

5 Grafos Eulerianos e Hamiltonianos

Neste capítulo vamos abordar dois tipos importantes de grafos, os Grafos Eulerianos e os Grafos Hamiltonianos. Tais grafos receberam seus nomes em homenagem a Leonard Euler e William Rowan Hamilton, respectivamente. Veremos importantes teoremas para descobrir um grafo é euleriano, bem como dois algoritmos para encontrar ciclos eulerianos, além de um estudo de caso relacionado ao jogo de dominó. Na sequência, este capítulo traz o Teorema de Ore, que define uma condição suficiente para que um grafo seja hamiltoniano e dois estudos de caso envolvendo este tipo de grafo.

5.1 Problema do Explorador e Problema do Turista

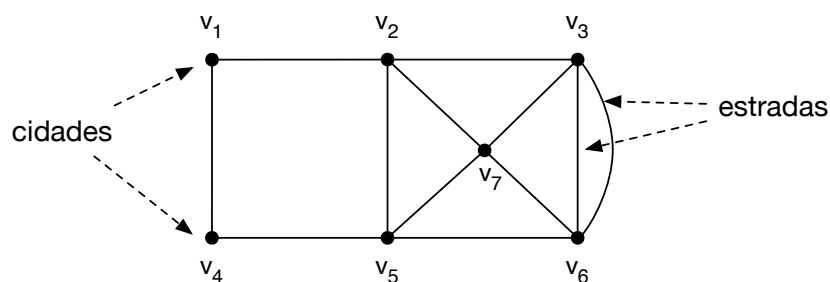
Esta seção aborda questões referentes ao caminhamento em grafos, considerando restrições em relação a arestas e vértices. Iniciamos apresentando definições intuitivas dos dois principais problemas básicos envolvendo grafos e ciclos eulerianos e hamiltonianos.

Definição 5.1 (Problema do explorador). *Um explorador quer encontrar um itinerário que passe por cada estrada exatamente uma vez e retorne ao ponto de partida.*

Definição 5.2 (Problema do turista). *Um turista quer encontrar um itinerário que visite cada cidade exatamente uma vez e retorne ao ponto de partida.*

Para ilustrar estes dois problemas, considere a [Figura 5.1](#), na qual o grafo representa um mapa, com os vértices sendo cidades, e as arestas sendo estradas ligando duas cidades. Partindo do vértice v_1 , uma solução para o problema do explorador poderia ser a seguinte sequência: $v_1, v_2, v_3, v_6, v_3, v_7, v_6, v_5, v_7, v_2, v_5, v_4, v_1$. Já para o problema do turista, uma possível solução seria: $v_1, v_2, v_3, v_6, v_7, v_5, v_4, v_1$. O problema do explorador nos leva ao estudo dos Grafos Eulerianos, enquanto o problema do turista remete aos Grafos Hamiltonianos.

Figura 5.1 – Problemas do explorador e do turista



Fonte: o autor.

5.2 Grafos e Ciclos Eulerianos

Como o próprio título desta seção indica, agora vamos tratar de questões que têm ligação com o Problema das Pontes de Königsberg, o qual foi estudado por Leonard Euler no século XVIII (seção 1.1). Naquela ocasião, Euler tentava resolver (e provar) se era ou não possível resolver o problema de passar por todas as 7 pontes de Königsberg somente uma vez, retornando ao ponto de partida. Em seu famoso artigo (EULER, 1741), Euler demonstrou que a análise e solução deste tipo de problema dependia de uma propriedade que hoje chamamos de grau de vértices de um grafo. Em relação aos graus dos vértices, Euler enunciou os seguintes teoremas:

Teorema 5.1 (Lema do aperto de mão – *Handshaking Lemma*). *Para qualquer grafo G , a soma dos graus de todos os seus vértices é igual ao dobro do número de arestas. Simbolicamente, seja G um grafo de ordem n e tamanho m , então:*

$$\sum_{i=1}^n \text{grau}(v_i) = 2m$$

Prova. *Ao somar os graus dos vértices de um grafo G , contamos duas vezes cada aresta de G , uma vez para cada um dos vértices incidentes à aresta.*

Podemos dizer que os vértices são ímpares ou pares se seus graus são ímpares ou pares. A partir disso, o Teorema 5.1 traz a seguinte consequência, enunciada no Teorema 5.2 a seguir:

Teorema 5.2. *Todo grafo G tem um número par de vértices de grau ímpar.*

Prova. *Seja G um grafo. Se G não contiver vértices ímpares então o resultado é trivial. Suponha que G tem k vértices de grau ímpar. Denotamos estes vértices por v_1, v_2, \dots, v_k . Se G também contém j vértices de grau par, nós os denotamos por u_1, u_2, \dots, u_j . Pelo teorema 5.1, temos:*

$$[\text{grau}(v_1) + \text{grau}(v_2) + \dots + \text{grau}(v_k)] + [\text{grau}(u_1) + \text{grau}(u_2) + \dots + \text{grau}(u_j)] = 2m$$

em que m é o número de arestas de G . Como cada um dos números $\text{grau}(u_1), \text{grau}(u_2), \dots, \text{grau}(u_j)$ é par, a soma $[\text{grau}(u_1) + \text{grau}(u_2) + \dots + \text{grau}(u_j)]$ também é par. Portanto, temos que:

$$[\text{grau}(v_1) + \text{grau}(v_2) + \dots + \text{grau}(v_k)] = 2m - [\text{grau}(u_1) + \text{grau}(u_2) + \dots + \text{grau}(u_j)]$$

é par.

Por outro lado, cada um dos números $\text{grau}(v_1), \text{grau}(v_2), \dots, \text{grau}(v_k)$ é ímpar. Portanto, k necessariamente é par, ou seja, G tem um número par de vértices de grau ímpar.

Assim como nos grafos não dirigidos, podemos observar um fato interessante a respeito dos graus de entrada e de saída dos vértices, enunciado no Teorema 5.3:

Teorema 5.3. *Seja $G = (V, E)$ um grafo dirigido. Então:*

$$|E| = \sum_{i=1}^n \text{grau}_e(v_i) = \sum_{i=1}^n \text{grau}_s(v_i) = m$$

Prova. *A primeira soma conta o número de arestas de entrada em todos os vértices e a segunda soma conta o número de arestas de saída em todos os vértices. Conclui-se que ambas as somas são iguais ao número de arestas do grafo.*

Estes teoremas nos dão condições de, finalmente, definirmos o que são grafos e ciclos eulerianos.

Definição 5.3 (Ciclo e Grafo Euleriano). *Um grafo conexo é **euleriano** se contiver uma trilha¹ fechada que inclua todas as suas arestas. Tal trilha é chamada de **Ciclo Euleriano**.*

Dado um determinado grafo, como podemos descobrir se ele é euleriano? Esta era a questão central do problema das Pontes de Königsberg (embora naquele tempo ainda não existisse o conceito de grafo e muito menos de grafo euleriano). Euler analisou o problema da seguinte maneira: encontrar uma rota passando apenas uma vez em cada uma das pontes só é possível quando, ao atravessar uma ponte para chegar a uma parte da cidade, você deve ser capaz de deixar esta parte da cidade atravessando uma outra ponte. Tal condição leva à questão de graus de vértices, induzindo à definição de uma regra que nos indique quando um determinado grafo é euleriano, a qual conduz ao seguinte teorema:

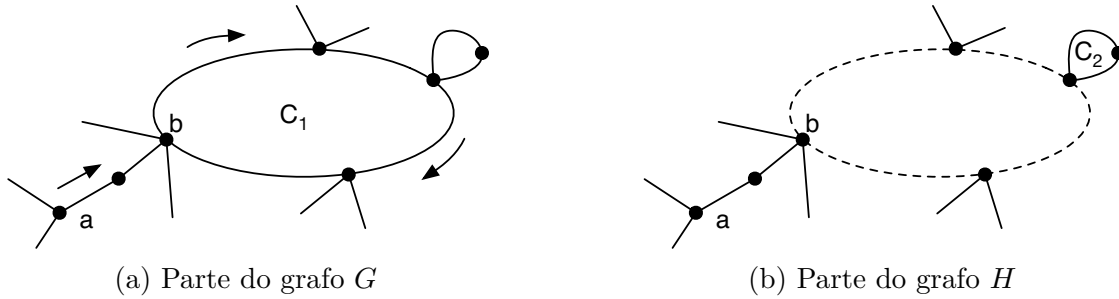
Teorema 5.4 (Ciclos Disjuntos). *Seja G um grafo no qual todos os seus vértices possuem grau par. Então G pode ser separado em ciclos disjuntos, ou seja, ciclos que não possuem arestas em comum.*

Aldous, Best e Wilson (2003) apresentam a seguinte prova para este teorema: seja $G = (V, E)$ um grafo conexo no qual todos os vértices têm grau par. Obtemos o primeiro ciclo disjunto partindo de um vértice arbitrário a e atravessando arestas de forma arbitrária, mas sem repetir arestas. Como todos os vértices têm grau par, sempre podemos chegar em um vértice por uma aresta e depois sair deste vértice por uma outra aresta. Como existe um número finito de vértices, eventualmente retornaremos a um vértice b já visitado anteriormente, formando o ciclo C_1 mostrado na Figura 5.2a.

