R_9 é escrito após todas as fórmulas descendentes da fórmula da linha 6. Isto é, o resultado da aplicação de R_9 é escrito após todas as fórmulas da linha 8. Em seguida, aplicamos a regra R_1 nas fórmulas da linha 9. Observe que todas as fórmulas da linha 9 são adequadas à aplicação da regra R_1. Ainda que com resultados diferentes, pois temos dois tipos de fórmulas na linha 9. O resultado da aplicação de R_1 nas fórmulas da linha 9 é o *tableau* da Figura 4.7. Novamente, como ocorre com a aplicação da regra R_9 na fórmula da linha 6, os resultados da aplicação de R_1 nas fórmulas da linha 9 são escritos somente abaixo de cada fórmula. Ou seja, na linha de seus descendentes. Por exemplo, o resultado da aplicação de R_1 em $(\neg P \wedge Q)$ é escrito somente abaixo dessa fórmula. O mesmo ocorre com a aplicação de R_1 em $(P \wedge \neg Q)$. Terminamos o desenvolvimento do *tableau*, pois não há mais fórmulas sobre as quais seja possível aplicar alguma regra e que, ainda, não tenha recebido a aplicação de nenhuma regra. ■

Veja mais um exemplo:

Exemplo 4.14 (construção de um *tableau* semântico) Considere a fórmula G tal que:

$$G = (((P \leftrightarrow Q) \wedge (P \rightarrow R)) \vee Q) \wedge \neg\neg P.$$

Construímos, a seguir, um *tableau* a partir de G e o primeiro passo, claro, é escrever G no *tableau*, na linha 1, como indicado na Figura 4.8. A regra adequada à aplicação em G é a regra R_1 e o resultado é mostrado na Figura 4.9. Em seguida, aplicamos a regra R_2 na linha 2. Observe que poderíamos aplicar R_5 na linha 3. Entretanto, escolhemos aplicar R_2 na linha 2. E isso não modifica a conclusão do *tableau*. O resultado é mostrado na Figura 4.10. Na sequência, aplicamos a regra R_1 e obtemos

$$
\begin{array}{lcccccccr}
1. & & & & \neg\neg(((P \to Q) \wedge \neg(P \leftrightarrow Q)) \wedge \neg\neg P) & & & & H \\
2. & & & & ((P \to Q) \wedge \neg(P \leftrightarrow Q)) \wedge \neg\neg P & & & & R_5, 1. \\
3. & & & & (P \to Q) \wedge \neg(P \leftrightarrow Q) & & & & R_1, 2. \\
4. & & & & \neg\neg P & & & & R_1, 2. \\
5. & & & & (P \to Q) & & & & R_1, 3. \\
6. & & & & \neg(P \leftrightarrow Q) & & & & R_1, 3. \\
7. & & & & P & & & & R_5, 4. \\
 & & & \swarrow & & \searrow & & & \\
8. & & \neg P & & & & Q & & R_3, 5. \\
 & \swarrow & & \searrow & & \swarrow & & \searrow & \\
9. & (\neg P \wedge Q) & & (P \wedge \neg Q) & & (\neg P \wedge Q) & & (P \wedge \neg Q) & R_9, 6.
\end{array}
$$

Figura 4.6: *Tableau* semântico associado à fórmula H.

$$
\begin{array}{lcccccccr}
1. & & & & \neg\neg(((P \to Q) \wedge \neg(P \leftrightarrow Q)) \wedge \neg\neg P) & & & & H \\
2. & & & & ((P \to Q) \wedge \neg(P \leftrightarrow Q)) \wedge \neg\neg P & & & & R_5, 1. \\
3. & & & & (P \to Q) \wedge \neg(P \leftrightarrow Q) & & & & R_1, 2. \\
4. & & & & \neg\neg P & & & & R_1, 2. \\
5. & & & & (P \to Q) & & & & R_1, 3. \\
6. & & & & \neg(P \leftrightarrow Q) & & & & R_1, 3. \\
7. & & & & P & & & & R_5, 4. \\
 & & & \swarrow & & \searrow & & & \\
8. & & \neg P & & & & Q & & R_3, 5. \\
 & \swarrow & & \searrow & & \swarrow & & \searrow & \\
9. & (\neg P \wedge Q) & & (P \wedge \neg Q) & & (\neg P \wedge Q) & & (P \wedge \neg Q) & R_9, 6. \\
10. & \neg P & & P & & \neg P & & P & R_1, 9. \\
11. & Q & & \neg Q & & Q & & \neg Q & R_1, 9.
\end{array}
$$

Figura 4.7: *Tableau* semântico associado à fórmula H.

1.	$(((P \leftrightarrow Q) \wedge (P \rightarrow R)) \vee Q) \wedge \neg\neg P$	G

Figura 4.8: *Tableau* semântico associado à fórmula G.

1.	$(((P \leftrightarrow Q) \wedge (P \rightarrow R)) \vee Q) \wedge \neg\neg P$	G
2.	$(((P \leftrightarrow Q) \wedge (P \rightarrow R)) \vee Q)$	$R_1, 1.$
3.	$\neg\neg P$	$R_1, 1.$

Figura 4.9: *Tableau* semântico associado à fórmula G.

o *tableau* da Figura 4.11. Observe que poderíamos fazer outra escolha, aplicar R_5 na linha 3. O o resultado da aplicação da regra R_1 na fórmula da linha 2 é escrito somente abaixo da fórmula $((P \leftrightarrow Q) \wedge (P \rightarrow R))$. Esse resultado não é escrito abaixo da fórmula Q, porque a fórmula Q não é descendente, na árvore, da fórmula $((P \leftrightarrow Q) \wedge (P \rightarrow R))$. Nesse ponto, podemos aplicar R_5 na linha 3, ou R_4 na linha 5, ou a regra R_3 na fórmula da linha 6. Como já foi dito, no método dos *tableaux* semânticos não importa a escolha feita, pois o resultado final, ou a conclusão final do *tableau*, é sempre a mesma. Escolhemos aplicar primeiro R_4 e depois R_3. O resultado é o *tableau* da Figura 4.12. A partir das fórmulas derivadas, temos novamente duas opções de aplicação das regras. Podemos aplicar R_1 na fórmula da linha 7, ou R_5 na fórmula da linha 2. Para as outras linhas, ou já aplicamos alguma regra, ou não é possível aplicar regra alguma, como é o caso da linha 8. O resultado da aplicação de R_1 é o *tableau* da Figura 4.13. Falta aplicar somente a regra R_5 na linha 3. E, nesse caso, o resultado deve ser escrito em todos os descendentes, na árvore, da fórmula da linha 3. O resultado da aplicação de R_5 na fórmula da linha 3 é o *tableau* da Figura 4.14. Por fim, observe que escrevemos $R_1, 4.$, $R_5, 3.$, na linha 5, da terceira coluna. Isso indica que a primeira fórmula da linha 5 foi deduzida, aplicando R_1 na linha 4 e a segunda fórmula foi deduzida, aplicando R_5 na linha 3. No *tableau* da Figura 4.14

1.	$(((P \leftrightarrow Q) \wedge (P \rightarrow R)) \vee Q) \wedge \neg\neg P$		G
2.	$(((P \leftrightarrow Q) \wedge (P \rightarrow R)) \vee Q)$		$R_1, 1.$
3.	$\neg\neg P$		$R_1, 1.$
	$\swarrow$	$\searrow$	
4.	$((P \leftrightarrow Q) \wedge (P \rightarrow R))$	Q	$R_2, 2.$

Figura 4.10: *Tableau* semântico associado à fórmula G.

$$
\begin{array}{llcr}
1. & \multicolumn{2}{c}{(((P \leftrightarrow Q) \wedge (P \rightarrow R)) \vee Q) \wedge \neg\neg P} & G \\
2. & \multicolumn{2}{c}{(((P \leftrightarrow Q) \wedge (P \rightarrow R)) \vee Q)} & R_1, 1. \\
3. & \multicolumn{2}{c}{\neg\neg P} & R_1, 1. \\
 & \swarrow & \searrow & \\
4. & ((P \leftrightarrow Q) \wedge (P \rightarrow R)) & Q & R_2, 2. \\
5. & (P \leftrightarrow Q) & & R_1, 4. \\
6. & (P \rightarrow R) & & R_1, 4.
\end{array}
$$

Figura 4.11: *Tableau* semântico associado à fórmula G.

$$
\begin{array}{lccccr}
1. & \multicolumn{4}{c}{(((P \leftrightarrow Q) \wedge (P \rightarrow R)) \vee Q) \wedge \neg\neg P} & G \\
2. & \multicolumn{4}{c}{(((P \leftrightarrow Q) \wedge (P \rightarrow R)) \vee Q)} & R_1, 1. \\
3. & \multicolumn{4}{c}{\neg\neg P} & R_1, 1. \\
 & \multicolumn{2}{c}{\swarrow} & \multicolumn{2}{c}{\searrow} & \\
4. & \multicolumn{2}{c}{((P \leftrightarrow Q) \wedge (P \rightarrow R))} & \multicolumn{2}{c}{Q} & R_2, 2. \\
5. & \multicolumn{2}{c}{(P \leftrightarrow Q)} & & & R_1, 4. \\
6. & \multicolumn{2}{c}{(P \rightarrow R)} & & & R_1, 4. \\
 & \swarrow & \searrow & & & \\
7. & P \wedge Q & \neg P \wedge \neg Q & & & R_4, 5. \\
 & \swarrow \quad \searrow & \swarrow \quad \searrow & & & \\
8. & \neg P \qquad R & \neg P \qquad R & & & R_3, 6.
\end{array}
$$

Figura 4.12: *Tableau* semântico associado à fórmula G.

1.	$(((P \leftrightarrow Q) \land (P \rightarrow R)) \lor Q) \land \neg\neg P$				G
2.	$(((P \leftrightarrow Q) \land (P \rightarrow R)) \lor Q)$				$R_1, 1.$
3.	$\neg\neg P$				$R_1, 1.$
4.	$((P \leftrightarrow Q) \land (P \rightarrow R))$		Q		$R_2, 2.$
5.	$(P \leftrightarrow Q)$				$R_1, 4.$
6.	$(P \rightarrow R)$				$R_1, 4.$
7.	$P \land Q$		$\neg P \land \neg Q$		$R_4, 5.$
8.	$\neg P$	R	$\neg P$	R	$R_3, 6.$
9.	P	P	$\neg P$	$\neg P$	$R_1, 7.$
10.	Q	Q	$\neg Q$	$\neg Q$	$R_1, 7.$

Figura 4.13: *Tableau* semântico associado à fórmula G.

não há mais fórmulas sobre as quais é possível aplicar alguma regra e que, ainda, não tenha recebido a aplicação de nenhuma regra. Logo, o *tableau* associado a G está concluído. ■

No desenvolvimento dos *tableaux* dos exemplos anteriores, escolhemos as regras aleatoriamente. Entretanto, na medida do possível, para que o *tableaux* não fique extenso, devemos escolher preferencialmente regras que não bifurcam. O Exemplo 4.15 a seguir analisa essa questão. Este exemplo considera o desenvolvimento de um *tableau* semântico a partir de um conjunto de fórmulas.

Exemplo 4.15 (construção de *tableau* semântico) Considere o conjunto de fórmulas:

$$\{(P \lor Q), (P \land \neg Q)\}.$$

Um *tableau* semântico construído a partir dessas fórmulas é representado na Figura 4.15. O *tableau* semântico é iniciado com as fórmulas $(P \lor Q)$ e $(P \land \neg Q)$, que são denotadas nas linhas 1 e 2 na Figura 4.15. Em seguida, a regra R_2 é aplicada à fórmula 1, obtendo as fórmulas da linha 3. Finalmente, a regra R_1 é aplicada à formula 2 e são obtidas as fórmulas das linhas 4 e 5. Observe que a aplicação da regra R_2 faz com que o *tableau* semântico se bifurque em dois ramos. O mesmo não ocorre com a aplicação de R_1. Entretanto, nesse caso os resultados da aplicação

1.	$(((P \leftrightarrow Q) \land (P \to R)) \lor Q) \land \neg\neg P$				G
2.	$(((P \leftrightarrow Q) \land (P \to R)) \lor Q)$				$R_1, 1.$
3.	$\neg\neg P$				$R_1, 1.$
4.	$((P \leftrightarrow Q) \land (P \to R))$		Q		$R_2, 2.$
5.	$(P \leftrightarrow Q)$		P		$R_1, 4.,\ R_5, 3.$
6.	$(P \to R)$				$R_1, 4.$
7.	$P \land Q$		$\neg P \land \neg Q$		$R_4, 5.$
8.	$\neg P$	R	$\neg P$	R	$R_3, 6.$
9.	P	P	$\neg P$	$\neg P$	$R_1, 7.$
10.	Q	Q	$\neg Q$	$\neg Q$	$R_1, 7.$
11.	P	P	P	P	$R_5, 3.$

Figura 4.14: *Tableau* semântico associado à fórmula G.

1.	$P \lor Q$		
2.	$P \land \neg Q$		
3.	P	Q	R_2 1.
4.	P	P	R_1 2.
5.	$\neg Q$	$\neg Q$	R_1 2.

Figura 4.15: *Tableau* iniciado com $\{(P \lor Q), (P \land \neg Q)\}$.

$$
\begin{array}{lcl}
1. & P \lor Q & \\
2. & P \land \neg Q & \\
3. & P & R_1\ .2 \\
4. & \neg Q & R_1\ .2 \\
 & \swarrow \quad \searrow & \\
5. & P \qquad Q & R_2\ .1
\end{array}
$$

Figura 4.16: *Tableau* iniciado com $\{(P \lor Q),\ (P \land \neg Q)\}$.

$$
\begin{array}{lc}
1. & P \to Q \\
2. & \neg(P \lor Q) \\
3. & \neg(R \to P)
\end{array}
$$

Figura 4.17: *Tableau* semântico associado a Φ.

de R_1 são repetidos nos dois ramos do *tableau*. Esse *tableau* também pode ser construído pela aplicação de R_1 e depois R_2. Nesse caso, o resultado é o *tableau* da Figura 4.16. No *tableau* da Figura 4.16, R_2 é aplicada após R_1. Isso significa que a bifurcação da árvore é postergada. Em geral, a aplicação de uma regra é feita considerando qualquer uma das fórmulas presentes na árvore. Porém, uma boa heurística na construção do *tableau* é aplicar inicialmente regras que não bifurcam a árvore. Seguindo essa heurística, obtemos de maneira geral *tableaux* menores, ou seja, com menos ramos. ■

Heurística para aplicação de regras. Aplique preferencialmente as regras R_1, R_5, R_7 e R_8, que não bifurcam o *tableau*. O Exemplo 4.16, a seguir, segue essa heurística.

Exemplo 4.16 (construção de *tableau* semântico) Considere o conjunto de fórmulas: $\Phi = \{(P \to Q), \neg(P \lor Q), \neg(R \to P)\}$. A Figura 4.17, é um *tableau* iniciado com as fórmulas desse conjunto. Iniciamos o desenvolvimento do *tableau* com a regra R_7, que não bifurca a árvore. O resultado da aplicação de R_7 à linha 2 é indicado no *tableau* da Figura 4.18. Em seguida utilizamos outra regra que não bifurca a árvore. O resultado da aplicação de R_8 à linha 3 é indicado no *tableau* da Figura 4.19. Por fim, aplicamos a regra R_3 à linha 1, bifurcando a árvore. O resultado é indicado no *tableau* da Figura 4.20.

■

4.4.4 Propriedades fundamentais

Lembre, novamente, dos nossos objetivos:

1.	$P \rightarrow Q$	
2.	$\neg(P \vee Q)$	
3.	$\neg(R \rightarrow P)$	
4.	$\neg P$	$R_7, 2.$
5.	$\neg Q$	$R_7, 2.$

Figura 4.18: *Tableau* semântico associado a Φ.

1.	$P \rightarrow Q$	
2.	$\neg(P \vee Q)$	
3.	$\neg(R \rightarrow P)$	
4.	$\neg P$	$R_7, 2.$
5.	$\neg Q$	$R_7, 2.$
6.	R	$R_8, 3.$
7.	$\neg P$	$R_8, 3.$

Figura 4.19: *Tableau* semântico associado a Φ.

1.	$P \rightarrow Q$	
2.	$\neg(P \vee Q)$	
3.	$\neg(R \rightarrow P)$	
4.	$\neg P$	$R_7, 2.$
5.	$\neg Q$	$R_7, 2.$
6.	R	$R_8, 3.$
7.	$\neg P$	$R_8, 3.$
	$\swarrow \quad \searrow$	
8.	$\neg P \qquad Q$	$R_3, 1.$

Figura 4.20: *Tableau* semântico associado a Φ.

1. Entender o significado de cada uma das regras $R_1, \ldots, R_9$;
2. Entender como as regras $R_1, \ldots, R_9$ são selecionadas e aplicadas às fórmulas da Lógica Proposicional;
3. Dada uma fórmula H, ou um conjunto de fórmulas, entender como construir um *tableau* semântico a partir de H, ou do conjunto de fórmulas;
4. Analisar o *tableau* semântico obtido e entender como se podem deduzir propriedades semânticas.

Já resolvemos três tópicos. Só falta o último. Para analisar um *tableau* semântico e concluir sobre as propriedades semânticas de uma fórmula, ou do conjunto de fórmulas, a partir das quais o *tableau* semântico é desenvolvido, são necessárias algumas definições. Essas definições estabelecem algumas propriedades fundamentais dos *tableaux* semânticos.

Definição 4.3 (ramo) *Em um tableau semântico, um ramo corresponde a um ramo da árvore que descreve o tableau.*

Exemplo 4.17 (ramo de um *tableau*) Considere o *tableau* da Figura 4.14. O ramo mais à esquerda é dado pela sequência de fórmulas:

$$(((P \leftrightarrow Q) \wedge (P \rightarrow R)) \vee Q) \wedge \neg\neg P$$
$$(((P \leftrightarrow Q) \wedge (P \rightarrow R)) \vee Q)$$
$$\neg\neg P$$
$$((P \leftrightarrow Q) \wedge (P \rightarrow R))$$
$$(P \leftrightarrow Q)$$
$$(P \rightarrow R)$$
$$P \wedge Q$$
$$\neg P$$
$$P$$
$$Q$$
$$P$$

E o ramo mais a direita pela sequência:

$$(((P \leftrightarrow Q) \wedge (P \rightarrow R)) \vee Q) \wedge \neg\neg P$$
$$(((P \leftrightarrow Q) \wedge (P \rightarrow R)) \vee Q)$$
$$\neg\neg P$$
$$Q$$
$$P$$

■

Definição 4.4 (ramo fechado) *Em um tableau semântico, um ramo é fechado se ele contém uma fórmula H e sua negação $\neg H$.*

Exemplo 4.18 (ramo fechado em um *tableau*) Considere o *tableau* da Figura 4.14. O ramo mais a esquerda é fechado, pois ele contém as fórmulas $\neg P$ e P. Por outro lado, o ramo mais à direita não é fechado, pois ele não contém uma fórmula e sua negação. ■

Cuidado! Se um ramo não é fechado, então não necessariamente é aberto. O conceito de ramo aberto é definido a seguir.

Definição 4.5 (ramo saturado) *Em um tableau semântico, um ramo é saturado se para toda fórmula H, do ramo:*

1. *Já foi aplicada alguma regra à fórmula H, ou seja: H já foi expandida por alguma regra; ou*
2. *Não é possível aplicar nenhuma regra à fórmula H, isto é, H é igual a um literal e não é possível expandi-la por alguma regra.*

Exemplo 4.19 (ramo saturado em um *tableau*) Considere o *tableau* da Figura 4.14. Todos os ramos desse *tableau* são saturados. Isso porque não é possível aplicar mais nenhuma regra, a não ser que haja repetição de tal aplicação. ■

Definição 4.6 (ramo aberto) *Em um tableau semântico, um ramo é aberto se ele é saturado e não é fechado.*

Exemplo 4.20 (ramo fechado em um *tableau*) Considere o *tableau* da Figura 4.14. O ramo mais à esquerda não é aberto, pois ele é fechado. Por outro lado, o ramo mais à direita é aberto pois ele não é fechado e está saturado. Portanto, para que um ramo seja aberto ele precisa estar saturado, além de não ser fechado. ■

Definição 4.7 (*tableau* fechado) *Um tableau semântico é fechado quando todos os seus ramos são fechados.*

Definição 4.8 (*tableau* aberto) *Um tableau semântico é aberto se possui algum ramo aberto.*

Exemplo 4.21 (*tableau* fechado) Considere o *tableau* da Figura 4.7. Esse *tableau* é fechado pois todos os seus ramos são fechados. Confira. ■

Exemplo 4.22 (*tableau* aberto) Considere o *tableau* da Figura 4.12. Esse *tableau* é aberto pois ele contém um ramo aberto, o mais à direita. Confira. ■

Portanto, basta que um ramo seja aberto e então temos um *tableau* aberto. Para ser fechado, a exigência é maior. Todos os ramos devem ser fechados. Além disso, para um ramo ser fechado, não é necessário que ele seja saturado. Entretanto, apenas decidimos se um ramo é aberto, analisando ramos saturados.

$$
\begin{array}{llr}
1. & ((P \wedge Q) \rightarrow R) \wedge ((P \wedge Q) \wedge \neg R) & H \\
2. & (P \wedge Q) \rightarrow R & R_1, 1. \\
3. & (P \wedge Q) \wedge \neg R & R_1, 1. \\
4. & (P \wedge Q) & R_1, 3. \\
5. & \neg R & R_1, 3. \\
 & \swarrow \quad \searrow & \\
6. & \neg(P \wedge Q) \qquad R & R_3, 2. \\
 & \text{ramo} \qquad \text{ramo} & \\
 & \text{fechado} \qquad \text{fechado} &
\end{array}
$$

Figura 4.21: *Tableau* semântico iniciado com $((P \wedge Q) \rightarrow R) \wedge ((P \wedge Q) \wedge \neg R)$.

Exemplo 4.23 (*tableau* semântico fechado) O *tableau* semântico iniciado com a fórmula:

$$H = ((P \wedge Q) \rightarrow R) \wedge ((P \wedge Q) \wedge \neg R)$$

é mostrado na Figura 4.21. O *tableau* da Figura 4.21 é fechado. E, além disso, há nele outra característica importante. No ponto em que cada ramo se fecha, não prosseguimos com o seu desenvolvimento. A justificava de tal procedimento é objeto de nossa análise a seguir. ■

4.4.5 O teorema da correção

Agora estamos prontos para analisar a relação entre as propriedades semânticas da Lógica Proposicional e o método dos *tableaux* semânticos. Isto é, como utilizar esse método para determinar propriedades semânticas. O teorema da correção, considerado a seguir, estabelece a relação entre os *tableaux* semânticos e as tautologias.

Teorema 4.1 (correção dos *tableaux* semânticos) *Dada uma fórmula H, da Lógica Proposicional,*

se existe um tableau semântico fechado associado a $\neg H$, então H é uma tautologia.

Antes de analisar o teorema da correção e também a razão de seu nome, considere alguns exemplos:

Exemplo 4.24 (tautologia em *tableaux* semânticos) Considere as sentenças:
"Guga é determinado.
Guga é inteligente.
Se Guga é determinado e atleta, ele não é um perdedor.
Guga é um atleta se é um fã de tênis.
Guga é fã de tênis se é inteligente."

Provamos, a seguir, utilizando *tableau* semântico, que a afirmação "Guga não é um perdedor." é uma consequência lógica das sentenças anteriores. Considere então as seguintes denotações:
$P =$ "Guga é determinado",
$Q =$ "Guga é inteligente",
$R =$ "Guga é atleta",
$P_1 =$ "Guga é um perdedor",
$Q_1 =$ "Guga é fã de tênis."

A partir de tais correspondências, provamos que $\neg P_1$ é uma consequência lógica das sentenças. E as sentenças são representadas pela conjunção:

$$P \ \wedge \ Q \ \wedge \ ((P \wedge R) \rightarrow \neg P_1) \ \wedge \ (Q_1 \rightarrow R) \ \wedge \ (Q \rightarrow Q_1)$$

Mas, sabemos que $\neg P_1$ é uma consequência dessa conjunção, se, e somente se, a fórmula H, a seguir, é uma tautologia.

$$H = (P \wedge Q \wedge ((P \wedge R) \rightarrow \neg P_1) \wedge (Q_1 \rightarrow R) \wedge (Q \rightarrow Q_1)) \rightarrow \neg P_1.$$

Para demonstrar que H é uma tautologia, utilizando o métodos dos *tableaux* semânticos, conforme o teorema da correção, Teorema 4.1, devemos verificar se é possível construir um *tableau* fechado a partir de $\neg H$. Considere, então, o *tableau* da Figura 4.22, a seguir: Como o *tableau* da Figura 4.22 é fechado, então pelo teorema da correção, Teorema 4.1, H é uma tautologia. Logo, é verdade que a afirmação "Guga não é um perdedor." é uma consequência das afirmações iniciais. ■

Os *tableaux* das Figuras 4.21 e 4.22 possuem uma importante característica em comum. No ponto em que cada ramo se fecha, não prosseguimos com o seu desenvolvimento. Por que deve ser assim? Conforme o teorema da correção, Teorema 4.1, se o *tableau* associado a $\neg H$ é fechado, então H é uma tautologia. Portanto, para concluir que H é uma tautologia, devemos obter um *tableau* com todos os ramos fechados. Ou seja, o objetivo é obter um *tableau* fechado. E dado que algum ramo se fecha, então não é mais necessário prosseguir com o seu desenvolvimento, pois as derivações subsequentes não modificam a natureza fechada do ramo. Nesse sentido, o *tableau* da Figura 4.7 pode ser modificado para o *tableau* da Figura 4.23, indicada a seguir. Além disso, como esse *tableau* é associado à fórmula

$$\neg\neg(((P \rightarrow Q) \wedge \neg(P \leftrightarrow Q)) \wedge \neg\neg P),$$

concluímos que $\neg(((P \rightarrow Q) \wedge \neg(P \leftrightarrow Q)) \wedge \neg\neg P)$ é uma tautologia.

Definição 4.9 (prova) *Um tableau fechado associado a uma fórmula $\neg H$ é uma prova de H.*

O *tableau* da Figura 4.23, que é fechado, é uma prova de

$$\neg(((P \rightarrow Q) \wedge \neg(P \leftrightarrow Q)) \wedge \neg\neg P).$$

$$
\begin{array}{lccccr}
1. & \multicolumn{4}{c}{\neg(((P \land Q) \land ((P \land R) \rightarrow \neg P_1)} & \\
 & \multicolumn{4}{c}{\land (Q_1 \rightarrow R) \land (Q \rightarrow Q_1)) \rightarrow \neg P_1)} & \neg H \\
2. & \multicolumn{4}{c}{P \land Q \land ((P \land R) \rightarrow \neg P_1) \land (Q_1 \rightarrow R) \land (Q \rightarrow Q_1)} & R_8,\ 1. \\
3. & \multicolumn{4}{c}{\neg\neg P_1} & R_8,\ 1. \\
4. & \multicolumn{4}{c}{P} & R_1,\ 2. \\
5. & \multicolumn{4}{c}{Q} & R_1,\ 2. \\
6. & \multicolumn{4}{c}{(P \land R) \rightarrow \neg P_1} & R_1,\ 2. \\
7. & \multicolumn{4}{c}{(Q_1 \rightarrow R)} & R_1,\ 2. \\
8. & \multicolumn{4}{c}{(Q \rightarrow Q_1)} & R_1,\ 2. \\
9. & \multicolumn{4}{c}{P_1} & R_5,\ 3. \\
 & \swarrow & \searrow & & & \\
10. & \neg Q & Q_1 & & & R_3,\ 8. \\
 & \text{fechado} & \swarrow \quad \searrow & & & \\
11. & & \neg Q_1 & R & & R_3,\ 7. \\
 & & \text{fechado} & \swarrow \quad \searrow & & \\
12. & & & \neg(P \land R) & \neg P_1 & R_3,\ 6. \\
 & & & \swarrow \quad \searrow & \text{fechado} & \\
13. & & & \neg P \qquad \neg R & & R_6,\ 12. \\
 & & & \text{fechado} \quad \text{fechado} & & \\
\end{array}
$$

Figura 4.22: *Tableau* semântico fechado associado a $\neg H$.

$$
\begin{array}{lcl}
1. & \neg\neg(((P \to Q) \land \neg(P \leftrightarrow Q)) \land \neg\neg P) & H \\
2. & ((P \to Q) \land \neg(P \leftrightarrow Q)) \land \neg\neg P & R_5, 1. \\
3. & (P \to Q) \land \neg(P \leftrightarrow Q) & R_1, 2. \\
4. & \neg\neg P & R_1, 2. \\
5. & (P \to Q) & R_1, 3. \\
6. & \neg(P \leftrightarrow Q) & R_1, 3. \\
7. & P & R_5, 4.
\end{array}
$$

$$
\begin{array}{lccc l}
8. & \neg P & & Q & R_3, 5. \\
 & \text{fechado} & & & \\
9. & & (\neg P \land Q) & (P \land \neg Q) & R_9, 6. \\
10. & & \neg P & P & R_1, 9. \\
11. & & Q & \neg Q & R_1, 9. \\
 & & \text{fechado} & \text{fechado} &
\end{array}
$$

Figura 4.23: *Tableau* semântico fechado associado a H.

Observe que o *tableau* é iniciado com a negação dessa fórmula. Após a aplicação das regras, todos os seus ramos são fechados, o que constitui uma prova da fórmula

$$\neg(((P \to Q) \land \neg(P \leftrightarrow Q)) \land \neg\neg P).$$

Ou seja, essa fórmula é uma tautologia. A partir disso, concluímos que

$$((P \to Q) \land \neg(P \leftrightarrow Q)) \land \neg\neg P$$

é contraditória.

Definição 4.10 (consequência lógica em *tableaux* semânticos) *Dada uma fórmula H e um conjunto de hipóteses*[5] *$\beta = \{A_1, \ldots, A_n\}$, então H é uma consequência lógica de β, se existe uma prova de $(A_1 \land \ldots, \land A_n) \to H$.*

Exemplo 4.25 (consequência lógica em *tableaux* semânticos) Considere as sentenças:
"Se Guga joga uma partida de tênis, a torcida comparece se o ingresso é barato."
"Se Guga joga uma partida de tênis, o ingresso é barato."
A sentença:

[5] Neste livro consideramos apenas conjuntos finitos de hipóteses.

1.	$\neg(((P \to (R \to Q)) \land (P \to R)) \to (P \to Q))$	$\neg G$
2.	$(P \to (R \to Q)) \land (P \to R)$	R_8, 1.
3.	$\neg(P \to Q)$	R_8, 1.
4.	P	R_8, 3.
5.	$\neg Q$	R_8, 3.
6.	$P \to (R \to Q)$	R_1, 2.
7.	$P \to R$	R_1, 2.
	$\swarrow \quad \searrow$	
8.	$\neg P$ (fechado) $\quad (R \to Q)$	R_3, 6.
	$\swarrow \quad \searrow$	
9.	$\neg P$ (fechado) $\quad R$	R_3, 7.
	$\swarrow \quad \searrow$	
10.	$\neg R$ (fechado) $\quad Q$ (fechado)	R_3, 8.

Figura 4.24: *Tableau* semântico fechado associado a $\neg G$. ■

"Se Guga joga uma partida de tênis, a torcida comparece."
é uma consequência lógica das afirmações anteriores? Para representar as sentenças na Lógica Proposicional, considere as seguintes correspondências: $P =$ "Guga joga uma partida de tênis"; $Q =$ "A torcida comparece"; $R =$ "O ingresso é barato". A partir delas, o argumento é traduzido para a Lógica Proposicional como:

$$G = ((P \to (R \to Q)) \land (P \to R)) \to (P \to Q).$$

Devemos, então, provar se G é ou não uma tautologia, ou seja, se a sentença "Se Guga joga uma partida de tênis, a torcida comparece" é uma consequência lógica das afirmações anteriores. Como o *tableau* da Figura 4.24 é fechado, então pelo teorema da correção, Teorema 4.1, G é uma tautologia. Portanto, a consequência lógica ocorre. Isto é, a sentença "Se Guga joga uma partida de tênis, a torcida comparece" é uma consequência lógica das afirmações anteriores.

As conclusões dos exemplos anteriores se fundamentam nos resultados do teoremas da correção, Teorema 4.1. Por isso, vale a pena analisá-lo com mais cuidado.

Nota. A demonstração do teorema da correção utiliza o princípio da indução finita e não é considerada neste livro. A demonstração pode ser encontrada em [Fitting].

Entretanto, mesmo não o demonstrando, rigorosamente, é possível compreender seu significado.

O porquê do nome "correção". O teorema da correção diz que se há uma prova de uma fórmula, utilizando *tableaux* semânticos, então essa fórmula é, necessariamente, uma tautologia.

Se existe um *tableau* semântico fechado associado a $\neg H$, então H é uma tautologia.

E, como sabemos, tautologia é um conceito forte, muito mais que a veracidade. Pois se uma fórmula é uma tautologia, ela é verdadeira para todas as interpretações. Então, nesse contexto, podemos dizer que a fórmula provada é correta, dado que ela é uma tautologia. Portanto, como o teorema da correção nos *tableaux* semânticos é válido, então o resultado de toda prova, utilizando *tableaux* semânticos, é uma fórmula correta. Ou seja, o método dos *tableaux* semânticos somente prova o que é correto. Nesse método, não se prova aquilo que pode ser falso, ou que não é correto. Isto é, se existe algum *tableau* semântico fechado associado a $\neg H$, então H é uma tautologia, ou seja, é uma fórmula correta, que sempre é interpretada como verdadeira.

A validade do teorema da correção em um caso particular. Como já foi dito, não provamos formalmente neste livro o teorema da correção. Isso porque nosso texto é apenas uma introdução. Mas, mesmo assim, apresentamos uma análise que justifica informalmente a validade do teorema da correção em um caso particular. Logo, por ser um caso particular, a análise que se segue não prova o caso geral. Uma prova da fórmula G, apresentada no Exemplo 4.25, é o *tableau* desenvolvido na Figura 4.24. Nesse caso:

$$G = ((P \rightarrow (R \rightarrow Q)) \wedge (P \rightarrow R)) \rightarrow (P \rightarrow Q)$$

e sua prova possui os quatro ramos fechados indicados na Figura 4.25. Observe que cada ramo inicia com a fórmula $\neg G$, que é a primeira fórmula do *tableau*. Entretanto, cada ramo é constituído de uma sequência diferente de fórmulas. Além disso, como cada ramo é fechado, ele possui uma fórmula e sua negação. Os ramos 1 e 2, por exemplo, são fechados porque contêm, cada um, as fórmulas P e $\neg P$. O ramo 3 contém R e $\neg R$ e o ramo 4 contém Q e $\neg Q$.

O método dos *tableaux* semânticos é um método similar ao método da negação. No método da negação, para provar que G é uma tautologia, supomos inicialmente que G é falsa, ou seja, que existe uma interpretação I tal que $I[\neg G] = T$[6]. Analogamente, no método dos *tableaux* semânticos, para provar que G é uma tautologia, iniciamos o *tableau* com a negação de G, ou seja, $\neg G$. Isso significa que estamos supondo que existe uma interpretação I tal que $I[\neg G] = T$. Isto é, estamos supondo que existe uma interpretação I que interpreta a primeira fórmula do *tableau* como verdadeira. No desenvolvimento do *tableau* semântico, aplicamos uma sequência de regras nas quais temos duas situações possíveis: a regra bifurca ou não. No caso em que a regra não bifurca, se a primeira fórmula da regra é verdadeira, então as fórmulas escritas abaixo também são verdadeiras. Na regra R_1, por exemplo, se $I[A \wedge B] = T$, então temos: $I[A] = T$ e $I[B] = T$. Quando a regra bifurca, se a

[6]Devido a esse fato, tal sistema também é denominado sistema de refutação.

ramo 1
$\neg G$
$(P \to (R \to Q)) \wedge (P \to R)$
$\neg(P \to Q)$
P
$\neg Q$
$P \to (R \to Q)$
$P \to R$
$\neg P$

ramo 2
$\neg G$
$(P \to (R \to Q)) \wedge (P \to R)$
$\neg(P \to Q)$
P
$\neg Q$
$P \to (R \to Q)$
$P \to R$
$(R \to Q)$
$\neg P$

ramo 3
$\neg G$
$(P \to (R \to Q)) \wedge (P \to R)$
$\neg(P \to Q)$
P
$\neg Q$
$P \to (R \to Q)$
$P \to R$
$(R \to Q)$
R
$\neg R$

ramo 4
$\neg G$
$(P \to (R \to Q)) \wedge (P \to R)$
$\neg(P \to Q)$
P
$\neg Q$
$P \to (R \to Q)$
$P \to R$
$(R \to Q)$
R
Q

Figura 4.25: Ramos fechados da prova de G.

interpretação do ramo 1
$I[\neg G] = T$
$I[(P \to (R \to Q)) \land (P \to R)] = T$
$I[\neg(P \to Q)] = T$
$I[P] = T$
$I[\neg Q] = T$
$I[P \to (R \to Q)] = T$
$I[P \to R] = T$
$I[\neg P] = T$

interpretação do ramo 2
$I[\neg G] = T$
$I[(P \to (R \to Q)) \land (P \to R)] = T$
$I[\neg(P \to Q)] = T$
$I[P] = T$
$I[\neg Q] = T$
$I[P \to (R \to Q)] = T$
$I[P \to R] = T$
$I[(R \to Q)] = T$
$I[\neg P] = T$

interpretação do ramo 3
$I[\neg G] = T$
$I[(P \to (R \to Q)) \land (P \to R)] = T$
$I[\neg(P \to Q)] = T$
$I[P] = T$
$I[\neg Q] = T$
$I[P \to (R \to Q)] = T$
$I[P \to R] = T$
$I[(R \to Q)] = T$
$I[R] = T$
$I[\neg R] = T$

interpretação do ramo 4
$I[\neg G] = T$
$I[(P \to (R \to Q)) \land (P \to R)] = T$
$I[\neg(P \to Q)] = T$
$I[P] = T$
$I[\neg Q] = T$
$I[P \to (R \to Q)] = T$
$I[P \to R] = T$
$I[(R \to Q)] = T$
$I[R] = T$
$I[Q] = T$

Figura 4.26: Interpretação do ramos fechados da prova de G.

primeira fórmula da regra é verdadeira, então pelo menos uma das fórmulas escritas abaixo é verdadeira. Na regra R_2, por exemplo, se $I[A \lor B] = T$, então temos: $I[A] = T$, ou $I[B] = T$.

Dados tais fatos, no caso do *tableau* da Figura 4.24, concluímos que se $I[\neg G] = T$, então todas as fórmulas de pelo menos um ramo da árvore são interpretadas como verdadeiras. Em outras palavras, se $I[\neg G] = T$, então pelo menos uma das situações indicadas na Figura 4.26 ocorre. Mas veja o que ocorre na interpretação de cada ramo. Nos ramos 1 e 2, temos que $I[P] = T$ e $I[\neg P] = T$. No ramo 3, temos $I[R] = T$ e $I[\neg R] = T$, enquanto no ramo 4 temos $I[Q] = T$ e $I[\neg Q] = T$. Em todos os casos, ocorrem absurdos. Isso significa que se $I[\neg G] = T$, então ocorrem absurdos em todos os ramos, ou seja, em todas as possibilidades. Conclusão: não existe interpretação I tal que $I[\neg G] = T$. Logo, para toda interpretação I, $I[\neg G] = F$. Isto, é, para toda interpretação I, $I[G] = T$. Portanto, G é uma tautologia. Esse método dos *tableaux* semânticos é, de fato, muito simpático.

1.	$\neg((P \leftrightarrow Q) \vee \neg P)$		$\neg G$
2.	$\neg(P \leftrightarrow Q)$		R_7, 1.
3.	$\neg\neg P$		R_7, 1.
4.	P		R_5, 3.
	$\swarrow$	$\searrow$	
5.	$P \wedge \neg Q$	$\neg P \wedge Q$	R_9, 2.
6.	P	$\neg P$	R_1, 5.
7.	$\neg Q$	Q	R_1, 5.
	aberto	fechado	

Figura 4.27: *Tableau* semântico aberto associado a $\neg G$.

4.4.6 O teorema da completude

Iniciamos esta seção, considerando um exemplo:

Exemplo 4.26 (*tableau* semântico aberto) Considere a fórmula G a seguir:

$$G = ((P \leftrightarrow Q) \vee \neg P).$$

Nesse caso, não é possível obter um *tableau* fechado associado a $\neg G$, conforme indicado na Figura 4.27.

Portanto, o *tableau* da Figura 4.27 não é uma prova de G. E, por mais que tentemos, não é possível desenvolver o *tableau* e fechar todos os seus ramos. Dada uma fórmula H, um ramo aberto no *tableau* semântico a partir de $\neg H$ define um contraexemplo, ou uma interpretação I, tal que $I[H] = F$. Este fato é analisado neste exemplo. ■

No Exemplo 4.26, conforme a Figura 4.27, não é possível desenvolver o *tableau* e obter, ao final, todos os ramos fechados. Dessa informação, concluímos que o *tableau* da Figura 4.27 não é uma prova para a fórmula G. Tem-se, então, uma questão importante. Se não há uma prova de G, usando *tableau*, então podemos concluir que G não é uma tautologia? Nesse caso estamos questionando o inverso da implicação do teorema da correção, Teorema 4.1, que diz:

Se existe um *tableau* semântico fechado associado a $\neg H$, então H é uma tautologia.

Agora, estamos questionando o contrário. Isto é:

Se não existe um *tableau* semântico fechado associado a $\neg H$, então H não é uma tautologia?

A resposta a essa questão é afirmativa, conforme o teorema da completude, Teorema 4.2, a seguir.

Teorema 4.2 (completude dos *tableaux* semânticos) *Seja uma fórmula H, da Lógica Proposicional:*

Se não existe um tableau semântico fechado associado a $\neg H$,
então H não é uma tautologia.

Ou, equivalentemente:

Se H é uma tautologia, então existe um tableau semântico fechado associado a $\neg H$.

Nota. A demonstração do teorema da completude não é considerada neste livro. A demonstração pode ser encontrada em [Fitting].

Entretanto, consideramos a seguir uma demonstração, informal, do teorema da completude e também a razão de seu nome. Antes, porém, considere mais um exemplo.

Exemplo 4.27 (*tableau* aberto e contraexemplo) A Figura 4.27 é um *tableau* associado à fórmula:

$$\neg((P \leftrightarrow Q) \vee \neg P).$$

Nesse *tableau*, o ramo à esquerda é aberto. Esse ramo contém os literais: $\neg Q$ e P. A partir desses literais, como Q é negado e P não é negado, definimos uma interpretação I tal que $I[Q] = F$ e $I[P] = T$. A interpretação I é tal que $I[((P \leftrightarrow Q) \vee \neg P)] = F$, ou seja, I é uma interpretação contraexemplo para a fórmula $((P \leftrightarrow Q) \vee \neg P)$. No Exemplo 4.14 temos um *tableau* aberto na Figura 4.14. Esse *tableau* se inicia com a fórmula:

$$G = (((P \leftrightarrow Q) \wedge (P \rightarrow R)) \vee Q) \wedge \neg\neg P.$$

Logo, nesse caso, o ramo aberto determina uma interpretação contraexemplo para a fórmula:

$$\neg G = \neg((((P \leftrightarrow Q) \wedge (P \rightarrow R)) \vee Q) \wedge \neg\neg P)$$

Preste atenção! Se o *tableau* começa com G, ele tenta provar que $\neg G$ é uma tautologia, ou estabelece um contraexemplo para $\neg G$. Fique atento às negações das fórmulas. No segundo ramo, da esquerda para a direita, temos os literais: Q, P e R. A partir desses literais, como P, Q e R não são negados, definimos uma interpretação I tal que $I[P] = T$, $I[Q] = T$ e $I[R] = T$. A interpretação I é tal que $I[\neg G] = F$. Isto é:

$$I[\neg((((P \leftrightarrow Q) \wedge (P \rightarrow R)) \vee Q) \wedge \neg\neg P)] = F,$$

ou seja, I é uma interpretação contraexemplo para a fórmula $\neg G$. ■

Como já foi dito, o teorema da completude, Teorema 4.2, é um resultado fundamental no método dos *tableaux* semânticos. Portanto, vale a pena analisá-lo melhor. O teorema da completude afirma o seguinte.

Se não existe um *tableau* semântico fechado associado a $\neg H$,
então H não é uma tautologia.

Uma implicação que equivale a:

Se H é uma tautologia, então existe um *tableau* semântico fechado associado a $\neg H$.

Entretanto, como no caso do teorema da correção, ainda que ele não seja demonstrado rigorosamente, é possível compreender algo de seu significado.

O porquê do nome "completude". O teorema da completude diz que se uma fórmula é uma tautologia, então há uma prova dessa fórmula, utilizando *tableaux* semânticos. Nesse sentido, o método é completo, ou seja, ele prova todas as tautologias. O método não deixa escapar nenhuma tautologia, pois todas possuem, pelo menos, uma prova. Por isso, ele é completo.

A validade do teorema da completude em um caso particular. Novamente, como no caso do teorema da correção, não provamos neste livro, formalmente, o teorema da completude. Apresentamos apenas uma justificativa, informal, da validade do teorema da completude, em um caso particular. De novo, por ser um caso particular, a análise que se segue não prova o caso geral. Isto é, ela não prova o teorema da completude. Conforme o Exemplo 4.26, a Figura 4.27 determina um contraexemplo para a fórmula $\neg((P \leftrightarrow Q) \vee \neg P)$. O contraexemplo é determinado pelo ramo à esquerda do *tableau*, que é aberto. Esse ramo contém os literais: $\neg Q$ e P. Por isso, a interpretação I tal que $I[Q] = F$ e $I[P] = T$ interpreta a fórmula como sendo falsa. Isto é, I é tal que $I[((P \leftrightarrow Q) \vee \neg P)] = F$. Portanto, dada uma fórmula H, se o *tableau* associado a $\neg H$ possui algum ramo aberto, podemos, a partir desse ramo aberto, definir uma interpretação que interpreta H como falsa. Logo:

Se não existe um *tableau* semântico fechado associado a $\neg H$,
então todo *tableau* semântico associado a $\neg H$ possui algum ramo aberto.

Então, considerando o ramo aberto, é possível definir uma interpretação contraexemplo para H. Logo, H não é uma tautologia. Conclusão: se todo *tableau* semântico associado a $\neg H$ possui ramo aberto, então em todo *tableau* semântico associado a H é possível definir uma interpretação contraexemplo para H. Por isso, H não é uma tautologia.

4.4.7 Satisfatibilidade de conjunto de fórmulas

Até agora usamos o método dos *tableaux* semânticos para determinar se uma fórmula é ou não uma tautologia. O Exemplo 4.28 utiliza o método para determinar se um conjunto de fórmulas é ou não satisfatível.

Exemplo 4.28 (conjunto não satisfatível) Este exemplo demonstra, utilizando *tableaux* semânticos, que o conjunto de fórmulas a seguir não é satisfatível:

$$\beta = \{\neg P \vee Q, \neg(Q \vee \neg R), R \rightarrow P_1, \neg(\neg P \vee P_1)\}.$$

Seja H a fórmula definida pela conjunção das fórmulas de β:

$$H = (\neg P \vee Q) \wedge \neg(Q \vee \neg R) \wedge (R \rightarrow P_1) \wedge \neg(\neg P \vee P_1)$$

1.	$\neg\neg((\neg P \lor Q) \land \neg(Q \lor \neg R) \land (R \to P_1) \land \neg(\neg P \lor P_1))$	$\neg\neg H$
2.	$(\neg P \lor Q) \land \neg(Q \lor \neg R) \land (R \to P_1) \land \neg(\neg P \lor P_1)$	R_5, .1
3.	$\neg P \lor Q$	R_1, 2.
4.	$\neg(Q \lor \neg R)$	R_1, 2.
5.	$R \to P_1$	R_1, 2.
6.	$\neg(\neg P \lor P_1)$	R_1, 2.
7.	$\neg Q$	R_7, 4.
8.	$\neg\neg R$	R_7, 4.
9.	$\neg\neg P$	R_7, 6.
10.	$\neg P_1$	R_7, 6.
11.	R	R_5, 8.
12.	P	R_5, 9.
	$\swarrow \quad \searrow$	
13.	$\neg R \qquad P_1$	R_3, 5.
	fechado fechado	

Figura 4.28: *Tableau* semântico fechado associado a $\neg\neg H$.

Então, observe que:

$$
\begin{array}{lll}
\beta \text{ é insatisfatível,} & \Leftrightarrow & \text{não existe interpretação } I;\ I[H] = T, \\
 & \Leftrightarrow & \text{não existe interpretação } I;\ I[\neg H] = F, \\
 & \Leftrightarrow & \text{para toda interpretação } I;\ I[\neg H] = T, \\
 & \Leftrightarrow & \neg H \text{ é uma tautologia,} \\
 & \Leftrightarrow & \neg H \text{ tem uma prova utilizando } \textit{tableaux} \text{ semânticos,} \\
 & \Leftrightarrow & \text{existe um } \textit{tableau} \text{ semântico fechado associado a } \neg\neg H.
\end{array}
$$

Portanto, para demonstrar que β é insatisfatível, basta verificar se existe um *tableau* semântico fechado associado a $\neg\neg H$. A Figura 4.28 é um *tableau* associado a $\neg\neg H$. Como o *tableau* da Figura 4.28 é fechado, então, pelo teorema da correção, $\neg H$ é uma tautologia. Logo, o conjunto de fórmulas β é insatisfatível. Observe que no *tableau* desse exemplo, Figura 4.28, não foi aplicada nenhuma regra à fórmula 3. Isso significa que a fórmula $\neg H$ sem a subfórmula $\neg P \lor Q$ também é uma tautologia. Portanto, o conjunto de fórmulas:

$$\{\neg(Q \lor \neg R), (R \to P_1), \neg(\neg P \lor P_1)\}$$

também é insatisfatível. Usando o mesmo raciocínio, é possível verificar também que:

$$\neg((\neg P \lor Q) \land \neg(Q \lor \neg R) \land \neg(\neg P \lor P_1))$$

$$
\begin{array}{lccccl}
1. & & (P \vee \neg P) \vee (P \rightarrow Q) & & & H \\
& & \swarrow \quad \searrow & & & \\
2. & (P \vee \neg P) & & (P \rightarrow Q) & & R_2,\ 1. \\
& \swarrow \ \searrow & & \swarrow \ \searrow & & \\
3. & P \quad \neg P & & \neg P \quad Q & & R_2, 2.;\ R_3,\ 2. \\
& \text{aberto} \quad \text{aberto} & & \text{aberto} \quad \text{aberto} & &
\end{array}
$$

Figura 4.29: *Tableau* semântico aberto.

é tautologia e concluir que o conjunto:

$$\{\neg P \vee Q, \neg(Q \vee \neg R), \neg(\neg P \vee P_1)\}$$

é insatisfatível. Finalmente, observe que as fórmulas 3, 4, 5 e 6 do *tableau* da Figura 4.28 correspondem exatamente às fórmulas de β. Isso significa que, para demonstrar que β é insatisfatível, basta iniciar o *tableau* com as fórmulas de β. ■

4.4.8 Algumas observações

A prova utilizando *tableaux* semânticos é feita seguindo um método análogo ao da negação, ou redução ao absurdo. Para provar, por exemplo, que uma fórmula H é uma tautologia, consideramos inicialmente a sua negação $\neg H$. Em seguida, construímos um *tableau* semântico, iniciado com $\neg H$. O absurdo corresponde à obtenção, em todos os ramos do *tableau*, de uma fórmula A e sua negação $\neg A$. O que ocorre se o *tableau* é construído a partir da fórmula H e não de sua negação? Nesse caso, se o *tableau* obtido é fechado, então $\neg H$ é uma tautologia. Isto é, H é contraditória. Em outras palavras, se o *tableau* iniciado com H é fechado, então um *tableau* iniciado com $\neg\neg H$ também é fechado. Logo, $\neg H$ é uma tautologia, isto é, H é contraditória. Analisemos, ainda, outra questão. Considere a tautologia H a seguir, $H = (P \vee \neg P) \vee (P \rightarrow Q)$. Nesse caso, dado que H é uma tautologia, todo *tableau* iniciado com $\neg H$ é fechado. Por outro lado, conforme a Figura 4.29, o *tableau* iniciado com H não é fechado.

O *tableau* da Figura 4.29 possui todos os seus ramos abertos. Poderíamos, então, concluir, de forma incorreta, que se um *tableau* iniciado com H possui apenas ramos abertos, então H é tautologia. Isso, porém, é falso! A fórmula $G = (Q \wedge \neg Q) \vee (P \rightarrow P)$ é uma tautologia, e um *tableau* iniciado com G, dado pela Figura 4.30, tem um ramo fechado e dois abertos.

Portanto, dada uma tautologia H, o *tableau* iniciado com H pode conter ramos abertos e fechados. Além disso, utilizando como premissas os teoremas da completude e da correção, Teoremas 4.1 e 4.2, seguem algumas conclusões.

1. Dada uma fórmula H, se existe um *tableau* semântico fechado associado a H, então todos os *tableaux* semânticos associados a H são fechados.

$$
\begin{array}{llll}
1. & (Q \land \neg Q) \lor (P \to P) & & G \\
 & \swarrow \qquad \searrow & & \\
2. & (Q \land \neg Q) & (P \to P) & R_2,\ 1. \\
3. & Q & \swarrow \quad \searrow & R_1,\ 2. \\
4. & \neg Q & \neg P \qquad P & R_1,\ 2.,\ R_3,\ 2. \\
5. & \text{fechado} & \text{aberto} \quad \text{aberto} &
\end{array}
$$

Figura 4.30: *Tableau* semântico com ramos fechado e aberto.

2. Dada uma fórmula H, se existe um *tableau* semântico aberto associado a H, então todos os *tableaux* semânticos associados a H são abertos.
3. Dada uma fórmula H, se H é uma tautologia, então todos os *tableaux* semânticos associados a $\neg H$ são fechados.
4. Dada uma fórmula H, se H não é uma tautologia, então todos os *tableaux* semânticos associados a $\neg H$ são abertos.
5. Dada uma fórmula H, se H não é uma tautologia, então os *tableaux* semânticos associados a H podem conter ramos abertos e fechados.
6. Dada uma fórmula H, se H é uma tautologia, então os *tableaux* semânticos associados a H podem conter ramos abertos e fechados.
7. Dada uma fórmula H, se existe *tableau* semântico fechado associado a H, então H é contraditória.
8. Dada uma fórmula H, se existe *tableau* semântico associado a H, com todos os ramos abertos, então H não é tautologia e nada se pode concluir além disso.
9. A ordem de aplicação das regras no desenvolvimento de um *tableau* não influencia no resultado final. Isto é, mesmo mudando as ordem de aplicação das regras em um *tableau* fechado, ele continuará fechado. O mesmo ocorre se o *tableau* é aberto.
10. A ordem de aplicação das regras no desenvolvimento de um *tableau* influencia no tamanho final, ou número de bifurcações do *tableau*.
11. Dada uma fórmula H, utilizando o método dos *tableaux* semânticos, sempre é possível concluir se H é ou não uma tautologia.
12. Dada uma fórmula H, utilizando o método dos *tableaux* semânticos, sempre é possível mostrar que existe uma prova de H, ou que essa prova não existe[7].

[7] Pode parecer estranho, mas existem sistemas de prova nos quais nem sempre é possível mostrar a existência de uma prova de H, ou de $\neg H$.

4.4.9 Complexidade e decidibilidade

Apresentamos neste capítulo três métodos semânticos: da tabela-verdade, da negação ou redução ao absurdo e dos *tableaux* semânticos. E, em vários aspectos, eles são equivalentes.

Complexidade. Os métodos semânticos, apresentados neste capítulo, possuem a mesma complexidade computacional[8]. Isto é, para determinar, por exemplo, a satisfatibilidade de uma fórmula da Lógica Proposicional, todos eles têm uma complexidade exponencial. Por exemplo, para determinar se uma fórmula H de comprimento n é satisfatível ou não, o custo de tal tarefa é da ordem de 2^n. Além disso, em relação a esse grau de complexidade computacional, até hoje ninguém conseguiu coisa melhor. Um método mais eficiente para determinar a satisfatibilidade de fórmulas da Lógica Proposicional. Lembre-se: caso você, que está lendo este livro, consiga algo melhor, tenha certeza, ganhará um milhão de dólares. Existe uma instituição americana que oferece um milhão de dólares para quem resolver o problema $P = NP$. Nesse contexto, decidir se ocorre a igualdade entre P e NP e desenvolver um método mais eficiente para a satisfatibilidade das fórmulas da Lógica Proposicional têm muito em comum. Além disso, a solução desses problemas têm outras inúmeras consequências, além da fama que você terá ao resolvê-lo.

Decidibilidade. Os três métodos apresentados são mecanismos de decisão. Isso significa que dada uma fórmula H, utilizando o método da tabela-verdade, da negação, ou dos *tableaux* semânticos é possível decidir se H é ou não satisfatível. Nesse sentido, dizer que um método decide significa dizer que ele responde à questão sobre a satisfatibilidade de H, sem entrar em loop, ou entrar por um conjunto sem fim de operações. Ou seja, o método responde necessariamente depois de um tempo finito de execução. Por isso dizemos que tais métodos são mecanismos de decisão. Eles sempre fornecem uma decisão sobre a pergunta: H é ou não é satisfatível?

Portanto, os métodos semânticos definem algoritmos que não entram em loop, ou entram por um conjunto sem fim de operações. Isso porque são definidos por uma sequência não ambígua de instruções, que é executada até que determinada condição se verifique. Mais especificamente, eles constituem um conjunto de processos (e símbolos que os representam) para efetuar uma sequência finita de cálculos. Isto é, os métodos definem algoritmos porque são mecânicos e cada passo é bem determinado por um conjunto de instruções. E, além disso, não entram em loop, ou por um conjunto sem fim de operações [9]. No caso do método da tabela-verdade, por exemplo, o conjunto de instruções determina como cada tabela-verdade deve ser construída e analisada. Dessa forma, após um número finito de passos é possível decidir se H é, ou não, satisfatível. Além disso, as instruções definem um algoritmo, pois os passos utilizados na construção da tabela são mecânicos. E a execução do procedimento, por sua vez, sempre termina e retorna uma resposta, sendo, portanto, um procedimento de decisão. Dada uma fórmula H, ele sempre decide sobre qual

[8] Consulte [Cooper], [Sipser] e [Cormen], para a definição formal de complexidade.

[9] Consultar [Cooper] e [Sipser], para um estudo sobre algoritmos e decidibilidade.

resposta deve ser dada: H é ou não satisfatível. Devido a tais fatos, dizemos que o conjunto das tautologias é efetivamente decidível. Ele é efetivamente decidível porque existem métodos, ou algoritmos de decisão, que identificam quais são os elementos do conjunto das tautologias.[10] A definição de decidibilidade de propriedades e funções é considerada a seguir.

Definição 4.11 (decidibilidade) *Definimos, a seguir, a decidibilidade de uma propriedade e de uma função:*

1. *Uma propriedade é decidível, ou efetivamente decidível, se, e somente se, existe um algoritmo que decide em um número finito de passos quando a propriedade é, ou não, satisfeita;*
2. *Uma função é decidível, ou efetivamente decidível, se, e somente se, existe um algoritmo que decide em um número finito de passos o resultado da função aplicada a um determinado argumento.*

Prova do sim e do não. Dada uma fórmula H, a aplicação de qualquer um dos três métodos apresentados, decide se H é satisfatível, ou se H não é satisfatível. Isto é, dada uma fórmula da Lógica Proposicional, os métodos decidem o "sim", caso a fórmula seja satisfatível, ou decidem o "não", caso ela não seja satisfatível.

Cuidado! Nem todo método tem esse tipo de característica. A propriedade de provar o "sim", como também o "não". No próximo capítulo, por exemplo, estudamos um método sintático que prova apenas o "sim", caso a prova exista. E, caso não exista a prova do "sim", não podemos concluir, desse fato, a prova do "não".

Generalização para esquemas de fórmulas. Utilizamos qualquer um dos métodos semânticos para determinar propriedades semânticas de fórmulas da Lógica Proposicional. Podemos provar, por exemplo, que a fórmula $(P \lor \neg P)$ é uma tautologia. Utilizando a mesma demonstração, é possível concluir que $(Q \lor \neg Q)$ também é uma tautologia. Observe que as estruturas sintáticas dessas fórmulas são idênticas. A única diferença é a troca de P por Q. Assim, a prova de que $(Q \lor \neg Q)$ é uma tautologia é análoga à prova de que $(P \lor \neg P)$ é uma tautologia. A nova demonstração é obtida trocando o símbolo P por Q. Nesse sentido, as provas podem ser generalizadas e no lugar das fórmulas podemos considerar esquemas de fórmulas, que representam conjuntos de fórmulas. Dessa forma, as fórmulas $(P \lor \neg P)$ e $(Q \lor \neg Q)$ são representadas pelo esquema $(H \lor \neg H)$ no qual H é uma fórmula qualquer da Lógica Proposicional. E isso é uma generalização, pois observe que o esquema de fórmula anterior representa, por exemplo, as fórmulas $((P \rightarrow Q) \lor (\neg(P \rightarrow Q)))$, ou $((P \land R) \lor (\neg(P \land R)))$. A demonstração de propriedades semânticas de um esquema de fórmula segue os mesmos passos indicados pelos métodos analisados neste capítulo. Quando demonstramos que o esquema de fórmula $(H \lor \neg H)$ é uma tautologia, estamos demonstrando que inúmeras[11] fórmulas também são.

[10] Diferentemente do conjunto das tautologias, como veremos na segunda parte deste livro, o conjunto das fórmulas válidas da Lógica de Predicados não é decidível.

[11] Na verdade, infinitas fórmulas.

Nota. Neste livro, os esquemas de fórmulas são denominados simplesmente como "fórmulas".

A equivalência dos métodos semânticos

A rigor, os métodos apresentados neste capítulo são equivalentes. Quando construímos uma árvore semântica, por exemplo, um ramo dessa árvore corresponde a uma linha da tabela-verdade. Da mesma forma, no método da negação ou redução ao absurdo, quando iniciamos com o símbolo F sob a fórmula e continuamos preenchendo os valores de verdade dos seus símbolos, o que estamos fazendo é identificar ramos da árvore semântica ou linhas da tabela-verdade que interpretam a fórmula como F. Entretanto, mesmo que, sob tal ponto de vista, os métodos sejam equivalentes, é importante ter essas diferentes visões do mesmo problema, ou seja: como determinar as propriedades semânticas de uma fórmula. Isso, porque, mesmo sendo equivalentes do ponto de vista conceitual, eles não são equivalentes do ponto de vista de implementações computacionais. Além disso, o método dos *tableaux* semânticos pode ser estendido para fórmulas da Lógica de Predicados, o que não ocorre com os outros métodos.

4.4.10 Dedução de conhecimento

Um dos principais objetivos da Lógica é o estudo de estruturas que possam ser utilizadas na representação e dedução de conhecimento. E justamente por isso esse estudo é relevante para a Ciência da Computação. Por exemplo, o ato de programar corresponde a, pelo menos dois passos:

Passo 1. Inicialmente o programador deve representar em uma máquina conceitos semânticos que ele observa em sua volta e que formam o objeto da programação. Nessa atividade, o programador procura por linguagens que possam representar e estruturar o que ele observa. E, em geral, as linguagens utilizadas possuem como fundamento a sintaxe da Lógica.

Passo 2. Não basta apenas ter o conhecimento representado no computador. É necessário que a máquina, a partir das perguntas feitas pelos usuários, por si só, deduza respostas para tais perguntas. Nesse sentido, o ato de responder corresponde a uma dedução lógica a partir de premissas representadas na máquina.

Portanto, além da Lógica estabelecer uma linguagem útil para representação de conhecimento, o que tem grande aplicação em Computação, ela também estuda métodos que produzam ou verifiquem as fórmulas ou argumentos válidos. Neste Capítulo estudamos três desses métodos: tabela-verdade, redução ao absurdo e *tableaux* semânticos. Se, por um lado, a Lógica estabelece uma linguagem útil, ela também analisa como o conhecimento é deduzido formalmente a partir do conhecimento dado *a priori*. Veja bem, isso também tem aplicações em Computação. A execução de um programa, por exemplo, pode ser vista como a dedução de um novo conhecimento a partir daquele representado *a priori*. Considere, por exemplo, a dedução efetuada no Exemplo 4.24. Nesse exemplo, a partir das sentenças "Guga é determinado," "Guga é inteligente," "Se Guga é determinado e atleta, ele não é um perdedor," "Guga é um atleta se é um amante do tênis." "Guga é amante do tênis se é inteligente." deduzimos um novo conhecimento. Ou seja, a partir dessas sentenças, deduzimos, utilizando *tableau* semântico, a seguinte afirmação "Guga não é um perdedor." E para que tal dedução seja efetuada de forma mecânica, basta implementar o método dos *tableaux* semânticos em um computador. Em seguida, representar na linguagem do programa as fórmulas que representam as sentenças acima. Por fim, o programa é executado para se obter a resposta. Lembre-se agora, dos três passos básicos que estamos seguindo no estudo da Lógica:

1) Especificação de uma linguagem, a partir da qual o conhecimento é representado. Tal representação considera os conceitos de sintaxe e semântica associados à linguagem.

2) Estudo de métodos que produzam ou verifiquem as fórmulas ou os argumentos válidos. A verificação do conceito semântico de tautologia, ou validade, de fórmulas sintáticas da linguagem é um exemplo desse estudo.

3) Definição de sistemas de dedução formal em que são consideradas as noções de prova e consequência lógica. A noção de prova estabelece formas para a derivação de conhecimento a partir daquele representado previamente, o que também define a noção de consequência lógica.

No Capítulo 1 tratamos do primeiro item dessa lista. O segundo item consideramos neste Capítulo, no qual estudamos alguns métodos semânticos. Mas lembre: tudo isso no contexto da Lógica Proposicional. Finalmente, observe que a prova, definida nos métodos semânticos como os *tableaux* semânticos, estabelece procedimentos semânticos de dedução de conhecimento, que pode ser mecanizado em linguagens de programação em Lógica, como *PROLOG*, [Ait-Kaci], [Casanova], [Chang] e [Lloyd].

4.5 Exercícios

Demonstre, utilizando qualquer um dos métodos estudados neste capítulo, que as fórmulas a seguir são tautologias.

1. $(\neg(\neg H)) \leftrightarrow H$, $\neg(H \rightarrow G) \leftrightarrow (H \wedge (\neg G))$, $\neg(H \leftrightarrow G) \leftrightarrow (\neg H \leftrightarrow G)$, $\neg(H \leftrightarrow G) \leftrightarrow (H \leftrightarrow \neg G)$.
2. $(H \vee G) \leftrightarrow (\neg H \rightarrow G)$, $(H \vee G) \leftrightarrow ((H \rightarrow G) \rightarrow G)$, $(H \wedge G) \leftrightarrow (H \leftrightarrow (H \rightarrow G))$.
3. $(H \rightarrow G) \leftrightarrow (\neg H \vee G)$, $(H \rightarrow G) \leftrightarrow \neg(H \wedge \neg G)$.
4. $(H \rightarrow G) \leftrightarrow (H \leftrightarrow (H \wedge G))$, $(H \rightarrow G) \leftrightarrow (\neg G \rightarrow \neg H)$.
5. $(H \leftrightarrow G) \leftrightarrow ((H \rightarrow G) \wedge (G \rightarrow H))$, $(H \leftrightarrow G) \leftrightarrow ((\neg H \vee G) \wedge (H \vee \neg G))$.

6. $(H \leftrightarrow G) \leftrightarrow ((H \wedge G) \vee (\neg H \wedge \neg G))$.
7. $(\neg(H \leftrightarrow G)) \leftrightarrow ((H \wedge \neg G) \vee (\neg H \wedge G))$.
8. $(H \wedge (G \vee E)) \leftrightarrow ((H \wedge G) \vee (H \wedge E))$,$(H \vee (G \wedge E)) \leftrightarrow ((H \vee G) \wedge (H \vee E))$.
9. $(H \wedge G) \leftrightarrow (G \wedge H)$, $(H \vee G) \leftrightarrow (G \vee H)$, $(H \leftrightarrow G) \leftrightarrow (G \leftrightarrow H)$.
10. $((H \wedge G) \wedge H) \leftrightarrow (H \wedge (G \wedge H))$,$((H \vee G) \vee H) \leftrightarrow (H \vee (G \vee H))$, $((H \leftrightarrow G) \leftrightarrow H) \leftrightarrow (H \leftrightarrow (G \leftrightarrow H))$.
11. $((H \rightarrow G) \wedge (G \rightarrow H)) \rightarrow (H \rightarrow H)$, $((H \leftrightarrow G) \wedge (G \leftrightarrow H)) \rightarrow (H \leftrightarrow H)$.
12. $(H \vee (H \wedge G)) \leftrightarrow H$, $(H \wedge (H \vee G)) \leftrightarrow H$.
13. $(\neg H) \vee H$, $H \rightarrow H$, $H \leftrightarrow H$, $H \leftrightarrow (H \wedge H)$, $H \leftrightarrow (H \vee H)$, $H \leftrightarrow (H \wedge (H \vee G))$, $H \leftrightarrow (H \vee (H \wedge G))$.
14. $(H \leftrightarrow G) \leftrightarrow ((\neg H) \leftrightarrow (\neg G))$, $((H \wedge G) \rightarrow H) \leftrightarrow (H \rightarrow (G \rightarrow H))$, $H \rightarrow (G \rightarrow (H \rightarrow H))$.
15. $H \rightarrow (H \wedge G)$,$(H \wedge G) \rightarrow H$.
16. $(((H \rightarrow G) \rightarrow H) \rightarrow H)$, $(\neg H \rightarrow (H \rightarrow G))$.
17. $((H \wedge G) \rightarrow E) \leftrightarrow ((H \wedge \neg E) \rightarrow \neg G)$.
18. Considere G uma das fórmulas indicadas a seguir:
    (a) $\neg P \vee Q$
    (b) $\neg Q \rightarrow P$
    (c) $P \leftrightarrow Q$
    (d) $P \rightarrow Q$
    (e) $\neg P \rightarrow \neg Q$
    (f) $P \wedge \neg Q$

    Determine, utilizando o método da negação, ou redução ao absurdo, os casos em que:
    i) $P \wedge Q \vDash G$
    ii) $P \rightarrow Q \vDash G$
    iii) $P \vee Q \vDash G$
    iv) $P \leftrightarrow Q \vDash G$
19. Demonstre se as fórmulas a seguir são tautologias.
    $H = P_1 \rightarrow (P_2 \rightarrow (P_3 \rightarrow (P_4 \rightarrow (P_5 \rightarrow (P_6 \rightarrow (P_7 \rightarrow P_1))))))$;
    $A = (((P \wedge S) \leftrightarrow P) \leftrightarrow (P \rightarrow P_1)) \rightarrow ((((P \wedge Q) \leftrightarrow P) \wedge ((P \vee R) \leftrightarrow R)) \rightarrow P)$;
    $E = P_1 \rightarrow ((P_2 \wedge P_3) \rightarrow ((P_4 \wedge P_5) \rightarrow ((P_6 \wedge P_7) \rightarrow P_8)))$;
    $G = P_1 \leftrightarrow ((P_2 \vee P_3) \leftrightarrow ((P_4 \vee P_5) \leftrightarrow ((P_6 \vee P_7) \leftrightarrow P_1)))$.
20. Considere a fórmula H:

$$H = \neg((P \wedge Q) \vee R \vee S) \wedge (P_1 \wedge Q_1)$$

(a) Construa um *tableau* semântico associado a H e identifique se é possível, a partir desse *tableau*, determinar se H é uma tautologia, é satisfatível ou é contraditória.

(b) Quantas linhas têm a tabela-verdade associada a H?

21. (a) Demonstre, utilizando o método da negação, ou redução ao absurdo, se as fórmulas a seguir são tautologias ou não.

$$G = (\neg P \rightarrow Q) \rightarrow ((\neg Q \rightarrow P) \wedge (P \vee R))$$

$$H = (P \rightarrow (Q \rightarrow R)) \rightarrow ((P \wedge Q) \rightarrow R)$$

$$G_1 = H_1 \leftrightarrow (H_1 \vee G_2)$$

(b) Na demonstração de que G_1 não é tautologia, quando consideramos $I[H_1] = T$ obtemos um absurdo. Mas, quando $I[H_1] = F$, não é observado nenhum absurdo. Comente o significado de tais fatos.

22. Demonstre, utilizando o método da negação, ou redução ao absurdo, se a fórmula a seguir é uma tautologia:

$$(P \rightarrow P_1) \wedge (Q \rightarrow Q_1) \vDash (P \rightarrow Q_1) \vee (Q \rightarrow P_1)$$

23. Considere as fórmulas a seguir:

$$(P \wedge Q) \rightarrow (R \wedge S),$$

$$\neg((P \wedge Q) \vee R \vee S) \wedge (P_1 \wedge Q_1)$$

(a) Construa um *tableau* semântico associado a cada fórmula.

(b) Identifique, caso possível, a partir dos *tableaux* semânticos, determinados no item anterior, uma interpretação I tal que $I[H] = F$ e uma interpretação J tal que $J[H] = T$, para cada fórmula.

24. (a) Considere as fórmulas a seguir:
$H = (\neg(P \vee \neg Q) \vee R) \vee (R \rightarrow (Q \rightarrow P))$
$E = (((P \wedge S) \leftrightarrow P) \leftrightarrow (P \rightarrow P_1)) \rightarrow ((((P \wedge Q) \leftrightarrow P) \wedge ((P \wedge R) \leftrightarrow R) \rightarrow P)$
$G = (P \vee Q) \vee (\neg P \wedge Q)$
Utilize o método da negação, ou redução ao absurdo, para demonstrar se tais fórmulas são tautologias. No caso em que a fórmula não for uma tautologia, utilize o resultado do método para identificar uma interpretação, que interpreta a fórmula como sendo falsa.

(b) Suponha que $I[P] = T$, o que podemos concluir a respeito de $I[H]$, $I[G]$, onde
$H = ((((P \land S) \leftrightarrow P_2) \leftrightarrow (P_3 \to P_4)) \to (((P \land Q) \leftrightarrow P_1) \land ((P_5 \land R_1) \leftrightarrow R) \to P)) \to ((P_4 \land P) \leftrightarrow P_4)$
$G = (((R \lor (S \leftrightarrow P_1)) \to ((P_2 \lor S_1) \leftrightarrow R_3)) \to P) \land (\neg P \leftrightarrow (\neg P \to ((R_5 \to P) \leftrightarrow (S \land P))))$?

25. Conforme a lei da contraposição, temos:

$$(P \to Q) \text{ equivale a } (\neg Q \to \neg P).$$

Demonstre, a partir desse fato, utilizando o teorema da dedução, que:

$$P \vDash Q, \text{ se, e somente se, } \neg Q \vDash \neg P.$$

26. (Zé indeciso) Considere as três afirmações a seguir.

H_1: Se Zé toma vinho e a bebida está ruim, ele fica com ressaca.

H_2: Se Zé fica com ressaca, então fica triste e vai para casa.

H_3: Zé vai ao seu encontro romântico com Maria ou fica triste e vai para casa.

Suponha que as três afirmações anteriores sejam verdadeiras. A partir desse fato, qual das afirmações a seguir também é verdadeira.

G_1: Se Zé toma vinho e a bebida está ruim, então ele perde seu encontro romântico com Maria.

G_2: Se Zé fica com ressaca e vai para casa, então ele não perde seu encontro romântico com Maria.

G_3: Se o vinho está ruim, então Zé não o toma ou não fica com ressaca.

G_4: Se o vinho está ruim ou Zé fica com ressaca, então ele fica triste.

G_5: Se Zé toma vinho e vai para casa, então ele não fica triste se o vinho está ruim.

27. (Grandes amores) Utilize os princípios da Lógica Proposicional para responder às seguintes questões.

    i) Suponha que as duas afirmações a seguir são verdadeiras.

        a) Zé ama Maria ou Elaine.
        b) Se Zé ama Maria, então ele também ama Elaine.

        Conclui-se necessariamente que Zé ama Maria?
        Conclui-se necessariamente que Zé ama Elaine?

    ii) Suponha que alguém faça a seguinte pergunta a Zé:

        a) É realmente verdade que se você ama Maria, então você também ama Elaine?

    Suponha que Zé responda o seguinte:

b) Se isso é verdade, então amo Maria.

Conclui-se, desse diálogo, que Zé ama Maria?

Conclui-se, desse diálogo, que Zé ama Elaine?

iii) Suponha que alguém faça a seguinte pergunta a Zé.

a) É realmente verdade que se você ama Maria, então você também ama Elaine?

Suponha que Zé responda o seguinte:

b) Se isso é verdade, então amo Maria e se eu amo Maria, então isso é verdade.
Conclui-se, desse diálogo, que Zé necessariamente ama Maria?
Conclui-se, desse diálogo, que Zé necessariamente ama Elaine?

iv) Suponha que Clotilde, aquela que sabe da vida de todos, faça a seguinte afirmação.

d) Com certeza Zé ama Maria e Elaine.

É possível, a partir da afirmação de Clotilde, concluir a afirmação a seguir?

Dizer que Zé ama Maria equivale a dizer que;

se Zé ama Maria então ele também ama Elaine.

v) Suponha que Clotilde modifique sua opinião e afirme:

e) Zé ama Maria ou Elaine.

Podemos concluir que a afirmação de Clotilde equivale à afirmação a seguir?

Se Zé não ama Maria então ele ama Elaine.

vi) A partir desse instante, há mais uma pessoa, Patrícia. Há três meninas: Maria, Elaine e Patrícia. Suponha que os fatos sejam verdadeiros:

a) Zé ama pelo menos uma das três meninas.
b) Se Zé ama Maria, mas não Patrícia, então ele também ama Elaine.
c) Zé ama Patrícia e Elaine, ou não ama nenhuma das duas.
d) Se Zé ama Patrícia, então também ama Maria.
A partir desses fatos, qual das meninas Zé necessariamente ama?

28. Considere as sentenças a seguir:

H_1: Se Maria não é inteligente, então Francisca é linda.

H_2: Se Francisca não é loura, então Dinalva é interessante.

H_3: Se Dinalva é linda ou interessante, então Maria é inteligente.

H_4: Se Luciana não é inteligente, então Dinalva é interessante.

H_5: Se Luciana é linda, então Dinalva é interessante.

Suponha que essas sentenças são verdadeiras. A partir desse fato, deduza o atributo de cada uma das meninas. Considere na solução as restrições a seguir.

(a) Há uma correspondência biunívoca entre pessoas e atributos.

(b) Na solução, conclui-se que Francisca é loura.

29. Utilize os princípios da Lógica Proposicional para responder a seguinte questão. Suponha que a afirmação a seguir é verdadeira:

    Se Zé ama Maria,
    então Zé é um sortudo.

    A partir desse fato, o que podemos concluir a respeito da afirmação a seguir?

    Se Zé não ama Maria ou é um sortudo,
    então ele ama Maria ou é um sortudo.

30. Considere os conjuntos de fórmulas a seguir. Determine, utilizando o método dos *tableaux* semânticos, quais conjuntos são satisfatíveis.

    (a) $\{P, \neg P\}$.

    (b) $\{S \rightarrow Q, P \vee \neg(S \wedge P), S\}$.

    (c) $\{\neg(\neg Q \vee P), P \vee \neg R, Q \rightarrow \neg R\}$.

    (d) $\{(\neg Q \wedge R) \rightarrow P, Q \rightarrow (\neg P \rightarrow R), P \leftrightarrow \neg R\}$.

    (e) $\{P \rightarrow Q, Q \rightarrow R, R \rightarrow S, S \rightarrow P\}$.

    (f) $\{P \rightarrow Q, (P \wedge R) \rightarrow (P \wedge Q \wedge R), (Q \vee R \vee S)\}$.

    (g) $\{P \rightarrow Q, \neg(Q \wedge \neg R), R \rightarrow S, \neg(S \wedge P)\}$.

    (h) $\{\neg((\neg Q \wedge R) \rightarrow P),\ \neg(Q \rightarrow (\neg P \rightarrow R)),\ P \leftrightarrow \neg R\}$

    (i) $\{\neg(P \rightarrow Q), Q \rightarrow R, \neg(R \rightarrow S), S \leftrightarrow P\}$

    (j) $\{P \rightarrow Q, \neg((P \wedge R) \rightarrow (P \wedge Q \wedge R)), \neg((Q \vee R) \vee S)\}$

    (k) $\{\neg(P \rightarrow Q), \neg(Q \vee \neg R), R \rightarrow S, \neg(S \leftrightarrow P)\}$

31. Quatro detetives, Ana, Teresa, Maria e Zé, estão investigando as causas de um assassinato, e cada um deles concluiu uma das afirmações a seguir:

    Ana: Se há pouco sangue na cena do crime, então o assassino é um profissional.

    Teresa: Houve poucos ruídos no momento do crime ou o assassino não é um profissional.

    Maria: A vítima estava toda ensanguentada ou houve muitos ruídos no momento do crime.

    Zé: Houve pouco sangue na cena do crime.

    Determine se o conjunto de conclusões dos detetives é satisfatível.

32. Os quatro detetives do exercício anterior modificam suas opiniões e concluem:

    Ana: Se há sangue na cena do crime, então o assassino é um profissional.

    Teresa: É falso que há sangue na cena do crime e o assassino não é um profissional.

    Maria: O assassino não é um profissional e há sangue na cena do crime.

    Zé: Há sangue na cena do crime.

(a) Determine se o conjunto de conclusões dos detetives é satisfatível.

(b) Determine se, a partir das conclusões de Teresa e Zé, podemos concluir que o assassino é profissional.

(c) Determine se as conclusões das detetives Ana e Teresa são equivalentes.

33. Identifique, justificando sua resposta, se os argumentos a seguir são válidos ou não. Atenção! As justificativas devem ser dadas utilizando as definições formais de tautologia e implicação semântica.

    i) Se Irani me beija, fico louco(a)!
       Irani não me beijou.
       Portanto, não fiquei louco(a).

    ii) Se Irani me beija, fico louco(a)!
        Não fiquei louco(a).
        Portanto, Irani não me beijou.

34. Determine, entre as afirmações a seguir, quais estão logicamente corretas.

    (a) Se Fidel é comunista, é ateu. Fidel é ateu, portanto ele é comunista.

    (b) Se a temperatura e os ventos permanecerem constantes, não choverá. A temperatura não permaneceu constante. Logo, se chover, significa que os ventos não permaneceram constantes.

    (c) Se Fernandinho (aquele das Alagoas) ganhar as eleições, a corrupção aumentará se a impunidade permanecer alta. Se Fernandinho ganhar as eleições, a impunidade permanecerá alta. Portanto, se Fernandinho ganhar as eleições, a corrupção aumentará.

    (d) Se os investimentos em Uberlândia permanecerem constantes, os gastos da prefeitura aumentarão ou crescerá o desemprego. Se os gastos da prefeitura não aumentarem, os impostos municipais poderão ser reduzidos. Se os impostos municipais forem reduzidos e os investimentos em Uberlândia permanecerem constantes, não haverá desemprego. Portanto, os gastos da prefeitura não aumentarão.

    (e) Se x é positivo, então y é negativo. Se z é negativo, então y é negativo. Portanto, se x é positivo ou z é negativo, então y é negativo.

    (f) Se Zé ama Maria e Maria é bonita, inteligente e sensível, então Zé é feliz. Logo, se Zé não é feliz, então Maria não é bonita, inteligente e sensível.

    (g) Se Maria está bonita, então Zé está feliz e se Zé está feliz, Chico está preocupado. Se Chico está preocupado, então Maria está bonita. Portanto, não é verdade que se Chico está preocupado, então Zé está feliz.

35. Considere o seguinte:
    Se Godofredo ama Gripilina,
    então é possível concluir que:
    Se Gripilina é bonita, inteligente e sensível,
    então Godofredo é feliz.

    Demonstre, utilizando conceitos da Lógica Proposicional, se, a partir desse argumento, podemos concluir que:
    Godofredo não ama Gripilina, ou
    Gripilina não é bonita, não é inteligente e nem sensível, ou
    Godofredo é feliz.

36. Considere cinco alunas de Ciência da Computação: Letícia, Fernanda, Flávia, Lívia, Marília e as afirmações:
    (a) Se Letícia não é linda, Fernanda não é inteligente.
    (b) Se Flávia não é sensível, Lívia é charmosa.
    (c) Se Marília é sensível, Letícia não é linda.
    (d) Se Lívia é charmosa, Fernanda é inteligente.
    (e) Flávia e Marília possuem as mesmas qualidades.
    (f) Se Fernanda não é linda, Lívia não é charmosa.
    Encontre pelo menos um conjunto de qualidades para as quatro meninas, que sejam coerentes com as afirmações.

37. Zé e Chico afirmam o seguinte:
    Chico: Se o que vale é a emoção, então vivo a vida.
    Zé: O que vale é a emoção e não vivo a vida.
    Qual das duas situações ocorre?
    (a) As afirmações de Chico e Zé são equivalentes.
    (b) A afirmação de Zé equivale à negação da afirmação de Chico.

38. Considere o argumento: presença de Ricardão.

    Ricardão existe em sua vida.
    Mas, se Ricardão existe, isso significa que sua namorada não pode evitá-lo, ou então que ela não quer evitá-lo.
    Se sua namorada não pode evitar Ricardão, então ela não tem personalidade.
    Sua namorada não é sincera, se ela não quer evitar Ricardão.
    Portanto, ou sua namorada não tem personalidade, ou ela não é sincera.

    Responda, utilizando métodos da Lógica, se o argumento anterior é logicamente correto.

39. Demonstre se o argumento a seguir é válido ou não[12].

[12]Este argumento foi incluído neste livro por sugestão de vários alunos.

Se o Curingão caiu para a segundona e sua torcida chorou, então ficamos com pena deles.

Portanto:

Dado que a torcida chorou se o Curingão caiu para a segundona, podemos concluir que ficamos com pena deles se o Curingão caiu para a segundona.

40. Considere os conjuntos de sentenças indicados a seguir. Que conjuntos de sentenças são satisfatíveis?

    (a) Marcos não está feliz, ou se Sílvia foi ao baile, então Marcos também foi ao baile. Se Marcos está feliz, então Sílvia não foi ao baile. Se Marcos foi ao baile, então Sílvia também foi ao baile.

    (b) Um casamento é feliz, se, e somente se, os noivos têm objetivos comuns. Os noivos têm objetivos comuns se, e somente se, os noivos cursam disciplinas em áreas comuns. Há divórcio se, e somente se, o casamento é infeliz. Há divórcio se, e somente se, os noivos não cursam disciplinas em áreas comuns.

CAPÍTULO 5

UM MÉTODO SINTÁTICO DE DEDUÇÃO NA LÓGICA PROPOSICIONAL

5.1 Introdução

Os métodos semânticos apresentados no Capítulo 4 resolvem bem o seguinte problema: dada uma fórmula H, eles decidem sobre suas propriedades semânticas. Isto é, tais métodos semânticos resolvem o problema de caracterizar as propriedades semânticas de uma fórmula da Lógica Proposicional. Por exemplo, para identificar as propriedades semânticas de uma fórmula H, basta construir uma tabela-verdade associada a H e analisar sua coluna. Desse ponto de vista, não haveria muito sentido em estudar outro tipo de método com objetivos semelhantes. Mas, mesmo assim, analisamos neste capítulo um método sintático, no qual um dos objetivos é caracterizar as tautologias. Mas, por que propor tal análise? Quando consideramos apenas a Lógica Proposicional, certamente não fica claro nossos objetivos futuros. Porém, vale a pena deixá-los claro. No contexto da Lógica de Predicados, que estudamos a partir do próximo capítulo, métodos semânticos e sintáticos são conceitualmente diferentes e não se equivalem. Isto significa que resultados obtidos, utilizando métodos semânticos, não correspondem a resultados obtidos, utilizando métodos sintáticos e vice-versa. A prova mais evidente disso é o famoso teorema de Gödel [Smith].

Neste capítulo é analisado um método sintático de dedução na Lógica Proposicional. Esse método define um sistema, também denominado sistema formal, que estabelece estruturas que permitem a dedução formal em um domínio sintático, no qual não é considerada a interpretação das fórmulas. Observe que isso difere dos métodos semânticos, nos quais sempre consideramos a interpretação dos símbolos das fórmulas. Além disso, é necessário enfatizar que o sistema formal proposto não é, certamente, o mais adequado para implementações em computadores. Em geral, os mais adequados utilizam métodos de dedução diferentes, como, por exemplo, *tableaux* semânticos. Entretanto, no sistema formal proposto, as noções de prova, derivação, consequência lógica e completude se apresentam de forma simples. E a definição das noções de prova e consequência lógica, por exemplo, é um tema central em Lógica. Por isso, existem excelentes referências que tratam de sistemas de dedução formal: [Andrews], [Mendelson], [Enderton], [Dalen], [Shoenfield] e [Fitting].

5.2 O sistema formal $\wp_a$

O sistema formal definido neste capítulo estabelece um método sintático de prova, que prova se uma fórmula H é uma tautologia[1]. E, para facilitar nossas referências ao sistema proposto, nós o denominamos pelo acrônimo $\wp_a$, que contém a letra $\wp$ e o índice "a", como uma simples referência, ou lembrança, à palavra "Proposicional". Para iniciar o estudo do sistema $\wp_a$, o primeiro passo é saber quais são seus elementos básicos.

Definição 5.1 (elementos básicos do sistema formal $\wp_a$) *O sistema formal $\wp_a$ da Lógica Proposicional é definido a partir de quatro conjuntos:*

1. *o alfabeto da Lógica Proposicional, Definição 3.14;*
2. *o conjunto das fórmulas da Lógica Proposicional;*
3. *um subconjunto das fórmulas especiais, que são denominadas axiomas;*
4. *um conjunto de regras de dedução.*

Portanto, a linguagem utilizada no sistema $\wp_a$ é a linguagem da Lógica Proposicional, com seu alfabeto e suas fórmulas. E para evitar dificuldades técnicas, admitimos no sistema $\wp_a$ denotar as fórmulas, utilizando todos os conectivos e não apenas $\neg$ e $\vee$, que pertencem ao alfabeto da Definição 3.14. Isto é, no contexto dos sistema $\wp_a$, podemos denotar as fórmulas conforme as correspondências.

Nota. N sistema $\wp_a$, consideramos as denotações:

1. $(H \wedge G)$ denota $\neg(\neg H \vee \neg G)$.
2. $H \rightarrow G$ denota $(\neg H \vee G)$.
3. $(H \leftrightarrow G)$ denota $(H \rightarrow G) \wedge (G \rightarrow H)$.

[1] O sistema estudado é o mesmo apresentado por P. B. Andrews em [Andrews].

Observe que não estamos falando em equivalências, como no Exemplo 3.22. Estamos relacionando diferentes denotações para a mesma fórmula. Isso deve ser feito dessa maneira, porque o sistema $\wp_a$ define um método sintático de derivação, no qual não se considera conceitos semânticos como o da equivalência. Um dos objetivos do estudo do sistema $\wp_a$ é o estudo formal da representação e dedução sintática de novas fórmulas. A dedução de uma nova fórmula é feita a partir de outras, dadas *a priori*. Essas fórmulas, fornecidas de antemão, são denominadas axiomas. Os axiomas são, portanto, fórmulas às quais atribuímos um status especial de verdade básica, ou *a priori*. O primeiro sistema axiomático foi organizado por Euclides, no qual ele estudou a geometria. Em seu sistema, um dos axiomas é a sentença:

"Dados dois pontos em um plano, é possível traçar uma linha reta passando pelos dois pontos."

Observe que, na geometria de Euclides, o conhecimento determinado por esse axioma é dado *a priori*, não sendo demonstrado. Esse axioma representa um conhecimento fundamental de sua geometria. Para Euclides, um axioma era uma proposição verdadeira, autoevidente, e não era preciso demonstrá-la. Portanto, no sistema $\wp_a$, um axioma é simplesmente uma fórmula que representa uma proposição aceita sem prova sintática.[2] Além disso, no sistema $\wp_a$, os axiomas são fórmulas definidas na linguagem formal da Lógica Proposicional. Já na geometria de Euclides, os axiomas são proposições construídas utilizando linguagem natural. Por isso, a geometria de Euclides é um sistema axiomático, e $\wp_a$ é um sistema formal axiomático. Definimos a seguir o conjunto especial de fórmulas, denominadas axiomas de $\wp_a$.

Definição 5.2 (axiomas do sistema $\wp_a$) *Os axiomas do sistema $\wp_a$ são fórmulas da Lógica Proposicional determinadas pelos esquemas indicados a seguir. Nesses esquemas E, G e H são fórmulas quaisquer da Lógica Proposicional.*

1. $Ax_l = (H \lor H) \to H$;
2. $Ax_2 = H \to (G \lor H)$;
3. $Ax_3 = (H \to G) \to ((E \lor H) \to (G \lor E))$.

Nota. Os axiomas do sistema formal $\wp_a$ são denominados axiomas lógicos. Isso porque há também os axiomas não lógicos utilizados no estudo de outros sistemas lógicos como é visto mais adiante.

Observe que na Definição 5.2 consideramos esquemas de fórmulas que denotam infinitas fórmulas. Isso significa que Ax_1, por exemplo, pode denotar qualquer uma das fórmulas: $(P \lor P) \to P$, $(Q \lor Q) \to Q$, $((P \to Q) \lor (P \to Q)) \to (P \to Q)$, e $((P \lor Q) \lor (P \lor Q)) \to (P \lor Q)$. Observe, ainda, que o axioma Ax_2 também pode ser denotado como: $Ax_2 = H \to (E \to H)$, que é obtido fazendo $G = \neg E$. No sistema $\wp_a$, os esquemas de fórmulas que definem os axiomas representam infinitas fórmulas. Por isso, o sistema $\wp_a$ possui infinitos axiomas. Entretanto, apesar de

[2] A definição de prova sintática será apresentada adiante.

possuir, rigorosamente, infinitos axiomas, os sistema $\wp_a$ possui um número finito de esquemas de axiomas: Ax_1, Ax_2 e Ax_3.

Nota. Sistemas formais que possuem um número finito de esquemas de axiomas são sistemas finitamente axiomatizáveis. Esse é o caso do sistema P_a.

Observe que o conjunto dos axiomas de $\wp_a$ é decidível, ou seja, temos um algoritmo que decide que fórmulas da Lógica Proposicional corresponde, ou não, a um axioma. Além disso, esse conjunto é enumerável. Isto é, há uma forma de enumerar todos os axiomas de $\wp_a$. Finalmente, observe que o sistema $\wp_a$ é definido a partir de uma linguagem que possui apenas símbolos proposicionais e não contém os símbolos de verdade $true$, ou $false$. Isso é importante porque alguns resultados apresentados neste capítulo[3] não são válidos, caso a linguagem de $\wp_a$ contenha algum símbolo de verdade. Os axiomas de um sistema axiomático representam o conhecimento dado a priori. No caso do sistema $\wp_a$, esse conhecimento é representado por axiomas que são tautologias. A demonstração de que os axiomas Ax_1 e Ax_2 são tautologias é imediata. Já a demonstração de Ax_3 pode ser feita utilizando o método da negação.

A regra de inferência. No sistema $\wp_a$, o mecanismo de inferência, que permite a dedução de novas fórmulas, se fundamenta em um esquema de regra de inferência denominado *modus ponens*.[4] O sistema $\wp_a$ possui apenas uma regra de inferência, determinada pelo esquema *modus ponens*.

Definição 5.3 (regra de inferência do sistema $\wp_a$, *modus ponens*) *Dadas as fórmulas H e G, a regra de inferência do sistema $\wp_a$, denominada modus ponens (MP), é definida pelo procedimento: tendo H e $(H \to G)$ deduza G.*

De forma análoga aos axiomas, a regra de inferência *modus ponens* é um postulado e, portanto, aceito sem demonstração. Logo, no sistema formal $\wp_a$, se H e $(H \to G)$ são fórmulas já deduzidas, então G também é deduzida. Além disso, observe também um fato importante. Dada uma interpretação I, se $I[H] = T$ e $I[(H \to G)] = T$, então $I[G] = T$. Isto é, as fórmulas H e $(H \to G)$ implicam G. Isso significa que a regra *modus ponens* é correta, ou seja, ela deduz uma fórmula verdadeira, a partir de outras verdadeiras. Em outras palavras, a regra de inferência nos permite inferir uma fórmula verdadeira, a partir de outras fórmulas verdadeiras e que já foram deduzidas anteriormente.

Notação. Para representar o esquema de regra de inferência *modus ponens*, a notação a seguir é considerada:

$$MP = \frac{H, (H \to G)}{G}.$$

Nessa notação, o "numerador" da equação, $H, (H \to G)$, é denominado antecedente. O "denominador" é o consequente.

[3]O teorema da completude, por exemplo.

[4]Esta é uma forma reduzida da expressão, em latim, *"modus ponendo ponens"*, que significa, literalmente, *"modo que, afirmando, afirma"*, ou seja, o argumento que extrai uma conclusão afirmativa a partir de uma premissa condicional ou afirmativa.

Na regra de inferência *modus ponens*, as fórmulas H e G podem ser quaisquer. Isso significa que *modus ponens* denota um conjunto infinito de procedimentos de dedução. Como as fórmulas H e G são arbitrárias, a regra é, na verdade, um esquema de regra e determina, por exemplo, várias deduções, como as seguintes:

1. a partir de P e $(P \rightarrow Q)$, deduza Q;
2. a partir de $P \rightarrow Q$ e $((P \rightarrow Q) \rightarrow R)$, deduza R;
3. a partir de P e $(P \rightarrow (Q \vee R))$, deduza $(Q \vee R)$;
4. a partir de $(P \wedge Q)$ e $((P \wedge Q) \rightarrow (Q \rightarrow R))$, deduza $(Q \rightarrow R)$.

Suponha, por exemplo, que se tenha as representações P = "está chovendo" e Q = "a rua está molhada". Nesse caso, se P é deduzida, isto é, "está chovendo" e a implicação $(P \rightarrow Q)$ também é verdadeira, isto é, "se está chovendo então a rua está molhada", então, a partir da regra de inferência *modus ponens*, deduzimos Q, isto é, "a rua está molhada". Observe que somente é possível deduzir que "a rua está molhada" devido à conjunção de dois fatos: a dedução inicial de que "está chovendo" e também a dedução de "se está chovendo então a rua está molhada". Se apenas a implicação fosse deduzida, não se poderia concluir que "a rua está molhada". Assim, quando se deduz que $(P \rightarrow Q)$, nada se pode concluir Q. Até mosquito pensa dessa forma e tem essa capacidade de raciocínio.

5.3 Consequência lógica sintática no sistema $\wp_a$

O sistema axiomático $\wp_a$ define uma estrutura para representação e dedução sintática. Inicialmente, temos os axiomas e mais algumas fórmulas extras, denominadas hipóteses. A regra de inferência determina um mecanismo sintático de inferência que é aplicado aos axiomas e às hipóteses. Nesse sentido, fórmulas são deduzidas a partir da aplicação da regra de inferência ao que é dado *a priori*, no sistema. As fórmulas deduzidas formam, por sua vez, um conjunto denominado consequências lógicas sintáticas. As consequências lógicas sintáticas representam o que é provado, a partir dos axiomas e hipóteses, utilizando a regra de inferência. A prova de uma fórmula no sistema $\wp_a$ e a consequência lógica sintática são definidas a seguir.

Definição 5.4 (prova sintática no sistema $\wp_a$) *Sejam, na Lógica Proposicional, H uma fórmula e β um conjunto de fórmulas denominadas por hipóteses. Uma prova sintática de H a partir de β, no sistema axiomático $\wp_a$, é uma sequência de fórmulas $H_1, H_2, \ldots, H_n$, onde temos:*

1. $H = H_n$;

E para todo i tal que $1 \leq i \leq n$:

2. H_i é um axioma; ou

3. $H_i \in \beta$; ou

4. H_i é deduzida de H_j e H_k, utilizando a regra modus ponens, onde $1 \leq j < i$ e $1 \leq k < i$. Isto é:

$$MP = \frac{H_j \quad H_k}{H_i}$$

Observe que, neste caso, necessariamente, $H_k = H_j \rightarrow H_i$.

Exemplo 5.1 (prova no sistema $\wp_a$) Consideramos neste exemplo uma prova de $((Q \vee P) \vee \neg P)$ em $\wp_a$, na qual o conjunto de hipóteses β é dado pela fórmula $(\neg P \vee P)$. Conforme a Definição 5.4, esta prova é dada por uma sequência de fórmulas $H_1, H_2, \ldots, H_n$. O que fazemos a seguir é, simplesmente, determinar quem são essas fórmulas da sequência que define a prova.

A primeira fórmula da prova. A primeira fórmula da prova, H_1, é obtida do esquema que define o axioma Ax_3, fazendo: $H = P$, $G = (Q \vee P)$ e $E = \neg P$. Portanto, fazendo essas substituições, temos:

1. $H_1 = (P \rightarrow (Q \vee P)) \rightarrow ((\neg P \vee P) \rightarrow ((Q \vee P) \vee \neg P))$

A segunda fórmula da prova. A segunda fórmula, H_2, é obtida a partir do axioma Ax_2, fazendo: $H = P$, e $G = Q$. Portanto:

2. $H_2 = P \rightarrow (Q \vee P)$

A terceira fórmula da prova. Aplicando a regra *modus ponens* às fórmulas H_1 e H_2, obtemos a terceira fórmula da prova. Nesse caso, temos o resultado H_3, dado por:

3. $H_3 = (\neg P \vee P) \rightarrow ((Q \vee P) \vee \neg P)$

A quarta fórmula da prova. A quarta fórmula da prova é a hipótese do conjunto β. Isto é:

4. $H_4 = (\neg P \vee P)$

A quinta fórmula da prova. Aplicando a regra *modus ponens* às fórmulas H_3 e H_4 temos H_5, que é a quinta fórmula da prova.

5. $H_5 = (Q \vee P) \vee \neg P$

Conclusão: Temos uma prova de $(Q \vee P) \vee \neg P$ a partir dos axiomas de $\wp_a$ e da hipótese $\{\neg P \vee P\}$. Nesse caso, a sequência de fórmulas H_1, H_2, H_3, H_4, H_5 é a prova de $(Q \vee P) \vee \neg P$. ■

Apresentamos a seguir outro exemplo de prova. Mas, a linguagem utilizada é mais concisa e as fórmulas da sequência que define a prova são indicadas pelos subescritos dessas fórmulas.

Exemplo 5.2 (prova no sistema $\wp_a$) Considere o conjunto de hipóteses $\beta = \{G_1, \ldots, G_9\}$, tal que $G_1 = (P \wedge R) \rightarrow P$, $G_2 = Q \rightarrow P_4$, $G_3 = P_1 \rightarrow Q$, $G_4 = (P_1 \wedge P_2) \rightarrow Q$, $G_5 = (P_3 \wedge R) \rightarrow R$, $G_6 = P_4 \rightarrow P$, $G_7 = P_1$, $G_8 = P_3 \rightarrow P$, $G_9 = P_2$. A prova apresentada a seguir tem, portanto, como conhecimento a priori, nove fórmulas. E como o método de prova é sintático, não se considera o significado ou interpretação dessas fórmulas. A sequência de fórmulas $H_1, \ldots, H_9$ é uma prova de $(S \vee P)$ a partir de β no sistema axiomático $\wp_a$.

1. $H_1 = G_7$, ou seja: $H_1 = P_1$;
2. $H_2 = G_3$, ou seja: $H_2 = P_1 \rightarrow Q$;
3. $H_3 = Q$ (resultado de MP em H_1 e H_2);
4. $H_4 = G_2$, ou seja: $H_4 = Q \rightarrow P_4$;
5. $H_5 = P_4$ (resultado de MP em H_3 e H_4);
6. $H_6 = G_6$, ou seja: $H_6 = P_4 \rightarrow P$;
7. $H_7 = P$ (resultado de MP em H_5 e H_6);
8. $H_8 = Ax_2$, ou seja: $H_8 = P \rightarrow (S \vee P)$;
9. $H_9 = (S \vee P)$ (resultado de MP em H_7 e H_8).

Nessa sequência, as duas primeiras fórmulas correspondem a fórmulas do conjunto de hipóteses. Isto é, dado que são hipóteses, elas são admitidas na sequência da prova, pois nosso objetivo é provar $(S \vee P)$ a partir de β. Utilizando as duas primeiras fórmulas e a regra *modus ponens*, derivamos $H_3 = Q$. Nesse caso, a regra é utilizada na seguinte forma:

$$MP = \frac{P_1,\ (P_1 \rightarrow Q)}{Q}.$$

De forma análoga, as fórmulas H_5 e H_7 são deduzidas, utilizando *modus ponens*. A dedução de H_5 é a seguinte:

$$MP = \frac{P_1,\ (P_1 \rightarrow P_4)}{P_4}.$$

E a dedução de H_7 é a seguinte:

$$MP = \frac{P_4,\ (P_4 \rightarrow P)}{P}.$$

Além disso, $H_8 = Ax_2$, isto é:

$$H_8 = (P \rightarrow (S \vee P)).$$

Isso significa que obtemos que H_8 é um caso particular do axioma Ax_2. Nesse caso, H_8 é obtida a partir desse axioma, considerando $H = P$ e $G = S$. Logo:

$$H_8 = Ax_2 = (P \rightarrow (S \vee P)).$$

Finalmente, dado que $H_9 = (S \vee P)$, então temos uma prova de H_9 a partir das hipóteses em β e, é claro, dos axiomas. Uma notação ainda mais concisa dessa prova é aquelas na qual apresentamos apenas as aplicações da regra *modus ponens*. Nesse caso, a prova é representada conforme o esquema da Figura 5.1, a seguir.

$$\cfrac{\cfrac{\cfrac{\cfrac{P_1, (P_1 \to Q)}{Q,}\quad (Q \to P_4) \ldots MP_1}{P_4,}\quad (P_4 \to P) \ldots MP_2}{P,}\quad (P \to (S \vee P)) \ldots MP_3}{(S \vee P)} \ldots MP_4$$

Figura 5.1: Prova de $(S \vee P)$.

Nesse esquema, a regra *modus ponens* é utilizada quatro vezes, o que é indicado por MP_1, MP_2, MP_3 e MP_4. Na aplicação de MP_1, as fórmulas do antecedente são P_1 e $(P_1 \to Q)$. Observe que tais fórmulas pertencem ao conjunto de hipóteses β. Na segunda aplicação da regra, o antecedente é formado por Q e $(Q \to P_4)$. Nesse caso, a fórmula Q é o consequente ou resultado da primeira aplicação da regra *modus ponens*, e a fórmula $(Q \to P_4)$ pertence ao conjunto β. As outras aplicações de *modus ponens* são análogas, exceto a última, em que o antecedente da regra é composto pelas fórmulas P e $(P \to (S \vee P))$. Nesse caso, P é o resultado da terceira aplicação da regra de inferência e a fórmula $(P \to (S \vee P))$ corresponde a um caso particular do axioma Ax_2, onde $H = P$ e $G = S$. ■

Dada uma fórmula H e um conjunto de hipóteses β, suponha que H tenha uma prova a partir de β. Isso significa que H é deduzida sintaticamente, utilizando *modus ponens*, a partir dos axiomas e das fórmulas do conjunto β. No caso em que o conjunto β é vazio, H é deduzida utilizando somente os axiomas e *modus ponens*.

Definição 5.5 (consequência lógica sintática no sistema $\wp_a$) *Dados, na Lógica Proposicional, uma fórmula H e um conjunto de hipóteses β*[5]*, então H é uma consequência lógica sintática de β em $\wp_a$, se existe uma prova de H a partir de β.*

Essa consequência lógica, expressa na Definição 5.5, é sintática porque todos os conceitos envolvidos são sintáticos. Não são considerados conceitos semânticos que tratam da interpretação das fórmulas. Entretanto, devemos lembrar que um dos principais objetivos da Lógica é relacionar conceitos lógicos sintáticos e semânticos. E nesse sentido, há extensos estudos que relacionam consequência lógica sintática e consequência lógica semântica. Por exemplo, os teoremas da correção e da completude no sistema $\wp_a$, vistos mais adiante, tratam desse tema.

Definição 5.6 (teorema no sistema $\wp_a$) *Uma fórmula H é um teorema em $\wp_a$, se existe uma prova de H, em $\wp_a$, que utiliza apenas os axiomas. Nesse caso, o conjunto de hipóteses é vazio.*

[5] O conjunto de hipóteses β pode ser finito ou não. Mas, se ele é infinito, utilizamos em geral conjuntos, pelo menos, enumeráveis, ou decidíveis. Mas, não se preocupe com tais detalhe técnicos. Este livro é apenas introdutório.

Um teorema é uma fórmula derivável no sistema axiomático $\wp_a$, somente a partir de seus axiomas. Isto é, um teorema é uma fórmula H derivável a partir de um conjunto vazio de hipóteses.

Notação. Dada uma fórmula H, se H é consequência lógica sintática de um conjunto de hipóteses β, tal que $\beta = \{H_1, H_2, \ldots, H_n, \ldots\}$, então esse fato é denotado por $\beta \vdash H$ ou $\{H_1, H_2, \ldots, H_n, \ldots\} \vdash H$. Se H não é consequência lógica sintática de β, utilizamos a notação $\beta \nvdash H$. No caso em que H é um teorema, ou seja, β é vazio, então utilizamos a notação $\vdash H$. E, se H não é um teorema, denotamos isso por $\nvdash H$.

É importante enfatizar que o símbolo $\vdash$ é utilizado para denotar consequência lógica sintática, que não considera a interpretação das fórmulas.

Notação. Para distinguir as consequências lógicas sintática e semântica, utilizamos a seguinte notação para consequência lógica semântica. Dada uma fórmula H e um conjunto de fórmulas β, tal que $\beta = \{H_1, H_2, \ldots, H_n, \ldots\}$, se β implica semanticamente H, então H é consequência lógica semântica de β e este fato é denotado por $\beta \vDash H$ ou $\{H_1, H_2, \ldots, H_n, \ldots\} \vDash H$. Se H não é consequência lógica semântica de β, utilizamos a notação $\beta \nvDash H$. No caso em que H é uma tautologia, ou seja, β é vazio, então utilizamos a notação $\vDash H$. E se H não é uma tautologia, denotamos isso por $\nvDash H$.

Observe que o símbolo $\vDash$ é utilizado para denotar consequência lógica semântica, que considera a interpretação das fórmulas. Portanto, apesar da ligeira diferença, os símbolos $\vDash$ e $\vdash$ denotam conceitos bastante distintos. Uma prova sintática é um procedimento diferente de uma prova semântica, como aquela dos *tableaux* semânticos ou tabela-verdade, que utilizam a interpretação dos símbolos das fórmulas. Na prova sintática não levamos em conta a interpretação desses símbolos. Além disso, ela é um procedimento mecânico, não necessariamente determinístico.[6] A prova sintática é determinada por um conjunto de instruções que definem tal procedimento e que até podem ser executadas por um computador, não exigindo qualquer criatividade ou engenhosidade para a sua execução. Entretanto, no caso de uma prova, conforme Definição 5.4, o mais difícil é escolher corretamente os axiomas e hipóteses a serem utilizados para determinar a sequência de fórmulas $H_1, H_2, \ldots, H_n$. Nem sempre essa escolha é imediata, pois os axiomas e hipóteses denotam conjuntos infinitos de fórmulas. Por isso, dada uma fórmula H e um conjunto de hipóteses β, nem sempre é fácil saber se $\beta \vdash H$. Ao tentar responder essa questão, a execução do procedimento, determinado pela definição de prova, pode não determinar nenhuma resposta. Nesse caso, o procedimento computacional não termina após um número finito de passos. Logo, nesse caso, ele não é um procedimento efetivo. E se isso ocorre, não podemos responder se $\beta \vdash H$ e nem concluir o contrário, que $\beta \nvdash H$. Observe a importante diferença. No método dos *tableaux* semânticos, se não podemos responder que $\beta \vDash H$, então concluímos o contrário, que $\beta \nvDash H$. Por outro lado, no método de prova sintático, determinado pelo sistema $\wp_a$, se não podemos responder que $\beta \vdash H$, então não necessariamente concluímos o contrário, que $\beta \nvdash H$. Tais problemas

[6] Pesquise os significados dos termos: "procedimento" e "determinístico".

não ocorreriam se fosse possível encontrar um procedimento efetivo, decidível, que determinasse se $\beta \vdash H$, sem entrar em loop, ou entrar por um conjunto sem fim de operações.[7] Mas, infelizmente, não temos procedimentos efetivos que decidem e respondem se $\beta \vdash H$, ou $\beta \nvdash H$. Considere agora uma outra importante questão: Qual a razão para escolher o conjunto de axiomas da Definição 5.2 e a regra *modus ponens*? Poderiam ser escolhidos outros axiomas, como também outro tipo de regra de inferência. Espere um pouco. A análise dessa questão é considerada mais adiante, após a demonstração do teorema da completude no sistema $\wp_a$.

5.4 Proposições no sistema $\wp_a$

Apresentamos, a seguir, um conjunto de proposições cujos resultados são utilizados na demonstração do teorema da completude, que é o principal resultado deste capítulo. Em uma primeira leitura, não se preocupe com os detalhes das demonstrações. Basta entender os resultados e isso não compromete o entendimento do resto deste capítulo.

Proposição 5.1 *Sejam β um conjunto de fórmulas, e A, B e C três fórmulas da Lógica Proposicional. Temos que: se* $\{\beta \vdash (A \rightarrow B)$ e $\beta \vdash (C \vee A)\}$, *então* $\{\beta \vdash (B \vee C)\}$.

Demonstração. A sequência de fórmulas H_1, H_2 e H_3 demonstra esta proposição.

A primeira fórmula da prova. A primeira fórmula da prova, H_1, é obtida a partir do axioma Ax_3 fazendo $H = A,\ G = B$ e $E = C$. Logo:

1. $H_1 = (A \rightarrow B) \rightarrow ((C \vee A) \rightarrow (B \vee C))$

A segunda fórmula da prova. Por hipótese, temos $\beta \vdash (A \rightarrow B)$, então fazemos:

2. $H_2 = (A \rightarrow B)$

A terceira fórmula da prova. Aplicando *modus ponens* em H_1 e H_2, temos:

$$MP = \frac{(A \rightarrow B),\ ((A \rightarrow B) \rightarrow ((C \vee A) \rightarrow (B \vee C)))}{((C \vee A) \rightarrow (B \vee C))}$$

isto é, obtemos a prova da terceira fórmula.

3. $H_3 = ((C \vee A) \rightarrow (B \rightarrow C))$

A quarta fórmula da prova. Por hipótese, temos $\beta \vdash (C \vee A)$, então fazemos:

4. $H_4 = C \vee A$

[7] Esse tipo de estudo é importante na Lógica e em Teoria da Computação [Cooper], [Sipser] e [Smith].

A quinta fórmula da prova. Aplicando *modus ponens*, em H_3 e H_4 temos:

$$MP = \frac{(C \vee A),\ ((C \vee A) \rightarrow (B \vee C))}{(B \vee C)}$$

isto é, obtemos a prova da quinta fórmula.

5. $H_5 = (B \vee C)$

Portanto, concluímos que $\beta \vdash (B \vee C)$. Observe que não é o caso que $\vdash (B \vee C)$. Isso ocorre porque na prova acima, as fórmulas H_2 e H_4 são consideradas. Tais fórmulas são consequências sintáticas de β. Isto é, assumimos como ponto de partida que $\beta \vdash (A \rightarrow B)$ e $\beta \vdash (C \vee A)$; e não que $\vdash (A \rightarrow B)$ e $\vdash (C \vee A)$. **cqd** ■

Proposição 5.2 *Temos que* $\vdash (P \vee \neg P)$.

Demonstração. Nesta demonstração, utilizamos uma notação mais simples:

1. $A = ((P \vee P) \rightarrow P) \rightarrow ((\neg P \vee (P \vee P)) \rightarrow (P \vee \neg P))$.
   Fórmula obtida de Ax_3 fazendo $H = (P \vee P)$, $G = P$ e $E = \neg P$;
2. $B = (P \vee P) \rightarrow P$.
   Fórmula obtida de Ax_1 fazendo $H = P$;
3. $C = (\neg P \vee (P \vee P)) \rightarrow (P \vee \neg P)$.
   Resultado de MP em A e B.
   Em C, a subfórmula $\neg P \vee (P \vee P)$ pode ser denotada como $P \rightarrow (P \vee P)$. Logo:
   $C = (P \rightarrow (P \vee P)) \rightarrow (P \vee \neg P)$.
4. $D = P \rightarrow (P \vee P)$.
   Fórmula obtida a partir do axioma Ax_2, fazendo $H = P$ e $G = P$.
5. $H = P \vee \neg P$.
   Resultado de MP em C e D.

Portanto, $\vdash (P \vee \neg P)$. **cqd** ■

Notação. Para denotar que um símbolo proposicional P ocorre em uma fórmula H, escrevemos: $H_{[P]}$. Da mesma forma, se os símbolos proposicionais $P_1, \ldots, P_n$ ocorrem em uma fórmula H, escrevemos: $H_{[P_1,\ldots,P_n]}$. Suponha, por exemplo, $H = (P \leftrightarrow Q) \vee (R \rightarrow S)$. Então, podemos denotar H por $H_{[P,Q,R,S]}$. Observe que essa notação somente dá ênfase ao fato de P, Q, R e S ocorrerem em H, pois continuamos tendo $H_{[P,Q,R,S]} = (P \leftrightarrow Q) \vee (R \rightarrow S)$.

Proposição 5.3 (regra da substituição) *Sejam β um conjunto de fórmulas e $H_{[P_1,\ldots,P_n]}$ uma fórmula da Lógica Proposicional tais que $\beta \vdash H_{[P_1,\ldots,P_n]}$. Considere $\{P_1, \ldots, P_n\}$ um conjunto de símbolos proposicionais que ocorrem em H, mas não ocorrem nas fórmulas de β. Seja $G_{[E_1,\ldots,E_n]}$ a fórmula obtida de $H_{[P_1,\ldots,P_n]}$, substituindo os símbolos proposicionais $P_1, \ldots, P_n$ pelas fórmulas $E_1, \ldots, E_n$, respectivamente. Temos que $\beta \vdash G_{[E_1,\ldots,E_n]}$.*

Nota. A demonstração da regra de substituição, vista na Proposição 5.3, utiliza o princípio da indução finita e não é considerada neste livro.

Entretanto, podemos fazer um breve comentário. Para obter a prova de G a partir de β, basta substituir os símbolos proposicionais $P_1, \ldots, P_n$ pelas fórmulas $E_1, \ldots, E_n$, respectivamente, em todos os passos da prova de H a partir de β. Observe que nesse argumento é essencial que os símbolos proposicionais $P_1, \ldots, P_n$ não ocorram nas fórmulas do conjunto β. Observe, portanto, que as substituições são aplicadas apenas à fórmula H e não às fórmulas do conjunto de hipóteses β. Esta é a razão para considerarmos que $\{P_1, \ldots, P_n\}$ é um conjunto de símbolos proposicionais que ocorrem em H, mas não nas fórmulas de β .

Proposição 5.4 *Temos que* $\vdash (P \rightarrow \neg\neg P)$.

Demonstração. Em $\wp_a$, a fórmula $(P \rightarrow \neg\neg P)$ é uma denotação da fórmula $(\neg P \vee \neg\neg P)$. Portanto, basta demonstrar que $\vdash (\neg P \vee \neg\neg P)$. Conforme a Proposição 5.2, temos que $\vdash (P \vee \neg P)$. Utilizando a regra de substituição, de acordo com a Proposição 5.3, e substituindo P por $\neg P$ em $\vdash (P \vee \neg P)$, obtemos a prova de $\vdash (\neg P \vee \neg\neg P)$. **cqd** ■

Exemplo 5.3 (regra de substituição) Este exemplo considera uma forma incorreta de utilização da regra de substituição. Considere $\beta = \{P, P \rightarrow Q\}$. Aplicando *modus ponens* às fórmulas de β, o símbolo proposicional Q é deduzido de P e $P \rightarrow Q$. Logo, $\beta \vdash Q$. Aplicando de forma incorreta a regra de substituição, Proposição 5.3, nesse resultado, e substituindo Q por R, na fórmula Q, concluímos $\beta \vdash R$. Mas é falso que $\{P, P \rightarrow Q\} \vdash R$. Nesse caso, a regra de substituição foi aplicada de forma incorreta, pois Q ocorre em uma fórmula de $\{P, P \rightarrow Q\}$. Logo, Q não pode ser substituído. A questão importante a ser observada é que a substituição considerada na Proposição 5.3 não é global, pois não considera as fórmulas do conjunto de hipóteses. ■

Na demonstração da Proposição 5.5, a seguir, é utilizada uma notação diferente daquela indicada anteriormente neste capítulo. Essa nova notação é frequentemente utilizada em demonstrações na lógica, [Andrews], e muitas vezes simplifica a indicação da sequência de passos.

Proposição 5.5 *Temos que* $\vdash (P \rightarrow P)$.

Demonstração. Na notação utilizada nesta demonstração, cada linha é enumerada à esquerda. Além disso, à direita de cada linha são colocadas as justificativas e a partir delas é possível deduzir a presente linha. Tais justificativas são escritas de forma abreviada. Uma justificativa do tipo "$MP, pr5.4, Ax_3$", por exemplo, significa que a regra *modus ponens* foi aplicada ao resultado da Proposição 5.4 e ao axioma Ax_3 com as devidas substituições. Observe que as substituições no axioma ficam implícitas e não são indicadas. Além disso, $ex6$, por exemplo, indica a utilização do

Exercício 6 deste capítulo. O leitor é convidado a detalhar todas as justificativas dessa prova e das subsequentes.

1.	$\vdash (P \lor P) \to (\neg\neg P \lor P)$	$MP, pr5.4, Ax_3$
2.	$\vdash (\neg\neg P \lor P) \to (\neg\neg P \lor \neg\neg P)$	$MP, pr5.4, Ax_3$
3.	$\vdash \neg P \lor (P \lor P)$	Ax_2
4.	$\vdash (\neg\neg P \lor P) \lor \neg P$	$pr5.1, 1., 3.$
5.	$\vdash \neg\neg\neg P \lor (\neg\neg P \lor P)$	$pr5.3, pr5.4, pr5.1, 4.$
6.	$\vdash (\neg\neg P \lor \neg\neg P) \lor \neg\neg\neg P$	$pr5.1, 2., 5.$
7.	$\vdash \neg P \lor (\neg\neg P \lor \neg\neg P)$	$pr5.3, ex6, pr5.1, 6.$
8.	$\vdash \neg\neg P \lor \neg P$	$pr5.1, Ax_1, 7.$
9.	$\vdash P \lor \neg\neg\neg P$	$pr5.3, 8., pr5.1, ex5$
10.	$\vdash \neg P \lor P$	$pr5.3, ex6, pr5.1, 9.$

Conclusão: temos que $\vdash (P \to P)$. **cqd** ■

Nas proposições que se seguem, β é um conjunto de hipóteses e A, B e C são fórmulas. Evidentemente, após o enunciado de cada proposição, é apresentada sua demonstração.

Proposição 5.6 *Temos que* $\vdash (A \lor B) \to (B \lor A)$.

1.	$\vdash (P \to P)$	$pr5.5$
2.	$\vdash (B \to B)$	$pr5.3, 1.$
3.	$\vdash (B \to B) \to ((A \lor B) \to (B \lor A))$	Ax_3
4.	$\vdash (A \lor B) \to (B \lor A)$	$MP, 2., 3.$ **cqd**■

Proposição 5.7 (transitividade) *Se* $\beta \vdash (A_1 \to A_2)$ *e* $\beta \vdash (A_2 \to A_3)$, *então* $\beta \vdash (A_1 \to A_3)$.

1.	$\beta \vdash (\neg A_1 \lor A_2)$	*hip*
2.	$\beta \vdash (A_2 \to A_3)$	*hip*
3.	$\beta \vdash (A_3 \lor \neg A_1)$	$pr5.1, 1., 2.$
4.	$\beta \vdash (A_3 \lor \neg A_1) \to (\neg A_1 \lor A_3)$	$pr5.6$
5.	$\beta \vdash (\neg A_1 \lor A_3)$	$MP, 3., 4.$
5.	$\beta \vdash (A_1 \to A_3)$	reescrita de 5. **cqd**■

Proposição 5.8 *Se* $\beta \vdash (A \to C)$ *e* $\beta \vdash (B \to C)$, *então* $\beta \vdash ((A \lor B) \to C)$.

1.	$\beta \vdash (B \to C)$	*hip*
2.	$\beta \vdash (B \to C) \to ((A \lor B) \to (C \lor A))$	Ax_3
3.	$\beta \vdash (A \lor B) \to (C \lor A)$	$MP, 1., 2.$
4.	$\beta \vdash (A \to C)$	*hip*
5.	$\beta \vdash (A \to C) \to ((C \lor A) \to (C \lor C))$	Ax_3
6.	$\beta \vdash (C \lor A) \to (C \lor C)$	$MP, 4., 5.$
7.	$\beta \vdash (A \lor B) \to (C \lor C)$	$pr5.7, 3., 6.$
8.	$\beta \vdash (C \lor C) \to C$	Ax_1
9.	$\beta \vdash (A \lor B) \to C$	$pr5.7, 7., 8.$ **cqd**■

Proposição 5.9 *Se* $\beta \vdash (A \to C)$ *e* $\beta \vdash (\neg A \to C)$, *então* $\beta \vdash C$.

1.	$\beta \vdash (A \to C)$	*hip*
2.	$\beta \vdash (\neg A \to C)$	*hip*
3.	$\beta \vdash (A \vee \neg A) \to C$	$pr5.8, 1., 2.$
4.	$\beta \vdash (A \vee \neg A)$	$pr5.2$
5.	$\beta \vdash C$	$MP, 3., 4.$**cqd**■

Proposição 5.10 *Se* $\beta \vdash (A \to B)$, *então* $\beta \vdash (A \to (C \vee B))$ *e* $\beta \vdash (A \to (B \vee C))$.

1.	$\beta \vdash (A \to B)$	*hip*
2.	$\beta \vdash B \to (C \vee B)$	Ax_2
3.	$\beta \vdash A \to (C \vee B)$	$pr5.7, 1., 2.$
4.	$\beta \vdash (C \vee B) \to (B \vee C)$	$pr5.3, pr5.6$
5.	$\beta \vdash A \to (B \vee C)$	$pr5.7, 3., 4.$**cqd**■

Proposição 5.11 (associatividade) *Temos que* $\vdash ((A \vee B) \vee C) \to (A \vee (B \vee C))$.

1.	$\vdash (P \to P)$	$pr5.5$
2.	$\vdash A \to (A \vee (B \vee C))$	$pr5.3, 1., pr5.10$
3.	$\vdash B \to (B \vee C)$	$pr5.3, 1., pr5.10$
4.	$\vdash B \to (A \vee (B \vee C))$	$pr5.10, 3.$
5.	$\vdash (A \vee B) \to (A \vee (B \vee C))$	$pr5.8, 2., 4.$
6.	$\vdash C \to (B \vee C)$	$pr5.3, 1., pr5.10$
7.	$\vdash C \to (A \vee (B \vee C))$	$pr5.10, 6.$
8.	$\vdash ((A \vee B) \vee C) \to (A \vee (B \vee C))$	$pr5.8, 5., 7.$**cqd**■

Proposição 5.12 *Se* $\beta \vdash ((A \vee B) \vee C)$, *então* $\beta \vdash (A \vee (B \vee C))$.

1.	$\beta \vdash (A \vee B) \vee C$	*hip*
2.	$\beta \vdash ((A \vee B) \vee C) \to (A \vee (B \vee C))$	$pr5.11$
3.	$\beta \vdash (A \vee (B \vee C))$	$MP, 1., 2.$**cqd**■

Proposição 5.13 *Se* $\beta \vdash (A \to B)$ *e* $\beta \vdash (A \to (B \to C))$, *então* $\beta \vdash (A \to C)$.

1.	$\beta \vdash (A \to B)$	*hip*
2.	$\beta \vdash (\neg A \vee (\neg B \vee C))$	*hip*
3.	$\beta \vdash ((\neg B \vee C) \vee \neg A)$	$pr5.6, 2.$
4.	$\beta \vdash (\neg B \vee (C \vee \neg A))$	$pr5.12, 3.$
4.	$\beta \vdash (B \to (C \vee \neg A))$	reescrita
5.	$\beta \vdash (A \to (C \vee \neg A))$	$pr5.7, 1., 4.$
5.	$\beta \vdash (\neg A \vee (C \vee \neg A))$	reescrita
6.	$\beta \vdash ((C \vee \neg A) \vee \neg A)$	$pr5.6, 5.$
7.	$\beta \vdash (C \vee (\neg A \vee \neg A))$	$pr5.12, 6.$
8.	$\beta \vdash (\neg A \vee C)$	$pr5.1, Ax_1, 7.$
9.	$\beta \vdash (A \to c)$	reescrita **cqd**■

Consideramos, a seguir, o teorema da dedução na sua versão sintática, cujo resultado é utilizado na demonstração do teorema da completude. Na demonstração desse teorema, utilizamos o princípio da indução finita e o lema a seguir.

Lema 5.1 *Suponha que $\beta \cup \{A\} \vdash B$ e que $B \in \beta$, ou $B = A$, ou B é axioma. Temos, então, que $\beta \vdash (A \to B)$.*

Demonstração. Essa demonstração é dividida em dois casos:

Caso 1: Suponha que $B \in \beta$, ou B é um axioma. Logo, $\beta \vdash B$. Utilizando $Ax_2 = H \to (G \vee H)$, com $H = B$, $G = \neg A$, temos a prova $\beta \vdash B \to (A \to B)$. Aplicando a regra *modus ponens* aos resultados $\beta \vdash B$ e $\beta \vdash B \to (A \to B)$, então obtemos: $\beta \vdash (A \to B)$.

Caso 2: Suponha que $B = A$. Utilizando a Regra de Substituição, Proposição 5.3, no resultado $\vdash (P \to P)$, que é dado pela Proposição 5.5, obtemos $\vdash (A \to A)$. Logo $\beta \vdash (A \to B)$. **cqd**■

Teorema 5.1 (teorema da dedução - forma sintática) *Se $\beta \cup \{A\} \vdash B$, então $\beta \vdash (A \to B)$.*

Demonstração. Temos que $\beta \cup \{A\} \vdash B$ e queremos demonstrar que $\beta \vdash (A \to B)$. Como $\beta \cup \{A\} \vdash B$, então existe uma sequência de fórmulas $C_1, \ldots, C_n$, que é uma prova de B a partir de $\beta \cup \{A\}$. Nesse caso, temos $B = C_n$. É demonstrado a seguir, utilizando o princípio da indução, que $\beta \vdash (A \to C_i)$ para todo inteiro i, $1 \leq i \leq n$. A partir desse fato, fazendo $i = n$, concluímos que $\beta \vdash (A \to B)$, pois $B = C_n$. A demonstração de $\beta \vdash (A \to C_i)$ utiliza o princípio da indução no inteiro i. Considere a asserção:

$$A(i) \equiv \text{ se } \beta \cup \{A\} \vdash C_i, \text{ então } \beta \vdash (A \to C_i).$$

Base da indução. A base da indução corresponde ao caso $i = 1$. Fazendo $i = 1$ na asserção $A(i)$ obtemos:

$$A(1) \equiv \text{ se } \beta \cup \{A\} \vdash C_1, \text{ então } \beta \vdash (A \to C_1).$$

Portanto, devemos demonstrar que $\beta \vdash (A \to C_1)$, tendo que $\beta \cup \{A\} \vdash C_1$. Observe que C_1 é a primeira fórmula da prova a partir de $\beta \cup \{A\}$, logo $C_1 \in \beta \cup \{A\}$ ou C_1 é um axioma. Nesse caso, utilizando o lema 5.1, temos que $\beta \vdash (A \to C_1)$

Passo da indução. Esta demonstração considera a segunda forma do princípio da indução na Lógica. Nesse caso, para cada inteiro i, $1 \leq i \leq n$, é necessário demonstrar que se $A(k)$ é verdadeira para todo k, $k < i$, então $A(i)$ também é verdadeira. Em outras palavras, se a asserção:

$$A(k) \equiv \text{ se } \beta \cup \{A\} \vdash C_k, \text{ então } \beta \vdash (A \to C_k).$$

é verdadeira para todo k, $k < i$, então também é verdadeira a asserção:

$$A(i) \equiv \text{ se } \beta \cup \{A\} \vdash C_i, \text{ então } \beta \vdash (A \rightarrow C_i).$$

Para demonstrar $A(i)$, suponha $\beta \cup \{A\} \vdash C_i$. O resultado $\beta \vdash (A \rightarrow C_i)$ é demonstrado a seguir. Nos casos em que C_i é axioma, hipótese, ou é igual a A, então, utilizando o Lema 5.1, concluímos que $\beta \vdash (A \rightarrow C_i)$. No caso em que C_i não é axioma, nem hipótese, e é diferente de A, não podemos utilizar o Lema 5.1. Nesse caso, na sequência da prova de C_i, existem as fórmulas C_j e $(C_j \rightarrow C_i)$, a partir das quais, C_i é deduzida, utilizando *modus ponens*. Portanto, devemos ter: $C_s = (C_j \rightarrow C_i)$, onde $j < i,\ s < i$. Isto é, as fórmulas C_j e $(C_j \rightarrow C_i)$ pertencem à prova de C_i. Observe que, nesse caso, C_i é deduzida de C_j e $(C_j \rightarrow C_i)$, utilizando *modus ponens*. Como C_j e C_s pertencem à sequência de fórmulas da prova de C_i, temos: $\beta \cup \{A\} \vdash C_j$ e $\beta \cup \{A\} \vdash C_k$. Então, utilizando que:

$$A(k) \equiv \text{ se } \beta \cup \{A\} \vdash C_k, \text{ então } \beta \vdash (A \rightarrow C_k)$$

é verdadeira para todo $k,\ k < i$, concluímos: $\beta \vdash (A \rightarrow C_j)$ e $\beta \vdash (A \rightarrow C_s)$. Substituindo a fórmula C_s, temos as duas provas: $\beta \vdash (A \rightarrow C_j)$ e $\beta \vdash (A \rightarrow (C_j \rightarrow C_i))$. Utilizando a Proposição 5.13, concluímos o resultado $\beta \vdash (A \rightarrow C_i)$. **cqd**■

Exemplo 5.4 (utilização do teorema da dedução) Este exemplo demonstra, utilizando o teorema da dedução, Teorema 5.1, que:

$$\vdash Q \rightarrow (P \rightarrow (P_2 \rightarrow ((P_2 \rightarrow (\neg P \lor \neg Q)) \rightarrow P_{100}))). \tag{5.1}$$

Se for demonstrado que:

$$\{Q\} \vdash P \rightarrow (P_2 \rightarrow ((P_2 \rightarrow (\neg P \lor \neg Q)) \rightarrow P_{100})), \tag{5.2}$$

então, podemos utilizar o teorema da dedução e obter o Resultado 5.1. Da mesma forma, se for demonstrado que:

$$\{Q, P\} \vdash P_2 \rightarrow ((P_2 \rightarrow (\neg P \lor \neg Q)) \rightarrow P_{100}), \tag{5.3}$$

então novamente podemos utilizar o teorema da dedução e obter o Resultado 5.2 e, portanto, o Resultado 5.1. Seguindo esse raciocínio, para demonstrar o Resultado 5.1 basta demonstrar:

$$\{Q, P, P_2, (P_2 \rightarrow (\neg P \lor \neg Q))\} \vdash P_{100}, \tag{5.4}$$

e utilizar o teorema da dedução, repetidas vezes, para se obter o Resultado 5.1. A questão agora é como demonstrar a dedução 5.4? Observe inicialmente que para deduzir P_{100} é necessário utilizar a regra MP. Isso ocorre porque P_{100} não é um axioma e nem uma hipótese. Logo, na sequência de fórmulas que constituem a prova de P_{100}, a última fórmula é igual a P_{100} e existem fórmulas anteriores iguais a $H \rightarrow P_{100}$ e H. Mas quem é a fórmula H? Faça alguma tentativa. Nesse caso, consideramos $H = Q$, dado que Q é uma hipótese, o que parece ser uma boa escolha. Portanto, no final da prova de P_{100}, temos a sequência:

$H_{n-2} = Q$	hipótese
$H_{n-1} = Q \rightarrow P_{100}$	a ser provada
$H_n = P_{100}$	$MP,\ H_{n-2},\ H_{n-1}$

Assim, para provar P_{100}, é necessário provar $Q \rightarrow P_{100}$. Observe que Q é uma hipótese, não sendo necessário prová-la. Uma boa ideia para provar $Q \rightarrow P_{100}$ é utilizar o axioma 3, considerando:

$$H_1 = Ax_3 = (P \rightarrow \neg Q) \rightarrow ((P_{100} \vee P) \rightarrow (Q \rightarrow P_{100}))$$

Observe que a última implicação em H_1 é exatamente igual a H_{n-1}, a fórmula a ser provada. Nesse caso, para provar H_{n-1}, utilizando H_1, é necessário aplicar a regra *modus ponens* duas vezes para eliminar os antecedentes $(P \rightarrow \neg Q)$ e $(P_{100} \vee P)$. Essas eliminações são obtidas pela sequência:

$H_1 =$ $(P \rightarrow \neg Q) \rightarrow ((P_{100} \vee P) \rightarrow (Q \rightarrow P_{100}))$	axioma Ax_3
$H_{n-5} = (P \rightarrow \neg Q)$	a ser provada
$H_{n-4} = (P_{100} \vee P)$	a ser provada
$H_{n-3} = (P_{100} \vee P) \rightarrow (Q \rightarrow P_{100}))$	$MP,\ H_1,\ H_{n-5}$
$H_{n-2} = Q$	hipótese
$H_{n-1} = Q \rightarrow P_{100}$	$MP,\ H_{n-4},\ H_{n-3}$
$H_n = P_{100}$	$MP,\ H_{n-2},\ H_{n-1}$

Nesse ponto devemos provar que $(P \rightarrow \neg Q)$ e $(P_{100} \vee P)$. No caso de $(P \rightarrow \neg Q)$, observe inicialmente que, em $\wp_a$, essa fórmula é uma denotação de $(\neg P \vee \neg Q)$. A prova dessa última fórmula, utilizando as hipóteses, é dada pela sequência:

$H_1 =$ $(P \rightarrow \neg Q) \rightarrow ((P_{100} \vee P) \rightarrow (Q \rightarrow P_{100}))$	axioma Ax_3
$H_{n-7} = P_2$	hipótese
$H_{n-6} = P_2 \rightarrow (\neg P \vee \neg Q)$	hipótese
$H_{n-5} = (\neg P \vee \neg Q)$	$MP,\ H_{n-7},\ H_{n-6}$
$H_{n-4} = (P_{100} \vee P)$	a ser provada
$H_{n-3} = (P_{100} \vee P) \rightarrow (Q \rightarrow P_{100}))$	$MP,\ H_1,\ H_{n-5}$
$H_{n-2} = Q$	hipótese
$H_{n-1} = Q \rightarrow P_{100}$	$MP,\ H_{n-4},\ H_{n-3}$
$H_n = P_{100}$	$MP,\ H_{n-2},\ H_{n-1}$

Para provar $(P_{100} \vee P)$ é necessário utilizar o axioma 2, na forma
$Ax_2 = P \rightarrow (P_{100} \vee P)$ e a hipótese P, obtendo a sequência:

$H_1 =$
$(P \to \neg Q) \to ((P_{100} \lor P) \to (Q \to P_{100}))$ axioma Ax_3

$H_{n-9} = P$	hipótese
$H_{n-8} = P \to (P_{100} \lor P)$	axioma Ax_2
$H_{n-7} = P_2$	hipótese
$H_{n-6} = P_2 \to (\neg P \lor \neg Q)$	hipótese
$H_{n-5} = (\neg P \lor \neg Q)$	$MP,\ H_{n-7},\ H_{n-6}$
$H_{n-4} = (P_{100} \lor P)$	$MP,\ H_{n-9},\ H_{n-8}$
$H_{n-3} = (P_{100} \lor P) \to (Q \to P_{100}))$	$MP,\ H_1,\ H_{n-5}$
$H_{n-2} = Q$	hipótese
$H_{n-1} = Q \to P_{100}$	$MP,\ H_{n-4},\ H_{n-3}$
$H_n = P_{100}$	$MP,\ H_{n-2},\ H_{n-1}$

Para obter a prova final, basta ajustar o índice n, fazendo $n = 11$. ■

Os resultados das proposições a seguir são utilizados na próxima seção.

Proposição 5.14 *Temos que* $\vdash (\neg A \to (\neg B \to \neg(A \lor B)))$.

1.	$\vdash A \to \neg\neg A$	$pr5.3, pr5.4$
2.	$\vdash B \to \neg\neg B$	$pr5.3, pr5.4$
3.	$\vdash A \to (\neg\neg A \lor \neg\neg B)$	$pr5.10, 1.$
4.	$\vdash B \to (\neg\neg A \lor \neg\neg B)$	$pr5.10, 2.$
5.	$\vdash (A \lor B) \to (\neg\neg A \lor \neg\neg B)$	$pr5.8, 3., 4.$
6.	$\vdash (\neg\neg A \lor \neg\neg B) \lor \neg(A \lor B)$	$pr5.6, 5.$
7.	$\vdash \neg\neg A \lor (\neg\neg B \lor \neg(A \lor B))$	$pr5.12, 6.$
7.	$\vdash \neg A \to (\neg B \to \neg(A \lor B))$	reescrita **cqd**■

Proposição 5.15 *Temos que* $\vdash A \to (A \lor B)$ *e* $\vdash \neg A \to (\neg A \lor B)$.

Demonstração.

Prova de $\vdash A \to (A \lor B)$.

1.	$\vdash A \to A$	$pr5.3, pr5.5$
2.	$\vdash A \to (A \lor B)$	$pr5.10, 1.$

Prova de $\vdash \neg A \to (\neg A \lor B)$.

1.	$\vdash \neg A \lor \neg\neg A$	$pr5.3, pr5.4$
2.	$\vdash (\neg A \lor \neg\neg A) \to (\neg\neg A \lor \neg A)$	$pr5.3, pr5.6$
3.	$\vdash (\neg\neg A \lor \neg A)$	$MP, 1., 2.$
3.	$\vdash \neg A \to \neg A$	reescrita
4.	$\vdash \neg A \to (\neg A \lor B)$	$pr5.10, 3.$ **cqd**■

5.5 Correção e completude do sistema $\wp_a$

Na definição do sistema axiomático $\wp_a$ é escolhido um conjunto de axiomas e a regra de inferência *modus ponens*. Uma questão importante é a seguinte: por que foram escolhidos os axiomas Ax_1, Ax_2, Ax_3 e a regra de inferência *modus ponens*? Outros axiomas e regras também poderiam ser escolhidos. Há pelo menos duas razões para isso.

1. O sistema axiomático deve ser correto, ou seja, todo teorema deve ser uma tautologia. Isso significa que o conhecimento deduzido a partir dos axiomas, utilizando as regras de inferência, deve ser válido. Observe que um sistema axiomático de dedução não correto não poderia ter aplicações. Nesse caso, haveria a dedução de conhecimento não válido a partir dos axiomas. Portanto, a correção é uma propriedade desejável em um sistema axiomático.

2. O sistema axiomático deve ser completo, ou seja, toda tautologia deve ser um teorema. Dada uma tautologia qualquer, se o sistema axiomático é completo, então a tautologia é um teorema. Isso significa que existe, no sistema axiomático, uma prova dessa tautologia a partir dos axiomas. A denominação "sistema completo" se deve a esse fato. Toda tautologia pode ser derivada sintaticamente no sistema axiomático. Observe que muitas vezes pode ser fácil identificar se uma fórmula é uma tautologia. Entretanto, a partir da tautologia, determinar a sua prova utilizando os axiomas do sistema axiomático pode não ser tão fácil.

Os teoremas a seguir formalizam tais questões:

Teorema 5.2 (teorema da correção) *Seja H uma fórmula da Lógica Proposicional, se H é um teorema, então H é uma tautologia.*

Esquema de demonstração. Observe inicialmente que os axiomas Ax_1, Ax_2 e Ax_3 são tautologias, como já foi demonstrado anteriormente. Na regra *modus ponens*, a fórmula G é deduzida de duas outras fórmulas: H e $(H \to G)$. Isto é:

$$\frac{H, (H \to G)}{G}$$

Mas, se $\vDash H$ e $\vDash (H \to G)$, então $\vDash G$. Ou seja, a partir de tautologias, utilizando *modus ponens*, são deduzidas apenas tautologias (ver exercícios). Se $\vdash H$, então existe uma sequência de fórmulas $H_1, \ldots, H_n$ tal que $H = H_n$. Além disso, dada uma fórmula H_i dessa sequência, então há duas possibilidades:

a) H_i é um axioma e, portanto, uma tautologia;

b) H_i é deduzida, utilizando *modus ponens*, de fórmulas anteriores na sequência. Considerando que a regra *modus ponens* mantém a validade, logo, para todo i, H_i também é tautologia. Portanto, H é uma tautologia.

Essa demonstração pode ser feita, de forma mais rigorosa, utilizando indução no comprimento da prova (ver exercícios). **cqd■**

Teorema 5.3 (teorema da completude) *Seja H uma fórmula da Lógica Proposicional, se H é uma tautologia, então H é um teorema.*

A demonstração desse teorema utiliza o teorema da dedução, o princípio da indução finita e os conceitos considerados a seguir. Além disso, essa demonstração somente é válida se H não contém símbolos de verdade. Essa é uma das razões pelas quais o alfabeto do sistema $\wp_a$ não contém símbolos de verdade.

Definição 5.7 (base associada a uma fôrmula.) *Seja H uma fórmula e $P_1, \ldots, P_n$ os símbolos proposicionais contidos em H. Dada uma interpretação I, então a base associada a H conforme I, denotada por $B[H, I]$, é um conjunto de literais, definidos a partir de $P_1, \ldots, P_n$ como se segue:*

- *se $I[P_i] = T$, então $P_i \in B[H, I]$;*
- *se $I[P_i] = F$, então $\neg P_i \in B[H, I]$.*

Exemplo 5.5 (base associada a uma fórmula) Considere a fórmula: $H = \neg(P \rightarrow Q) \rightarrow (Q \rightarrow P)$. Seja também I uma interpretação tal que $I[P] = T$ e $I[Q] = F$. Nesse caso, $B[H, I] = \{P, \neg Q\}$. ■

Lema 5.2 *Seja H uma fórmula e $P_1, ..., P_n$ os símbolos proposicionais contidos em H. Dada uma interpretação I, então:*

a) $I[H] = T \Rightarrow B[H, I] \vdash H$.

b) $I[H] = F \Rightarrow B[H, I] \vdash \neg H$.

Antes de apresentar a demonstração do Lema 5.2, considere o exemplo a seguir:

Exemplo 5.6 Sejam H e I, respectivamente, a fórmula e a interpretação do Exemplo 5.5. Nesse caso, $I[H] = T$. Logo, a partir do resultado determinado pelo Lema 5.2, temos:

$$\{P, \neg Q\} \vdash \neg(P \rightarrow Q) \rightarrow (Q \rightarrow P)$$

■

Demonstração (Lema 5.2). Inicialmente, lembre-se de que o sistema $\wp_a$ utiliza o alfabeto simplificado da Lógica Proposicional. Por isso, nessa demonstração, as fórmulas são escritas utilizando apenas os conectivos $\neg$ e $\vee$. Esta demonstração utiliza indução no número de conectivos $\neg$ e $\vee$ que ocorrem em H. Considere, então, a notação:

$$Nc(H) = \text{número de conectivos } \neg \text{ e } \vee \text{ em } H.$$

Seja $A(n)$ a asserção:

$$A(n) \equiv \text{ Se } Nc(H) = n, \text{ então } \quad \begin{array}{l} a)\ I[H] = T \Rightarrow B[H, I] \vdash H, \\ b)\ I[H] = F \Rightarrow B[H, I] \vdash \neg H. \end{array}$$

Para demonstrar este lema, vamos provar, utilizando o princípio da indução finita, que $A(n)$ é válida para todo n.

Base da indução. Nesse caso, devemos demonstrar que $A(0)$ é verdadeira.

$A(0) \equiv$ Se $Nc(H) = 0$, então $\quad a)\ I[H] = T \Rightarrow B[H,I] \vdash H,$
$\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\quad b)\ I[H] = F \Rightarrow B[H,I] \vdash \neg H.$

Como $Nc(H) = 0$, então H é igual a um símbolo proposicional qualquer $\breve{P}$, isto é $H = \breve{P}$. Nesse caso devemos demonstrar que:

a) se $I[H] = T$ então $B[H,I] \vdash \breve{P}$;

b) se $I[H] = F$ então $B[H,I] \vdash \neg\breve{P}$.

Como $\{\breve{P}\} \vdash \breve{P}$, $\{\neg\breve{P}\} \vdash \neg\breve{P}$ e $H = \breve{P}$, temos que:

a) se $I[H] = T$ então $B[H,I] = \{\breve{P}\}$. Logo, $B[H,I] \vdash \breve{P}$. Isto é, $B[H,I] \vdash H$;

b) se $I[H] = F$ então $B[H,I] = \{\neg\breve{P}\}$. Logo, $B[H,I] \vdash \neg\breve{P}$. Isto é, $B[H,I] \vdash \neg H$.

Portanto, $A(0)$ é verdadeira.

Passo da indução. Nessa demonstração, consideramos a segunda forma do princípio da indução, na qual o passo da indução é dado por:

Se $A(j)$ é verdadeira para todo j; $1 \leq j < k$, então $A(k)$ é verdadeira.

Há dois casos a considerar:

Caso 1. Suponha que $H = \neg G$, tal que $Nc(H) = k$. Logo, $Nc(G) < k$. Como $A(j)$ é verdadeira para todo $j,\ j < k$, então:

a) $I[G] = T \Rightarrow B[G,I] \vdash G$,

b) $I[G] = F \Rightarrow B[G,I] \vdash \neg G$.

Como $B[G,I] = B[H,I]$, então temos:

$$\begin{aligned} I[H] = T \quad &\Rightarrow I[G] = F \\ &\Rightarrow B[G,I] \vdash \neg G \\ &\Rightarrow B[H,I] \vdash \neg G \\ &\Rightarrow B[H,I] \vdash H \end{aligned}$$

Portanto, se $I[H] = T$, então $B[H,I] \vdash H$. Se $I[H] = F$, o raciocínio é análogo.

$$\begin{aligned} I[H] = F \quad &\Rightarrow I[G] = T \\ &\Rightarrow B[G,I] \vdash G \\ &\Rightarrow B[H,I] \vdash G \end{aligned}$$

Utilizando as Proposições 5.3 e 5.4 temos:

$$\vdash G \rightarrow \neg\neg G. \tag{5.5}$$

Aplicando *modus ponens* ao Resultado 5.5 e ao resultado $B[H,I] \vdash G$, concluímos $B[H,I] \vdash \neg\neg G$, ou seja, $B[H,I] \vdash \neg H$. Portanto, se $I[H] = F$, então $B[H,I] \vdash \neg H$.

Caso 2. Suponha que $H = (E \vee G)$ tal que $Nc(H) = k$. Logo, $Nc(E) < k$ e $Nc(G) < k$. Como $A(j)$ é verdadeira para todo $j, j < k$, então:

1. $I[E] = T \Rightarrow B[E,I] \vdash E$.
2. $I[E] = F \Rightarrow B[E,I] \vdash \neg E$.

3. $I[G] = T \Rightarrow B[G, I] \vdash G$.

4. $I[G] = F \Rightarrow B[G, I] \vdash \neg G$.

Como $B[H, I] = \{B[E, I] \cup B[G, I]\}$, então:

$a) I[H] = F \quad \Rightarrow I[E] = F$ e $I[G] = F$

$\Rightarrow B[E, I] \vdash \neg E$ e $B[G, I] \vdash \neg G$

$\Rightarrow B[H, I] \vdash \neg E$ e $B[H, I] \vdash \neg G$

Considerando as Proposições 5.3 e 5.14, obtemos $\vdash (\neg E \rightarrow (\neg G \rightarrow \neg(E \vee G)))$. Aplicando *modus ponens* duas vezes, concluímos que $B[H, I] \vdash \neg(E \vee G)$, isto é, $B[H, I] \vdash \neg H$.

$b) I[H] = T \quad \Rightarrow I[E] = T$ ou $I[G] = T$

Portanto, há dois casos a considerar: $I[E] = T$ ou $I[G] = T$.

$I[E] = T \quad \Rightarrow B[E, I] \vdash E$

$\Rightarrow B[H, I] \vdash E$

Utilizando as Proposições 5.3 e 5.15, obtemos $\vdash (E \rightarrow (E \vee G))$. Em seguida, aplicando *modus ponens*, concluímos que $B[H, I] \vdash (E \vee G)$. Isto é, $B[H, I] \vdash H$. Se $I[G] = T$ a demonstração é análoga. Nesse caso, basta usar a Proposição 5.6. Portanto, como a base e o passo da indução são válidos, utilizando o princípio da indução, a demonstração está concluída. **cqd**■

A demonstração do teorema da completude utiliza o resultado do Lema 5.2. Mas, antes de considerar essa demonstração, seus passos são analisados em um caso mais simples. Nesse caso mais simples, consideramos um tipo de tautologia particular H, que contém apenas os símbolos proposicionais P_1, P_2 e P_3. A fórmula H poderia ser, por exemplo, $H = (P_1 \wedge P_2) \rightarrow (P_3 \vee \neg P_3)$. A tabela-verdade, Tabela 5.1, indica todas as possibilidades de interpretação desses símbolos.

Interpretação	P_1	P_2	P_3
I_1	T	T	T
I_2	T	T	F
I_3	T	F	T
I_4	T	F	F
I_5	F	T	T
I_6	F	T	F
I_7	F	F	T
I_8	F	F	F

Tabela 5.1: Tabela-verdade associada aos símbolos P_1, P_2, P_3.

Conforme a Tabela 5.1, as seguintes bases para a fórmula H são obtidas:
$B[H, I_1] = \{P_1, P_2, P_3\}$, $B[H, I_2] = \{P_1, P_2, \neg P_3\}$, $B[H, I_3] = \{P_1, \neg P_2, P_3\}$,
$B[H, I_4] = \{P_1, \neg P_2, \neg P_3\}$, $B[H, I_5] = \{\neg P_1, P_2, P_3\}$, $B[H, I_6] = \{\neg P_1, P_2, \neg P_3\}$,

$B[H, I_7] = \{\neg P_1, \neg P_2, P_3\}$, $B[H, I_8] = \{\neg P_1, \neg P_2, \neg P_3\}$,
Como H é uma tautologia, então para qualquer interpretação I_i temos $I_i[H] = T$. Logo, utilizando o Lema 5.2, concluímos que $B[H, I_i] \vdash H$ para toda interpretação I_i. Temos, por exemplo, que:
$B[H, I_1] \vdash H$ ou seja, $\{P_1, P_2, P_3\} \vdash H$
$B[H, I_2] \vdash H$ ou seja, $\{P_1, P_2, \neg P_3\} \vdash H$
As interpretações I_1 e I_2 se diferem apenas no símbolo P_3 e coincidem nos símbolos P_1 e P_2. Quando isso ocorre, tais interpretações são denominadas interpretações complementares em P_3. Demonstramos, a seguir, o resultado: dado um conjunto de hipóteses β, se $\beta \cup \{P\} \vdash H$ e $\beta \cup \{\neg P\} \vdash H$, então $\beta \vdash H$. Observe que os literais complementares P e $\neg P$ são eliminados dos conjuntos de hipóteses iniciais. Portanto, como $\{P_1, P_2, P_3\} \vdash H$ e $\{P_1, P_2, \neg P_3\} \vdash H$, concluímos que $\{P_1, P_2\} \vdash H$. Observe que os literais complementares P_3 e $\neg P_3$ são eliminados dos conjuntos de hipóteses iniciais. Analogamente, considerando outras duas interpretações complementares, I_3 e I_4, temos:
$B[H, I_3] \vdash H$ ou seja, $\{P_1, \neg P_2, P_3\} \vdash H$
$B[H, I_4] \vdash H$ ou seja, $\{P_1, \neg P_2, \neg P_3\} \vdash H$.
Os literais complementares P_3 e $\neg P_3$ também podem ser eliminados dos conjuntos de hipóteses iniciais e obtemos: $\{P_1, \neg P_2\} \vdash H$. Utilizando os resultados $\{P_1, P_2\} \vdash H$ e $\{P_1, \neg P_2\} \vdash H$, e a eliminação dos literais complementares P_2 e $\neg P_2$, temos $\{P_1\} \vdash H$.

A consequência sintática $\{P_1\} \vdash H$ é obtida considerando as bases $B[H, I_1]$, $B[H, I_2]$, $B[H, I_3]$ e $B[H, I_4]$. Repetindo, de forma inteiramente análoga, utilizando as bases $B[H, I_5], B[H, I_6], B[H, I_7]$ e $B[H, I_8]$, concluímos que $\{\neg P_1\} \vdash H$, Utilizando os resultados: $\{P_1\} \vdash H$, e $\{\neg P_1\} \vdash H$, como também a eliminação dos literais complementares P_1 e $\neg P_1$, temos o resultado final: $\vdash H$, ou seja, $\vdash H$. Portanto, considerando que H é uma tautologia, concluímos que $\vdash H$, ou seja, H é um teorema. A demonstração do teorema da completude repete esse processo, considerando uma fórmula H qualquer. Inicialmente, identificamos os pares de interpretações complementares e depois eliminamos literais complementares, até obter um conjunto vazio de hipóteses, concluindo que $\vdash H$.