Se removermos de G as arestas do ciclo C_1 , obtemos o grafo H , possivelmente não-conexo, mas com todos os vértices de grau par. Se H ainda tiver alguma aresta,

¹ Uma trilha é um percurso no qual todas as arestas, mas não necessariamente todos os vértices, são diferentes.

Figura 5.2 – Prova do teorema de ciclos disjuntos



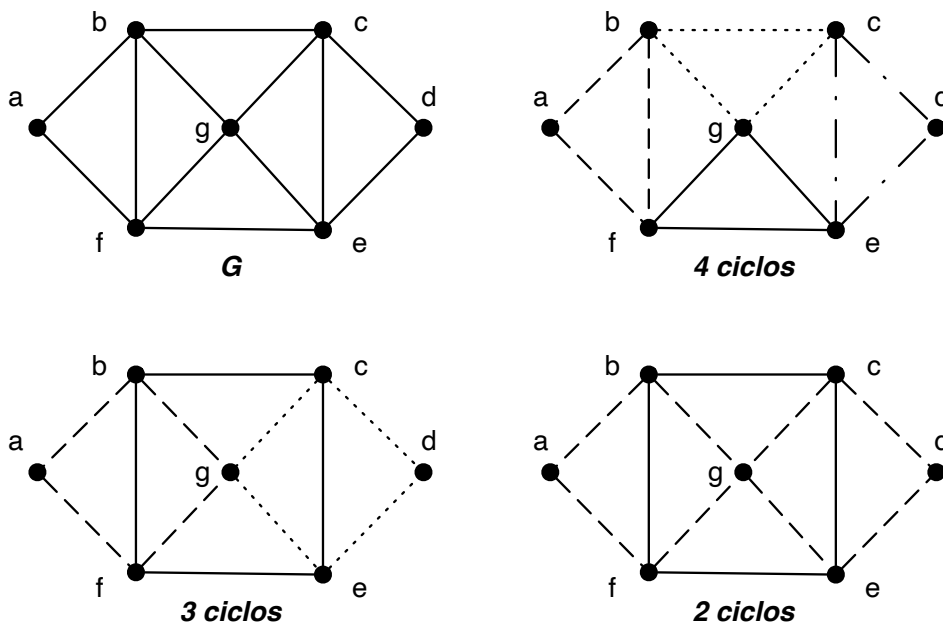
Fonte: o autor.

podemos repetir o procedimento anterior para encontrar o ciclo C_2 no grafo H , mostrado na [Figura 5.2b](#), que não tem arestas em comum com o ciclo C_1 .

A remoção das arestas de C_2 leva à obtenção de mais um novo grafo com todos os vértices de grau par, no qual podemos obter um novo ciclo C_3 . Continuamos este processo até que não haja mais arestas disponíveis e tenhamos obtido os ciclos C_1, C_2, \dots, C_k que, juntos, incluem todas as arestas de G , sem haver dois ciclos com arestas em comum.

Exemplo 5.1. Todos os vértices do grafo da [Figura 5.3](#) possuem grau par. Podemos mostrar graficamente que ele pode ser decomposto em 4, 3 e 2 ciclos disjuntos de arestas. Para facilitar a visualização, cada ciclo está representado por um tipo diferente de linha.

Figura 5.3 – Ciclos disjuntos de arestas



Fonte: o autor.

A partir dos conceitos apresentados, podemos enunciar o teorema de Euler que estabelece as condições para que um grafo seja euleriano.

Teorema 5.5 (Grafo Euleriano). *Um grafo conexo é Euleriano se e somente se todos os seus vértices tiverem grau par².*

Combinando os teoremas anteriores, podemos obter o seguinte teorema, que é a base para a implementação de um algoritmo para encontrar ciclos eulerianos em grafos.

Teorema 5.6 (Ciclos Eulerianos). *Um grafo euleriano pode ser decomposto em ciclos, de forma que nenhum par de ciclos tenha alguma aresta em comum.*

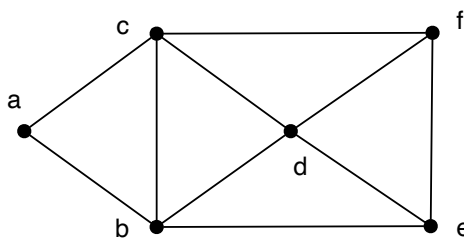
Antes de seguirmos para os algoritmos de determinação de ciclos eulerianos, vejamos o conceito de grafos semi-eulerianos.

Teorema 5.7 (Grafo Semi-euleriano). *Um grafo conexo é semi-euleriano se e somente se exatamente dois de seus vértices tiverem grau ímpar.*

Definição 5.4 (Caminho Semi-euleriano). *Um caminho semi-euleriano é uma trilha aberta que inclui todas as arestas do grafo.*

Exemplo 5.2. *O grafo da Figura 5.4 é semi-euleriano: é conexo e todos os seus vértices possuem grau par, exceto pelos vértices e e f , que possuem grau 3. A trilha $e, b, a, c, b, d, e, c, f, d, c, f$ é uma trilha euleriana (ou caminho euleriano) neste grafo.*

Figura 5.4 – Grafo semi-euleriano



Fonte: o autor.

5.2.1 Algoritmo de Fleury

Em 1883, o matemático francês Pierre-Henry Fleury publicou um artigo no qual descrevia um procedimento extremamente intuitivo, embora ineficiente, para encontrar ciclos eulerianos e semi-eulerianos (FLEURY, 1883). O procedimento consiste em encontrar um percurso atravessando arestas indistintamente e removendo as arestas já atravessadas.

² A prova deste teorema pode ser vista em Ore e Wilson (1990).

A única restrição é que só se deve atravessar uma aresta do tipo “ponte” (veja a [seção 4.2](#)) somente quando não houver outra aresta disponível para ser atravessada. [Rabuske \(1992\)](#) apresenta o algoritmo da seguinte forma:

Escolha um vértice inicial arbitrário s e atravesse as arestas arbitrariamente de acordo com as seguintes regras:

- **Regra 1:** remova a aresta que foi percorrida, e se algum vértice ficar isolado, remova-o também;
- **Regra 2:** em cada passo, atravesse uma aresta do tipo ponte somente se não houver outra aresta disponível (excluindo-se o caso de resultar em um vértice isolado).

Embora seja de fácil entendimento, este algoritmo é ineficiente. Leva-se tempo $O(|V| + |E|)$ para determinar se uma aresta é ponte. Como este procedimento precisa ser feito no mínimo $|E|$ vezes, o algoritmo de Fleury acaba tendo complexidade $O(|E|^2)$. A seguir, veremos o algoritmo de Hierholzer que resolve o problema em tempo linear.