Demonstração (teorema da completude). Seja H uma tautologia. Demonstramos, a seguir, que H é um teorema, isto é $\vdash H$. Sejam $P_1, \ldots, P_n$ os símbolos proposicionais de H e a Tabela 5.2, a seguir.

Os símbolos proposicionais de H são apresentados na primeira linha da tabela, e nas outras, todas as combinações possíveis de interpretações desses símbolos. Cada linha define uma interpretação diferente para $P_1, \ldots, P_n$, o que totaliza 2^n interpretações diferentes para esses símbolos.[8] Nesse caso, considerando que as linhas da Tabela 5.2 são preenchidas de forma análoga à Tabela 5.1, então na primeira linha da Tabela 5.2 temos apenas o símbolo T e na última, o símbolo F. Isso significa que

[8]A rigor, cada linha da tabela-verdade corresponde a um conjunto infinito de interpretações que coincidem nos símbolos $P_1, \ldots, P_n$. Para simplificar a notação, esse conjunto de interpretações é simplesmente referenciado por um representante.

se I_1 é uma interpretação definida pela primeira linha e I_{2^n} definida pela última linha, então:

$$I_1[P_1] = I_1[P_2] = \ldots = I_1[P_n] = T$$

e

$$I_{2^n}[P_1] = I_{2^n}[P_2] = \ldots = I_{2^n}[P_n] = F.$$

P_1	P_2	....	P_{n-1}	P_n
T	T	....	T	T
T	T	....	T	F
.....	.....	....	.....	.....
F	F	....	F	T
F	F	....	F	F

Tabela 5.2: Tabela-verdade associada aos símbolos $P_1, \ldots, P_n$.

Além disso, os símbolos T e F são escritos na Tabela 5.2, seguindo estas regras. Na coluna de P_1 há 2^{n-1} símbolos T seguidos de 2^{n-1} símbolos F. Na coluna de P_2 há 2^{n-2} símbolos T, seguidos de 2^{n-2} símbolos F, seguidos de 2^{n-2} símbolos T e por fim, seguidos de 2^{n-2} símbolos F. Seguindo tais regras, na última coluna, que corresponde a P_n, os símbolos T e F se alternam, iniciando-se com T. Dado um símbolo P_i, existem vários pares de interpretações I_{c_i} e J_{c_i} tais que:

$$\text{se } j \neq i, \text{ então } I_{c_i}[P_j] = J_{c_i}[P_j] \text{ e}$$
$$\text{se } j = i, \text{ então } I_{c_i}[P_i] = T \text{ e } J_{c_i}[P_i] = F.$$

Considere, por exemplo, o símbolo P_1. Na coluna de P_1 há 2^{n-1} símbolos T seguida de 2^{n-1} símbolos F. Nesse caso, as interpretações I_1 e $I_{2^{n-1}+1}$ são tais que $I_1[P_1] = T$, $I_{2^{n-1}+1}[P_1] = F$ e $I_1[P_j] = I_{2^{n-1}+1}[P_j]$ para todo j tal que $j \neq 1$. Nesse caso, as interpretações I_1 e $I_{2^{n-1}+1}$ são denominadas interpretações complementares de P_1. As interpretações I_{c_i} e J_{c_i} são também chamadas de interpretações complementares de P_i. Observe que, para qualquer símbolo P_i, a metade das interpretações definidas pela Tabela 5.2 interpreta P_i como T e a outra metade como F. Portanto, para qualquer símbolo P_i há 2^{n-1} pares de interpretações complementares. Isso significa que o número de pares de interpretações complementares depende exponencialmente do número de símbolos da fórmula H. Considere I_{c_n} e J_{c_n} duas interpretações complementares de P_n. Logo:

$$B[H, I_{c_n}] = \{P'_1, \ldots, P'_{n-1}, P_n\}$$
$$B[H, J_{c_n}] = \{P'_1, \ldots, P'_{n-1}, \neg P_n\}$$

e, para $j < n$:

$$P'_j = P_j \text{ se } I_{c_n}[P_j] = J_{c_n}[P_j] = T$$
$$P'_j = \neg P_j \text{ se } I_{c_n}[P_j] = J_{c_n}[P_j] = F$$

Como $\vDash H$, então $I_{c_n}[H] = J_{c_n}[H] = T$. Utilizando o Lema 5.2, $B[H, I_{c_n}] \vdash H$ e $B[H, J_{c_n}] \vdash H$, isto é:

$$\{P'_1, \ldots, P'_{n-1}, P_n\} \vdash H$$
$$\{P'_1, \ldots, P'_{n-1}, \neg P_n\} \vdash H$$

Utilizando o teorema da dedução, concluímos:

$$\{P'_1, \ldots, P'_{n-1}\} \vdash (P_n \to H)$$
$$\{P'_1, \ldots, P'_{n-1}\} \vdash (\neg P_n \to H)$$

Aplicando a regra de substituição, Proposição 5.3, substituindo A por P_n, C por H e considerando $\beta = \{P'_1, \ldots, P'_{n-1}\}$ na Proposição 5.9, obtemos:

$$\{P'_1, \ldots, P'_{n-1}\} \vdash H$$

Temos que $P'_{n-1} = P_{n-1}$ ou $P'_{n-1} = \neg P_{n-1}$. Se $P'_{n-1} = P_{n-1}$, então

$$\{P'_1, \ldots, P'_{n-2}, P_{n-1}\} \vdash H.$$

Repetindo esse raciocínio, escolhendo duas outras interpretações complementares I'_{c_n} e J'_{c_n} de P_n tais que $I'_{c_n}[P_{n-1}] = J'_{c_n}[P_{n-1}] = F$, obtemos, de forma análoga:

$$\{P'_1, \ldots, P'_{n-2}, \neg P_{n-1}\} \vdash H.$$

Portanto, temos as duas deduções:

$$\{P'_1, \ldots, P'_{n-2}, P_{n-1}\} \vdash H$$
$$\{P'_1, \ldots, P'_{n-2}, \neg P_{n-1}\} \vdash H$$

Utilizando novamente o teorema da dedução e as Proposições 5.3 e 5.9, concluímos:

$$\{P'_1, \ldots\ldots, P'_{n-2}\} \vdash H.$$

Repetindo todo esse processo mais $n-2$ vezes, concluímos $\vdash H$, isto é, H é um teorema do sistema axiomático $\wp_a$. **cqd**■

5.5.1 Observações sobre o teorema da completude

Em geral, um conceito é semântico quando considera a interpretação das fórmulas. É esse tipo de conceito que é expresso por $\beta \vDash H$. Nesse caso, todas as interpretações que satisfazem β também satisfazem H. Por outro lado, um conceito, em geral, é sintático quando não considera o significado das fórmulas. Se, por exemplo, $\beta \vdash H$, então existe uma prova de H utilizando axiomas e hipóteses de β. Observe, portanto, que $\beta \vdash H$ é um conceito sintático, o qual não considera o significado de H. Os teoremas da correção e da completude são centrais no estudo da Lógica e relacionam fatos do mundo sintático, como $\vdash H$, a fatos do mundo semântico, como $\vDash H$. Os dois teoremas dizem que, no sistema axiomático $\wp_a$:

$$H \text{ é um teorema se, e somente se, } H \text{ é uma tautologia.}$$

Isto é, o sistema axiomático $\wp_a$ é correto e completo e, portanto, os conceitos de consequência sintática e semântica coincidem. Tudo isso é verdade porque é válida em $\wp_a$ a equivalência: $\vDash H \;\Leftrightarrow \vdash H$. Isso significa que em $\wp_a$ os conceitos de tautologia e teorema coincidem. Além disso, dado um conjunto de fórmulas β, então $\beta \vDash H \;\Leftrightarrow\; \beta \vdash H$. Resumindo, como os teoremas da correção e completude valem em $\wp_a$, os fatos a seguir, que são importantes, são verdadeiros.

- Em $\wp_a$ consequências lógicas semântica e sintática são conceitos equivalentes.
- Em $\wp_a$ tautologia e teorema são conceitos equivalentes.

No início, quando começamos a estudar Lógica, é comum imaginar que nada adicionamos ao estudar o método sintático definido em $\wp_a$. Isso acontece devido às equivalências anteriores. Até parece que estamos falando a mesma coisa, mas com palavras diferentes. Mas não é bem assim. As diferenças ficam evidentes a partir do estudo da Lógica de Predicados, considerada no próximo capítulo. Por isso, observamos a seguir alguns aspectos sobre os teoremas da correção e da completude em $\wp_a$, Teoremas 5.2 e 5.3.

1. Na demonstração do teorema da completude, dada uma tautologia H, é demonstrada a existência de uma prova de H, no sistema axiomático $\wp_a$. Entretanto, tal prova não é exibida. Em momento algum da demonstração, explicitamos a sequência de fórmulas que define a prova de H. Esse tipo de demonstração é comum em matemática. Demonstramos a existência de um objeto, sem que ele se torne explícito.

2. Conforme a Definição 5.1, o sistema formal axiomático $\wp_a$ é definido utilizando o alfabeto da Lógica Proposicional, na forma simplificada, Definição 3.14. Como esse alfabeto não contém símbolos de verdade, uma importante questão é responder se a demonstração continua válida se os símbolos de verdade forem adicionados ao alfabeto. Para responder essa questão, devemos analisar a demonstração do teorema da completude, no caso em que a tautologia H contém um símbolo de verdade. Nesse caso, o raciocínio desenvolvido a partir da Tabela 5.2 não é mais correto. Isso, porque entre os símbolos da tabela temos um símbolo de verdade com interpretação fixa. Verifique, na demonstração, esse fato.

3. A demonstração do teorema da completude apresentada neste livro não é correta quando consideramos símbolos de verdade no alfabeto. Na verdade, se os símbolos de verdade são adicionados ao alfabeto, o novo sistema formal não é mais completo.

4. Observe que as duas últimas observações não se aplicam aos métodos semânticos, pois nesses métodos não há diferença alguma em adicionar, ou não, os símbolos de verdade.

5. No final da demonstração,[9] para eliminar os símbolos proposicionais $P_1, \ldots,$ P_{n-1}, P_n da dedução $\{P_1, \ldots.., P_{n-1}, P_n\} \vdash H$ e obter $\vdash H$, repetimos o processo de demonstração n vezes. Entretanto, tal fato não significa que o número global de passos da demonstração seja uma função linear de n. Em outras palavras, a complexidade do processo definido na demonstração não é uma função linear de n. Isso ocorre porque a demonstração considera também escolhas de interpretações complementares na Tabela 5.2, cujo número depende exponencialmente do número de símbolos proposicionais, que é igual a n.
6. São considerados neste capítulo vários teoremas como os da correção e completude em $\wp_a$. Por outro lado, o termo "teorema" também é utilizado para denominar uma fórmula H tal que $\vdash H$ em $\wp_a$. Portanto, o termo "teorema" é utilizado com dois significados diferentes. Um deles está na linguagem-objeto e o outro na metalinguagem.
7. Se H é um teorema, isto é, $\vdash H$, temos uma caracterização sintática de H. Nesse caso, há uma prova de H, sem a utilização de hipóteses. Observe que a caracterização de H é sintática porque o conceito de prova é sintático. Por outro lado, quando se utiliza o termo "teorema" na denominação "teorema da completude", não se tem uma caracterização sintática de fórmulas. Nesse caso, o teorema da completude trata da relação entre propriedades sintáticas e semânticas de uma fórmula H. O teorema diz que se H possui a propriedade semântica $\models H$, então também possui a propriedade sintática $\vdash H$. Portanto, o teorema da completude relaciona a sintaxe e a semântica das fórmulas e, nesse sentido, o termo "teorema" está na metalinguagem.
8. A conclusão é que o termo "teorema" é utilizado em dois níveis diferentes e, portanto, com significados diferentes. Na metalinguagem, relacionando a sintaxe e a semântica das fórmulas, como no teorema da completude; e na linguagem-objeto, caracterizando propriedades sintáticas, como em $\vdash H$.

5.6 Consistência no sistema $\wp_a$

Parece que sempre procuramos pela consistência. Ou seja, pela não contradição. Na Lógica também é assim e esse conceito é definido a seguir.

Definição 5.8 (consistência de um sistema axiomático) *Um sistema axiomático é consistente se, e somente se, dada uma fórmula H, não se pode ter $\vdash H$ e $\vdash \neg H$. Isto é, H e $\neg H$ não podem ser teoremas ao mesmo tempo.*

A consistência de um sistema axiomático é uma importante propriedade, pois se um sistema axiomático clássico, como o $\wp_a$, não for consistente, então é possível

[9] O entendimento da análise apresentada neste parágrafo depende de conceitos de Teoria da Computação [Sipser]. O leitor que ainda não conhece tais conceitos pode desconsiderar este parágrafo.

provar qualquer fórmula nesse sistema. E tal fato o trivializa, ou seja: temos um sistema no qual todas as fórmulas são teoremas. É um sistema no qual qualquer fórmula, tautologias e contradições, por exemplo, são teoremas. Se um sistema axiomático não é consistente, podemos provar, nesse sistema, qualquer fórmula. Lembre da curiosa história de Russell a respeito do aluno que pediu ao famoso lógico e filósofo Bertrand Russell que provasse que qualquer coisa segue da contradição. Ela mostra que é possível provar a partir do enunciado "$2 + 2 = 5$", que "Russell e o Papa são iguais." A prova de Russell, utilizando a notação deste capítulo, é apresentada a seguir:

1.	$\vdash 2+2=5$	hipótese;
2.	$\vdash 2=3$	subtraia 2 de ambos os lados da igualdade;
3.	$\vdash 3=2$	inverta os termos da igualdade;
4.	$\vdash 2=1$	subtraia 1 de ambos os lados da igualdade.

Lembre-se de como Russell concluiu: "O Papa e eu somos dois. Mas, dado que dois é igual a 1, então eu e o Papa somos um. Logo, eu sou igual ao Papa". Pelo teorema da correção em $\wp_a$, as fórmulas contraditórias não são teoremas. Logo, $\wp_a$ é consistente. Pois, caso contrário, se não fosse consistente, não poderia ser correto. A demonstração desse fato é considerada no Teorema 5.4, a seguir.

Teorema 5.4 (consistência) *O sistema axiomático $\wp_a$ é consistente.*

Demonstração. Suponha que $\vdash H$. Logo, pelo teorema da correção, H é uma tautologia e, portanto, $\neg H$ é contraditória. Mas se $\neg H$ é contraditória, então não se pode ter $\vdash \neg H$. Pois, caso ocorresse $\vdash \neg H$, então, novamente pelo teorema da correção, $\neg H$ seria uma tautologia. Mas é impossível ter H e $\neg H$ como tautologias ao mesmo tempo. **cqd**■

Definição 5.9 (consistência de um conjunto de fórmulas) *Um conjunto de hipóteses Γ é consistente se, e somente se, não existe fórmula H tal que $\Gamma \vdash H$ e $\Gamma \vdash \neg H$. Isto é, H e $\neg H$ não podem ser provadas a partir de Γ.*

Teorema 5.5 (consistência e satisfatibilidade) *Um conjunto de fórmulas Γ é consistente se, e somente se, é satisfatível.*

Esquema de demonstração. Esta demonstração é feita considerando o caso mais simples em que o conjunto de fórmulas é finito. No caso mais geral, em que o conjunto de fórmulas pode ser infinito, a demonstração utiliza o teorema da compacidade, que não é considerado neste livro [Enderton], [Dalen], [Shoenfield]. Considere, portanto, Γ é finito $\Gamma = \{A_1, ..., A_n\}$.

Demonstração "$\Rightarrow$". Γ é consistente $\Rightarrow$ Γ é satisfatível. Se Γ é consistente, então não existe H tal que $\Gamma \vdash H$ e $\Gamma \vdash \neg H$. Suponha, por absurdo, que Γ não seja satisfatível. Logo, não existe interpretação I que satisfaça as fórmulas de Γ. Ou seja, para toda interpretação I, temos que $I[(A_1 \wedge \ldots \wedge A_n)] = F$. Logo, nesse caso, $(A_1 \wedge \ldots \wedge A_n) \rightarrow H$ e $(A_1 \wedge ... \wedge A_n) \rightarrow \neg H$ são tautologias.

Então, utilizando o teorema da completude, concluímos que $\vdash (A_1 \wedge \ldots \wedge A_n) \rightarrow H$ e $\vdash (A_1 \wedge ... \wedge A_n) \rightarrow \neg H$. Como $\Gamma = \{A_1, \ldots, A_n\}$, portanto, (veja exercícios) $\Gamma \vdash A_1 \wedge \cdots \wedge A_n$. Aplicando *modus ponens*, concluímos que $\Gamma \vdash H$ e $\Gamma \vdash \neg H$, o que é um absurdo, pois Γ é consistente. Portanto, Γ é satisfatível.

Demonstração "$\Leftarrow$". Γ é satisfatível $\Rightarrow$ Γ é consistente. Se Γ é satisfatível, existe interpretação I que satisfaz Γ. Suponha, por absurdo, que Γ não seja consistente. Logo, existe H tal que $\Gamma \vdash H$ e $\Gamma \vdash \neg H$. Utilizando o teorema da correção, H e $\neg H$ são consequências lógicas semânticas de Γ. Mas como I satisfaz Γ, então $I[H] = T$ e $I[\neg H] = T$, o que é um absurdo. Portanto, Γ é consistente. **cqd**■

5.7 Exercícios

Observação. Caso você não tenha experiência em demonstrações que utilizam indução finita, desconsidere os exercícios que necessitam de tal princípio para a solução. Isso não comprometerá sua compreensão do resto do livro.

1. Dadas duas fórmulas H e G, demonstre que, se H e G são tautologias, então o resultado da aplicação da regra *modus ponens* a H e G também é uma tautologia. Em outras palavras, se H e G são tautologias e $\dfrac{H,\ G}{E}\ MP$, então E é uma tautologia.
   Nota. A fórmula G é necessariamente do tipo: $G = H \rightarrow E$.
2. Responda, justificando sua resposta.
   (a) Por que uma derivação é um procedimento puramente sintático?
   (b) Seja β um conjunto de fórmulas. Se $\beta \vdash H$, então é possível concluir que H é uma tautologia?
   (c) Seja β um conjunto de fórmulas. Considere que $\beta \vdash H$. Que condições o conjunto de fórmulas β deve satisfazer para que necessariamente H seja uma tautologia?
   (d) Se H é tautologia, então $\beta \vdash H$ para qualquer conjunto β.
3. Considere as afirmações a seguir no sistema $\wp_a$. Demonstre quando forem verdadeiras ou, caso contrário, dê um contraexemplo.
   (a) Se $\beta \vdash H$ e $\beta \subset \varphi$, então $\varphi \vdash H$.
   (b) Se $\beta \vdash H$ e $\beta \supset \varphi$, então $\varphi \vdash H$.
   (c) Se $\beta \vdash H \wedge G$, então $\beta \vdash H$ e $\beta \vdash G$.
   (d) Se $\beta \cup \{H\} \vdash G$, então $\beta \vdash H \rightarrow G$.
   (e) Se $\beta \vdash H$ e $\varphi \vdash H \rightarrow G$, então $\beta \cup \varphi \vdash G$.
   (f) Se $\beta \vdash (P \wedge \neg P)$, então $\beta \vdash H$.
   (g) Se $\beta \vdash (P \wedge \neg P)$, então β é insatisfatível.

(h) Se $\beta \cup \{\neg H\} \vdash (P \wedge \neg P)$, então $\beta \vdash H$.

(i) Se $\beta \cap \varphi \vdash H$, então $\varphi \vdash H$.

(j) Se $\beta \cup \varphi \vdash H$, então $\varphi \vdash H$.

4. Demonstre a volta do teorema da dedução, forma sintática, Teorema 5.1, ou seja:

   Se $\beta \vdash (A \rightarrow B)$, então $\beta \cup \{A\} \vdash B$.

5. Considere o sistema $\wp_a$. Existe um conjunto de fórmulas β tal que $\beta \vdash H$ e $\beta \vdash \neg H$ para alguma fórmula H? Isto é, H e $\neg H$ são consequências lógicas de β?

6. Demonstre em $\wp_a$ que $\vdash (\neg\neg P \rightarrow P)$.

7. Demonstre em $\wp_a$ que se $\beta \vdash (A \vee B)$, então $\beta \vdash (B \vee A)$.

8. (Regra de Transitividade) Demonstre em $\wp_a$ que se $\beta \vdash (H_1 \rightarrow H_2), \ldots,$ $\beta \vdash (H_{n-1} \rightarrow H_n)$, então $\beta \vdash (H_1 \rightarrow H_n)$.

9. Considere um sistema axiomático $\wp_b$ em que se tem *modus ponens*, a Regra de Substituição e $\vdash (H \rightarrow (H \rightarrow G))$. Demonstre que $\wp_b$ é inconsistente.

10. O comprimento de uma prova $\beta \vdash H$ em $\wp_a$ é definido como o número de fórmulas da sequência que define a prova. Se essa prova é $H_1, ..., H_n$, o seu comprimento é igual a n. Isto é, *comp* $[\beta \vdash H] = n$.

    (a) Defina o princípio da indução finita em $\wp_a$, como o princípio da indução no comprimento da prova.

    (b) Demonstre a validade do princípio da indução em $\wp_a$.

11. Considere a regra *modus tollens*:[10] Dadas as fórmulas H e G, a regra de inferência denominada *modus tollens* (MT) é definida pelo seguinte procedimento: tendo $\neg G$ e $(H \rightarrow G)$ deduza $\neg H$.

    Demonstre que essa regra mantém a validade das fórmulas. Isto é, se $\neg G$ e $(H \rightarrow G)$ são tautologias, então $\neg H$ também é tautologia.

12. Considere a regra de dedução a seguir. Dadas as fórmulas A, B e C, a regra de inferência (OU) é definida pelo procedimento: tendo $(A \vee B \vee C)$, $\neg A$ e $\neg B$, deduza C.

    Demonstre que essa regra mantém a validade das fórmulas. Isto é, se $(A \vee B \vee C)$, $\neg A$ e $\neg B$ são tautologias, então C também é tautologia.

13. Complete a demonstração do teorema da correção em $\wp_a$, utilizando o princípio da indução no comprimento da prova.

14. Repita, passo a passo, a demonstração do teorema da completude em $\wp_a$ no caso particular em que H contém apenas os símbolos proposicionais P_1, P_2, P_3, P_4 e P_5.

[10] *modus tollens* é uma expressão do Latim originada da expressão *"modus tollendo tollens"*, que significa "modo que, negando, nega".

15. Considere $\Gamma = \{A_1, \dots, A_n\}$. Demonstre que $\Gamma \vdash A_1 \wedge \dots \wedge A_n$.

16. (a) Como sabemos, a fórmula $(\neg false \vee P)$ é uma tautologia, isto é: $\vDash (\neg false \vee P)$. Utilize as ideias da demonstração do teorema da completude, Teorema 5.3, e verifique se é possível demonstrar que $\vdash (\neg false \vee P)$.

    (b) As ideias da demonstração do teorema da completude, Teorema 5.3, podem ser utilizadas no caso em que H contém o símbolo de verdade $false$?

    (c) Justifique informalmente a conclusão: se for adicionado ao alfabeto do sistema $\wp_a$ o símbolo de verdade $false$, a prova do teorema da completude do sistema axiomático resultante não pode ser considerada.[11]

[11] Na verdade, o sistema se torna incompleto. Isto é, com a adição do símbolo de verdade, não há prova de sua completude.

CAPÍTULO 6

A LINGUAGEM DA LÓGICA DE PREDICADOS

6.1 Introdução

Na primeira parte deste livro, estudamos a Lógica Proposicional, em que as fórmulas são veritativo-funcionais, ou seja, suas interpretações não dependem da estrutura interna de suas proposições, mas unicamente do modo como se combinam. O termo "veritativo-funcional" expressa, exatamente, esta propriedade: a verdade de uma sentença depende funcionalmente das suas partes. Em outras palavras, a interpretação da fórmula $P \vee Q$, por exemplo, depende apenas da interpretação e do modo como os símbolos proposicionais P e Q se combinam. E, nessa análise, não é necessário saber a constituição interna das proposições representadas pelos símbolos P e Q. Utilizando as proposições, muito pode ser feito, como, por exemplo, o que foi apresentado na primeira parte do livro. É possível introduzir conceitos importantes como sintaxe, semântica, prova, correção, completude etc. Entretanto, há um grupo fundamental de sentenças, ou argumentos, cuja interpretação é, também, determinada pela estrutura interna de seus enunciados simples. Esses tipos de argumentos são denominados silogismos categóricos e foram inicialmente estudados por Aristóteles. Sua análise é iniciada considerando os enunciados categóricos que tradicionalmente possuem as formas a seguir [Salmon]:

- "todos os alunos são inteligentes";
- "nenhum aluno é inteligente";

- "alguns alunos são inteligentes";
- "alguns alunos não são inteligentes".

Para interpretar enunciados categóricos como esses, é necessário interpretar os quantificadores "todos", "nenhum" e "algum". Considere, por exemplo, outra sentença: "Todos os alunos são inteligentes." Nesse caso, para saber se ela é verdadeira, ou falsa, é necessário, pelo menos, saber de quais alunos estamos falando. Se estamos considerando apenas o conjunto dos alunos campeões da Olimpíada Nacional de Matemática, certamente temos uma sentença verdadeira. Mas, se considerarmos todos os alunos do país, talvez não tenhamos o mesmo resultado. Portanto, para interpretar uma sentença como essa, é necessário saber algo que está implicitamente representado na própria estrutura da sentença. Em outras palavras, quando dizemos que todos os alunos são inteligentes, devemos deixar claro de que alunos estamos falando.

Este capítulo inicia a segunda parte do livro na qual consideramos o estudo da Lógica de Predicados e nela, estudamos sentenças como os enunciados categóricos. Os passos a serem seguidos são análogos àqueles considerados na primeira parte. Inicialmente, é definida a linguagem da Lógica de Predicados, analisada do ponto de vista sintático e semântico. Também são considerados alguns mecanismos que verificam fórmulas válidas. Então, para começar, analisamos neste capítulo os fundamentos da linguagem da Lógica de Predicados, cuja definição é semelhante à definição de outras linguagens. Como na linguagem da Lógica Proposicional, o alfabeto é definido inicialmente, e, em seguida, os outros elementos da linguagem. O resultado é uma linguagem mais rica que a da Lógica Proposicional, pois, além de conter os seus objetos, a linguagem da Lógica de Predicados possui quantificadores, símbolos funcionais e de predicados. Nesse sentido, a Lógica de Predicados é uma extensão da Lógica Proposicional, o que lhe confere maior poder de representação.

6.2 Alfabeto da Lógica de Predicados

A linguagem da Lógica de Predicados contém tudo que a linguagem da Lógica Proposicional contém e algo mais. Isso, porque a linguagem da Lógica de Predicados é uma extensão da linguagem da Lógica Proposicional. E sendo uma extensão, há vários tipos de sentenças, que não possuem representações adequadas na Lógica Proposicional, mas podem ser representadas, um pouco melhor, na Lógica de Predicados. Considere, por exemplo, as declarações:

- Todo aluno de Computação é inteligente. Zé é aluno de Computação. Logo, Zé é inteligente;
- A adição de dois números ímpares quaisquer é um número par;
- Dado um número qualquer, existe um número primo maior que ele.

A dificuldade em representar tais argumentos na Lógica Proposicional se deve às quantificações indicadas pelas palavras: "todo," "qualquer" e "existe". A linguagem da Lógica de Predicados estende a linguagem da Lógica Proposicional possibilitando a representação desses tipos de quantificação. Além disso, são considerados também funções, predicados e variáveis, de forma análoga ao Cálculo Diferencial. Assim, a Lógica de Predicados é obtida inicialmente pela extensão do alfabeto da Lógica Proposicional. Seguindo essa mesma ideia, a Lógica Proposicional também pode ser estendida de forma diferente da que consideramos aqui, ou, ainda, substituída, obtendo outras Lógicas. Isto é, há várias formas de extender, ou substituir, a Lógica Proposicional, como, por exemplo:

1. Lógicas Complementares são aquelas cujo objetivo é estender a Lógica Clássica. Um exemplo de Lógica Complementar é a Lógica Temporal.
2. Lógicas Alternativas ou heterodoxas têm como objetivo substituir a Lógica Proposicional Clássica. Exemplos de Lógicas Alternativas são as Lógicas Polivalentes, em que as sentenças declarativas podem ser interpretadas diferentemente de T e F.

Mas, no nosso caso, tais fatos são apenas informações. A Lógica de Predicados é uma extensão clássica da Lógica Proposicional e seu alfabeto é definido pelo conjunto de símbolos descritos a seguir.

Definição 6.1 (alfabeto da Lógica de Predicados) *O alfabeto da Lógica de Predicados é constituído por:*

1. *símbolos de pontuação: (,);*
2. *um conjunto enumerável de símbolos para variáveis:* $x, y, z, w, x_1, y_1, \ldots;$
3. *um conjunto enumerável de símbolos para funções:* $f, g, h, f_1, g_1, h_1, f_2, g_2, \ldots;$
4. *um conjunto enumerável de símbolos para predicados:* $p, q, r, p_1, q_1, r_1, p_2, q_2, \ldots;$
5. *conectivos:* $\neg, \vee, \forall, \exists$.

Associado a cada símbolo para função ou predicado, temos um número inteiro não negativo k. Esse número indica a aridade, ou seja, o número de argumentos da função ou predicado.

Como podemos observar, o alfabeto da linguagem da Lógica de Predicados é uma extensão do alfabeto da Lógica Proposicional, Definição 3.14. Ele contém os mesmos símbolos de pontuação e parte dos conectivos. Mas, onde estão os símbolos proposicionais? Espere um pouco. Como analisamos mais adiante, eles estão representados, implicitamente, no conjunto dos símbolos para predicados. Além dos símbolos de pontuação e dos conectivos, o alfabeto da Lógica de Predicados contém conjuntos infinitos e enumeráveis de símbolos para funções, predicados e variáveis.

Variáveis. Os símbolos para variáveis formam um novo conjunto, o que não ocorre na Lógica Proposicional. Como é visto mais adiante, as variáveis têm um papel importante na Lógica de Predicados. Isso não é uma surpresa, pois usamos, com frequência, as variáveis em Matemática, Computação e muitas outras áreas. Em programação em Lógica, por exemplo, as variáveis são utilizadas na determinação das respostas dos programas [Casanova], [Chang], [Lloyd].

Variáveis e metavariáveis. Na Lógica Proposicional, o símbolo $\breve{P}$ é utilizado como uma metavariável, o que significa que ele representa qualquer símbolo proposicional. Como foi enfatizado anteriormente, $\breve{P}$ não é um símbolo da linguagem da Lógica Proposicional, mas sim um símbolo da metalinguagem. O símbolo $\breve{P}$ é utilizado para representar qualquer símbolo proposicional do conjunto $\{P, Q, R, J, P_1, Q_1, R_1, S_1, P_2, Q_2, \ldots\}$. Na Lógica de Predicados também há metavariáveis. Só que, nesse caso, o alfabeto também contém suas próprias variáveis. Isso significa que na Lógica de Predicados há variáveis que ocorrem na linguagem-objeto e outras que ocorrem na metalinguagem. As variáveis da linguagem são denotadas por $x, y, z, w, x_1, y_1, \ldots$.

Notação. Como na Lógica Proposicional, utilizamos um pequeno risco acima de um símbolo para indicar que ele representa uma metavariável. Nesse sentido, $\breve{x}, \breve{p}$ e $\breve{f}$ representam metavariáveis de variáveis, símbolos proposicionais, de predicados e de funções.

Predicados. Observe inicialmente que os símbolos para predicados não ocorrem na Lógica Proposicional. Eles são utilizados para representar propriedades e relações entre objetos. Ao dizer, por exemplo, que Maria é bonita, temos que "bonita" é uma propriedade de Maria. Tal fato pode ser representado, na Lógica de Predicados, por $p(x)$. Nesse caso, de uma maneira informal, podemos dizer:

$p(x)$ é verdadeiro se, e somente se, x é bonita.

Dessa forma, o símbolo de predicado p é utilizado para representar a propriedade de ser bonita. E quando x é interpretado como sendo Maria, o resultado da interpretação da sentença é verdadeiro. Os símbolos para predicados também podem ser utilizados para expressar relações entre objetos. A relação "irmão", por exemplo, pode ser representada por $q(x, y)$. Neste caso, de maneira informal, dizemos que:

$q(x, y)$ é verdadeiro se, e somente se, a pessoa x é irmã de y.

Funções. Como os símbolos para predicados, os símbolos para funções também não ocorrem na Lógica Proposicional. Na Lógica, os símbolos para função têm utilização análoga àquela que ocorre na Aritmética. Isto é, não há diferença alguma entre as funções da Lógica e as da Aritmética. E, certamente, já conhecemos bastante sobre o conceito de função. Na Lógica, na Matemática e em Computação os conceitos de função e de predicado são fundamentais. Em Computação, por exemplo, há linguagens que se baseiam nesses conceitos, como as linguagens funcionais *SCHEME* e *LISP* [Winston], [Dybvig], e as linguagens em Lógica, [Casanova], [Chang] e [Lloyd].

Símbolos para constantes. Se temos símbolos para funções, temos as constantes. Isso porque cada símbolo para função possui um número k, não negativo, associado, que representa sua aridade. E quando $k = 0$, temos uma função com zero argumento. Nesse caso, como no Cálculo por exemplo, as funções com zero argumento, ou aridade nula, representam as constantes. Ou seja, elas são as funções constantes.

Notação. Os símbolos para funções zero-árias, com aridade nula, são denominados constantes. Elas são representadas por $a, b, c, a_1, b_1, c_1, a_2, b_2, \ldots$ Como há enumeráveis símbolos para funções com aridade zero, há também um conjunto infinito e enumerável de constantes.

Símbolos proposicionais. Cada símbolo para predicado possui um número k, não negativo, associado, que representa sua aridade. Quando $k = 0$, temos um predicado com zero argumento. E os predicados com aridade zero representam os símbolos proposicionais, que ocorrem no alfabeto da Linguagem Proposicional.

Notação. Os símbolos para predicados zero-ários são denominados símbolos proposicionais. Como na Lógica Proposicional, eles são representados por $P, Q, R, S, P_1, Q_1, R_1, S_1, P_2, Q_2, \ldots$. Observe que há um conjunto infinito e enumerável de símbolos proposicionais.

Conectivos. O conjunto dos conectivos contém $\neg$ e $\vee$, que pertencem à versão simplificada do alfabeto da Lógica Proposicional, Definição 3.14. Além desses conectivos, há também $\forall$ e $\exists$, que representam os quantificadores universal, para todo, e existencial, existe, respectivamente. Como é analisado mais adiante, tais quantificadores ampliam, em muito, o poder de representação da Lógica de Predicados, como também a complexidade das demonstrações e dos resultados.

Uma maneira informal de ver o quantificador universal. Na nossa linguagem cotidiana, utilizamos, com frequência, os quantificadores universal e existencial.

- Todo homem é mortal.
- Todos os homens são mortais.
- Os homens são mortais.
- Homens são sempre mortais.
- Somente mortais é que são homens.
- Apenas mortais é que são homens.
- Só mortais é que são homens.
- Se algo é homem, então é mortal.

Leia com atenção e verifique que todas essas sentenças têm o mesmo sentido. De maneira informal, se consideramos que a variável x representa homens e o predicado $q(x)$ é verdadeiro quando x é mortal, então as sentenças podem ser representadas por $(\forall x)q(x)$. Nesse caso, o quantificador $(\forall x)$ expressa a universalização de x, no sentido que todo, para todo, qualquer que seja, todos ou cada x, sem exceção, satisfaz $p(x)$. Mas cuidado! A tradução de sentenças que utilizam quantificadores universais para a Lógica não deve ser feita às pressas. Por exemplo, o par de sentenças a seguir não expressa as mesmas ideias:

- Somente os mortais são homens.

- Somente mortais é que são homens.

Da mesma forma, o par de sentenças a seguir não expressa as mesmas ideias:

- Todos os homens são mortais.
- Todos os mortais são homens.

Uma maneira informal de ver o quantificador existencial. Considere as sentenças:

- Existe homem inteligente.
- Há um homem inteligente.
- Há pelo menos um homem inteligente.
- Há homens inteligentes.
- Algum homem é inteligente.
- Alguns homens são inteligentes.

Verifique que todas essas sentenças têm o mesmo sentido. De maneira informal, se consideramos que a variável x representa homens e o predicado $q(x)$ é verdadeiro quando x é inteligente, então as sentenças podem ser representadas por $(\exists x)q(x)$. Nesse caso, o quantificador $(\exists x)$ expressa que existe um, alguns, algum, um ou pelo menos um x, que representa homem e que satisfaz $p(x)$.

Os conectivos $\wedge, \rightarrow$ e $\leftrightarrow$. Na linguagem da Lógica de Predicados, os conectivos $\wedge$, $\rightarrow$ e $\leftrightarrow$ são definidos a partir de $\neg$ e $\vee$, conforme é indicado na Lógica Proposicional.

6.3 Fórmulas da Lógica de Predicados

Após a definição do alfabeto, seguimos a mesma orientação do Capítulo 1. O próximo passo é definir as fórmulas. Mas na linguagem da Lógica de Predicados ocorrem vários elementos básicos necessários à definição de fórmula. Inicialmente, observe que na língua portuguesa há sentenças cuja interpretação é um valor de verdade e outras um objeto. A sentença declarativa "A capital de Minas Gerais é Belo Horizonte" é uma proposição, cuja interpretação resulta em um valor de verdade. Nesse caso, o valor de verdade é verdadeiro, pois Belo Horizonte é realmente a capital de Minas Gerais. Por outro lado, o resultado da interpretação da sentença "Capital do Brasil" não é um valor de verdade. O resultado é Brasília, que é um objeto. Em geral, na linguagem da Lógica de Predicados, as sentenças que representam objetos do domínio são os termos. Portanto, nesse sentido a sentença "Capital do Brasil" é um termo. Por outro lado, as fórmulas representam sentenças declarativas que podem ser interpretadas como verdadeiras ou falsas.

Os termos, átomos e fórmulas são definidos a seguir. A interpretação de termos, átomos e fórmulas da linguagem da Lógica de Predicados é analisada nos capítulos posteriores.

Definição 6.2 (termo) *O conjunto dos termos da linguagem da Lógica de Predicados é o menor conjunto que satisfaz as regras a seguir:*

1. *as variáveis são termos;*
2. *se* $t_1, t_2, \ldots, t_n$ *são termos e* $\breve{f}$ *é um símbolo para função n-ária, então* $\breve{f}(t_1, t_2, \ldots, t_n)$ *é um termo.*

Conforme a Definição 6.2, as variáveis são termos. Isso ocorre, pois, como veremos, os resultados das interpretações das variáveis representam objetos. Da mesma forma, o resultado da aplicação de uma função a um conjunto de termos é um termo. Isto é, a interpretação do resultado de uma função aplicada a outros objetos é um objeto. Além disso, observe que na Definição 6.2, o símbolo $\breve{f}$, com tracinho em cima, é uma metavariável que representa um símbolo para função qualquer.

Exemplo 6.1 (termos) A seguir, relacionamos algumas expressões que são termos e outras que não o são.

1. A variável x é um termo.
2. A constante a é um termo, pois é uma função zero-ária. Nesse caso, temos uma função aplicada a zero termo.
3. Se f é uma função binária, então $f(x, a)$ é um termo, pois x e a são termos. A aplicação de uma função binária f aos termos x e a é um termo. Observe que se f não for uma função binária, então $f(x, a)$ não é um termo.
4. Sejam g e f funções ternária e binária respectivamente. Nesse caso, $g(y, f(x, a), c)$ é um termo. Isso ocorre porque os argumentos da função g, em $g(y, f(x, a), c)$, são termos, e a aplicação da função g a esses termos também é um termo.
5. Como f é binária, então a concatenação de símbolos $f(y, x, z)$ não é um termo, pois f deve conter exatamente dois argumentos.

■

Nota. Se declaramos, por exemplo, que $h(x, y, z)$ é um termo, então, nesse caso, é considerado implicitamente que h é ternária.

Exemplo 6.2 (termos) Este exemplo considera, de maneira informal, funções e constantes que representam elementos da aritmética, como funções de adição, de subtração e números naturais. A rigor, os símbolos que representam tais funções não pertencem ao alfabeto da Lógica de Predicados, conforme Definição 6.1, que contém apenas símbolos para função pertencentes ao conjunto $\{f, g, h, \ldots\}$. Mas, para fins didáticos, consideremos, por um instante, que os símbolos $+$ e $-$ e as constantes $1, 2, 3, \ldots$ também pertencem ao alfabeto da Lógica de Predicados. Isso significa que $+$ e $-$, por exemplo, são iguais a símbolos funcionais binários considerados na Definição 6.1. Temos que:

1. x, 9, y, 10 são termos, pois variáveis e constantes são termos.
2. $+(4, 8)$ é um termo, pois a função $+$ aplicada a dois termos é um termo. Nesse caso, o resultado é interpretado como sendo igual a 13, isto é, o resultado é um novo termo.
3. $+(-(8, 7), 3)$ também é um termo. A adição aplicada aos termos $-(8, 7)$ e 3 é um termo. O resultado é interpretado como sendo igual a 4, que é um termo.

Observe que, neste exemplo, a notação utilizada para as funções é a prefixa. As equivalências entre notação prefixa e infixa são: $+(5, 8)$ corresponde a $(5 + 8)$, e $-(8, 7)$ corresponde a $(8 - 7)$. ■

Nem tudo são objetos na interpretação dos elementos da linguagem da Lógica de Predicados. Há, também, as sentenças cujas interpretações são valores de verdade. Elas são representadas por fórmulas declarativas que podem ser interpretadas como verdadeiras ou falsas. Os átomos, que representam expressões cuja interpretação é em valor de verdade, são definidos a seguir.

Definição 6.3 (átomo) *O conjunto dos átomos da linguagem da Lógica de Predicados é o menor conjunto que satisfaz as regras a seguir:*

1. *os símbolos proposicionais são átomos;*
2. *se $t_1, t_2, \ldots, t_n$ são termos e $\breve{p}$ é um símbolo para predicado n-ário, então, $\breve{p}(t_1, t_2, ..., t_n)$ é um átomo.*

Observe que na Definição 6.3, $\breve{p}$ é uma metavariável que representa um símbolo para predicado qualquer.

Exemplo 6.3 (átomos) Este exemplo considera um conjunto de átomos. Alguns deles são construídos a partir de termos definidos em exemplos anteriores.

1. O símbolo proposicional P é um átomo, pois é um predicado zero-ário. Temos, nesse caso, um predicado aplicado a zero termo.
2. Se p é um predicado binário, então $p(f(x, a), x)$ é um átomo. Observe que x, a e $f(x, a)$ são termos. A aplicação de p aos termos $f(x, a)$ e x é um átomo. Observe também que se p não for binário, então a expressão anterior não é um átomo.
3. $q(x, y, z)$ é um átomo. Nesse caso, consideramos implicitamente que q é ternário.
4. Os termos não são átomos. Por exemplo, $g(y, f(x, a), c), f(y, x, z)$ e $h(x, y, z)$ não são átomos.
5. Os átomos não são termos. Por exemplo, $P, p(f(x, a), x)$ e $q(x, y, z)$ não são termos.

■

Nota. Se declaramos, por exemplo, que $p(x, y, z)$ é um átomo, então, nesse caso, é considerado implicitamente que p é ternário.

Exemplo 6.4 (átomos) Este exemplo, de maneira informal, retoma a notação aritmética em que são considerados os predicados "maior que" e "diferente", representados pelos símbolos $>$ e $\neq$, respectivamente. A rigor, tais símbolos não pertencem ao alfabeto da Lógica de Predicados, conforme Definição 6.1, que contém apenas símbolos de predicado pertencente ao conjunto $\{p, q, r, \ldots.\}$. Mas, para fins didáticos, novamente, é considerado que os predicados $>$ e $\neq$ também pertencem ao alfabeto da Lógica de Predicados, sendo iguais a símbolos de predicado binários considerados na Definição 6.1.

1. A expressão aritmética $>(+(5, 8), 3)$ representa um átomo. Isso porque $+(5, 8)$ e 3 são termos. E o predicado $>$ aplicado a esses termos é um átomo. Nesse caso, o resultado da interpretação da aplicação do predicado $>$ aos termos $+(5, 8)$ e 3 é igual ao valor de verdade T.
2. A expressão aritmética $\neq(-(8, 7), 3)$ é um átomo. A desigualdade é um predicado. A aplicação de $\neq$ aos termos $-(8, 7)$ e 3 é um átomo. O resultado da interpretação deste átomo é igual ao valor de verdade T. ■

Observe que, nos Exemplos 6.1 e 6.2, os resultados das interpretações dos termos são objetos. Por outro lado, nos Exemplos 6.3 e 6.4 os resultados das interpretações dos átomos são valores de verdade. Agora, estamos prontos para definir as fórmulas da Lógica de Predicados. A construção dessas fórmulas é feita a partir da concatenação de átomos e conectivos. Entretanto, como ocorre na Lógica Proposicional, não é qualquer concatenação de símbolos que é uma fórmula.

Definição 6.4 (fórmula) *O conjunto das fórmulas da linguagem da Lógica de Predicados é o menor conjunto que satisfaz as regras a seguir:*

1. *Todo átomo é uma fórmula.*
2. *Se H é uma fórmula, então $(\neg H)$ é uma fórmula.*
3. *Se H e G são fórmulas, então $(H \lor G)$ é uma fórmula.*
4. *Se H é uma fórmula e $\breve{x}$ uma variável, então $((\forall \breve{x})H)$ e $((\exists \breve{x})H)$ são fórmulas.*

Na definição anterior, cada item define uma regra para construção de fórmulas, a partir de fórmulas mais simples. As fórmulas mais elementares, que são os átomos, são consideradas inicialmente. Em seguida, utilizando os conectivos $\neg, \lor, \forall$ e $\exists$, obtemos fórmulas mais complexas. Como o conjunto de conectivos $\neg, \lor$ é completo, então também é possível obter fórmulas com os conectivos $\land, \rightarrow, \leftrightarrow$.

Notação. De forma análoga à Lógica Proposicional, as metavariáveis A, B, C, D, E, H, com possíveis subíndices, também representam fórmulas da Lógica de Predicados. Também, de forma análoga, temos os esquemas de fórmulas, que são fórmulas formadas a partir de metavariáveis, como, por exemplo: $((\exists \breve{x})H)$. Lembre que os esquemas de fórmulas se transformam em fórmulas quando as metavariáveis são substituídas por símbolos e fórmulas do alfabeto da Lógica.

Exemplo 6.5 (construção de fórmulas)

1. Os átomos $p(x)$, R e $q(x, a, z)$ são fórmulas.
2. Como R e $p(x)$ são fórmulas, obtemos a fórmula $((\neg p(x) \lor R))$. Conforme é analisado na primeira parte do livro, essa fórmula pode ser denotada como $(p(x) \rightarrow R)$. Seguindo esse raciocínio, são construídas fórmulas utilizando os conectivos $\land, \rightarrow$ e $\leftrightarrow$.
3. Como $(p(x) \rightarrow R)$ é uma fórmula, então $((\forall x)(p(x) \rightarrow R))$ também é uma fórmula.
4. Dadas as fórmulas anteriores, então $(((\forall x)(p(x) \rightarrow R)) \rightarrow q(x, a, z))$ também é uma fórmula.

Seguindo o raciocínio apresentado neste exemplo, infinitas, mas enumeráveis, fórmulas podem ser obtidas. ■

Definição 6.5 (expressão) *Uma expressão da Lógica de Predicados é um termo ou uma fórmula.*

6.4 Correspondência entre quantificadores

Conforme é analisado na Lógica Proposicional, os conectivos $\land$,$\rightarrow$ e $\leftrightarrow$ podem ser definidos a partir dos conectivos $\neg$ e $\lor$. Analogamente, é possível definir o quantificador existencial $\exists$ a partir do quantificador universal $\forall$, e vice-versa. Isso significa que o alfabeto da Lógica de Predicados pode ser simplificado, considerando apenas os conectivos $\neg$, $\lor$,$\forall$. Para ver como ocorre essa correspondência, considere, inicialmente, a afirmação: "Existe aluna de Computação que é bonita". Além disso, de maneira informal, suponha que o universo das pessoas consideradas seja o conjunto das alunas de Computação e ninguém mais. Suponha, também, que:

$p(x)$ é verdadeiro se, e somente se, x é bonita

Nesse sentido, a afirmação pode ser representada na Lógica de Predicados pela fórmula $(\exists x)p(x)$, na qual $(\exists x)$ é o quantificador existencial "existe x", onde x é aluna de computação. Se a afirmação anterior é verdadeira, então $(\forall x)\neg p(x)$ é falsa. Observe que esta fórmula representa a afirmação: "Toda aluna de Computação é feia". Mas, se $(\forall x)\neg p(x)$ é falsa, então a sua negação: $\neg((\forall x)\neg p(x))$ é verdadeira. Isto é, é falso que toda aluna de Computação é feia, ou seja, pelo menos uma aluna é bonita. Portanto, informalmente, as afirmações a seguir são equivalentes:

1. $(\exists x)p(x)$, que é interpretada como: "existe aluna de Computação que é bonita."
2. $\neg(\forall x)\neg p(x)$, que é interpretada como: "é falso que toda aluna de Ciência da Computação é feia."

Seguindo esse raciocínio, o quantificador $\forall$ é definido a partir de $\exists$.

Definição 6.6 (correspondência entre quantificadores) *Considere uma fórmula H e uma variável $\breve{x}$. Os quantificadores existencial $\exists$ e universal $\forall$ se relacionam pelas correspondências:*

1. $((\forall \breve{x})H)$ *denota* $\neg((\exists \breve{x})(\neg H))$;
2. $((\exists \breve{x})H)$ *denota* $\neg((\forall \breve{x})(\neg H))$.

Qualquer um dos quantificadores pode ser definido a partir do outro, utilizando as correspondências da definição anterior. O quantificador existencial, por exemplo, pode ser definido a partir da correspondência entre as fórmulas $((\exists \breve{x})H)$ e $\neg((\forall \breve{x})(\neg H))$. Se for essa a correspondência utilizada, então o conectivo $\exists$ pode ser retirado do alfabeto da Lógica de Predicados, Definição 6.1, obtendo um alfabeto simplificado da Lógica de Predicados.

6.5 Símbolos de Pontuação

Analogamente às simplificações da Lógica Proposicional, os parênteses das fórmulas da Lógica de Predicados podem ser omitidos quando não há problemas sobre suas interpretações. As fórmulas também podem ser escritas utilizando várias linhas para uma melhor leitura. Na Lógica de Predicados também há uma ordem de precedência entre os conectivos que possibilita a simplificação das fórmulas. Nesse caso, a ordem de precedência dos conectivos $\neg, \vee, \wedge, \rightarrow$ e $\leftrightarrow$ é a mesma considerada na Lógica Proposicional, e os conectivos $\forall$ e $\exists$ possuem precedências equivalentes.

Definição 6.7 (ordem de precedência) *Na Lógica de Predicados, a ordem de precedência dos conectivos é a seguinte:*

1. *maior precedência:* $\neg$;
2. *precedência intermediária superior:* $\forall$, $\exists$;
3. *precedência intermediária inferior:* $\rightarrow$, $\leftrightarrow$;
4. *precedência inferior:* $\vee$, $\wedge$.

O exemplo a seguir mostra como a ordem de precedência dos conectivos é utilizada para simplificar as fórmulas, retirando símbolos de pontuação.

Exemplo 6.6 (precedência) Este exemplo considera a simplificação de uma fórmula pela eliminação de símbolos de pontuação. Considerando a ordem de precedência dos conectivos, Definição 6.7, a concatenação de símbolos

$$(\forall x)(\exists y)p(x,y) \rightarrow (\exists z)\neg q(z) \wedge r(y)$$

representa a fórmula

$$((((\forall x)((\exists y)p(x,y))) \rightarrow ((\exists z)(\neg q(z))) \wedge r(y)). \blacksquare$$

6.6 Características Sintáticas das Fórmulas

Como na Lógica Proposicional, algumas propriedades semânticas podem ser definidas para as expressões da Lógica de Predicados. Dada uma expressão, as partes que a compõem possuem denominações especiais, conforme a definição a seguir.

Definição 6.8 (subtermo, subfórmula, subexpressão) *Os elementos a seguir definem as partes de um termo ou fórmula E:*

1. *Se $E = \breve{x}$, então a variável $\breve{x}$ é um subtermo de E;*
2. *Se $E = \breve{f}(t_1, t_2, \ldots, t_n)$, então, $\breve{f}(t_1, t_2, \ldots, t_n)$ e t_i, para todo i, são subtermos de E;*
3. *Se t_1 é subtermo de t_2 e t_2 é subtermo de E, então t_1 é subtermo de E;*
4. *Se $E = (\neg H)$ então H e $(\neg H)$ são subfórmulas de E;*
5. *Se E é uma das fórmulas $(H \vee G)$, $(H \wedge G)$, $(H \rightarrow G)$ ou $(H \leftrightarrow G)$, então H, G e E são subfórmulas de E;*
6. *Se $E = ((\forall \breve{x})H)$, então H e $((\forall \breve{x})H)$ são subfórmulas de E;*
7. *Se $E = ((\exists \breve{x})H)$, então H e $((\exists \breve{x})H)$ são subfórmulas de E;*
8. *Se H_1 é subfórmula de H_2 e H_2 é subfórmula de E, então H_1 é subfórmula de E;*
9. *Todo subtermo ou subfórmula é também uma subexpressão.*

Dados um termos t e uma expressão E, então t é um subtermo de E se t é uma parte de E que é termo. Nesse caso, t pode ser igual ou diferente de E. Se for diferente, t é um subtermo próprio de E. Da mesma forma, dadas duas fórmulas G e H, então G é uma subfórmula de H se G é uma parte de H que é fórmula. Como no caso dos termos, G pode ser igual ou diferente de H. Se for diferente, G é uma subfórmula própria de H.

Exemplo 6.7 (subfórmula) Considere a fórmula:

$$H = (((\forall x)p(x)) \rightarrow (p(x)) \wedge ((\forall y)r(y))).$$

A fórmula $p(x)$ é uma subfórmula de H que ocorre duas vezes em H. As outras subfórmulas de H são: H, $(\forall x)p(x)$, $(\forall y)r(y)$, $r(y)$, e $((\forall x)p(x)) \rightarrow (p(x)$. ■

Comprimento de uma fórmula. O comprimento de uma fórmula da Lógica de Predicados é definido a seguir. Como na Lógica Proposicional, esse conceito é utilizado na demonstração de inúmeros resultados, principalmente aqueles que utilizam o princípio da indução finita.

Definição 6.9 (comprimento de uma fórmula) *Dada uma fórmula H, da Lógica de Predicados, o comprimento de H, denotado por $comp[H]$, é definido como se segue:*

1. *se H é um átomo, então $comp[H] = 1$;*
2. $comp[\neg H] = comp[H] + 1$;
3. $comp[H \lor G] = comp[H] + comp[G] + 1$;
4. $comp[H \land G] = comp[H] + comp\ [G] + 1$;
5. $comp[H \to G] = comp[H] + comp[G] + 1$;
6. $comp[H \leftrightarrow G] = comp[H] + comp[G] + 1$;
7. *se $H = (\forall \breve{x})G$, então $comp[(\forall \breve{x})G] = 1 + comp[G]$;*
8. *se $H = (\exists \breve{x})G$, então $comp[(\exists \breve{x})G] = 1 + comp[G]$.*

Para simplificar a definição do comprimento de uma fórmula, consideramos que todos os conectivos $\neg, \lor, \land, \to, \leftrightarrow, \forall$ e $\exists$ fazem parte do alfabeto. Observe que isso é um abuso de notação, pois o alfabeto pode ser simplificado considerando apenas os conectivos $\neg, \lor$ e $\forall$.

Exemplo 6.8 (comprimento de uma fórmula) Este exemplo considera duas fórmulas e seus respectivos comprimentos.

- Se $H = (p(x) \to q(y))$, então $comp[H] = 1 + comp[p(x)] + comp[q(y)] = 3$.
- Se $G = (\forall x)p(x) \leftrightarrow (\exists y)q(y)$, então $comp[G] = 1 + comp[(\forall x)p(x)] + comp[(\exists y)q(y)] = 1 + 1 + comp[p(x)] + 1 + comp[q(y)] = 5$. ■

6.7 Classificações de variáveis

As variáveis que ocorrem nas fórmulas da Lógica de Predicados possuem várias classificações. E entender essa classificação é importante para interpretar tais fórmulas. Nesta seção estudamos essa classificação e no próximo capítulo o uso dela para compreender a interpretação de fórmulas com variáveis. Nas fórmulas da Lógica de Predicados, as variáveis podem ocorrer na forma livre ou ligada. Além disso, dependendo da classificação das variáveis de uma fórmula, temos a classificação da fórmula propriamente dita. Inicialmente, para determinar se a ocorrência de uma variável é livre ou ligada, é necessário determinar primeiro os escopos dos quantificadores que ocorrem na fórmula. Mas, afinal, o que significa "escopo"? Uma semântica dessa palavra, adequada ao presente contexto, é o de abrangência. Isto é, o escopo de um quantificador significa, na Lógica, a sua abrangência ou domínio de influência. O conceito de escopo é definido a seguir.

Definição 6.10 (escopo de um quantificador) *Seja E uma fórmula da Lógica de Predicados:*

1. *Se* $(\forall \breve{x})H$ *é uma subfórmula de* E*,*
   então o escopo de $(\forall \breve{x})$ *em* E *é a subfórmula* H*;*
2. *Se* $(\exists \breve{x})H$ *é uma subfórmula de* E*,*
   então o escopo de $(\exists \breve{x})$ *em* E *é a subfórmula* H*.*

Portanto, o escopo de um quantificador é tudo aquilo que vem após ele, mas que está no seu domínio, ou abrangência de sua influência. Isso significa que dada, por exemplo, uma fórmula do tipo $((\exists x)H \wedge G)$, o escopo de $(\exists x)$ em $((\exists x)H \wedge G)$ é a subfórmula H. Observe que não temos o resto da fórmula escrito após o quantificador $(\exists x)$. Isso acontece porque a abrangência do quantificador é apenas a subfórmula H e essa abrangência não inclui G.

Exemplo 6.9 (escopo de um quantificador) Considere a fórmula a seguir:

$$E = (\forall x)(\exists y)((\forall z)p(x, y, w, z) \rightarrow (\forall y)q(z, y, x, f(z_1))).$$

Nesse caso temos:

1. o escopo do quantificador $(\forall x)$ em E é
   $(\exists y)((\forall z)p(x, y, w, z) \rightarrow (\forall y)q(z, y, x, f(z_1)))$;
2. o escopo do quantificador $(\exists y)$ em E é
   $((\forall z)p(x, y, w, z) \rightarrow (\forall y)q(z, y, x, f(z_1)))$;
3. o escopo do quantificador $(\forall z)$ em E é $p(x, y, w, z)$. Observe que, nesse caso, o escopo de $(\forall z)$ não é o resto da fórmula E, a partir de $(\forall z)$;
4. o escopo do quantificador $(\forall y)$ em E é $q(z, y, x, f(z_1))$.

O escopo de um quantificador em uma fórmula E é a subfórmula de E referida pelo quantificador. O escopo é a abrangência ou domínio do quantificador. A subfórmula $((\forall z)p(x, y, w, z) \rightarrow (\forall y)(z, y, x, f(z_1)))$ é o escopo de $(\exists y)$, pois essa é a subfórmula de E referida pelo quantificador $(\exists y)$, que está quantificando sob o seu escopo. Da mesma forma, o quantificador $(\forall z)$ está quantificando apenas sobre a subfórmula $p(x, y, w, z)$ e não sobre o resto da fórmula E, a partir de $(\forall z)$. ■

Se uma variável x ocorre no escopo de um quantificador em x, como, por exemplo $(\forall x)$, dizemos que tal ocorrência é ligada. Ou seja, ela é ligada ao quantificador $(\forall x)$. Caso contrário, se x não ocorre no escopo de um quantificador em x, dizemos que tal ocorrência é livre. Portanto, dada uma variável x em uma fórmula E, ela pode ocorrer livre ou ligada em E, conforme é definido a seguir.

Definição 6.11 (ocorrência livre e ligada) *Sejam* $\breve{x}$ *uma variável e* E *uma fórmula:*

1. *Uma ocorrência de* $\breve{x}$ *em* E *é ligada se* $\breve{x}$ *está no escopo de um quantificador* $(\forall \breve{x})$ *ou* $(\exists \breve{x})$ *em* E*;*
2. *Uma ocorrência de* $\breve{x}$ *em* E *é livre se não for ligada.*

Fique atento e observe o seguinte: as ocorrências das variáveis dos quantificadores não são livres e nem ligadas. Isto é, a variável $\breve{x}$ em $(\forall \breve{x})$, ou em $(\exists \breve{x})$, não é classificada.

Exemplo 6.10 (ocorrência livre e ligada) Considere a fórmula E do Exemplo 6.9. A fórmula E é escrita novamente indicando as variáveis livres com índices v e as ligadas com índices g.

$$E = (\forall x)(\exists y)((\forall z)p(x_g, y_g, w_v, z_g) \rightarrow (\forall y)q(z_v, y_g, x_g, f(z_{1_v}))).$$

Temos, então, as seguintes observações:

1. A variável z ocorre ligada em $p(x, y, w, z)$, pois z está no escopo de $(\forall z)$.
2. A variável z ocorre livre em $q(z, y, x, f(z_1))$, pois, nesse caso z não está no escopo de nenhum quantificador em z.
3. A ocorrência da variável y em $q(z, y, x, f(z_1))$ é uma ocorrência ligada, pois nesse caso y está no escopo de dois quantificadores $(\exists y)$ e $(\forall y)$.
4. A ocorrência da variável y em $q(z, y, x, f(z_1))$ está ligada ao quantificador mais próximo, isto é, y está ligada a $(\forall y)$.
5. As variáveis que ocorrem nos quantificadores não são livres e nem ligadas.

■

Definição 6.12 (variável livre e ligada) *Sejam $\breve{x}$ uma variável e E uma fórmula que contém $\breve{x}$:*

1. *A variável $\breve{x}$ é ligada em E, se existe pelo menos uma ocorrência ligada de $\breve{x}$ em E;*
2. *A variável $\breve{x}$ é livre em E, se existe pelo menos uma ocorrência livre de $\breve{x}$ em E.*

Exemplo 6.11 (variável livre e ligada) Considere a fórmula E do Exemplo 6.9. Nesse caso:

1. as variáveis x, y, e z são ligadas em E;
2. as variáveis w, z, e z_1 são livres em E;
3. a variável z é livre e ligada em E pois há uma ocorrência livre e uma ocorrência ligada de z em E. ■

Conforme o Exemplo 6.10, uma variável pode ocorrer livre e ligada em uma mesma fórmula. Nesse caso, como é analisado no próximo capítulo, a interpretação dessa variável é feita de forma diferente, dependendo se a ocorrência é livre ou ligada. A interpretação de uma variável que ocorre ligada é determinada pelo quantificador ao qual ela está ligada. Por outro lado, as ocorrências livres são interpretadas de forma diferente e não dependem de quantificadores. Além disso, para interpretar uma fórmula da Lógica de Predicados, além de interpretar as variáveis que ocorrem livres, é necessário interpretar os símbolos de predicados e de funções que ocorrem na fórmula. Nesse sentido, definimos como símbolos livres de uma fórmula, os símbolos que não estão ligados a quantificadores. E, para interpretar uma fórmula, é necessário interpretar, de forma própria, esses símbolos livres. Ou seja, para interpretar uma fórmula, é necessário, antes de qualquer coisa, interpretar as variáveis que ocorrem livres, os símbolos de predicados e os de funções.

Definição 6.13 (símbolos livres) *Dada uma fórmula E, os seus símbolos livres são as variáveis que ocorrem livres em E, os símbolos de função e os símbolos de predicado.*

Os símbolos livres de uma fórmula são todos os seus símbolos, exceto as variáveis ligadas, as variáveis dos quantificadores, os conectivos, e os símbolos de pontuação.

Exemplo 6.12 (símbolos livres) O conjunto $\{w, z, z_1, p, q, f\}$ é formado pelos símbolos livres da fórmula E, do Exemplo 6.9. Observe que as variáveis que ocorrem apenas na forma ligada não são símbolos livres. ■

A partir da classificação das variáveis de uma fórmula, temos a classificação da fórmula que as contém.

Definição 6.14 (fórmula fechada) *Uma fórmula é fechada quando não possui variáveis livres.*

Exemplo 6.13 (fórmula fechada) A fórmula E do Exemplo 6.9 não é fechada, pois contém variáveis livres. Considere as fórmulas a seguir:

1. Adicione o quantificador $(\forall z_1)$ no início da fórmula E. O resultado, indicado por E_1, não é uma fórmula fechada, pois contém as variáveis livres w e x.

$$E_1 = (\forall z_1)(\forall x)(\exists y)((\forall x)p(x, y, w, z) \rightarrow (\exists y)q(z, y, x, f(z_1)))$$

2. Adicione o quantificador $(\forall x)$ no início da fórmula E_1. O resultado, indicado por E_2, não é uma fórmula fechada, pois contém as variável livre w.

$$E_2 = (\forall x)(\exists y)((\forall x)p(x, y, w, z) \rightarrow (\exists y)q(z, y, x, f(z_1)))$$

3. Adicione o quantificador $(\forall w)$ no início da fórmula E_2. O resultado, indicado por E_3, é uma fórmula fechada, pois não contém variáveis livres.

$$E_3 = (\forall w)(\forall x)(\exists y)((\forall x)p(x, y, w, z) \rightarrow (\exists y)q(z, y, x, f(z_1)))$$

   Nesse caso, as ocorrências livres de w, z e z_1 na fórmula E se tornam ocorrências ligadas em E_3 devido à adição de quantificadores universais.

■

No exemplo anterior, Exemplo 6.13, é dada uma fórmula E, que não é fechada. A partir dela, pela adição de quantificadores universais, obtemos uma fórmula fechada. É como fazer um "fecho" da fórmula inicial. Assim, dada uma fórmula H da Lógica de Predicados, podemos obter, pela adição de quantificadores no início da fórmula H, dois tipos de fórmulas fechadas: o fecho universal e o existencial de H.

Definição 6.15 (fecho de uma fórmula) *Seja H uma fórmula da Lógica de Predicados e*
$\{\breve{x}_1, ..., \breve{x}_n\}$ o conjunto das variáveis livres em H:

1. *O fecho universal de H, indicado por $(\forall *)H$,*
   é dado pela fórmula $(\forall \breve{x}_1)...(\forall \breve{x}_n)H$;
2. *O fecho existencial de H,indicado por $(\exists *)H$,*
   é dado pela fórmula $(\exists \breve{x}_1)...(\exists \breve{x}_n)H$.

Exemplo 6.14 (fecho de uma fórmula) Considere as fórmulas.

1. A fórmula E_3, do Exemplo 6.13, é o fecho universal da fórmula E. Logo, $E_3 = (\forall *)E$.
2. O fecho existencial de E é dado pela fórmula:

$$E_4 = (\exists w)(\exists z)(\exists z_1)(\forall x)(\exists y)((\forall x)p(x, y, w, z) \rightarrow (\forall y)q(z, y, x, f(z_1)))$$

   A fórmula E_4 é obtida a partir da fórmula E, adicionando os quantificadores existenciais nas suas variáveis livres. Logo, $E_4 = (\exists *)E$.
3. Considere a fórmula fechada $H = (\exists x)p(x)$. Como H não possui variáveis livres, então o seu fecho universal, ou existencial, é igual a H. Isto é, nesse caso, $(\forall *)H = (\exists *)H = H$.

■

6.8 Formas normais

Como na Lógica Proposicional, dada uma fórmula H, da Lógica de Predicados, existe uma fórmula G, equivalente a H, que está na forma normal. Tais fórmulas são definidas a partir dos literais.

Definição 6.16 (literal na Lógica de Predicados) *Um literal, na Lógica de Predicados, é um átomo ou a negação de um átomo. Um átomo é um literal positivo. A negação de um átomo é um literal negativo.*

Lembre se de que, na Lógica Proposicional, um literal é um símbolo proposicional, ou sua negação. Nesse sentido, os símbolos proposicionais da Lógica Proposicional correspondem aos átomos na Lógica de Predicados.

Exemplo 6.15 (literal) As fórmulas a seguir são literais:

1. Como P é um átomo, então P e $\neg P$ são literais;
2. Como $p(f(x,a),x)$ é um átomo, $\neg p(f(x,a),x)$ é um literal;
3. $q(x,y,z)$ e $\neg q(x,y,z)$ são literais.

■

As formas normais na Lógica de Predicados são definidas de forma análoga às formas normais da Lógica Proposicional.

Definição 6.17 (forma normal) *Seja H uma fórmula da Lógica de Predicados.*

1. *H está na forma normal conjuntiva, fnc, se é uma conjunção de disjunções de literais.*
2. *H está na forma normal disjuntiva, fnd, se é uma disjunção de conjunções de literais.*

Observe que, mesmo havendo quantificadores na Lógica de Predicados, fórmulas na fnc e na fnd não os consideram. As formas normais são conjunções ou disjunções de literais, que, por sua vez, são formadas a partir de átomos. Mas, afinal, que aplicação tem as formas normais na Lógica de Predicados? É claro que tem muitas e apresentamos, a seguir, uma delas. Em Programação em Lógica, o elemento fundamental da sintaxe da linguagem é a cláusula de programa, que é uma fórmula na forma normal disjuntiva.

Definição 6.18 (cláusula de programa) *Uma cláusula de programa, na Lógica de Predicados, é uma cláusula do tipo $C = (\forall *)G$, onde G está na forma normal disjuntiva e contém exatamente um literal positivo.*

Exemplo 6.16 (cláusula de programa) A fórmula C_1 a seguir é uma cláusula de programa. As outras fórmulas não são cláusulas de programa, pois não contêm exatamente um literal positivo.

$$\begin{aligned}
C_1 &= (\forall x)(\forall y)(p(x) \lor \neg q(x) \lor \neg r(x,y)) \\
&= (\forall *)((q(x) \land r(x,y)) \to p(x)), \\
C_2 &= (\forall x)(\forall y)(\neg p(x) \lor \neg r(x,y)) \\
&= (\forall *)(\neg p(x) \lor \neg r(x,y)), \\
C_3 &= (\forall y)(\forall z)(\neg p(y) \lor q(z) \lor r(z)) \\
&= (\forall *)(\neg p(y) \lor q(z) \lor r(z)).
\end{aligned}$$

Observe que a fórmula C_1 contém um literal positivo, sendo, portanto, uma cláusula. Além disso, ela pode ser apresentada em duas notações diferentes equivalentes, como indicado pelas equivalências a seguir:

$$\begin{aligned}
C_1 &= (\forall *)(p(x) \lor \neg q(x) \lor \neg r(x,y)) \\
&\Leftrightarrow (\forall *)(p(x) \lor \neg(q(x) \land r(x,y))) \\
&\Leftrightarrow (\forall *)(\neg(q(x) \land r(x,y)) \lor p(x)) \\
&\Leftrightarrow (\forall *)((q(x) \land r(x,y)) \to p(x)).
\end{aligned}$$

Portanto, C_1 pode ser denotada por:
$C_1 \quad = (\forall *)((q(x) \wedge r(x,y)) \rightarrow p(x))$.
Como toda cláusula é um fecho universal, o quantificador $(\forall *)$ é omitido, ficando implícito. Nesse caso, C_1 é, ainda, denotada por:
$C_1 \quad = (q(x) \wedge r(x,y)) \rightarrow p(x)$.
E em Programação em Lógica, C_1 é denotada por:
$C_1 \quad = p(x) \leftarrow q(x), r(x,y)$,
onde o conectivo $\wedge$ é representado por vírgula e a implicação é invertida. ■

Notação. Uma cláusula de programa:

$$(\forall *)(B \vee \neg A_1 \vee \ldots \vee \neg A_n)$$

é denotada por:

$$B \leftarrow A_1, \ldots, A_n.$$

Nesse caso, B é a cabeça da cláusula e $A_1, \ldots, A_n$ é a cauda.

Definição 6.19 (cláusula unitária) *Uma cláusula de programa unitária é uma cláusula do tipo $B \leftarrow$. Nesse caso, a cláusula não contém literais negativos.*

Uma cláusula unitária é também denominada como fato.

Definição 6.20 (programa lógico) *Um programa lógico é um conjunto de cláusulas de programa.*

Portanto, o ato de programar em Programação em Lógica, corresponde, mais ou menos, a determinar um conjunto de cláusulas que representam aquilo que é o objeto da programação. A seguir apresentamos um programa lógico e no próximo capítulo analisamos a semântica desse programa.

Exemplo 6.17 (programa lógico) O conjunto de cláusulas de programa a seguir forma um programa lógico.

1. $p(a,b) \ \leftarrow$

2. $p(f(x),y) \ \leftarrow \ p(x,z), q(g(f(x),z),y)$

Nesse programa lógico temos uma cláusula unitária e outra cláusula que não é unitária. É claro que não dá para entender nada a respeito do seu significado. Isso ocorre por estarmos apresentando apenas a sintaxe e ainda falta a semântica, que estabelece o significado dos símbolos envolvidos. Consideramos essa semântica no próximo capítulo, onde analisamos o significado desse programa. ■

6.9 Exercícios

1. Responda, justificando sua resposta, às seguintes questões:
   (a) Todo termo é uma fórmula?
   (b) Todo literal é uma expressão?
   (c) Toda expressão é um literal?
2. Seja E a fórmula a seguir:
   $E = (\forall w)(\forall z)(\forall z_1)(\forall x)(\exists y)((\forall x)p(x, y, w, z) \to (\forall y)q(z, y, x, z1))$
   (a) Determine todas as subfórmulas de E.
   (b) Determine todas as subexpressões de E.
3. Reescreva os parênteses das fórmulas a seguir.
   (a) $(\forall x)p(x) \lor \neg(\forall x)q(x) \to r(y)$
   (b) $(\exists z)p(z) \leftrightarrow \neg q(y)$
   (c) $(\exists x)(\forall x)\neg p(x)$
4. Elimine o máximo de símbolos de pontuação das fórmulas a seguir, mantendo a fórmula original.
   (a) $((\forall x)(p(x) \to q(x)))$
   (b) $(((\forall x)p(x) \to q(y)) \to ((\forall z)q(z)))$
   (c) $(((\exists y)((\forall z)p(z)) \land r(z)) \lor ((\forall x)q(x)))$
5. Seja E uma fórmula e $\breve{x}$ uma variável. Responda justificando sua resposta:
   (a) É possível haver ocorrências de $\breve{x}$ em E livres e ligadas?
   (b) É possível a variável $\breve{x}$ ser livre e ligada em E ao mesmo tempo?
6. Dê exemplo de uma fórmula H na qual uma variável x ocorre tanto livre quanto ligada.
7. Responda:
   (a) Existe fórmula sem símbolo livre?
   (b) Quais são os símbolos livres de uma fórmula fechada?
   (c) Toda variável é símbolo livre?
8. Determine o fecho universal e existencial das fórmulas a seguir:
   (a) $F_1 = p(x, y)b)$
   (b) $F_2 = (\exists x)p(x, y)$
   (c) $F_3 = (\exists y)(\exists x)p(x, y)$

9. Dê exemplos:

   (a) de uma fórmula cujo fecho existencial contém apenas quantificadores universais;

   (b) de uma fórmula cujo fecho universal ou existencial não contém quantificadores;

   (c) de uma fórmula cujo fecho universal ou existencial é igual a ela própria.

CAPÍTULO 7

A SEMÂNTICA DA LÓGICA DE PREDICADOS

7.1 Introdução

Após a definição da linguagem da Lógica de Predicados, ou seja, de sua sintaxe, o próximo passo é a análise da semântica. De forma análoga àquela considerada na Lógica Proposicional, é definida, a seguir, a semântica das fórmulas e sua relação com a sintaxe, associando significados aos símbolos sintáticos. Mas, como a Lógica de Predicados contém quantificadores, variáveis, funções e predicados, as definições das estruturas de interpretação são mais elaboradas. Por isso, representar e interpretar fórmulas da Lógica de Predicados requer atenção a detalhes que não estão presentes nas fórmulas da Lógica Proposicional. Além disso, devemos notar que não existe uma padronização da definição da semântica na Lógica de Predicados. Frequentemente, é definida uma estrutura na qual as variáveis são interpretadas separadamente dos outros objetos que compõem as fórmulas, como pode ser visto em [Enderton, 1972] e [Shoenfield, 1967]. Esse enfoque é diferente do que estamos considerando neste livro, em que os objetos que compõem as fórmulas são interpretados pela mesma estrutura, denominada interpretação. O enfoque que estamos considerando pode ser encontrado, por exemplo, em [Manna] e [Mendelson] Entretanto, mesmo não havendo padronização das definições, todas são equivalentes e têm como fundamento as formalizações de Tarski, que tratam de satisfatibilidade e verdade. A seguir, analisamos por partes a interpretação das fórmulas da Lógica de Predicados. Inicialmente, consideramos uma abordagem informal e em seguida as definições formais. Além disso, começamos pelas estruturas mais simples, que são os termos e átomos. Depois, são analisadas as fórmulas que contêm quantificadores universais e existenciais. Nesse contexto, a visão inicial informal é importante, pois é a partir dela que introduzimos as definições formais.

7.2 Interpretações informais

Considere inicialmente a proposição "Zé é inteligente". Essa proposição pode ser representada na Lógica de Predicados por um símbolo proposicional P. Lembre-se de que os símbolos proposicionais estão presentes no alfabeto da Lógica de Predicados. Eles são os símbolos de predicado que não possuem argumento. Portanto, podemos definir, na Lógica de Predicados, a representação: $P =$ "Zé é inteligente". Nesse caso, a proposição diz algo somente a respeito de Zé e a ninguém mais. Isso simplifica a representação, pois o universo do discurso é constituído apenas de um objeto, o Zé. Por outro lado, na Lógica de Predicados há também os predicados com um ou mais argumentos. E nesse caso, as representações que utilizam tais predicados são obtidas utilizando uma análise com mais detalhes. Isso, porque, em geral, o universo do discurso a que referimos, nesses casos, pode ter infinitos componentes.

Exemplo 7.1 (interpretação informal de um predicado) Considere, de maneira informal, o predicado q e uma interpretação I tal que:

$q(x)$ é interpretado como verdadeiro se, e somente se, x é interpretada como um número par.

Escrito de outra forma:

$I[q(x)] = T$, se, e somente se, $I[x]$ é número par.

Nesse caso, $q(x)$ é um átomo dado por um predicado que identifica a categoria dos números pares. Mas, para que $q(x)$ possa ser interpretado, é necessário estabelecer o domínio do discurso da interpretação I. Ou seja, suponha que I é uma interpretação cujo domínio é o conjunto dos números naturais $\mathbb{N}$. Observe que a interpretação deve falar sobre números, pois não haveria sentido falar, por exemplo, em pessoas pares. Considere, agora, as constantes a e b com as respectivas interpretações, $I[a] = 4$ e $I[b] = 5$. Nesse caso, as constantes são interpretadas como números do domínio da interpretação I, que é o conjunto dos números naturais $\mathbb{N}$. Logo, temos que $I[q(a)] = T$, pois $I[a] = 4$. Também, temos $I[q(b)] = F$, pois $I[b] = 5$. Outro fato a ser observado é o seguinte: podemos combinar átomos com conetivos. E nesse caso, interpretar os resultados. Por exemplo, temos as interpretações das fórmulas: $I[q(a) \vee q(b)] = T$, $I[q(a) \wedge q(b)] = F$, e $I[q(a) \rightarrow q(b)] = F$. ■

Exemplo 7.2 (interpretação informal de um predicado) Considere I uma interpretação sobre o conjunto dos alunos de Computação. Isto é, o domínio ou universo de I é o conjunto dos alunos de Computação. Isso significa que I interpreta fatos sobre alunos de Computação. Considere, também, que segundo I:

$q(x)$ é interpretado como verdadeiro se, e somente se, x é interpretada como um aluno que é inteligente.

Escrito de outra forma:

$I[q(x)] = T$, se, e somente se, $I[x]$ é aluno que é inteligente.

Neste exemplo, o domínio de I é diferente daquele considerado no Exemplo 7.1. Dada mudança no domínio de I, não haveria sentido interpretar o predicado q como anteriormente. Pois como o novo domínio é um conjunto de pessoas, não haveria sentido interpretar q como um predicado que define a categoria dos números pares. Então, da mesma forma, as constantes a e b não podem mais ser interpretadas como números, mas, sim, como alunos de Computação. Suponha, então, que: $I[a] =$ Zé e $I[b] =$ Dinalva. Nesse caso, se Zé é um aluno que foi aprovado em Lógica com nota 95 e Dinalva foi reprovada com nota 15, então $I[q(a)] = T$, pois Zé é inteligente, e $I[q(b)] = F$, pois Dinalva não é inteligente. Logo, como antes, $I[q(a) \lor q(b)] = T$, $I[q(a) \land q(b)] = F$, e $I[q(a) \to q(b)] = F$. ■

Dessa análise, temos algumas conclusões preliminares:

1. Para interpretar um átomo, como $p(x)$, devemos definir o domínio da interpretação I. Nesse caso, a interpretação não é tão simples como na Lógica Proposicional, caso em que não é necessário definir o domínio da interpretação.
2. O resultado da interpretação de um átomo é T, ou F.
3. O resultado da interpretação de uma constante é um elemento do domínio da interpretação.
4. Os átomos podem ser combinados utilizando conectivos e a interpretação das fórmulas obtidas segue as ideias da Lógica Proposicional.
5. O símbolo p é um objeto sintático que pertence ao alfabeto da Lógica de Predicados. Por outro lado, $I[p(x)]$ é um objeto semântico que pertence ao conjunto $\{T, F\}$.

Se a interpretação dos predicados requer a definição do domínio da interpretação, então como deve ser o caso das funções? De forma análoga, devemos também definir o domínio da interpretação.

Exemplo 7.3 (interpretação informal de uma função) Considere uma interpretação I sobre os números naturais $\mathbb{N}$. Isto é, o universo do discurso de I é o conjunto $\mathbb{N}$. Seja a uma constante tal que, $I[a] = 0$. Isto é, a constante a é interpretada como o número zero. Em seguida, seja f uma função interpretada segundo I, informalmente, como se segue:

$f(x)$ é interpretado como o número sucessor do número x.

Escrito de maneira mais formal:

$I[f(x)]$ é igual ao número sucessor de $I[x]$.

Nesse caso, os termos $f(a), f(f(a)), f(f(f(a)))$ e $f(f(f(f(a))))$ são interpretados como: $I[f(a)] = 1$, $I[f(f(a))] = 2$, $I[f(f(f(a)))] = 3$, $I[f(f(f(f(a))))] = 4$ e assim por diante. Portanto, o resultado da interpretação de um termo, que é o resultado de uma função, é um elemento do domínio da interpretação. Por isso, dado que essa interpretação não é um valor de verdade, não é possível combinar os termos com os conectivos. Isto é, não há sentido escrever, por exemplo, $(f(a) \lor f(f(a)))$, $(f(a) \land f(f(a)))$ e muito menos, $(f(a) \rightarrow f(f(a)))$. Isso, porque não há como interpretar tais sequências de símbolos. Por exemplo, o que significa $I[(f(a) \lor f(f(a)))]$, ou seja, o que significa "1 ou 2"? Não há sentido algum. E essa é a razão para não se considerar, como fórmulas, as sequências de símbolos $(f(a) \lor f(f(a)))$, $(f(a) \land f(f(a)))$ e $(f(a) \rightarrow f(f(a)))$. Fato que está de acordo com a definição de fórmula, Definição 6.4. ■

Exemplo 7.4 (interpretação informal de uma função) No Exemplo 7.3 o domínio de I é o conjunto dos números naturais $\mathbb{N}$. Mas, pode ser diferente. Considere uma interpretação I sobre o conjunto das pessoas. E seja a uma constante tal que $I[a] =$ Zé. Isto é, a constante a é interpretada como sendo a pessoa Zé. Nesse caso, considere que o símbolo f seja interpretado, segundo I, informalmente, como se segue:

$f(x)$ é interpretado como sendo o pai da pessoa x.

Ou seja,

$I[f(x)]$ é igual ao pai de $I[x]$.

Portanto, $I[f(a)] =$ pai de Zé, $I[f(f(a))] =$ pai do pai de Zé, $I[f(f(f(a)))] =$ pai do pai do pai de Zé, $I[f(f(f(f(a))))] =$ pai do pai do pai do pai de Zé e assim por diante. Analogamente ao Exemplo 7.3, o resultado da interpretação de um termo, que é o resultado de uma função, é um elemento do domínio da interpretação. Por isso, de novo, não há sentido em escrever, por exemplo, $(f(a) \lor f(f(a)))$, $(f(a) \land f(f(a)))$ e muito menos, $(f(a) \rightarrow f(f(a)))$. Isso porque não há como atribuir um valor de verdade à sentença: "pai de Zé, ou pai do pai de Zé". ■

Dessa análise, temos mais algumas conclusões preliminares.

1. Para interpretar uma função, como $f(x)$, devemos definir o domínio da interpretação I.
2. O resultado da interpretação de um termo é um elemento do domínio, ou universo da interpretação.
3. Os termos não podem ser combinados utilizando conectivos, como ocorre com os átomos.
4. O símbolo f é um objeto sintático que pertence ao alfabeto da Lógica de Predicados. Por outro lado, $I[f(x)]$ é um objeto semântico que pertence ao domínio da interpretação I.

A interpretação de um símbolo para função f, em geral denotada por $I[f]$, é uma função semântica $I[f]$, cujo domínio e contradomínio é o conjunto que define o universo da interpretação. Isto é:

$$I[f] : \text{domínio de } I \longrightarrow \text{domínio de } I.$$

Isso parece confuso, pois a palavra "domínio" ocorre várias vezes na descrição da função semântica $I[f]$. Analisamos, então, com mais cuidado os diferentes significados dessa palavra. Suponha o caso da função do Exemplo 7.3. Nesse caso, a interpretação tem como domínio o conjunto dos números naturais $\mathbb{N}$. Por isso, $I[a]$, que é igual a 0, é um elemento do domínio de I, ou seja, $I[a] \in \mathbb{N}$.

Por outro lado, a função semântica $I[f]$ tem como domínio e contradomínio, enquanto função, o domínio de I. Isto é, $I[f]$ é uma função que tem como domínio e contradomínio o conjunto $\mathbb{N}$. Utilizando a notação matemática de função, temos, $I[f] : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$. A interpretação de um símbolo de predicado p segue passos análogos à interpretação de um símbolo para função. Mas, no caso de um predicado, $I[p]$ é uma função semântica que tem como domínio aquele da interpretação I e como contradomínio o conjunto $\{T, F\}$. Suponha o caso do predicado do Exemplo 7.1. Nesse caso, a interpretação tem como domínio o conjunto dos números naturais $\mathbb{N}$. Logo, nesse caso, a função semântica $I[p]$ tem como domínio o conjunto $\mathbb{N}$ e como contradomínio o conjunto $\{T, F\}$. Assim, no caso da função semântica $I[p]$, temos:

$$I[p] : \text{ domínio de } I \to \{T, F\}.$$

Isto é, $I[p]$ é uma função cujo domínio é o domínio, universo da interpretação I e contradomínio é o conjunto $\{T, F\}$.

$$I[p] : \mathbb{N} \to \{T, F\}.$$

Observe, nesse caso, uma diferença importante entre $I[p]$ e $I[f]$. O contradomínio de $I[p]$ é o conjunto $\{T, F\}$ e o contradomínio de $I[f]$ é o conjunto $\mathbb{N}$. Essa é uma diferença sutil, mas importante, e que faz diferença quando programamos, por exemplo, em Programação em Lógica.

Exemplo 7.5 (interpretação incorreta) Considere uma interpretação I sobre os números naturais $\mathbb{N}$. E seja a uma constante, tal que $I[a] = 25$. Seja, também, f uma função interpretada, informalmente, segundo I, como se segue. $I[f]$ é igual à função "raiz quadrada". Nesse caso, temos $I[f(a)] = 5$, pois a função semântica $I[f]$ calcula a raiz quadrada da interpretação de a. Entretanto, temos um problema aqui. Suponha que a constante b seja interpretada como o número 20. Isto é, $I[b] = 20$. Daí concluímos que $I[f(a)] = \sqrt{20}$. Mas isso está incorreto, pois, necessariamente, devemos ter $I[f] : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$. E, como sabemos, desde o ensino fundamental, $\sqrt{20}$ não é um número natural, isto é, $\sqrt{20} \notin \mathbb{N}$. Ou seja, nesse caso, $I[f(a)]$ está fora do contradomínio de $I[f]$, o que é incorreto. ■

Exemplo 7.6 (interpretação incorreta) Como no Exemplo 7.5, constantes e predicados também podem ser interpretados de forma incorreta, dependendo do domínio da interpretação. Considere uma interpretação I sobre os números naturais $\mathbb{N}$. E seja a uma constante, tal que $I[a] = $ Zé. Essa interpretação da constante a está incorreta, pois I fala de números, seu domínio é igual a $\mathbb{N}$. Logo, não faz sentido interpretar a constante a como sendo a pessoa Zé. Considere, agora, o predicado p interpretado, informalmente, segundo I, como se segue.

$I[p(x)] = T$, se, e somente se, $I[x]$ é um número negativo.

O predicado p não pode ser interpretado, segundo I, dessa forma. Isso, porque o domínio de I é o conjunto $\mathbb{N}$. E se p é interpretado da forma acima, tal predicado identifica números negativos, ou não. Mas, como já sabemos, desde a escola fundamental, há números negativos que não são números naturais. ■

Portanto, na definição de uma interpretação, na Lógica de Predicados, é necessário observar a coerência entre o domínio e a interpretação dos objetos sintáticos.

7.3 Interpretação de átomos e termos

As fórmulas da Lógica de Predicados contêm símbolos que não ocorrem nas fórmulas da Lógica Proposicional. Assim, as interpretações dessas fórmulas são obtidas de uma forma diferente daquela considerada na Lógica Proposicional. Inicialmente, são consideradas as definições de interpretação de termos e átomos. Depois, é considerada a interpretação das fórmulas da Lógica de Predicados. É importante observar que não há uma forma única de apresentar a semântica da Lógica de Predicados [Andrews], [Barwise], [Costa], [Enderton], [Mendelson], [Mortari], [Dalen], [Manna], [Manna] e [Shoenfield].

Notação. No que se segue, para simplificar a notação, consideramos as seguintes denotações: $\breve{x}_I$ denota $I[x]$, $\breve{f}_I$ denota $I[\breve{f}]$, $\breve{p}_I$ denota $I[\breve{p}]$ etc. Portanto, $\breve{x}_I$ denota o resultado da interpretação de $\breve{x}$ segundo a interpretação I. Da mesma forma, $\breve{f}_I$ denota uma função semântica que é o resultado da interpretação de $\breve{f}$ segundo a interpretação I. E $\breve{p}_I$ denota o resultado da interpretação de $\breve{p}$ segundo a interpretação I. Observe que $\breve{x}_I, \breve{f}_I$ e $\breve{p}_I$ são os objetos semânticos que correspondem aos símbolos sintáticos $\breve{x}, \breve{f}$ e $\breve{p}$. Nesse sentido, é importante salientar que tais símbolos são diferentes. Ou seja, $\breve{x}_I \neq x$, $\breve{f}_I \neq \breve{f}$ e $\breve{p}_I \neq \breve{p}$.

Definição 7.1 (interpretação de termos e átomos) *Seja U um conjunto não vazio. Uma interpretação I sobre o domínio, ou universo, U, na lógica de predicados, é uma função cujo domínio é o conjunto dos símbolos de função, de predicados e das expressões da Lógica de Predicados. A interpretação dos termos e átomos, segundo I, é dada por:*

1. *Para toda variável $\breve{x}$, $\breve{x}_I$ é um elemento semântico que pertence ao domínio U;*
2. *Para todo símbolo proposicional $\breve{P}$, $\breve{P}_I$ é um elemento semântico que pertence ao conjunto $\{T, F\}$;*
3. *Para todo símbolo de função $\breve{f}$, n-ário, $\breve{f}_I$ é uma função semântica n-ária em U, isto é, $\breve{f}_I : U^n \to U$;*
4. *Para todo símbolo de predicado $\breve{p}$, n-ário, $\breve{p}_I$ é um predicado semântico n-ário em U, isto é, $\breve{p}_I : U^n \to \{T, F\}$;*

5. *Dado um termo* $\breve{f}(t_1, ..., t_n)$, *então* $I[\breve{f}(t_1, ..., t_n)] = \breve{f}_I(t_{1_I}, ..., t_{n_I})$;
6. *Dado um átomo* $\breve{p}(t_1, ..., t_n)$, *então* $I[\breve{p}(t_1, ..., t_n)] = p_I(t_{1_I}, ..., t_{n_I})$.

Notação. U^n denota o produto cartesiano $U \times U \times \ldots \times U \times U$

Seguem algumas observações a respeito da Definição 7.1.

O domínio da interpretação. Observe que a palavra "domínio" é utilizada na definição 7.1, com dois significados diferentes. Por um lado, temos uma interpretação sobre um domínio U. Nesse caso, "domínio" representa o universo semântico da interpretação. Por outro, o domínio da função I é o conjunto dos símbolos de função, de predicado e expressões. Nesse caso, "domínio" se refere ao conceito matemático relativo às funções.[1] Portanto, o domínio de uma interpretação é um conjunto não vazio, que contém os resultados das interpretações dos termos. Além disso, a Lógica Clássica estabelece, como fundamento, que o domínio da interpretação deve ser não vazio, porque, nesse contexto, não se admite que os resultados das interpretações dos elementos da linguagem estejam em um domínio vazio. I tem como domínio, no sentido lógico, um conjunto não vazio no qual ocorrem os resultados das interpretações dos termos.

Definição redundante. Como sabemos, toda variável é um termo. Logo, o item 1, da Definição 7.1, é um caso particular do item 5. Para isso, basta considerar, no item 5, o caso no qual f é a função identidade. De forma análoga, o item 2 é um caso particular do item 6. Basta considerar, no item 6, o caso no qual p é um predicado zero-ário. Mantemos a redundância na Definição 7.1 apenas para fins didáticos.

A interpretação I é uma função total. A interpretação I é uma função total que tem como domínio, no sentido matemático, todos os símbolos de função, de predicado e expressões da Lógica de Predicados. Isso significa que I interpreta todos esses objetos, ou seja, tem opinião formada sobre todos eles. Em outras palavras, na Lógica clássica não temos objeto com interpretação indeterminada. Todos os elementos da linguagem são interpretados. Isto é, a interpretação na Lógica de Predicados é uma extensão do mesmo conceito na Lógica Proposicional. Analogamente, na Lógica de Predicados, uma interpretação I é uma função total definida em todos os símbolos do seu domínio. Logo, dada uma função n-ária qualquer $\breve{f}$, então necessariamente existe $\breve{f}_I$ tal que $I[\breve{f}] = \breve{f}_I$, onde $\breve{f}_I$ é uma função de U^n em U. Da mesma forma, dado um predicado n-ário qualquer $\breve{p}$, então necessariamente existe $\breve{p}_I$ tal que $I[\breve{p}] = \breve{p}_I$, onde $\breve{p}_I$ é uma função de U^n em $\{T, F\}$. Portanto, a interpretação I possui uma opinião formada sobre todos os símbolos de função e de predicado da linguagem da Lógica de Predicados.[2]

Interpretação de constantes. Como sabemos, uma função zero-ária denota uma constante. Nesse caso, dada uma interpretação sobre U, para toda função zero-ária $\breve{b}$, se $I[\breve{b}] = \breve{b}_I$, então $\breve{b}_I \in U$ e $\breve{b}_I$ é uma constante. A constante $\breve{b}_I$ é uma função zero-ária em U que corresponde à função zero-ária $\breve{b}$ da sintaxe da linguagem.

[1] No contexto da Lógica é comum ter palavras com vários significados ou interpretações.

[2] Em lógicas não clássicas isso nem sempre ocorre. É possível ter $I[g]$ indefinido.

Interpretação de variáveis. A interpretação das variáveis tem como resultado algum elemento do domínio da interpretação. Dada uma interpretação sobre U, se $I[x] = \breve{x}_I$, então $\breve{x}_I \in U$. A exigência de que $\breve{b}_I \in U$ e $\breve{x}_I \in U$ é um princípio da Lógica Clássica e, portanto, válido na Lógica de Predicados. Por esse princípio, constantes e variáveis livres são necessariamente interpretadas como elementos do domínio da interpretação.

Interpretação de símbolos proposicionais. A interpretação de um predicado zero-ário é igual à interpretação de um símbolo proposicional. Para todo símbolo proposicional $\breve{P}$, se $I[\breve{P}] = \breve{P}_I$, então $\breve{P}_I \in \{T, F\}$. Observe que o caso dos símbolos proposicionais se reduz ao que ocorre na Lógica Proposicional.

Diferença entre função e predicado. Observe a diferença entre as interpretações de funções e predicados. Dada uma interpretação sobre U, se $\breve{f}$ é um símbolo para função n-ário, então:

$$\breve{f}_I : U^n \to U.$$

Nesse caso, o contradomínio de $\breve{f}_I$ é igual a U. Por outro lado, se $\breve{p}$ é um símbolo para predicado n-ário:

$$\breve{p}_I : U^n \to \{T, F\}.$$

Nesse caso, o contradomínio de $\breve{p}_I$ é igual a $\{T, F\}$. A diferença entre os contradomínios de $\breve{f}_I$ e $\breve{p}_I$ é um dos elementos que caracteriza funções e predicados.

Exemplo 7.7 (domínio da interpretação) Seja I uma interpretação sobre os naturais, tal que $I[a] = 25$, $I[b] = 5$ e $I[f(x, y)] = (x_I \div y_I)$. Observe que I interpreta a constante a como 25, a constante b como 5 e f como a função divisão. Dessa forma, $f(a, b)$ é interpretada como 5, isto é, $I[f(a, b)] = 5$. Conforme a Definição 7.1, devemos ter $I[f] = f_I$, onde:

$$f_I : \mathbb{N}^2 \to \mathbb{N}.$$

Entretanto, se $I[c] = 0$, então $I[f(x, c)]$ não está definida. Logo, o domínio de f_I é igual a $\mathbb{N} \times \mathbb{N}^*$. Além disso, para $(x, y) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N}^*$, temos $f(x, y) \in \mathbb{Q}$, onde $\mathbb{Q}$ é o conjunto dos racionais. Portanto, nesse caso:

$$f_I : \mathbb{N} \times \mathbb{N}^+ \to \mathbb{Q},$$

que é diferente da forma exigida pela definição de interpretação, dada por:

$$f_I : \mathbb{N}^2 \to \mathbb{N}.$$

Portanto, se o domínio de I é igual ao conjunto dos números naturais, não podemos definir $I[f]$ como a função divisão. ■

7.4 Interpretação de fórmulas com estruturas iniciais simples

A seção anterior definiu a interpretação de termos e átomos. A seguir, damos mais um passo. São consideradas as regras semânticas básicas, que definem a interpretação de fórmulas que não se iniciam com quantificadores. Denominamos tais fórmulas como aquelas que possuem estruturas iniciais simples.

Definição 7.2 (fórmula com estrutura inicial simples) *Uma fórmula da Lógica de Predicados tem uma estrutura inicial simples se, e somente se, ela tem umas das formas* $(\neg H)$, $(H \vee G)$, $(H \wedge G)$, $(H \rightarrow G)$, *ou* $(H \leftrightarrow G)$.

Uma fórmula com estrutura inicial simples, conforme a Definição 7.2, é tal que se for escrita na notação polonesa, na forma prefixa, ela inicia com um conectivo diferente dos quantificadores. Além disso, em todos os casos nessa definição, H e G são fórmulas da Lógica de Predicados. Isto é, a fórmula com estrutura inicial simples pode conter alguma subfórmula com quantificador. Apenas observamos que o quantificador, se a fórmula o contiver, não é o conectivo principal.

Exemplo 7.8 (fórmula com estrutura inicial simples) A fórmula a seguir possui uma estrutura inicial simples. $((\forall x)p(x) \rightarrow (\exists y)q(y))$. Nesse caso, ela é do tipo $(H \rightarrow G)$ e escrita na notação polonesa, é denotada por $\rightarrow (\forall x)p(x)(\exists y)q(y)$, que inicia com o conectivo $\rightarrow$. ■

Observe que se uma fórmula tem estrutura inicial simples, isso não significa que ela seja simples, ou seja, com comprimento pequeno. Ter uma estrutura inicial simples, significa apenas que o conectivo principal da fórmula não é um quantificador. Analogamente ao que ocorre na Lógica Proposicional, a definição da interpretação das fórmulas com estrutura inicial simples é feita, inicialmente, a partir da definição da interpretação dos conectivos $\neg$, $\vee$, $\wedge$ $\rightarrow$, ou $\leftrightarrow$. E a interpretação desses símbolos é feita de forma inteiramente análoga às definições apresentadas na Lógica Proposicional.

Definição 7.3 (fórmulas com estrutura inicial simples) Seja E uma fórmula da Lógica de Predicados que possui uma estrutura inicial simples. Seja I uma interpretação sobre o domínio U. A interpretação de E conforme I, denotada por $I[E]$, é determinada pelas regras a seguir:

1. se $E = (\neg H)$, onde H é uma fórmula, então
   $I[E] = I[(\neg H)] = T$ se $I[H] = F$ e $I[E] = I[\neg H] = F$ se $I[H] = T$;
2. se $E = (H \vee G)$, onde H e G são duas fórmulas, então
   $I[E] = I[(H \vee G)] = T$ se $I[H] = T$ e/ou $I[G] = T$
   e $I[E] = I[(H \vee G)] = F$ se $I[H] = I[G] = F$;
3. se $E = (H \wedge G)$, onde H e G são duas fórmulas, então
   $I[E] = I[(H \wedge G)] = T$ se $I[H] = T$ e $I[G] = T$
   e $I[E] = I[(H \wedge G)] = F$ se $I[H] = F$ e/ou $I[G] = F$;
4. se $E = (H \rightarrow G)$, onde H e G são duas fórmulas, então
   $I[E] = I[(H \rightarrow G)] = T$ se $I[H] = F$ e/ou $I[G] = T$
   e $I[E] = I[(H \rightarrow G)] = F$ se $I[H] = T$ e $I[G] = F$;

5. se $E = (H \leftrightarrow G)$, onde H e G são duas fórmulas, então
   $I[E] = I[(H \leftrightarrow G)] = T$ se $I[H] = I[G]$
   e $I[E] = I[(H \leftrightarrow G)] = F$ se $I[H] \neq I[G]$.

A Definição 7.3 é análoga à Definição 2.6. Tais definições são análogas, porém não iguais. Isso, porque as fórmulas H e G que ocorrem na Definição 7.3 são fórmulas da Lógica de Predicados e podem conter quantificadores, predicados e funções. Por outro lado, as fórmulas H e G que ocorrem na Definição 2.6 contêm apenas símbolos proposicionais e não contêm quantificadores. Isso significa, por exemplo, que para interpretar $(\neg H)$, conforme o item 1 da Definição 7.3, devemos interpretar H. Por sua vez, para interpretar H, se ela contém quantificadores, devemos interpretar tais quantificadores. Além disso, como o conjunto de conectivos $\{\neg, \vee\}$ é completo, a Definição 7.3 poderia considerar apenas tais conectivos. Mas, para simplificar e ser mais didático, consideramos todos os conectivos.

Exemplo 7.9 (interpretação de expressões) Considere as fórmulas a seguir, que possuem estruturas iniciais simples:

$$H = (\neg p(x, y, a, b)) \rightarrow r(f(x), g(y))$$

$$G = p(x, y, a, b) \rightarrow (q(x, y) \wedge r(y, a)).$$

Considere também a interpretação I, sobre o domínio dos números inteiros $\mathbb{Z}$, tal que:

$I[x] = 3$, $I[y] = 2$, $I[a] = 0$, $I[b] = 1$, $I[f(x)] = (x_I + 1)$ e $I[g(x)] = (x_I - 2)$,
$I[p(x, y, z, w)] = T$, se, e somente se, $x_I.y_I > z_I.w_I$,
$I[q(x, y)] = T$, se, e somente se, $x_I < y_I$,
$I[r(x, y)] = T$, se, e somente se, $x_I > y_I$.

Observe nas definições anteriores, que estamos anotando o índice I nos resultados das interpretações. Isto é, $I[x] = x_I$. Lembre-se novamente de que x não é igual a x_I. O objeto x_I é a interpretação da variável x. Além disso, x_I pertence ao domínio $\mathbb{Z}$, que é igual ao conjunto dos números inteiros, e x é um elemento do alfabeto da Lógica de Predicados. A interpretação do átomo $p(x, y, z, w)$ tem como resultado o valor de verdade da expressão semântica $(x_I.y_I > z_I.w_I)$. Isso significa que $I[p(x, y, a, b)] = T$, pois $x_I = 3, y_I = 2, a_I = 0$ e $b_I = 1$. Portanto, $(x_I.y_I > a_I.b_I)$. Analogamente, a interpretação do termo $f(x)$ tem como resultado o valor 4. Ou seja, $I[f(x)] = 4$. Isso ocorre porque $I[f(x)] = (x_I + 1)$. Logo, $I[f(x)] = (3 + 1) = 4$. As interpretações dos outros átomos e termos seguem as mesmas convenções. Para determinar a interpretação de H e G conforme I, isto é, $I[H]$ e $I[G]$, considere a Tabela 7.9 a seguir, na qual indicamos a semântica na primeira linha e a sintaxe na segunda.

3	2	0	1	T	4	0	F	T	T	F
x	y	a	b	$p(x,y,a,b)$	$f(x)$	$g(y)$	$q(x,y)$	$r(y,a)$	H	G

Tabela 7.1: Tabela associada às fórmulas H e G.

Essa tabela indica que $I[x] = 3, I[y] = 2, \ldots, I[H] = T$ e $I[G] = F$. Observe que os resultados das interpretações dos termos $f(x)$ e $g(y)$ são números inteiros e, portanto, elementos do domínio de I. O resultado da interpretação das fórmulas H e G e dos átomos $p(x,y,a,b)$, $q(x,y)$ e $r(y,a)$ são valores de verdade. Lembre-se de que tais fatos caracterizam diferenças nas interpretações de termos e fórmulas. ■

7.5 Interpretação informal de fórmulas com quantificadores

Nas seções anteriores apresentamos, inicialmente, uma abordagem informal da interpretação de termos e átomos. E em seguida as definições formais. No caso das fórmulas, fazemos o mesmo. Começamos com uma visão informal da interpretação das fórmulas mais simples, e, somente depois, abordamos as definições formais.

Exemplo 7.10 (fórmula com um quantificador universal) Como deve ser, na Lógica de Predicados, a representação e interpretação da sentença "Todo número é par"? A representação pode ser obtida considerando uma interpretação I, cujo domínio é o conjunto dos números. Veja que estamos falando sobre números naturais $\mathbb{N}$. Nesse caso, dada uma variável qualquer x, então $I[x]$ deve ser igual a um número natural, ou seja, deve pertencer ao domínio da interpretação. Em seguida, considere q um símbolo de predicado tal que:

$I[q(x)] = T$, se, e somente se, $I[x]$ é número par.

Nesse caso, a sentença "Todo número é par" corresponde à interpretação, segundo I, da fórmula $(\forall x)q(x)$. E, por isso, dizemos que $(\forall x)q(x)$ é uma representação de "Todo número é par" conforme a interpretação I. Isto é:

$I[(\forall x)q(x)]$ = "Todo número é par" ■

Exemplo 7.11 (interpretação de fórmula com quantificadores) Nem sempre, necessariamente, falamos apenas sobre números. Suponha um caso, em que o universo do discurso é o conjunto das pessoas que estão cursando Lógica e que tal conjunto seja dado por:

$$U = \{\text{José, Maria, Ana, Rodrigo, João, Júlia}\}.$$

Nesse caso, digamos que U é igual ao conjunto dos alunos que estão cursando Lógica. Considere, então, uma interpretação I, cujo discurso tem como universo o conjunto U. Isso significa que podemos escolher, por exemplo, as constantes a, b, c, a_1, b_1, c_1, que pertencem à linguagem da Lógica de Predicados, e considerar as igualdades:

$I[a] =$ José, $I[b] =$ Maria, $I[c] =$ Ana, $I[a_1] =$ Rodrigo, $I[b_1] =$ João e $I[c_1] =$ Júlia.

Nesse caso, não há problema em escolher mais uma constante que tenha a mesma interpretação. Podemos ter $I[a] = I[a_2] =$ José, havendo, portanto, duas constantes com a mesma interpretação. Considere, agora, um predicado q tal que:

$I[q(x)] = T$ se, e somente se, $I[x]$ é inteligente.

Nesse caso, a sentença "todo aluno que está cursando Lógica é inteligente" corresponde à interpretação, segundo I, da fórmula $(\forall x)q(x)$. Então, dizemos que $(\forall x)q(x)$ é uma representação de "todo aluno que está cursando Lógica é inteligente" conforme a interpretação I. Nesse caso, temos:

$I[(\forall x)q(x)]$ = "todo aluno que está cursando Lógica é inteligente".

Além disso, observe também que, nesse caso:

$I[(\forall x)q(x)] = T$ se, e somente se:
$$I[q(a)] = I[q(b)] = I[q(c)] = I[q(a_1)] = I[q(b_1)] = I[q(c_1)] = T.$$

Considere, ainda, o predicados p e a função f, tais que:

$I[p(x, y)] = T$, se, e somente se, $I[x]$ gosta de $I[y]$,

$I[f(x)] = I[y]$, se, e somente se, $I[y]$ é o colega preferido de $I[x]$.

Nesse caso, se José gosta de Maria, então $I[p(a, b)] = T$. Se Ana é inteligente, então $I[q(c)] = T$, e se Rodrigo é o colega preferido de Júlia, então $I[f(c_1)] =$ Rodrigo, ou seja, $I[f(c_1)] = I[a_1]$.

Na fórmula $(\forall x)q(x)$, a variável x que ocorre em $q(x)$ pode ser substituída por qualquer elemento do domínio U e o resultado é interpretado como verdadeiro. É como se tal variável representasse, sintaticamente, um pronome e a sentença seria lida como: "Eles (os alunos que estão cursando Lógica) são inteligentes." As variáveis que aparecem nos argumentos dos predicados e das funções são como os pronomes que podem ser substituídos por substantivos, ou, nesse caso, por constantes. Tais constantes, por sua vez, representam os elementos do domínio. Nesse sentido, como é analisado em [Haak] e [Gabbay], a quantificação universal pode ser vista como uma conjunção sobre elementos do domínio. Isto é:

$I[(\forall x)q(x)] = T$, se, e somente se, $I[q(a)] = T$ e $I[q(b)] = T$ e ... e $I[q(c_1)] = T$.

Analogamente, a quantificação existencial é uma disjunção sobre elementos do domínio. Ou seja,

$I[(\exists x)q(x)] = T$, se, e somente se, $I[q(a)] = T$ ou $I[q(b)] = T$ ou ... ou $I[q(c_1)] = T$.

■

Considerando a análise dos Exemplos 7.10 e 7.11, em geral, para interpretar uma fórmula da Lógica de Predicados, é necessário seguir alguns passos para definir uma interpretação adequada. Entre tais passos, temos:

1. definir o domínio da interpretação, que corresponde ao universo do discurso;
2. selecionar constantes na linguagem para representar os nomes presentes no domínio do discurso;

3. selecionar símbolos de predicado e de função para representar relações de predicado e funcionais entre os elementos do domínio.

O ponto central aqui é como adequar a interpretação da fórmula à representação da sentença escrita em linguagem natural. Isto é, como fazer a correspondência entre o português e a linguagem formal da lógica. Evidentemente a tarefa não é fácil e a maneira de fazê-la é um problema filosófico relevante. Neste livro, apresentamos apenas algumas ideias iniciais e incompletas, que podem ser melhoradas com o estudo mais detalhado da linguagem e do significado dos elementos do discurso. O leitor interessado pode consultar [Gabbay], [Goldstein] e [Haak], para uma análise mais fundamentada.

Exemplo 7.12 (interpretação de fórmula com quantificadores universais) Considere a sentença da aritmética:

"Para quaisquer dois números x e y, temos que $x + y = y + x$".

Para representar essa sentença na Lógica de Predicados, seja I uma interpretação sobre o domínio dos números reais $\mathbb{R}$. Considere p e f símbolos de predicado e de função binários, tais que:

$I[p(x, y)] = T$ se, e somente se, $I[x] = I[y]$, $I[f(x, y)] = (I[x] + I[y])$.

Nesse caso, o predicado p é interpretado por I como a igualdade na aritmética e a função f como a função adição. No contexto da interpretação I, a sentença anterior pode ser representada pela fórmula $(\forall x)(\forall y)p(f(x, y), f(y, x))$. A representação dessa sentença não é única, podendo ser representada de formas diferentes. Considere q um predicado ternário, tal que:

$I[q(x, y, z)] = T$ se, e somente se, $(I[x] + I[y]) = I[z]$.

Utilizando o predicado q, no contexto da interpretação I, a sentença pode ser, também, representada por:

$$(\forall x)(\forall y)(\forall z_1)(\forall z_2)((q(x, y, z_1) \land q(y, x, z_2)) \to p(z_1, z_2)).$$

Nesse caso, a utilização das variáveis z_1 e z_2 é necessária para garantir a unicidade do resultado da soma de x e y. Caso tal unicidade não seja necessária, a sentença pode ainda ser representada por:

$$(\forall x)(\forall y)(\forall z)(q(x, y, z) \to q(y, x, z)).$$

■

São duas as conclusões da análise do Exemplo 7.12.

1. A representação de sentenças da linguagem natural não é única na Lógica de Predicados;
2. Os símbolos funcionais podem ser substituídos, equivalentemente, por símbolos de predicados.

Mas, mesmo que símbolos de funções sejam dispensáveis, o seu uso é importante, pois simplifica a representação de sentenças e a demonstração de inúmeros resultados em Lógica. E, por essa razão, eles são considerados nas definições deste livro.

Exemplo 7.13 (interpretação de fórmula com quantificadores) Dada uma fórmula H tal que $H = (\forall x)(\exists y)p(x, y)$, para interpretá-la é necessário estabelecer a interpretação do símbolo de predicado p. Suponha uma interpretação I, tal que $I[p] = <$, ou seja, $p_I = <$ e $I[p(x, y)] = T$, se, e somente se, $x_I < y_I$. O símbolo p é interpretado por I como o predicado semântico "menor que". Considerando também a interpretação canônica dos quantificadores $\forall$ e $\exists$, a interpretação I interpreta H como $I[H] \equiv$ "para todo x_I, existe y_I tal que $x_I < y_I$".

Ainda não é possível determinar se $I[H] = T$, ou $I[H] = F$. É necessário estabelecer que números x_I e y_I estão sendo considerados. Em outras palavras, é necessário determinar o domínio, ou universo U dos números x_I e y_I. Suponha, por exemplo, que o domínio U seja dado por $U = [0, \infty)$. Nesse caso, $I[H] = T$, pois é verdade que para todo x_I, $x_I \in [0, \infty)$, existe y_I, $y_I \in [0, \infty)$, tal que $x_I < y_I$.

Portanto, a interpretação I interpreta H como verdadeira, quando $U = [0, \infty)$. Poderia ser diferente, porém. Considere uma interpretação J, cujo domínio é $U = (-\infty, 0]$ e $J[p] = <$. Nesse caso, $J[H] = F$. Observe que a mudança do domínio faz com que a interpretação de H seja falsa. Isso ocorre porque é falso que:

"para todo x_J, $x_J \in (-\infty, 0]$, existe y_J, $y_J \in (-\infty, 0]$ tal que $x_J < y_J$".

Essa afirmação é falsa, pois se $x_J = 0$, não existe y_J tal que $y_J \in (-\infty, 0]$ e $x_J < y_J$. Finalmente, observe que não é necessário ter os resultados das interpretações de x e y para obtermos as interpretações $I[H]$ ou $J[H]$. Isso se deve ao fato de que x e y não são símbolos livres em H. Nesse caso, é necessário definir apenas a interpretação do símbolo livre p. $\blacksquare$

Exemplo 7.14 (interpretação de fórmula com quantificadores) Considere a fórmula G tal que $G = (\forall x)p(x, y)$. Aqui, os símbolos livres de G são p e y. Para determinar $J[G]$ é necessário definir $J[p]$ e $J[y]$. Considere a interpretação J sobre o domínio $U = (-\infty, 0]$, tal que $J[p] = \leq$ e $J[y] = -5$. Observe que $J[G] = F$. Isso ocorre porque é falso que:

para todo x_J, $x_J \in (-\infty, 0]$, então $x_J \leq -5$.

Nesse caso, a variável y é um símbolo livre de G, que é interpretado como -5. Entretanto, se $y_J = 0$, então $J[G] = T$, porque é verdadeiro que:

para todo x_J, $x_J \in (-\infty, 0]$, então $x_J \leq 0$. $\blacksquare$

Considerando a análise dos Exemplos 7.13 e 7.14, para interpretar uma fórmula qualquer H, com quantificadores, é necessário observar:

1. o domínio da interpretação; e
2. o valor da interpretação dos símbolos livres de H.

7.6 Interpretação de fórmulas com quantificadores

A linguagem da Lógica de Predicados contém predicados, funções, conectivos, quantificadores etc. Os conectivos, por exemplo, são idealizações com respeito a certas expressões do português. O conectivo $\vee$ é uma representação idealizada da palavra "ou", mas não a representa fielmente. O mesmo ocorre com os outros conectivos que representam aproximadamente os termos "não", "e", "se então" e "se e somente se". Os quantificadores também são representações idealizadas dos termos "para todo" e "existe" e definitivamente não representam fielmente a semântica de tais termos. Mas, se os elementos da linguagem da Lógica de Predicados são apenas representações idealizadas de termos do português, é possível representar adequadamente as sentenças do português na Lógica de Predicados? Várias coisas podem ocorrer. Pode ocorrer que um argumento intuitivamente válido se mostre, quando representado e analisado na Lógica de Predicados, como não válido. Isso pode ocorrer porque a intuição estava errada ou porque o argumento não foi adequadamente representado. Pode até mesmo ocorrer que não seja possível representá-lo adequadamente na Lógica de Predicados.[3] Não existe uma regra geral ou um algoritmo que ao ser seguido determine a representação de uma sentença na Lógica de Predicados. E, por ser controverso, difícil, como foi enfatizado anteriormente, esse é um tema de grande discussão filosófica [Gabbay], [Goldstein], [Haak]. O melhor a fazer, nesse caso, é exercitar, resolver exercícios. Assim, de forma simples, sem considerar implicações e reflexões filosóficas, esta seção define a interpretação de fórmulas com quantificadores universais e existenciais. E nessa definição é necessário o conceito de interpretação estendida, analisado a seguir [Manna].

7.6.1 Interpretação estendida

Considere, inicialmente, um paradigma que facilita a compreensão do conceito de interpretação estendida.

O paradigma. Suponha que cada indivíduo seja associado a uma interpretação que relaciona objetos sintáticos e semânticos. Seja então I uma interpretação associada a um indivíduo, que tem opinião formada sobre os elementos de seu mundo sintático. Dadas as variáveis x e y, então $I[x]$ e $I[y]$ estão definidas. Suponha, por exemplo, que $I[x] = 5$ e $I[y] = 1$. Isto é, o indivíduo interpreta x e y como os números 5 e 1, respectivamente. Uma outra pessoa pode convencer esse indivíduo que x deve ser interpretado como 7 e não como 5. O indivíduo, com essa nova opinião sobre o valor semântico de x, é associado a uma nova interpretação, que é indicada por: $< x \leftarrow 7 > I$. Nessa notação, temos a interpretação I mais a extensão

[3] Em geral, algumas sentenças que não podem ser representadas adequadamente na Lógica clássica podem ser representadas em Lógicas não clássicas.

$< x \leftarrow 7 >$. Dessa forma, mesmo tendo $I[x] = 5$, a interpretação estendida dá outro resultado para a interpretação de x. Porém, no caso da variável y, tudo continua como antes. Veja $< x \leftarrow 7 > I[x] = 7$ e $< x \leftarrow 7 > I[y] = 1$. Observe que o indivíduo continua interpretando y como 1. Em seguida, se o indivíduo se convencer de que a interpretação de x deve ser 8, a interpretação associada a ele se modifica novamente. A nova interpretação é dada por $< x \leftarrow 8 >< x \leftarrow 7 > I$. Nesse caso, temos:

$< x \leftarrow 8 >< x \leftarrow 7 > I[x] = 8$; e

$< x \leftarrow 8 >< x \leftarrow 7 > I[y] = 1$.

Novamente, y continua sendo interpretada como 1. Finalmente, se a interpretação de y é modificada para 4, então a interpretação associada ao indivíduo se modifica para:

$< y \leftarrow 4 >< x \leftarrow 8 >< x \leftarrow 7 > I$.

E, nesse caso:

$< y \leftarrow 4 >< x \leftarrow 8 >< x \leftarrow 7 > I[x] = 8$ e

$< y \leftarrow 4 >< x \leftarrow 8 >< x \leftarrow 7 > I[y] = 4$.

Seguindo esse raciocínio, concluímos que a extensão mais à esquerda tem precedência sobre as outras. Além disso, quando não há extensão sobre uma variável, o valor semântico original é considerado. A definição 7.4 é uma formalização desses conceitos.

Definição 7.4 (interpretação estendida) *Seja I uma interpretação sobre um domínio U. Considere x uma variável qualquer da Lógica de Predicados e d um elemento de U. Uma extensão de I, conforme x e d, é uma interpretação sobre U, denotada por $< x \leftarrow d > I$, tal que:*

$$< x \leftarrow d > I[\breve{y}] = \begin{cases} d & se \quad \breve{y} = x \\ I[\breve{y}] & se \quad \breve{y} \neq x \end{cases}$$

Lembre que $\breve{y}$ é uma variável qualquer.

Na Definição 7.4, se $\breve{y} = x$, então $< x \leftarrow d > I[\breve{y}] =< x \leftarrow d > I[x] = d$. Por outro lado, se $\breve{y} \neq x$, temos $< x \leftarrow d > I[\breve{y}] = I[\breve{y}]$. A interpretação estendida $< x \leftarrow d > I$ atribui a uma expressão ou a um símbolo do alfabeto diferente de x a valor originalmente atribuído por I. Isso significa que $< x \leftarrow d > I$ é idêntica a I, exceto para a variável x, que é interpretada como d. Isso porque a interpretação $< x \leftarrow d > I$ é igual a I mais a extensão $< x \leftarrow d >$. Observe que essa notação é análoga àquela que trata da composição de funções no cálculo.

Exemplo 7.15 (interpretação estendida) Este exemplo considera a extensão de uma interpretação I, sobre o domínio dos números naturais $\mathbb{N}$, tal que $I[x] = 4$, $I[a] = 5$, $I[y] = 4$, $I[f] = +$, e $I[p] = >$. Nesse caso:

$< x \leftarrow 2 > I[y] = 4$;

$< x \leftarrow 2 > I[f] = +$;

$< x \leftarrow 2 > I[x] = 2$;

$< y \leftarrow 9 >< x \leftarrow 2 > I[y] = 9$;
$< y \leftarrow 9 >< x \leftarrow 2 > I[x] = 2$;
$< x \leftarrow 7 >< y \leftarrow 9 >< x \leftarrow 2 > I[y] = 9$;
$< x \leftarrow 7 >< y \leftarrow 9 >< x \leftarrow 2 > I[x] = 7$; e
$< y \leftarrow 1 >< x \leftarrow 7 >< y \leftarrow 9 >< x \leftarrow 2 > I[y] = 1$.
Observe que na igualdade:

$$< x \leftarrow 7 >< y \leftarrow 9 >< x \leftarrow 2 > I[x] = 7,$$

a extensão $< x \leftarrow 7 >$ tem precedência sobre a extensão $< x \leftarrow 2 >$. Isso ocorre porque a interpretação:

$$< x \leftarrow 7 >< y \leftarrow 9 >< x \leftarrow 2 > I$$

é uma extensão da interpretação:

$$< y \leftarrow 9 >< x \leftarrow 2 > I.$$

O mesmo ocorre com a igualdade:

$$< y \leftarrow 1 >< x \leftarrow 7 >< y \leftarrow 9 >< x \leftarrow 2 > I[y] = 1,$$

na qual a extensão $< y \leftarrow 1 >$ tem precedência sobre a extensão $< y \leftarrow 9 >$. Novamente, isso ocorre porque a interpretação:

$$< y \leftarrow 1 >< x \leftarrow 7 >< y \leftarrow 9 >< x \leftarrow 2 > I$$

é uma extensão da interpretação:

$$< x \leftarrow 7 >< y \leftarrow 9 >< x \leftarrow 2 > I.$$

A extensão mais à esquerda tem precedência sobre cada extensão que ocorre mais à direita. ■

Portanto, dada uma interpretação I sobre um domínio U, as interpretações estendidas $< \breve{x} \leftarrow d >< \breve{y} \leftarrow e > I$ e $< \breve{y} \leftarrow e >< \breve{x} \leftarrow d > I$ são equivalentes quando $\breve{x} \neq \breve{y}$. No caso em que $x = y$, as interpretações são equivalentes somente quando $e = d$.

7.6.2 Regras semânticas para a interpretação de fórmulas com quantificadores

Consideramos, a seguir, a definição das regras semânticas para interpretação de fórmulas com quantificadores, utilizando interpretações estendidas, Definição 7.4. Mas, antes disso, apresentamos um conjunto de exemplos, que analisam de maneira informal a interpretação de fórmulas com quantificadores, usando interpretações estendidas.

Exemplo 7.16 (regra semântica para o quantificador universal) Considere I uma interpretação sobre o conjunto dos alunos de Ciência da Computação, $\mathbb{CC}$. Considere, também, um predicado p tal que

$I[p(x)] = T$, se, e somente se, $I[x]$ é um aluno inteligente.

Nesse caso, a sentença: "todo aluno de Ciência da Computação é inteligente" corresponde, segundo I, à fórmula H, tal que, $H = (\forall x)p(x)$. Então, dizemos que H é uma representação de "todo aluno de Ciência da Computação é inteligente" conforme I. Mas que condições devem ser satisfeitas para que a fórmula H seja verdadeira, segundo a interpretação I? Observe que já sabemos que H representa a sentença "todo aluno de Ciência da Computação é inteligente" conforme I. Agora estamos questionando outra coisa. Afinal, que condições devemos contemplar para que $I[H] = T$? Podemos fazer informalmente a seguinte sequência de raciocínio:

$$
\begin{aligned}
I[H] = T &\Leftrightarrow I[(\forall x)p(x)] = T,\\
&\Leftrightarrow I[\text{ “todo aluno de Ciência da Computação é inteligente” }] = T,\\
&\Leftrightarrow \text{para todo } d \text{ no conjunto dos alunos de Computação,}\\
&\ \text{temos que } d \text{ é inteligente,}\\
&\Leftrightarrow \text{para todo } d \in \mathbb{CC}, \text{ temos que } d \text{ é inteligente,}\\
&\Leftrightarrow \text{para todo } d \in \mathbb{CC}, \text{ temos que } p_I(d) = T,\\
&\Leftrightarrow \text{para todo } d \in \mathbb{CC}, \text{ se } x \text{ é interpretada como } d,\\
&\ \text{então } p(x) \text{ é interpretado como verdadeira,}\\
&\Leftrightarrow \text{para todo } d \in \mathbb{CC}, < x \leftarrow d > I[p(x)] = T.
\end{aligned}
$$

Portanto, nesse caso, temos uma conclusão importante: as condições para se ter $I[(\forall x)p(x)] = T$.

$I[(\forall x)p(x)] = T \Leftrightarrow$ para todo $d \in \mathbb{CC}$, $< x \leftarrow d > I[p(x)] = T$ ■

O Exemplo 7.16 interpreta, informalmente, uma fórmula com um quantificador no seu início. Apresentamos uma análise que estabelece as condições para que a fórmula seja interpretada como verdadeira. Segue, de forma imediata, a questão: quais são as condições para que tal fórmula seja interpretada como falsa? O próximo exemplo analisa essa questão.

Exemplo 7.17 (regra semântica para o quantificador universal) . Considere a mesma interpretação I do Exemplo 7.16 e, também, o predicado p com a mesma interpretação. Conforme é analisado no exemplo, a sentença: "todo aluno de Ciência da Computação é inteligente" corresponde, segundo I, à fórmula H, tal que, $H = (\forall x)p(x)$. Queremos identificar, agora, que condições devem ser satisfeitas para que a fórmula H seja falsa, segundo a interpretação I. Isto é, que condições devemos contemplar para se ter $I[H] = F$? A seguinte sequência de raciocínio estabelece informalmente essas condições:

$$
\begin{aligned}
I[H] = F &\Leftrightarrow I[(\forall x)p(x)] = F,\\
&\Leftrightarrow I[\text{ “todo aluno de Ciência da Computação é inteligente” }] = F,\\
&\Leftrightarrow \text{existe } d \text{ no conjunto dos alunos de Computação,}
\end{aligned}
$$

tal que d não é inteligente,
$\Leftrightarrow$ existe $d \in \mathbb{CC}$, tal que d não é inteligente,
$\Leftrightarrow$ existe $d \in \mathbb{CC}$, tal que $p_I(d) = F$,
$\Leftrightarrow$ existe $d \in \mathbb{CC}$, tal que se x é interpretada como d,
então $p(x)$ é interpretado como falso,
$\Leftrightarrow$ existe $d \in \mathbb{CC}$; $< x \leftarrow d > I[p(x)] = F$.

Temos outra conclusão importante: as condições para se ter $I[(\forall x)p(x)] = F$.
$I[(\forall x)p(x)] = F \Leftrightarrow$ existe $d \in \mathbb{CC}$, $< x \leftarrow d > I[p(x)] = F$ ■

As análises apresentadas nos Exemplos 7.16 e 7.17 podem ser repetidas, de forma análoga, considerando o quantificador existencial.

Exemplo 7.18 (regra semântica para o quantificador existencial) .
Considere a mesma interpretação I do Exemplo 7.16 e o predicado p com a mesma interpretação. De forma análoga à apresentação do Exemplo 7.16, a sentença "existe aluno de Ciência da Computação que é inteligente" corresponde, segundo I, à fórmula G, tal que, $G = (\exists x)p(x)$. Nesse caso, queremos identificar que condições devem ser satisfeitas para que a fórmula G seja verdadeira, segundo a interpretação I. Isto é, que condições devemos contemplar para se ter $I[G] = T$? Novamente, a seguinte sequência de raciocínio estabelece, informalmente, essas condições:

$I[G] = T \Leftrightarrow I[(\exists x)p(x)] = T$,
$\Leftrightarrow$ $I[$ "existe aluno de Ciência da Computação que é inteligente" $] = T$,
$\Leftrightarrow$ existe d no conjunto dos alunos de Computação,
tal que d é inteligente,
$\Leftrightarrow$ existe $d \in \mathbb{CC}$, tal que d é inteligente,
$\Leftrightarrow$ existe $d \in \mathbb{CC}$, tal que $p_I(d) = T$,
$\Leftrightarrow$ existe $d \in \mathbb{CC}$, tal que se x é interpretada como d,
então $p(x)$ é interpretado como verdadeiro,
$\Leftrightarrow$ existe $d \in \mathbb{CC}$; $< x \leftarrow d > I[p(x)] = T$;

Observe a conclusão importante:
$I[(\exists x)p(x)] = T \Leftrightarrow$ existe $d \in \mathbb{CC}$, $< x \leftarrow d > I[p(x)] = T$
Neste exemplo, queremos ainda identificar que condições devem ser satisfeitas para que a fórmula G seja falsa, ou seja, para se ter $I[G] = F$? Observe a sequência de deduções:

$I[G] = F \Leftrightarrow I[(\exists x)p(x)] = F$,
$\Leftrightarrow$ $I[$ "existe aluno de Ciência da Computação que é inteligente" $] = F$,
$\Leftrightarrow$ para todo d no conjunto dos alunos de Computação,
temos que d não é inteligente,
$\Leftrightarrow$ para todo $d \in \mathbb{CC}$, temos que d não é inteligente,
$\Leftrightarrow$ para todo $d \in \mathbb{CC}$, temos que $p_I(d) = F$,
$\Leftrightarrow$ para todo $d \in \mathbb{CC}$, temos que se x é interpretada como d,

então $p(x)$ é interpretado como falso,

$\Leftrightarrow$ para todo $d \in \mathbb{CC}$, $< x \leftarrow d > I[p(x)] = F$.

Estabelecemos a conclusão importante:
$I[(\exists x)p(x)] = F \Leftrightarrow$ para todo $d \in \mathbb{CC}$, $< x \leftarrow d > I[p(x)] = F$ ■

Os Exemplos 7.16, 7.17, e 7.18 estabelecem quatro conclusões, descritas, juntas, a seguir:

1. $I[(\forall x)p(x)] = T \Leftrightarrow$ para todo $d \in \mathbb{CC}$, $< x \leftarrow d > I[p(x)] = T$;
2. $I[(\forall x)p(x)] = F \Leftrightarrow$ existe $d \in \mathbb{CC}$, $< x \leftarrow d > I[p(x)] = F$;
3. $I[(\exists x)p(x)] = T \Leftrightarrow$ existe $d \in \mathbb{CC}$, $< x \leftarrow d > I[p(x)] = T$;
4. $I[(\exists x)p(x)] = F \Leftrightarrow$ para todo $d \in \mathbb{CC}$, $< x \leftarrow d > I[p(x)] = F$.

Essa lista estabelece condições, ou regras semânticas, para a interpretação do predicado p, segundo a interpretação I, cujo domínio é igual a $\mathbb{CC}$. Entretanto, observando os exemplos, verificamos que a análise não depende, especificamente, do predicado p e nem do domínio da interpretação. Nesse sentido, as condições acima podem ser generalizadas. Podemos considerar o domínio $\mathbb{CC}$ como um domínio U qualquer. Da mesma forma, $p(x)$ pode ser uma fórmula H qualquer. Fazendo tais generalizações, temos as regras semânticas para interpretação de fórmulas com quantificadores.

Definição 7.5 (regras semânticas para fórmulas com quantificadores) .
Sejam H uma fórmula da Lógica de Predicados, x uma variável qualquer e I uma interpretação sobre o domínio U. Os valores semânticos de $I[(\forall x)H]$ e $I[(\exists x)H]$ são definidos pelas regras:

1. $I[(\forall x)H] = T$ *se, e somente se,* $\forall\ d \in U$, $< x \leftarrow d > I[H] = T$;
2. $I[(\forall x)H] = F$ *se, e somente se,* $\exists\ d \in U$; $< x \leftarrow d > I[H] = F$;
3. $I[(\exists x)H] = T$ *se, e somente se,* $\exists\ d \in U$; $< x \leftarrow d > I[H] = T$;
4. $I[(\exists x)H] = F$ *se, e somente se,* $\forall\ d \in U$, $< x \leftarrow d > I[H] = F$.

Redundância da Definição 7.5. Como os quantificadores existenciais são definidos a partir dos quantificadores universais, é possível considerar apenas a definição de interpretação de fórmulas com quantificadores universais. Entretanto, para simplificar o estudo, são definidas as interpretações de fórmulas com os dois tipos de quantificadores. Por isso, a Definição 7.5 é redundante. Isto é, os itens 3 e 4 podem ser deduzidos dos itens 1 e 2.

Símbolos da metalinguagem. Nas regras semânticas, para interpretação de fórmulas com quantificadores, os símbolos $\forall$ e $\exists$ ocorrem na linguagem e na metalinguagem. Considere a sentença:
$I[(\forall_1 x)H] = T \Leftrightarrow \forall_2 d \in U, < x \leftarrow d > I[H] = T$.

Nela, os quantificadores estão indexados com os números 1 e 2. O primeiro quantificador, $\forall_1$, é um conectivo do alfabeto da Lógica de Predicados, sendo, portanto, um símbolo sintático. Por outro lado, o segundo quantificador, $\forall_2$, é um símbolo da metalinguagem e está quantificando sobre objetos do domínio da interpretação. O símbolo $\forall_2$ se refere a elementos do domínio U que são objetos semânticos. Da mesma forma, o quantificador $\exists$ também ocorre na linguagem e na metalinguagem. Na sentença:

$I[(\exists_1 x)H] = T \Leftrightarrow \exists_2 d \in U;\ < x \leftarrow d > I[H] = T,$

o símbolo $\exists_1$ é um conectivo do alfabeto da Lógica de Predicados, sendo, portanto, um símbolo sintático e $\exists_2$ é um símbolo da metalinguagem e está quantificando sobre objetos semânticos. No que se segue, os quantificadores $\forall$ e $\exists$ da linguagem da metalinguagem são indicados indistintamente. Entretanto, é necessário estar ciente de suas diferenças.

Formas diferentes de dizer a mesma coisa. Na Definição 7.5, $I[(\forall x)H] = T$ equivale a dizer que para qualquer interpretação da variável x em H, a fórmula H é interpretada como sendo verdadeira. Isso é expresso, considerando a extensão da interpretação I. Assim, quando d assume qualquer valor no domínio U, a interpretação $< x \leftarrow d > I$ interpreta x como sendo qualquer valor em U. Logo, as afirmações 1 e 2, a seguir expressam a mesma ideia.

1. Para qualquer interpretação da variável x em H, a fórmula H é interpretada como verdadeira.
2. $\forall d,\ d \in U,\ < x \leftarrow d > I[H] = T.$

Por outro lado, $I[(\exists x)H] = T$ equivale a dizer que existe um valor para a interpretação de x em H tal que H é interpretada como verdadeira. A existência desse valor é expressa por:

$\exists\ d\ ;\ d \in U$ tal que $< x \leftarrow d > I[H] = T.$

Observe que, nesse caso, $< x \leftarrow d > I[x] = d,$ ou seja, x é interpretada como d.

Quando o "para todo" é falso. Na Definição 7.5, $I[(\forall x)H] = F$ equivale dizer que se a variável x, que ocorre em H, é interpretada como sendo qualquer elemento do domínio, então nem sempre temos que H é verdadeira. Ou seja, é falso que para toda interpretação de x em H, a fórmula H é interpretada como verdadeira. Em outras palavras, existe, pelo menos, uma interpretação de x, tal que H é interpretada por I como falsa. Tais fatos são expressos por:

$\exists\ d\ ;\ d \in U, < x \leftarrow d > I[H] = F.$

Nesse caso, quando x é interpretado por I como d, H é interpretado como F.

Quando o "existe" é falso. Conforme a Definição 7.5, $I[(\exists x)H] = F$ equivale dizer que é falso que existe alguma interpretação para x em H, tal que H possa ser interpretada como verdadeira. Isso significa que para toda interpretação de x em H, a fórmula H é interpretada como falsa, o que é expresso por:

$\forall\ d\ ;\ d \in U; < x \leftarrow d > I[H] = F.$

Exemplo 7.19 (interpretação de fórmula com quantificador) Seja I uma interpretação sobre o conjunto dos alunos de Ciência da Computação $\mathbb{CC}$. Suponha os predicados p e q tais que:

$I[p(x)] = T$ se, e somente se, x_I é inteligente;

$I[q(x,y)] = T$ se, e somente se, x_I gosta de y_I.

Suponha, também, uma constante a tal que $I[a] =$ Zé. Considere H_1 a fórmula a seguir: $H_1 = (\forall x)(q(x,a) \vee p(x))$. Nesse caso, conforme I, qual é o significado da fórmula H_1? Isto é, do ponto de vista semântico, como é a leitura de H_1 segundo a interpretação I? Como a fórmula H_1 é simples, não temos problemas para responder tal questão. Nesse caso, temos:

$$\begin{aligned} I[H_1] &= I[(\forall x)(q(x,a) \vee p(x))] \\ &= \text{“todo aluno de Ciência da Computação gosta do Zé, ou é inteligente.”} \end{aligned}$$

Mas este é o primeiro exemplo, após a definição da regras semânticas, Definição 7.5. Apresentamos, então, uma análise mais formal, que utiliza a Definição 7.5. No caso da fórmula H_1, como ela é bem simples, até pode parecer um preciosismo. Entretanto, para fórmulas mais elaboradas, tal análise pode ajudar a compreensão da semântica da fórmula.

$$\begin{aligned} I[H_1] = T &\Leftrightarrow I[(\forall x)(q(x,a) \vee p(x))] = T, \\ &\Leftrightarrow \forall\ d\ \in \mathbb{CC};\ < x \leftarrow d > I[q(x,a) \vee p(x)] = T, \\ &\Leftrightarrow \forall\ d\ \in \mathbb{CC};\ < x \leftarrow d > I[q(x,a)] = T \\ &\quad\ \text{e/ou}\ < x \leftarrow d > I[p(x)] = T, \\ &\Leftrightarrow \forall\ d\ \in \mathbb{CC};\ q_I(d,\text{Zé}) = T\ \ \text{e/ou}\ \ p_I(d) = T, \\ &\Leftrightarrow \forall\ d\ \in \mathbb{CC};\ \text{“}d\text{ gosta de Zé”}\ \ \text{e/ou}\ \ \text{“}d\text{ é inteligente”}, \\ &\Leftrightarrow \text{“todo aluno de Ciência da Computação gosta do Zé,} \\ &\quad\ \text{ou é inteligente.”}\ \blacksquare \end{aligned}$$

Exemplo 7.20 (interpretação de fórmula com quantificador) . Seja I uma interpretação, os predicados p e q e a constante a, como no Exemplo 7.19. Além disso, seja f uma função unária tal que:

$I[f(x)] =$ o colega preferido de x_I.

Nesse caso, é claro, estamos considerando colegas no contexto dos alunos de Computação. Considere H_2 a fórmula a seguir. $H_2 = (\forall x)q(x,a) \vee p(f(x))$. Observe como a fórmula H_2 é similar à fórmula H_1. A única diferença é a colocação dos parênteses e a presença da função f. Na fórmula H_1, o átomo $p(x)$ está no escopo do quantificador $(\forall x)$. Mas, na fórmula H_2, o átomo $p(f(x))$ não está no escopo do quatificador. E por isso, a interpretação de H_2 é diferente da interpretação de H_1. Observe:

$$\begin{aligned} I[H_2] = T &\Leftrightarrow I[(\forall x)q(x,a) \vee p(f(x))] = T, \\ &\Leftrightarrow I[(\forall x)q(x,a)] = T\ \ \text{e/ou}\ \ I[p(f(x))] = T, \\ &\Leftrightarrow \forall\ d\ \in \mathbb{CC};\ < x \leftarrow d > I[q(x,a)] = T\ \ \text{e/ou}\ \ I[p(f(x))] = T, \\ &\Leftrightarrow \forall\ d\ \in \mathbb{CC};\ q_I(d,\text{Zé}) = T\ \ \text{e/ou}\ \ p_I(f_I(x_I)) = T, \\ &\Leftrightarrow \forall\ d\ \in \mathbb{CC};\ \text{“}d\text{ gosta de Zé”}\ \ \text{e/ou} \end{aligned}$$

"o colega preferido de x_I é inteligente."
$\Leftrightarrow$ "todo aluno de Ciência da Computação gosta do Zé, ou o colega preferido de x_I é inteligente."

Para interpretar H_2, ou seja, se a fórmula é verdadeira ou falsa, é necessário saber se todo aluno gosta do Zé e, também, se o colega preferido de x_I é inteligente. Mas, quem é x_I? É um aluno de Ciência da Computação. Então, nesse caso, para interpretar H_2 é necessário identificar o aluno x_I. Suponha, por exemplo, que $x_I =$ "Maria." E, sabendo disso, podemos olhar para o colega preferido de Maria e verificar se ele é, ou não, inteligente. ■

A necessidade de interpretar os símbolos livres. No Exemplo 7.19, para interpretar H_1 é necessário saber apenas a interpretação dos predicados p e q e da constante a. Por outro lado, para interpretar H_2 é necessário saber a interpretação dos predicados p e q, da constante a, da função f e da variável x. Mas, por que é necessário interpretar x, quando interpretamos H_2? Observe que para interpretar H_1 isso não é necessário, pois na fórmula H_1 a variável x em $p(x)$ ocorre ligada. Então, nesse caso, a semântica da variável x em $p(x)$ é dada pelo quantificador $(\forall x)$. Formalmente, isso ocorre no desenvolvimento da análise quando aparece a interpretação estendida $< x \leftarrow d > I$. Nesse caso, x é interpretada como d e não há necessidade de conhecer x_I. Por outro lado, na fórmula H_2 a variável x em $p(f(x))$ ocorre livre. E, nesse caso, a semântica da variável x em $p(f(x))$ não é dada pelo quantificador $(\forall x)$. Ou seja, é necessário interpretar a variável x em $p(f(x))$, pois ela não está no escopo do quantificador $(\forall x)$. Formalmente, nesse caso, no desenvolvimento da análise não aparece interpretação estendida do tipo $< x \leftarrow d > I$. Ou seja, é necessário conhecer x_I. E além disso, é claro, para interpretar H_2 devemos interpretar a função f. Conforme a Definição 6.13, dada uma fórmula E, os seus símbolos livres são as variáveis que ocorrem livres em E, os símbolos de função e os de predicado. Nesse caso, H_1 possui apenas o símbolo livre p. Por outro lado, H_2 possui os símbolos livres p, f e x. Concluímos, portanto:

1. que para interpretar H_1 e H_2 é necessário saber a interpretação de seus símbolos livres;
2. para interpretar uma fórmula H é necessário saber a interpretação dos seus símbolos livres.

Exemplo 7.21 (interpretação de fórmula com quantificador) Seja I uma interpretação sobre o domínio dos números naturais $\mathbb{N}$, tal que $I[x] = 3$, $I[a] = 5$, $I[y] = 4$, $I[f] = +$ e $I[p] = <$. Considere a fórmula H_3 tal que $H_3 = (\forall x)p(x, y)$. Queremos responder, neste exemplo, se $I[H_3] = T$, ou $I[H_3] = F$. Como H_3 é bem simples, podemos verificar que, conforme I, temos informalmente que:

$I[H_3]$ = "Para todo número natural x, $x < 4$".

Evidentemente, essa afirmação é falsa e, por isso, devemos ter $I[H_3] = F$. A demonstração desse fato é dada a seguir:

$$
\begin{aligned}
I[H_3] = F &\Leftrightarrow I[(\forall x)p(x,y)] = F \\
&\Leftrightarrow \exists\ d \in \mathbb{N};\ < x \leftarrow d > I[p(x,y)] = F \\
&\Leftrightarrow \exists\ d \in \mathbb{N};\ d < 4 \ \text{ é falso.}
\end{aligned}
$$

A última afirmação: "$\exists\ d \in \mathbb{N};\ d < 4$ é falso" é verdadeira, pois existe número natural d, tal que $d < 4$ é falso. No caso em que $d = 7$, por exemplo, temos que $d < 4$ é falso. Logo, como a última afirmação é verdadeira, então a primeira afirmação, $I[H_3] = F$, também é verdadeira. Isso significa que a interpretação de H_3 segundo I é igual a F. Observe que na interpretação de H_3 não é necessário utilizar que $I[x] = 3$. Quando a fórmula $(\forall x)p(x,y)$ é interpretada, utilizamos a interpretação estendida $< x \leftarrow d > I$. E, nesse caso, o valor de $I[x]$ não é utilizado, pois $< x \leftarrow d > I[x] = d$. Isso significa que a semântica da variável x em H_3 é dada pelo quantificador. Observe que o mesmo não ocorre com a variável y, que ocorre livre em H_3. Mas e se imaginamos por engano que $I[H_3] = T$. Nesse caso, temos o desenvolvimento:

$$
\begin{aligned}
I[H_3] = T &\Leftrightarrow I[(\forall x)p(x,y)] = T, \\
&\Leftrightarrow \forall\ d \in \mathbb{N};\ < x \leftarrow d > I[p(x,y)] = T, \\
&\Leftrightarrow \forall\ d \in \mathbb{N};\ d < 4 \ \text{ é verdadeiro.}
\end{aligned}
$$

Nesse caso, a última afirmação "$\forall\ d \in \mathbb{N};\ d < 4$ é verdadeiro", é falsa. Observe que é falso dizer que todos os naturais são menores que 4. Logo, como a última afirmação é falsa, então a primeira afirmação, $I[H_3] = T$, também é falsa. Isso significa que o correto é $I[H_3] = F$. Isto é, a interpretação de H_3 segundo I é igual a F. Finalmente, observe que na interpretação de H_3, somente utilizamos a interpretação de y e não utilizamos os resultados, $I[x] = 3$, $I[a] = 5$, $I[f] = +$ e $I[p] = <$. E além desses resultados, a interpretação I interpreta todos os predicados, funções e fórmulas da Lógica de Predicados. E todas essas "opiniões" da interpretação I também não são utilizadas, fato que não faz diferença alguma no resultado $I[H_3] = F$. ■

Análise da afirmação final de uma sequência de equivalências. Dada uma fórmula H, o Exemplo 7.21 mostra como decidir se $I[H] = T$, ou $I[H] = F$. Há alguns casos a considerar. Suponha, inicialmente, que afirmamos $I[H] = T$. Em seguida, desenvolvemos um conjunto de equivalências como a seguir, até encontrar a última afirmação das equivalências.

$$
\begin{aligned}
I[H] = T &\Leftrightarrow \text{afirmação 1,} \\
&\Leftrightarrow \text{afirmação 2,} \\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\
&\Leftrightarrow \text{afirmação final.}
\end{aligned}
$$

Se "afirmação final" é verdadeira, então $I[H] = T$. Caso contrário, se "afirmação final" é falsa, então é um absurdo ter $I[H] = T$. Logo, $I[H] = F$. Por outro lado, suponha que afirmamos, inicialmente, $I[H] = F$. E, em seguida, desenvolvemos um conjunto de equivalências:

$$
\begin{aligned}
I[H] = F &\Leftrightarrow \text{afirmação 1,}\\
&\Leftrightarrow \text{afirmação 2,}\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\
&\Leftrightarrow \text{afirmação final.}
\end{aligned}
$$

Analogamente ao caso anterior, se "afirmação final" é verdadeira, então é o caso que $I[H] = F$. Mas, se "afirmação final" é falsa, então é um absurdo ter $I[H] = F$. Logo, $I[H] = T$.

Exemplo 7.22 (interpretação de fórmula com quantificadores) . Seja I uma interpretação sobre o domínio dos números naturais $\mathbb{N}$, definida, exatamente, como no Exemplo 7.21. Considere a fórmula H_4 tal que $H_4 = (\forall x)(\exists y)p(x, y)$. Afinal, $I[H_4] = T$, ou $I[H_4] = F$. Informalmente, $I[H_4]$ significa: "para todo número natural x, existe outro natural y tal que $x < y$". Essa afirmação é verdadeira, logo, informalmente, $I[H_4] = T$. A demonstração desse fato é dada a seguir:

$$
\begin{aligned}
I[H_4] = T &\Leftrightarrow I[(\forall x)(\exists y)p(x, y)] = T,\\
&\Leftrightarrow \forall\ d \in \mathbb{N},\ < x \leftarrow d > I[(\exists y)p(x, y)] = T,\\
&\Leftrightarrow \forall\ d \in \mathbb{N},\ \exists\ c \in \mathbb{N};\ < y \leftarrow c >< x \leftarrow d > I[p(x, y)] = T,\\
&\Leftrightarrow \forall\ d \in \mathbb{N},\ \exists\ c \in \mathbb{N};\ d < c\ \text{ é verdadeiro.}
\end{aligned}
$$

Nesse caso, a última afirmação "$\forall\ d \in \mathbb{N},\ \exists\ c \in \mathbb{N};\ d < c$ é verdadeiro" é verdadeira, pois, para todo número natural d, existe um outro número natural c tal que $d < c$ é verdadeiro. Isso ocorre porque não existe um número natural maior que todos os outros. Como a última afirmação é verdadeira, então a afirmação equivalente $I[H_4] = T$ também é verdadeira. Observe o que ocorre quando supomos que $I[H_4] = F$:

$$
\begin{aligned}
I[H_4] = F &\Leftrightarrow I[(\forall x)(\exists y)p(x, y)] = F,\\
&\Leftrightarrow \exists\ d \in \mathbb{N};\ < x \leftarrow d > I[(\exists y)p(x, y)] = F,\\
&\Leftrightarrow \exists\ d \in \mathbb{N};\ \forall\ c \in \mathbb{N};\ < y \leftarrow c >< x \leftarrow d > I[p(x, y)] = F,\\
&\Leftrightarrow \exists\ d \in \mathbb{N};\ \forall\ c \in \mathbb{N};\ d < c\ \text{ é falso,}\\
&\Leftrightarrow \exists\ d \in \mathbb{N};\ \forall\ c \in \mathbb{N};\ d \geq c\ \text{ é verdadeiro.}
\end{aligned}
$$

Nesse caso, a última afirmação "$\exists\ d \in \mathbb{N},\ \forall\ c \in \mathbb{N};\ d \geq c$ é verdadeiro," é falsa, pois é falso que existe um número natural d, que é maior que todos os outros naturais. Caso essa afirmação fosse verdadeira, então existiria o número natural d máximo. Portanto, como a última afirmação é falsa, então é falso que $I[H_4] = F$. Concluímos que $I[H_4] = T$. ■

A posição das extensões das interpretações. Observe a posição das extensões no desenvolvimento das equivalências apresentadas no Exemplo 7.22. Inicialmente, temos:

$$I[(\forall x)(\exists y)p(x, y)] = F \ \Leftrightarrow \exists\ d \in \mathbb{N};\ < x \leftarrow d > I[(\exists y)p(x, y)] = F.$$

Nessa equivalência, é considerado o primeiro quantificador da fórmula $(\forall x)(\exists y)p(x, y)$ e o item 2 da Definição 7.5. Recorde como é a regra semântica estabelecida pelo item 2.

2. $I[(\forall x)H] = F$ se, e somente se, $\exists\ d \in U;\ < x \leftarrow d > I[H] = F$;

Nesse caso, para utilizar essa regra semântica na fórmula H_4, consideramos a fórmula H, que aparece na regra semântica, como igual a $(\exists y)p(x, y)$. Em seguida temos mais uma equivalência:

$$\begin{aligned} &\exists\ d \in \mathbb{N};\ < x \leftarrow d > I[(\exists y)p(x, y)] = F \\ &\qquad\Leftrightarrow\ \exists\ d \in \mathbb{N};\ \forall\ c \in \mathbb{N};\ < y \leftarrow c >< x \leftarrow d > I[p(x, y)] = F. \end{aligned}$$

Ou, equivalentemente:

$$< x \leftarrow d > I[(\exists y)p(x, y)] = F\ \Leftrightarrow\ \forall\ c \in \mathbb{N};\ < y \leftarrow c >< x \leftarrow d > I[p(x, y)] = F.$$

Essa última equivalência é obtida considerando o item 4 da Definição 7.5. Recorde o item 4.

4. $I[(\exists x)H] = F$ se, e somente se, $\forall\ d \in U,\ < x \leftarrow d > I[H] = F$.

Para aplicar essa regra na fórmula $(\exists y)p(x, y)$, a interpretação I da regra 4, Definição 7.5, é substituída por $< x \leftarrow d > I$ e a fórmula H por $p(x, y)$. Assim, a extensão correspondente a $(\exists y)$ é colocada à esquerda da extensão $< x \leftarrow d >$, sendo obtida a interpretação $< y \leftarrow c >< x \leftarrow d > I$. Observe que a ordem das extensões, obtidas no desenvolvimento das equivalências, é o inverso da ordem dos quantificadores sintáticos na fórmula. Por outro lado, a ordem dos quantificadores semânticos é a mesma dos quantificadores sintáticos. Além disso, na interpretação da fórmula H_4 não é necessário utilizar que $I[x] = 3$ e $I[y] = 4$, pois as ocorrências de x e y em H_4 são ligadas. Nesse caso, quando $(\forall x)(\exists y)p(x, y)$ é interpretada por I, é utilizada a interpretação estendida $< y \leftarrow c >< x \leftarrow d > I$ e os valores de $I[x]$ e $I[y]$ não são utilizados, pois $< y \leftarrow c >< x \leftarrow d > I[x] = d$ e $< y \leftarrow c >< x \leftarrow d > I[y] = c$.