5.2.2 Algoritmo de Hierholzer

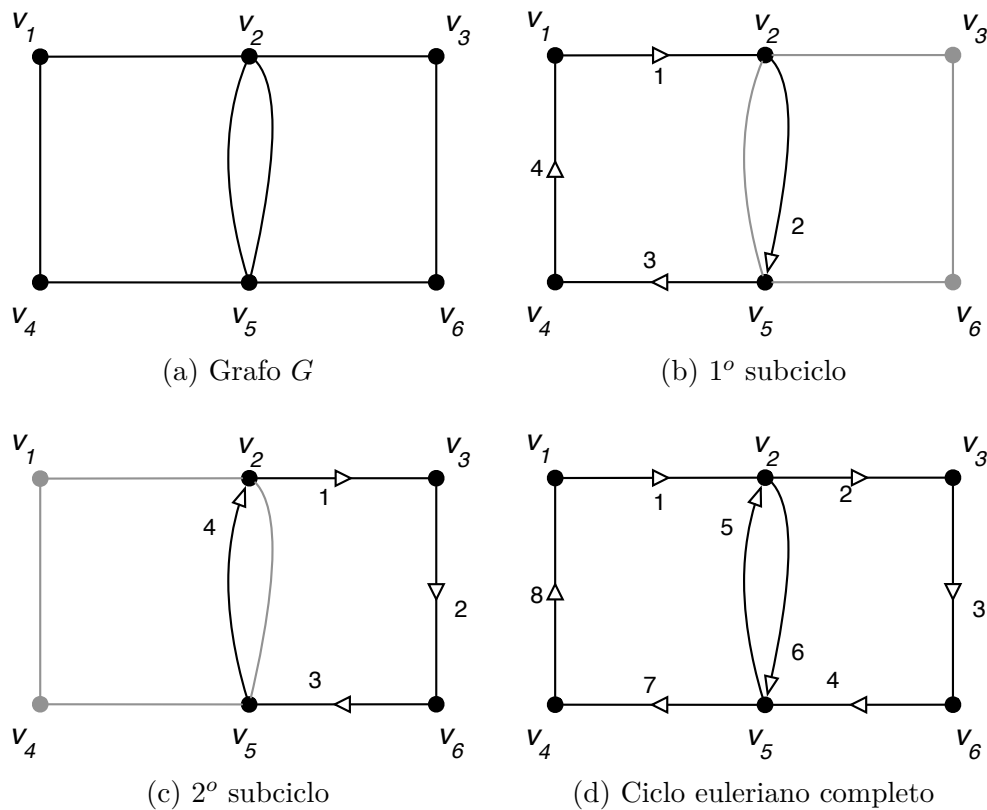
O algoritmo, a seguir, é inspirado no artigo de [Hierholzer e Wiener \(1873\)](#). Dado um grafo G euleriano, sabemos que é possível decompô-lo em ciclos disjuntos, os quais aqui chamaremos de *subciclos eulerianos*. O procedimento escolhe um vértice inicial arbitrário e vai percorrendo arestas até que retorne ao vértice inicial formando um subciclo euleriano. Como o grafo é euleriano, este procedimento obrigatoriamente fará com que se retorne ao vértice inicial. Havendo arestas não visitadas incidentes a este vértice inicial, determina-se um novo subciclo euleriano partindo-se de uma dessas arestas. Ao retornar ao vértice inicial, os dois subciclos são unidos formando um subciclo euleriano resultante. O procedimento é repetido vértice a vértice até que haja somente um único ciclo, que então configura um ciclo euleriano no grafo G .

Em resumo, dado um grafo euleriano G , o procedimento pode ser descrito da seguinte maneira:

1. Escolha um vértice inicial arbitrário u . Encontre um subciclo euleriano SC iniciando em u ;
2. Se algum vértice v em SC tiver arestas que não aparecem em SC , encontre um outro subciclo euleriano SC' que use duas dessas arestas;
3. Combine SC e SC' para formar um subciclo único SC^* ;
4. Repita os passos 2 e 3 até que todas as arestas de G tenham sido utilizadas;
5. Tendo utilizado todas as arestas do grafo, o “subciclo” euleriano SC^* é um ciclo euleriano em G .

Exemplo 5.3. A [Figura 5.5](#) ilustra o procedimento de formação de ciclo euleriano a partir de subciclos eulerianos disjuntos. O grafo da [Figura 5.5a](#) é euleriano, pois é conexo e todos os seus vértices têm grau par. Iniciando arbitrariamente do vértice v_1 , podemos formar o primeiro subciclo euleriano destacado na [Figura 5.5b](#). Os números próximos às arestas mostram a ordem de percorrimento. Após completar este primeiro subciclo, restam arestas não utilizadas nos vértices v_2 e v_5 . Tomando-se, por exemplo, o vértice v_2 para iniciar um novo subciclo, temos o resultado mostrado na [Figura 5.5c](#). Por fim, unindo-se os dois subciclos no vértice v_2 , encontra-se o “subciclo” mostrado na [Figura 5.5d](#). Como este subciclo utiliza todas as arestas do grafo G , trata-se de um ciclo euleriano em G .

Figura 5.5 – Formação de ciclos disjuntos



Fonte: o autor.

Dado um grafo G euleriano, [Kocay e Kreher \(2004\)](#) apresentam o pseudo código do [algoritmo 5.1](#) que implementa o procedimento de Hierholzer para determinação de ciclos eulerianos. Os subciclos eulerianos são armazenados em listas duplamente encadeadas de arestas. Quando o algoritmo começa a construir um subciclo a partir do vértice u , ele precisa conhecer uma aresta incidente a u pertencente ao ciclo euleriano, se existir algum. Ela é armazenada no atributo $EulerEdge[u]$, que permite que o algoritmo insira um novo subciclo euleriano no ciclo existente, na posição correta na lista duplamente encadeada de arestas.

Os elementos do pseudocódigo são os seguintes:

- V_{visit} : é uma coleção de vértices já visitados, ou seja, vértices nos quais já se iniciou a construção de subciclos eulerianos, caso seja possível;
- s : vértice inicial arbitrário;
- nV_{visit} : quantidade atual de vértices na coleção V_{visit} ;
- k : contador para manter controle da quantidade de vértices visitados (e encerrados);
- I_v : lista de arestas incidentes ao vértice v ;
- e_0, e_1, e_2, e_3 : referências temporárias para arestas;
- $prevEdge\langle e \rangle$: aresta anterior à aresta e na lista duplamente encadeada de arestas;
- $nextEdge\langle e \rangle$: aresta posterior à aresta e na lista duplamente encadeada de aresta;
- $EulerEdge\langle v \rangle$: “aresta de Euler” do vértice v , contém referência para uma aresta incidente a v , pertencente a um subciclo euleriano já construído.

O [algoritmo 5.1](#) é bastante eficiente. Para cada vértice v , todas as suas arestas incidentes são consideradas, e cada uma delas é ligada ao ciclo euleriano. Isto requer uma quantidade de passos igual ao grau de v ($grau(v)$). Vários subciclos em V podem ser conectados ao ciclo euleriano sendo construído. Existem, no máximo, $grau(v)/2$ subciclos em v .

Com isso, a complexidade do algoritmo é dada por:

$$\sum_{v \in G} grau(v) = 2|E| = O(E)$$

Portanto, o algoritmo de Hierholzer tem complexidade linear na quantidade de arestas do grafo.

Algoritmo: CicloEuleriano_Hierholzer(G)

```

// inicialização
 $V_{visit}[1] \leftarrow s$ ;
 $nV_{visit} \leftarrow 1$ ;
 $k \leftarrow 1$ ;
enquanto  $k \leq nV_{visit}$  faça
     $u \leftarrow V_{visit}[k]$ ;
    enquanto  $I_u \neq null$  faça
         $e_0 \leftarrow I_u[1]$  ; // recebe a primeira aresta incidente a  $u$ 
         $v \leftarrow$  o outro vértice da aresta  $e_0$ ;
        Remova a aresta  $e_0$  do grafo;
         $e_1 \leftarrow e_0$ ;
        enquanto  $v \neq u$  faça
            se  $v \notin V_{visit}$  então
                 $nV_{visit} \leftarrow nV_{visit} + 1$ ;
                 $V_{visit}[nV_{visit}] \leftarrow v$ ;
             $e_2 \leftarrow I_v[1]$  ; // recebe a primeira aresta incidente a  $v$ 
             $nextEdge\langle e_1 \rangle \leftarrow e_2$ ;
             $prevEdge\langle e_2 \rangle \leftarrow e_1$ ;
            se  $EulerEdge[v] = null$  então
                 $EulerEdge[v] \leftarrow e_2$ ;
             $e_1 \leftarrow e_2$ ;
             $v \leftarrow$  o outro vértice da aresta  $e_1$ ;
            Remova a aresta  $e_1$  do grafo;
        // um subciclo em  $u$  acabou de ser completado
         $prevEdge\langle e_0 \rangle \leftarrow e_1$ ;
         $nextEdge\langle e_1 \rangle \leftarrow e_0$ ;
        se  $EulerEdge[u] = null$  então
             $EulerEdge[u] \leftarrow e_0$ ;
        senão
            // insere um novo subciclo no subciclo preexistente em  $u$ 
             $e_1 \leftarrow EulerEdge[u]$ ;
             $e_2 \leftarrow prevEdge\langle e_1 \rangle$ ;
             $e_3 \leftarrow prevEdge\langle e_0 \rangle$ ;
             $nextEdge\langle e_2 \rangle \leftarrow e_0$ ;
             $nextEdge\langle e_3 \rangle \leftarrow e_1$ ;
     $k \leftarrow k + 1$ ;

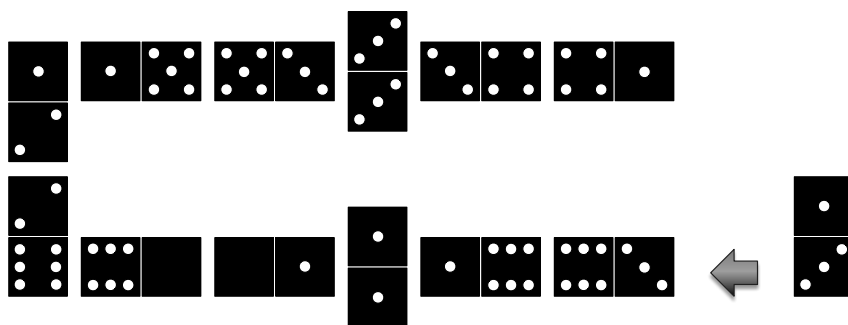
```

Algoritmo 5.1: CicloEuleriano_Hierholzer(G)

5.2.3 Estudo de caso: dominó

O dominó é um jogo de mesa formado por 28 peças (ou “pedras”, como dizem alguns de seus jogadores). As pedras são retangulares, divididas ao meio. Cada metade tem uma marcação indicando um valor de 0 a 6. Uma regra básica do jogo é que as pedras só podem ser “conectadas” por extremidades de mesmo valor. A Figura 5.6 mostra algumas pedras de dominó, como tipicamente estariam posicionadas sobre a mesa de jogo. Aqui há um fato curioso: se um jogador colocar a pedra “0 e 3” na mesa, ligada ao resto do jogo pela extremidade 3, o jogo fica “trancado”. Isto é, fica impossível continuar o jogo porque as duas extremidades tem valor 1, e não há mais nenhuma peça com valor 1 fora da mesa (nas mãos de algum jogador). Além disso, neste caso fecha-se um ciclo de pedras na mesa, conectando-se as duas extremidades de valor 1.

Figura 5.6 – Exemplo de jogo de dominó



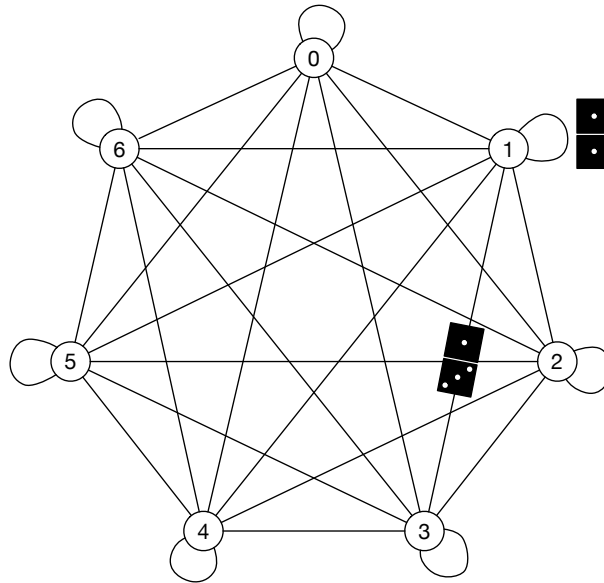
Fonte: o autor.

O jogo de dominó nos traz um problema interessante: *é possível construir um ciclo no jogo de dominó utilizando todas as 28 pedras?* Obviamente, poderíamos obter um conjunto de pedras de dominó e, fisicamente, tentar encontrar uma configuração que provasse a possibilidade de construir tal ciclo, caso isso seja possível. Note que, se não for possível, teríamos que provar essa impossibilidade, o que pode ser difícil usando o método de tentativa e erro com pedras físicas.

Uma alternativa para resolver nosso problema poderia ser por meio da modelagem do problema como um grafo. A partir daí, poderíamos demonstrar a existência (ou ausência) de determinada propriedade, o que levaria à resposta do problema. Ao modelar o problema, precisamos determinar quais seriam nossos conjuntos de vértices e arestas, para então construir e analisar o grafo resultante. em geral, temos diferentes opções de modelagem, algumas facilitando a obtenção de respostas, outras, dificultando. É comum pensarmos nos vértices como objetos físicos, por exemplo, as pedras do jogo. Neste caso, as arestas poderiam representar a ligação de duas pedras na mesa. Note que essa modelagem não nos ajuda muito, pois ela é, praticamente, equivalente ao processo de tentativa e erro com pedras físicas.

Uma outra possibilidade de modelagem poderia ser considerar os vértices como valores nas extremidades das pedras e considerar as arestas ligando dois valores se eles estiverem presentes na mesma pedra. Ou seja, as pedras são representadas por arestas, e não por vértices. Assim, temos que $G = (V, E)$, $V = \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ e $E = \{(u, v) | (u, v) \text{ é um par não ordenado de valores existentes em uma pedra do jogo}\}$. A Figura 5.7 mostra a representação gráfica deste grafo. Cada um dos vértices é adjacente aos demais por arestas que representam as pedras do jogo com extremidades diferentes, e a si próprio por laços representando as pedras com dois valores iguais. Como exemplos, temos, respectivamente, as arestas $(1, 3)$ e $(1, 1)$.

Figura 5.7 – Grafo do jogo de dominó

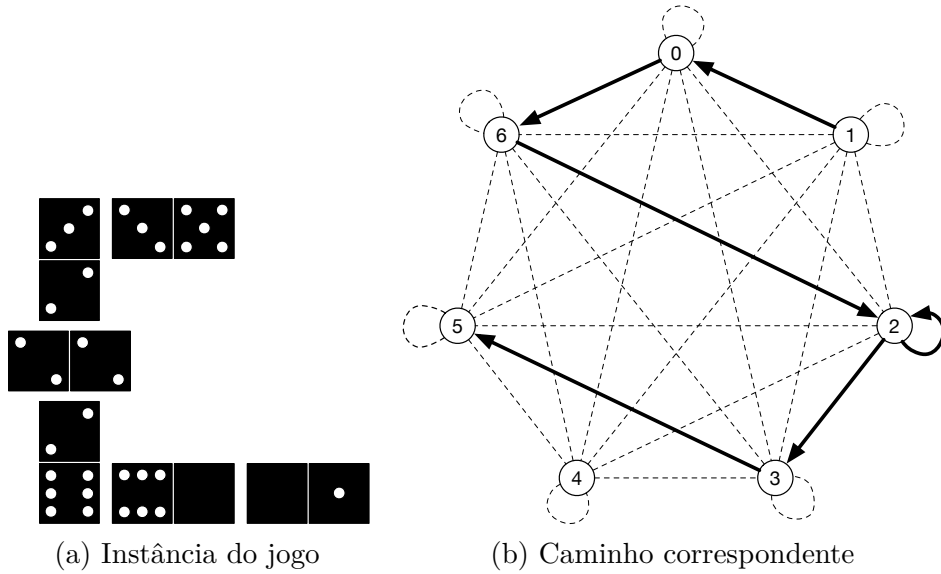


Fonte: o autor.