Exemplo 7.23 (interpretação de fórmula com quantificadores) . Considere a fórmula:

$$H_5 = H_4 \wedge H_3,$$

na qual H_4 e H_3 são as fórmulas apresentadas nos Exemplos 7.22 e 7.21, respectivamente. Suponha, também, I a interpretação do Exemplo 7.19. Nesse caso, utilizando a Definição 7.3, item 3, temos $I[H_5] = F$, pois $I[H_4] = T$ e $I[H_3] = F$. Parece simples a interpretação da fórmula H_5. Entretanto, observe que H_5 é uma fórmula da Lógica de Predicados, que contêm quantificadores. Na interpretação de H_5 é utilizada, inicialmente, a regra semântica do item 3 da Definição 7.3. Essa regra é análoga às regras da Lógica Proposicional. Entretanto, a analogia com a Lógica Proposicional para por aí. Pois, para interpretar H_4 e H_3 é necessário considerar as regras semânticas da Definição 7.5. ■

Exemplo 7.24 (quantificadores na mesma variável) Seja I uma interpretação sobre o domínio dos números racionais $\mathbb{Q}^*$, diferentes de zero, tal que $I[a] = 1$, $I[b] = 25$, $I[x] = 13$, $I[y] = 77$, $I[f] = \div$ e $I[p] = <$. Observe que o resultado da interpretação de f é a função divisão, $I[f] = \div$. E essa função é adequadamente definida no conjunto dos racionais diferentes de zero. Isso não ocorreria se o zero fosse incluído, pois não se define a divisão por zero. Além disso:

$$\div : \mathbb{Q}^* \to \mathbb{Q}^*$$

Nesse sentido, a interpretação I está corretamente definida. Seja H_5 a fórmula $(\forall x)(\exists x)p(x, y)$. Nesse caso, na fórmula H_5, temos dois quantificadores na mesma variável x. Afinal, o x que ocorre em $p(x, y)$ está ligado ao quantificador $(\forall x)$, ou ao quantificador $(\exists x)$? O objetivo deste exemplo e do próximo é esclarecer essa questão. Considere a análise:

$$\begin{aligned}
I[H_5] = T &\Leftrightarrow I[(\forall x)(\exists x)p(x, y)] = T,\\
&\Leftrightarrow \forall\ d\ \in\ \mathbb{Q}^*,\ < x \leftarrow d > I[(\exists x)p(x, y)] = T,\\
&\Leftrightarrow \forall\ d\ \in\ \mathbb{Q}^*,\ \exists\ c\ \in\ \mathbb{Q}^*;\ < x \leftarrow c >< x \leftarrow d > I[p(x, y)] = T,\\
&\Leftrightarrow \forall\ d\ \in\ \mathbb{Q}^*,\ \exists\ c\ \in\ \mathbb{Q}^*;\ c < 77 \ \text{ é verdadeiro},\\
&\Leftrightarrow \exists\ c\ \in\ \mathbb{Q}^*;\ c < 77 \ \text{ é verdadeiro}.
\end{aligned}$$

Nesse caso, a afirmação: "$\exists\ c\ \in\ \mathbb{Q}^*;\ c < 77$ é verdadeiro" é verdadeira, pois é possível escolher $c = 10$ e, nesse caso, $c < 77$ é verdadeira. Uma outra forma de analisar essa afirmação é escrevê-la na forma equivalente "$c < 77$ é verdadeiro para algum $c\ \in\ \mathbb{Q}^*$" onde o quantificador semântico $\exists$ é escrito depois da desigualdade. Portanto, como a afirmação final é verdadeira, a suposição inicial $I[H_5] = T$ também é verdadeira. Concluímos que $I[H_5] = T$. ■

Exemplo 7.25 (dois quantificadores na mesma variável) Seja I a interpretação do Exemplo 7.24. Seja H_6 a fórmula $(\exists x)(\forall x)p(x, y)$. Nesse caso, como a fórmula H_5 do Exemplo 7.24, H_6 possui dois quantificadores na mesma variável x. Determinamos, a seguir, que $I[H_6] = F$:

$$\begin{aligned}
I[H_6] = T &\Leftrightarrow I[(\exists x)(\forall x)p(x, y)] = T,\\
&\Leftrightarrow \exists\ d\ \in\ \mathbb{Q}^*,\ < x \leftarrow d > I[(\forall x)p(x, y)] = T,\\
&\Leftrightarrow \exists\ d\ \in\ \mathbb{Q}^*;\ \forall\ c\ \in\ \mathbb{Q}^*,\ < x \leftarrow c >< x \leftarrow d > I[p(x, y)] = T,\\
&\Leftrightarrow \exists\ d\ \in\ \mathbb{Q}^*,\ \forall\ c\ \in\ \mathbb{Q}^*;\ c < 77 \ \text{ é verdadeiro},\\
&\Leftrightarrow \forall\ c\ \in\ \mathbb{Q}^*;\ c < 77 \ \text{ é verdadeiro}.
\end{aligned}$$

Nesse caso, a afirmação "$\forall\ c\ \in\ \mathbb{Q}^*;\ c < 77$ é verdadeiro" é falsa, pois, é claro, existem números racionais maiores que 77. Outra forma de analisar essa afirmação é escrevê-la na forma equivalente "$c < 77$ é verdadeiro para todo $c\ \in\ \mathbb{Q}^*$" que é uma afirmação falsa. Logo, como a afirmação final é falsa, a suposição inicial $I[H_6] = T$ também é falsa. Concluímos que $I[H_6] = F$. ■

O escopo dos quantificadores. No Exemplo 7.24, consideramos a fórmula H_5. Nessa fórmula, a variável x em $p(x,y)$ está ligada ao quantificador mais interno $(\exists x)$. Isso ocorre porque, no desenvolvimento da análise de $I[H_5] = T$, temos, no meio do desenvolvimento, o seguinte:

$$I[H_5] = T \Leftrightarrow \text{.........}$$
$$\Leftrightarrow \forall\ d \in \mathbb{Q}^*,\ \exists\ c \in \mathbb{Q}^*;\ < x \leftarrow c >< x \leftarrow d > I[p(x,y)] = T.$$

Na afirmação "$\forall\ d \in \mathbb{Q}^*,\ \exists\ c \in \mathbb{Q}^*;\ < x \leftarrow c >< x \leftarrow d > I[p(x,y)] = T$", o átomo $p(x,y)$ é interpretado pela interpretação estendida $< x \leftarrow c >< x \leftarrow d > I$. E, como a extensão $< x \leftarrow c >$ tem precedência sobre a extensão $< x \leftarrow d >$, então x é interpretada como c. Além disso, observe que c está ligada ao quantificador semântico $\exists$, que, por sua vez, corresponde ao quantificador sintático $\exists$, que ocorre na fórmula. Portanto, a variável x em $p(x,y)$ é interpretada conforme a semântica do quantificador mais interno da fórmula, que, nesse caso, é o quantificador $\exists$. Conclusão: a variável x em $p(x,y)$ está no escopo de dois quantificadores em x. Porém, essa variável é interpretada conforme a semântica do quantificador mais interno da fórmula. No Exemplo 7.25, temos a fórmula H_6. De forma análoga, a variável x em $p(x,y)$ está ligada ao quantificador mais interno. No caso de H_6, entretanto, esse quantificador é $(\forall x)$. Observe o desenvolvimento de $I[H_6] = T$.

$$I[H_6] = T \Leftrightarrow \text{.........}$$
$$\Leftrightarrow \exists\ d \in \mathbb{Q}^*;\ \forall\ c \in \mathbb{Q}^*,\ < x \leftarrow c >< x \leftarrow d > I[p(x,y)] = T.$$

Nesse caso, temos a afirmação:
"$\exists\ d \in \mathbb{Q}^*;\ \forall\ c \in \mathbb{Q}^*,\ < x \leftarrow c >< x \leftarrow d > I[p(x,y)] = T$".
Nessa afirmação, $p(x,y)$ é interpretado por $< x \leftarrow c >< x \leftarrow d > I$. Então, x é interpretada como c. Mas, de forma diferente do que acontece em H_5, c está ligada ao quantificador semântico $\forall$, que, por sua vez, corresponde ao quantificador sintático $\forall$, que ocorre na fórmula. Assim, a variável x em $p(x,y)$ é interpretada conforme a semântica do quantificador mais interno da fórmula, que, nesse caso, é o quantificador $\forall$. E, novamente, temos a mesma conclusão. A variável x em $p(x,y)$ está no escopo de dois quantificadores em x, sendo interpretada conforme a semântica do quantificador mais interno da fórmula.

Os quantificadores universal e existencial não são comutativos. De acordo com os Exemplos 7.24 e 7.25, temos que $I[H_5] = T$ e $I[H_6] = F$. Portanto, existe uma interpretação I que interpreta H_5 e H_6 de forma diferente. Logo, tais fórmulas não são equivalentes. Ou seja, a sequência dos quantificadores universal e existencial faz diferença. Em H_5 temos a sequência "$(\forall x)(\exists x)$" e em H_6 a sequência "$(\exists x)(\forall x)$". E, portanto, dizer "para todo x, existe x" não equivale dizer "existe x, para todo x". E essa análise se aplica também a quantificadores em variáveis diferentes. Isto é, "para todo x, existe y" não equivale a "existe x, para todo y", como é analisado no Exemplo 7.26 a seguir.

Exemplo 7.26 (interpretação de variáveis diferentes) Seja I a interpretação do Exemplo 7.24. Considere,

$H_7 = (\exists x)(\forall y)p(x,y)$ e
$H_8 = (\forall x)(\exists y)p(x,y)$.
Suponha, então $I[H_7] = T$. Logo:

$$\begin{aligned} I[H_7] = T &\Leftrightarrow I[(\exists x)(\forall y)p(x,y)] = T, \\ &\Leftrightarrow \exists\ d \in \mathbb{Q}^*,\ < x \leftarrow d > I[(\forall y)p(x,y)] = T, \\ &\Leftrightarrow \exists\ d \in \mathbb{Q}^*;\ \forall\ c \in \mathbb{Q}^*,\ < y \leftarrow c >< x \leftarrow d > I[p(x,y)] = T, \\ &\Leftrightarrow \exists\ d \in \mathbb{Q}^*,\ \forall\ c \in \mathbb{Q}^*;\ d < c \ \text{ é verdadeiro.} \end{aligned}$$

Nesse caso, a afirmação: "$\exists\ d \in \mathbb{Q}^*$, $\forall\ c \in \mathbb{Q}^*$; $d < c$ é verdadeiro" é falsa, pois no conjunto dos racionais diferentes de zero, não existe o menor número. Isto é, não há um racional d que seja menor que todos os outros. Concluímos que $I[H_7] = F$. Suponha, agora, $I[H_8] = T$. Logo:

$$\begin{aligned} I[H_8] = T &\Leftrightarrow I[(\forall x)(\exists y)p(x,y)] = T, \\ &\Leftrightarrow \forall\ d \in \mathbb{Q}^*,\ < x \leftarrow d > I[(\exists y)p(x,y)] = T, \\ &\Leftrightarrow \forall\ d \in \mathbb{Q}^*;\ \exists\ c \in \mathbb{Q}^*,\ < y \leftarrow c >< x \leftarrow d > I[p(x,y)] = T, \\ &\Leftrightarrow \forall\ d \in \mathbb{Q}^*,\ \exists\ c \in \mathbb{Q}^*;\ d < c \ \text{ é verdadeiro.} \end{aligned}$$

Nesse caso, a afirmação: "$\forall\ d \in \mathbb{Q}^*$, $\exists\ c \in \mathbb{Q}^*$; $d < c$ é verdadeiro." é verdadeira, pois no conjunto dos racionais diferentes de zero, para qualquer número d, sempre há outro número c maior. Logo, $I[H_8] = T$. Concluímos, então, que, segundo a interpretação I, temos $I[H_7] = F$ e $I[H_8] = T$. Logo, $(\exists x)(\forall y)p(x,y)$ e $(\forall x)(\exists y)p(x,y)$ são fórmulas com significados diferentes. Isto é, dizer "para todo x, existe y" não equivale dizer "existe x, para todo y". ■

Exemplo 7.27 (pequena mudança na interpretação) Seja I uma interpretação sobre o domínio dos números naturais $\mathbb{N}$, tal que $I[x] = 3$, $I[a] = 0$ e $I[p] = >$. Considere a fórmula H_9 tal que $H_9 = (\forall x)p(x,a)$. Logo, nesse caso, $I[H_9] = F$. Observe:

$$\begin{aligned} I[H_9] = T &\Leftrightarrow I[(\forall x)p(x,a)] = T, \\ &\Leftrightarrow \forall\ d \in \mathbb{N};\ < x \leftarrow d > I[p(x,a)] = T, \\ &\Leftrightarrow \forall\ d \in \mathbb{N};\ d > 0 \ \text{ é verdadeiro.} \end{aligned}$$

A última afirmação: "$\forall\ d \in \mathbb{N}$; $d > 0$ é verdadeiro" é falsa, pois nem todo número natural d é tal que, $d > 0$ é verdadeiro. Basta fazer, $d = 0$. Logo, é falso que $I[H_9] = T$. Isto é, $I[H_9] = F$ Suponha agora, uma nova interpretação J, que é igual a I, exceto que $J[p] = \geqslant$, no lugar de $I[p] = >$. Essa é uma pequena mudança. Um tracinho a mais no símbolo $>$. Mas, em Lógica, até um pequeno tracinho muda tudo. Veja:

$$\begin{aligned} J[H_9] = T &\Leftrightarrow J[(\forall x)p(x,a)] = T, \\ &\Leftrightarrow \forall\ d \in \mathbb{N};\ < x \leftarrow d > J[p(x,a)] = T, \\ &\Leftrightarrow \forall\ d \in \mathbb{N};\ d \geqslant 0 \ \text{ é verdadeiro.} \end{aligned}$$

Nesse caso, a última afirmação: "$\forall\ d \in \mathbb{N};\ d \geqq 0$ é verdadeiro" é verdadeira. Logo, $J[H_9] = T$. ■

Tenha cuidado com os detalhes das interpretações. Pequenos detalhes na definição de uma interpretação podem modificar todo o resultado da interpretação de uma fórmula. Conforme o Exemplo 7.27, a simples mudança da interpretação de p, de $I[p] = >$ para $J[p] = \geqslant$, modifica o resultado de $I[H_9] = F$ para $J[H_9] = T$.

Várias possibilidades de desenvolvimento de uma demonstração. No método da negação, ou redução ao absurdo, apresentado no Capítulo 4, observamos que o desenvolvimento de uma demonstração se apresenta com uma única possibilidade de desenvolvimento, quando:

1. interpretamos como falso os conectivos "$\rightarrow$", "$\vee$",
2. interpretamos como verdadeiro o conectivo "$\wedge$", e
3. interpretamos como verdadeiro, ou falso, o conectivo "$\neg$".

Analogamente, temos os mesmos princípios para fórmulas da Lógica de Predicados com estruturas iniciais simples, Definição 7.2. Isto é, dada uma fórmula H e uma interpretação I, desejamos saber se $I[H] = T$, ou $I[H] = F$. Se H é, por exemplo, do tipo $(A \rightarrow B)$, é melhor iniciar o desenvolvimento da prova, considerando $I[H] = F$. Pois nesse caso, temos apenas uma possibilidade no desenvolvimento da demonstração. O mesmo ocorre se H é do tipo $(\forall x)(A \rightarrow B)$. Nesse caso, novamente, se o desenvolvimento da demonstração é iniciado, considerando $I[H] = F$, temos apenas uma possibilidade. Observe:

$$\begin{aligned}
I[H] = F &\Leftrightarrow I[(\forall x)(A \rightarrow B)] = F, \\
&\Leftrightarrow \exists\ d \in \mathbb{N};\ <x \leftarrow d> I[(A \rightarrow B)] = F, \\
&\Leftrightarrow \exists\ d \in \mathbb{N};\ <x \leftarrow d> I[A] = T \ \text{ e } \ <x \leftarrow d> I[B] = F, \\
&\Leftrightarrow \ldots\ldots\ldots
\end{aligned}$$

Caso contrário, se o desenvolvimento é iniciado, considerando $I[H] = T$, temos mais de uma possibilidade:

$$\begin{aligned}
I[H] = T &\Leftrightarrow I[(\forall x)(A \rightarrow B)] = T, \\
&\Leftrightarrow \forall\ d \in \mathbb{N};\ <x \leftarrow d> I[(A \rightarrow B)] = T, \\
&\Leftrightarrow \forall\ d \in \mathbb{N};\ <x \leftarrow d> I[A] = T \ \text{ e/ou } \ <x \leftarrow d> I[B] = F, \\
&\Leftrightarrow \ldots\ldots\ldots
\end{aligned}$$

Isso porque temos três possibilidade para o desenvolvimento de:

$$\text{"}<x \leftarrow d> I[A] = T \ \text{ e/ou } \ <x \leftarrow d> I[B] = F\text{"}$$

Exemplo 7.28 (A posição dos quantificadores) Considere a interpretação I sobre o domínio dos números naturais $\mathbb{N}$, tal que $I[x] = 3$, $I[y] = 77$ e $I[p] = <$. Seja a fórmula H_{10}, tal que: $H_{10} = (\forall x)((\exists y)p(x,y) \rightarrow p(x,y))$. Antes de iniciar a análise de $I[H_{10}]$, identificamos os seus símbolos livres. Nesse caso, temos apenas dois símbolos livres: p e y. Observe que a variável y ocorre livre no consequente da implicação. Logo, para determinar $I[H_{10}]$ é necessário utilizar os valores das interpretações $I[p]$ e $I[y]$. Iniciamos a análise a seguir, a partir de $I[H_{10}] = F$. Por quê? A fórmula H_{10} é definida por uma implicação. E a interpretação de uma implicação como falsa determina apenas uma possibilidade de análise, que é o antecedente verdadeiro e o consequente falso. Logo:

$$\begin{aligned}
I[H_{10}] = F \;&\Leftrightarrow\; I[(\forall x)((\exists y)p(x,y) \to p(x,y))] = F, \\
&\Leftrightarrow\; \exists\ d \in \mathbb{N};\ < x \leftarrow d > I[(\exists y)p(x,y) \to p(x,y)] = F, \\
&\Leftrightarrow\; \exists\ d \in \mathbb{N};\ < x \leftarrow d > I[(\exists y)p(x,y)] = T \ \text{ e} \\
&\qquad\qquad\quad < x \leftarrow d > I[p(x,y)] = F, \\
&\Leftrightarrow\; \exists\ d \in \mathbb{N};\ \exists\ c \in \mathbb{N};\ < y \leftarrow c >< x \leftarrow d > I[p(x,y)] = T \ \text{ e} \\
&\qquad\qquad\quad < x \leftarrow d > I[p(x,y)] = F, \\
&\Leftrightarrow\; \exists\ d \in \mathbb{N};\ \exists\ c \in \mathbb{N};\ (d < c) \ \text{ é verdadeiro e } \ (d < 77) \ \text{ é falso.}
\end{aligned}$$

Como a última afirmação: "$\exists\ d \in \mathbb{N};\ \exists\ c \in \mathbb{N};\ (d < c)$ é verdadeiro e $(d < 77)$ é falso", é verdadeira. Logo, $I[H_{10}] = F$. Considere agora a fórmula H_{11} obtida de H_{10} com uma ligeira modificação na posição dos parênteses. Seja, $H_{11} = (\forall x)(\exists y)(p(x,y) \to p(x,y))$. Observe que nesse caso não temos variáveis livres. Apresentamos, a seguir, a nova análise:

$$\begin{aligned}
I[H_{11}] = F \;&\Leftrightarrow\; I[(\forall x)(\exists y)(p(x,y) \to p(x,y))] = F, \\
&\Leftrightarrow\; \exists\ d \in \mathbb{N};\ < x \leftarrow d > I[(\exists y)(p(x,y) \to p(x,y))] = F, \\
&\Leftrightarrow\; \exists\ d \in \mathbb{N}; \forall\ c \in \mathbb{N}, \\
&\qquad\qquad\quad < y \leftarrow c >< x \leftarrow d > I[p(x,y) \to p(x,y)] = F, \\
&\Leftrightarrow\; \exists\ d \in \mathbb{N}; \forall\ c \in \mathbb{N},\ \ < y \leftarrow c >< x \leftarrow d > I[p(x,y)] = T \text{ e} \\
&\qquad\qquad\quad < y \leftarrow c >< x \leftarrow d > I[p(x,y)] = F, \\
&\Leftrightarrow\; \exists\ d \in \mathbb{N}; \forall\ c \in \mathbb{N},\ \ (d < c) \ \text{ é verdadeiro e } \ (d < c) \text{ é falso.}
\end{aligned}$$

A última afirmação "$\exists\ d \in \mathbb{N}; \forall\ c \in \mathbb{N},\ (d < c)$ é verdadeiro e $(d < c)$ é falso" é falsa. É claro que nos naturais não temos um número que seja estritamente menor que todos os outros e, além disso, é falso que tal número é menor que todos os outros. Logo, $I[H_{11}] = T$. Portanto, do ponto de vista semântico, H_{10} e H_{11} expressam conceitos diferentes, dada a mudança do escopo do quantificador $(\exists y)$. ■

Lema 7.1 (interpretação estendida e variável ligada) *Seja H uma fórmula na qual a variável x não ocorre livre. Dada uma interpretação I sobre um domínio U, então $\forall\ d \in U,\ < x \leftarrow d > I[H] = I[H]$.*

Esquema de demonstração. A demonstração do Lema 7.1 utiliza indução no comprimento das fórmulas e não é considerada neste livro. Entretanto, apresentamos a seguir um esquema informal de demonstração. Seja I uma interpretação qualquer, sobre o domínio U:

$$\begin{aligned}
\forall\ d \in U,\ < x \leftarrow d > I[H] = T \;&\Leftrightarrow_1\; \forall\ d \in U,\ I[H] = T, \\
&\Leftrightarrow_2\; I[H] = T.
\end{aligned}$$

Nesse desenvolvimento, temos duas equivalências: $\Leftrightarrow_1$ e $\Leftrightarrow_2$. A justificativa da primeira, $\Leftrightarrow_1$, é que x não ocorre livre em H. Logo, a extensão, em x, da interpretação I não modifica o resultados da interpretação de H. Isto é, $< x \leftarrow d > I[H] = I[H]$. A justificativa de $\Leftrightarrow_2$ é que a quantificação em d não quantifica nada, pois a constante d não ocorre em H. ■

Exemplo 7.29 (interpretação estendida e variável ligada) O Lema 7.1 diz, por exemplo, que:

$$\forall\ d \in U,\ < x \leftarrow d > I[(\forall x)p(x)] = I[(\forall x)p(x)].$$

Observe o desenvolvimento a seguir, nesse caso particular:

$$\begin{aligned} < x \leftarrow d > I[(\forall x)p(x)] = T &\Leftrightarrow\ \forall\ c \in U,\ < x \leftarrow c >< x \leftarrow d > I[p(x)] = T, \\ &\Leftrightarrow\ \forall\ c \in U,\ < x \leftarrow c > I[p(x)] = T, \\ &\Leftrightarrow\ I[(\forall x)p(x)] = T. \end{aligned}$$

Observe que nessas equivalências, é utilizado que
$< x \leftarrow c >< x \leftarrow d > I =< x \leftarrow c > I$. ■

7.7 Tradução de sentenças

Como na Lógica Proposicional, procuramos pela ligação entre a realidade semântica e a sintática. Pela correspondência entre as sentenças do nosso dia a dia e as fórmulas da Lógica de Predicados. Entretanto, como acontece na Lógica Proposicional, na Lógica de Predicados também nem todo conceito semântico pode ser traduzido adequadamente em uma fórmula. Entretanto, mesmo com as dificuldades de uma tradução fiel, vários tipos de sentenças do nosso uso possuem traduções para as fórmulas da Lógica de Predicados, o que tem várias aplicações em inúmeras áreas do conhecimento.

Exemplo 7.30 (tradução de sentenças) É comum dizer que a representação, na Lógica de Predicados, da sentença "Todo homem é mortal" é a fórmula $(\forall x)p(x)$. Entretanto, devemos ter cuidado. Isso porque essa mesma fórmula pode representar a sentença "Todo número é par". Assim, para dizer que $(\forall x)p(x)$ realmente representa "Todo homem é mortal", devemos fornecer mais informação. É necessário dizer em que contexto estamos comunicando e como estamos interpretando o predicado p. Isto é, devemos definir uma interpretação I_1 que faz a associação entre a sentença da língua portuguesa e a fórmula da Lógica de Predicados. Sem a necessária formalidade, a representação não se adequa. Seja, então, uma interpretação I_1 sobre o conjunto das pessoas, tal que:

$I_1[p(x)] = T$, se, e somente se, $I_1[x]$ é mortal.

Nesse caso, então, podemos dizer que a sentença "Todo homem é mortal" é representada, segundo a interpretação I_1, pela fórmula $(\forall x)p(x)$. Mas, a sentença "Todo homem é mortal" pode ser escrita, equivalentemente, em outras formas, como, por exemplo,

1. Qualquer homem é mortal;
2. Os homens são mortais;
3. Se alguma coisa é homem, é um mortal;
4. Qualquer coisa que é homem é mortal;
5. Se algo não é mortal, então não é homem;
6. Todos os não mortais não são homens;
7. Uma coisa é homem somente se é mortal;
8. Somente mortais são homens;
9. Nada é homem, a menos que seja mortal;
10. Nenhum homem é não mortal.

Isso significa que, segundo a interpretação I_1, todas essas sentenças têm a mesma tradução na Lógica de Predicados: $(\forall x)p(x)$. Portanto, para traduzir uma sentença, devemos dizer qual a interpretação estamos considerando. Além disso, como podemos ter sentenças equivalentes, a fórmula da Lógica de Predicados obtida, que traduz a sentença inicial, também pode representar outras sentenças. ■

Exemplo 7.31 (tradução de sentenças) Considere a fórmula $(\forall x)p(x)$. Conforme o Exemplo 7.30, segundo a interpretação I_1, essa fórmula representa a sentença "Todo homem é mortal". Mas, se a interpretação I_1 é modificada, a fórmula pode não representar mais essa sentença. Suponha, por exemplo, a interpretação I_2 sobre o conjunto dos números naturais $\mathbb{N}$, tal que:

$I_2[p(x)] = T$, se, e somente se, $I_2[x] \geqslant 0$.

Nesse caso, segundo a interpretação I_2, a fórmula $(\forall x)p(x)$ representa a sentença "Todo número natural é maior, ou igual a zero". Além disso, se modificamos a interpretação, uma mesma sentença pode ter mais de uma representação na Lógica de Predicados. Considere, novamente, a sentença "Todo número natural é maior, ou igual a zero" e seja I_3, uma interpretação sobre o domínio dos números reais, $\mathbb{R}$. Considere os predicados q e p tais que:

$I_3[p(x)] = T$ se, e somente se, x_{I_3} é um número natural,
$I_3[q(x)] = T$ se, e somente se, $x_{I_3} \geqslant 0$.

Nesse caso, a sentença: "Todo número natural é maior, ou igual a zero" é representada pela fórmula $(\forall x)(p(x) \rightarrow q(x))$. Observe que a mudança da interpretação modifica a representação na Lógica de Predicados. Portanto, dada uma sentenças, podemos ter mais de uma fórmula que a representa. Por outro lado, dada uma fórmula H, ela pode representar diferentes sentenças. ■

Exemplo 7.32 (tradução de sentenças) Considere a sentença "Nenhuma aranha é um inseto". Para representar essa sentença na Lógica de Predicados, o primeiro passo é definir uma interpretação que a associe a uma fórmula. Seja, então, uma interpretação I_4 sobre o conjunto dos animais. Considere os predicados q e p tais que:

$I_4[p(x)] = T$ se, e somente se, x_{I_4} é um inseto;
$I_4[q(x)] = T$ se, e somente se, x_{I_3} é uma aranha.

Nesse caso, a sentença: "Nenhuma aranha é um inseto" é representada pela fórmula $H_1 = \neg(\exists x)(q(x) \wedge p(x))$. A sentença: "Nenhuma aranha é um inseto" pode ser escrita, equivalentemente, em outras formas, como, por exemplo:

1. Todas as aranhas são não insetos;
2. Todos os insetos são não aranhas;
3. Nada que seja inseto pode ser aranha;
4. Nada é aranha a menos que seja inseto;
5. Somente não aranhas é que são insetos;
6. Se algo é aranha, não é inseto;
7. Se algo é inseto, então não é aranha.

Isso significa que, segundo a interpretação I_4, todas essas sentenças têm a mesma tradução na Lógica de Predicados: $\neg(\exists x)(q(x) \wedge p(x))$. Considere, agora, a sentença "Se algo é aranha, não é inseto" e a interpretação I_4. Essa sentença é traduzida, segundo I_4, na fórmula $H_2 = (\forall x)(q(x) \rightarrow \neg p(x))$. Observe algo importante: as fórmulas H_1 e H_2 são diferentes mas representam, segundo I_4, a mesma sentença. Então, é claro, necessariamente, devemos ter que H_1 é equivalente a H_2. Caso contrário, tudo estaria perdido. Demonstramos no próximo capítulo que esse é o caso. Tais fórmulas são equivalentes. ■

7.8 A Aritmética

Nas seções anteriores, em vários exemplos, consideramos a representação de sentenças da Aritmética na Lógica de Predicados. Isso ocorre não por acaso, mas porque o estudo da Aritmética é um dos grandes objetivos da Lógica. Sendo a expressividade e o poder de dedução da Aritmética importantes características, buscadas pela maioria dos sistemas lógicos. Para representar as propriedades aritméticas na Lógica, o primeiro passo é começar por seus conceitos fundamentais. Entre esses conceitos fundamentais, que precedem todos os outros, temos o de número, depois aqueles que definem funções básicas como adição, subtração, multiplicação etc.

7.8.1 Representação dos números naturais

Quando consideramos uma interpretação I sobre os naturais $\mathbb{N}$ tal que $I[a] = 0$, estamos dizendo que o conceito semântico que corresponde ao número zero, corresponde ao símbolo sintático a, que pertence ao alfabeto da Lógica. Observe que não estamos dizendo que $a = 0$. Isso está errado, pois iguala o conceito sintático expresso em "a", ao conceito semântico expresso em "0". Estamos dizendo que a interpretação de a, segundo I, é igual a 0. Pode até existir outra interpretação J, sobre os naturais $\mathbb{N}$, tal que $J[a] = 3$. Nesse caso, o conceito sintático: a, não corresponde mais ao número 0. Ele corresponde ao símbolo semântico 3. Por isso, não podemos dizer que $a = 3$ e nem que $a = 0$. Pois tudo depende da interpretação considerada. Podemos, portanto, até ter um símbolo sintático que corresponde ao número 0. Devemos deixar claro, porém, qual interpretação estamos considerando. Para simplificar essa situação, podemos estabelecer um acordo: escolher uma constante do alfabeto da Lógica, tal que todas as interpretações a interpreta como o número 0. Essa constante poderia ser a, b, ou c, ou outra qualquer. Mas, para simplificar nossa notação, incluímos uma constante especial no alfabeto da Lógica e a denominamos de $\overline{0}$. Observe que o símbolo $\overline{0}$ não é o símbolo semântico 0. Por isso, $\overline{0}$ tem o tracinho em cima. Dessa forma, temos o primeiro passo para definir uma classe especial de interpretações, denominadas modelo padrão.

Seja I uma interpretação sobre $\mathbb{N}$. Se I é um modelo padrão, então:

1. $I[\ \overline{0}\ ] = 0$.

Seguindo essa linha de raciocínio, poderíamos fazer o mesmo para os outros números. Mas, isso exigiria infinitos acordos sobre infinitas constantes. Por isso, usualmente, utilizamos outra forma de representar os outros números. De novo, para simplificar nossa notação, adicionamos mais um símbolo ao alfabeto da Lógica. Tal símbolo é a função sucessor: S. A ideia é que o termo $S(\overline{0})$ seja interpretado, pelo modelo padrão, como o número 1, que $S(S(\overline{0}))$ seja interpretado como o número 2 e assim por diante. Portanto, em um modelo padrão temos:

2. $I[S(\overline{0})] = 1,\ I[S(S(\overline{0}))] = 2,\ I[S(S(S(\overline{0})))] = 3,$
   $I[S(S(S(S(\overline{0}))))] = 4, \ldots,$

Notação. Para denotar o termo $S(\overline{0})$, utilizamos o símbolo $\overline{1}$. Para denotar o termo $S(S(\overline{0}))$, utilizamos o símbolo $\overline{2}$ e assim por diante. Portanto, em geral, se temos n repetições do símbolo S, em $S(S \ldots (S(\overline{0})) \ldots)$, o termo é denotado por $\overline{n}$.

Observe que os símbolos $\overline{1}, \overline{2}, \ldots$ não pertencem ao alfabeto da Lógica. Eles denotam termos da Lógica de Predicados. Portanto, utilizando a notação acima, estamos supondo que para um modelo padrão I, temos: $I[\ \overline{1}\ ] = 1$, $I[\ \overline{2}\ ] = 2$, $I[\ \overline{3}\ ] = 3$, $I[\ \overline{4}\ ] = 4, \ldots,$ Isto é, os símbolos $\overline{1}, \overline{2}, \ldots$ são os numerais que denotam os números naturais $1, 2, \ldots$. Certamente, ao iniciar o estudo da aritmética, você aprendeu a diferença entre números, numerais e algarismos.

Número é a ideia de quantidade que nos vem à mente quando contamos, ordenamos e medimos. Assim, no mundo semântico da Lógica, estamos pensando em números. E, usando esses números, podemos contar quantidades, enumerar posições em uma fila, ou medir o peso de um corpo.

Numeral é a representação sintática de um número, que pode ser escrita, falada ou digitada.

Algarismo é símbolo numérico que usamos para formar os numerais escritos.

Por exemplo, o número 3, da semântica, pode ser representado pelo numeral $S(S(S(\overline{0})))$ da sintaxe. Mas pode também ser representado de muitas outras maneiras. No sistema binário, por exemplo, tem a representação: 11. Além disso, cada representação tem seus algarismos. Podemos usar 1 e 0, como no sistema binário, ou denotá-los por $\overline{1}, \overline{2}, \ldots$, conforme a notação que estamos seguindo.

7.8.2 Representação das operações básicas da aritmética

Já temos uma representação dos números semânticos por algarísmos da sintaxe. Mas, isso, certamente, não basta. Devemos, também, representar as operações básicas da aritmética como adição, multiplicação etc. E para fazer isso, seguimos a mesma estratégia da representação dos números. Ou seja, escolhemos dois símbolos de funções, por exemplo, f e g e fazemos um acordo no qual as interpretações interpretam tais símbolos como adição e multiplicação respectivamente. Supomos, portanto, que para todo modelo padrão I, $I[\ f\ ] = +$ e $I[\ g\ ] = \times$. Em seguida, para facilitar a nossa compreensão, utilizamos a notação a seguir.

Notação. Para denotar a função adição f, utilizamos o símbolo $\widehat{+}$ e para denotar a função multiplicação g, utilizamos o símbolo $\widehat{\times}$.

Novamente, observe que os símbolos $\widehat{+}$ e $\widehat{\times}$ não pertencem ao alfabeto da Lógica. Eles denotam, respectivamente, as funções adição e multiplicação. Assim, utilizando essa notação, temos a definição. Nesse sentido, um modelo padrão é tal que.

3. $I[\ \widehat{+}\ ] = +$;
4. $I[\ \widehat{\times}\ ] = \times$.

Além disso, as funções $\widehat{+}$ e $\widehat{\times}$ são utilizadas na notação infixa e não prefixa. Isto é, escrevemos, por exemplo, $(x \mathbin{\widehat{+}} y)$ e não $\widehat{+}(x, y)$. Da mesma forma, escrevemos, por exemplo, $(x \mathbin{\widehat{\times}} y)$ e não $\widehat{\times}(x, y)$. Dada essa representação da adição e multiplicação, temos a representação das operações semânticas de adição e multiplicação. Nesse sentido, a interpretação pelo modelo padrão é tal que:

5. $I[S(x)] = I[x] + 1$;
6. $I[(x \mathbin{\widehat{+}} y)] = I[x] + I[y]$;
7. $I[(x \mathbin{\widehat{\times}} y)] = I[x] \times I[y]$.

Os itens acima devem ser lidos com cuidado. Observe que $(x \mathbin{\widehat{+}} y)$ é um termo da sintaxe que é interpretado, por um modelo padrão I, como: $I[x] + I[y]$. Da mesma forma, $(x \mathbin{\widehat{\times}} y)$ é um termo da sintaxe que é interpretado por um modelo padrão I como: $I[x] \times I[y]$. E, para diferenciar, de forma clara, os símbolos da sintaxe e da semântica, utilizamos os símbolos $\widehat{+}$ e $\widehat{\times}$ para sintaxe e $+$ e $\times$ para semântica.

7.8.3 Representação de propriedades da aritmética

Para representar uma propriedade aritmética como, por exemplo, que todo número é divisível por 2, ou que os números primos não possuem divisores diferentes de 1 e dele próprio, em geral, temos que utilizar um predicado que representa a igualdade. Nesse sentido, o nosso próximo passo é um acordo entre as interpretações para interpretar um símbolo de predicado, específico, como a igualdade. O raciocínio utilizado é análogo aquele que define as operações adição e multiplicação. Isto é, escolhemos um símbolo de predicado, p por exemplo, e o interpretamos como a igualdade. Entretanto, para facilitar nossa compreensão, denotamos tal símbolo de predicado por $\hat{=}$. E, nesse caso, supomos que o símbolo de igualdade é interpretado pelo modelo padrão I como:

8. se t_1 e t_2 são termos, então $I[(t_1 \hat{=} t_2)] = T \;\Leftrightarrow\; I[t_1] = I[t_2]$;
9. $I[(\forall x)(x \hat{=} x)] = T$;
10. para toda fórmula $H(x)$, $I[(x \hat{=} y) \rightarrow (H(x) \hat{=} H(y))] = T$.

Temos, portanto, mais dois itens na definição de modelo padrão. Isto é, todas as interpretações modelo padrão interpretam o predicado $\hat{=}$ de forma especial. Juntando todas as partes que compõem a definição de um modelo padrão, temos.

Definição 7.6 (modelo padrão) *Seja I uma interpretação sobre $\mathbb{N}$. I é um modelo padrão se, e somente se:*

1. $I[\ \overline{0}\ ] = 0$;
2. $I[S(\overline{0})] = 1,\ I[S(S(\overline{0}))] = 2,\ I[S(S(S(\overline{0})))] = 3,$
   $I[S(S(S(S(\overline{0}))))] = 4, \ldots,$;
3. $I[\ \hat{+}\ ] = +$;
4. $I[\ \hat{\times}\ ] = \times$;
5. $I[S(x)] = I[x] + 1$;
6. $I[(x \mathbin{\hat{+}} y)] = I[x] + I[y]$;
7. $I[(x \mathbin{\hat{\times}} y)] = I[x] \times I[y]$;
8. *se t_1 e t_2 são termos, então* $I[(t_1 \hat{=} t_2)] = T \;\Leftrightarrow\; I[t_1] = I[t_2]$;
9. $I[(\forall x)(x \hat{=} x)] = T$;
10. *para toda fórmula $H(x)$,* $I[(x \hat{=} y) \rightarrow (H(x) \hat{=} H(y))] = T$.

Considerando essa interpretação do modelo padrão, podemos representar algumas propriedades da aritmética, como é indicado nos exemplos a seguir.

Exemplo 7.33 (números pares) Considere a fórmula H_{par}, tal que: $H_{par} = (\exists x)(\overline{2} \mathbin{\hat{\times}} x \hat{=} y)$. Na fórmula H_{par}, a variável y ocorre livre e para enfatizar tal fato, usamos a notação $H_{par}(y)$. Temos, então, que para todo modelo padrão I, se $I[y] = n$, então $I[H_{par}(y)] = T$, $\Leftrightarrow$ n é um número par. Veja a demonstração desse fato:

$$\begin{aligned}
I[H_{par}] = T \;&\Leftrightarrow\; I[(\exists x)(\overline{2} \mathbin{\hat{\times}} x \hat{=} y)] = T,\\
&\Leftrightarrow\; \exists\, d \in \mathbb{N};\ < x \leftarrow d > I[(\overline{2} \mathbin{\hat{\times}} x \hat{=} y)] = T,\\
&\Leftrightarrow\; \exists\, d \in \mathbb{N};\ (2 \times d = y_I)\ \text{ é verdadeiro},\\
&\Leftrightarrow\; \exists\, d \in \mathbb{N};\ (2 \times d = n)\ \text{ é verdadeiro}.
\end{aligned}$$

Nesse caso, a última afirmação "$\exists\ d \in \mathbb{N};\ (2 \times d = n)$ é verdadeiro" é verdadeira se, e somente se, n é um número par. Portanto, se $I[y] = n$, então $I[H_{par}(y)] = T$, $\Leftrightarrow$ n é um número par. Conclusão: a fórmula $H_{par}(y)$ expressa a propriedade dos números pares. Ou, dito de outra forma, $H_{par}(y)$ possui o conjunto dos números pares como sua extensão. ■

Exemplo 7.34 (números ímpares) Se temos uma fórmula que expressa os números pares, a sua negação expressa os números ímpares. Considere a fórmula H_{impar}, tal que:

$$H_{impar} = \neg H_{par} = \neg(\exists x)(\overline{2}\ \widehat{\times}\ x \mathrel{\widehat{=}} y).$$

Temos, então, que para todo modelo padrão I:

Se $I[y] = n$, então $I[H_{impar}(y)] = T$, $\Leftrightarrow$ n é um número ímpar. ■

Exemplo 7.35 (números primos) Considere a fórmula H_{primo}, tal que:

$$H_{primo} = \neg(x \mathrel{\widehat{=}} \overline{1}) \wedge (\forall y)(\forall z)(((y\ \widehat{\times}\ z) \mathrel{\widehat{=}} x) \rightarrow ((y \mathrel{\widehat{=}} \overline{1}) \vee (z \mathrel{\widehat{=}} \overline{1})))$$

Na fórmula H_{primo}, a variável x ocorre livre e para enfatizar tal fato, como no Exemplo 7.33, usamos a notação $H_{primo}(x)$. Temos, então, que para todo modelo padrão I:

Se $I[x] = n$, então $I[H_{primo}(x)] = T$, $\Leftrightarrow$ n é um número primo.

Veja a demonstração desse fato:

$I[\ H_{primo}] = T$

$\Leftrightarrow$ $I[\neg(x \mathrel{\widehat{=}} \overline{1}) \wedge (\forall y)(\forall z)(((y\ \widehat{\times}\ z) \mathrel{\widehat{=}} x) \rightarrow ((y \mathrel{\widehat{=}} \overline{1}) \vee (z \mathrel{\widehat{=}} \overline{1})))] = T$,

$\Leftrightarrow$ $I[\neg(x \mathrel{\widehat{=}} \overline{1})] = T$ e
$I[(\forall y)(\forall z)(((y\ \widehat{\times}\ z) \mathrel{\widehat{=}} x) \rightarrow ((y \mathrel{\widehat{=}} \overline{1}) \vee (z \mathrel{\widehat{=}} \overline{1})))] = T$,

$\Leftrightarrow$ $I[\neg(x \mathrel{\widehat{=}} \overline{1})] = T$ e
$\forall\ d \in \mathbb{N};\ < y \leftarrow d > I[(\forall z)(((y\ \widehat{\times}\ z) \mathrel{\widehat{=}} x) \rightarrow ((y \mathrel{\widehat{=}} \overline{1}) \vee (z \mathrel{\widehat{=}} \overline{1})))] = T$,

$\Leftrightarrow$ $I[\neg(x \mathrel{\widehat{=}} \overline{1})] = T$ e
$\forall\ d \in \mathbb{N},\ \forall\ c \in \mathbb{N};$
$< z \leftarrow c >< y \leftarrow d > I[((y\ \widehat{\times}\ z) \mathrel{\widehat{=}} x) \rightarrow ((y \mathrel{\widehat{=}} \overline{1}) \vee (z \mathrel{\widehat{=}} \overline{1}))] = T$,

$\Leftrightarrow$ $(n \neq 1)$ e
$\forall\ d \in \mathbb{N},\ \forall\ c \in \mathbb{N};$ se $((d \times c) = n)$, então $((d = 1)$ ou $(c = 1))$.

A última afirmação:

"$(n \neq 1)$ e $\forall\ d \in \mathbb{N},\ \forall\ c \in \mathbb{N};$ se $((d \times c) = n)$, então $((d = 1)$ ou $(c = 1))$"

é verdadeira se, e somente se, n é um número primo. Portanto, se $I[x] = n$, então:

$I[H_{primo}(x)] = T$, $\Leftrightarrow$ n é um número primo.

Conclusão: a fórmula $H_{primo}(x)$ expressa a propriedade dos números primos. Dizemos que essa fórmula expressa o conjunto dos números primos como sua extensão. ■

Exemplo 7.36 (predicado $\leqq$) Considere a fórmula $H_{\leqq}$, tal que:
$H_{\leqq} = (\exists z)(z \mathbin{\widehat{+}} x \mathbin{\widehat{=}} y)$. Na fórmula $H_{\leqq}$, as variáveis x e y ocorrem livres. Usamos, então, para dar ênfase, a notação $H_{\leqq}(x, y)$. Nesse caso, para todo modelo padrão I:
Se $I[x] = n$ e $I[y] = m$, então $I[H_{\leqq}(x, y)] = T$, $\Leftrightarrow$ $(n \leqq m)$. ■

7.8.4 A Aritmética de Robinson

A Aritmética de Robinson, denominada Aritmética básica, tem como fundamento sintático a linguagem da Lógica de Predicados, tal que:

1. o alfabeto contém, além dos símbolos usuais, os símbolos $\overline{0}, S, \widehat{+}$ e $\widehat{\times}$, ou
2. o alfabeto contém apenas os símbolos usuais, mas existe nesse alfabeto os símbolos a, f, g, h e p tais que para todo modelo padrão I, temos: $I[a] = 0$, $I[f] =$ função sucessor, $I[g] = +$, $I[h] = \times$, e $I[p] =$ " $=$". Nesse caso, denotamos a por $\overline{0}$, f por S, g por $\widehat{+}$, h por $\widehat{\times}$ e p por $\widehat{=}$.

Isto é, o alfabeto dessa aritmética é igual ao alfabeto da Definição 6.1 do Capítulo 6, mais $\overline{0}$, ou a, que representa o número 0, S, ou f, que representa a função sucessor. Há também os símbolos para as operações aritméticas básicas: $\widehat{+}$, ou g, que representa a adição e $\widehat{\times}$, ou h, que representa a multiplicação. Além disso, temos um símbolo de predicados para representar a igualdade. Portanto, a Aritmética de Robinson é uma aritmética definida a partir da Lógica de Predicados, mas tendo a adição de alguns símbolos ao alfabeto, ou alguma restrição sobre suas interpretações dos símbolos já existentes. Para facilitar o entendimento da semântica de tais símbolos, conforme a Definição 7.6, há um acordo entre as interpretações sobre os naturais $\mathbb{N}$ e todas elas interpretam os símbolos aritméticos como gostaríamos que fosse. Isto é, $\overline{0}$ representa o número 0, S representa a função sucessor, $\widehat{+}$ a função de adição, $\widehat{\times}$ a multiplicação e $\widehat{=}$ a igualdade. Nesse sentido, podemos dizer que a Aritmética de Robinson é um sistema lógico com identidade, denotada pelo infixo "$\widehat{=}$". Além disso, nesse sistema temos várias constantes, que formam o conjunto dos números naturais. Em destaque especial, temos a constante $\overline{0}$, chamada de zero. Existe ainda três operações sobre o conjunto dos naturais. Uma operação unária chamada sucessor e denotada pelo prefixo S. E duas operações binárias, adição e multiplicação, denotadas pelos infixos $\widehat{+}$ e $\widehat{\times}$, respectivamente. Além dessas características, a Aritmética de Robinson tem também alguns princípios fundamentais, que expressam propriedades básicas dos números e das operações de adição e multiplicação. Os princípios fundamentais da Aritmética de Robinson são definidos a seguir:

1. $Bx_1 = (\forall x)\neg(\overline{0} \mathbin{\widehat{=}} S(x))$;
2. $Bx_2 = (\forall x)(\forall y)((S(x) \mathbin{\widehat{=}} S(y)) \rightarrow (x \mathbin{\widehat{=}} y)$;
3. $Bx_3 = (\forall x)(\neg(x \mathbin{\widehat{=}} \overline{0}) \rightarrow (\exists y)(x \mathbin{\widehat{=}} S(y))$;
4. $Bx_4 = (\forall x)((x \mathbin{\widehat{+}} \overline{0}) \mathbin{\widehat{=}} x)$;
5. $Bx_5 = (\forall x)(\forall y)((x \mathbin{\widehat{+}} S(y)) \mathbin{\widehat{=}} S(x \mathbin{\widehat{+}} y))$;

6. $Bx_6 = (\forall x)((x \mathbin{\widehat{\times}} \overline{1}) \mathrel{\widehat{=}} \overline{x})$;

7. $Bx_7 = (\forall x)(\forall y)((x \mathbin{\widehat{\times}} S(y)) \mathrel{\widehat{=}} ((x \mathbin{\widehat{\times}} y) \mathbin{\widehat{+}} x))$.

Observe que tais princípios definem algumas propriedades que aprendemos, bem cedo, na escola fundamental.

Propriedade 1. Essa propriedade diz que o número 0 é diferente de todos os outros números naturais.

Propriedade 2. Essa propriedade diz que se os sucessores de x e y são iguais, então x e y são iguais.

Propriedade 3. Essa propriedade diz que se um número não é zero, então ele é o sucessor de outro número.

Propriedade 4. Essa propriedade diz que o número $\overline{0}$ é o elemento neutro da adição.

Propriedade 5. Essa propriedade define uma forma recursiva de efetuar a adição. Conforme essa propriedade, a soma de x e Sy é efetuada primeiro somando x e y e depois determinando o sucessor de $x \widehat{+} y$. Veja um exemplo:

$$\begin{aligned}
\overline{3} \mathbin{\widehat{+}} \overline{3} &\mathrel{\widehat{=}} S(\overline{3} \mathbin{\widehat{+}} \overline{2}) \\
&\mathrel{\widehat{=}} S(S(\overline{3} \mathbin{\widehat{+}} \overline{1})) \\
&\mathrel{\widehat{=}} S(S(S(\overline{3} \mathbin{\widehat{+}} \overline{0}))) \\
&\mathrel{\widehat{=}} S(S(S(\overline{3}))) \\
&\mathrel{\widehat{=}} S(S(\overline{4})) \\
&\mathrel{\widehat{=}} S(\overline{5}) \\
&\mathrel{\widehat{=}} \overline{6}
\end{aligned}$$

Propriedade 6. Essa propriedade diz que o número $\overline{1}$ é o elemento neutro da adição.

Propriedade 7. Essa propriedade define uma forma recursiva de efetuar a multiplicação. Conforme essa propriedade, a multiplicação de x e Sy é efetuada primeiro multiplicando x e y e depois, somando o resultado com x. Veja um exemplo:

$$\begin{aligned}
\overline{3} \mathbin{\widehat{\times}} \overline{3} &\mathrel{\widehat{=}} (\overline{3} \mathbin{\widehat{\times}} \overline{2}) \mathbin{\widehat{+}} \overline{3} \\
&\mathrel{\widehat{=}} ((\overline{3} \mathbin{\widehat{\times}} \overline{1}) \mathbin{\widehat{+}} \overline{3}) \mathbin{\widehat{+}} \overline{3} \\
&\mathrel{\widehat{=}} (\overline{3} \mathbin{\widehat{+}} \overline{3}) \mathbin{\widehat{+}} \overline{3} \\
&\mathrel{\widehat{=}} \overline{6} \mathbin{\widehat{+}} \overline{3} \\
&\mathrel{\widehat{=}} \overline{9}
\end{aligned}$$

7.8.5 Definições recursivas na Aritmética de Robinson.

Nas propriedades 6 e 7, da Aritmética de Robinson, a multiplicação de dois números é definida recursivamente utilizando a adição. Em outras palavras, para efetuar a operação $(x \mathbin{\widehat{\times}} S(y))$, primeiro efetuamos a operação $(x \mathbin{\widehat{\times}} y)$ e em seguida adicionamos o resultado a x. Nesse caso, o nosso objetivo é $(x \mathbin{\widehat{\times}} S(y))$. Então, tal objetivo é reduzido a um mais simples $(x \mathbin{\widehat{\times}} y)$, dado que $S(y)$ é substituído por um número menor: y. E tendo o resultado $(x \mathbin{\widehat{\times}} y)$, utilizamos a definição da adição para calcular $(x \mathbin{\widehat{\times}} y) \mathbin{\widehat{+}} x$. Na sequência, para calcular $(x \mathbin{\widehat{\times}} y)$, o raciocínio se repete. Ou seja, reduzimos $(x \mathbin{\widehat{\times}} y)$ ao cálculo de $(x \mathbin{\widehat{\times}} z)$, tal que $S(z) = y$. E dado o resultado $(x \mathbin{\widehat{\times}} z)$, nós o adicionamos a x. Portanto, nesse sentido, a multiplicação por $(x \widehat{\times} y)$ é obtida fazendo a multiplicação de x por z e depois adicionando x ao resultado.

Exemplo 7.37 (função fatorial) No Exemplo 6.17, do Capítulo 6, apresentamos o programa lógico

1. $p(a, b) \leftarrow$

2. $p(f(x), y) \leftarrow p(x, z), q(g(f(x), z), y)$

O significado desse programa, evidentemente, depende da interpretação de seus símbolos livres. Considere, então, o modelo padrão da Aritmética, no qual temos: $I[a] = 0$, $I[b] = 1$, $I[g] = \times$, $I[f] =$ função sucessor e $I[q] =$ predicado de igualdade. Então, com a notação da Aritmética básica, temos o programa lógico:

1. $p(\overline{0}, \overline{1}) \leftarrow$

2. $p(S(x), y) \leftarrow p(x, z), (y \mathrel{\widehat{=}} (S(x) \mathbin{\widehat{\times}} z))$

Nesse caso, para todo modelo padrão I, $I[p(\overline{n}, \overline{m})] = T$ se, e somente se, $(m = n!)$. Isto é, m é igual ao fatorial de n. Em geral, para ficar mais clara a intenção semântica, escrevemos p_{fat} no lugar do símbolo p. Temos, portanto, o programa:

1. $p_{fat}(\overline{0}, \overline{1}) \leftarrow$

2. $p_{fat}(S(x), y) \leftarrow p_{fat}(x, z), (y \mathrel{\widehat{=}} (S(x) \mathbin{\widehat{\times}} z))$

A primeira linha desse programa diz que $0! = 1$. E a segunda linha diz que $(x + 1)! = x! \times x$. Observe que o predicado p_{fat} é definido recursivamente, pois $p_{fat}(S(x), y)$ é definido em função de um caso mais simples: $p_{fat}(x, y)$, no qual "'ser mais simples" significa considerar números menores. Analogamente, podemos definir a função fatorial utilizando o programa iterativo.

Function $fact(n)$

1. $fact = 1$
2. For $y = 0$ to $(n - 1)$
3. Do $fact = (fact \times S(y))$
4. Loop

Essa ideia pode ser generalizada. Isto é, dada a definição recursiva de uma função, como se segue:

1. $f(\overline{0}) \mathrel{\widehat{=}} a$

2. $f(S(x)) \widehat{=} h(y, f(x))$

ela pode ser programada na forma iterativa, utilizando a instrução "*for - to*":

1. $func = a$
2. For $x = 0$ to $(n-1)$
3. Do $func = h(x, func(x))$
4. Loop

■

Essa técnica de definições recursivas de funções e predicados pode ser usada para definir outras operações.

Exemplo 7.38 (função exponencial) A função exponencial é definida recursivamente a seguir. Nesse caso, utilizamos o símbolo $\uparrow$ para representar a função exponencial. Isto é, nessa notação temos, por exemplo, que $\overline{2}^{\overline{3}}$ é denotado por $\overline{2} \uparrow \overline{3}$.

1. $(\forall x)((x \ \uparrow \ \overline{0}) \widehat{=} \overline{1})$
2. $(\forall x)(\forall y)((x \ \uparrow \ S(y)) \widehat{=} ((x \ \uparrow \ y) \ \widehat{\times} \ x))$

Conforme essa definição, temos que, para todo x, $(x \ \uparrow \ \overline{0}) \widehat{=} \overline{1}$. Isto é, para qualquer x, x elevado a $\overline{0}$ é igual a $\overline{1}$. Veja, agora, um exemplo de cálculo utilizando a função exponencial.

$$\begin{aligned}
\overline{3} \ \uparrow \ \overline{3} \ &\widehat{=} (\overline{3} \ \uparrow \ \overline{2}) \ \widehat{\times} \ \overline{3} \\
&\widehat{=} ((\overline{3} \ \uparrow \ \overline{1}) \ \widehat{\times} \ \overline{3}) \ \widehat{\times} \ \overline{3} \\
&\widehat{=} (((\overline{3} \ \uparrow \ \overline{0}) \ \widehat{\times} \ \overline{3}) \ \widehat{\times} \ \overline{3}) \ \widehat{\times} \ \overline{3} \\
&\widehat{=} ((\overline{1} \ \widehat{\times} \ \overline{3}) \ \widehat{\times} \ \overline{3}) \ \widehat{\times} \ \overline{3} \\
&\widehat{=} (\overline{3} \ \widehat{\times} \ \overline{3}) \ \widehat{\times} \ \overline{3} \\
&\widehat{=} \overline{9} \ \widehat{\times} \ \overline{3} \\
&\widehat{=} \overline{27}
\end{aligned}$$

O programa lógico correspondente à exponenciação é dado a seguir.

1. $p_{\uparrow}(\overline{x}, \overline{0}, \overline{1}) \ \leftarrow$

2. $p_{\uparrow}(x, S(y), z) \ \leftarrow \ p_{\uparrow}(x, y, w), (z \ \widehat{=} \ (w \ \widehat{\times} \ x))$

Como no caso da função fatorial, podemos definir a função exponencial, utilizando o programa iterativo.

Function $exp(m, n)$

1. $exp = 1$
2. For $y = 1$ to n
3. Do $fact = (fact \ \times \ m)$

4. Loop

Logo, nesse caso, $exp(m, n) = m^n$. ■

Observe que o item 2 da definição recursiva da função exponencial $\uparrow$, dada por

2. $(\forall x)(\forall y)((x \ \uparrow \ S(y)) \ \widehat{=} \ ((x \ \uparrow \ y) \ \widehat{\times} \ x))$

pode ser obtida de Bx_7:

7. $Bx_7 = (\forall x)(\forall y)((x \ \widehat{\times} \ S(y)) \ \widehat{=} \ ((x \ \widehat{\times} \ y) \ \widehat{+} \ x))$,

substituindo, em Bx_7, a multiplicação $\widehat{\times}$ pela exponenciação $\uparrow$ e a adição $\widehat{+}$ pela multiplicação $\widehat{\times}$. Analogamente, Bx_7 pode ser obtida de Bx_5:

5. $Bx_5 = (\forall x)(\forall y)((x \ \widehat{+} \ S(y)) \ \widehat{=} \ S(x \ \widehat{+} \ y))$,

substituindo a adição $\widehat{+}$ pela multiplicação $\widehat{\times}$ e a função sucessor S pela adição $\widehat{+}$.

Nesse sentido, temos uma sequência de substituições que começam com os símbolos $\{S, \ \widehat{+}\}$ em Bx_5. Depois os símbolos $\{\widehat{+}, \ \widehat{\times}\}$ em Bx_6. Na sequência, os símbolos $\{\widehat{\times}, \ \uparrow\}$ na função Exp. Preste atenção na sequência:

1. Bx_5, símbolos $\{S, \ \widehat{+}\}$;
2. Bx_7, símbolos $\{\widehat{+}, \ \widehat{\times}\}$;
3. Exp, símbolos $\{\widehat{\times}, \ \uparrow\}$.

Essa sequência pode ser aumentada, considerando outras funções, que são definidas de forma análoga à função Exp. Considere, por exemplo, mais duas funções $Exp \Uparrow$ e $Exp \uparrow\uparrow$. Nesse caso, a sequência anterior continua como indicado a seguir:

1. Bx_5, símbolos $\{S, \ \widehat{+}\}$;
2. Bx_7, símbolos $\{\widehat{+}, \ \widehat{\times}\}$;
3. Exp, símbolos $\{\widehat{\times}, \ \uparrow\}$;
4. $Exp \Uparrow$, símbolos $\{\uparrow, \ \Uparrow\}$;
5. $Exp \uparrow\uparrow$, símbolos $\{\Uparrow, \ \uparrow\uparrow\}$.

Como a função exponencial $\uparrow$, as funções $Exp \Uparrow$ e $Exp \uparrow\uparrow$ podem ser definidas recursivamente.

Exemplo 7.39 (funções $Exp \Uparrow$ e $Exp \uparrow\uparrow$) A função $Exp \Uparrow$ é definida, recursivamente, por:

1. $(\forall x)((x \ \Uparrow \ \overline{0}) \ \widehat{=} \ x)$
2. $(\forall x)(\forall y)((x \ \Uparrow \ S(y)) \ \widehat{=} \ ((x \ \Uparrow \ y) \ \uparrow \ x))$

A função $Exp \uparrow\uparrow$ é definida, recursivamente, por:

1. $(\forall x)((x \ \uparrow\uparrow \ \overline{0}) \ \widehat{=} \ x)$
2. $(\forall x)(\forall y)((x \ \uparrow\uparrow \ S(y)) \ \widehat{=} \ ((x \ \uparrow\uparrow \ y) \ \Uparrow \ x))$

Considere, então, o cálculo $(\overline{3} \ \Uparrow \ \overline{3})$:

$$
\begin{aligned}
\overline{3} \Uparrow \overline{3} &\mathrel{\widehat{=}} (\overline{3} \Uparrow \overline{2}) \uparrow \overline{3} \\
&\mathrel{\widehat{=}} ((\overline{3} \Uparrow \overline{1}) \uparrow \overline{3}) \uparrow \overline{3} \\
&\mathrel{\widehat{=}} (((\overline{3} \Uparrow \overline{0}) \uparrow \overline{3}) \uparrow \overline{3}) \uparrow \overline{3} \\
&\mathrel{\widehat{=}} ((\overline{3} \uparrow \overline{3}) \uparrow \overline{3}) \uparrow \overline{3} \\
&\mathrel{\widehat{=}} (\overline{27} \uparrow \overline{3}) \uparrow \overline{3} \\
&\mathrel{\widehat{=}} \overline{20.412} \uparrow \overline{3} \\
&\mathrel{\widehat{=}} \overline{8,50365 \times 10^{12}}
\end{aligned}
$$

Sem dúvida, esse número é muito grande. Veja, agora, o cálculo $(\overline{3} \upuparrows \overline{3})$, a seguir.

$$
\begin{aligned}
\overline{3} \upuparrows \overline{3} &\mathrel{\widehat{=}} (\overline{3} \upuparrows \overline{2}) \Uparrow \overline{3} \\
&\mathrel{\widehat{=}} ((\overline{3} \upuparrows \overline{1}) \Uparrow \overline{3}) \Uparrow \overline{3} \\
&\mathrel{\widehat{=}} (((\overline{3} \upuparrows \overline{0}) \Uparrow \overline{3}) \Uparrow \overline{3}) \Uparrow \overline{3} \\
&\mathrel{\widehat{=}} ((\overline{3} \Uparrow \overline{3}) \Uparrow \overline{3}) \Uparrow \overline{3} \\
&\mathrel{\widehat{=}} (\overline{8,50365 \times 10^{12}} \Uparrow \overline{3}) \Uparrow \overline{3}
\end{aligned}
$$

O número $(\overline{3} \upuparrows \overline{3})$ é inacreditavelmente grande. É até difícil imaginar seu tamanho. ■

Podemos continuar com o raciocínio do Exemplo 7.39 e definir a função de Ackermann. Para defini-la, inicialmente, enumeramos as operações aritméticas $\widehat{+}$, $\widehat{\times}$, $\uparrow$, $\Uparrow$, $\upuparrows$ e assim por diante.

1. $\widehat{+}$: função número 1,
2. $\widehat{\times}$: função número 2,
3. $\uparrow$: função número 3,
4. $\Uparrow$: função número 4,
5. $\upuparrows$: função número 5,
6. $\uparrow_6$: função número 6,
7. $\uparrow_7$: função número 7,
8. ....,
9. $\uparrow_n$: função número n.

e assim por diante. Dessa forma, as funções $\uparrow_6$ e $\uparrow_7$, por exemplo, são definidas como no Exemplo 7.40.

Exemplo 7.40 (funções $\uparrow_6$ e $\uparrow_7$) A função $\uparrow_6$ é definida, recursivamente, por:

1. $(\forall x)((x \uparrow_6 \overline{0}) \mathrel{\widehat{=}} x)$
2. $(\forall x)(\forall y)((x \uparrow_6 S(y)) \mathrel{\widehat{=}} ((x \uparrow_6 y) \upuparrows x))$

A função $\uparrow_7$ é definida, recursivamente, por:

1. $(\forall x)((x \uparrow_7 \overline{0}) \mathrel{\widehat{=}} x)$

2. $(\forall x)(\forall y)((x \uparrow_7 S(y)) \mathrel{\widehat{=}} ((x \uparrow_7 y) \uparrow_6 x))$

. ■

Definição 7.7 (função de Ackermann) *A função de Ackermann, denotada por f_{ak}, é uma função ternária definida, recursivamente, como se segue:*

1. $(\forall x)(\forall z)(f_{ak}(x,\ \overline{0},\ z) \mathrel{\widehat{=}} x)$;
2. $(\forall x)(\forall y)(\forall z)(f_{ak}(x, y, z) \mathrel{\widehat{=}} ((x \uparrow_z y)$.

Imagine agora, para efeito de raciocínio, por exemplo, o valor da função: $f_{ak}(\overline{100}, \overline{100}, \overline{100})$. Se o número $(\overline{3} \ \upuparrows \ \overline{3})$ já é muito grande, conceber a dimensão do número $f_{ak}(\overline{100}, \overline{100}, \overline{100})$ é algo muito mais difícil. Entretanto, isso nos mostra algo importante. A sentença aritmética $f_{ak}(\overline{100}, \overline{100}, \overline{100})$ expressa, de forma bem concisa, um número enorme. Isto é, a Aritmética básica tem uma alta capacidade expressiva o que é uma das suas principais propriedades.

7.8.6 A linguagem da Aritmética básica

Não há um consenso sobre o que é a linguagem da Aritmética básica, pois na literatura encontramos variações sobre o que poderia ser tal linguagem [Smith], [Barwise], [Dalen], [Marker], [Mendelson] e [Shoenfield]. Entretanto, considerando, neste livro, a linguagem a seguir.

Definição 7.8 (linguagem da Aritmética básica) *A linguagem da Aritmética básica, denotada por $\mathbb{L}_a$, é uma linguagem interpretada tal que:*

1. *A linguagem de $\mathbb{L}_a$ e a linguagem da Lógica de Predicados, na qual incluímos os símbolos aritméticos: $\overline{0}$, S, $\widehat{+}$ e $\widehat{\times}$;*
2. *A interpretação dos símbolos extras de $\mathbb{L}_a$ é dada por um modelo padrão, Definição 7.6.*

A linguagem da Aritmética básica é quase igual à linguagem da Lógica de Predicados mais alguns símbolos extras, utilizados para representar elementos fundamentais da Aritmética. Isto é, $\mathbb{L}_a$ contém todos os símbolos da linguagem da Lógica de Predicados, além dos símbolos aritméticos.

Símbolos lógicos. Os símbolos usuais da Lógica de Predicados são denominados símbolos lógicos.

Símbolos não lógicos. Os símbolos que não são usuais na Lógica de Predicados são denominados símbolos não lógicos. Entre esses símbolos temos, por exemplo, os símbolos aritméticos $\overline{0}$, S, $\widehat{+}$ e $\widehat{\times}$.

7.8.7 A interpretação da Aritmética básica

Conforme a Definição 7.8, a linguagem da Aritmética básica, denotada por $\mathbb{L}_a$, possui os símbolos não lógicos $\overline{0}$, S, $\widehat{+}$ e $\widehat{\times}$. Tais símbolos são interpretados por modelos padrão na forma usual. Isto é, em $\mathbb{L}_a$, supomos que para todo modelo padrão I, temos, por exemplo, que $I[(\overline{1} \widehat{+} \overline{2}) \widehat{=} \overline{3}] = T$. Em outras palavras, interpretamos $(\overline{1} \widehat{+} \overline{2}) \widehat{=} \overline{3}$ como deveria ser: $(2+3) = 5$. À primeira vista, isso parece apenas dizer a mesma coisa, com palavras diferentes. Poderia até dizer que, dessa forma, as sentenças em $\mathbb{L}_a$ não expressam nada de novo. Nesse sentido, veja o que é dito por [Smith]. A interpretação da Aritmética básica *"explicit defines what it takes for any $\mathbb{L}_a$-sentence, however complex, to be true in this humdrum sense."*[4] Isto é, a interpretação da Aritmética básica define explicitamente a interpretação das sentenças como elas deveriam ser. E nada de novo, ou interessante, parece acontecer. Além disso, observe que parece estranho falar de um acordo entre as interpretações. Um acordo tal que todas as interpretações, que são modelos padrão, interpretam os símbolos não lógicos da mesma forma. E isso é mesmo estranho, pois na Lógica não necessariamente existe tal acordo como indicado anteriormente. Em outras palavras, podemos interpretar os símbolos não lógicos de forma diferente da usual, como aquela definida por um modelo padrão, Definição 7.6. E, mesmo assim, todas as propriedades aritméticas podem ser interpretadas como verdadeiras por tais interpretações não usuais. Portanto, não necessariamente as interpretações sobre $\mathbb{N}$ devem interpretar os símbolos não lógicos de $\mathbb{L}_a$ na forma usual, dada por um modelo padrão. E, mesmo não interpretando na forma usual, tais interpretações podem interpretar todas as propriedades $Bx_1, Bx_2, ..., B_6$ e Bx_7 como verdadeiras. Como analisamos no Capítulo 10, tais interpretações, não necessariamente usuais, mas que interpretam as propriedades fundamentais da Aritmética como verdadeiras, são denominadas modelos da Aritmética. Isto é, dizemos que uma interpretação, mesmo sendo diferente do modelo padrão, é um modelo para a Aritmética, quanto ela interpreta as propriedades fundamentais da Aritmética como verdadeiras.

7.8.8 A expressividade da Aritmética básica

Podemos falar sobre várias propriedades aritméticas e pensar sobre suas representações na Aritmética básica. Os Exemplos 7.33, 7.34, 7.35 e 7.36 consideram alguns casos particulares. Mas, afinal, quais são as propriedades que podem ser expressas na Aritmética básica? Será que qualquer propriedade pode ser expressa na Aritmética básica? Essas são importantes questões da Lógica, que passamos a analisar, de forma introdutória, a seguir. Considere a propriedade da Aritmética, denominada Conjectura de Goldbach:

"Todo número par n, maior que 2, é igual a soma de dois primos. Se denominamos essa propriedade como $Gold(n)$,"

então

[4] Para uma discussão sobre esse tema, consulte [Field] e [Balaguer].

$Gold(n)$ é verdadeira se, e somente se, todo número par n, maior que 2, é igual a soma de dois primos.

Portanto, nesse caso, expressar $Gold(n)$ na Aritmética básica corresponde a encontrar uma fórmula $H_{gd}(x)$ da Aritmética básica, tal que para todo modelo padrão I,
se $I[x] = n$ e n é par maior que 2, então $I[H_{gd}(x)] = T$, $\Leftrightarrow$ n é a soma de dois números primos. O leitor é convidado, nos exercícios, a determinar a fórmula $H_{gd}(x)$.

Nota. A conjectura de Goldbach, proposta pelo matemático prussiano Christian Goldbach, é um dos problemas mais antigos não resolvidos da matemática, mais precisamente da Teoria dos Números. Ou seja, até hoje ninguém ainda demonstrou se a afirmação "para todo n, $Gold(n)$ é verdadeira" é verdadeira ou falsa. As ideias acima, são generalizadas na Definição 7.9, a seguir.

Definição 7.9 (expressividade na Aritmética básica) *Uma propriedade Prop sobre os números naturais $\mathbb{N}$ é expressa na linguagem $\mathbb{L}_a$, da Aritmética básica, por uma fórmula $H_{prop}(x)$, na qual x ocorre livre, se, e somente se, para todo número n em $\mathbb{N}$, temos:*

1. *se n tem a propriedade Prop, então para toda interpretação I,* $I[H_{prop}(\overline{n})] = T$;
2. *se n não tem a propriedade Prop, então para toda interpretação I,* $I[\neg H_{prop}(\overline{n})] = T$.

Nessa definição, temos o cuidado de escrever $H_{prop}(\overline{n})$, onde n aparece com um tracinho em cima. Observe que os objetos n e $\overline{n}$ são diferentes. O primeiro é um número natural e o segundo é sua representação na Aritmética básica. Além disso, a Definição 7.9 considera apenas o caso de propriedades unárias. Isto é, propriedades que caracterizam apenas um número e não pares de números, três números, ou mais. Entretanto, a Definição 7.9 pode ser estendida para o caso geral de propriedades n-árias. Uma Aritmética, na qual as propriedades podem ser expressas, certamente, tem especial interesse. Entretanto, observe que as propriedades que estamos interessados, neste livro, são aquelas que podem ser efetivamente calculadas. Isto é, propriedades decidíveis, conforme a Definição 4.11 do Capítulo 4. A linguagem aritmética que possui tal característica é definida a seguir, Definição 7.10.

Definição 7.10 (linguagem suficientemente expressiva) *Uma linguagem aritmética é suficientemente expressiva se as condições a seguir são satisfeitas.*

1. *A linguagem expressa toda propriedade aritmética decidível.*
2. *A linguagem contém a linguagem da Lógica de Predicados.*

Agora voltemos a nossa questão inicial. Quais as propriedades que podem ser expressas na Aritmética básica? Essa questão é respondida pelo teorema a seguir.

Teorema 7.1 (expressividade de $\mathbb{L}_a$) *A linguagem $\mathbb{L}_a$, da Aritmética básica, é suficientemente expressiva.*

Nota. A demonstração do Teorema 7.1 não pertence ao escopo deste livro. Ela pode ser encontrada em [Smith].

O Teorema 7.1 é um resultado importante, pois ele mostra que na Aritmética básica conseguimos expressar as propriedades decidíveis, que são importantes no contexto, por exemplo, da Computação.

7.9 Representação de argumentos lógicos

Conforme vimos no Capítulo 2, todo argumento tem a forma:

$$\textbf{premissas} \rightarrow \textbf{conclusão.}$$

E, nesse caso, as premissas e a conclusão podem ser representadas na Lógica de Predicados. Apresentamos alguns exemplos.[5]

Exemplo 7.41 (representação de argumento lógico) .
Considere o argumento:
"Todos os homens são mamíferos. Todos os mamíferos são animais. Portanto, todo homem é um animal." Para representar esse argumento na Lógica de Predicados, como sempre, o primeiro passo é definir uma interpretação que o associe a uma fórmula. Seja a interpretação I_5 sobre o conjunto dos seres vivos. Considere os predicados p, q e r tais que

$I_5[p(x)] = T$ se, e somente se, x_{I_5} é um homem;
$I_5[q(x)] = T$ se, e somente se, x_{I_5} é um mamífero;
$I_5[r(x)] = T$ se, e somente se, x_{I_5} é um animal.

Nesse caso, segundo I_5, as premissas do argumento são representadas por: $(\forall x)(p(x) \rightarrow q(x)) \wedge (\forall x)(q(x) \rightarrow r(x))$ e a conclusão por $(\forall x)(p(x) \rightarrow r(x))$. Portanto, o argumento é representado, segundo I_5, por:

$$((\forall x)(p(x) \rightarrow q(x)) \wedge (\forall x)(q(x) \rightarrow r(x))) \rightarrow (\forall x)(p(x) \rightarrow r(x))$$

■

Exemplo 7.42 (representação de argumento lógico) .
Considere o argumento:
"Todo baterista é músico. Alguns vocalistas são músicos. Portanto, alguns vocalistas não são bateristas." Considere a interpretação I_6 sobre o conjunto dos homens e os predicados p, q e r tais que:

$I_6[p(x)] = T$ se, e somente se, x_{I_6} é um baterista;
$I_6[q(x)] = T$ se, e somente se, x_{I_6} é um músico;
$I_6[r(x)] = T$ se, e somente se, x_{I_6} é um vocalista.

[5] Alguns desses argumentos são, também, apresentados em [Salmon].

Nesse caso, segundo I_6, as premissas do argumento são representadas por: $(\forall x)(p(x) \to q(x)) \wedge (\exists x)(r(x) \wedge q(x))$ e a conclusão por $(\exists x)(r(x) \wedge \neg p(x))$. Portanto, o argumento é representado, segundo I_6, por:

$$((\forall x)(p(x) \to q(x)) \wedge (\exists x)(r(x) \wedge q(x))) \to (\exists x)(r(x) \wedge \neg p(x))$$

■

Exemplo 7.43 (representação de argumento lógico) .
Considere o argumento:
"Todos os padres são pacifistas. Nenhum general é padre. Portanto, nenhum general é pacifista." Considere a interpretação I_7 sobre o conjunto dos homens e os predicados p, q e r tais que:

$I_7[p(x)] = T$ se, e somente se, x_{I_7} é um padre;
$I_7[q(x)] = T$ se, e somente se, x_{I_7} é um pacifista;
$I_7[r(x)] = T$ se, e somente se, x_{I_7} é um general.

Segundo I_7, as premissas são representadas por: $(\forall x)(p(x) \to q(x)) \wedge \neg(\exists x)(r(x) \wedge p(x))$ e a conclusão por $\neg(\exists x)(r(x) \wedge q(x))$. O argumento é representado, segundo I_7, por:

$$((\forall x)(p(x) \to q(x)) \wedge \neg(\exists x)(r(x) \wedge p(x))) \to \neg(\exists x)(r(x) \wedge q(x))$$

■

Exemplo 7.44 (representação de argumento lógico) .
Considere o argumento:
"Todo político culpado de corrupção será preso ou multado. Alguns políticos culpados de corrupção serão multados. Nenhum político será preso e multado. Portanto, nem todos os culpados de corrupção serão presos." Considere a interpretação I_8 sobre o conjunto dos políticos e os predicados p, q e r tais que:

$I_8[p(x)] = T$ se, e somente se, x_{I_8} é culpado de corrupção;
$I_8[q(x)] = T$ se, e somente se, x_{I_8} é preso;
$I_8[r(x)] = T$ se, e somente se, x_{I_8} é multado.

Segundo I_8, as premissas do argumento são representadas por: $(\forall x)(p(x) \to (q(x) \vee r(x)) \wedge (\exists x)(p(x) \wedge r(x)) \wedge \neg(\exists x)(q(x) \wedge r(x))$ e a conclusão por $\neg(\forall x)(p(x) \to q(x))$. O argumento é representado, segundo I_8, por:

$$((\forall x)(p(x) \to (q(x) \vee r(x)) \wedge (\exists x)(p(x) \wedge r(x))) \wedge \neg(\exists x)(q(x) \wedge r(x)))$$

$$\to$$

$$\neg(\forall x)(p(x) \to q(x))$$

■

Exemplo 7.45 (representação de argumento lógico) .
Considere o argumento:
"Cada sócio do Praia Clube gosta de outro sócio. Logo, há um sócio do Praia Clube do qual todos gostam." Considere a interpretação I_9 sobre o conjunto dos sócios do Praia Clube e o predicados p tal que:

$I_9[q(x,y)] = T$ se, e somente se, x_{I_9} gosta de y_{I_9}.