Para verificar a possibilidade de formar um ciclo no jogo com as 28 pedras, devemos considerar que as pedras devem ser colocadas na mesa conectando suas extremidades de valor igual. Ao analisarmos uma instância do jogo, como a mostrada na Figura 5.8a, percebemos que o jogo é uma sequência de pedras na qual o valor final de uma pedra é igual ao valor inicial da próxima pedra na mesa. Isso corresponde a uma sequência de vértices e arestas no grafo, em que o vértice final de uma aresta na sequência é igual ao vértice inicial da próxima aresta na sequência. Este é o próprio conceito de caminho em um grafo. Portanto, uma instância do jogo pode ser representada por um caminho no grafo conforme mostrado na Figura 5.8b.

Sendo assim, se pudermos encontrar um caminho fechado (para fechar o ciclo no jogo), que passe por todas as arestas do grafo somente uma vez (não existem pedras repetidas, logo não se pode passar mais de uma vez em uma aresta), então conseguiremos provar que é possível construir um ciclo fechado no jogo utilizando todas as 28 pedras. Em

Figura 5.8 – Modelagem de instância do jogo de dominó



Fonte: o autor.

outras palavras, basta verificarmos a propriedade do grafo ser euleriano. Isso é facilmente constatado na [Figura 5.7](#), pois o grafo é conexo e todos os seus vértices têm grau par (grau 8), demonstrando que é possível construir o ciclo no jogo. Caso se queira obter explicitamente uma instância do jogo fechado com todas as 28 pedras, basta executar o [algoritmo 5.1](#) para obter um ciclo euleriano no grafo da [Figura 5.7](#).

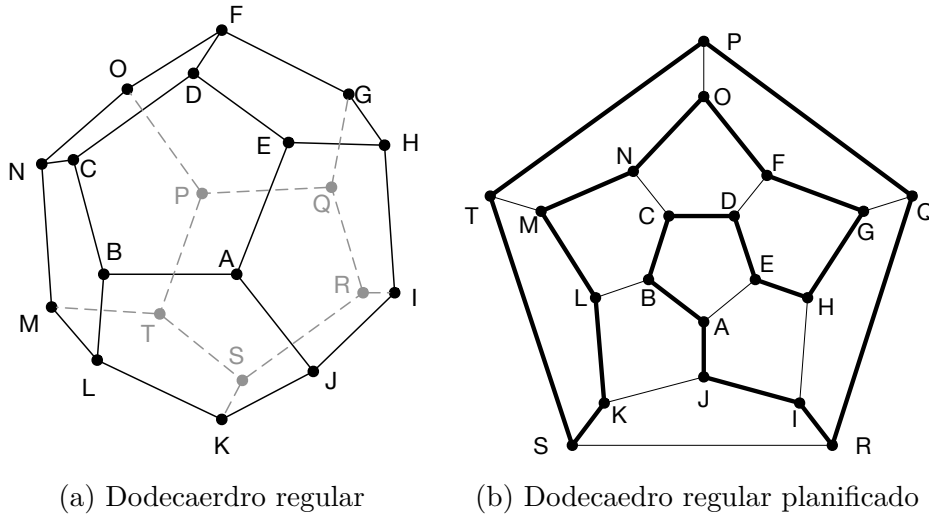
5.3 Grafos e Ciclos Hamiltonianos

Os Grafos e Ciclos Hamiltonianos receberam este nome em homenagem ao matemático e astrônomo irlandês William Rowan Hamilton. Em 1857 ele inventou um jogo, chamado de “Jogo Icosiano” que consistia em encontrar o que hoje chamamos de ciclo hamiltoniano em um dodecaedro regular. Tratava-se de um dodecaedro de madeira que tinha buracos em seus vértices. O jogador deveria inserir pinos ligados com barbantes para encontrar um caminho fechado que passasse apenas uma vez em cada um dos vértices.

Definição 5.5 (Ciclo e Grafo Hamiltoniano). *Um grafo conexo é **hamiltoniano** se contiver um ciclo que inclua cada um de sus vértices apenas uma vez. Tal ciclo é chamada de **Ciclo Hamiltoniano**.*

A [Figura 5.9a](#) mostra um dodecaedro regular com seus vértices rotulados de A a T , enquanto a [Figura 5.9b](#) traz uma possível solução para o jogo icosiano, mostrada numa planificação do mesmo dodecaedro regular. Neste caso, a solução seria a seguinte sequência de vértices: $A, B, C, D, E, H, G, F, O, N, M, L, K, S, T, P, Q, R, I, J, A$. Tal sequência é um ciclo hamiltoniano no grafo.

Figura 5.9 – O jogo icosiano



Fonte: o autor.

O problema de determinar se um grafo é hamiltoniano pode parecer, à primeira vista, similar ao problema de decidir se um determinado grafo é euleriano. A princípio esperamos que haja alguma propriedade que nos dê de forma direta esta resposta tal qual àquelas que levaram à formulação dos teoremas para ciclos eulerianos. Entretanto, no caso de grafos hamiltonianos não há uma resposta fácil e direta.

Uma primeira abordagem para determinar se um grafo é hamiltoniano consiste em tentar classificá-lo em alguma categoria especial de grafo. Por exemplo, sabemos que o grafo completo K_5 é hamiltoniano, pois, havendo arestas entre todos os pares de vértices, sabemos que ao chegar em determinado vértice, sempre podemos ir diretamente a um outro vértice ainda não visitado, até completar o ciclo hamiltoniano.

Além disso, ao adicionarmos uma aresta a um grafo hamiltoniano, ele continua sendo hamiltoniano, pois o ciclo hamiltoniano continua existindo após a adição da aresta. Intuitivamente, isso nos traz a noção de que grafos mais densos (isto é, com mais arestas) provavelmente tem mais chance de serem hamiltonianos. Em 1960, o matemático norueguês Oysten Ore provou o seguinte teorema, relacionando graus de vértices à propriedade de um grafo ser hamiltoniano (ORE, 1960).

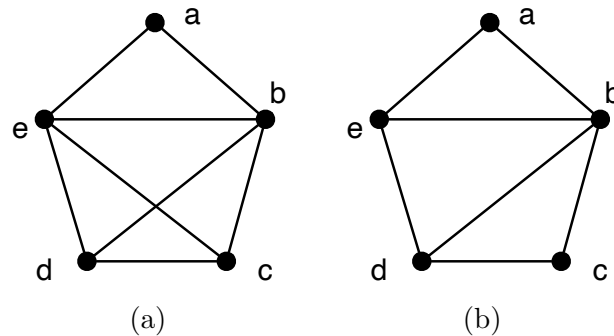
Teorema 5.8 (Teorema de Ore). *Seja G um grafo simples conexo com n vértices, em que $n \geq 3$, e $\text{grau}(u) + \text{grau}(v) \geq n$, para cada par de vértices não adjacentes u e v . Então G é hamiltoniano.*

Note que o teorema mostra uma condição suficiente, mas não necessária para que um grafo seja hamiltoniano. Isso quer dizer que, ao analisarmos um grafo à luz do teorema de Ore, pode ser que o referido grafo não atenda aos requisitos do teorema, e mesmo assim

seja hamiltoniano.

Exemplo 5.4. O grafo da [Figura 5.10a](#), tem $n = 5$ vértices e 2 pares de vértices não adjacentes. Aplicando o teorema de Ore, temos $\text{grau}(a) + \text{grau}(c) = 5 \geq n$ e $\text{grau}(a) + \text{grau}(d) = 5 \geq n$. Portanto, o grafo é hamiltoniano. No caso da [Figura 5.10b](#), o grafo não passa pelo teorema de Ore porque $\text{grau}(a) + \text{grau}(c) = 4 < n$. Por outro lado, mesmo sem cumprir os requisitos do teorema, o grafo é hamiltoniano porque podemos obter um ciclohamiltoniano: a, b, c, d, e, a .

Figura 5.10 – Aplicação do teorema de Ore



Fonte: o autor.

Note que, havendo a necessidade de utilizar o teorema de Ore em um multigrafo, basta reduzi-lo a um grafo simples removendo todos os seus laços e arestas paralelas. Se o grafo simples for hamiltoniano, o multigrafo original também o será, pois a inclusão de novas arestas não altera esta propriedade do grafo.

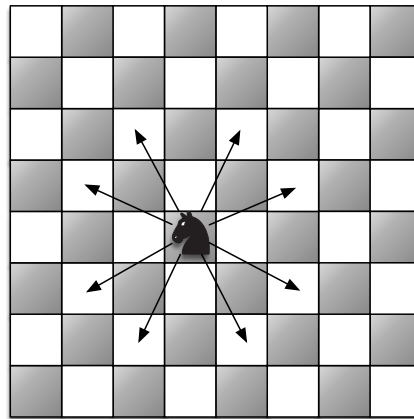
O problema de encontrar ciclos hamiltonianos pode ser simples para algumas classes especiais de grafos (grafos ciclo e grafos completos, por exemplo). Porém, no caso geral, trata-se de um problema extremamente difícil, cuja complexidade é não polinomial.

5.3.1 Estudo de caso: xadrez

O tabuleiro de xadrez é composto por uma matriz de 8×8 quadrados (ou “casas”) alternadas entre brancos e pretos. O formato de cada peça indica o tipo de movimentação permitida pela peça no tabuleiro. Por exemplo, a peça “torre” se movimenta de forma vertical e horizontal (em linhas e colunas). Já o “bispo” se movimenta em diagonal. O cavalo combina os dois tipos de movimento andando uma casa na horizontal ou vertical e mais uma na diagonal. A [Figura 5.11](#) mostra os possíveis movimentos do cavalo dentro do tabuleiro.

O “Problema do Percurso do Cavalo no Xadrez” tem sido estudado há centenas de anos, e consiste na seguinte questão: utilizando uma sequência de movimentos do cavalo, é

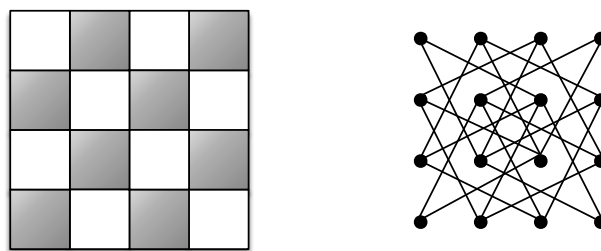
Figura 5.11 – Movimentos do cavalo no tabuleiro de xadrez



Fonte: o autor.

possível o cavalo visitar todas as casas do tabuleiro apenas uma vez, e retornando à casa na qual ele começou?

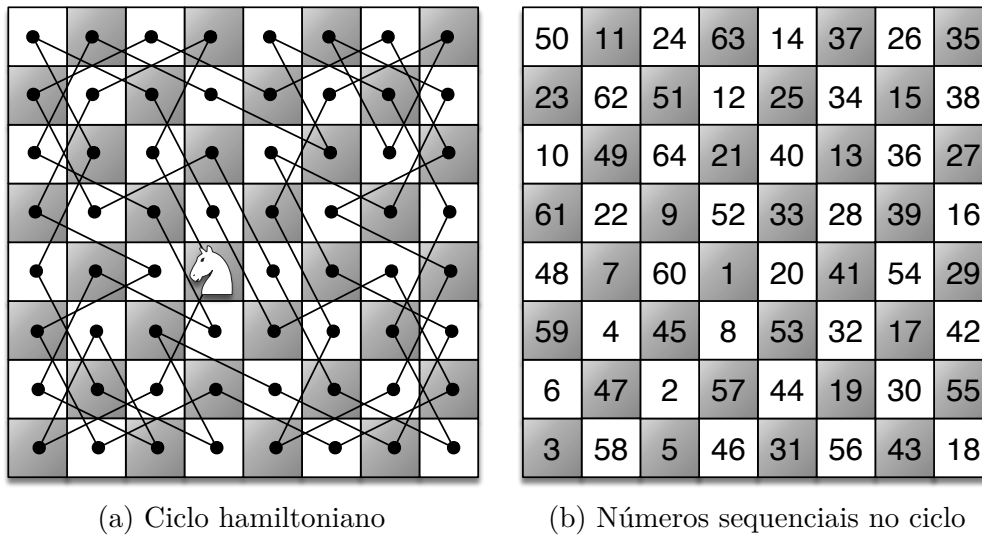
Para responder esta questão, podemos representando o tabuleiro por um grafo no qual cada vértice corresponde a uma casa do tabuleiro. Dois vértices são conectados por uma aresta caso seja possível o cavalo se movimentar diretamente entre as duas casas correspondentes. A [Figura 5.12](#) mostra um tabuleiro de 4×4 casas com o respectivo grafo resultante. É fácil deduzir que encontrar a solução do problema do percurso do cavalo no jogo de xadrez corresponde a encontrar um ciclo hamiltoniano no grafo.

Figura 5.12 – Modelagem do tabuleiro 4×4 

Fonte: adaptado de [Chartrand \(1977\)](#).

No caso do tabuleiro de 8×8 casas, esta modelagem nos leva a um grafo com 64 vértices e 168 arestas que, de fato, contém vários ciclos hamiltonianos. A [Figura 5.13a](#) mostra um desses ciclos hamiltonianos. Esta solução é bastante peculiar, pois se escrevermos a ordem sequencial dos movimentos obtemos o diagrama da [Figura 5.13b](#), que é um quadrado mágico. Neste quadrado, a soma dos valores de todas as casas de qualquer linha ou coluna sempre resulta no mesmo valor, que é $260!$

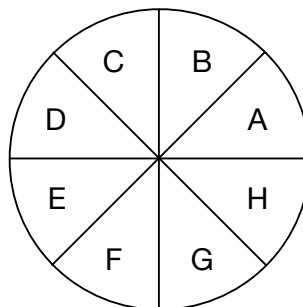
Figura 5.13 – Solução do problema do percurso do cavalo



Fonte: adaptado de [Aldous, Best e Wilson \(2003\)](#).

5.3.2 Estudo de caso: *Gray codes*

Na engenharia, as vezes é necessário representar posição angular em uma haste girando continuamente por meio de um comutador. Um arranjo de escovas no comutador permite gerar uma palavra binária única para cada setor do círculo em seus 360° . Por exemplo, se precisarmos de 8 posições, temos setores de 45° cada, e necessitamos de palavras de 3 bits para representar cada um dos 8 setores. A [Figura 5.14](#) mostra os 8 setores de 45° no círculo, com as respectivas denominações de A a H.

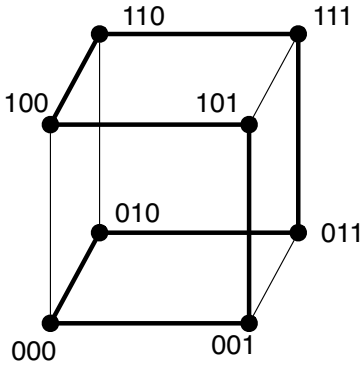
Figura 5.14 – Círculo dividido em 8 setores de 45° 

Fonte: o autor.

Para minimizar ambiguidades e erros leitura nas escovas, é conveniente que a sequência de palavras binárias mude apenas 1 dígito de um dado setor para o setor vizinho. Portanto, a conversão convencional de base numérica decimal para binária não funciona. A sequência de palavras binárias com essa propriedade é chamada de *Gray code*. Os *Gray codes* podem ser obtidos por meio de ciclos hamiltonianos em grafos cubo. Para *Gray*

codes de 3 dígitos, encontramos um ciclo hamiltoniano no grafo cubo Q_3 , mostrado na [Figura 5.15](#), que gera o *Gray code* da tabela correspondente.