Segundo I_9, a premissa do argumento é representada por $(\forall x)(\exists y)(q(x,y)$ e a conclusão por $(\exists y)(\forall x)(q(x,y)$. O argumento é representado, segundo I_9, por:

$$(\forall x)(\exists y)q(x,y) \rightarrow (\exists y)(\forall x)q(x,y). \blacksquare$$

Traduzimos o argumento para Lógica de Predicados. Resta saber se ele é bom, forte ou fraco. No próximo capítulo tratamos desse tema.

7.10 Exercícios

1. Seja I uma interpretação sobre os números naturais $\mathbb{N}$, tal que $I[a] = 1$, $I[x] = 1$, $I[p] = <$, $I[f] = f_I$ onde $f_I(d) = d + 1$, $I[q(x)] = T \Leftrightarrow x_I$ é par. Além disso, o valor de $I[y]$ é desconhecido.
   Seja J uma interpretação sobre os números inteiros $\mathbb{Z}$, tal que: $J[a] = 0$, $J[x] = -1$, $J[y] = 0$, $J[p] = <$ e $J[f] = f_J$ onde $f_J(d) = d + 1$.
   Determine, quando possível, as interpretações das fórmulas a seguir conforme I e J.

   (a) $p(x,a)$

   (b) $p(x,a) \wedge p(x, f(x))$

   (c) $(\exists y)p(y,x)$

   (d) $(\forall y)(p(y,a) \vee p(f(y),y))$

   (e) $(\forall x)(\exists y)p(x,y)$

   (f) $(\exists y)(\forall x)p(x,y)$

   (g) $(\forall x)(\exists x)q(x)$

   (h) $(\exists x)(\forall x)q(x)$

2. Seja I uma interpretação sobre o conjunto dos números naturais $\mathbb{N}$, tal que $I[a] = 5$, $I[b] = 3$, $I[x] = 7$, $I[p(x)] = T \Leftrightarrow x_I < 9$, $I[r(x)] = T \Leftrightarrow x_I > 4$, $I[q(x)] = T \Leftrightarrow x_I = 7$.
   Determine o resultado da interpretação de cada uma das fórmulas a seguir segundo I.

   (a) $(\exists x)(p(x) \rightarrow (\exists x)r(x)) \leftrightarrow ((\forall x)p(x) \rightarrow (\exists x)r(x))$

(b) $(\forall x)(p(x) \to (\forall z)r(x)) \leftrightarrow ((\forall x)p(x) \lor (\forall x)r(x))$

(c) $((\forall x)p(x) \lor (\forall z)(\forall x)r(x)) \to (\forall x)(p(x) \lor (\exists x)r(x))$

(d) $(\exists z)(p(x) \leftrightarrow r(x)) \leftrightarrow ((\exists x)p(x) \leftrightarrow (\exists x)r(x))$

(e) $(\exists z)(p(x) \to (\exists x)p(a)) \lor (p(x) \to (\forall x)p(b))$

(f) $(p(x) \land q(x)) \leftrightarrow (\forall x)(p(x) \to q(x))$

(g) $(\exists x)(p(x) \to (\exists x)r(x)) \leftrightarrow ((\forall x)p(x) \to (\exists x)r(b))$

(h) $((\exists x)p(x) \to r(b)) \leftrightarrow ((\forall x)p(x) \to r(b))$

3. Sejam H e G as duas fórmulas a seguir. Nessas fórmulas $x_1, \ldots, x_8$ são as únicas variáveis que ocorrem em H_1, ... ,H_8 respectivamente. Demonstre que se $I[H] = F$, então $I[G] = F$.

$$H = (\exists x_1)H_1 \to ((\exists x_2)H_2 \to ((\exists x_3)H_3 \to ((\exists x_4)H_4 \to ((\exists x_5)H_5 \to ((\exists x_6)H_6 \to ((\exists x_7)H_7 \to ((\exists x_8)H_8)))))))$$

$$G = (\forall *)((H_1 \land H_2 \land H_3 \land H_4 \land H_5 \land H_6 \land H_7) \to H_8)$$

4. Sejam I e J interpretações sobre o conjunto dos números naturais $\mathbb{N}$, tais que: $I[p(x,y,z,w)] = T \Leftrightarrow x_I + y_I > z_I + w_I$, $I[z] = 5$, $I[a] = 2$, $I[b] = 7$, $I[w] = 9$, $J[p(x,y,z,w)] = T \Leftrightarrow x_I + y_I < z_I + w_I$, $J[z] = 5$, $J[a] = 2$, $J[b] = 7$, $J[w] = 9$, $J[y] = 8$

Considere a fórmula $E = (\forall x)(\exists y)p(x,y,z,w) \to (\forall z)p(z,b,y,x)$

(a) Caso seja possível, determine $I[E]$ e $J[E]$. Justifique sua resposta.

(b) No caso em que não é possível determinar o resultado da interpretação, defina uma extensão da interpretação a partir da qual é possível determinar o resultado pretendido.

5. Se possível, determine interpretações que interpretam as fórmulas a seguir como verdadeiras e como falsas. Justifique suas respostas.

(a) $(\forall x)(\exists y)p(x,y,z) \to (\exists y)(\forall z)p(x,y,z)$

(b) $(\forall x)p(x) \leftrightarrow (\exists y)q(y)$

(c) $(\forall x)(\forall x)p(x,y) \to (\exists y)q(z)$

6. (a) Quais os resultados informais das interpretações de H_1, H_2 e H_3, nas quais I é uma interpretação sobre o conjunto dos números reais $\mathbb{R}$, tal que:

$I[a] = 0$, $I[q(x,y)] = T \Leftrightarrow x_I < y_I$, $I[p(x)] = T \Leftrightarrow x_I$ é um número primo, $I[r] =$ " = " (r é interpretado como a igualdade) e $I[f] = \times$ (f é interpretada como o produto).

$H_1 = (\forall x)(\exists y)(q(x,y) \land p(y))$

$H_2 = (\forall x)(q(a,x) \to (\exists z)r(f(z,z),x))$

$H_3 = (\forall x)(\forall y)((\neg r(x,a) \land r(x,y)) \to (\exists z)r(f(x,z),y))$

(b) Quais os resultados informais das interpretações de H_1, H_2 e H_3, onde I é uma interpretação sobre o domínio U dos alunos de Computação, tal que:
$I[p(x,y)] = T \Leftrightarrow x_I$ ama y_I , $I[q(x)] = T \Leftrightarrow x_I$ morreu de AIDS.
$H_1 = (\exists y)(\forall x)p(x,y) \rightarrow (\forall y)(\exists x)p(x,y)$
$H_2 = (\exists x)(\forall y)\neg p(x,y)$
$H_3 = (\forall *)(p(x,y) \rightarrow (p(y,z) \rightarrow (p(z,w) \rightarrow q(w))))$

(c) Quais os resultados informais das interpretações de H_1, H_2 e H_3, onde I é uma interpretação sobre o conjunto dos números naturais $\mathbb{N}$, tal que:
$I[p(x)] = T \Leftrightarrow x_I$ é um número par, $I[q(x)] = T \Leftrightarrow x_I$ é um número ímpar, $I[f(x,y)] = x_I + y_I$.
$H_1 = (\forall x)(\forall y)((p(x) \wedge p(y)) \rightarrow p(f(x,y)))$
$H_2 = (\forall x)(\forall y)((p(x) \wedge q(y)) \rightarrow q(f(x,y)))$
$H_3 = (\forall x)(\forall y)((p(x) \wedge q(y)) \rightarrow p(f(x,y)))$

(d) Qual o resultado informal da interpretação de H onde I é uma interpretação sobre o conjunto dos números naturais $\mathbb{N}$ tal que:
$I[p(x,y)] = T \Leftrightarrow x_I = y_I$, $I[f] = +$, $I[a] = 1$.
$H = (\forall x)(\exists y)(p(x, f(y,y)) \vee p(x, f(f(y,y),a)))$

7. Utilize as regras semânticas para quantificadores e desenvolva as afirmações a seguir:

(a) $I[(\forall x)(\forall y)H] = T$
(b) $I[(\forall x)(\forall y)H] = F$
(c) $I[(\forall x)(\exists y)H] = T$
(d) $I[(\forall x)(\exists y)H] = F$
(e) $I[(\exists x)(\forall y)H] = T$
(f) $I[(\exists x)(\forall y)H] = F$

8. Sejam I e J duas interpretações sobre os naturais $\mathbb{N}$, tais que:
$I[p] = J[p] =\leq$, $I[y] = J[y] = 4$, $I[x] = 0$, $J[x] = 9$. Demonstre que:

(a) $I[p(x,y)] \neq J[p(x,y)]$
(b) $I[(\forall x)p(x,y)] = J[(\forall x)p(x,y)]$
(c) $I[(\forall y)p(x,y)] \neq J[(\forall y)p(x,y)]$

9. Traduza as sentenças a seguir para fórmulas da Lógica de Predicados.

(a) Uma condição necessária e suficiente para que um indivíduo seja produtivo é que ele seja esforçado, trabalhe muito e tenha inspirações.

(b) Todo homem prefere mulheres bonitas, inteligentes e sensíveis como Maria. É por isso que Zé prefere sua Maria.

(c) As filhas de Pedro são lindas e meigas.

(d) As filhas de Zé são lindas e inteligentes e todos os rapazes da Computação querem namorá-las.

(e) Nem todo pássaro voa.

(f) Todo político é desonesto.

(g) Se toda panela tem seu "terço", toda pessoa tem seu amado (obs: essa é uma expressão nordestina).

(h) Toda pessoa ama alguém, mas não existe ninguém que ame todas.

(i) Se existe um barbeiro na cidade que não barbeia a quem se barbeia a si próprio, então não existe alguém para barbear o barbeiro.

(j) Não existe conjunto que contenha a si próprio.

(k) Todo macaco tem seu galho.

(l) Toda pessoa que com ferro fere com ferro será ferida.

(m) De nada vale a vida de um homem que vive a vida envolvida na vida de uma mulher da vida.

(n) Quem não se ama não ama ninguém.

(o) Toda Patricinha que vai ao shopping tem celular, pele lisa e cheiro de alface.

(p) Patricinha de Uberlândia não gosta de Patricinha de Uberaba.

(q) Nenhuma Patricinha no shopping usa tênis Kichute.

(r) Todo irmão do pai de Pedro é seu tio.

(s) Pedro tem um tio que é mais novo que seu irmão e mora em Israel.

(t) Zé admira a irmã do cunhado de seu tio, que mora no Líbano.

(u) Zé admira o neto de seu neto, mas nem conhece o neto de seu filho.

(v) Os irmãos de Zé são gaúchos e torcem pelo Grêmio como ele.

(w) Zé e Chico são amigos. Mas nem todo amigo de Zé é amigo de Chico e vice-versa.

(x) Zé é um bom pai e ama todos os seus filhos.

(y) Os filhos de Ana são os filhos de Nicolau. Ana ama seus filhos. Márcio é filho de Nicolau. Portanto, Ana ama Márcio.

(z) Os gatos e cachorros são animais domésticos.

10. Traduza as sentenças a seguir para fórmulas da Lógica de Predicados:

(a) Nenhum filho adolescente de Maria gosta de estudar.

(b) Há pelo menos um cavalo branco.

(c) Alguns cavalos não são brancos.

(d) Homens são mamíferos e tomates são vegetais.

(e) Alguns homens são felizes, outros não.

(f) Se alguém não ama ninguém, todos não amam todos.

(g) Se todos não amam todos, não existe alguém que não ame alguém.

11. Caso seja possível, escreva as sentenças a seguir utilizando a linguagem da Lógica de Predicados. Na impossibilidade, justifique. Observe que este exercício foi proposto no contexto da Lógica Proposicional.

    (a) Todo homem é mortal.

    (b) Possivelmente irei ao cinema.

    (c) Fui gordo, hoje sou magro.

    (d) Existe no curso de Ciência da Computação um aluno admirado por todos.

    (e) Existe um aluno em minha sala que não gosta de nenhum colega.

    (f) Existe aluno de Ciência da computação que é detestado por seus colegas.

    (g) Necessariamente algum político é desonesto.

    (h) Amanhã irei ao cinema e depois ao teatro.

    (i) Quase todo político é desonesto.

    (j) Zé sempre foi amigo de Chico.

    (k) Toda regra tem exceção.

    (l) Quase todo funcionário da Zé-Company é um talento.

    (m) Poucos funcionários da Zé-Company não são empreendedores.

    (n) O presidente da Zé-Company é admirado por seus colaboradores.

12. Represente na Aritmética básica a função fatorial f_{fat}, tal que $f_{fat}(n) = n!$.

13. Represente na Aritmética básica a função divisão $f_{\div}$, tal que $f_{\div}(m, n) = q$ e $q = (m \div n)$.

14. Represente na Aritmética básica a função máximo divisor comum de dois números f_{mdc}, tal que $f_{mdc}(m, n) = q$, tal que q é igual ao máximo divisor comum de m e n.

15. Represente na Aritmética básica, o predicado "maior-que" $p_{>}$, tal que $p_{>}(m, n)$ é verdadeiro se, e somente se, $(m > n)$.

16. Represente na Aritmética básica o predicado "primos-entre-si"p_{primo}, tal que $p_{primo}(m, n)$ é verdadeiro se, e somente se, o máximo divisor comum de m e n é igual a 1.

17. Represente na Aritmética básica, a conjectura de Goldbach. Isto é, determine a fórmula H_{gd}, conforme analisado na seção 7.8.8.

18. Represente na Aritmética básica as seguintes propriedades.
    (a) Todo número par é divizível por 2.
    (b) Dois números primos são gêmeos se, e somente se, diferem em duas unidades.
    (c) Dado um número k, existem dois números n e m, que são primos gêmeos.
    (d) todo número par n, maior que 0, é igual a soma de dois primos.
19. Traduza os argumentos a seguir para fórmulas da Lógica de Predicados.
    (a) Zé é dono de um grande chapéu. Os donos de grandes chapéus têm grandes cabeças. Pessoas com grandes cabeças têm cérebros grandes. Pessoas com cérebros grandes são intelectuais. Portanto, Zé é um intelectual.
    (b) Uma vez que todos os membros do júri eram eleitores cadastrados, então Zé devia ser um eleitor cadastrado, pois ele serviu no júri.
    (c) Zé tem coração, pois todo mamífero tem coração e Zé é um mamífero.
    (d) Todas as plantas verdes são coisas que contêm clorofila. Algumas coisas que contêm clorofila são comestíveis. Portanto, algumas plantas verdes são comestíveis.
    (e) Alguns neuróticos não são bem ajustados. Algumas pessoas ajustadas não são ambiciosas. Portanto, neuróticos não são ambiciosos.
    (f) Todas as pinturas de real valor artístico são abstratas. Isso, porque todas as pinturas de real valor artístico são puros estudos de formas. Além disso, sabemos que todas as pinturas abstratas são puros estudos de formas.
    (g) Todos os atos legítimos são atos que promovem o interesse geral. Nenhum ato que interfira na conduta motivada por interesse pessoal é um ato que promove o interesse geral. Portanto, nenhum ato que interfira na conduta motivada pelo interesse pessoal é legítimo.
    (h) Algumas pessoas com elevados salários são bons investidores. Todos os políticos têm elevados salários. Logo, alguns políticos são bons investidores.
    (i) Para cada coisa, houve momento que ela não existia. Portanto, há um momento em que todas as coisas não existiam.
    (j) Para cada mudança há algo que permanece constante durante essa mudança. Logo, há algo que permanece constante em todas as mudanças.

CAPÍTULO 8

PROPRIEDADES SEMÂNTICAS DA LÓGICA DE PREDICADOS

8.1 Introdução

Este Capítulo analisa propriedades semânticas da Lógica de Predicados. Logo, no presente contexto, como consideramos fórmulas da Lógica de Predicados, temos que interpretar os quantificadores. O conjunto de propriedades semânticas da Lógica de Predicados, consideradas neste livro, é análogo àquele definido no Capítulo 3 para a Lógica Proposicional. Isto é, temos conceitos análogos à tautologia, satisfatibilidade, implicação, equivalência etc. Além disso, alguns resultados demonstrados na Lógica Proposicional têm correspondentes análogos na Lógica de Predicados, como, por exemplo: $(H \rightarrow G)$ é tautologia se, e somente se, H implica G e também $(H \leftrightarrow G)$ é tautologia se, e somente se, H equivale a G, onde H e G são fórmulas da Lógica Proposicional.

8.2 Satisfatibilidade

Esta seção considera a determinação da satisfatibilidade de fórmulas da Lógica de Predicados. Mas, antes de tudo, lembre que uma fórmula H é satisfatível quando existe pelo menos uma interpretação I tal que $I[H] = T$.

Exemplo 8.1 (satisfatibilidade) Seja $H_1 = p(x, y)$ e I_1 uma interpretação sobre os naturais $\mathbb{N}$, tal que $I_1[p] = <$, $I_1[x] = 5$ e $I_1[y] = 9$. Nesse caso temos, $I_1[H_1] = T$. Logo, H_1 é satisfatível. ■

Exemplo 8.2 (satisfatibilidade) Seja $H_2 = (\forall x)p(x, y)$ e I_2 uma interpretação sobre os naturais $\mathbb{N}$, tal que $I_2[p] = \geq$, $I_2[y] = 0$. Nesse caso temos, $I_2[H_2] = T$. Logo, H_2 é satisfatível. ■

Exemplo 8.3 (satisfatibilidade) Seja $H_3 = (\forall x)(\exists y)p(x, y)$ e I_3 uma interpretação sobre os naturais $\mathbb{N}$, tal que $I_3[p] = <$. Nesse caso temos, $I_3[H_3] = T$. Logo, H_3 é satisfatível. ■

Exemplo 8.4 (satisfatibilidade) Seja $H_4 = (\forall x)(\exists y)p(x, y) \rightarrow p(x, y)$ e I_4 uma interpretação sobre os naturais $\mathbb{N}$, tal que $I_4[p] = <$, $I_4[x] = 5$, e $I_4[y] = 9$. Observe que $I_4[H_4] = T$, pois:

$$\begin{aligned}
I[H_4] = F \quad &\Leftrightarrow \quad I[(\forall x)(\exists y)p(x,y) \rightarrow p(x,y)] = F, \\
&\Leftrightarrow \quad I[(\forall x)(\exists y)p(x,y)] = T \text{ e } I[p(x,y)] = F, \\
&\Leftrightarrow \quad \forall\ d \in \mathbb{N};\ < x \leftarrow d > I[(\exists y)p(x,y)] = T \text{ e } I[p(x,y)] = F, \\
&\Leftrightarrow \quad \forall\ d \in \mathbb{N}, \exists\ c \in \mathbb{N};\quad < y \leftarrow c >< x \leftarrow d > I[p(x,y)] = T \text{ e} \\
&\qquad\ \ I[p(x,y)] = F, \\
&\Leftrightarrow \quad \forall\ d \in \mathbb{N}, \exists\ c \in \mathbb{N};\quad (d < c) \text{ é verdadeiro e } (5 < 9) \text{ é falso.}
\end{aligned}$$

A última afirmação:

$$\text{“}\forall\ d \in \mathbb{N}, \exists\ c \in \mathbb{N};\quad (d < c) \text{ é verdadeiro e } (5 < 9) \text{ é falso”}$$

é falsa, pois é claro que é falso dizer que “$(5 < 9)$ é falso”. Logo, $I[H_4] = T$ e H_4 é satisfatível. ■

Exemplo 8.5 (satisfatibilidade) Considere a fórmula:
$H = \neg((\forall x)p(x, y)) \leftrightarrow (\exists x)(\neg p(x, z))$. A fórmula H é satisfatível. Nem sempre é fácil identificar, imediatamente, se uma fórmula é ou não satisfatível. Para demonstrar esse fato, devemos definir uma interpretação I, tal que $I[H] = T$. Para que $I[H] = T$, uma possibilidade é ter $I[\neg((\forall x)p(x, y))] = T$ e $I[(\exists x)(\neg p(x, z))] = T$. Definimos, a seguir, uma interpretação que satisfaz essas igualdades. Seja I uma interpretação sobre o conjunto dos números naturais $\mathbb{N}$. Definimos, agora, uma interpretação para o predicado p. Mas, deve ser uma interpretação que tenha como resultado $I[\neg((\forall x)p(x, y))] = T$. Isto é, informalmente, deve ser falso que para todo natural x se tenha $p(x, y)$. Como sabemos que é falso que para todo natural x, $x > 4$, então definimos:

$I[p(x, y)] = T$ se, e somente se, $x_I > y_I$ e $I[y] = 4$.

Além disso, devemos ter $I[(\exists x)(\neg p(x, z))] = T$. Isto é, informalmente, deve existir x tal que a afirmação “$x > z$” é falsa. Nesse caso basta definir, por exemplo, $I[z] = 6$. Formalmente, temos

$$
\begin{aligned}
I[\neg((\forall x)p(x,y))] = T &\Leftrightarrow I[(\forall x)p(x,y)] = F, \\
&\Leftrightarrow \exists\ d \in \mathbb{N}; < x \leftarrow d > I[p(x,y)] = F, \\
&\Leftrightarrow \exists\ d \in \mathbb{N};\ (d > 4)\ \text{ é falso.}
\end{aligned}
$$

Como a última afirmação é verdadeira, concluímos que $I[\neg((\forall x)p(x,y))] = T$. Por outro lado:

$$
\begin{aligned}
I[(\exists x)(\neg p(x,z))] = T &\Leftrightarrow \exists\ d \in \mathbb{N}; < x \leftarrow d > I[\neg p(x,z)] = T, \\
&\Leftrightarrow \exists\ d \in \mathbb{N}; < x \leftarrow d > I[p(x,z)] = F, \\
&\Leftrightarrow \exists\ d \in \mathbb{N};\ (d > 6)\ \text{é falso.}
\end{aligned}
$$

Como a última afirmação é verdadeira, concluímos que: $I[(\exists x)(\neg p(x,z))] = T$. Logo $I[\neg((\forall x)p(x,z))] = I[(\exists x)(\neg p(x,z))] = T$, isto é, $I[H] = T$ e H é satisfatível. ■

8.3 Validade

Na Lógica de Predicados, o conceito que corresponde ao de tautologia é o da validade. Antes de definir validade, considere o exemplo a seguir:

Exemplo 8.6 (validade) Seja H, tal que $H = (\forall x)p(x) \vee \neg(\forall x)p(x)$. Nesse caso, considerando $A = (\forall x)p(x)$, então $H = (A \vee \neg A)$. E, conforme os conceitos semânticos apresentados na Lógica Proposicional, H é uma tautologia, independentemente da interpretação da fórmula A. Isso significa que apesar de H ser uma fórmula da Lógica de Predicados, pois possui quantificadores e predicados, a sua interpretação segue os mesmos princípios apresentados na Lógica Proposicional. Isto é, mesmo contendo símbolos da Lógica de Predicados, é possível concluir que $I[H] = T$ para toda interpretação I, sem a análise semântica dos quantificadores e predicados. Quando tal fato ocorre, H é denominada fórmula tautologicamente válida. ■

Definição 8.1 (fórmula tautologicamente válida) *Seja H uma fórmula da Lógica de Predicados. Então:*

H é tautologicamente válida se, e somente se,
para toda interpretação I, $I[H] = T$
e, além disso,
para determinar se $I[H] = T$
não é necessário interpretar os quantificadores de H.

Exemplo 8.7 (validade) Há casos nos quais a análise semântica da fórmula requer a interpretação dos quantificadores. Considere G, tal que $G = (\forall x)p(x) \rightarrow p(a)$. Nesse caso, seja I uma interpretação qualquer sobre um domínio U e suponha que $I[G] = F$. Mas,:

$$
\begin{aligned}
I[G] = F \;&\Leftrightarrow\; I[(\forall x)p(x) \rightarrow p(a)] = F,\\
&\Leftrightarrow\; I[(\forall x)p(x)] = T \;\text{ e }\; I[p(a)] = F,\\
&\Leftrightarrow\; \forall\, d \in U,\; < x \leftarrow d > I[p(x)] = T \;\text{ e }\; I[p(a)] = F,\\
&\Leftrightarrow\; \forall\, d \in U,\; p_I(d) = T \;\text{ e }\; p_I(a_I) = F.
\end{aligned}
$$

A última afirmação é falsa, pois ela expressa que:
$\forall\, d \in U,\ p_I(d) = T$ e também que $p_I(a_I) = F$ para algum $a_I \in U$.

Portanto, a afirmação equivalente, $I[G] = F$, é falsa. Logo, $I[G] = T$ para qualquer interpretação I. Observe que nessa última análise, para concluir que $I[G] = T$, para qualquer interpretação I, é necessária a análise semântica do quantificador. Quando isso ocorre, dizemos que a fórmula G é válida. ■

Definição 8.2 (fórmula válida) *Seja H uma fórmula da Lógica de Predicados. Então:*

H é válida, se, e somente se, para toda interpretação I, $I[H] = T$.

Observe a diferença entre as Definições 8.1 e 8.2. Na Definição 8.1, para determinar se $I[H] = T$, não há necessidade de interpretar os quantificadores de H. Caso contrário, se é necessário tal interpretação, então temos a Definição 8.2. Por isso, na Definição 8.2 não colocamos nenhuma condição adicional para determinar se $I[H] = T$. Portanto, se H é tautologicamente válida, então é, também, válida. O inverso não é verdadeiro. Se H é válida, não, necessariamente, é tautologicamente válida. Por exemplo, a fórmula H, do Exemplo 8.6, é tautologicamente válida e, também, válida. Mas, a fórmula G, do Exemplo 8.7, é válida, mas não é tautologicamente válida. Portanto, temos as conclusões:

- Seja H uma fórmula da Lógica Proposicional, Se H é uma tautologia, então H é tautologicamente válida e portanto é também válida.
- Tautologia é um caso particular de validade.
- Existe fórmula válida, mas que não é tautologicamente válida.
- Seja H uma fórmula da Lógica de Predicados. Se H é válida, então não necessariamente H também é tautologicamente válida.
- Os conceitos de validade e tautologicamente válida não são equivalentes.

Além dos princípios de contradição, do terceiro excluído e da bivalência, a Lógica Clássica também segue um outro princípio denominado princípio de identidade, que é analisado no exemplo a seguir.

Exemplo 8.8 (princípio da identidade) O princípio da identidade estabelece que todo objeto é igual a si próprio. Ou seja, dado um predicado $p(x, y)$ e uma interpretação I, sobre U, tal que:
$I[p(x, y)] = T$ se, e somente se, $I[x] = I[y]$,

então $I[(\forall x)p(x,x)] = T$. Isto é, para toda interpretação I, que interpreta p como a igualdade, temos que $I[(\forall x)p(x,x)] = T$. Nesse sentido, o princípio da identidade não estabelece que a fórmula $(\forall x)p(x,x)$ é válida. Ele apenas estabelece que, no contexto das interpretações que interpretam p como a igualdade, os modelos padrão, a fórmula $(\forall x)p(x,x)$ é verdadeira. Mas, se J é uma interpretação qualquer, observe o desenvolvimento:

$$\begin{aligned} J[(\forall x)p(x,x))] = T &\Leftrightarrow \forall\ d \in U, < x \leftarrow d > J[p(x,x)] = T, \\ &\Leftrightarrow \forall\ d \in U, d = d. \end{aligned}$$

Essa demonstração está incorreta, pois é falso que

$\forall\ d \in U, < x \leftarrow d > J[p(x,x)] = T \Leftrightarrow \forall\ d \in U, d = d.$

Isso porque nessa equivalência estamos admitindo explicitamente que J interpreta p como uma igualdade. Entretanto, não necessariamente todas as interpretações interpretam p dessa forma. Portanto, o princípio estabelece que se p é interpretado como a igualdade, então $(\forall x)p(x,x)$ é interpretada como verdadeira. Em outras palavras, para as interpretações que interpretam p como a igualdade, no domínio U todo objeto é idêntico a si mesmo.[1] Além disso, observe que $(\forall x)p(x,x)$ pode ser interpretada como sendo verdadeira em casos nos quais a interpretação de p não necessariamente é fixada na igualdade. De tudo isso, concluímos que o princípio da identidade tem uma natureza diferente dos princípios apresentados anteriormente, porque o princípio da igualdade é válido apenas em um contexto restrito, no qual temos um predicado com interpretação fixa igual à igualdade, conforme, por exemplo, uma interpretação modelo padrão. ■

Exemplo 8.9 (não validade) Considere, novamente, a fórmula H, tal que:

$$H = \neg((\forall x)p(x,y)) \leftrightarrow (\exists x)(\neg p(x,z)).$$

Observe que essa fórmula é analisada no Exemplo 8.5, no qual demonstramos que ela é satisfatível. Entretanto, a seguir, demonstramos que ela não é válida. Como já sabemos, uma fórmula H não é válida se existe uma interpretação que a interpreta como sendo falsa. Isto é, devemos encontrar uma interpretação J, tal que $J[H] = F$. Mas,

$J[H] = F$ se e somente se $\{J[\neg(\forall x)p(x,y)] \neq J[(\exists x)(\neg p(x,z))]\}$.

Observe que:

$$\begin{aligned} J[\neg((\forall x)p(x,y))] = T &\Leftrightarrow J[(\forall x)p(x,y)] = F, \\ &\Leftrightarrow \exists\ d \in U;\ < x \leftarrow d > J[p(x,y)] = F, \\ &\Leftrightarrow \exists\ d \in U;\ p_J(d, y_J) = F. \end{aligned}$$

Por outro lado:

[1] Há Lógicas não clássicas em que o princípio de identidade não é válido. Nesse caso, nem sempre um objeto é igual a si mesmo. No estudo de teorias com igualdade, o predicado p é denotado por $=$.

$$\begin{aligned} J[(\exists x)(\neg p(x,z))] = T \ &\Leftrightarrow \exists\ d \in U;\ < x \leftarrow d > J[\neg p(x,z)] = T, \\ &\Leftrightarrow\ \exists\ d \in U;\ < x \leftarrow d > J[p(x,z)] = F, \\ &\Leftrightarrow\ \exists\ d \in U;\ p_J(d, z_J) = F. \end{aligned}$$

A interpretação J deve ser tal que a afirmação "$\exists\ d \in U;\ p_J(d, y_J) = F''$ seja falsa e a afirmação "$\exists\ d \in U;\ p_J(d, z_J) = F''$ seja verdadeira. Daí, concluímos que $J[\neg((\forall x)p(x,y))] \neq J[(\exists x)(\neg p(x,z))]$. Seja então J uma interpretação sobre o domínio $U = \{A, B, C, D\}$ tal que $J[p]$ é definida pelo diagrama da Figura 8.1. Neste diagrama, convencionamos que:

$p_J(r,s)$ é verdadeiro, se, e somente se, há uma seta de r para s.

Nesse caso:

$$p_J(B,B) = p_J(A,B) = p_J(C,B) = p_J(D,B) = T$$

e entre os valores falsos há, por exemplo:

$$p_J(B,A) = p_J(B,C) = p_J(A,C) = p_J(C,C) = p_J(C,D) = F.$$

Além disso, definimos que $J[y] = B$ e $J[z] = A$.

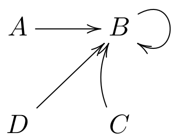


Figura 8.1: Interpretação do predicado p.

Para a interpretação J, a afirmação "$\exists\ d \in U;\ p_J(d, y_J) = F$" equivale a "$\exists\ d \in U;\ p_J(d, B) = F$", pois $J[y] = B$. A última afirmação é falsa, pois $\forall\ d \in U$, $p_J(d,B) = T$. Logo, $J[\neg((\forall x)p(x,y))] = T$. Por outro lado, a afirmação "$\exists\ d \in U$; $p_J(d, z_J) = F$" equivale a "$\exists\ d \in U;\ p_J(d, A) = F$". Isto é verdadeiro, pois para $d = A$, por exemplo, temos $p_J(d, A) = F$. Logo, $J[(\exists x)(\neg p(x,z))] = F$ e, portanto, $J[\neg((\forall x)p(x,y))] \neq J[(\exists x)(\neg p(x,z))]$. ■

Lema 8.1 (igualdade e interpretação) *Sejam H e G duas fórmulas da Lógica de Predicados e I uma interpretação:*

$$\begin{aligned} I[H] = I[G] \ &\textit{se, e somente se,}\ \ \{I[H] = T \Leftrightarrow I[G] = T\}. \\ I[H] = I[G] \ &\textit{se, e somente se,}\ \ \{I[H] = F \Leftrightarrow I[G] = F\}. \end{aligned}$$

Nota. Propomos a demonstração do Lema 8.1 como exercício.

O próximo exemplo determina a validade de uma fórmula e utiliza o Lema 8.1.

Exemplo 8.10 (validade) Considere a fórmula:

$$G = \neg((\forall x)p(x)) \leftrightarrow (\exists x)(\neg p(x)).$$

Observe que a fórmula G é semelhante à H do Exemplo 8.9. Como demonstrado naquele exemplo, a fórmula H não é válida. Entretanto, a fórmula G, acima, é válida, conforme é demonstrado a seguir. Por definição, G é válida se, e somente se, para toda interpretação J, $J[G] = T$. Mas,

$$J[G] = T \Leftrightarrow J[\neg((\forall x)p(x))] = J[(\exists x)(\neg p(x))].$$

Conforme o Lema 8.1:

$$\begin{gathered} J[\neg((\forall x)p(x))] = J[(\exists x)(\neg p(x))] \\ \text{se, e somente se,} \\ \{J[\neg((\forall x)p(x))] = T \Leftrightarrow J[(\exists x)(\neg p(x))] = T\}. \end{gathered}$$

Mas:

$$\begin{aligned} J[\neg((\forall x)p(x))] = T \;&\Leftrightarrow J[(\forall x)p(x)] = F, \\ &\Leftrightarrow \exists\, d \in U;\ < x \leftarrow d > J[p(x)] = F, \\ &\Leftrightarrow \exists\, d \in U;\ < x \leftarrow d > J[\neg p(x)] = T, \\ &\Leftrightarrow J[(\exists x)(\neg p(x))] = T. \end{aligned}$$

Portanto:

$$J[\neg((\forall x)p(x))] = T \Leftrightarrow J[(\exists x)(\neg p(x))] = T.$$

Logo, $J[G] = T$. Como J é uma interpretação arbitrária, então G é válida. ■

Exemplo 8.11 (validade) Este exemplo demonstra a validade da fórmula: $H = (\exists y)(\forall x)q(x,y) \rightarrow (\forall x)(\exists y)q(x,y)$.
Suponha, por contradição, que H não é válida. Logo, por definição, existe uma interpretação I sobre um domínio U, tal que $I[H] = F$. Mas,

$$\begin{aligned} I[H] = F \;&\Leftrightarrow\; I[(\exists y)(\forall x)q(x,y) \rightarrow (\forall x)(\exists y)q(x,y)] = F, \\ &\Leftrightarrow\; I[(\exists y)(\forall x)q(x,y)] = T \;\text{ e }\; I[(\forall x)(\exists y)q(x,y)] = F. \end{aligned}$$

Além disso:

$$\begin{aligned} I[(\exists y)(\forall x)q(x,y)] = T \;&\Leftrightarrow\; \exists\, d \in U;\ < y \leftarrow d > I[(\forall x)q(x,y)] = T, \\ &\Leftrightarrow\; \exists\, d \in U;\ \forall \text{ e } \in U,\ < x \leftarrow e >< y \leftarrow d > I[q(x,y)] = T, \\ &\Leftrightarrow\; \exists\, d \in U;\ \forall \text{ e } \in U,\ q_I(e,d) = T. \end{aligned}$$

e:

$$\begin{aligned} I[(\forall x)(\exists y)q(x,y)] = F \;&\Leftrightarrow\; \exists\, r \in U;\ < x \leftarrow r > I[(\exists y)q(x,y)] = F, \\ &\Leftrightarrow\; \exists\, r \in U;\ \forall s \in U,\ < y \leftarrow s >< x \leftarrow r > I[q(x,y)] = F, \\ &\Leftrightarrow\; \exists\, r \in U;\ \forall\, s \in U,\ q_I(r,s) = F. \end{aligned}$$

As afirmações:

"$\exists\ d \in U;\ \forall e \in U,\ q_I(e,d) = T$" e "$\exists\ r \in U;\ \forall\ s \in U,\ q_I(r,s) = F$"

são contraditórias entre si. Como ilustração, considere um caso particular em que essa contradição é identificada. Seja I uma interpretação sobre $U = \{A, B, C, D\}$, tal que $I[q]$ é definida pelo diagrama da Figura 8.2, conforme convenções indicadas no Exemplo 8.10.

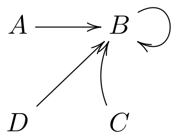


Figura 8.2: Interpretação do predicado q.

O diagrama da Figura 8.2 satisfaz a afirmação "$\exists\ d \in U;\ \forall\ e \in U, q_I(e,d) = T$". Nesse caso, fazendo $d = B$, então "$\forall\ e \in \{A, B, C, D\},\ q_I(e,B) = T$". Por outro lado, a afirmação: "$\exists\ r \in U;\ \forall\ s \in U,\ q_I(r,s) = F$" não é satisfeita. Essa afirmação diz que:

"$\exists\ r \in \{A, B, C, D\};\ \forall\ s \in \{A, B, C, D\},\ q_I(r,s) = F$".

Em outras palavras, existe um elemento r tal que não sai nenhuma seta a partir dele. Mas isso é impossível devido à existência do elemento $d = A$, como indicado anteriormente. Uma outra forma de fazer essa análise é considerar uma interpretação I sobre o domínio dos alunos de Computação tal que:

$I[q(x,y)] = T$ se, e somente se, x_I gosta de y_I.

Suponha então que exista um aluno de Computação que é amado por todos: "o bem-amado". Isso significa que "$\exists\ d \in U;\ \forall\ c \in U,\ c$ gosta de d". Ou seja, "$\exists\ d \in U;\ \forall\ c \in U,\ q_1(c,d) = T$". Mas se existe o "bem-amado", logo a afirmação "$\exists\ r \in U;\ \forall\ s \in U,\ r$ não gosta de s" é falsa, pois nesse caso, r deveria gostar pelo menos do "bem-amado". Portanto, se existe o "bem-amado", a afirmação "$\exists\ r \in U;\ \forall\ s \in U,\ q_1(r,s) = F$" é falsa. ■

Exemplo 8.12 (não validade) Considere a fórmula:
$E = (\forall x)(\exists y)q(x,y) \rightarrow (\exists y)(\forall x)q(x,y)$.
Observe que a fórmula E pode ser obtida de H, definida no Exemplo 8.11, invertendo a ordem dos quantificadores. Este exemplo demonstra que a fórmula E não é válida. Considere uma interpretação I sobre o domínio $U = \{A, B, C, D\}$, tal que $I[q]$ é dada pelo diagrama da Figura 8.3, conforme as convenções indicadas no Exemplo 8.10.

$$
\begin{tikzcd}
A \arrow[r] & B \arrow[d, bend left] \\
D \arrow[ur] & C \arrow[u, bend left]
\end{tikzcd}
$$

Figura 8.3: Interpretação do predicado q.

Observe que:

$$
\begin{aligned}
I[(\forall x)(\exists y)q(x,y)] = T \ &\Leftrightarrow \forall\ d \in U,\ < x \leftarrow d > I[(\exists y)q(x,y)] = T, \\
&\Leftrightarrow\ \forall\ d \in U,\ \exists\ e \in U; \\
&\quad\ < y \leftarrow e >< x \leftarrow d > I[q(x,y)] = T, \\
&\Leftrightarrow\ \forall\ d \in U,\ \exists\ e \in U;\ q_I(d,e) = T.
\end{aligned}
$$

Por outro lado:

$$
\begin{aligned}
I[(\exists y)(\forall x)q(x,y)] = F \ &\Leftrightarrow\ \forall\ r \in U,\ < s \leftarrow r > I[(\forall x)q(x,y)] = F, \\
&\Leftrightarrow\ \forall\ r \in U,\ \exists\ s \in U; \\
&\quad\ < x \leftarrow s >< y \leftarrow r > I[q(x,y)] = F, \\
&\Leftrightarrow\ \forall\ r \in U,\ \exists\ s \in U;\ q_I(s,r) = F.
\end{aligned}
$$

As afirmações "$\forall\ d \in U,\ \exists\ e \in U;\ q_I(d,e) = T$" e "$\forall\ r \in U,\ \exists\ s \in U;\ q_I(s,r) = F$" são satisfeitas pelo diagrama da Figura 8.3. A primeira afirmação diz que "para todo $d \in \{A, B, C, D\}$, existe $e \in \{A, B, C, D\}$ tal que há uma seta de d para e". O diagrama da Figura 8.3 satisfaz essa afirmação, pois se $d = A$, basta considerar $e = B$. Se $d = B$, então $e = C$ e assim por diante. Analogamente, a segunda afirmação diz que "para todo $r \in \{A, B, C, D\}$, existe $s \in \{A, B, C, D\}$ tal que não há seta de s para r". A segunda afirmação também é verdadeira. Nesse caso, se $r = A$, então $s = C$ e assim por diante. Portanto, como as afirmações anteriores são satisfeitas pelo diagrama da Figura 8.3, concluímos que $I[E] = F$. ■

Exemplo 8.13 (propriedades básicas da Aritmética de Robinson) Este exemplo considera as propriedades básicas da aritmética de Robinson. Tais propriedades são válidas no contexto dos modelos padrão, reescritas a seguir:

1. $Bx_1 = (\forall x)\neg(\overline{0} \mathrel{\widehat{=}} S(x))$;
2. $Bx_2 = (\forall x)(\forall y)((S(x) \mathrel{\widehat{=}} S(y)) \to (x \mathrel{\widehat{=}} y)$;
3. $Bx_3 = (\forall x)(\neg(x \mathrel{\widehat{=}} \overline{0}) \to (\exists y)(x \mathrel{\widehat{=}} S(y))$;
4. $Bx_4 = (\forall x)((x \mathbin{\widehat{+}} \overline{0}) \mathrel{\widehat{=}} x)$;
5. $Bx_5 = (\forall x)(\forall y)((x \mathbin{\widehat{+}} S(y)) \mathrel{\widehat{=}} S(x \mathbin{\widehat{+}} y))$;
6. $Bx_6 = (\forall x)((x \mathbin{\widehat{\times}} \overline{0}) \mathrel{\widehat{=}} \overline{0})$;
7. $Bx_7 = (\forall x)(\forall y)((x \mathbin{\widehat{\times}} S(y)) \mathrel{\widehat{=}} ((x \mathbin{\widehat{\times}} y) \mathbin{\widehat{+}} x))$.

Demonstramos, a seguir, a validade da última propriedade. A demonstração da validade das outras, deixamos como exercício.

$$\begin{aligned}
I[H] = T \;\Leftrightarrow\; & I[(\forall x)(\forall y)((x \mathbin{\widehat{\times}} S(y)) \mathbin{\widehat{=}} ((x \mathbin{\widehat{\times}} y) \mathbin{\widehat{+}} x))] = T, \\
\Leftrightarrow\; & \forall\ d \in \mathbb{N},\ < x \leftarrow d > I[(\forall y)((x \mathbin{\widehat{\times}} S(y)) \mathbin{\widehat{=}} ((x \mathbin{\widehat{\times}} y) \mathbin{\widehat{+}} x))] = T, \\
\Leftrightarrow\; & \forall\ d \in \mathbb{N},\ \forall\ c \in \mathbb{N}, \\
& < y \leftarrow c >< x \leftarrow d > I[(x \mathbin{\widehat{\times}} S(y)) \mathbin{\widehat{=}} ((x \mathbin{\widehat{\times}} y) \mathbin{\widehat{+}} x)] = T, \\
\Leftrightarrow\; & \forall\ d \in \mathbb{N},\ \forall\ c \in \mathbb{N},\ (d\ \times\ (c+1))\ =\ ((d\ \times\ c)\ +\ d).
\end{aligned}$$

Como a última afirmação é verdadeira, então, no contexto da interpretação padrão da aritmética, H é válida. Observe que fora desse contexto, H pode ser interpretada como sendo falsa. Veja os exercícios. ■

8.4 Contradição semântica

As contradições são aquelas fórmulas que são interpretadas como falsas para toda interpretação I. Isto é, por definição, dada uma fórmula H da Lógica de Predicados:

H é uma contradição semântica se, e somente se,
para toda interpretação $I, I[H] = F$.

Veja um exemplo de contradição:

Exemplo 8.14 (contradição) Seja a fórmula: $H = (\forall x)p(x) \wedge (\exists x)\neg p(x)$. Essa fórmula é contraditória, pois suponha que exista uma interpretação I, sobre o domínio U, tal que $I[H] = T$. Então:

$$\begin{aligned}
I[H] = T \;\Leftrightarrow\; & I[(\forall x)p(x) \wedge (\exists x)\neg p(x)] = T, \\
\Leftrightarrow\; & I[(\forall x)p(x)] = T \ \text{ e } \ I[(\exists x)\neg p(x)] = T, \\
\Leftrightarrow\; & \forall\ d \in U,\ < x \leftarrow d > I[p(x)] = T \ \text{ e} \\
& \exists\ c \in U;\ < x \leftarrow c > I[\neg p(x)] = T, \\
\Leftrightarrow\; & \forall\ d \in U,\ < x \leftarrow d > I[p(x)] = T \ \text{ e} \\
& \exists\ c \in U;\ < x \leftarrow c > I[p(x)] = F, \\
\Leftrightarrow\; & \forall\ d \in U,\ p_I(d) = T \ \text{ e } \ \exists\ c \in U;\ p_I(c) = F.
\end{aligned}$$

Como a afirmação "$\forall\ d \in U,\ p_I(d)] = T$ e $\exists\ c \in U;\ p_I(c) = F$" é falsa, então, para toda interpretação, $I[H] = F$. Isto é, H é contraditória. ■

Notação. Para denotar que um termo t ocorre zero, uma, ou mais vezes em uma fórmula H, escrevemos: $H(t)$. Suponha, por exemplo, $H = (\forall x)p(x) \rightarrow q(f(x), y)$. Nesse caso, denotamos $H(x)$ para indicar que x ocorre em H. Observe que podemos ter ocorrências de x livres, ou ligadas. Essa notação somente dá ênfase ao fato de x ser uma variável que ocorre em H, pois $H(x) = H$. Analogamente, temos $H(f(x)) = H$. Nesse caso, $H(f(x))$ somente indica que o termo $f(x)$ ocorre em H. Da mesma forma, $H(x, f(x))$ denota que x e $f(x)$ ocorrem em H.

Proposição 8.1 (contradição) *Considere as fórmulas:*

$$H = (\forall x)(\exists y)E(x, y) \quad e \quad H_s = (\forall x)E(x, f(x)),$$

tais que E é uma fórmula que contém as variáveis livres x e y. Além disso, f é uma função qualquer.

Se H é contraditória então H_s é contraditória.

Esquema de demonstração. A fórmula H_s corresponde à *skolemização* de H [Shoenfield]. Observe que a demonstração a seguir é apenas uma ideia, pois a demonstração rigorosa desse resultado utiliza indução no comprimento das fórmulas. Suponha que para toda interpretação I sobre um domínio U, $I[H] = F$. Logo:

$$\begin{aligned} I[H] = F \;&\Leftrightarrow\; I[(\forall x)(\exists y)E(x, y)] = F, \\ &\Leftrightarrow\; \exists\, d \in U;\; < x \leftarrow d > I[(\exists y)E(x, y)] = F, \\ &\Leftrightarrow\; \exists\, d \in U;\; \forall\, b \in U < y \leftarrow b >< x \leftarrow d > I[E(x, y)] = F, \\ &\Leftrightarrow\; \exists\, d \in U;\; \forall\, b \in U \quad E_I(d, b) = F. \end{aligned}$$

Portanto, existe $d \in U$, tal que, para qualquer escolha de b, temos que $E_I(d, b) = F$. Dado b, seja f[2] uma função tal que $f_I(d) = b$, logo $E_I(d, f_I(d)) = F$. Continuando o desenvolvimento anterior:

$$\begin{aligned} I[H] = F \;&\Leftrightarrow\; \exists\, d \in U;\; \forall\, b \in U,\; E_I(d, b) = F, \\ &\Rightarrow\; \exists\, d \in U;\; E_I(d, f_I(d)) = F, \text{ onde } f \text{ é a função tal que} f_I(d) = b, \\ &\Leftrightarrow\; \exists\, d \in U;\; < x \leftarrow d > I[E(x, f(x))] = F \\ &\Leftrightarrow\; I[(\forall x)E(x, f(x))] = F, \\ &\Leftrightarrow I[H_s] = F. \end{aligned}$$

Portanto, para toda interpretação I, se $I[H] = F$, então $I[H_s] = F$. Isto é, concluímos que se H é contraditória, então H_s é contraditória. **cqd** ■

8.5 Implicação

Analisamos a seguir algumas implicações entre fórmulas da Lógica de Predicados. E, como sempre, na Lógica de Predicados, o conceito de implicação semântica, denominado simplesmente por implicação, é análogo ao mesmo conceito apresentado na Lógica Proposicional. Isto é:

H implica semanticamente G, se, e somente se, para toda interpretação I, se $I[H] = T$, então $I[G] = T$.

[2] Será que essa função f sempre existe? E se existe, como deve ser definida? A escolha dessa função deve ser feita com mais cuidado e rigor. Por isso, esta demonstração é apenas uma ideia. Ela não é rigorosa.

Exemplo 8.15 (não implicação) Considere as fórmulas:
$H_1 = (\forall x)(p(x) \vee q(x))$ e $H_2 = (\forall x)p(x) \vee (\forall x)q(x)$.
Demonstramos que H_1 não implica H_2. Isto é, demonstramos que:
$\exists\ I;\ I[H_1] = T,$ e $I[H_2] = F.$

Portanto, para demonstrar que H_1 não implica H_2, devemos definir uma interpretação I tal que $I[H_1] = T,$ e $I[H_2] = F$. Não é necessário pensar em interpretações fora do comum, muito diferentes. Considere uma interpretação I sobre os naturais $\mathbb{N}$. Assim, como $I[H_1] = T$, devemos ter $I[(\forall x)(p(x) \vee q(x))] = T$. Isto é, informalmente devemos considerar que para todo número natural, um dos predicados p ou q é verdadeiro. Pensar nos números pares e ímpares é uma boa opção, pois para todo natural x, temos que x é par ou ímpar. Seja, então:
$I[p(x)] = T$ se, e somente se, x_I é par;
$I[q(x)] = T$ se, e somente se, x_I é ímpar.

Nesse caso, temos:

$$\begin{aligned}
I[H_1] = T &\Leftrightarrow I[(\forall x)(p(x) \vee q(x))] = T,\\
&\Leftrightarrow \forall\ d \in \mathbb{N},\ < x \leftarrow d > I[p(x) \vee q(x)] = T,\\
&\Leftrightarrow \forall\ d \in \mathbb{N},\ < x \leftarrow d > I[p(x)] = T \ \text{ ou } \ < x \leftarrow d > I[q(x)] = T,\\
&\Leftrightarrow \forall\ d \in \mathbb{N},\ d \ \text{ é par, ou } \ d \ \text{ é ímpar.}
\end{aligned}$$

Como é verdade que "$\forall\ d \in \mathbb{N},\ d$ é par ou é ímpar", então $I[H_1] = T$. A interpretação I interpreta H_2 como falsa:

$$\begin{aligned}
I[H_2] = F &\Leftrightarrow I[(\forall x)p(x) \vee (\forall x)q(x)] = F,\\
&\Leftrightarrow I[(\forall x)p(x)] = F \ \text{ e } \ I[(\forall x)q(x)] = F,\\
&\Leftrightarrow \exists\ d \in \mathbb{N},\ < x \leftarrow d > I[p(x)] = F \ \text{ e}\\
&\qquad \exists\ c \in \mathbb{N},\ < x \leftarrow c > I[q(x)] = F,\\
&\Leftrightarrow \exists\ d \in \mathbb{N},\ d \ \text{ não é par, e } \ \exists\ c \in \mathbb{N},\ c \ \text{ não é ímpar.}
\end{aligned}$$

Como é verdade que "$\exists\ d \in \mathbb{N},\ d$ não é par, e $\exists\ c \in \mathbb{N},\ c$ não é ímpar", então $I[H_2] = F$. Conclusão: H_1 não implica H_2. ■

Exemplo 8.16 (implicação) Considere as fórmulas H_1 e H_2 do Exemplo 8.15. Demonstramos que H_2 implica H_1. Isto é, demonstramos que:
$\forall\ I,$ se $I[H_2] = T,$ então $I[H_1] = T,$

Portanto, ainda que H_1 não implica H_2, o inverso é verdadeiro. Suponha, então, que $\forall\ I,\ I[H_2] = T$. Mas,

$$\begin{aligned}
I[H_2] = T &\Leftrightarrow I[(\forall x)p(x) \vee (\forall x)q(x)] = T,\\
&\Leftrightarrow I[(\forall x)p(x)] = T \ \text{ ou } \ I[(\forall x)q(x)] = T,\\
&\Leftrightarrow \forall\ d \in U,\ < x \leftarrow d > I[p(x)] = T \ \text{ ou}\\
&\qquad \forall\ c \in U,\ < x \leftarrow c > I[q(x)] = T,\\
&\Rightarrow \forall\ d \in U,\ \{< x \leftarrow d > I[p(x)] = T \ \text{ ou}\\
&\qquad < x \leftarrow d > I[q(x)] = T\ \},\\
&\Leftrightarrow \forall\ d \in U,\ < x \leftarrow d > I[p(x) \vee q(x)] = T,
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &\Leftrightarrow \; I[(\forall x)(p(x) \lor q(x))] = T, \; \} \\ &\Leftrightarrow \; I[H_1] = T. \end{aligned}$$

Na demonstração acima temos um símbolo de implicação semântica que denotamos, para chamar a atenção, por "$\Rrightarrow$". Preste atenção nesse símbolo. Ele diz que a afirmação 1 a seguir:

Afirmação 1.

"$\forall \; d \in U, \; < x \leftarrow d > I[p(x)] = T$ ou $\forall \; c \in U, \; < x \leftarrow c > I[q(x)] = T$"

implica:

Afirmação 2.

"$\forall \; d \in U, \; \{< x \leftarrow d > I[p(x)] = T$ ou $< x \leftarrow d > I[q(x)] = T \; \}$".

Porém, o inverso não é verdade. Isto é, a afirmação 2 não implica a afirmação 1. Por que é assim? Porque na afirmação 1 estamos dizendo que para qualquer d, $p_I(d) = T$ e também que para qualquer c, $q_I(c) = T$. E, nesse caso, d pode não ter relação alguma com c. Por outro lado, na afirmação 2, estamos dizendo que para qualquer d, temos que $p_I(d) = T$ e também, para o mesmo d, que $q_I(d) = T$. Portanto, as afirmações falam coisas diferentes. Portatno, se a afirmação 1 é verdadeira, então o predicado p, ou o predicado q, é satisfeito para qualquer elemento do domínio. Logo, para qualquer elemento do domínio, pelo menos um dos predicados, p ou q, é verdadeiro. Daí, concluímos que a afirmação 2 é verdadeira. Para simplificar o raciocínio e verificar a diferença entre as afirmações, podemos considerar um caso particular. Seja a interpretação I do Exemplo 8.15. Nesse caso, a afirmação 1 diz que todo número natural é par, ou todo número natural é ímpar. Estamos, portanto, falando duas coisas distintas, que todo número é par, ou que todo número é ímpar. E, é claro, isso é falso, pois é falso que todo número é par, como também é falso que todo número é ímpar. Por outro lado, a afirmação 2 diz que para todo número natural temos que ele é par, ou é ímpar. E esse fato é verdadeiro. ■

Exemplo 8.17 (não implicação) Considere as fórmulas:
$H_3 = (\exists x)(p(x) \land q(x))$ e $H_4 = (\exists x)p(x) \land (\exists x)q(x)$.
Demonstramos, a seguir, que H_4 não implica H_3. Para demonstrar que H_4 não implica H_3, devemos definir uma interpretação I tal que $I[H_4] = T$ e $I[H_3] = F$. Considere a interpretação I definida no Exemplo 8.15. Nesse caso,

$$\begin{aligned} I[H_4] = T \; &\Leftrightarrow \; I[(\exists x)p(x) \land (\exists x)q(x))] = T, \\ &\Leftrightarrow \; I[(\exists x)p(x)] = T \text{ e } I[(\exists x)q(x))] = T, \\ &\Leftrightarrow \; \exists \; d \in \mathbb{N}, \; < x \leftarrow d > I[p(x)] = T \text{ e} \\ &\quad\;\;\; \exists \; c \in \mathbb{N}, \; < x \leftarrow c > I[q(x)] = T, \\ &\Leftrightarrow \; \exists \; d \in \mathbb{N}, \; d \text{ é par e } \exists \; c \in \mathbb{N}, \; c \text{ é ímpar.} \end{aligned}$$

Como é verdade que "$\exists \; d \in \mathbb{N}, \; d$ é par e $\exists \; c \in \mathbb{N}, \; c$ é ímpar", então $I[H_4] = T$. Por outro lado,

$$\begin{aligned} I[H_3] = T \; &\Leftrightarrow \; I[(\exists x)(p(x) \land q(x))] = T, \\ &\Leftrightarrow \; \exists \; d \in \mathbb{N}, \; < x \leftarrow d > I[p(x) \land q(x)] = T, \end{aligned}$$

$$\Leftrightarrow \ \exists\ d \in \mathbb{N},\ < x \leftarrow d > I[p(x)] = T \ \text{ e } \ < x \leftarrow d > I[q(x)] = T,$$
$$\Leftrightarrow \ \exists\ d \in \mathbb{N},\ d \ \text{ é par e ímpar.}$$

Como é falso que "$\exists\ d \in \mathbb{N},\ d$ é par e ímpar", então $I[H_3] = F$. Conclusão: H_4 não implica H_3, pois verdadeiro não implica falso. ■

Exemplo 8.18 (implicação) Considere as fórmulas H_3 e H_4 do Exemplo 8.17. Naquele exemplo, demonstramos que H_4 não implica H_3. Vamos agora demonstrar que H_3 implica H_4. Temos o seguinte:

$$\begin{aligned}
I[H_3] = T \ &\Leftrightarrow \ I[(\exists x)(p(x) \land q(x))] = T,\\
&\Leftrightarrow \ \exists\ d \in U,\ < x \leftarrow d > I[p(x) \land q(x)] = T,\\
&\Leftrightarrow \ \exists\ d \in U,\ < x \leftarrow d > I[p(x)] = T \ \text{ e } \ < x \leftarrow d > I[q(x)] = T,\\
&\Rrightarrow \ \exists\ d \in U,\ < x \leftarrow d > I[p(x)] = T \ \text{ e }\\
&\qquad \exists\ c \in U,\ < x \leftarrow c > I[q(x)] = T,\\
&\Leftrightarrow \ I[(\exists x)p(x)] = T \ \text{ e } \ I[(\exists x)q(x)] = T,\\
&\Leftrightarrow \ I[(\exists x)p(x) \land (\exists x)q(x)] = T,\\
&\Leftrightarrow \ I[H_4] = T.
\end{aligned}$$

Como no Exemplo 8.16, a demonstração acima possui um símbolo de implicação semântica que denotamos, para chamar a atenção, por "$\Rrightarrow$." Preste atenção nesse símbolo. Ele diz que a afirmação 1, a seguir:

Afirmação 1. "$\exists\ d \in U,\ < x \leftarrow d > I[p(x)] = T$ e $< x \leftarrow d > I[q(x)] = T$"
implica a afirmação 2, a seguir:

Afirmação 2. "$\exists\ d \in U,\ < x \leftarrow d > I[p(x)] = T$ e $\exists\ c \in U,\ < x \leftarrow c > I[q(x)] = T$".

Portanto, H_3 implica H_4.

Porém, o inverso não é verdade. Isto é, a afirmação 2 não implica a afirmação 1. Isto é, H_4 não implica H_3, o que está de acordo com o Exemplo 8.17.

■

Proposição 8.2 (implicação) *Dada uma fórmula H e x uma variável qualquer da Lógica de Predicados, se H é válida, então $(\forall x)H$ é válida.*

Esquema de demonstração. Nesse caso, dizemos que $(\forall x)H$ é a generalização de H. Esta proposição diz, portanto, que se H é válida, a sua generalização também é válida. Seja I uma interpretação sobre um domínio U. Como H é válida, então para toda interpretação $I, I[H] = T$. Logo, temos também que:

$\forall\ I, \forall\ d \in U,\ < x \leftarrow d > I[H] = T.$

Mas como:

$\forall\ I, \forall\ d \in U,\ < x \leftarrow d > I[H] = T \quad \Leftrightarrow \quad \forall\ I, I[(\forall x)H] = T,$

concluímos que:

se $\forall\ I, I[H] = T$, então $\forall\ I, I[(\forall x)H] = T$.

Portanto, se H é válida, então $(\forall x)H$ é válida. A demonstração rigorosa dessa implicação deve ser feita utilizando indução no comprimento da fórmula H. Nesse sentido, a demonstração apresentada é apenas um esboço. **cqd** ■

8.6 Equivalência

A seguir, consideramos exemplos de equivalências entre fórmulas da Lógica de Predicados, que, também, é análogo ao mesmo conceito apresentado na Lógica Proposicional. Lembre da definição.

H equivale semanticamente a G, se, e somente se, para toda interpretação I, $I[H] = I[G]$.

Exemplo 8.19 (equivalência) Considere:
$H_5 = (\forall x)((\exists x)p(x) \lor q(x))$ e $H_6 = (\forall x)(\exists x)p(x) \lor (\forall x)q(x)$.
Demonstramos, neste exemplo, que H_5 equivale a H_6. Mas, inicialmente, observe a semelhança dessas fórmulas com as fórmulas H_1 e H_2 do Exemplo 8.15, no qual demonstramos que H_1 não implica H_2. Nesse sentido, a colocação do quantificador $(\exists x)$ antes do predicado $p(x)$ muda tudo. Temos que H_1 não equivale H_2, mas H_5 equivale H_6. Seja, então, uma interpretação, qualquer, sobre o domínio U.

$$
\begin{aligned}
I[H_5] = T \; \Leftrightarrow\; & I[(\forall x)((\exists x)p(x) \lor q(x))] = T, \\
\Leftrightarrow\; & \forall\, d \in\, U,\ < x \leftarrow d > I[(\exists x)p(x) \lor q(x)] = T, \\
\Leftrightarrow\; & \forall\, d \in\, U,\ < x \leftarrow d > I[(\exists x)p(x)] = T, \text{ ou} \\
& \quad < x \leftarrow d > I[q(x)] = T, \\
\Leftrightarrow\; & \forall\, d \in\, U,\ \exists c \in U;\ < x \leftarrow c >< x \leftarrow d > I[p(x)] = T, \text{ ou} \\
& \quad < x \leftarrow d > I[q(x)] = T, \\
\Leftrightarrow\; & \forall\, d \in\, U,\ \exists c \in U;\ < x \leftarrow c >< x \leftarrow d > I[p(x)] = T, \text{ ou} \\
& \quad \forall\, d \in\, U,\ < x \leftarrow d > I[q(x)] = T, \\
\Leftrightarrow\; & \forall\, d \in\, U,\ < x \leftarrow d > I[(\exists x)p(x)] = T, \text{ ou} \\
& \quad \forall\, d \in\, U,\ < x \leftarrow d > I[q(x)] = T, \\
\Leftrightarrow\; & I[(\forall x)(\exists x)p(x)] = T, \text{ ou } I[(\forall x)q(x)] = T, \\
\Leftrightarrow\; & I[(\forall x)(\exists x)p(x) \lor (\forall x)q(x)] = T, \\
\Leftrightarrow\; & I[H_6] = T.
\end{aligned}
$$

Portanto, $I[H_5] = T \Leftrightarrow I[H_6] = T$. Então, para toda interpretação I, $I[H_5] = I[H_6]$. Isto é, H_5 equivale a H_6. ■

Exemplo 8.20 (equivalência) Considere:
$H_7 = (\forall x)(p(x) \land q(x))$ e $H_8 = (\forall x)p(x) \land (\forall x)q(x)$.
Demonstramos, neste exemplo, que H_7 equivale a H_8. Observe a semelhança dessas fórmulas com H_1 e H_2 do Exemplo 8.15. Como sabemos, H_1 não equivale a H_2. Mas, a substituição do conectivo $\lor$ por $\land$ nas fórmulas H_1 e H_2 muda tudo. Isso, porque H_7 equivale a H_8. Seja, então, uma interpretação qualquer sobre o domínio U.

$$
\begin{array}{lcl}
I[H_7] = T & \Leftrightarrow & I[(\forall x)(p(x) \wedge q(x))] = T, \\
& \Leftrightarrow & \forall\ d \in\ U,\ < x \leftarrow d > I[p(x) \wedge q(x)] = T, \\
& \Leftrightarrow & \forall\ d \in\ U,\ < x \leftarrow d > I[p(x)] = T \ \text{ e } \ < x \leftarrow d > I[q(x)] = T, \\
& \Leftrightarrow & \forall\ d \in\ U,\ < x \leftarrow d > I[p(x)] = T \ \text{ e} \\
& & \forall\ d \in\ U,\ < x \leftarrow d > I[q(x)] = T, \\
& \Leftrightarrow & I[(\forall x)p(x)] = T \ \text{ e } \ I[(\forall x)q(x)] = T, \\
& \Leftrightarrow & I[(\forall x)p(x) \wedge (\forall x)q(x)] = T, \\
& \Leftrightarrow & I[H_8] = T.
\end{array}
$$

Portanto, $I[H_7] = T \Leftrightarrow I[H_8] = T$. Então, para toda interpretação I, $I[H_7] = I[H_8]$. Isto é, H_7 equivale a H_8.

Neste exemplo, para demonstrar que $I[H_7] = I[H_8]$, demonstramos que

$$I[H_7] = T \Leftrightarrow I[H_8] = T.$$

De forma análoga, podemos demonstrar que

$$I[H_7] = F \Leftrightarrow I[H_8] = F$$

e obter a mesma conclusão. Veja a demonstração de $I[H_7] = F \Leftrightarrow I[H_8] = F$:

$$
\begin{array}{lcl}
I[H_7] = F & \Leftrightarrow & I[(\forall x)(p(x) \wedge q(x))] = F, \\
& \Leftrightarrow & \exists\ d \in\ U;\ < x \leftarrow d > I[p(x) \wedge q(x)] = F, \\
& \Leftrightarrow & \exists\ d \in\ U;\ < x \leftarrow d > I[p(x)] = F,\ \text{ ou } \ < x \leftarrow d > I[q(x)] = F, \\
& \Leftrightarrow & \exists\ d \in\ U,\ < x \leftarrow d > I[p(x)] = F,\ \text{ ou} \\
& & \exists\ d \in\ U,\ < x \leftarrow d > I[q(x)] = F, \\
& \Leftrightarrow & I[(\forall x)p(x)] = F,\ \text{ ou } \ I[(\forall x)q(x)] = F, \\
& \Leftrightarrow & I[(\forall x)p(x) \wedge (\forall x)q(x)] = F, \\
& \Leftrightarrow & I[H_8] = F.
\end{array}
$$

■

Exemplo 8.21 (equivalência) Considere:
$H_9 = (\exists x)(p(x) \rightarrow r(x))$,
$H_{10} = (\forall x)p(x) \rightarrow (\exists x)r(x)$ e $H_{11} = (\exists x)p(x) \rightarrow (\exists x)r(x)$.
Demonstramos a seguir, que H_9 equivale a H_{10}, mas H_9 não equivale a H_{11}. Seja I uma interpretação sobre um domínio U. Temos que:

$$
\begin{array}{lcl}
I[H_9] = F & \Leftrightarrow & I[(\exists x)(p(x) \rightarrow r(x))] = F, \\
& \Leftrightarrow & \forall\ d \in U,\ < x \leftarrow d > I[p(x) \rightarrow r(x)] = F, \\
& \Leftrightarrow & \forall\ d \in U,\ < x \leftarrow d > I[p(x)] = T \ \text{ e } \ < x \leftarrow d > I[r(x)] = F, \\
& \Leftrightarrow & \forall\ d \in U,\ < x \leftarrow d > I[p(x)] = T \ \text{ e} \\
& & \forall\ d \in U,\ < x \leftarrow d > I[r(x)] = F, \\
& \Leftrightarrow & I[(\forall x)p(x)] = T \ \text{ e } \ I[(\exists x)r(x)] = F, \\
& \Leftrightarrow & I[(\forall x)p(x) \rightarrow (\exists x)r(x)] = F, \\
& \Leftrightarrow & I[H_{10}] = F.
\end{array}
$$

Portanto, $I[H_9] = F \Leftrightarrow I[H_{10}] = F$. Logo, para toda interpretação, $I[H_9] = I[H_{10}]$. Concluímos que H_9 equivale a H_{10}.

Agora, provamos que H_9 não implica H_{11}. Para isso, definimos uma interpretação sobre o conjunto dos naturais, $\mathbb{N}$, tal que $I[H_9] = T$ e $I[H_{11}] = F$. Considere que:

$I[p(x)] = T$ se, e somente se, x_I é par;

$I[r(x)] = T$ se, e somente se, x_I é ímpar.

Nesse caso, temos:

$$
\begin{aligned}
I[H_9] = F \;\; & \Leftrightarrow \;\; I[(\exists x)(p(x) \to r(x))] = F, \\
& \Leftrightarrow \;\; \forall\, d \in \mathbb{N},\; < x \leftarrow d > I[p(x) \to r(x)] = F, \\
& \Leftrightarrow \;\; \forall\, d \in \mathbb{N},\; < x \leftarrow d > I[p(x)] = T \;\text{ e }\; < x \leftarrow d > I[r(x)] = F, \\
& \Leftrightarrow \;\; \forall\, d \in \mathbb{N},\; p_I(d) = T \;\text{ e }\; r_I(d) = F, \\
& \Leftrightarrow \;\; \forall\, d \in \mathbb{N},\; \{d \;\text{ é par e é falso que }\; d \;\text{ é ímpar}\}, \\
& \Leftrightarrow \;\; \forall\, d \in \mathbb{N},\; \{d \;\text{ é par e é verdadeiro que }\; d \;\text{ é par}\}, \\
& \Leftrightarrow \;\; \forall\, d \in \mathbb{N},\; \{d \;\text{ é par}\}.
\end{aligned}
$$

Como a última afirmação é falsa, então $I[H_9] = T$. Por outro lado:

$$
\begin{aligned}
I[H_{11}] = F \;\; & \Leftrightarrow \;\; I[(\exists x)p(x) \to (\exists x)r(x)] = F, \\
& \Leftrightarrow \;\; I[(\exists x)p(x)] = T \;\text{ e }\; I[(\exists x)r(x)] = F, \\
& \Leftrightarrow \;\; \exists\, d \in \mathbb{N};\; < x \leftarrow d > I[p(x)] = T \;\text{ e }\; \forall\, c \in \mathbb{N}\; < x \leftarrow c > I[r(x)] = F, \\
& \Leftrightarrow \;\; \exists\, d \in \mathbb{N};\; p_I(d) = T \;\text{ e } \\
& \qquad \forall\, c \in \mathbb{N},\; r_I(c) = F, \\
& \Leftrightarrow \;\; \{\exists\, d \in \mathbb{N};\; d \;\text{ é par}\} \text{ e } \{\text{ é falso que }\; \forall\, c \in \mathbb{N},\; c \;\text{ é ímpar}\}.
\end{aligned}
$$

No final da demonstração acima, temos duas afirmações: "$\exists\, d \in \mathbb{N};\; d$ é par" e "é falso que $\forall\, c \in \mathbb{N},\; c$ é ímpar". As duas afirmações, olhadas individualmente, são, cada uma, verdadeiras. Logo, sua conjunção também é verdadeira. Portanto, $I[H_{11}] = F$. Conclusão: H_9 não equivale a H_{11}, pois existe uma interpretação I, tal que $I[H_9] = T$ e $I[H_{11}] = F$. ■

8.6.1 Classificação dos argumentos lógicos

No Capítulo 3, consideramos a classificação de argumentos lógicos representados na Lógica Proposicional. A seguir, analisamos tal classificação para argumentos representados na Lógica de Predicados. E, como sempre, o a introdução de quantificadores, predicados e funções determina uma análise mais complexa que aquela considerada na Lógica Proposicional. Em alguns casos os diagramas de Venn, analisados a seguir, auxiliam essa análise.

Diagramas de Venn. Dada uma interpretação I sobre um domínio U e um predicado unário p, um diagrama de Venn é uma representação gráfica dos elementos do domínio que satisfazem o predicado. Em um diagrama de Venn, conforme a Figura 8.4, os elementos do domínio da interpretação I que satisfazem p são os elementos no interior do círculo p e os que não satisfazem estão no exterior. Então, escrevemos no interior do círculo o símbolo p e no seu exterior $\neg p$. Além disso, observe que o círculo está no interior de um retângulo, que representa todo o domínio U da interpretação I.

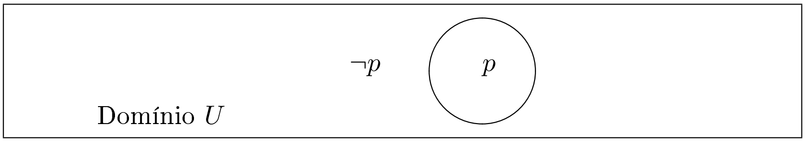


Figura 8.4: Elementos que satisfazem o predicado p.

Seguindo esse raciocínio, se temos mais predicados, eles são representados da mesma forma. Suponha, por exemplo, os predicados p, q e r, conforme a Figura 8.5.

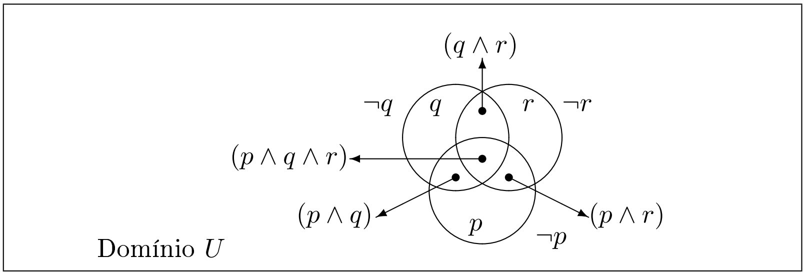


Figura 8.5: Elementos que satisfazem os predicados p, q e r.

Operações sobre os círculos. No diagrama de Venn da Figura 8.5, a interseção dos círculos p e q, por exemplo, é nomeada $(p \wedge q)$. Analogamente, a interseção dos três círculos é nomeada por $(p \wedge q \wedge r)$. Além disso, para denotar o complemento de um conjunto p, escrevemos $\neg p$. A união dos círculos p e q, por exemplo, é $p \vee q$. Nesse sentido, denotamos por $(\neg p \wedge q \wedge \neg r)$, por exemplo, os elementos do domínio que não pertencem aos círculos p e r, mas que pertencem ao círculo q. Analogamente, $p \vee \neg r$ denota os elementos de p ou $\neg r$.

Para iniciar nossa análise sobre a classificação de argumentos lógicos, lembre das definições.

1. **Argumento bom.** Um argumento é bom quando suas premissas são verdadeiras e justificam a conclusão.
2. **Argumento correto.** Um argumento é correto quando suas premissas justificam a conclusão.
3. **Argumento forte.** Um argumento incorreto é forte se são raras as situações em que as premissas são verdadeiras e a conclusão falsa.
4. **Argumento fraco.** Um argumento incorreto é fraco se são frequentes as situações em que as premissas são verdadeiras e a conclusão falsa.

Exemplo 8.22 (classificação de argumento lógico) Considere o argumento do Exemplo 7.41. "Todos os homens são mamíferos. Todos os mamíferos são animais. Portanto, todo homem é um animal." Conforme o Exemplo, 7.41, esse argumento pode ser representado na Lógica de Predicados, segundo I_5, por:

$$H_{12} = ((\forall x)(p(x) \to q(x)) \land (\forall x)(q(x) \to r(x))) \to (\forall x)(p(x) \to r(x))$$

A fórmula H_{12} é válida. Isto é, para toda interpretação I, temos que $I[H_{12}] = T$. Portanto, não só a interpretação I_5 interpreta H_{12} como verdadeira, como assim o fazem todas as outras interpretações. Temos, então, um argumento válido e a demonstração é a seguinte. Suponha que existe uma interpretação I tal que $I[H_{12}] = F$. Logo:

$$
\begin{array}{ll}
\multicolumn{2}{l}{I\ [H_{12}] = F} \\
\Leftrightarrow & I[((\forall x)(p(x) \to q(x)) \land (\forall x)(q(x) \to r(x))) \to (\forall x)(p(x) \to r(x))] = F, \\
\Leftrightarrow & I[((\forall x)(p(x) \to q(x)) \land (\forall x)(q(x) \to r(x)))] = T \ \text{ e} \\
 & I[(\forall x)(p(x) \to r(x))] = F, \\
\Leftrightarrow & I[(\forall x)(p(x) \to q(x))] = T \ \text{ e} \\
 & I[(\forall x)(q(x) \to r(x))] = T \ \text{ e} \\
 & I[(\forall x)(p(x) \to r(x))] = F, \\
\Leftrightarrow & \forall\ d \in U,\ < x \leftarrow d > I[p(x) \to q(x)] = T \ \text{ e} \\
 & \forall\ c \in U,\ < x \leftarrow c > I[q(x) \to r(x)] = T \ \text{ e} \\
 & \exists\ e \in U,\ < x \leftarrow e > I[(p(x) \to r(x)] = F, \\
\Leftrightarrow & \forall\ d \in U,\ \text{ se }\ p_I(d) = T,\ \text{ então }\ q_I(d) = T \ \text{ e} \\
 & \forall\ c \in U,\ \text{ se }\ q_I(c) = T,\ \text{ então }\ r_I(c) = T \ \text{ e} \\
 & \exists\ e \in U,\ p_I(e) = T \ \text{ e }\ r_I(e) = F.
\end{array}
$$

E agora! Afinal, a última afirmação da dedução acima é, ou não, verdadeira? Uma forma de analisar esse tipo de afirmação é utilizando diagramas de Venn. Primeiro, observe que a última afirmação é composta pelas três afirmações:

1. "$\forall\ d \in U$, se $p_I(d) = T$, então $q_I(d) = T$";
2. "$\forall\ c \in U$, se $q_I(c) = T$, então $r_I(c) = T$";
3. "$\exists\ e \in U$; $p_I(e) = T$ e $r_I(e) = F$".