Figura 5.15 – Grafo Q_3 e Gray codes de 3 bits

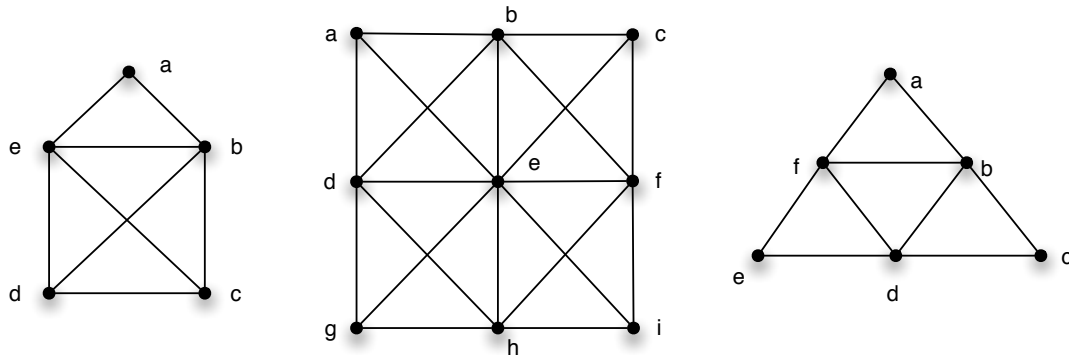


Setor	Código
A	000
B	001
C	101
D	100
E	110
F	111
G	011
H	010

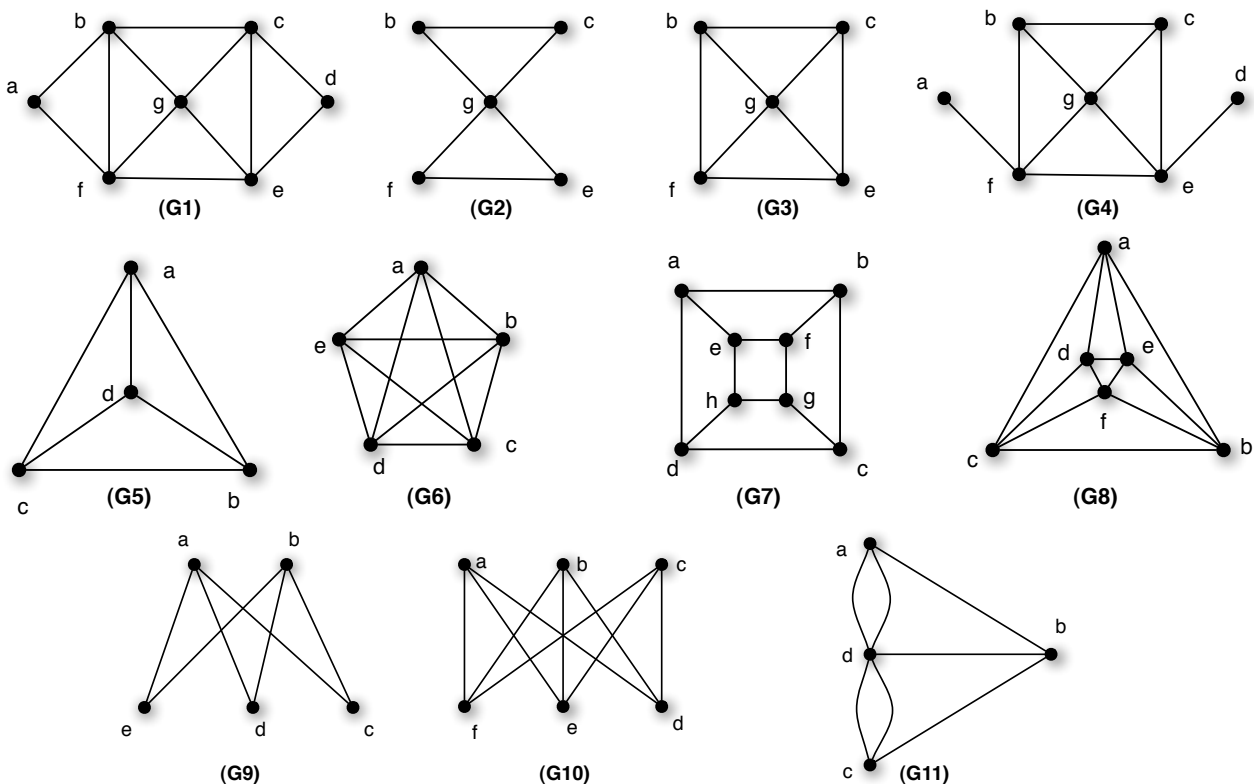
Fonte: o autor.

5.4 Exercícios

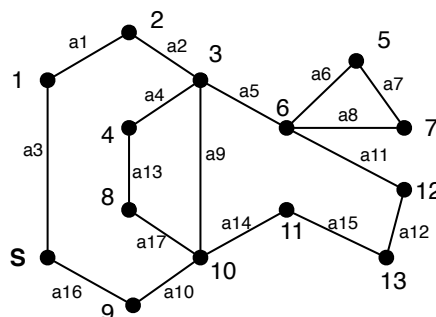
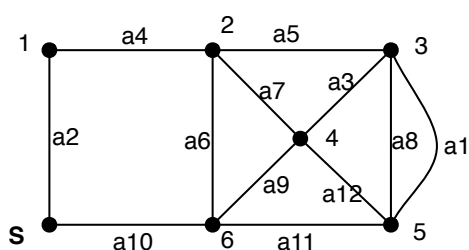
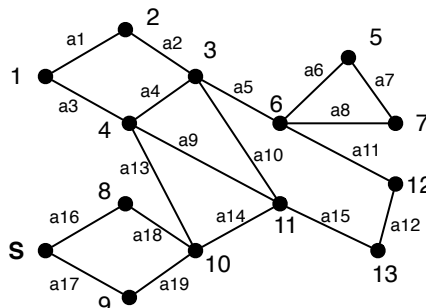
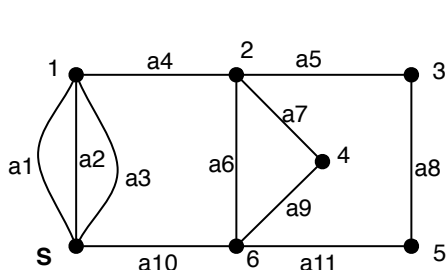
1. Verifique se os grafos abaixo são eulerianos e/ou hamiltonianos. Justifique sua resposta encontrando ciclos eulerianos e/ou hamiltonianos nos grafos.



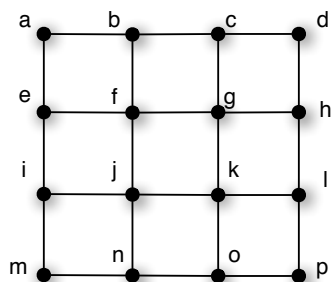
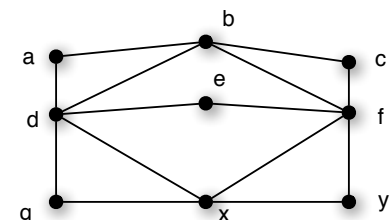
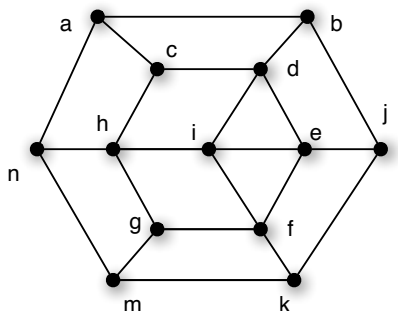
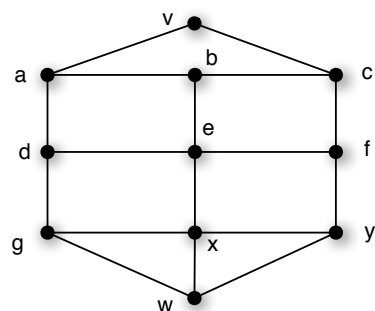
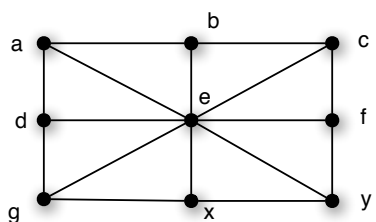
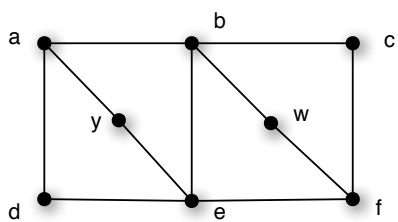
2. Para cada um dos grafos a seguir, verifique se é euleriano e/ou hamiltoniano e escreva um ciclo euleriano e um ciclo hamiltoniano quando possível. Verifique se cada um dos grafos satisfaz o Teorema de Ore.