Para que a afirmação 1 seja verdadeira para todo elemento do domínio, se ele estiver no interior do círculo p, então deve estar, também, no interior do círculo q. Analogamente, para que a afirmação 2 seja verdadeira para todo elemento do domínio, se ele estiver no interior do círculo q, então deve estar, também, no interior do círculo r. Portanto, o diagrama da Figura 8.6 satisfaz as afirmações 1 e 2. Por outro lado, para que a afirmação 3 seja verdadeira, deve existir algum elemento e do domínio que esteja no interior de p e também no exterior de r. Entretanto, isso é impossível, pois conforme a Figura 8.6, o círculo p está contido em q, que por sua vez está contido em r. Conclui-se, então, que a afirmação final da dedução é falsa. Logo, $I[H_{12}] = T$ para toda interpretação I. Portanto, H_{12} é válida. Isto é, o argumento é válido.

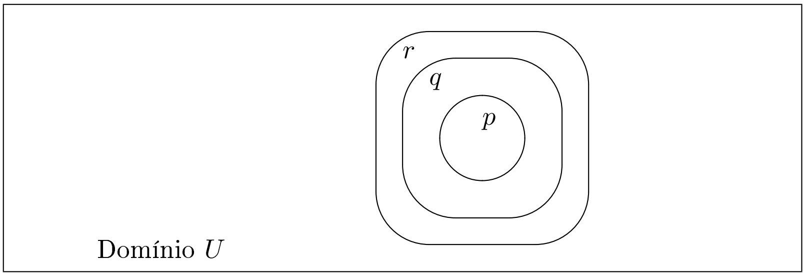


Figura 8.6: Elementos que satisfazem os predicados p, q e r.

Observe que dado que o argumento é válido, não necessariamente, ele é correto. Pois para ser correto, além de válido, suas premissas devem justificar a conclusão. Mas, dado que todos os homens são mamíferos e que os mamíferos são animais, isso justifica que todo homem é um animal. Portanto, o argumento é correto. Além disso, para o argumento ser bom, suas premissas devem ser verdadeiras. Parece claro que todos os homens são mamíferos e que todos os mamíferos são animais. Logo, temos também um bom argumento. ■

Exemplo 8.23 (classificação de argumento lógico) Considere o argumento do Exemplo 7.42. "Todo baterista é músico. Alguns vocalistas são músicos. Portanto, alguns vocalistas não são bateristas." Conforme o Exemplo, 7.42, esse argumento pode ser representado na Lógica de Predicados, segundo I_6, pela fórmula H_{13}, tal que:

$$H_{13} = ((\forall x)(p(x) \rightarrow q(x)) \land (\exists x)(r(x) \land q(x))) \rightarrow (\exists x)(r(x) \land \neg p(x))$$

Ainda não sabemos se a fórmula H_{13} é válida. Suponha que existe uma interpretação I tal que $I[H_{13}] = F$. Logo:

$$\begin{aligned}
& I\ [H_{13}] = F \\
& \Leftrightarrow\ I[((\forall x)(p(x) \rightarrow q(x)) \land (\exists x)(r(x) \land q(x))) \rightarrow (\exists x)(r(x) \land \neg p(x))] = F, \\
& \Leftrightarrow\ I[(\forall x)(p(x) \rightarrow q(x)) \land (\exists x)(r(x) \land q(x))] = T \ \text{ e} \\
& \quad\ \ I[(\exists x)(r(x) \land \neg p(x))] = F, \\
& \Leftrightarrow\ I[(\forall x)(p(x) \rightarrow q(x))] = T \ \text{ e} \\
& \quad\ \ I[(\exists x)(r(x) \land q(x))] = T \ \text{ e} \\
& \quad\ \ I[(\exists x)(r(x) \land \neg p(x))] = F, \\
& \Leftrightarrow\ \forall\ d \in U,\ <x \leftarrow d>\ I[p(x) \rightarrow q(x)] = T \ \text{ e} \\
& \quad\ \ \exists\ c \in U,\ <x \leftarrow c>\ I[r(x) \land q(x)] = T \ \text{ e} \\
& \quad\ \ \forall\ e \in U,\ <x \leftarrow e>\ I[r(x) \land \neg p(x)] = F, \\
& \Leftrightarrow\ \forall\ d \in U,\ \text{ se }\ p_I(d) = T,\ \text{ então }\ q_I(d) = T \ \text{ e} \\
& \quad\ \ \exists\ c \in U;\ r_I(c) = T,\ \text{ e }\ q_I(c) = T \ \text{ e} \\
& \quad\ \ \forall\ e \in U,\ r_I(e) = F\ \text{ ou }\ p_I(e) = T.
\end{aligned}$$

Analisamos, a seguir, a última afirmação da dedução acima, utilizando um diagrama de Venn. A última afirmação é composta pelas três afirmações:

1. "$\forall\ d \in U$, se $p_I(d) = T$, então $q_I(d) = T$";
2. "$\exists\ c \in U$; $r_I(c) = T$, e $q_I(c) = T$";
3. "$\forall\ e \in U$, $r_I(e) = F$ ou $p_I(e) = T$".

Para que a afirmação 1 seja verdadeira, para todo elemento do domínio, se ele estiver no interior do círculo p, então deve estar também no interior do círculo q. Para que a afirmação 2 seja verdadeira, deve existir um elemento c, do domínio U, tal que c pertença aos círculos r e q. Finalmente, para que a afirmação 3 seja verdadeira, todo elemento e, do domínio, deve estar no lado exterior do círculo q ou no interior de p. O diagrama de Venn da Figura 8.7 não satisfaz todas essas condições. Observe nessa figura, que a afirmação 3 só é satisfeita se $p = q$. Mas, nesse caso, não existe elemento c. Conclui-se, então, que a afirmação final da dedução não é verdadeira. Isto é, não existe uma interpretação I tal que $I[H_{12}] = F$. Logo, H_{12} é válida. Isto é, o argumento é válido.

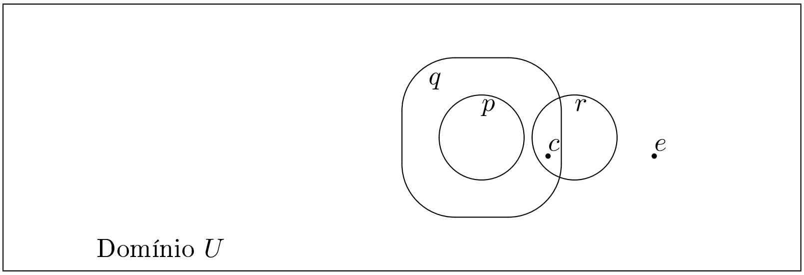


Figura 8.7: Elementos que satisfazem os predicados p, q e r.

Dado que o argumento é válido, resta descobrir se ele é bom, ou não. Como sabemos, um argumento válido é bom se as premissas são aceitas como verdadeiras e suportam a conclusão. Supondo, então, como verdadeira a premissa de que todo baterista é músico, resta saber se tal fato suporta a existência de algum vocalista que é músico, mas que não é baterista. ■

Exemplo 8.24 (classificação de argumento lógico) Considere o argumento do Exemplo 7.43. "Todos os padres são pacifistas. Nenhum general é padre. Portanto, nenhum general é pacifista." Esse argumento é representado, segundo a interpretação I_7, Exemplo 7.43 do Capítulo 7, por H_{14}, tal que:

$$H_{14} = ((\forall x)(p(x) \to q(x)) \land \neg(\exists x)(r(x) \land p(x))) \to \neg(\exists x)(r(x) \land q(x)).$$

Como não sabemos se a fórmula H_{14} é válida, vamos supor que existe uma interpretação I tal que $I[H_{14}] = F$ e ver o que acontece. Então:

$I\ [H_{14}] = F$
$\Leftrightarrow\ I[((\forall x)(p(x) \rightarrow q(x)) \land \neg(\exists x)(r(x) \land p(x))) \rightarrow \neg(\exists x)(r(x) \land q(x))] = F,$
$\Leftrightarrow\ I[(\forall x)(p(x) \rightarrow q(x)) \land \neg(\exists x)(r(x) \land p(x))] = T$ e
$I[\neg(\exists x)(r(x) \land q(x))] = F,$
$\Leftrightarrow\ I[(\forall x)(p(x) \rightarrow q(x))] = T$ e
$I[\neg(\exists x)(r(x) \land p(x))] = T$ e
$I[\neg(\exists x)(r(x) \land q(x))] = F,$
$\Leftrightarrow\ I[(\forall x)(p(x) \rightarrow q(x))] = T$ e
$I[(\exists x)(r(x) \land p(x))] = F$ e
$I[(\exists x)(r(x) \land q(x))] = T,$
$\Leftrightarrow\ \forall\ d \in U,\ < x \leftarrow d > I[p(x) \rightarrow q(x)] = T$ e
$\forall\ c \in U,\ < x \leftarrow c > I[r(x) \land p(x)] = F$ e
$\exists\ e \in U,\ < x \leftarrow e > I[r(x) \land q(x)] = T,$
$\Leftrightarrow\ \forall\ d \in U,$ se $p_I(d) = T,$ então $q_I(d) = T$ e
$\forall\ c \in U,\ r_I(c) = F,$ ou $p_I(c) = F$ e
$\exists\ e \in U;\ r_I(e) = T$ e $q_I(e) = T.$

A última afirmação é formada de três afirmações:

1. "$\forall\ d \in U,$ se $p_I(d) = T,$ então $q_I(d) = T$";

2. "$\forall\ c \in U,\ r_I(c) = F,$ ou $p_I(c) = F$";

3. "$\exists\ e \in U;\ r_I(e) = T$ e $q_I(e) = T$".

Para que a afirmação 1 seja verdadeira, para todo elemento do domínio, se ele estiver no interior do círculo p, então deve estar também no interior do círculo q. Para que a afirmação 2 seja verdadeira para todo elemento do domínio, ou ele está fora do círculo r, ou fora do círculo p. Isso significa que não existe elemento do domínio que esteja, ao mesmo tempo, no interior de r e de p. Isto é, a interseção $(r \land q)$ deve ser vazia. Finalmente, para que a afirmação 3 seja verdadeira, deve existir algum elemento e, do domínio, que esteja no círculo r e também no interior de q. O diagrama de Venn da Figura 8.8 localiza o elemento e na interseção de r e de q, como também satisfaz as afirmações 1 e 2. Conclui-se que a afirmação final da dedução é verdadeira. Isto é, existe uma interpretação I tal que $I[H_{14}] = F$. Logo, H_{14} não é válida. Isto é, o argumento não é válido.

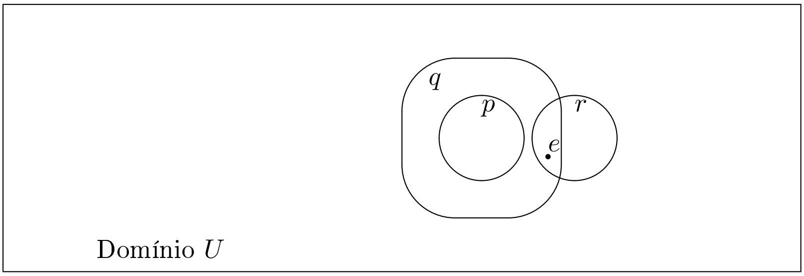


Figura 8.8: Elementos que satisfazem os predicados p, q e r.

Mas o argumento que não é válido é forte ou fraco? Devemos responder se são raras ou frequentes as situações e se temos premissas verdadeiras e conclusão falsa. Nesse caso, uma premissa é: todos os padres são pacifistas. Sabemos que é raro ter um padre que não é pacifista. Logo, tal premissa é frequentemente verdadeira. Outra premissa é: nenhum general é padre. Afinal, existe general que é padre. Pelo que sabemos, são poucos, bem poucos, os casos de generais que são padres. Logo, essa premissa também é frequentemente verdadeira. Mas, então, será que é possível concluir que nenhum general é pacifista? É claro que pode existir general pacifista. Se são muitos, isso significa que a interseção $(r \wedge q)$ possui muitos elementos. Nesse caso o argumento é fraco. Por outro lado, se há poucos generais pacifistas, então a interseção $(r \wedge q)$ possui poucos elementos e o argumento é forte. Isso ocorre porque o tamanho de $(r \wedge q)$ independe das premissas. ■

Exemplo 8.25 (classificação de argumento lógico) Considere o argumento do Exemplo 7.44. "Todo político culpado de corrupção será preso ou multado. Alguns políticos culpados de corrupção serão multados. Nenhum político será preso e multado. Portanto, nem todos os culpados de corrupção serão presos." Esse argumento é representado segundo a interpretação I_8, Exemplo 7.44, por H_{15} tal que:

$$H_{15} = ((\forall x)(p(x) \rightarrow (q(x) \vee r(x)) \wedge (\exists x)(p(x) \wedge r(x)) \wedge \neg(\exists x)(q(x) \wedge r(x)))$$
$$\rightarrow$$
$$\neg(\forall x)(p(x) \rightarrow q(x))$$

Considere que existe uma interpretação I, tal que $I[H_{15}] = F$ e a dedução a seguir:

$I\ [H_{15}] = F$
$\Leftrightarrow$ $I[((\forall x)(p(x) \rightarrow (q(x) \vee r(x)) \wedge (\exists x)(p(x) \wedge r(x))) \wedge \neg(\exists x)(q(x) \wedge r(x)))$
$\rightarrow \neg(\forall x)(p(x) \rightarrow q(x))] = F$,
$\Leftrightarrow$ $I[(\forall x)(p(x) \rightarrow (q(x) \vee r(x)) \wedge (\exists x)(p(x) \wedge r(x))) \wedge \neg(\exists x)(q(x) \wedge r(x))] = T$
e $I[\neg(\forall x)(p(x) \rightarrow q(x))] = F$,
$\Leftrightarrow$ $I[(\forall x)(p(x) \rightarrow (q(x) \vee r(x)))] = T$ e

$$
\begin{aligned}
& I[(\exists x)(p(x) \wedge r(x))] = T \ \text{ e} \\
& I[\neg(\exists x)(q(x) \wedge r(x))] = T \ \text{ e} \\
& I[\neg(\forall x)(p(x) \rightarrow q(x))] = F, \\
\Leftrightarrow \ & I[(\forall x)(p(x) \rightarrow (q(x) \vee r(x)))] = T \ \text{ e} \\
& I[(\exists x)(p(x) \wedge r(x))] = T \ \text{ e} \\
& I[(\exists x)(q(x) \wedge r(x))] = F \ \text{ e} \\
& I[(\forall x)(p(x) \rightarrow q(x))] = T, \\
\Leftrightarrow \ & \forall\, d \in U, \ < x \leftarrow d > I[p(x) \rightarrow (q(x) \vee r(x))] = T \ \text{ e} \\
& \exists\, c \in U; \ < x \leftarrow c > I[p(x) \wedge r(x)] = T \ \text{ e} \\
& \forall\, e \in U, \ < x \leftarrow e > I[q(x) \wedge r(x)] = F \ \text{ e} \\
& \forall\, s \in U; \ < x \leftarrow s > I[p(x) \rightarrow q(x)] = T, \\
\Leftrightarrow \ & \forall\, d \in U, \ \text{ se } \ p_I(d) = T, \ \text{ então } \ q_I(d) = T \ \text{ ou } \ r_I(d) = T \ \text{ e} \\
& \exists\, c \in U; \ p_I(c) = T \ \text{ e } \ r_I(c) = T \ \text{ e} \\
& \forall\, e \in U, \ q_I(e) = F \ \text{ ou } \ r_I(x) = F \ \text{ e} \\
& \forall\, s \in U, \ \text{ se } \ p_I(s) = T \ \text{ então } \ r_I(s) = T.
\end{aligned}
$$

A última afirmação é composta por quatro afirmações:

1. "$\forall\, d \in U$, se $p_I(d) = T$, então $q_I(d) = T$ ou $r_I(d) = T$";
2. "$\exists\, c \in U$; $p_I(c) = T$ e $r_I(c) = T$";
3. "$\forall\, e \in U$, $q_I(e) = F$ ou $r_I(x) = F$";
4. "$\forall\, s \in U$, se $p_I(s) = T$ então $r_I(s) = T$".

A análise das afirmações segue. Confira tal análise na Figura 8.9, que satisfaz as condições para que algumas afirmações sejam verdadeiras.

1. A afirmação 1 diz que o círculo p está contido na união $q \vee r$. Isto é, os elementos de p estão em q, ou em r.
2. A afirmação 2 diz existe um elemento c do domínio U que pertence aos círculos p e r. Veja na Figura 8.9, a localização do elemento c.
3. A afirmação 3 diz que a interseção $q \wedge r$ é vazia. Isto é, os círculos q e r são disjuntos.
4. A afirmação 4 diz que o círculo p está contido no círculo r. Nesse caso, o diagrama da Figura 8.9 não satisfaz essa condição, pois nesse diagrama há elementos de p que estão em q. Para adequar a figura, eliminamos os elementos de p que estão em q e obtemos a Figura 8.10.

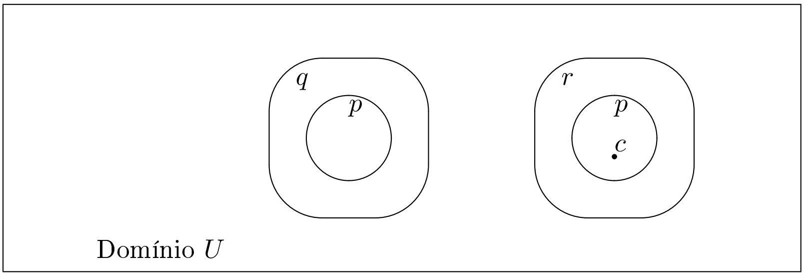


Figura 8.9: Elementos que satisfazem os predicados p, q e r.

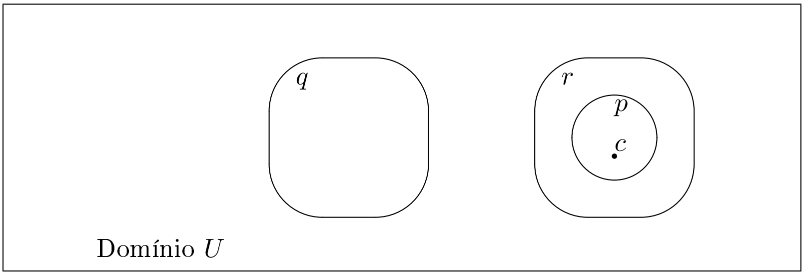


Figura 8.10: Elementos que satisfazem os predicados p, q e r.

Conclusão. A afirmação final da dedução é verdadeira. Isto é, existe uma interpretação que interpreta H_{15} como falsa. Logo, H_{15} não é válida. Isto é, o argumento não é válido. Dado que o argumento não é válido, podemos classificá-lo como forte ou fraco. Suponha que as premissas do argumento sejam, frequentemente, verdadeiras, pois, caso contrário, com premissas que são, na maioria das vezes, falsas, o argumento não pode ser forte. Lembre, novamente, um argumento incorreto é forte, se são raras as situações em que as premissas são verdadeiras e a conclusão, falsa. Então, supondo que as premissas são frequentemente verdadeiras, devemos responder se são raras ou frequentes as situações nas quais tais premissas são verdadeiras e a conclusão é falsa. Nesse contexto, se a possibilidade de escolha do elemento c é reduzida, isto é, existem poucos políticos corruptos que são multados, então o argumento raramente é falso. Portanto, nesse caso, o argumento é forte. Caso contrário, se existem muitos políticos corruptos que não são multados, ele é fraco. ■

Exemplo 8.26 (classificação de argumento lógico) Considere o argumento do Exemplo 7.45. "Cada sócio do Praia Clube gosta de outro sócio. Logo, há um sócio do Praia Clube do qual todos gostam." Conforme a interpretação I_9, do Exemplo 7.45 do Capítulo 7, esse argumento é representado pela fórmula H_{16}, a seguir:

$$H_{16} = (\forall x)(\exists y)q(x,y) \rightarrow (\exists y)(\forall x)q(x,y)$$

Observe que a fórmula H_{16} é igual à E do Exemplo 8.12, onde é demonstrado que tal fórmula não é válida. Portanto, o argumento não é válido. O argumento é fraco, pois não é verdade que cada sócio do clube gosta de outro sócio. Sempre temos aqueles que se isolam e não gostam de ninguém. Além disso, mesmo que fosse verdade que cada sócio gostasse de outro sócio, não necessariamente, teríamos um sócio do qual todos gostariam. ■

Exemplo 8.27 (classificação de argumento lógico) Considere o argumento: "Algum aluno de Computação é inteligente. Todos os alunos inteligentes são estudiosos. Portanto, há aluno de Computação que é estudioso." Seja I uma interpretação sobre o conjunto dos alunos, tal que:

$I[p(x)] = T$, se, e somente se, $I[x]$ é aluno de Computação;
$I[r(x)] = T$, se, e somente se, $I[x]$ é inteligente;
$I[q(x)] = T$, se, e somente se, $I[x]$ é estudioso.

Nesse caso, segundo I, o argumento é representado pela fórmula H_{17}, tal que:

$$H_{17} = ((\exists x)(p(x) \land r(x)) \land (\forall x)(r(x) \to q(x))) \to (\exists x)(p(x) \land q(x))$$

Esse argumento é válido, pois suponha que existe uma interpretação I, qualquer, tal que $I[H_{17}] = F$. Logo:

$$\begin{aligned}
I[H_{17}] = F \Leftrightarrow\ & I[((\exists x)(p(x) \land r(x)) \land (\forall x)(r(x) \to q(x))) \to (\exists x)(p(x) \land q(x))] = F, \\
\Leftrightarrow\ & I[(\exists x)(p(x) \land r(x)) \land (\forall x)(r(x) \to q(x))] = T \ \text{ e} \\
& I[(\exists x)(p(x) \land q(x))] = F, \\
\Leftrightarrow\ & I[(\exists x)(p(x) \land r(x))] = T \ \text{ e} \\
& I[(\forall x)(r(x) \to q(x))] = T \ \text{ e} \\
& I[(\exists x)(p(x) \land q(x))] = F, \\
\Leftrightarrow\ & \exists\ d \in U;\ < x \leftarrow d > I[p(x) \land r(x)] = T \ \text{ e} \\
& \forall\ c \in U,\ < x \leftarrow c > I[r(x) \to q(x)] = T \ \text{ e} \\
& \forall\ s \in U;\ < x \leftarrow s > I[p(x) \land q(x)] = F, \\
\Leftrightarrow\ & \exists\ d \in U;\ p_I(d) = T \ \text{ e } \ r_I(d) = T \ \text{ e} \\
& \forall\ c \in U,\ \text{ se } \ r_I(c) = T,\ \text{ então } \ q_I(c) = T \ \text{ e} \\
& \forall\ s \in U;\ p_I(s) = F,\ \text{ ou } \ q_I(s) = F.
\end{aligned}$$

A última afirmação é formada pelas afirmações:

1. "$\exists\ d \in U;\ p_I(d) = T$ e $r_I(d) = T$";
2. "$\forall\ c \in U,$ se $r_I(c) = T,$ então $q_I(c) = T$";
3. "$\forall\ s \in U;\ p_I(s) = F,$ ou $q_I(s) = F$".

Nesse caso, não é possível construir um diagrama de Venn que satisfaça as três afirmações. Para mostrar tal fato, suponha, inicialmente, um diagrama de Venn, Figura 8.11, que satisfaz as duas primeiras afirmações.

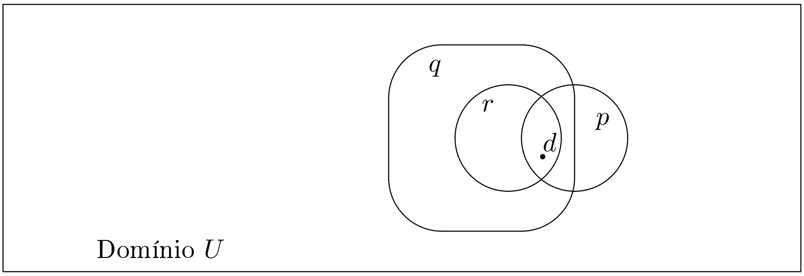


Figura 8.11: Elementos que satisfazem os predicados p, q e r.

Mas, para satisfazer a afirmação 3, os círculos p e q devem ser disjuntos. Somente nesse caso, temos que para todo elemento s do domínio, s está fora de p, ou fora de q. Entretanto, como existe d que pertence à interseção $p \wedge r$ e, além disso, r está contido em q, então, necessariamente, se as duas afirmações iniciais são satisfeitas, não tem como satisfazer a terceira. Conclui-se que a afirmação final da dedução é falsa. Logo, $I[H_{17}] = T$ para toda interpretação I. Portanto, H_{17} é válida. Isto é, o argumento é válido. Nesse caso, se premissas do argumento justificam sua conclusão, então ele é correto. "Acreditamos" que esse argumento é correto. Mas, além disso, para o argumento ser bom, suas premissas devem ser verdadeiras. Com certeza esse não é o caso. Não necessariamente é verdadeiro que existe aluno de Computação que é inteligente e, também, que todos os alunos inteligentes são estudiosos, apesar de tais fatos serem frequentemente verdadeiros. Por isso, o argumento não pode ser considerado "finamente" bom. Ele é, digamos, "quase" bom. ■

8.7 Exercícios

1. Demonstre o Lema 8.1.
2. Demonstre que as fórmulas H e G a seguir são equivalentes.
   - (a) $H = (\forall x)(\forall y)p(x, y, z),\ G = (\forall y)(\forall x)p(x, y, z)$
   - (b) $H = (\exists x)(\exists y)p(x, y, z),\ G = (\exists y)(\exists x)p(x, y, z)$
   - (c) $H = \neg(\exists y)p(y),\ G = (\forall y)\neg p(y)$
   - (d) $H = (\exists x)p(x),\ G = (\exists y)p(y)$
   - (e) $H = (\forall x)p(x),\ G = (\forall y)p(y)$
   - (f) $H = (\forall x)(\forall x)p(x),\ G = (\forall x)p(x)$
3. Demonstre que as fórmulas a seguir são válidas.
   - (a) $H = (\forall x)p(x) \rightarrow p(a)$
   - (b) $H = p(a) \rightarrow (\exists x)p(x)$

4. Considere interpretações, conforme o Seção 7.8 do Capítulo 7, que interpretem os números, a adição, a multiplicação e a igualdade da forma usual. Demonstre que as propriedades básicas da aritmética de Robinson, dadas a seguir, são válidas, no contexto dessas interpretações.

   (a) $Bx_1 = (\forall x)\neg(\overline{0} \mathrel{\widehat{=}} S(x))$

   (b) $Bx_2 = (\forall x)(\forall y)((S(x) \mathrel{\widehat{=}} S(y)) \rightarrow (x \mathrel{\widehat{=}} y)$

   (c) $Bx_3 = (\forall x)(\neg(x \mathrel{\widehat{=}} \overline{0}) \rightarrow (\exists y)(x \mathrel{\widehat{=}} S(y))$

   (d) $Bx_4 = (\forall x)((x \mathbin{\widehat{+}} \overline{0}) \mathrel{\widehat{=}} x)$

   (e) $Bx_5 = (\forall x)(\forall y)((x \mathbin{\widehat{+}} S(y)) \mathrel{\widehat{=}} S(x \mathbin{\widehat{+}} y))$

   (f) $Bx_6 = (\forall x)((x \mathbin{\widehat{\times}} \overline{0}) \mathrel{\widehat{=}} \overline{0})$

5. Determine interpretações diferentes daquelas definidas na Seção 7.8 do Capítulo 7, mas que interpretam tais propriedades como falsas.

   (a) $Bx_1 = (\forall x)\neg(\overline{0} \mathrel{\widehat{=}} S(x))$

   (b) $Bx_2 = (\forall x)(\forall y)((S(x) \mathrel{\widehat{=}} S(y)) \rightarrow (x \mathrel{\widehat{=}} y)$

   (c) $Bx_3 = (\forall x)(\neg(x \mathrel{\widehat{=}} \overline{0}) \rightarrow (\exists y)(x \mathrel{\widehat{=}} S(y))$

   (d) $Bx_4 = (\forall x)((x \mathbin{\widehat{+}} \overline{0}) \mathrel{\widehat{=}} x)$

   (e) $Bx_5 = (\forall x)(\forall y)((x \mathbin{\widehat{+}} S(y)) \mathrel{\widehat{=}} S(x \mathbin{\widehat{+}} y))$

   (f) $Bx_6 = (\forall x)((x \mathbin{\widehat{\times}} \overline{0}) \mathrel{\widehat{=}} \overline{0})$

   (g) $Bx_7 = (\forall x)(\forall y)((x \mathbin{\widehat{\times}} S(y)) \mathrel{\widehat{=}} ((x \mathbin{\widehat{\times}} y) \mathbin{\widehat{+}} x))$

6. Algumas das fórmulas a seguir são válidas, outras não. Para cada fórmula, demonstre se ela é válida ou defina uma interpretação que a interprete como sendo falsa.

   (a) $p(x) \rightarrow (\forall x)p(x)$

   (b) $(\forall x)p(x) \rightarrow (\exists x)p(x)$

   (c) $(\exists x)(p(x) \rightarrow q(x)) \rightarrow ((\exists x)p(x) \rightarrow (\exists x)q(x))$

   (d) $(\forall x)(\exists y)p(x,y) \rightarrow (\exists y)p(y,y)$

   (e) $(\exists x)(\exists y)p(x,y) \rightarrow (\exists y)p(y,y)$

   (f) $(\exists x)(p(x) \rightarrow r(x)) \leftrightarrow ((\forall x)p(x) \rightarrow (\exists x)r(x))$

   (g) $(\forall x)(p(x) \lor r(x)) \rightarrow ((\forall x)p(x) \lor (\forall x)r(x))$

   (h) $((\forall x)p(x) \lor (\forall x)r(x)) \rightarrow (\forall x)(p(x) \lor r(x))$

   (i) $(\exists x)(p(x) \leftrightarrow r(x)) \leftrightarrow ((\exists x)p(x) \leftrightarrow (\exists x)r(x))$

   (j) $(\exists x)((p(x) \rightarrow p(a)) \land (p(x) \rightarrow p(b)))$

   (k) $(\exists x)(\forall y)((q(x,y) \land q(y,x)) \rightarrow (q(x,x) \leftrightarrow q(y,y)))$

(l) $(\forall x)(p(x) \wedge q(x)) \leftrightarrow (\forall x)(p(x) \rightarrow \neg q(x))$

(m) $(\forall x)(p(x,a) \rightarrow (\forall x)q(x,b)) \leftrightarrow ((\exists x)p(x,b) \rightarrow (\forall x)q(x,a))$

(n) $(\forall x)(p(x,a) \rightarrow (\forall x)q(x,b)) \leftrightarrow ((\exists x)p(x,a) \rightarrow (\forall x)q(x,b))$

(o) $(\forall x)(p(x) \rightarrow q(x)) \leftrightarrow ((\exists x)p(x) \rightarrow (\forall x)q(x))$

(p) $(\forall y)p(y) \rightarrow (\forall x)p(x)$

(q) $(\exists x)p(x) \rightarrow p(x)$

(r) $(\forall x)p(x) \rightarrow p(x)$

(s) $p(x) \rightarrow (\exists x)p(x)$

7. Considere a fórmula $E = (\forall x)(H \rightarrow G) \leftrightarrow (\exists x)(H \rightarrow G)$, onde H e G são fórmulas quaisquer. Responda se as questões a seguir são verdadeiras ou falsas, justificando suas respostas como se segue: Se a questão é verdadeira, então demonstre-a, caso contrário, dê um contraexemplo.

   (a) É possível definir duas fórmulas H e G, tais que E seja válida?

   (b) É possível definir duas fórmulas H e G, tais que E não seja válida?

8. Demonstre que:

   (a) $\forall\ d \in D,\ < x \leftarrow d > I[(\exists y)(\forall x)p(x,y)] = I[(\exists y)(\forall x)p(x,y)]$

   (b) $\forall\ d \in D,\ < x \leftarrow d > I[(\forall x)p(x,y)] = I[(\forall x)p(x,y)]$

   (c) $\forall\ d \in D,\ < x \leftarrow d > I[q(y)] = I[q(y)]$

9. Considere as fórmulas:

$$G = (\exists x)p(x),$$

$$H = q(x)$$

   Demonstre que os pares de fórmulas a seguir são equivalentes.

   (a) $(\forall x)G$ e G

   (b) $(\exists x)G$ e G

   (c) $(\forall x)(H \wedge G)$ e $((\forall x)H \wedge G)$

   (d) $(\exists x)(H \wedge G)$ e $((\exists x)H \wedge G)$

   (e) $(\forall x)(H \vee G)$ e $((\forall x)H \vee G)$

   (f) $(\exists x)(H \vee G)$ e $((\exists x)H \vee G)$

   (g) $(\forall x)(H \rightarrow G)$ e $((\exists x)H \rightarrow G)$

   (h) $(\forall x)(G \rightarrow H)$ e $(G \rightarrow (\forall x)H)$

   (i) $(\exists x)(H \rightarrow G)$ e $((\forall x)H \rightarrow G)$

   (j) $(\exists x)(G \rightarrow H)$ e $(G \rightarrow (\exists x)H)$

10. Demonstre que:
    (a) Se $E_1 = (\exists x)(p(x) \vee q(x))$ e $E_2 = (\exists x)p(x) \vee (\exists x)q(x)$, então E_1 equivale a E_2.
    (b) Se $E_1 = (\forall x)(p(x) \to q(x))$ e $E_2 = (\exists x)p(x) \to (\forall x)q(x)$, então E_2 implica E_1, mas E_1 não implica E_2.
11. Demonstre que as fórmulas a seguir não são válidas:
    (a) $(\forall x)(\neg(\forall y)q(x,y)) \to (\neg(\forall y)q(y,y))$.
    (b) $(\forall x)(q(x,y) \wedge q(x,z)) \leftrightarrow ((\forall x)q(x,y) \wedge (\forall x)q(x,z))$.
    (c) $(\exists x)(q(x,y) \to q(x,z)) \leftrightarrow (\exists x)(q(x,y) \to (\exists x)q(x,z)$.
12. (a) Considere a fórmula $H = p(x) \wedge \neg(\forall x)p(x)$. Demonstre que H é satisfatível e $(\forall x)H$ é contraditória.
    (b) Defina uma fórmula G não válida, mas tal que $(\exists *)G$ seja válida.
13. (a) Considere as fórmulas:
    $H = (\forall x)(\exists z)(\exists y)p(x,z,y)$ e
    $H_s = (\forall x)p(x, g(x), f(x))$,
    onde f e g são funções quaisquer, mas diferentes entre si. Demonstre que H é insatisfatível se, e somente se, H_s é insatisfatível.
    (b) Generalize esse resultado.
14. (a) Defina uma fórmula H, tal que H seja satisfatível e $(\exists *)H$ seja válida.
    (b) Defina uma fórmula G, tal que G seja satisfatível e $(\exists *)G$ não seja válida.
    (c) Responda, justificando sua resposta, se a afirmação a seguir é verdadeira ou não:
    Dada uma fórmula H, então H é satisfatível se, e somente se, $(\exists *)H$ é válida.
15. Sejam H e G duas fórmulas. Demonstre que:
    (a) $\neg(\forall *)H$ equivale a $(\exists *)\neg H$.
    (b) $\neg(\exists *)H$ equivale a $(\forall *)\neg H$.
    (c) $(\forall *)H$ é válida se, e somente se, H é válida.
    (d) $(\exists *)H$ é satisfatível se, e somente se, H é satisfatível.
    (e) H implica G se, e somente se, $(\forall *)(H \to G)$ é válida.
    (f) H equivale a G se, e somente se, $(\forall *)(H \leftrightarrow G)$ é válida.
16. Responda se as afirmações a seguir são verdadeiras ou falsas. Justifique suas respostas.
    (a) Se $(\exists *)H$ é válida, então H é válida.

(b) Se H é válida, então $(\exists *)H$ é válida.

(c) Se H é satisfatível, então $(\exists *)H$ é satisfatível.

(d) Se $(\forall *)H$ é satisfatível, então H é satisfatível.

17. (a) Dê exemplo de uma fórmula que contenha variável livre e seja válida.

(b) Dê exemplo de uma fórmula sem variáveis e símbolos de verdade e que seja válida.

(c) Existe fórmula que não é válida, mas cujo fecho universal seja válido?

(d) Existe fórmula que é válida, mas cujo fecho universal não seja válido?

18. (a) Determine uma fórmula H tal que as condições a seguir sejam satisfeitas:

i) $I[H] = T$ para toda interpretação I sobre U, onde $|U| = 2$.

ii) Existe interpretação J sobre U_1, onde $|U_1| = 3$ e $J[H] = F$.

(b) Determine uma fórmula H tal que as condições a seguir sejam satisfeitas:

i) $I[H] = T$ para toda interpretação I sobre U, onde $|U| = 2$ ou $|U| = 3$.

ii) Existe interpretação J sobre U_1, onde $|U_1| = 4$ e $J[H] = F$.

(c) Generalize os resultados dos itens a e b.

19. Determine se os conjuntos de fórmulas a seguir são satisfatíveis:

(a) $\{(\forall x)(\forall y)(p(x,y) \rightarrow \neg p(y,x)), (\forall x)(\forall y)(\forall z)((p(x,y) \wedge p(y,z)) \rightarrow p(x,z))\}$

(b) $\{(\exists x)(\forall y)p(x,y), (\forall x)(\exists y)p(x,y)\}$

(c) $\{(\forall x)(\forall y)(p(x,y) \rightarrow \neg p(x,y)), (\forall x)p(x,x),$
$(\forall x)(\forall y)(\forall z)((p(x,y) \wedge p(y,z)) \rightarrow p(x,z))\}$

(d) $\{(\forall x)(\forall y)(p(x,y) \rightarrow \neg p(y,x)), (\exists x)(\exists y)(p(x,y) \wedge \neg p(y,x))\}$

20. Determine se as asserções a seguir são válidas:

(a) Todo político é esperto. Nenhum cientista é esperto. Portanto, nenhum cientista é político.

(b) Todo homem é mortal. Sócrates é homem. Portanto, Sócrates é mortal.

(c) Todo político é esperto. Existe indivíduo esperto que é inteligente. Portanto, algum político é inteligente.

(d) Há político honesto. Há operários honestos. Portanto, há operários que são políticos.

(e) Se existe um barbeiro em Coromandel que não barbeia a quem barbeia a si próprio, então não existe ninguém para barbear o barbeiro.

(f) Todo aluno de Ciência da Computação é mais inteligente que algum aluno de Engenharia. Logo, não existe aluno de Engenharia que seja mais inteligente que todos os alunos de Ciência da Computação.

(g) Toda mulher bonita, inteligente e sensível é observada. Nenhuma filha de Sr. Arnaldo é observada. Mulher que não é observada não se casa, portanto, as filhas de Sr. Arnaldo não se casarão.

(h) Tudo que existe tem uma causa, logo é preciso existir uma causa primordial. Essa causa primordial é Deus.

(i) Existem mais pessoas no mundo do que fios de cabelos na cabeça de uma pessoa. Ninguém é careca. Portanto, pelo menos duas pessoas têm um mesmo número de fios de cabelos.

(j) Quem não se ama, não ama ninguém.

(k) Uma condição necessária e suficiente para que um indivíduo seja produtivo é que ele seja esforçado, trabalhe muito e tenha inspirações.

21. Considere as sentenças a seguir.

    $H_1 =$ Toda mulher dócil tem um amado.

    $H_2 =$ Se existe mulher dócil, toda mulher tem um amado.

    Demonstre se as afirmações a seguir são verdadeiras ou falsas.

    (a) H_1 implica H_2.

    (b) H_2 implica H_1.

22. Considere uma interpretação sobre o conjunto das pessoas tal que $I[p(x)] = T$ se, e somente se, x_I é estudante, $I[p_1(x)] = T$ se, e somente se, x_I é monitor, $I[q(x)] = T$ se, e somente se, x_I é artista, $I[r(x)] = T$ se, e somente se, x_I é inteligente, $I[r_1(x)] = T$ se, e somente se, x_I é comunicativo. Traduza o argumento a seguir para a lógica de predicados.

    Há monitor que é inteligente, mas não é comunicativo.
    Apenas estudantes inteligentes são monitores.
    Todo artista é comunicativo.
    Portanto, nem todo estudante inteligente é um artista.

23. Classifique os argumentos do Exercício 19 do Capítulo 7.

CAPÍTULO 9

MÉTODOS SEMÂNTICOS DE DEDUÇÃO NA LÓGICA DE PREDICADOS

9.1 Introdução

No Capítulo 8, apresentamos algumas propriedades semânticas de fórmulas da Lógica de Predicados. Na sequência, consideramos neste capítulo a análise de alguns métodos semânticos de dedução que, também, identificam propriedades semânticas. No presente contexto, consideramos fórmulas da Lógica de Predicados e, por isso, os métodos de dedução apresentados no Capítulo 4 nem sempre se aplicam adequadamente. Logo, é necessário modificar os métodos utilizados na Lógica Proposicional.

9.2 Método da tabela-verdade

Em geral, os iniciantes no estudo da Lógica imaginam que é possível resolver qualquer coisa, utilizando tabelas-verdade. E, nessa direção, há cursos de Lógica que ensinam somente tabelas-verdade. Esse é um engano básico. Considere, por exemplo, a fórmula G. $G = (\forall x)p(x) \rightarrow p(a)$. Como é demonstrado no Exemplo 8.7, sem o uso de tabela-verdade, é claro, essa fórmula é válida. Entretanto, imagine que se queira tentar a mesma demonstração, utilizando tabela-verdade. Nesse caso, o primeiro passo seria identificar as subfórmulas de G e escrevê-las na tabela-verdade, como indicado a seguir:

$(\forall x)p(x)$	$p(a)$	$(\forall x)p(x) \rightarrow p(a)$
?	?	?
?	?	?
?	?	?
?	?	?

Tabela 9.1: Tabela-verdade associada a G.

A questão óbvia é: como preencher a Tabela 9.1? Na coluna de $p(a)$, não é possível preenchê-la com símbolos T, ou F, pois, como sabemos,

$$I[p] = \ p_I : U \rightarrow \{T, F\}.$$

Isto é, $I[p]$ é uma função e, nesse sentido, $I[p(a)]$ é um elemento do domínio U e não um símbolo do tipo T, ou F. Pior ainda é o caso de $(\forall x)p(x)$. Isso, porque para identificar se tal subfórmula é verdadeira, ou falsa, devemos analisar a aplicação de p em todos os elementos do domínio U. E, como esse domínio pode ser infinito, nem sempre essa tarefa é simples. Conclusão: nem sempre é possível usar tabelas-verdade no contexto da Lógica de Predicados. Por isso, devemos considerar outros métodos.

9.3 Método da negação, ou redução ao absurdo

Como observamos no Capítulo 4, o método da negação, ou redução ao absurdo, é um método geral de demonstração. Isso, porque seus princípios podem ser utilizados em diferentes tipos de demonstração, como aquelas por refutação. Entretanto, no contexto da Lógica de Predicados ele é utilizado de forma diferente daquela considerada no Capítulo 4, isso porque, pelas mesmas razões que, em geral, não utilizamos tabelas-verdade na Lógica de Predicados, não é possível distribuir os valores de verdade T e F ao longo de uma fórmula, como fazemos na Lógica Proposicional. O exemplo a seguir utiliza o método da negação na Lógica de Predicados.

Exemplo 9.1 (equivalência) Considere as fórmulas $H_1 = \neg(\exists x)p(x) \vee (\forall x)r(x)$ e $H_2 = (\forall x)(p(x) \rightarrow r(x))$. Demonstramos, utilizando o método da negação, que H_1 implica H_2. Suponha, por absurdo, que H_1 não implica H_2. Então, existe uma interpretação I, tal que $I[H_1] = T$ e $I[H_2] = F$. Porém, temos que

$I[H_1] = T \;\Leftrightarrow\; I[\neg(\exists x)p(x) \vee (\forall x)r(x)] = T,$

$$
\begin{aligned}
&\Leftrightarrow\ I[\neg(\exists x)p(x)] = T, \ \text{ ou } \ I[(\forall x)r(x)] = T,\\
&\Leftrightarrow\ I[(\exists x)p(x)] = F, \ \text{ ou } \ I[(\forall x)r(x)] = T,\\
&\Leftrightarrow\ \forall\ d \in U,\ < x \leftarrow d > I[p(x)] = F \ \text{ ou}\\
&\quad\ \ \forall\ c \in U,\ < x \leftarrow c > I[r(x)] = T,\\
&\Leftrightarrow\ \forall\ d \in U,\ p_I(d) = F \ \text{ ou } \ \forall\ c \in U,\ r_I(c) = T.
\end{aligned}
$$

Por outro lado:

$$
\begin{aligned}
I[H_2] = F \ &\Leftrightarrow\ I[(\forall x)(p(x) \rightarrow r(x))] = F,\\
&\Leftrightarrow\ \exists\ d \in U,\ < x \leftarrow d > I[p(x) \rightarrow r(x)] = F,\\
&\Leftrightarrow\ \exists\ d \in U,\ < x \leftarrow d > I[p(x)] = T \ \text{ e } \ < x \leftarrow d > I[r(x)] = F,\\
&\Leftrightarrow\ \forall\ d \in U,\ p_I(d) = T \ \text{ e } \ r_I(d)] = F.
\end{aligned}
$$

Preste atenção nas últimas afirmações dos desenvolvimentos anteriores:
"$\forall\ d \in U,\ p_I(d) = F$ ou $\forall\ c \in U,\ r_I(c) = T$" e
"$\forall\ d \in U,\ p_I(d) = T$ e $r_I(d)] = F$".

Essas afirmações são contraditórias, ou seja, é um absurdo tê-las como verdadeiras ao mesmo tempo. Logo, não existe interpretação I, tal que $I[H_1] = T$ e $I[H_2] = F$. Portanto, H_1 implica H_2. ■

Nota. No Capítulo 8 obtemos nas demonstrações, em inúmeros exemplos, uma afirmação final contraditória, ou um absurdo. E, então, concluímos o oposto da afirmação inicial. O Exemplo 8.7 é um caso típico. Iniciamos a demonstração, supondo $I[G] = F$. E, ao final, concluímos uma afirmação que é um absurdo. Então, concluímos que $I[G] = T$. Observe que esse é o legítimo raciocínio da redução ao absurdo. Portanto, muito mais que você imagina, já estamos utilizando o método da negação, ou redução ao absurdo, há muito tempo. Só que de uma forma diferente daquela que usamos no Capítulo 4.

9.4 Método dos *tableaux* semânticos

No Capítulo 4, analisamos os *tableaux* semânticos na Lógica Proposicional e, neste capítulo, consideramos sua extensão para a Lógica de Predicados. Como na Lógica Proposicional, um *tableau* semântico na Lógica de Predicados é uma sequência de fórmulas, que se apresenta sob a forma de uma árvore. Seus elementos básicos são:

Definição 9.1 (elementos básicos do método dos *tableaux* semânticos) .
Os elementos básicos do método dos tableaux semânticos na Lógica de Predicados são:

- *o alfabeto da Lógica de Predicados, Definição 6.1;*
- *o conjunto das fórmulas da Lógica de Predicados;*
- *um conjunto de regras de dedução.*

O *tableau* semântico na Lógica de Predicados utiliza a linguagem da Lógica de Predicados, sendo uma extensão do *tableau* semântico da Lógica Proposicional. Nesse sentido, as regras do *tableau* semântico da Lógica de Predicados contêm as regras do *tableau* semântico da Lógica Proposicional. Adicionamos a estas, mais duas regras, definidas a seguir:

Definição 9.2 (regras de inferência do método dos *tableaux* semânticos) . *Sejam A e B duas fórmulas da Lógica de Predicados. As regras de inferência do tableau semântico na Lógica de Predicados são as regras $R_1, \ldots, R_9$, conforme a Definição 4.2, mais as regras $R_{10}, \ldots, R_{13}$, assim definidas:*

$$R_{10} = \frac{\neg(\forall x)A}{(\exists x)\neg A} \qquad R_{11} = \frac{\neg(\exists x)A}{(\forall x)\neg A}$$

$$R_{12} = \frac{(\exists x)A}{A(t)} \quad \textit{onde } t \textit{ é novo} \qquad R_{13} = \frac{(\forall x)A}{A(t)} \quad \textit{onde } t \textit{ é qualquer.}$$

9.4.1 Os significados das regras dos *tableaux* semânticos

Devemos entender o que cada regra diz, do ponto de vista semântico. Esse é o primeiro passo para o entendimento do método.

O significado das regras R_{10} e R_{11}. As regras R_{10} e R_{11} trocam as posições da negação $\neg$ e dos quantificadores. Na regra R_{10}, tendo que $\neg(\forall x)A$ é deduzido $(\exists x)\neg A$. Neste caso, o quantificador universal é transformado em um quantificador existencial. Analogamente, em R_{11}, tendo que $\neg(\exists x)A$ é deduzido $(\forall x)\neg A$. Neste caso, o quantificador existencial é transformado em um quantificador universal. A regra R_{10} diz que podemos deduzir $((\exists x)\neg A)$ a partir de $(\neg(\forall x)A)$. Do ponto de vista semântico, isso está correto, pois sabemos que $(\neg(\forall x)A)$ equivale a $((\exists x)\neg A)$. Por isso, se $(\neg(\forall x)A)$ é verdadeira, então $((\exists x)\neg A)$ é verdadeira. A regra R_{11} diz que podemos deduzir $((\exists x)\neg A)$ a partir de $(\neg(\forall x)A)$. Com já sabemos que $(\neg(\forall x)A)$ equivale a $((\exists x)\neg A)$, então, por isso, se $(\neg(\exists x)A)$ é verdadeira, então $((\forall x)\neg A)$ é verdadeira. Mas, qual é o objetivo dessas regras? Nas duas regras, os resultados têm os quantificadores no início das fórmulas. Isso é importante no método, pois as regras R_{12} e R_{13} são aplicadas apenas em fórmulas com quantificadores em seu início. Portanto, em geral, antes de aplicar as regras R_{12} e R_{13} é necessário aplicar R_{12}, ou R_{13}.

O significado da regra R_{12}. Na regra R_{12}, tendo que $(\exists x)A$ é deduzido $A(t)$, onde t é um termo novo, que ainda não apareceu na prova. Observe que estamos utilizando a notação $A(t)$, que indica que o termo t ocorre zero, uma, ou mais vezes na fórmula A. A regra R_{12} diz que podemos deduzir $A(t)$, para algum t, a partir de $((\exists x)A)$. Do ponto de vista semântico, isso está correto, pois sabemos que $((\exists x)A)$ implica $A(t)$, para algum t. Por isso, se $((\exists x)A)$ é verdadeira, então $A(t)$ é verdadeira para algum t. Veja um exemplo:

Exemplo 9.2 (implicação) Considere a fórmula $(\exists x)p(x)$. Demonstramos, mais ou menos, a seguir, que $(\exists x)p(x)$ implica $p(t)$ para algum termo t. Seja I uma interpretação qualquer. Temos:

$$\begin{aligned} I[(\exists x)p(x)] = T &\Leftrightarrow \exists\ d \in U;\ < x \leftarrow d > I[p(x)] = T, \\ &\Leftrightarrow \exists\ d \in U;\ p_I(d) = T. \\ &\Rightarrow_1 \text{ existe algum termo } t;\ p_I(t_I) = T, \\ &\Leftrightarrow I[p(t)] = T \text{ para algum termo } t. \end{aligned}$$

Portanto, $(\exists x)p(x)$ implica $p(t)$, para algum t. Na demonstração acima, a implicação $\Rightarrow_1$ pode ser problemática, pois estamos considerando uma interpretação I, qualquer. Isto é, estamos concluindo, para uma interpretação qualquer, que:

se existe $d \in U$; $p_I(d) = T$, então $I[p(t)] = T$ para algum t.

Esse é um grande salto. E, por isso, essa demonstração não é rigorosa. Ela é apenas uma ideia e não vamos considerar os detalhes técnicos. Além disso, observe a semelhança desse argumento com o apresentado na Proposição 8.4. ■

O termo t deve ser novo. Por que na regra R_{12} o termo em $A(t)$ deve ser um termo novo, que ainda não apareceu na prova? É claro que não estamos em posição para demonstrar, de forma rigorosa, esse fato. E esse tema, na verdade, não está no escopo deste livro. Entretanto, veja uma justificativa informal. Considere a fórmula $H_1 = (\exists x)(\exists y)p(x, y)$ e uma interpretação sobre o conjunto das pessoas, tal que:

$I[p(x, y)] = T$ se, e somente se, x_I é o marido de y_I.

Suponha, então, a aplicação da regra R_{12} em H_1. Nesse caso, a partir de $(\exists x)(\exists y)p(x, y)$, deduzimos $(\exists y)p(t_1, y)$, onde t_1 é um termo novo. Suponha que $I[t_1] =$ Zé. Então, $(\exists y)p(t_1, y)$ significa que Zé é o marido de alguém. Aplicando a regra R_{12} novamente, deduzimos $p(t_1, u_1)$, onde u_1 é um termo novo e, portanto, diferente de t_1. Nesse caso, devemos ter $I[u_1] =$ Maria, pois Maria é a esposa de Zé. O método dos *tableaux* semânticos presta atenção nesse tipo de coisa. Na sequência do *tableau*, suponha que apareça de novo a fórmula H_1 e que R_{12} seja aplicada. Deduzimos, então, $(\exists y)p(t_2, y)$, onde t_2 deve ser diferente de t_1 e u_1. Suponha, então, que $I[t_1] =$ Chico. Aplicando a regra R_{12}, novamente, deduzimos $p(t_2, u_2)$, onde u_2 é um termo novo e, portanto, diferente de t_1, t_2 e u_1. Nesse caso, u_2 deve ser diferente e não queremos que $I[u_2] =$ Maria, pois Maria é a esposa de Zé. E o método dos *tableaux* semânticos é um sistema monogâmico. Ele é conservador, do tipo um para um.

O significado da regra R_{13}. Na regra R_{13}, tendo $(\forall x)A$ é deduzido $A(t)$, para qualquer t. Do ponto de vista semântico, R_{13} diz que podemos deduzir $A(t)$, para qualquer t, a partir de $((\forall x)A)$. Isto é, seguimos a implicação: $((\forall x)A)$ implica $A(t)$, para qualquer t. Ou seja, se $((\forall x)A)$ é verdadeira, então $A(t)$ é verdadeira para qualquer t. O exemplo a seguir segue o raciocínio do Exemplo 9.2.

Exemplo 9.3 (implicação) Considere a fórmula $(\forall x)p(x)$. Demonstramos, também aproximadamente, que $(\forall x)p(x)$ implica $p(t)$, para qualquer termo t. Seja I uma interpretação qualquer. Temos:

$$
\begin{aligned}
I[(\forall x)p(x)] = T \; & \Leftrightarrow \; \forall\, d \in U, \; < x \leftarrow d > I[p(x)] = T, \\
& \Leftrightarrow \; \forall\, d \in U, \; p_I(d) = T, \\
& \Rightarrow_1 \; \text{para qualquer termo } \; t, \; p_I(t_I) = T, \\
& \Leftrightarrow \; I[p(t)] = T, \; \text{ para qualquer } t.
\end{aligned}
$$

Portanto, $(\forall x)p(x)$ implica $p(t)$, para qualquer t. Como no Exemplo 9.2, na demonstração acima, a implicação $\Rightarrow_1$ também pode ser problemática, pois estamos considerando uma interpretação I, qualquer. Isto é, estamos concluindo, para uma interpretação qualquer, que se para qualquer $d \in U$; $p_I(d) = T$, então $I[p(t)] = T$ para qualquer t. De novo, esse é o grande salto, o que faz da demonstração apenas uma ideia não rigorosa. ■

O termo t pode ser qualquer. Por que na regra R_{13} o termo em $A(t)$ pode ser um termo qualquer? Veja uma justificativa informal. Considere a fórmula $H_2 = (\forall x)(\forall y)p(x,y)$ e uma interpretação sobre o conjunto das pessoas tal que $I[p(x,y)] = T$ se, e somente se, x_I é amigo de y_I. Suponha, então, a aplicação da regra R_{13} em H_2. Nesse caso, a partir de $(\forall x)(\forall y)p(x,y)$, deduzimos $(\forall y)p(t_1,y)$, onde t_1 é um termo qualquer. Suponha que $I[t_1] =$ Zé. Então, $(\forall y)p(t_1,y)$ significa que Zé é amigo de todo mundo. Aplicando a regra R_{13}, deduzimos novamente $p(t_1,u_1)$, onde u_1 é um termo qualquer, que pode até ser igual a t_1. Pois, todos sabemos que Zé é amigo dele próprio.

Nota. A aplicação das regras do *tableau*, como também suas propriedades fundamentais seguem, de forma análoga, a análise apresentada no Capítulo 4. Por exemplo, a construção de um *tableau* semântico, o significado de *tableaux* fechados, abertos etc. são os mesmos no contexto da Lógica de Predicados.

Agora, vamos esquentar a máquina, observando alguns exemplos de aplicação do método dos *tableaux* semânticos na Lógica de Predicados.

Exemplo 9.4 (*tableau* semântico) Considere a fórmula:
$H = (\forall x)(\forall y)p(x,y) \rightarrow p(a,a)$. O *tableau* semântico associado a $\neg H$, indicado na Figura 9.1, é uma prova de H. A construção de um *tableau* semântico na Lógica de Predicados é análoga à construção na Lógica Proposicional. No *tableau* acima, R_{13} é aplicada duas vezes substituindo as variáveis pelo termo "a". Observe que este termo é escolhido livremente, mas com o objetivo de fechar o *tableau*. ■

Exemplo 9.5 (*tableau* semântico) Considere a fórmula:
$H = (\forall x)p(x) \rightarrow (\exists y)p(y)$. O *tableau* semântico associado a $\neg H$, indicado na Figura 9.2, é uma prova de H.
■

9.4.2 Os teoremas da correção e da completude

O método dos *tableaux* semânticos na Lógica de Predicados é uma extensão do mesmo método na Lógica Proposicional. Esses métodos definem uma estrutura para

1.	$\neg((\forall x)(\forall y)p(x,y) \to p(a,a))$	$\neg H$
2.	$(\forall x)(\forall y)p(x,y)$	$R_8, 1.$
3.	$\neg p(a,a)$	$R_8, 1.$
4.	$(\forall y)p(a,y)$	$R_{13}, 2.,$ t é qualquer, faça $t = a$.
5.	$p(a,a)$	$R_{13}, 4.,$ t é qualquer, faça $t = a$.
	ramo fechado	

Figura 9.1: *Tableau* semântico associado a $\neg H$.

1.	$\neg((\forall x)p(x) \to (\exists y)p(y))$	$\neg H$
2.	$(\forall x)p(x)$	$R_8, 1.$
3.	$\neg(\exists y)p(y)$	$R_8, 1.$
4.	$(\forall y)\neg p(y)$	$R_{11}, 3.$
5.	$\neg p(a)$	$R_{13}, 4.,$ t é qualquer, faça $t = a$.
6.	$p(a)$	$R_{13}, 2.,$ t é qualquer, faça $t = a$.
	ramo fechado	

Figura 9.2: *Tableau* semântico associado a $\neg H$.

1.	$\neg((\exists x)(\exists y)p(x,y) \rightarrow p(a,a))$	$\neg H$
2.	$(\exists x)(\exists y)p(x,y)$	$R_8, 1.$
3.	$\neg p(a,a)$	$R_8, 1.$
4.	$(\exists y)p(t_1,y)$	$R_{12}, 2.$, t_1 é novo.
5.	$p(t_1,t_2)$	$R_{12}, 4.$, t_2 é novo.
	ramo aberto	

Figura 9.3: *Tableau* semântico associado a $\neg H$.

dedução semântica e apesar de serem similares, a uma primeira vista, eles possuem grandes diferenças. Entretanto, os conceitos básicos continuam os mesmos como, por exemplo, prova e teorema. Nesse sentido, os *tableaux* semânticos apresentados nos Exemplos 9.4 e 9.5 são provas de H. Analogamente, os teoremas da correção e da completude também são válidos no contexto do método dos *tableaux* semânticos na Lógica de Predicados.

Teorema 9.1 (correção dos *tableaux* semânticos) *Dada uma fórmula H, da Lógica de Predicados:*

Se existe um tableau semântico fechado associado a $\neg H$, então H é válida.

Teorema 9.2 (completude dos *tableaux* semânticos) *Dada uma fórmula H, da Lógica de Predicados:*

Se não existe um tableau semântico fechado associado a $\neg H$,
então H não é válida.

ou, equivalentemente:

Se H é válida, então existe um tableau semântico fechado associado a $\neg H$.

Nota. As demonstrações desses teoremas não são consideradas neste livro. As demonstrações podem ser encontradas em [Fitting].

Exemplo 9.6 (*tableau* semântico) Considere a fórmula:
$H = (\exists x)(\exists y)p(x,y) \rightarrow p(a,a)$. O *tableau* semântico associado a $\neg H$ é indicado na Figura 9.3, não é uma prova de H. Isso, porque o *tableau* não é fechado. No *tableau* da Figura 9.3, na linha 3 temos o literal $\neg p(a,a)$. Assim, o objetivo do desenvolvimento desse *tableau* é a obtenção do átomo $p(a,a)$, o que fecha o ramo. Nesse sentido, a regra R_{12} é aplicada duas vezes. Na primeira vez, na linha 4, obtemos

1.	$\neg((\forall x)(p(x) \wedge q(x)) \rightarrow (\forall x)p(x))$	$\neg H$
2.	$(\forall x)(p(x) \wedge q(x))$	$R_8, 1.$
3.	$\neg(\forall x)p(x)$	$R_8, 1.$
4.	$(\exists x)\neg p(x)$	$R_{10}, 3.$
5.	$\neg p(a)$	$R_{12}, 4.$, t é novo, faça $t = a$.
6.	$p(a) \wedge q(a)$	$R_{13}, 2.$, t é qualquer, faça $t = a$.
7.	$p(a)$	$R_1, 6.$
8.	$q(a)$	$R_1, 6.$
	ramo fechado	

Figura 9.4: *Tableau* semântico associado a $\neg H$.

$(\exists y)p(t_1, y)$. Neste caso, x é substituído por t_1, que deve ser um termo novo. Logo, $t_1 \neq a$. Na segunda aplicação de R_{12} temos algo similar. Devemos ter $t_2 \neq a$ e $t_2 \neq t_1$. Portanto, o *tableau* não se fecha, pois não se tem fórmulas complementares em um mesmo ramo da árvore. Caso a regra R_{12} seja aplicada, incorretamente, fazendo $t_1 = a$ e $t_2 = a$, o *tableau* se torna fechado. Mas, nesse caso, temos uma prova incorreta de H. Finalmente, observe que H não é válida. Logo, não é possível encontrar uma prova de H, utilizando *tableaux* semânticos na Lógica de Predicados. Esta conclusão utiliza o teorema da correção, Teorema 9.1. ■

Exemplo 9.7 (*tableau* semântico) Considere a fórmula:
$H = (\forall x)(p(x) \wedge q(x)) \rightarrow (\forall x)p(x)$.
O *tableau* semântico associado a $\neg H$ é indicado na Figura 9.4, é uma prova de H. Isso ocorre porque o *tableau* é fechado.

No *tableau* da Figura 9.4, a regra R_{12} é utilizada antes da regra R_{13}. Além disso, na aplicação de R_{13} fazemos $t = a$. Desta forma, é obtido um *tableau* fechado. Portanto, H é válida. Entretanto, considere o *tableau* da Figura 9.5, onde a ordem de aplicação das regras é invertida. Nesse caso, na aplicação de R_{13}, o termo t_1 é qualquer e, nesse caso, consideramos $t_1 = a$. Em seguida, na aplicação de R_{12}, o termo t_2 deve ser um termo novo, que não pertence ao *tableau*. Logo, devemos ter $t_1 \neq a$. Portanto, nesse caso, o *tableau* obtido não é fechado. Conclui-se que considerando os dois *tableaux* anteriores, dada uma fórmula válida H, nem todo *tableau* associado a $\neg H$ é fechado. Mas, lembre-se, se H é válida, então, pelo teorema da completude, necessariamente, existe um *tableau* fechado associado a $\neg H$. ■

A ordem de aplicação das regras. No método dos *tableaux* semânticos na Lógica Proposicional, a ordem de aplicação das regras não influi no resultado do

1.	$\neg((\forall x)(p(x) \wedge q(x)) \rightarrow (\forall x)p(x))$	$\neg H$
2.	$(\forall x)(p(x) \wedge q(x))$	$R_8, 1.$
3.	$\neg(\forall x)p(x)$	$R_8, 1.$
4.	$(\exists x)\neg p(x)$	$R_{10}, 3.$
5.	$p(a) \wedge q(a)$	$R_{13}, 2.$, t_1 é qualquer, faça $t_1 = a$.
6.	$p(a)$	$R_1, 5.$
7.	$q(a)$	$R_1, 5.$
8.	$\neg p(t_2)$	$R_{12}, 4.$, t_2 é novo, faça $t \neq a$.
	ramo aberto	

Figura 9.5: *Tableau* semântico associado a $\neg H$.

tableau. Ou seja, independentemente da ordem de aplicação das regras, se H é uma tautologia, então, no final, sempre obtemos um *tableau* fechado associado a $\neg H$. Por outro lado, como é visto no Exemplo 9.7, na Lógica de Predicados, essa ordem é importante e pode influir no resultado do *tableau*. Na Lógica de Predicados, se H é válida, pode existir *tableau* associado a $\neg H$ que não é fechado. Isto é, nem todos os *tableaux* associados a $\neg H$ são, necessariamente, fechados.

Exemplo 9.8 (*tableau* semântico)) Considere a fórmula $H = (\exists x)\neg p(x)$. O *tableau* semântico associado a $\neg H$ é indicado na Figura 9.6.

■

Ramo infinito. Algo novo no *tableau* da Figura 9.6. No desenvolvimento de um *tableaux* semântico, na Lógica de Predicados, podemos obter um ramo infinito. Observe que tal fato não ocorre na Lógica Proposicional, na qual os *tableaux* obtidos nunca possuem ramos infinitos.

Exemplo 9.9 (*tableau* semântico) Considere novamente as fórmulas H_1 e H_2 do Exemplo 8.16. $H_1 = (\forall x)(p(x) \vee q(x))$ e $H_2 = (\forall x)p(x) \vee (\forall x)q(x)$.
Neste exemplo, demonstramos, utilizando *tableaux* semânticos, o mesmo resultado demonstrado no Exemplo 8.16, isto é, que H_2 implica H_1. Para demonstrar esse resultado, utilizamos outro resultado, dado por:
H_2 implica H_1 se, e somente se, $H_2 \rightarrow H_1$ é válida.
Portanto, utilizando *tableaux* semânticos, provamos a seguir que $H_2 \rightarrow H_1$ é válida. O *tableau* da Figura 9.7 é a prova. Este *tableau* é fechado, sebdi uma prova de que

1.	$\neg(\exists x)p(x)$	$\neg H$
2.	$(\forall x)\neg p(x)$	$R_{11}, 1.$
3.	$\neg(\exists x)p(x)$	$R_{10}, 2.$
4.	$(\forall x)\neg p(x)$	$R_{11}, 3.$
5.	$\neg(\exists x)p(x)$	$R_{10}, 4.$
6.	$(\forall x)\neg p(x)$	$R_{11}, 5.$
7.	$\neg(\exists x)p(x)$	$R_{10}, 6.$
	......	
	......	
	ramo infinito	

Figura 9.6: *Tableau* semântico associado a $\neg H$.

$H_2 \rightarrow H_1$ é válida. Logo, H_2 implica H_1. No *tableau* da Figura 9.7 tudo ocorre muito bem, pois o resultado é um *tableau* fechado. Entretanto, se a ordem de aplicação das regras R_{12} e R_{13} for invertida, não é possível fechar o *tableau*. Veja o *tableau* a seguir, Figura 9.8.

O método dos *tableaux* semânticos na Lógica de Predicados é diferente do método dos *tableaux* semânticos na Lógica Proposicional. As Figuras 9.7 e 9.8 mostram *tableaux* associados à mesma fórmula $\neg(H_2 \rightarrow H_1)$. Um deles é fechado e o outro não. Surge, então, uma questão: quando encontramos um *tableau* aberto, associado a uma fórmula H, será que existe algum outro *tableau* associado a H que é fechado? A princípio, nada podemos concluir. Isto é, dado um *tableau* aberto, associado a H, pode, ou não, existir outro *tableau* fechado associado a H. Da mesma forma, dado um *tableau* fechado, associado a H, pode, ou não, existir outro *tableau* fechado associado a H. Observe que isso é diferente do que ocorre na Lógica Proposicional, na qual, se encontramos um *tableau* aberto, associado a uma fórmula H, então todos os outros também são abertos. Analogamente, na Lógica Proposicional, se encontramos um *tableau* fechado, associado a H, então todos os outros também são fechados.

■

Exemplo 9.10 (*tableau* semântico) Considere, novamente, as fórmulas H_1 e H_2 do Exemplo 8.15. $H_1 = (\forall x)(p(x) \vee q(x))$ e $H_2 = (\forall x)p(x) \vee (\forall x)q(x)$. Neste exemplo, demonstramos, utilizando *tableaux* semânticos, o mesmo resultado demonstrado no Exemplo 8.15, isto é, que H_1 não implica H_2. Suponha, por absurdo, que H_1 implica H_2. Logo, $H_1 \rightarrow H_2$ é válida. Mas, se $H_1 \rightarrow H_2$ é válida, então, pelo teorema da completude, existe um *tableau* fechado associado a $\neg(H_1 \rightarrow H_2)$. Vejamos se é possível construir um *tableau* fechado associado a $\neg(H_1 \rightarrow H_2)$.

O *tableau* da Figura 9.9 não é fechado, pois seus ramos são abertos. Além disso,

1.	$\neg(((\forall x)p(x) \lor (\forall x)q(x)) \to (\forall x)(p(x) \lor q(x)))$		$\neg(H_2 \to H_1)$
2.	$(\forall x)p(x) \lor (\forall x)q(x)$		$R_8, 1.$
3.	$\neg(\forall x)(p(x) \lor q(x))$		$R_8, 1.$
4.	$(\exists x)\neg(p(x) \lor q(x))$		$R_{10}, 3.$
5.	$\neg(p(a) \lor q(a))$		$R_{12}, 4.$
			t é novo,
			faça $t = a$.
6.	$\neg p(a)$		$R_7, 5.$
7.	$\neg q(a)$		$R_7, 5.$
	$\swarrow$	$\searrow$	
8.	$(\forall x)p(x)$	$(\forall x)q(x)$	R_2, 2.
9.	$p(a)$	$q(a)$	R_{13}, 8.
			t é qualquer,
			faça $t = a$.
	fechado	fechado	

Figura 9.7: *Tableau* semântico associado a $\neg(H_2 \to H_1)$.

1.	$\neg(((\forall x)p(x) \lor (\forall x)q(x)) \to (\forall x)(p(x) \lor q(x)))$		$\neg(H_2 \to H_1)$
2.	$(\forall x)p(x) \lor (\forall x)q(x)$		$R_8, 1.$
3.	$\neg(\forall x)(p(x) \lor q(x))$		$R_8, 1.$
4.	$(\exists x)\neg(p(x) \lor q(x))$		$R_{10}, 3.$
	$\swarrow$	$\searrow$	
8.	$(\forall x)p(x)$	$(\forall x)q(x)$	R_2, 2.
9.	$p(a)$	$q(a)$	R_{13}, 8.
			t é qualquer,
			faça $t = a$.
10.	$\neg(p(t) \lor q(t))$	$\neg(p(t) \lor q(t))$	$R_{12}, 4.$
			t é novo,
			faça $t \neq a$.
11.	$\neg p(t)$	$\neg p(t)$	$R_7, 10.$
12.	$\neg q(t)$	$\neg q(t)$	$R_7, 10.$
	aberto	aberto	

Figura 9.8: *Tableau* semântico associado a $\neg(H_2 \to H_1)$.

1.	$\neg((\forall x)(p(x) \lor q(x)) \rightarrow ((\forall x)p(x) \lor (\forall x)q(x)))$	$\neg(H_1 \rightarrow H_2)$
2.	$(\forall x)(p(x) \lor q(x))$	$R_8, 1.$
3.	$\neg((\forall x)p(x) \lor (\forall x)q(x))$	$R_8, 1.$
4.	$\neg(\forall x)p(x)$	$R_7, 3.$
5.	$\neg(\forall x)q(x)$	$R_7, 3.$
6.	$(\exists x)\neg p(x)$	$R_{10}, 4.$
7.	$(\exists x)\neg q(x)$	$R_{10}, 5.$
8.	$\neg p(a)$	$R_{12}, 6.$ t é novo, faça $t = a$.
9.	$\neg q(b)$	$R_{12}, 7.$ t é novo, faça $t = b$.
10.	$p(t) \lor q(t)$	R_{13}, 2. t é qualquer.
	$\swarrow \quad \searrow$	
11.	$p(t) \qquad q(t)$ ramo 1 $\quad$ ramo 2	R_2, 10.

Figura 9.9: *Tableau* semântico associado a $\neg(H_1 \rightarrow H_2)$.

não é possível fechar esse *tableau*? Na linha 8, aplicamos, pela primeira vez, a regra R_{12}, substituindo a variável x pela constante "a", obtendo $p(a)$. Neste ponto do tableau, "a" é um termo novo, que não aparece no *tableau*, nas linhas 1 até 7. Na linha 8, a regra R_{12} é aplicada novamente. Na nova aplicação de R_{12}, a variável x não pode mais ser substituída por "a", pois o termo a ser substituído deve ser novo. É feita, então, sua substituição pela constante "b", obtendo $q(b)$. Em seguida, quando a regra R_{13} é aplicada na linha 2, o termo x pode ser substituído por qualquer outro. Isto é, podemos substituir x por "a" ou por "b". No *tableau* da Figura 9.9, qualquer que seja a substituição escolhida, o ramo do *tableau* não fecha. Portanto, nesse caso, não é possível escolher uma substituição conveniente para fechar o *tableau*. Observe que mesmo modificando a ordem de aplicação das regras, não é possível fechar o *tableau*. Logo, não existe *tableau* fechado associado $\neg(H_1 \rightarrow H_2)$. Isto é H_1 não implica H_2. ■

Cuidado com generalizações apressadas. O *tableau* da Figura 9.9 não é fechado. No caso desse *tableau* isso é verificado, considerando todas as suas possibilidades de desenvolvimento. Em geral, a partir de um *tableau*, fixo, pode ser possível saber se dá para fechá-lo, ou não. Isso ocorre quando é possível considerar todas as possibilidades de aplicações das regras, mesmo considerando fórmulas com comprimento muito grande. Entretanto, no caso geral, não é possível construir um algoritmo, ou definir um método, que para qualquer fórmula determine se o *tableau* associado à fórmula pode, ou não, ser fechado. Observe o salto. Para uma fórmula fixa, pode até ser possível determinar que não existe um *tableau* associado à fórmula que é fechado. Porém, para fórmulas quaisquer não é possível executar tal tarefa. Ou seja, determinar a não existência de tal *tableau* fechado. E no caso da fórmula do Exemplo 9.10? Será que é possível fechar o *tableau*? Sabemos que no caso da fórmula $\neg(H_1 \rightarrow H_2)$ isso não é possível, pois conforme Exemplo 8.15, já sabemos que H_1 não implica H_2. Logo, $(H_1 \rightarrow H_2)$ não é válida. Então, pelo teorema da correção, não existe prova de $(H_1 \rightarrow H_2)$, utilizando *tableaux* semânticos. Isto é, não existe *tableau* semântico fechado associado a $\neg(H_1 \rightarrow H_2)$. Além disso, como a fórmula $\neg(H_1 \rightarrow H_2)$ tem um comprimento reduzido, uma análise das possibilidades de desenvolvimento alternativo do *tableau* da Figura 9.9 nos mostra que não é possível, nesse caso particular, obter um *tableau* fechado associado a $\neg(H_1 \rightarrow H_2)$. Entretanto, devemos ter cuidado com esse tipo de análise, na qual devemos levar em consideração todas as possibilidade de desenvolvimento de um *tableau* para qualquer fórmula. Isso pode ser bem complexo. Imagine uma fórmula, cujo comprimento é muito grande. A nossa tarefa, nesse caso, certamente, pode ser muito maior. Finalmente, observe que sabemos que não é possível definir um algoritmo que decida sobre tal questão. Isto é, que decida quais fórmulas H possuem algum *tableau* semântico fechado associado a $\neg H$.

9.4.3 Algumas observações sobre o método dos *tableaux* semânticos

Se temos como premissas os teoremas da completude e da correção para os *tableaux* semânticos na Lógica de Predicados, Teoremas 9.1 e 9.2, seguem algumas conclusões:

1. Se H é válida, então existe *tableau* fechado associado a H;
2. Se H é válida, então pode existir *tableau* aberto associado a H;
3. Se H não é válida, então não existe *tableau* fechado associado a H;
4. Se H não é válida, então todo *tableau* associado a H é aberto;
5. Se um *tableau* associado a H é fechado, então H é válida;
6. Se um *tableau* associado a H é aberto, então não necessariamente H não é válida;
7. Se todo *tableau* associado a H é aberto, então H não é válida.

Observe que na Lógica Proposicional tais relações são mais simples, pois naquele contexto temos: H é tautologia se, e somente se, existe *tableau* fechado associado a H. Isso significa que na Lógica Proposicional, se existe um *tableau* fechado associado a H, então todos os outros também são fechados. Além disso, na Lógica Proposicional, H não é tautologia se, e somente se, existe *tableau* aberto associado a H. Logo, na Lógica Proposicional, se existe um *tableau* aberto associado a H, então todos os outros também são abertos.

9.4.4 Indecidibilidade

Os métodos de dedução semântica da Lógica Proposicional, como analisados no Capítulo 4, são mecanismos de decisão. Isto é, dada uma fórmula H, utilizando, por exemplo, o *tableau* semântico da Lógica Proposicional, é possível decidir se H é, ou não satisfatível. Lembre-se: dizer que um método decide significa dizer que ele responde a questão sobre a satisfatibilidade de H, sem entrar em loop, ou entrar por um conjunto sem fim de operações. Nesse sentido, o método dos *tableaux* semânticos na Lógica Proposicional sempre fornece uma decisão quanto à pergunta: H é ou não satisfatível? E nesse caso, a resposta é dada sem que o sistema entre em loop ou por um conjunto sem fim de operações. Entretanto, na Lógica de Predicados, as coisas não são tão simples. Isso, porque temos o teorema da indecidibilidade, a seguir.

Teorema 9.3 (indecidibilidade na Lógica Proposicional) *O conjunto das fórmulas da Lógica de Predicados que são satisfatíveis é indecidível.*

Nota. Infelizmente, a demonstração do Teorema 9.3 não pertence ao escopo deste livro. Entretanto, mesmo não apresentando sua demonstração, vale a pena entendê-lo. Sobre sua demonstração, aqueles mais animados podem consultar, por exemplo, [Cooper], [Smith], [Sipser] e [Shoenfield].