3. Para cada um dos grafos a seguir, construa um ciclo euleriano. Inicie a construção do ciclo a partir do vértice s . Os demais vértices estão rotulados por números inteiros e as arestas por rótulos do tipo a_1, a_2 etc.

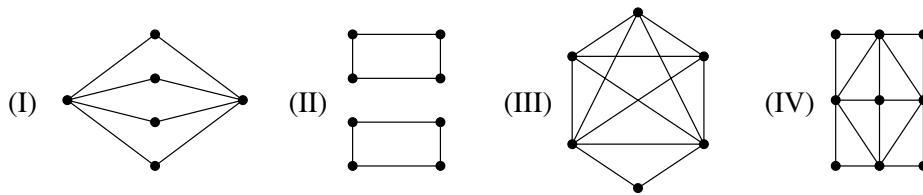


4. Para cada um dos grafos a seguir, tente determinar um ciclo hamiltoniano, ou então prove que o grafo não é hamiltoniano.



5. Prove que não é possível encontrar uma "volta do cavalo" num tabuleiro de xadrez de 3×6 casas (passar por todas as casas somente uma vez e retornar a casa inicial).

6. Para quais valores de n , r e s os grafos a seguir são eulerianos?
- o grafo completo K_n ;
 - o grafo completo bipartido $K_{r,s}$;
 - o grafo-cubo n -dimensional Q_n .
7. Para quais valores de n , r e s os grafos a seguir são hamiltonianos?
- o grafo completo K_n ;
 - o grafo completo bipartido $K_{r,s}$;
 - o grafo-cubo n -dimensional Q_n .
8. Desenhe dois grafos com 10 vértices e 13 arestas cada. O primeiro deve ser euleriano, mas não-hamiltoniano, e o segundo deve ser hamiltoniano, mas não-euleriano.
9. (PosComp – 2003) Quais dos quatro grafos abaixo são eulerianos?



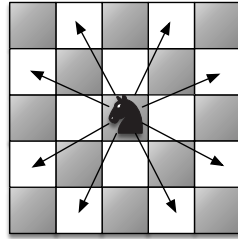
- Somente I e II
 - Somente I
 - Somente II
 - Somente I, II e IV
 - Nenhum deles é Euleriano
10. (PosComp – 2005) Dadas as seguintes afirmações:
- Qualquer grafo conexo com n vértices deve ter pelo menos $n - 1$ arestas.
 - O grafo bipartido completo $K_{m,n}$ é euleriano desde que m e n sejam ímpares.
 - Em um grafo, o número de vértices de grau ímpar é sempre par.

São verdadeiras:

- Somente a afirmação I.
- Somente as afirmações I e III.
- Somente as afirmações II e III.
- Somente as afirmações I e II.
- Todas as afirmações.

11. (PosComp – 2005) Seja $T_{n,m}$ um tabuleiro de xadrez $n \times m$. Denominamos um *circuito equestre* em $T_{n,m}$ a um percurso de um cavalo, se movendo como num jogo de xadrez, que passa por cada uma das células de $T_{n,m}$ exatamente uma vez, e que começa e termina numa mesma célula (arbitrária). O número de circuitos equestres em $T_{5,5}$ é:

Figura 5.16 – Exemplo de movimentos válidos de um cavalo.



- a) 0 b) 1 c) 5 d) 25 e) 5!
12. (PosComp – 2006) Seja $G = (V, E)$ um grafo simples conexo não-euleriano. Queremos construir um grafo H que seja euleriano e que contenha G como subgrafo. Considere os seguintes possíveis processos de construção:
- I. Acrescenta-se um novo vértice, ligando-o a cada vértice de G por uma aresta.
 - II. Acrescenta-se um novo vértice, ligando-o a cada vértice de grau ímpar de G por uma aresta.
 - III. Cria-se uma cópia G' do grafo G e acrescenta-se uma aresta ligando cada par de vértices correspondentes.
 - IV. Escolhe-se um vértice arbitrário de G e acrescentam-se arestas ligando este vértice a todo vértice de grau ímpar de G .
 - V. Duplicam-se todas as arestas de G .
 - VI. Acrescentam-se arestas a G até se formar o grafo completo com $|V|$ vértices.

Quais dos processos acima sempre constroem corretamente o grafo H ?

- a) Somente II e IV
- b) Somente II, IV e V
- c) Somente III, V e VI
- d) Somente II, IV, V e VI
- e) Somente I, III, IV e V

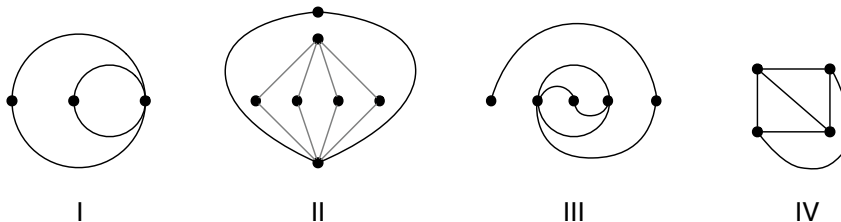
13. (PosComp – 2007) Seja $G = (V, E)$ um grafo simples e finito, em que $|V| = n$ e $|E| = m$. Nesse caso, analise as seguintes alternativas.

- I. Se G é hamiltoniano, então G é 2-conexo em vértices.
- II. Se G é completo, então G é hamiltoniano.
- III. Se G é 4-regular e conexo, então G é euleriano.
- IV. Se G é bipartido com partições A e B , então G é hamiltoniano se, e somente se, $|A| = |B|$.
- V. Se G é euleriano, então G é 2-conexo.

A análise permite concluir que são FALSOS:

- a) apenas os itens I e II.
 - b) apenas os itens I e V.
 - c) apenas os itens II e III.
 - d) apenas os itens III e IV.
 - e) apenas os itens IV e V.
14. (PosComp – 2008) Em um grafo $G(V, E)$, o grau de um vértice v é o número de vértices adjacentes a v . A esse respeito, assinale a afirmativa **CORRETA**.
- a) Num grafo, o número de vértices com grau ímpar é sempre par.
 - b) Num grafo, o número de vértices com grau par é sempre ímpar.
 - c) Num grafo, sempre existe algum vértice com grau par.
 - d) Num grafo, sempre existe algum vértice com grau ímpar.
 - e) Num grafo, o número de vértices com grau ímpar é sempre igual ao número de vértices com grau par.

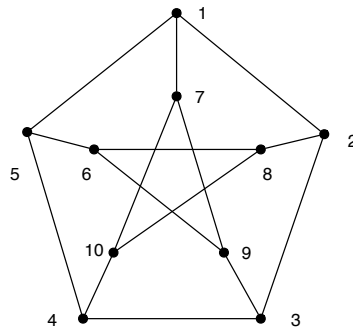
15. (PosComp – 2013) Considere as figuras representadas a seguir.



Assinale a alternativa correta.

- a) Somente os grafos I e II admitem caminho euleriano.
- b) Somente os grafos I e IV admitem caminho euleriano.
- c) Somente os grafos III e IV admitem caminho euleriano.
- d) Somente os grafos I, II e III admitem caminho euleriano.
- e) Somente os grafos II, III e IV admitem caminho euleriano.

16. (PosComp – 2011) Sejam 10 cidades conectadas por rodovias, conforme o grafo a seguir.



Um vendedor sai de uma das cidades com o intuito de visitar cada uma das outras cidades uma única vez e retornar ao seu ponto de partida. Com base no grafo e nessa informação, considere as afirmativas a seguir.

- I. O vendedor cumprirá seu propósito com êxito se sair de uma cidade par.
- II. O vendedor cumprirá seu propósito com êxito se sair de uma cidade ímpar.
- III. O vendedor não cumprirá seu propósito com êxito se sair de uma cidade par.
- IV. O vendedor não cumprirá seu propósito com êxito se sair de uma cidade ímpar.

Assinale a alternativa correta.

- a) Somente as afirmativas I e II são corretas.
- b) Somente as afirmativas I e IV são corretas.
- c) Somente as afirmativas III e IV são corretas.
- d) Somente as afirmativas I, II e III são corretas.
- e) Somente as afirmativas II, III e IV são corretas.