O significado do teorema da indecidibilidade. O teorema da indecidibilidade, Teorema 9.3, diz que não existe um algoritmo que identifica as fórmulas da Lógica de Predicados que são satisfatíveis, sem possivelmente entrar em loop, ou entrar por um conjunto sem fim de operações. Isto é, podemos até definir algum algoritmo, ou método, que determina se alguns tipos de fórmulas são satisfatíveis. Mas, inevitavelmente, para algumas fórmulas, o algoritmo pode entrar em loop ou por um conjunto sem fim de operações.

O teorema da indecidibilidade e o método dos *tableaux* semânticos. Devido o teorema da indecidibilidade, Teorema 9.3, dada uma fórmula H da Lógica de Predicados, não é possível decidir se existe um *tableau* semântico fechado associado a $\neg H$. Pois se fosse possível essa decisão, então o conjunto das fórmulas satisfatíveis seria decidível, o que contraria o teorema da indecidibilidade. Então, ao iniciar um *tableau* com a fórmula $\neg H$, podemos possivelmente entrar em loop, ou por uma sequência sem fim de aplicações de regras e não decidir se existe um *tableau* fechado. Mas, no caso dos *tableaux* semânticos, o que significa entrar em loop, ou entrar por uma sequência infinita de aplicações de regras? Pode significar, por exemplo, seguir um ramo infinito da árvore. Mas, também, pode significar outras coisas, que dependem da estrutura sintática de H. Entretanto, como estamos falando apenas informalmente, basta essa ideia primária. Mas, não é só o conjunto das fórmulas satisfatíveis que é indecidível. O conjunto das fórmula válidas da Lógica de Predicados é, também, indecidível. Isso porque, para identificar o conjunto das fórmulas válidas, devemos inicialmente identificar as fórmulas satisfatíveis e, em seguida, num trabalho maior ainda, nomear aquelas que são válidas. Portanto, não existe algoritmo que identifica, de forma efetiva, as fórmulas válidas, sem que, possivelmente, entre em loop, ou entre por um conjunto sem fim de operações. Aqui, estamos novamente apenas com ideias informais. Observe que o teorema da indecidibilidade não implica, de forma imediata, que o conjunto das fórmulas válidas também é indecidível. Isso, porque a inexistência de um algoritmo que decide o conjunto das fórmulas satisfatíveis, não significa a inexistência de um algoritmo que decide, diretamente, o conjunto das fórmulas válidas. Além disso, dada uma fórmula H, da Lógica de Predicados, ainda não conhecemos um método eficiente, de complexidade polinomial,[1] que determine, caso exista, uma interpretação I, tal que $I[H] = T$. Tais fatos são importantes resultados da Lógica que têm consequências em várias áreas, como Computação, Matemática e Filosofia [Andrews], [Barwise], [Enderton], [Mendelson], [Dalen] e [Shoenfield].

Prova do sim e do não. Dada uma fórmula da Lógica Proposicional, o método dos *tableaux* semânticos decide o "sim", caso a fórmula seja uma tautologia, ou decide o "não", caso ela não seja uma tautologia. Porém, na Lógica de Predicados é diferente. Dada uma fórmula da Lógica de Predicados, o método dos *tableaux* semânticos não decide nem o "sim", caso a fórmula seja satisfatível, e nem o "não", caso ela não seja satisfatível. Tudo isso, devido ao teorema da indecidibilidade, Teorema 9.3.

9.5 Exercícios

1. Considere as regras R_{10} e R_{11} do *tableau* semântico. Utilize as equivalências:
   $(\exists x)A$ equivale a $\neg(\forall x)\neg A$
   $(\forall x)A$ equivale a $\neg(\exists x)\neg A$
   e demonstre que R_5, R_{10} equivale a R_5, R_{11}.

2. Demonstre, utilizando *tableaux* semânticos, se as fórmulas, a seguir, são válidas:

   (a) $(\forall x)q(y)$ e $q(y)$

   (b) $(\exists x)q(y)$ e $q(y)$

   (c) $(\forall x)(p(x) \wedge q(y)) \rightarrow ((\forall x)p(x) \wedge q(y))$

   (d) $((\forall x)p(x) \wedge q(y)) \rightarrow (\forall x)(p(x) \wedge q(y))$

   (e) $(\exists x)(p(x) \wedge q(y)) \rightarrow ((\exists x)p(x) \wedge q(y))$

   (f) $((\exists x)p(x) \wedge q(y)) \rightarrow (\exists x)(p(x) \wedge q(y))$

   (g) $((\exists x)p(x) \vee q(y)) \rightarrow (\exists x)(p(x) \vee q(y))$

[1] Consulte [Sipser], [Cooper], para a definição de complexidade polinomial.

(h) $(\exists x)(p(x) \vee q(y)) \rightarrow ((\exists x)p(x) \vee q(y))$

(i) $(\forall x)(p(x) \rightarrow q(y)) \rightarrow ((\exists x)p(x) \rightarrow q(y))$

(j) $((\exists x)p(x) \rightarrow q(y)) \rightarrow (\forall x)(p(x) \rightarrow q(y))$

(k) $(\forall x)(q(y) \rightarrow p(x)) \rightarrow (q(y) \rightarrow (\forall x)p(x))$

(l) $(q(y) \rightarrow (\forall x)p(x)) \rightarrow (\forall x)(q(y) \rightarrow p(x))$

(m) $(\exists x)(p(x) \rightarrow q(y)) \rightarrow ((\forall x)p(x) \rightarrow q(y))$

(n) $((\forall x)p(x) \rightarrow q(y)) \rightarrow (\exists x)(p(x) \rightarrow q(y))$

(o) $(\exists x)(q(y) \rightarrow p(x)) \rightarrow (q(y) \rightarrow (\exists x)p(x))$

(p) $(q(y) \rightarrow (\exists x)p(x)) \rightarrow (\exists x)(q(y) \rightarrow p(x))$

3. Demonstre, utilizando *tableaux* semânticos, se as seguintes fórmulas são válidas:

   (a) $(\forall x)(p(x) \rightarrow (q(x) \rightarrow r(x)) \rightarrow ((p(x) \rightarrow q(x)) \rightarrow (p(x) \rightarrow r(x))))$

   (b) $(\forall x)((p(x) \rightarrow q(x)) \rightarrow (\neg q(x) \rightarrow \neg p(x)))$

   (c) $(\forall x)((p(x) \rightarrow q(x)) \rightarrow (\neg q(x) \rightarrow \neg p(x))$

   (d) $(\forall x)p(x) \leftrightarrow (\forall y)p(y)$

   (e) $(\forall x)(\forall y)(p(x,y) \rightarrow (q(x,y) \rightarrow p(x,y)))$

4. Algumas das fórmulas a seguir são válidas, outras não. Para cada fórmula demonstre, utilizando *tableaux* semânticos, se ela é válida.

   (a) $(\forall x)p(x) \rightarrow p(a)$

   (b) $p(a) \rightarrow (\exists x)p(x)$

   (c) $(\forall x)(\neg(\forall y)q(x,y)) \rightarrow (\neg(\forall y)q(y,y))$

   (d) $p(x) \rightarrow (\forall x)p(x)$

   (e) $(\forall x)p(x) \rightarrow (\exists x)p(x)$

   (f) $(\exists x)(p(x) \rightarrow q(x)) \rightarrow ((\exists x)p(x) \rightarrow (\exists x)q(x))$

   (g) $(\forall x)(\exists y)p(x,y) \rightarrow (\exists y)p(y,y)$

   (h) $(\exists x)(\exists y)p(x,y) \rightarrow (\exists y)p(y,y)$

   (i) $(\exists x)(p(x) \rightarrow r(x)) \leftrightarrow ((\forall x)p(x) \rightarrow (\exists x)r(x))$

   (j) $(\forall x)(p(x) \vee r(x)) \rightarrow ((\forall x)p(x) \vee \forall x)r(x))$

   (k) $((\forall x)p(x) \vee (\forall x)r(x)) \rightarrow (\forall x)(p(x) \vee r(x))$

   (l) $(\exists x)(p(x) \leftrightarrow r(x)) \leftrightarrow ((\exists x)p(x) \leftrightarrow (\exists x)r(x))$

   (m) $(\exists x)((p(x) \rightarrow p(a)) \wedge (p(x) \rightarrow p(b)))$

   (n) $(\exists x)(\forall y)((q(x,y) \wedge q(y,x)) \rightarrow (q(x,x) \leftrightarrow q(y,y)))$

(o) $(\forall x)(p(x) \land q(x)) \leftrightarrow (\forall x)(p(x) \rightarrow \neg q(x))$

(p) $(\forall x)(p(x,a) \rightarrow (\forall x)q(x,b)) \leftrightarrow ((\exists x)p(x,a) \rightarrow (\forall x)q(x,b))$

(q) $(\forall x)(\exists y)(p(x,y) \rightarrow q(x,y)) \rightarrow ((\forall x)(\exists y)p(x,y) \rightarrow (\forall x)(\exists y)q(x,y))$

(r) $(\forall x)(\exists y)(p(x,y) \rightarrow q(x,y)) \rightarrow ((\exists x)(\forall y)p(x,y) \rightarrow (\forall x)(\exists y)q(x,y))$

5. Demonstre, utilizando *tableaux* semânticos, que as fórmulas H e G a seguir são equivalentes:

   (a) $H = (\forall x)(\forall y)p(x,y,z),\ G = (\forall y)(\forall x)p(x,y,z)$

   (b) $H = (\exists x)(\exists y)p(x,y,z),\ G = (\exists y)(\exists x)p(x,y,z)$

   (c) $H = \neg(\exists y)A,\ G = (\forall y)\neg A$

   (d) $H = (\exists x)p(x),\ G = (\exists y)p(y)$

   (e) $H = (\forall x)p(x),\ G = (\forall y)p(y)$

   (f) $H = (\forall x)(\forall x)p(x),\ G = (\forall x)p(x)$

6. Justifique porque todos os *tableaux* associados a:

$$H = (\forall x)(p(x) \rightarrow (\exists y)(q(y) \land r(x,y))) \land \neg(\exists y)(q(y) \land (\forall x)r(y,x))$$

   são abertos e conclua que H não é válida.

7. Demonstre, utilizando *tableaux* semânticos, se os argumentos do Exercício 19 do Capítulo 7 são válidos.

8. Demonstre, utilizando *tableaux* semânticos, se os conjuntos são satisfatíveis:

   (a) $\{(\forall x)(\forall y)(p(x,y) \rightarrow \neg p(y,x)), (\forall x)p(x,x),$
   $(\forall x)(\forall y)(\forall z)((p(x,z) \land p(y,z)) \rightarrow p(y,z))\}$

   (b) $\{\neg(\forall x)(\forall y)(p(x,y) \rightarrow \neg p(y,x)), (\forall x)p(x,x),$
   $(\forall x)(\forall y)(\forall z)((p(x,z) \land p(y,z)) \rightarrow p(y,z))\}$

   (c) $\{(\forall x)(\forall y)(p(x,y) \rightarrow \neg p(y,x)), \neg(\forall x)p(x,x),$
   $(\forall x)(\forall y)(\forall z)((p(x,z) \land p(y,z)) \rightarrow p(y,z))\}$

   (d) $\{(\forall x)(\forall y)(p(x,y) \rightarrow \neg p(y,x)), (\forall x)p(x,x),$
   $\neg(\forall x)(\forall y)(\forall z)((p(x,z) \land p(y,z)) \rightarrow p(y,z))\}$

9. Demonstre, utilizando *tableaux* semânticos, quando as afirmações podem ser verdadeiras ao mesmo tempo.

   (a) Toda aluna de Ciência da Computação é mais bonita que alguma aluna de Engenharia. Toda aluna de Engenharia é mais bonita que alguma aluna de Ciência da Computação.

(b) Toda aluna de Ciência da Computação é mais bonita que alguma aluna de Engenharia. Existe aluna de Engenharia que é mais bonita que alguma aluna de Ciência da Computação.

(c) Existe aluna de Ciência da Computação que é mais bonita que toda aluna de Engenharia. Existe aluna de Engenharia que é mais bonita que alguma aluna de Ciência da Computação.

(d) Toda aluna de Ciência da Computação é mais bonita que toda aluna de Engenharia. Existe aluna de Engenharia que é mais bonita que alguma aluna de Ciência da Computação.

10. Demonstre, utilizando *tableaux* semânticos, se o conjunto de afirmações a seguir é satisfatível:

    - Toda aluna de Ciência da Computação é mais bonita que alguma aluna de Engenharia.
    - Toda aluna de Engenharia é mais bonita que alguma aluna de Ciência da Computação.
    - Existe aluna de Ciência da Computação que é mais bonita que toda a aluna de Engenharia.

11. Maria estava conversando com sua amiga Ana e disse:

    - Há mulheres na Universidade que têm ciúmes de todos os homens.

    Ana pensou e disse:

    - Toda mulher ciumenta tem uma paixão. Entretanto, elas nunca se casam.

    Zé estava ouvindo o diálogo e concluiu:

    - Nenhuma mulher da Universidade se casará.

    Demonstre, utilizando *tableaux* semânticos, se a conclusão de Zé é válida ou não.

12. Considere o argumento:

    Todo atleta é determinado. Toda pessoa determinada e inteligente não é uma perdedora. Guga é um atleta e amante do tênis. Toda pessoa é amante do tênis se é inteligente. Portanto, Guga não é um perdedor.

    Utilize o método dos *tableaux* semânticos para responder se o argumento acima é válido.

13. Demonstre, utilizando *tableaux*, semânticos se os argumentos a seguir são válidos:

    a) Maria ama a todos e somente aqueles que amam seu filho. Seu filho ama a todos e somente aqueles que não amam Maria. Maria ama a si própria. Portanto, seu filho ama a si próprio.

b) Há monitor que é bom estudante, mas não é comunicativo. Apenas bons estudantes são monitores. Todo artista é comunicativo. Portanto, nem todo bom estudante é um artista.

14. Considere as afirmações a seguir.

Afirmação 1. Toda mulher dócil tem um amado.

Afirmação 2. Se existe mulher dócil, toda pessoa tem um amado.

Demonstre se a s afirmações a seguir são válidas:

a) afirmação 1 implica na afirmação 2.

b) afirmação 2 implica na afirmação 1.

15. Demonstre, utilizando os teoremas da completude, da correção e da indecidibilidade, se as afirmações são verdadeiras:

    (a) Se H é válida, então existe *tableau* fechado associado a $\neg H$.
    (b) Se H é válida, então pode existir *tableau* aberto associado a $\neg H$.
    (c) Se H não é válida, então não existe *tableau* fechado associado a $\neg H$.
    (d) Se H não é válida, então todo *tableau* associado a $\neg H$ é aberto.
    (e) Se existe *tableau* associado a $\neg H$ fechado, então H é válida.
    (f) Se existe *tableau* associado a $\neg H$ que é aberto, então H não é válida.
    (g) Se todo *tableau* associado a $\neg H$ é aberto, então H não é válida.
    (h) É possível definir uma fórmula válida H, da lógica de predicados, com um *tableau* aberto associado a $\neg H$.

16. Mostre a validade do teorema da correção, na Lógica de Predicados, em um caso particular, como é feito no Capítulo 4.

CAPÍTULO 10

UM MÉTODO SINTÁTICO DE DEDUÇÃO NA LÓGICA DE PREDICADOS

10.1 Introdução

No Capítulo 5 analisamos um método sintático de dedução na Lógica Proposicional. E, novamente, como é feito no caso dos *tableaux* semânticos, o método apresentado para a Lógica Proposicional é estendido para tratar de fórmulas da Lógica de Predicados. Este capítulo considera uma extensão dos conceitos apresentados no sistema axiomático da Lógica Proposicional, Capítulo 5, obtendoos um novo sistema. O novo sistema axiomático contém estruturas que permitem a dedução sintática de fórmulas da Lógica de Predicados. Por isso, analisamos neste capítulo um sistema mais rico que permite melhor representação de conhecimento, mas, também, mais complexo na sua análise. Observe que a Lógica de Predicados contém um alfabeto mais amplo, o que possibilita uma maior capacidade de representação e dedução de conhecimento. Mas que, em geral, também exige análise mais complexa.

Notação. Para facilitar a referência, o sistema axiomático apresentado neste capítulo é denotado por $\wp_r$. Nesse caso, utilizamos o subíndice r, para lembrar que ele está no contexto da Lógica de Predicados. Isso o que o diferencia do sistema axiomático da Lógica Proposicional, que é denotado por $\wp_a$.

10.2 O sistema formal $\wp_r$

O sistema formal, axiomático, $\wp_r$ é um sistema definido, na Lógica de Predicados, pelos elementos básicos:

Definição 10.1 (elementos básicos do sistema formal $\wp_r$) *O sistema formal $\wp_r$ da Lógica de Predicados é definido pela composição de quatro conjuntos:*

1. *o alfabeto da Lógica de Predicados, Definição 6.1;*
2. *o conjunto das fórmulas da Lógica de Predicados;*
3. *um subconjunto das fórmulas especiais, que são denominadas axiomas;*
4. *um conjunto de regras de dedução.*

Os elementos básicos do sistema $\wp_r$ são análogos àqueles considerados no sistema $\wp_a$. Nesse caso, a diferença, é que em $\wp_r$ utilizamos a linguagem da Lógica de Predicados. Por isso, os axiomas de $\wp_r$ são fórmulas da Lógica de Predicados. Entretanto, na sua forma, eles são análogos aos axiomas do sistema $\wp_a$. Por outro lado, além da Regra *modus ponens*, temos mais uma regra de dedução denominada *generalização*. Para definir os axiomas de $\wp_r$ e a regra *generalização*, temos primeiramente, que introduzir o conceito de substituição segura de um termo por uma variável. Iniciamos pela notação.

Notação. Dada uma fórmula H, da Lógica de Predicados, então denotamos por $H\{x \leftarrow t\}$ a fórmula obtida de H, substituindo as ocorrências livres de x em H, pelo termo t.

Definição 10.2 (substituição segura) *Sejam H uma fórmula, x uma variável e t um termo, quaisquer, da Lógica de Predicados. A substituição, indicada por $\{x \leftarrow t\}$, é dita segura para H, quando toda variável de t ocorre livre em $H\{x \leftarrow t\}$.*

Exemplo 10.1 (substituição segura) Considere a fórmula:

$$H = (\exists w)(p(x,w) \to (\forall y)q(y,w,z))$$

e os termos $t_1 = f(z)$ e $t_2 = g(w)$. Nesse caso, as substituições:

$H\{x \leftarrow f(z)\} = (\exists w)(p(f(z),w) \to (\forall y)q(y,w,z))$ e

$H\{z \leftarrow f(z)\} = (\exists w)(p(x,w) \to (\forall y)q(y,w,f(z)))$

são substituições seguras, pois a variável z em $f(z)$, ocorre livre em $H\{x \leftarrow f(z)\}$ e em $H\{z \leftarrow f(z)\}$. Por outro lado, a substituição a seguir não é segura:

$H\{x \leftarrow g(w)\} = (\exists w)(p(g(w),w) \to (\forall y)q(y,w,z))$.

Nesse caso, a variável w em $g(w)$, não ocorre livre em $H\{x \leftarrow g(w)\}$. Finalmente, considere a substituição $H\{w \leftarrow t\}$. Observe que w ocorre apenas ligada em H. E, por definição, $H\{w \leftarrow t\}$ é a fórmula obtida de H, substituindo as ocorrências livres de w em H por t. Logo, como w não ocorre livre em H, temos que $H\{w \leftarrow t\} = H$. Portanto, nesse caso, a variável w em H não é substituída por t. Considere, então, o caso em que $t = g(w)$. E para denotar a diferença entre as variáveis w que ocorre em $g(w)$ e w que ocorre em H, denotamos a variável w em $g(w)$ com um pontinho em cima: $\dot{w}$. Nesse caso, temos

$H\{w \leftarrow g(\dot{w})\} = (\exists w)(p(x,w) \rightarrow (\forall y)q(y,w,z))$.

Observe que a variável $\dot{w}$ não aparece em $H\{w \leftarrow g(\dot{w})\}$. Isso porque a variável w em H é ligada e, por isso, não é substituída. Logo, $H\{w \leftarrow g(\dot{w})\} = H$. E, dado que a variável $\dot{w}$ não ocorre em $H\{w \leftarrow g(\dot{w})\}$, a substituição é segura. ■

Agora podemos definir os axiomas de $\wp_r$.

Definição 10.3 (axiomas do sistema $\wp_r$) *O sistema axiomático $\wp_r$ possui cinco esquemas de axiomas. Os três primeiros são os mesmos esquemas de fórmulas considerados em $\wp_a$. Nesse caso, as fórmulas H, G e E são fórmulas da Lógica de Predicados:*

1. $Ax_1 = (H \vee H) \rightarrow H$;
2. $Ax_2 = H \rightarrow (G \vee H)$;
3. $Ax_3 = (H \rightarrow G) \rightarrow ((E \vee H) \rightarrow (G \vee E))$;
4. $Ax_4 = (\forall x)H \rightarrow H\{x \leftarrow t\}$, *onde* $\{x \leftarrow t\}$ *é uma substituição segura para* H;
5. $Ax_5 = (\forall x)(H \vee G) \rightarrow (H \vee (\forall x)G)$, *onde* x *não ocorre livre em* H.

Nota. Como no sistema $\wp_a$, os axiomas do sistema formal $\wp_r$ são denominados axiomas lógicos.

Observe que o conjunto dos axiomas de $\wp_r$ é uma extensão dos axiomas de $\wp_a$. Além disso, temos infinitos axiomas que são representados por esquemas de fórmulas.

Além disso, nos axiomas aparece apenas o quantificador $\forall$. Entretanto, como sabemos, a partir do conectivo $\forall$, o conectivo $\exists$ também pode ser obtido de forma equivalente. Nesse sentido, em $\wp_r$, a fórmula $(\exists x)H$ denota a fórmula $\neg(\forall x)\neg H$. Como em $\wp_a$ o conjunto dos axiomas de $\wp_r$ é decidível, ou seja, temos um algoritmo que decide que fórmulas da Lógica de Predicados correspondem ou não a um axioma. Além disso, esse conjunto é enumerável. Isto é, há uma forma de enumerar todos os axiomas de $\wp_a$. Finalmente, no axioma Ax_4, é necessário enfatizar que a substituição $\{x \leftarrow t\}$ deve ser segura.

Exemplo 10.2 (axioma Ax_4) Considere a fórmula $H = (\exists y)p(x,y) \vee q(x,y)$. Nesse caso, a substituição $H\{x \leftarrow w\}$ é segura, sendo dada por:

$$H\{x \leftarrow w\} = (\exists y)p(w,y) \vee q(w,y).$$

Observe que w é livre em $H\{x \leftarrow w\}$. Portanto, a fórmula a seguir é um exemplo do axioma Ax_4.

$Ax_4 = (\forall x)((\exists y)p(x,y) \vee q(x,y)) \rightarrow ((\exists y)p(w,y) \vee q(w,y))$.

Por outro lado, a substituição $H\{x \leftarrow y\}$ não é segura e a fórmula

$$(\forall x)((\exists y)p(x,y) \vee q(x,y)) \rightarrow ((\exists y)p(y,y) \vee q(y,y))$$

não é um exemplo do axioma Ax_4. ■

Exemplo 10.3 (axioma Ax_5) A fórmula a seguir é um exemplo do axioma Ax_5:

$$Ax_5 = (\forall x)((\exists y)p(w,y) \lor q(x,y)) \to ((\exists y)p(w,y) \lor (\forall x)q(x,y))$$

Por outro lado, a fórmula a seguir não é um exemplo do axioma Ax_5:

$$E = (\forall x)((\exists y)p(x,y) \lor q(x,y)) \to ((\exists y)p(x,y) \lor (\forall x)q(x,y))$$

Isso ocorre porque a variável x em $p(x,y)$, no antecedente de E, ocorre ligada, mas no consequente, em $p(x,y)$, ela ocorre livre. E como podemos observar, no axioma Ax_5, a variável x não muda a natureza de sua ocorrência. Observe que no axioma Ax_5, se x não ocorre livre em H, então a natureza das ocorrências das variáveis em $(\forall x)(H \lor G)$ e em $(H \lor (\forall x)G)$ é a mesma. ■

Validade dos axiomas de $\wp_r$. Os axiomas do sistema $\wp_r$ são válidos, pois, como em $\wp_a$, o conhecimento dado *a priori* é representado por axiomas válidos. E não haveria sentido, pelo menos na Lógica Clássica, considerar axiomas não válidos. As demonstrações da validade dos axiomas Ax_1, Ax_2 e Ax_3 são análogas às demonstrações consideradas no sistema $\wp_a$. A demonstração da validade do axioma Ax_4 é feita a partir da proposição a seguir.

Lema 10.1 (substitutividade) *Sejam H uma fórmula, x uma variável e t um termo da Lógica de Predicados. Suponha que $\{x \leftarrow t\}$ é uma substituição segura para H. Considere I uma interpretação sobre o domínio U.*

$$\textit{Se } I[H\{x \leftarrow t\}] = F \textit{ e } I[t] = s, \textit{ então } < x \leftarrow s > I[H] = F$$

Demonstração. Esta demonstração utiliza indução no comprimento de H e não é considerada neste livro.

Proposição 10.1 (validade de axioma Ax_4) *O axioma Ax_4 é válido.*

Demonstração. Suponha, por absurdo, que Ax_4 não é válida. Mas, se Ax_4 não é válida, então existe uma interpretação I sobre U, tal que $I[Ax_4] = F$. Nesse caso, temos:

$$\begin{aligned} I[Ax_4] = F &\Leftrightarrow I[(\forall x)H \to H\{x \leftarrow t\}] = F, \\ &\Leftrightarrow I[(\forall x)H] = T \text{ e } I[H\{x \leftarrow t\}] = F, \\ &\Leftrightarrow \forall d \in U, < x \leftarrow d > I[H] = T \text{ e } I[H\{x \leftarrow t\}] = F. \end{aligned}$$

Seja $s \in U$ tal que $I[t] = s$. Logo, utilizando o Lema 10.1, a dedução acima continua como se segue:

$$\begin{aligned} I[Ax_4] = F &\Leftrightarrow \forall d \in U, < x \leftarrow d > I[H] = T \text{ e } I[H\{x \leftarrow t\}] = F, \\ &\Leftrightarrow \forall d \in U, < x \leftarrow d > I[H] = T \\ &\quad\;\; \text{e } < x \leftarrow s > I[H] = F \text{ para algum } s \in U. \end{aligned}$$

A última afirmação é contraditória. Logo, é falso que $I[Ax_4] = F$. Portanto, para toda interpretação I, $I[Ax_4] = T$. Isto é, Ax_4 é válida. **cqd** ■

Proposição 10.2 (validade de axioma Ax_5) *O axioma Ax_5 é válido.*

Demonstração. Suponha, por absurdo, que Ax_5 não é válida. Mas, se Ax_5 não é válida, então existe uma interpretação I sobre U, tal que $I[Ax_5] = F$. Nesse caso, temos:

$$
\begin{array}{lll}
I[Ax_5] = F & \Leftrightarrow & I[(\forall x)(H \vee G) \rightarrow (H \vee (\forall x)G] = F, \\
 & \Leftrightarrow & I[(\forall x)(H \vee G)] = T \text{ e } I[H \vee (\forall x)G] = F, \\
 & \Leftrightarrow & \forall\ d\ \in\ U,\ < x \leftarrow d > I[H \vee G] = T \text{ e} \\
 & & I[H] = F \text{ e } I[(\forall x)G] = F, \\
 & \Leftrightarrow & \forall\ d\ \in\ U, \\
 & & \{\ < x \leftarrow d > I[H] = T \text{ e/ou } < x \leftarrow d > I[G] = T\ \} \text{ e} \\
 & & I[H] = F \text{ e } I[(\forall x)G] = F, \\
 & \Leftrightarrow_1 & \forall\ d\ \in\ U,\ \{\ I[H] = T \text{ e/ou } < x \leftarrow d > I[G] = T\ \} \text{ e} \\
 & & I[H] = F \text{ e } I[(\forall x)G] = F, \\
 & \Leftrightarrow & \{\ I[H] = T \text{ e/ou }\ \forall\ d\ \in\ U,\ < x \leftarrow d > I[G] = T\} \text{ e} \\
 & & I[H] = F \text{ e }\ \exists\ c\ \in\ U,\ < x \leftarrow c > I[G] = F.
\end{array}
$$

Na dedução acima, a equivalência denotada por $\Leftrightarrow_1$ é válida porque x não ocorre livre em H. Logo, $H, < x \leftarrow d > I[H] = I[H]$. Conclusão: a última afirmação é uma contradição. Logo, $I[Ax_5] = T$ e, portanto, Ax_5 é válida. **cqd** ■

As regras de inferência de $\wp_r$. O sistema $\wp_r$ possui dois esquemas de regras de inferência: *modus ponens* e *generalização*. A definição da regra *modus ponens* em $\wp_r$ é análoga à definição de *modus ponens* em $\wp_a$. Por isso, apresentamos a seguir apenas a definição da regra de inferência *generalização*.

Definição 10.4 (*generalização* em $\wp_a$) *Seja H uma fórmula e x uma variável da Lógica de Predicados. A regra de inferência do sistema $\wp_r$, denominada generalização, (GE), é definida pelo procedimento: tendo, H deduza $(\forall x)H$.*

Como a regra *modus ponens*, a regra de inferência *generalização*, GE, é um conjunto infinito de regras, pois a fórmula H e a variável x são arbitrárias. Ela determina que se há um conhecimento representado pela fórmula H, deduzido no sistema, então é possível concluir o conhecimento representado por $(\forall x)H$. Suponha, por exemplo, que se tenha deduzido a fórmula $p(x)$. Como nessa dedução, a variável x é arbitrária, utilizando a *generalização* GE, concluímos que $(\forall x)p(x)$.

Notação. Para denotar a regra de inferência *generalização*, consideramos a notação:

$$GE = \frac{H}{(\forall x)H}$$

Nota. Como no sistema $\wp_a$, em $\wp_r$ consideramos as denotações: $(H \wedge G)$ denota $\neg(\neg H \vee \neg G)$, $H \rightarrow G$ denota $(\neg H \vee G)$ e $(H \leftrightarrow G)$ denota $(H \rightarrow G) \wedge (G \rightarrow H)$. Essas denotações são consideradas porque podemos considerar um alfabeto mais restrito, no qual temos apenas os conectivos do conjunto completo: $\{\neg, \vee, \forall\}$. Dessa forma, ainda consideramos a denotação: $(\exists x)H$ denota $\neg(\forall x)\neg H$.

10.3 Consequência lógica sintática em $\wp_r$

Da mesma forma que no sistema $\wp_a$, no sistema $\wp_r$ temos, também, uma estrutura para dedução de fórmulas. Os axiomas representam o conhecimento, ou fórmulas dadas *a priori* e as regras de inferência o mecanismo de inferência. As fórmulas obtidas a partir da aplicação das regras de inferência, *modus ponens* e *generalização* sobre os axiomas, são denominadas teoremas de $\wp_r$. As definições de prova, consequência lógica e teoremas em $\wp_r$ são análogas àquelas apresentadas no sistema $\wp_a$. Mas, em $\wp_r$, devemos considerar também a *generalização*: Veja a definição.

Definição 10.5 (prova sintática no sistema $\wp_r$) *Sejam, na Lógica de Predicados, H uma fórmula e β um conjunto de fórmulas denominadas por hipóteses. Uma prova sintática de H a partir de β, no sistema axiomático $\wp_r$, é uma sequência de fórmulas $H_1, H_2, \ldots, H_n$, onde temos:*

1. $H = H_n$;

E, para todo i, tal que $1 \leq i \leq n$:

2. H_i *é um axioma; ou*
3. $H_i \in \beta$; *ou*
4. H_i *é deduzida de H_j e H_k, utilizando a Regra modus ponens, onde $1 \leq j < i$ e $1 \leq k < i$; isto é:*

$$MP = \frac{H_j \;\; H_k}{H_i}.$$

Observe que neste caso, necessariamente, $H_k = H_j \rightarrow H_i$.

5. $H_j = (\forall x)H_i$ *é deduzida de H_i, utilizando a Regra generalização, onde $1 \leqq i < j$; Isto é:*

$$GE = \frac{H_i}{(\forall x)H_i}.$$

Definição 10.6 (consequência lógica sintática no sistema $\wp_r$) *Dados, na Lógica de Predicados, uma fórmula H e um conjunto de hipóteses β, então H é uma consequência lógica de β em $\wp_r$, se existe uma prova de H a partir de β.*

Definição 10.7 (teorema no sistema $\wp_r$) *Uma fórmula H é um teorema em $\wp_r$ se existe uma prova de H, em $\wp_r$, que utiliza apenas os axiomas. Neste caso, o conjunto de hipóteses é vazio.*

Notação. A notação utilizada no sistema $\wp_a$ para indicar a consequência lógica sintática $\beta \vdash H$ também é utilizada em $\wp_r$.

Como o sistema $\wp_r$ é uma extensão de $\wp_a$, todos os teoremas de $\wp_a$ são também teoremas de $\wp_r$. Logo, não há problemas em se considerar a mesma notação. Entretanto, é necessário ficar claro, no contexto, qual sistema está sendo utilizado. Apresentamos, a seguir, um conjunto de proposições, que utilizam a técnica apresentada no Capítulo 5 e os novos axiomas do sistema $\wp_r$. Nas proposições que se seguem, β é um conjunto de hipóteses e A, B e C são fórmulas da Lógica de Predicados.

Proposição 10.3 *Se x não ocorre livre em A e $\vdash (A \to B)$, então $\vdash (A \to (\forall x)B)$.*

1.	$\vdash (\neg A \lor B)$	hip
2.	$\vdash (\forall x)(\neg A \lor B)$	GE,1.
3.	$\vdash (\forall x)(\neg A \lor B) \to (\neg A \lor (\forall x)B)$	Ax_5
4.	$\vdash (\neg A \lor (\forall x)B)$	MP,2.,3.
5.	$\vdash (A \to (\forall x)B)$	reescrita **cqd** ■

Proposição 10.4 *Temos que $(\forall x)(\forall y)A \vdash (\forall y)(\forall x)A$.*

1.	$\vdash (\forall x)(\forall y)A)$	hip
2.	$\vdash (\forall x)(\forall y)A \to (\forall y)B$	Ax_4
3.	$\vdash (\forall y)A$	MP,1.,2.
4.	$\vdash (\forall y)A \to A$	Ax_4
5.	$\vdash A$	MP,3.,4.
6.	$\vdash (\forall x)A)$	GE,5.
7.	$\vdash (\forall y)(\forall x)A$	GE,6.

Observe que na linha 2, axioma 4 está na forma: $(\forall x)(\forall y)A \to (\forall y)A\{x \leftarrow x\}$ Já na linha 4, o axioma 4 está na forma: $(\forall y)A \to A\{y \leftarrow y\}$. Além disso, nos dois casos a substituição é segura. **cqd** ■

Teorema 10.1 (teorema da dedução) *Seja β um conjunto de hipóteses da Lógica de Predicados. Suponha que $\beta \cup \{A\} \vdash B$ é uma prova que não utiliza a regra generalização em variáveis livres de A. Nesse caso, $\beta \vdash (A \to B)$.*

Nota. A demonstração do teorema da dedução, Teorema 10.1, e análoga à demonstração do teorema da dedução na Lógica Proposicional. Entretanto, na Lógica de Predicados, temos que utilizar indução finita, conforme é demonstrado em [Mendelson]. Por isso, não a consideramos neste livro. É uma pena.

Corolário 10.1 (teorema da dedução) *Seja β um conjunto de hipóteses da Lógica de Predicados. Se $\beta \cup \{A\} \vdash B$, onde A é uma fórmula fechada, então $\beta \vdash (A \to B)$*

Demonstração. Como A é uma fórmula fechada, não possui variáveis livres. O corolário decorre imediatamente do teorema da dedução.

Proposição 10.5 *Se x não ocorre livre em A, $A \vdash B$ é uma prova na qual não usamos GE em variável livre de A, então $\vdash A \rightarrow (\forall x)B$.*

1.	$A \vdash B$	hip
2.	$\vdash A \rightarrow B$	teorema da dedução. 1.
3.	$\vdash A \rightarrow B(\forall x)B$	Proposição $10.3, 2$. **cqd** ■

Proposição 10.6 *Suponha que A contém apenas as variáveis x e y. Temos que $\vdash (\forall x)(\forall y)A \rightarrow (\forall y)(\forall x)A$.*

Demonstração. Pela Proposição 10.4, $(\forall x)(\forall y)A \vdash (\forall y)(\forall x)A$. Como $(\forall x)(\forall y)A$ é fechada, aplicando o corolário do teorema da dedução, obtemos que $\vdash (\forall x)(\forall y)A \rightarrow (\forall y)(\forall x)A$. **cqd** ■

Proposição 10.7 *Suponha que x ocorra livre em A e y não ocorre em A. Temos que $(\forall x)A \vdash (\forall y)(A\{x \leftarrow y\})$.*

1.	$(\forall x)A$	hip
2.	$(\forall x)A \rightarrow A\{x \leftarrow y\}$	Ax_4, $\{x \leftarrow y\}$ é substituição segura para A
3.	$A\{x \leftarrow y\}$	MP,.1,.2
4.	$(\forall y)A\{x \leftarrow y\}$	GE **cqd** ■

Observação Conforme a Proposição 10.7, temos:

$$(\forall x)A \vdash (\forall y)(A\{x \leftarrow y\}).$$

Na demonstração da Proposição 10.7, aplicamos a *generalização* em $A\{x \leftarrow y\}$, adicionando o quantificador $(\forall y)$. Como a variável y ocorre livre em A $x \leftarrow y$, não é possível aplicar o teorema da dedução e obter

$$\vdash (\forall x)A \rightarrow (\forall y)(A\{x \leftarrow y\}).$$

Proposição 10.8 *Suponha que x não ocorra livre em A. Temos que: $(A \rightarrow B) \vdash A \rightarrow (\forall x)B$.*

1.	$\vdash \neg A \vee B$	hip
2.	$\vdash (\forall x)(\neg A \vee B)$	GE,.1
3.	$\vdash (\forall x)(\neg A \vee B) \rightarrow (\neg A \vee (\forall x)B)$	Ax_5
4.	$\vdash \neg A \vee (\forall x)B$	MP,.2,.3
5.	$\vdash A \rightarrow (\forall x)B$	reescrita **cqd** ■

A proposição a seguir considera um caso em que não é possível a aplicação do teorema da dedução.

Proposição 10.9 *Temos que* $(\forall y)p(x,y) \vdash (\forall y)p(a,y)$.

1.	$\vdash (\forall y)p(x,y)$	hip
2.	$\vdash (\forall x)(\forall y)p(x,y)$	$GE,.1$
3.	$\vdash (\forall x)(\forall y)p(x,y) \rightarrow (\forall y)p(a,y)$	Ax_4
4.	$\vdash (\forall y)p(a,y)$	$MP,.2,.3$ **cqd** ■

10.4 Completude do Sistema Axiomático $\wp_r$

Da mesma forma que o sistema $\wp_a$, o sistema de dedução $\wp_r$ é completo e correto. A escolha dos axiomas e das regras de dedução possibilita a demonstração de sua completude e correção.

Teorema 10.2 (teorema da correção) *Seja H uma fórmula da Lógica de Predicados. Se existe uma prova de H em $\wp_r$, então H é válida.*

Comentário. A demonstração do teorema da correção, Teorema 10.2, é análoga à demonstração do teorema da correção em $\wp_a$. Os axiomas de $\wp_r$ são válidos, conforme analisado anteriormente. As regras *modus ponens* e *generalização* preservam a validade das fórmulas. Logo, como os teoremas são derivados dos axiomas, utilizando tais regras, temos que os teoremas são válidos. Entretanto, a demonstração rigorosa utiliza indução no comprimento da prova e não é considerada neste livro.

Teorema 10.3 (teorema da completude) *Seja H uma fórmula da Lógica de Predicados. Se H é válida, então existe uma prova de H em $\wp_r$.*

Comentário. A demonstração deste teorema não é considerada neste livro, podendo ser encontrada, por exemplo, em [Andrews], [Enderton] ou [Mendelson].

Cuidado com conclusões apressadas. Na Lógica, como na Matemática, devemos ter cuidado com conclusões apressadas. Nem sempre tais conclusões são verdadeiras. Analisamos, a seguir, um desses casos, utilizando o teorema da completude. Conforme a Proposição 10.9, temos

$$(\forall y)p(x,y) \vdash (\forall y)p(a,y).$$

Entretanto, a partir desse resultado, não podemos utilizar o teorema da dedução e concluir

$$\vdash (\forall y)p(x,y) \rightarrow (\forall y)p(a,y).$$

Isso é incorreto por duas razões:

1. Na prova da Proposição 10.9, utilizamos a *generalização* em x, que é uma variável livre em $(\forall y)p(x,y)$. Por isso, não podemos utilizar o teorema da dedução para concluir

$$\vdash (\forall y)p(x,y) \rightarrow (\forall y)p(a,y).$$

2. Observe, também, que $(\forall y)p(x, y)$ não implica $(\forall y)p(a, y)$. Pois, suponha uma interpretação I sobre os naturais $\mathbb{N}$ tal que $I[a] = 7$, $I[x] = 0$ e $I[p(x, y)] = T \Leftrightarrow x_I \leq y_I$. Neste caso, $I[(\forall y)p(x, y)] = T$ e $I[(\forall y)p(a, y)] = F$. Portanto, $I[(\forall y)p(x, y) \rightarrow (\forall y)p(a, y)] = F$. Logo, a fórmula $(\forall y)p(x, y) \rightarrow (\forall y)p(a, y)$ não é válida. Então, pelo teorema da completude, Teorema 10.3, essa fórmula não tem prova em $\wp_r$. Ou seja, é falso que

$$\vdash (\forall y)p(x, y) \rightarrow (\forall y)p(a, y).$$

Proposição 10.10 (consistência) *O sistema axiomático $\wp_r$ é consistente.*

Comentário. A demonstração desta proposição é análoga àquela considerada no sistema $\wp_a$, Proposição 5.4.

10.5 Um objetivo deste livro

Além de uma introdução concisa sobre Lógica, que possa fundamentar a Computação e a Lógica em geral, é também um dos objetivos deste livro despertar no leitor a curiosidade e interesse em entender, mesmo que superficialmente, os teoremas de incompletude de Gödel. Nesse sentido, esta seção é apenas informativa e, também, não pretende entrar em detalhes de debate filosófico, sendo apenas um desfecho final do livro. Isso, porque, dado que já estudamos alguns fundamentos da Lógica, estamos aptos a entender, mesmo que superficialmente, algo sobre tais teoremas. Iniciamos nossa análise pela definição do sistema formal $\mathbb{Q}$.

10.5.1 O sistema formal $\mathbb{Q}$

Na Lógica, o sistema formal $\mathbb{Q}$ corresponde à formalização da Aritmética de Robinson, que foi estabelecida pela primeira vez por R. M. Robinson, [Robinson]. O sistema formal $\mathbb{Q}$ é definido a partir do sistema $\wp_r$, pela inclusão da igualdade, das operações aritméticas de adição, multiplicação e, também, pela adição de constantes que representam os números naturais. Como sabemos, para definir um sistema formal, devemos estabelecer, inicialmente, seus elementos básicos ou fundamentais.

Definição 10.8 (elementos básicos do sistema formal $\mathbb{Q}$) *O sistema formal $\mathbb{Q}$ é definido pela composição de quatro conjuntos:*

1. *Os elementos básicos do sistema formal $\wp_r$;*
2. *A linguagem da Aritmética básica $\mathbb{L}_a$, Definição 7.8 do Capítulo 7;*
3. *Além dos axiomas de $\wp_r$, temos mais um conjunto extra de axiomas, denominados axiomas não lógicos;*
4. *Um conjunto de regras de dedução.*

Os axiomas não lógicos do sistema $\mathbb{Q}$ [Smith], são definidos a seguir:

Definição 10.9 (axiomas não lógicos do sistema $\mathbb{Q}$) *O sistema axiomático $\mathbb{Q}$ possui sete esquemas de axiomas não lógicos.*

1. $Bx_1 = (\forall x)\neg(\overline{0} \mathrel{\widehat{=}} S(x))$
2. $Bx_2 = (\forall x)(\forall y)((S(x) \mathrel{\widehat{=}} S(y)) \rightarrow (x \mathrel{\widehat{=}} y)$
3. $Bx_3 = (\forall x)(\neg(x \mathrel{\widehat{=}} \overline{0}) \rightarrow (\exists y)(x \mathrel{\widehat{=}} S(y))$
4. $Bx_4 = (\forall x)((x \mathbin{\widehat{+}} \overline{0}) \mathrel{\widehat{=}} x)$
5. $Bx_5 = (\forall x)(\forall y)((x \mathbin{\widehat{+}} S(y)) \mathrel{\widehat{=}} S(x \mathbin{\widehat{+}} y))$
6. $Bx_6 = (\forall x)((x \mathbin{\widehat{\times}} \overline{1}) \mathrel{\widehat{=}} \overline{x})$
7. $Bx_7 = (\forall x)(\forall y)((x \mathbin{\widehat{\times}} S(y)) \mathrel{\widehat{=}} ((x \mathbin{\widehat{\times}} y) \mathbin{\widehat{+}} x))$

Conforme analisado no Capítulo 7, esses axiomas correspondem às propriedades fundamentais da Aritmética de Robinson e são fórmulas válidas. As regras de inferência de $\mathbb{Q}$ são as usuais como *modus ponens* e *generalização*. Entretanto, dependendo do texto, temos, também, a utilização de outras regras como RAA, denominada Redução ao Absurdo, ou LL, denominada Lei de Leibniz etc. Mas, como não é nosso objetivo, nesta seção, estudar provas em $\mathbb{Q}$, o leitor interessado nessas provas pode consultar [Barwise], [Dalen], [Marker], [Mendelson] e [Shoenfield].

Incompleto para a negação. Em geral, quando pensamos em um sistema formal, como $\mathbb{Q}$, imaginamos que nele seja possível decidir se uma fórmula, ou sua negação, tem uma prova. Isto é, dada uma fórmula H, então, necessariamente, é possível decidir se $\vdash H$, ou $\vdash \neg H$. Quando isso ocorre, dizemos que o sistema é completo para a negação.

Definição 10.10 (completo para a negação) *Um sistema formal axiomático ∂ é completo para a negação se, e somente se, para toda fórmula H, decidimos, em ∂, se $\vdash H$, ou se $\vdash \neg H$.*

Portanto, em um sistema formal completo para a negação, dada uma fórmula H, necessariamente, decidimos se $\vdash H$, ou $\vdash \neg H$. Infelizmente, o sistema $\mathbb{Q}$ não é completo para a negação.

Proposição 10.11 (incompleto para a negação) *O sistema axiomático $\mathbb{Q}$ não é completo para a negação.*

Nota. A demonstração da Proposição 10.11 está fora do escopo deste livro e pode ser encontrada em [Smith].

Observe que resultado espetacular é a Proposição 10.11. Ela diz que $\mathbb{Q}$ não é completo para a negação. Isso significa que existe fórmula H na linguagem aritmética $\mathbb{L}_a$, que no sistema $\mathbb{Q}$ não é possível decidir se $\vdash H$, ou se $\vdash \neg H$. Isto é, o sistema $\mathbb{Q}$

é incompleto para negação, pois há fórmulas, ou propriedades, sobre as quais não é possível decidir, em $\mathbb{Q}$, sobre a sua prova e nem sobre a prova de sua negação. Ainda, em outras palavras, existem fórmulas H, para as quais podemos dizer que em $\mathbb{Q}$, falta "potência" para decidir se existe prova de H, ou de $\neg H$. Portanto, há propriedades aritméticas que no contexto do sistema formal $\mathbb{Q}$ não conseguimos decidir se elas têm uma prova, ou se é a sua negação que tem uma prova. Nesse caso, podemos até imaginar que a fórmula que expressa a propriedade da conjectura de Goldbach talvez seja uma dessas fórmulas. Esse resultado mostra também que, se consideramos nossa formalização clássica da Aritmética, sistema $\mathbb{Q}$, então há propriedades que não conseguimos decidir sobre suas provas. Certamente, isso é uma limitação à nossa capacidade de prova. Além de ser incompleto para negação, o sistema $\mathbb{Q}$ ainda é falho em outras questões. Por exemplo, não é possível provar em $\mathbb{Q}$ algumas fórmulas simples como $(\forall x)(\overline{0} \mathbin{\widehat{+}} x \mathrel{\widehat{=}} x)$. Consulte [Smith] e veja a prova desse fato.

10.5.2 O sistema formal $\mathbb{PA}$

A necessidade do formalismo na Aritmética somente foi percebida no século XIX. Nessa época, vários matemáticos mostraram que muitos fatos da aritmética poderiam ser derivados de fatos mais básicos sobre operação de sucessor e indução. Em outras palavras, eles perceberam que várias propriedades aritméticas poderiam ser provadas a partir de um conjunto de axiomas básicos, que definem princípios sobre a construção dos números e sobre as propriedades básicas de adição e multiplicação. Então, nessa época, um problema relevante foi propor uma coleção de axiomas sobre os números, a partir da qual outras propriedades pudessem ser derivadas. Em 1.889, Peano publicou sua versão [Peano]. Na definição de seu sistema, Peano estabelece algumas declarações fundamentais:

1. Um princípio que afirma a existência de pelo menos um elemento no conjunto dos números naturais. Nesse caso, consideramos que 0 é um número natural.
2. Três princípios que são afirmações gerais a respeito de igualdade:
   (a) Para todo natural $x, x = x$. Isto é, a equivalência é reflexiva.
   (b) Para todos os números naturais x e y, se $x = y$, então $y = x$. Isto é, a equivalência é simétrica.
   (c) Para todos os números naturais x, y, e z, se $x = y$ e $y = z$, então $x = z$. Ou seja, equivalência é transitiva.
   (d) Para todos a e b, se a for um número natural e $a = b$, então b também é um número natural. Isto é, os números naturais são fechados em sua equivalência.
3. Mais três princípios que podem ser expressos na Lógica de Predicados e que caracterizam as propriedades fundamentais da operação de sucessor sobre os números naturais:

(a) Para todo número natural n, $S(n)$ é um número natural.

(b) Para todo número natural n, $S(n) = 0$ é falso. Isto é, não há nenhum número natural cujo sucessor seja 0.

(c) Para todos os números naturais m e n, se $S(m) = S(n)$, então $m = n$. Ou seja, S é uma função injetora.

4. Finalmente, temos uma declaração na lógica de segunda[1] ordem do princípio da indução matemática sobre os números naturais:

   (a) Se K é um conjunto tal que: 0 está contido em K, e para todo natural n, se n está contido em K, então $S(n)$ está em K, então K contém todos os números naturais.

O sistema $\mathbb{PA}$ é essencialmente o sistema $\mathbb{Q}$ mais o axioma da indução. Nesse sentido, $\mathbb{PA}$ é mais "forte" que $\mathbb{Q}$, apesar de possuírem a mesma linguagem. Isso, porque em $\mathbb{PA}$ podemos provar, por exemplo, a fórmula $(\forall x)(\overline{0} \mathrel{\widehat{+}} x \mathrel{\widehat{=}} x)$, que não pode ser provada em $\mathbb{Q}$.

Definição 10.11 (axiomas não lógicos do sistema $\mathbb{PA}$) *O sistema axiomático $\mathbb{PA}$ possui oito esquemas de axiomas não lógicos. Os sete primeiros axiomas correspondem aos axiomas de $\mathbb{Q}$. O oitavo axioma, Bx_8, é dado por:*

8. Seja $H(x)$ uma fórmula da Lógica de Predicados que contém a variável livre x:

$$Bx_8 = (H(\overline{0}) \wedge (\forall x)(H(x) \rightarrow H(\ S(x)\ ))) \rightarrow (\forall x)H(x)$$

Nota. A axiomatização da Aritmética $\mathbb{PA}$ não é única, na sua forma, sendo apresentada em diferentes formas na literatura [Barwise], [Dalen], [Kaye], [Marker], [Mendelson] e [Shoenfield].

Portanto, o sistema axiomático $\mathbb{PA}$ possui os axiomas lógicos de $\wp_r$, mais os axiomas de $\mathbb{Q}$, juntamente com o axioma Bx_8.

Nota. Como em $\wp_r$, o conjunto dos axiomas de $\mathbb{PA}$ é decidível, ou seja, temos um algoritmo que decide se uma fórmula da Aritmética corresponde, ou não, a um axioma de $\mathbb{PA}$. Além disso, esse conjunto é enumerável. Isto é, há uma forma de enumerar todos os axiomas de $\mathbb{PA}$.

E agora? O axioma Bx_8 é válido, considerando os modelos padrão da Aritmética? A resposta para essa questão não é tão simples como nos casos anteriores. Isso, porque a propriedade Bx_8 corresponde ao princípio da indução finita na aritmética de Peano. E, como o leitor já deve ter percebido, sempre que há a necessidade de algum conhecimento sobre tal princípio, infelizmente, nós o colocamos fora do escopo deste livro. Entretanto, considere o desenvolvimento informal a seguir:

[1] Não se preocupe com o que significa "Lógica de segunda ordem". Isso não compromete a leitura informativa desta seção.

$$
\begin{array}{lll}
I[Bx_8] = T & \Leftrightarrow & I[(H(\overline{0}) \wedge (\forall x)(H(x) \rightarrow H(\ S(x)\ ))) \rightarrow (\forall x)H(x)] = T, \\
& \Leftrightarrow & \text{se} \ \ I[(H(\overline{0}) \wedge (\forall x)((H(x) \rightarrow H(\ S(x)\ ))] = T, \\
& & \text{então} \ \ I[(\forall x)H(x)] = T, \\
& \Leftrightarrow & \text{se} \ \ \{\ I[H(\overline{0})] = T \ \ \text{e} \\
& & \qquad\qquad\qquad \forall\ d \in \mathbb{N}, \\
& & \qquad\qquad\qquad < x \leftarrow d > I[H(x) \rightarrow H(\ S(x)\ )] = T, \} \\
& & \text{então} \ \ \forall\ c \in \mathbb{N},\ < x \leftarrow c > I[H(x)] = T, \\
& \Leftrightarrow & \text{se} \ \ \{\ H_I(0) = T \ \ \text{e} \\
& & \qquad\qquad\qquad \forall\ d \in \mathbb{N}, \ \text{se} \ \ < x \leftarrow d > I[H(x)] = T, \\
& & \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad \text{então} \ \ < x \leftarrow d > H(\ S(x)\ )] = T, \} \\
& & \text{então} \ \ \forall\ c \in \mathbb{N},\ < x \leftarrow c > I[H(x)] = T, \\
& \Leftrightarrow & \text{se} \ \ \{\ H_I(0) = T \ \ \text{e} \\
& & \qquad\qquad\qquad \forall\ d \in \mathbb{N}, \ \text{se} \ \ H_I(d) = T, \\
& & \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad \text{então} \ \ H_I(\ S(d)\ ) = T, \} \\
& & \text{então} \ \ \forall\ c \in \mathbb{N},\ H_I(c) = T.
\end{array}
$$

Afinal, o que significa a última afirmação? Essa resposta não é fácil de ser dada porque a fórmula H é qualquer fórmula da Lógica de Predicados. Isto é, H pode representar uma propriedade qualquer da Aritmética. Mas, informalmente, considere uma explicação do significado de Bx_8. Suponha inicialmente que a fórmula H expressa uma propriedade aritmética que é satisfeita somente pelos elementos do conjunto K. Nesse sentido, a afirmação "$H_I(0) = T$" significa que o número 0 é um elemento do conjunto K. A afirmação "se $H_I(d) = T$, então $H_I(\ S(d)\ ) = T$" significa que se o número d é um elemento do conjunto K, então $S(d)$ também é um elemento de K. E, finalmente, a afirmação "$\forall\ c \in \mathbb{N},\ H_I(c) = T$" significa que todo número c é um elemento do conjunto K. Portanto, nesse sentido, a afirmação:

"Se $\{\ H_I(0) = T \ \text{ e } \ \forall\ d \in \mathbb{N}, \ \text{se} \ H_I(d) = T,$
$\qquad\qquad\qquad\qquad \text{então} \ H_I(\ S(d)\ ) = T, \}$
então $\forall\ c \in \mathbb{N},\ H_I(c) = T$"

significa que:

"Se $\{0 \in K$ e $\forall\ d \in \mathbb{N}$, se $d \in K$,
$\qquad\qquad\qquad$ então $(d+1) \in K, \}$
então $\forall\ c \in \mathbb{N},\ c \in K$".

Nesse caso, portanto, se interpretamos os símbolos não lógicos de $\mathbb{PA}$ da forma usual, podemos aceitar $I[Bx_8] = T$. Certamente isso não é tão imediato ou natural, o que leva vários matemáticos a não aceitarem tal validade. Por isso, dada uma interpretação I, qualquer, dependendo da interpretação dos símbolos não lógicos podemos ter $I[Bx_i] = T$, ou $I[Bx_i] = F$ para i tal que $1 \leqslant i \leqslant 8$. No caso em que os axiomas Bx_i, $1 \leqslant i \leqslant 8$, são interpretados como verdadeiros, a interpretação é denominada um modelo para Aritmética de Peano.

Definição 10.12 (modelo para Aritmética $\mathbb{PA}$) *Um modelo para a Aritmética $\mathbb{PA}$ é uma interpretação I sobre o domínio U, tal que I interpreta todos os axiomas de $\mathbb{PA}$ como verdadeiros.*

Portanto, conforme a Definição 10.12, um modelo para $\mathbb{PA}$ é uma interpretação que interpreta os axiomas $Bx_1, \ldots, Bx_8$ como verdadeiros.

Exemplo 10.4 (modelo para Aritmética $\mathbb{PA}$) Seja I um modelo padrão. Essa interpretação é um modelo para $\mathbb{PA}$, sendo denominado o modelo padrão para $\mathbb{PA}$ [Mendelson]. ■

Nota. Dedekind provou, em seu livro de 1888, *What are numbers and what should they do*, ou seja, "O que são os números e o que eles deveriam fazer", que quaisquer dois modelos dos axiomas de Peano, incluindo o axioma Bx_8, são isomórficos. Se você não sabe o que significa "isomorfismo", podemos dizer, *grosso modo*, que dois modelos são isomórficos se eles são "equivalentes" na forma de interpretar. Portanto, todos os modelos de $\mathbb{PA}$ são isomorfos ao modelo padrão [Dedekind].

10.5.3 Capturando propriedades e funções na Aritmética básica

Na Seção 7.8.8 analisamos a questão da expressividade na Aritmética básica. Em geral, procuramos formalizar uma Aritmética com uma expressividade suficiente para expressar o que desejamos. E o Teorema 7.1 nos diz que a linguagem $\mathbb{L}_a$, da Aritmética básica, é suficientemente expressiva. Mas não basta só isso, nosso objetivo é também uma Aritmética básica na qual possamos provar o que desejamos. Entretanto, o conceito de prova parece, em geral, ser mais "sofisticado" que o da expressividade. É claro que estamos falando de maneira informal, tendo apenas como base exemplos de provas em sistemas formais e o desafio da expressividade de propriedades na Aritmética. Como no caso da expressividade, temos um conceito similar para a prova.

Definição 10.13 (capturando uma propriedade) *Considere ∂ um sistema formal e Prop uma propriedade, sobre os números naturais $\mathbb{N}$. O sistema ∂ captura a propriedade Prop da Aritmética, por uma fórmula $H_{prop}(x)$ na qual x ocorre livre, se, e somente se, para todo número n em $\mathbb{N}$, temos:*

1. *se n tem a propriedade Prop, então, em ∂, temos $\vdash H_{prop}(\overline{n})$;*
2. *se n não tem a propriedade Prop, então, em ∂, temos $\vdash \neg H_{prop}(\overline{n})$.*

Conforme a Definição 7.9, a expressividade de um sistema formal depende da "riqueza" e poder de expressão da linguagem. Por outro lado, a captura depende da "riqueza" e poder de representação dos axiomas e do sistema de prova. Isso, porque, conforme a Definição 10.13, uma propriedade $Prop$ é capturada quando conseguimos provar no sistema a fórmula que a representa.

Nota. Os conceitos de expressividade e captura se relacionam. Observe que em um sistema formal é correto ∂, se a propriedade $Prop$ é capturada por $H_{prop}(x)$, então essa fórmula expressa $Prop$.

Já estamos chegando lá, quase enunciando o teorema de Gödel. Mas antes disso precisamos de mais um conceito.

Definição 10.14 (capturando uma função em um sistema formal) *Considere ∂ um sistema formal e f uma função, sobre os números naturais $\mathbb{N}$. O sistema ∂ captura a função f da Aritmética básica, por uma fórmula $H_f(x,y)$ na qual x e y ocorrem livres, se, e somente se:*

1. *para todo número m em $\mathbb{N}$, $\vdash (\exists! y)H_f(\overline{m},y)^2$;*
2. *para números m,n em $\mathbb{N}$, se $f(\overline{m}) \widehat{=} \overline{n}$, então $\vdash H_f(\overline{m},\overline{n})$;*
3. *para números m,n em $\mathbb{N}$, se $\neg(f(\overline{m}) \widehat{=} \overline{n})$, então $\vdash \neg H_f(\overline{m},\overline{n})$.*

Definição 10.15 (sistema formal adequado) *Um sistema formal ∂ é adequado se, e somente se, para toda função recursiva f, existe uma fórmula $H_f(x,y)$ na qual x e y ocorrem livres, tal que o sistema ∂ captura f.*

Teorema 10.4 (adequação de $\mathbb{Q}$) *O sistema formal $\mathbb{Q}$ é adequado.*

Teorema 10.5 (adequação de $\mathbb{PA}$) *O sistema formal $\mathbb{PA}$ é adequado.*

Nota. As demonstrações dos Teoremas 10.4 e 10.5 não pertencem ao escopo deste livro. Elas podem ser encontradas em [Smith].

O Teorema 10.5 é outro resultado espetacular. Isto é, em $\mathbb{PA}$, toda função recursiva como, por exemplo, f_{ak} é capturada.

A consistência do sistema formal $\mathbb{PA}$

Conforme a Definição 5.8 do Capítulo 5, um sistema axiomático é consistente se, e somente se, H e $\neg H$ não são teoremas ao mesmo tempo. Quando os axiomas de Peano foram propostos pela primeira vez, Bertrand Russel e outros concordaram que esses axiomas definiram implicitamente o que significa um "número natural". Henri Poincaré foi mais cauteloso, dizendo que os números naturais só poderiam ser definidos caso as premissas das definições fossem consistentes. Isto é, se existe uma prova que começa dos axiomas $Bx_1, \ldots, Bx_8$ e chega numa contradição, como por exemplo $\overline{0} \widehat{=} \overline{1}$, então tais axiomas são inconsistentes, e não definem nada. Em outras palavras, segundo Henri Poincaré, os números naturais somente estariam bem definidos se o sistema $\mathbb{PA}$ fosse consistente. Em 1900, David Hilbert propôs o problema de provar a consistência de $\mathbb{PA}$, usando somente métodos "finitários". Esse

[2] A notação $(\exists! y)$ significa: existe um único y.

problema corresponde ao segundo dos vinte e três problemas propostos por Hilbert. Entretanto, em 1932, Kurt Gödel provou seu segundo teorema da incompletude, o qual mostra que uma prova de consistência de $\mathbb{PA}$ não pode ser formalizada, utilizando apenas a Aritmética de Peano $\mathbb{PA}$, [Gödel]. Em outras palavras, não é possível provar a consistência de $\mathbb{PA}$ dentro do próprio sistema $\mathbb{PA}$[3]. Isso significa que para provar a consistência de $\mathbb{PA}$, devemos "sair" de $\mathbb{PA}$. E, nesse sentido, conforme colocado por Henri Poincaré, não é possível definir os números naturais, utilizando apenas o contexto do sistema $\mathbb{PA}$, fato que mostra a importância do teorema da incompletude de Gödel.

10.5.4 Teoremas de incompletude de Gödel

São dois os teoremas de incompletude de Gödel, que estabelecem limitações sobre os mecanismos de prova dos sistemas axiomáticos da Aritmética. E como estabelecem tais limitações, tais teoremas são importantes em inúmeras áreas do conhecimento humano, como na Lógica, na Matemática em geral e na Filosofia. Eles são, podemos dizer, o fundamento de uma revolução matemática. O primeiro teorema da incompletude afirma que nenhum sistema formal da Aritmética que seja consistente e cujos teoremas formam um conjunto decidível é capaz de provar todas as verdades sobre as relações dos números naturais. Isto é, nesses sistemas, sempre há afirmações sobre os números naturais que são verdadeiras, mas que não podem ser provadas dentro do sistema.

Teorema 10.6 (primeiro teorema de Gödel) *Seja ∂ um sistema formal adequado, recursivamente axiomatizável e com uma linguagem que inclui $\mathbb{L}_a$, então existe uma fórmula H em ∂, que é verdadeira e tal que se ∂ é consistente, então $\nvdash H$ e $\nvdash \neg H$.*

Nota. A demonstração do Teorema 10.6 não pertence ao escopo deste livro. Ela pode ser encontrada em [Smith], [Smullyan].

Corolário 10.2 (primeiro teorema de Gödel) *Os sistemas $\mathbb{Q}$ e $\mathbb{PA}$ são incompletos. Isto é, existe uma fórmula H em $\mathbb{Q}$ ou $\mathbb{PA}$, que é verdadeira e tal que se $\mathbb{Q}$ ou $\mathbb{PA}$ é consistente, então $\nvdash H$ e $\nvdash \neg H$.*

Pelo primeiro teorema de Gödel, qualquer sistema formal recursivamente axiomatizável e capaz de expressar algumas verdades básicas de aritmética não pode ser, ao mesmo tempo, completo e consistente. Ou seja, sempre ocorre em um sistema formal consistente, que contém, por exemplo $\mathbb{Q}$, proposições verdadeiras que, no sistema, não possuem demonstrações delas e nem das suas negações.

Preste atenção na magnitude desse resultado:

[3] Há prova da consistência de $\mathbb{PA}$ fora do próprio sistema, como uma proposta por Gentzen, [Gentzen].

Há, na Aritmética básica e em tudo que inclui a Aritmética básica, verdades que não podem ser provadas e, também, suas negações não podem ser provadas.

Conforme o segundo teorema de Gödel, dado um sistema formal recursivamente axiomatizável, no qual podemos expressar verdades básicas da aritmética e alguns enunciados da teoria da prova, temos: se o sistema formal é consistente, então não é possível provar tal consistência nele mesmo.

Teorema 10.7 (segundo teorema de Gödel) *Seja ∂ um sistema formal adequado, recursivamente axiomatizável e com uma linguagem que inclui $\mathbb{L}_a$. Se ∂ é consistente, então não é possível provar essa consistência no próprio sistema ∂.*

Nota. A demonstração do Teorema 10.7 não pertence ao escopo deste livro. Ela pode ser encontrada em [Smith], [Smullyan].

Corolário 10.3 (segundo teorema de Gödel) *Se $\mathbb{Q}$ é consistente, então não é possível provar essa consistência no próprio sistema $\mathbb{Q}$.*

Corolário 10.4 (segundo teorema de Gödel) *Se $\mathbb{PA}$ é consistente, então não é possível provar essa consistência no próprio sistema $\mathbb{PA}$.*

Novamente, preste atenção na magnitude desse resultado.

O sistema formal $\mathbb{PA}$, uma Aritmética básica, se for consistente, então não é possível provar tal fato no contexto de $\mathbb{PA}$.

Isto é, se $\mathbb{PA}$ é consistente, então, utilizando o aparato de prova de $\mathbb{PA}$, não é possível provar sua consistência. Ainda, em outras palavras, olhando apenas para si numa autorreferência, $\mathbb{PA}$ não prova sua consistência, dado que seja consistente. Tudo isso mostra como a autorreferência pode ser complexa.

Terminamos o livro enunciando o teorema de Tarski:

Definição 10.16 (sistema formal bom) *Um sistema formal ∂ é denominado bom, se é consistente, recursivamente axiomatizável e é uma extensão de $\mathbb{Q}$.*

Teorema 10.8 (teorema de Tarski) *Se ∂ é um bom sistema formal, então não é possível definir a propriedade "verdade" no próprio sistema ∂.*

Mas, o que é a propriedade "verdade"? É uma propriedade que, se aplicada às fórmulas verdadeiras da linguagem da Aritmética, tem como resultado a verdade.

Nota. A demonstração do Teorema 10.8 não pertence ao escopo deste livro. Ela pode ser encontrada em [Smith], [Smullyan].

Outro resultado espetacular:

Em um bom sistema formal, não é possível definir uma propriedade que caracteriza, que expressa e identifica as fórmulas verdadeiras.

Isso nos mostra como pode ser complicado definir a verdade. Da próxima vez que você falar sobre coisas que pensa serem verdadeiras, tenha cuidado, pois pode não ser tão simples definir, no nosso próprio sistema, o conceito de verdade.

10.6 Exercícios

1. Demonstre que a regra de inferência *generalização* preserva a validade das fórmulas.

2. Demonstre que:

   (a) $\vdash (\neg(\forall x)A \vee false) \rightarrow \neg(\forall x)A$.

   (b) $\vdash (\forall x)A \rightarrow A$.

   (c) $\vdash (\forall x)(A \rightarrow A)$.

   (d) $\{A, (\forall x)A \rightarrow B\} \vdash (\forall x)B$.

   (e) $\vdash (\forall x)(\forall y)(\forall z)A \rightarrow (\forall z)(\forall y)(\forall x)A$.

   (f) $\vdash (\forall x)(A \rightarrow B) \rightarrow ((\exists x)A \rightarrow (\exists x)B)$.
   Obs. Utilize que $\vdash (A \rightarrow B) \rightarrow (\neg B \rightarrow \neg A)$.

   (g) $\vdash (\forall x)A \rightarrow (\exists x)A$.

   (h) $\vdash (\forall x)((A \wedge B) \rightarrow B)$

   (i) $\vdash (\forall x)(A \rightarrow (A \vee B))$

3. Comente:

   (a) Por que a regra de inferência GE utiliza apenas o quantificador universal?

   (b) Por que não é necessário definir uma regra de inferência análoga que utiliza o quantificador existencial?

4. Sejam H uma fórmula, x uma variável e t um termo, tal que $\{x \leftarrow t\}$ é uma substituição segura para H. Considere I uma interpretação sobre o domínio U. Demonstre que se $I[H\{x \leftarrow t\}] = F$ e $I[t] = s$, então $< x \leftarrow s > I[H] = F$.

5. Demonstre o teorema da correção em $\wp_r$, utilizando indução finita.

6. Defina uma interpretação sobre $\mathbb{N}$ que não é um modelo para $\mathbb{PA}$.

REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

[Ait-Kaci] H. Ait-Kaci, *Warren's Abstract Machine: A Tutorial Reconstruction,* Mit-Press, 1991.

[Amble] T. Amble, *Logic Programming and knowledge Engineering,* Addison Wesley, 1987.

[Alencar] E. Alencar Filho, *Iniciação à Lógica Matemática,* Editora Nobel, 1986.

[Andrews] P. B. Andrews, *An Introduction to Mathematical Logic and Type Theory: To Truth Through Proof,* Academic Press, 1986.

[Balaguer] M. Balaguer, *Platonism and Anti-Paltonism in Mathematics,* New York: Oxford University Press, 1998.

[Barwise] J. Barwise, *Handbook of Mathematical Logic,* North-Holland, 1977.

[Boolos] G. Boolos, J. Burgess, R. Jeffrey, *Computability and Logic,* $4^{\underline{th}}$ edn., Cambridge University 2002.

[Bratko] I. Bratko, *PROLOG, Programming for Artificial Inteligence,* $2^{\underline{a}}$ ed., Addison Wesley, 1990.

[Caravaglia] S. Caravaglia, *PROLOG, Programming Techniques and Applications,* Harper and Row Publishers, 1987.

[Casanova] M. A. Casanova, *Programando em Lógica e a linguagem PROLOG,* Edgard Blücher, 1987.

[Causey] R. L. Causey, *Logic, Sets, and Recursion,* Jones and Bartlett Publishers, 2001.

[Ceri] S. Ceri, G. Gottlob, L. Tranca, *Logic Programming and Database,* Springer Verlag, 1990.

[Chang] C. L. Chang, R. C. T. Lee, *Symbolic Logic and Mechanical Theorem Proving,* Academic Press, 1973.

[Chauí] M. Chauí, *Convite à Filosofia,* Editora Ática, 2002.

[Clocksin] W. F. Clocksin, C. S. Mellish, *Programming in PROLOG,* Springer Verlag, 1984.

[Coelho] H. Coelho, J. C. Cotta, *PROLOG by Example,* Springer Verlag, 1988.

[Cooper] S. B. Cooper, *Computability Theory,* Chapman and Hall, CRC, 2004.

[Cormen] T. H. Cormen, C. E. Leiserson, R. L. Rivest, C. Stein, *Algoritmos: Teoria e Prática,* Editora Campus, 2002.

[Costa] N. C. A. Costa, R. Cerrion, *Introdução a Lógica Elementar,* Editora da Universidade Federal do Rio Grande do Sul, 1988.

[Dalen] D. Dalen, *Logic and Structure,* Springer-Verlag, 1989.

[DeMasi-2] D. De Masi, *Criatividade e Grupos Criativos,* Editora Sextante, 2002.

[DeMasi-1] D. De Masi, *O Ócio Criativo,* Editora Sextante, 2002.

[Dedekind] R. Dedekind, H. Pogorzelski, W. Ryan, W. Snyder, *What are Numbers and What Should They do,* Springer, 1995.

[Deyi] L. Deyi, *A PROLOG Database System,* John Wiley and Sons, 1984.

[Dijkstra] E. W. Dijkstra, *A Discipline of Programming,* Prentice-Hall, 1976.

[Dybvig] R. K. Dybvig, *Scheme Programming Language. The ANSI Scheme,* Prentice-Hall, 1996.

[Enderton] H. B. Enderton, *A Mathematical Introduction to Logic,* Academic Press, 1972.

[Epstein] R. L. Epstein, *Critical Thinking,* Wadsworth Publishing Company, 1999.

[Field] H. Field, *Realism, Mathematics and Modality,* Oxford: Basil Blackwell, 1989.

[Fitting] M. Fitting, *First-Order Logic and Automated Theorem Proving,* Springer-Verlag, 1990.

[Francez] Francez, N., *Program Verification,* Addison Wesley, 1992.

[Gabbay] D. Gabbay, F. Gunthner, *Handbook of Philosophical Logic,* Kluwer Academic Publishing, 1994.

[Gentzen] G. Gentzen, *New Version of the Consistency Proof for Elementary Number Theory,* Szabo, 1969.

[Gödel] K. Gödel, *Consistency and Completness,* Collected Works, Vol. 1, New York and Oxford University Press, 1986.

[Goldstein] L. Goldstein, A. Brennan, M. Deutsch, J. Y. F. Lau, *Lógica, Conceitos-Chave em Filosofia,* Artmed, 2007.

[Haak] S. Haak, *A Filosofia da Lógica,* Editora Unesp, 1998.

[Hurley] P. J. Hurley, R. W. Burch, *A Consise Introduction to Logic,* Wadsworth, 2000.

[Kaye] R. Kaye, *Models of Peano Arithmetics,* Oxford: Clarendon Press, 1991.

[Kelly] J. Kelly, *The Essence of Logic,* Prentice Hall, 1997.

[Kowalski] R. Kowalski, *Logic for Problem Solving,* North-Holland, 1979.

[Le] T. V. Le, *PROLOG Programming,* John Wiley and Sons, 1993.

[Leary] C. C. Leary, *A Friendly Introduction to Mathematical Logic,* Prentice Hall, 2000.

[Lloyd] J. W. Lloyd, *Foundations of Logic Programming,* Springer-Verlag, 1984.

[Marker] D. Marker, *Model Theory: An Introduction,* Springer Verlag, 2002

[McDonald] C. McDonald, M. Yazdani, *PROLOG Programming: A Tutorial Introduction,* Blackwell Scientific Publications, 1990.

[Manna] Z. Manna, R. Waldinger, *The Logical Basis for Computer Programming,* Vol. 1, Addison Wesley, 1985.

[Manna] Z. Manna, R. Waldinger, *The Logical Basis for Computer Programming,* Vol. 2, Addison Wesley, 1990.

[Mendelson] E. Mendelson, *Introduction to Mathematical Logic,* Wadsworth and Brook, 1987.

[Merritt] D. Merritt, *Adventure in PROLOG,* Springer Verlag, 1990.

[Mortari] C. A. Mortari, *Introdução à Lógica,* Editora Unesp, 2001.

[Nolt] J. Nolt, D. Rohatyn, *Lógica,* Editora Makron Books do Brasil, 1988.

[Palazzo] L. A. M. Palazzo, *Introdução à Programação PROLOG,* Editora da Universidade Católica de Pelotas, EDUCAT, 1997.

[Peano] G. Peano, *The Pinciples of Arithmetics,* van Heijenoort, pp 85, 97, 1967.

[Robinson] J. A. Robinson, *A Machine-Oriented Logic Based on Resolution Principle,* Journal of the ACM, Janeiro, 1965.

[Robinson] R. M. Robinson, *An Essentially Undecidable Axiom System,* Proceedings of the International Congress of Mathematics, pp. 729, 730, 1950.

[Richards] T. Richards, *Clausal Form Logic: An Introduction to the Logic of Computer Reasoning,* Addison Wesley, 1989.

[Ruth] M. R. A. Ruth, M. D. Ryan, *Modelling an Reasoning about Systems,* Cambridge University Press, 2000.

[Saint-Dizier] P. Saint-Dizier, *An Introduction to Programming in PROLOG,* Springer Verlag, 1990.

[Salmon] W. C. Salmon, *Lógica,* Editora Prentice Hall do Brasil, 1984.

[Shoenfield] J. R. Shoenfield, *Mathematical Logic,* Addison-Wesley, 1967.

[Shoup] V. Shoup, *A Computational Introduction to Number Theory an Algebra,* Cambridge University Press, 2005.

[Silva] Silva, F. S. C., Finger, M., Melo, A. C. V., *Lógica para Computação,* Thomson Pioneira, 2006.

[Sipser] M. Sipser, *Introduction to the Theory of Computation,* PWS Publishing Co, 1997.

[Smith] P. Smith, *An Introduction to Gödel's Theorems,* Cambridge University Press, 2007.

[Smullyan] R. M. Smullyan, *Gödel Incompleteness Theorems,* Oxford University Press, 1992.

[Souza-1] J. N. de Souza, *Lógica para Ciência da Computação,* Editora Campus, 2002.

[Souza-2] J. N. de Souza, *Lógica para Ciência da Computação,* Editora Campus, 2008.

[Sterling] L. Sterling, E. Shapiro, *The Art of PROLOG: Advanced Programming Techniques,* Mit-Press, 1988.

[Velleman] D. J. Velleman, *How to Prove It, A Structured Approach,* Cambridge University Press, 1994.

[Winston] P. Winston, B. Horn, *Lisp,* 3ª ed., Addison-Wesley Publishing Co, 1989.

REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS