Integrais Indefinidas, Integrais Definidas e Técnicas de Integração

Primitivas

Dada uma função $f(x)$, queremos encontrar $F(x)$ tal que $F'(x) = f(x)$.

Definição: Uma função $F(x)$ é chamada **primitiva (ou antiderivada)** de $f(x)$ em um intervalo I quando

$$F'(x) = f(x), \text{ para todo } x \in I.$$

Por exemplo, se $f(x) = x^5$, então $F(x) = \frac{x^6}{6}$ é uma primitiva de f, pois $\left(\frac{x^6}{6}\right)' = x^5$.

Na verdade, as funções $\frac{x^6}{6} + k$, com k constante, são primitivas de x^5.

Proposição: Seja F uma primitiva da função f. Se k é uma constante qualquer, então $G(x) = F(x) + k$ também é primitiva de f.

Proposição: Se F e G são primitivas de f em um intervalo I, então existe uma constante k tal que $G(x) - F(x) = k$, para todo $x \in I$, ou seja, as primitivas de uma função diferem por uma constante.

Se $F(x)$ é uma primitiva de $f(x)$, então dizemos que $F(x) + k$ é a *família de primitivas de* f.

Integral Indefinida

Definição: O conjunto de todas as primitivas de f é chamado de **integral indefinida** de f e é indicado por

$$\int f(x)\ dx.$$

É comum escrever

$$\int f(x)\ dx = F(x) + k, \text{ sendo } F \text{ uma primitiva de } f \text{ e } k \text{ uma constante.}$$

Na notação de integral indefinida $\int f(x)\ dx$:

- $\int$ é o símbolo da integral;
- $f(x)$ é o integrando;
- dx indica a variável de integração.

Exemplos

(a) $\displaystyle\int 1\ dx = x + k$

(b) $\displaystyle\int x^3\ dx = \frac{x^4}{4} + k$

(c) $\displaystyle\int \frac{1}{\sqrt{x}}\ dx = \int x^{-1/2}\ dx = \frac{x^{1/2}}{1/2} + k = 2\sqrt{x} + k$

(d) $\displaystyle\int \cos x\, dx = \operatorname{sen} x + k$

(e) $\displaystyle\int \sec^2 x\ \ dx = tg\ x + k$

(f) $\displaystyle\int e^x\ dx = e^x + k$

Algumas Primitivas Imediatas

$(\mathbf{1})\ \int c\ dx = cx + k\ \ (c \text{ constante})$

$(\mathbf{2})\ \int x^n\ dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} + k\ \ (n \neq -1)$

$(\mathbf{3})\ \int \frac{1}{x}\ dx = \ln|x| + k$

$(\mathbf{4})\ \int e^x\ dx = e^x + k$

$(\mathbf{5})\ \int sen\ x\ dx = -\cos x + k$

$(\mathbf{6})\ \int \cos x\ \ dx = sen\ x + k$

$(\mathbf{7})\ \int tg\ x\ dx = -\ln|\cos x| + k$

$(\mathbf{8})\ \int cotg\ x\ dx = \ln|sen\ x| + k$

$(\mathbf{9})\ \int \sec x\ \ dx = \ln|\sec x + tg\ x| + k$

$(\mathbf{10})\ \int cossec\ x\ dx = \ln|cossec\ x - cotg\ x| + k$

$(\mathbf{11})\ \int \sec x\ tg\ x\ \ dx = \sec x + k$

$(\mathbf{12})\ \int cossec\ x\ cotg\ x\ dx = -cossec\ x + k$

$(\mathbf{13})\ \int \sec^2 x\ dx = tg\ x + k$

$(\mathbf{14})\ \int cossec^2 x\ dx = -cotg\ x + k$

$(\mathbf{15})\ \int \frac{1}{1+x^2}\ dx = arctg\ x + k$

$(\mathbf{16})\ \int \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\ dx = arcsen\ x + k$

$(\mathbf{17})\ \int -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}} dx = \arccos x + k$

$(\mathbf{18})\ \int a^x\ dx = \frac{a^x}{\ln a} + k\ (a > 0, a \neq 1)$

$(\mathbf{19})\ \int \frac{1}{\sqrt{a^2 - x^2}}\ dx = arcsen\left(\frac{x}{a}\right) + k$

$(\mathbf{20})\ \int \frac{1}{a^2 + x^2}\ dx = \frac{1}{a} arctg\left(\frac{x}{a}\right) + k$

$(\mathbf{21})\ \int \operatorname{senh} x\ dx = \cosh x + k$

$(\mathbf{22})\ \int \cosh x\ \ dx = \operatorname{senh} x + k$

Propriedades: Sejam $f, g\colon I \to \mathbb{R}$ e k uma constante. Então:

(1) $\displaystyle\int kf(x)\,dx = k\int f(x)\,dx$, k constante

(2) $\displaystyle\int \big(f(x) + g(x)\big)\,dx = \int f(x)\,dx + \int g(x)\,dx$

Observação

A derivada de uma integral indefinida é igual ao seu integrando, ou seja,

$$\left(\int f(x)\,dx\right)' = f(x).$$

Exercícios

(1) Calcule as integrais indefinidas:

(a) $\int (3x^2 + 4x + \sqrt{x})\, dx$

(b) $\int \frac{x^3 + 1}{x}\, dx$

(c) $\int (e^x + \sqrt[3]{x} - 2)\, dx$

(d) $\int \left(2\cos x - \frac{1}{x^2}\right) dx$

(e) $\int \frac{\sec^2 x}{\operatorname{cossec} x}\, dx$

(f) $\int \operatorname{tg}^2 x\ dx$

(g) $\int \frac{1}{\sqrt{7 - x^2}}\, dx$

(h) $\int \left(2^x - \sqrt{2}e^x + \cosh x\right) dx$

(2) Determine a função $y = y(x)$, $x > 0$ tal que

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{x} + \frac{1}{x^2} \quad \text{e} \quad y(1) = 1.$$

Técnica de Integração

Mudança de Variáveis na Integral (Substituição Simples)

Sejam f e g funções tais que $Im(g) \subset D(f)$. Suponhamos que F seja uma primitiva de f. Então, $F(g(x))$ é uma primitiva de $f\big(g(x)\big)g'(x)$, pois da Regra da Cadeia, temos que

$$\Big(F\big(g(x)\big)\Big)' = F'\big(g(x)\big)g'(x) = f\big(g(x)\big)g'(x).$$

Logo,

$$\int f\big(g(x)\big)g'(x)\,dx = F\big(g(x)\big) + k.$$

Assim, se fizermos a mudança de variável $u = g(x)$, obtemos

$$\int f\big(g(x)\big)g'(x)\,dx = F(u) + k = \int F'(u)\,du = \int f(u)\,du\,,$$

ou seja,

$$\boxed{\int f\big(g(x)\big)g'(x)\,dx = \int f(u)\,du\,.}$$

Exemplos: Calcule as seguintes integrais utilizando substituição simples:

(1) $\int (x-2)^5\, dx$

(2) $\int e^{-2x}\, dx$

(3) $\int \sqrt{3x-1}\, dx$

(4) $\int x\sqrt{x^2+1}\; dx$

(5) $\int \frac{e^x}{e^x+4}\; dx$

(6) $\int sen^2 x\, cos\, x\, dx$

(7) $\int x^2 e^{x^3}\, dx$

(8) $\int \cos(2x)\, dx$

(9) $\int \operatorname{sen}^2 x\;\; dx$

(10) $\int \cos^2 x\, dx$

(11) $\int \frac{\sqrt{x-1}}{x}\; dx$

(12) $\int \sec x\;\, dx$

Técnica de Integração

Integração por Partes

Sejam f e g funções deriváveis. Na regra de derivação do produto, temos que

$$\big(f(x)g(x)\big)' = f'(x)g(x) + f(x)g'(x).$$

Então,

$$\int \big(f(x)g(x)\big)' \, dx = \int f'(x)g(x)\, dx + \int f(x)g'(x)\, dx,$$

ou seja,

$$f(x)g(x) = \int f'(x)g(x)\, dx + \int f(x)g'(x)\, dx\,.$$

Logo,

$$\boxed{\int f(x)g'(x)\, dx = f(x)g(x) - \int g(x)f'(x)dx}$$

que é a fórmula de **integração por partes.**

Observação:

Chamando de $u = f(x)$ e $dv = g'(x)\,dx$, temos:

$$u = f(x) \qquad\qquad dv = g'(x)\,dx$$
$$du = f'(x)\,dx \qquad\qquad v = g(x)$$

Substituindo os valores acima na fórmula de integração por partes,

$$\int f(x)g'(x)\,dx = f(x)g(x) - \int g(x)f'(x)dx$$

obtemos:

$$\boxed{\int u\,dv = uv - \int v\,du\,.}$$

Esta expressão é uma maneira mais simples para representarmos a **fórmula de integração por partes.**

Exemplos: Calcule as seguintes integrais utilizando integração por partes:

(1) $\int x sen\, x\, dx$

(2) $\int \ln x \; dx$

(3) $\int t^2 e^t\, dt$

(4) $\int arctg\, x\, dx$

(5) $\int e^x sen\, x\, dx$

(6) $\int \sec^3 x \; dx$

(7) $\int x(ln\, x)^2\, dx$

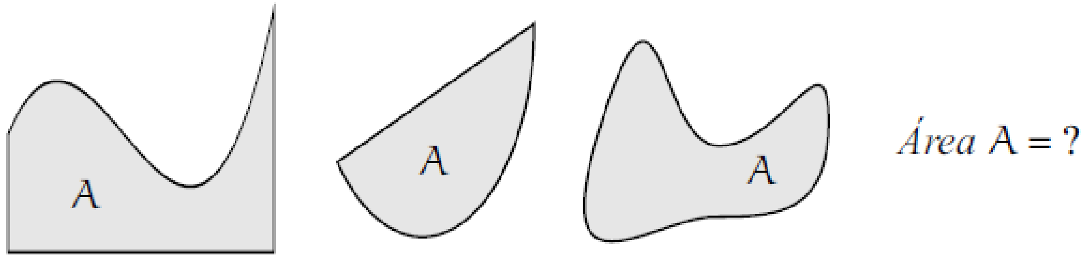
(8) $\int t^3 e^{t^2}\, dt$

(9) $\int x \ln(2x)\, dx$

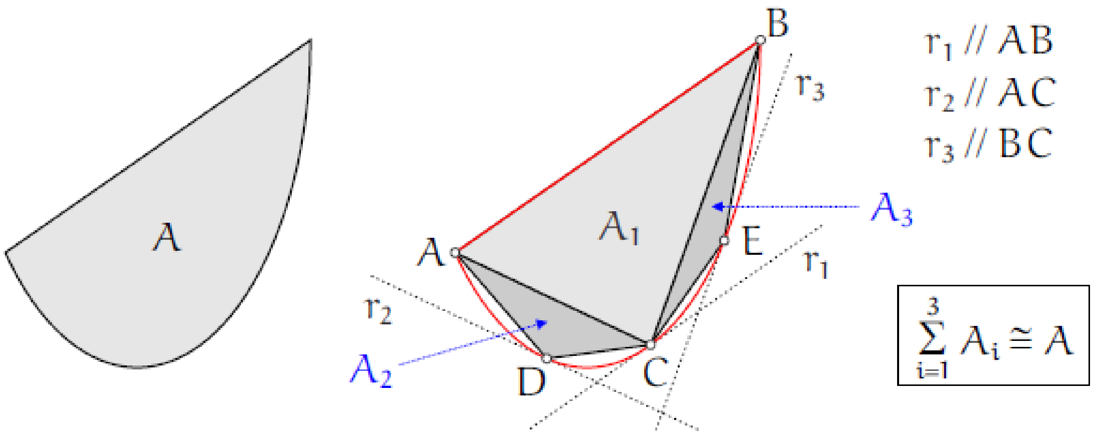
Integral Definida

A integral definida está relacionada com o *Problema das Áreas:*

Como calcular a área de figuras planas mais gerais que as elementares?

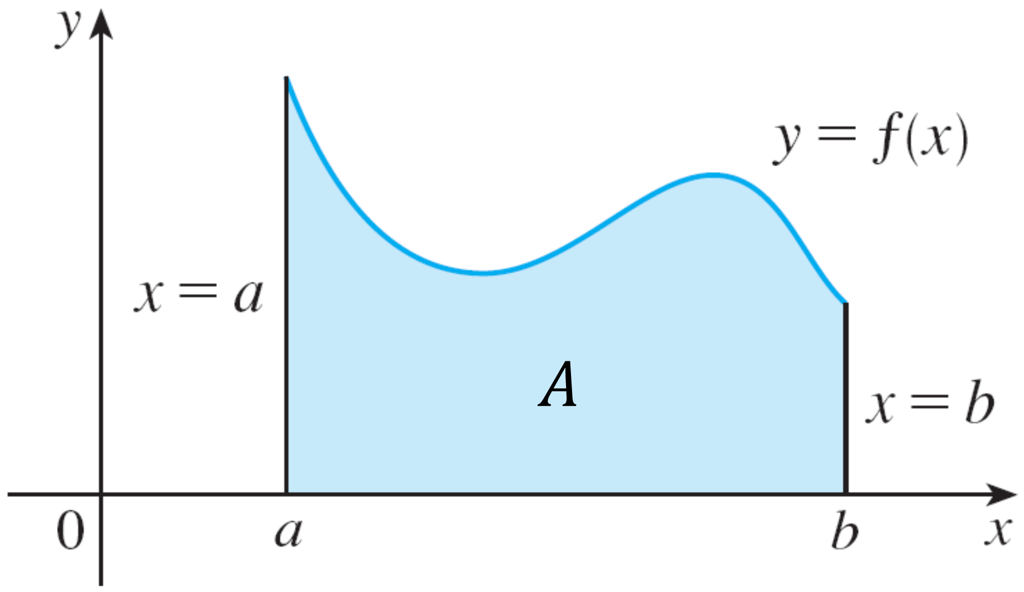


Por volta do século III a.C., Arquimedes estudou esse problema por meio do chamado "Método da Exaustão" que consiste em aproximar a área da figura em questão pela soma das áreas de figuras elementares (geralmente triângulos).

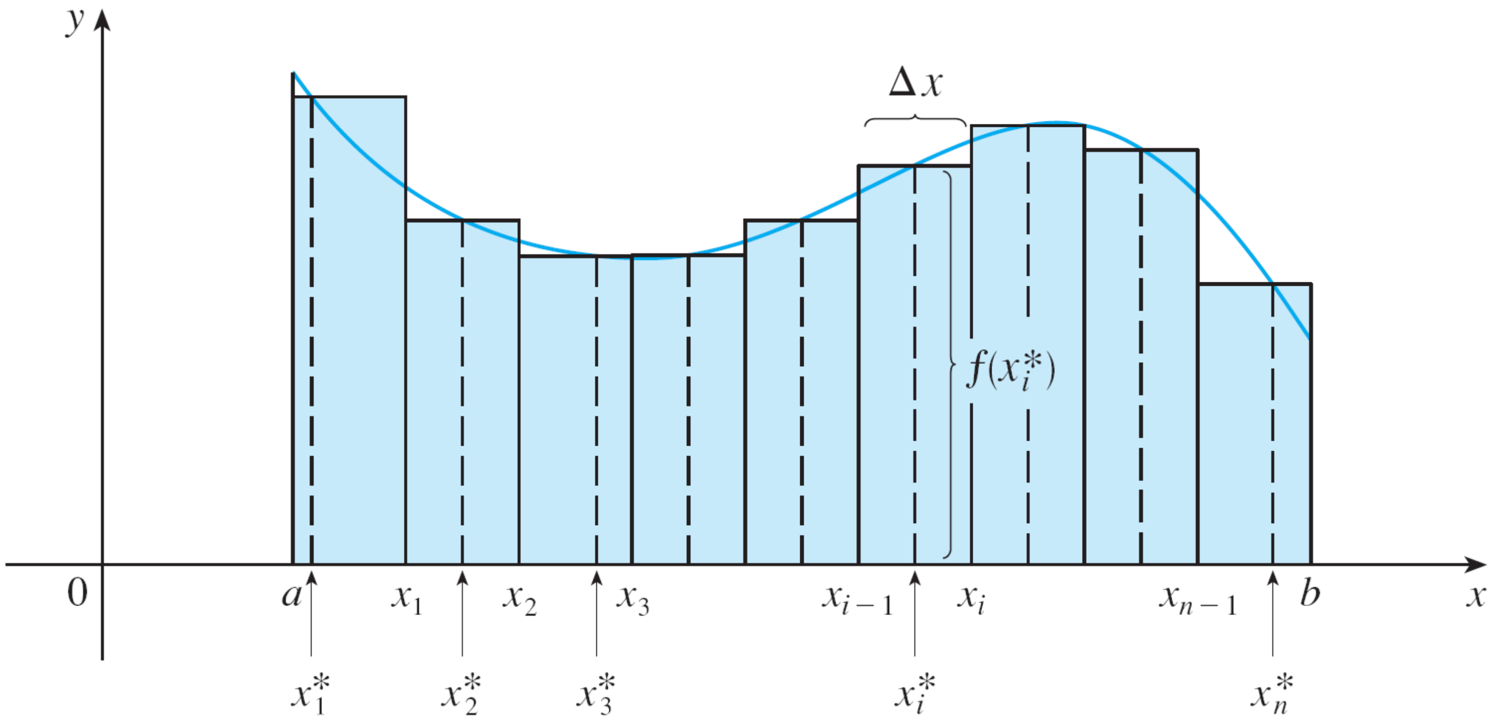


Seja $f: [a, b] \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $y = f(x)$ uma função contínua tal que $f(x) \geq 0$.

Queremos calcular a área A da região sob o gráfico de f, ou seja, a área da região limitada pelas retas $x = a, x = b, y = 0$ e pelo gráfico de f.



Seja $P = \{x_0, x_1, \dots, x_n\} \subset \mathbb{R}$ tal que $a = x_0 < x_1 < \dots < x_n = b$.
O conjunto P é chamado de **partição** de $[a, b]$ e divide esse intervalo em n subintervalos. Além disso, suponha que o tamanho dos subintervalos da partição P sejam iguais.
Tomemos $x_i^* \in [x_{i-1}, x_i]$ com $i = 1, \dots, n$ e consideremos os retângulos R_i de base $[x_{i-1}, x_i]$ e altura $f(x_i^*)$.



Seja A_i a área do retângulo R_i. Logo, uma aproximação para a área A é dada por

$$A \cong \sum_{i=1}^{n} A_i = \sum_{i=1}^{n} \underbrace{f(x_i^*)}_{\text{altura}} \underbrace{(x_i - x_{i-1})}_{\text{base}}.$$

Fazendo $\Delta x = x_i - x_{i-1}$, então

$$A \cong \sum_{i=1}^{n} f(x_i^*)\, \Delta x\,.$$

A soma

$$S = \sum_{i=1}^{n} f(x_i^*)\,\Delta x\,,$$

é chamada de **Soma de Riemann** de f relativa à partição P e aos números x_i^*.

É claro que se aumentarmos o número de elementos na partição P, a área A será melhor aproximada por uma Soma de Riemann.

Desta forma, podemos definir a área A como sendo o *limite das Somas de Riemann de f quando n tende a infinito*, ou seja,

$$A = \lim_{n\to+\infty} \sum_{i=1}^{n} f(x_i^*)\,\Delta x\,.$$

Quando o limite acima existe, ele é chamado de **Integral Definida (ou Integral de Riemann)** de f no intervalo $[a, b]$ e denotamos por

$$\boxed{A = \int_a^b f(x)\,dx\,.}$$

Neste caso, dizemos que a função f é **integrável**.

Observação

(1) Diferentemente da integral indefinida, que representa uma família de funções, a integral definida é um **número.**

(2) Na notação de integral definida, temos que

Limite superior de integração

A função é o integrando.

Sinal de integral

x é a variável de integração.

$$\underbrace{\int_a^b f(x)\,dx}_{\text{Integral de } f \text{ de } a \text{ até } b}$$

Limite inferior de integração

(3) Pode-se mostrar que o limite

$$\lim_{n\to+\infty} \sum_{i=1}^{n} f(x_i^*)\,\Delta x$$

independe da escolha dos pontos x_i^*, ou seja, quando o limite existe, seu valor é o mesmo, independentemente dos pontos x_i^*.

(4) Por simplicidade, na definição de integral definida supomos que os comprimentos dos subintervalos de $[a, b]$ tinham o mesmo tamanho.

No entanto, em muitas situações é vantajoso trabalhar com subintervalos de tamanhos diferentes.

Se os comprimentos dos subintervalos forem $\Delta x_1, \Delta x_2, \dots, \Delta x_n$, precisamos garantir que todos esses comprimentos tendem a zero no processo do limite. Isso é possível quando o maior comprimento, $\max \Delta x_i$, tender a zero.

Portanto, neste caso, a definição de integral definida fica

$$\int_a^b f(x)\, dx = \lim_{\max \Delta x_i \to 0} \sum_{i=1}^{n} f(x_i^*)\, \Delta x_i\,.$$

(5) Por definição, $\displaystyle\int_k^k f(x)\, dx = 0$.

(6) O desenvolvimento que fizemos só faz sentido para $a < b$. Entretanto, há situações em que é interessante considerar a integral definida quando $a > b$. Neste caso, definimos

$$\int_a^b f(x)\, dx = -\int_b^a f(x)\, dx.$$

Teorema: Se f é uma função contínua, então f é integrável.

Propriedades

Sejam $f, g: [a, b] \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ integráveis em $[a, b]$.

(1) $\displaystyle\int_a^b \big(f(x) + g(x)\big)\, dx = \int_a^b f(x)\, dx + \int_a^b g(x)\, dx\,.$

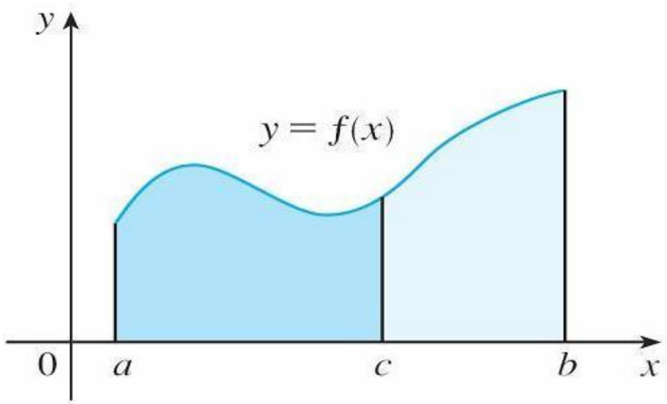
(2) $\displaystyle\int_a^b kf(x)\, dx = k\int_a^b f(x)\, dx\,,$ sendo k uma constante real.

(3) Se $f(x) \geq 0$ em $[a, b]$, então $\displaystyle\int_a^b f(x)\, dx \geq 0\,.$

(4) Se $f(x) \leq g(x)$, para qualquer x em $[a, b]$, então $\displaystyle\int_a^b f(x)\, dx \leq \int_a^b g(x) dx.$

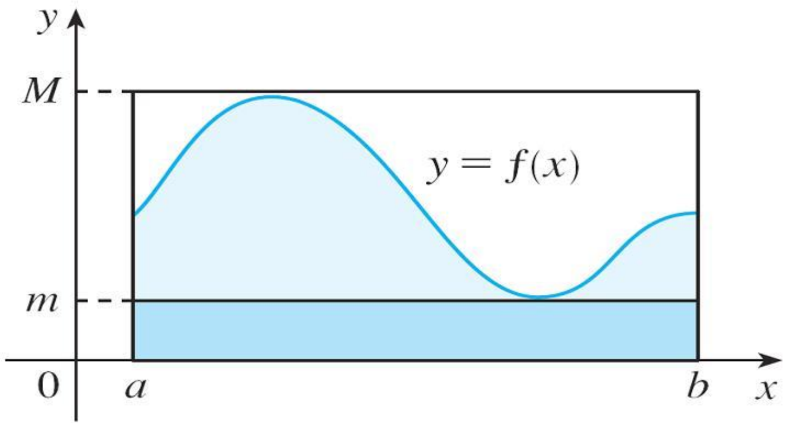
(5) Se $a < c < b$, então

$$\int_a^b f(x)\,dx = \int_a^c f(x)\,dx + \int_c^b f(x)\,dx\,.$$



(6) Se m e M são os valores mínimo e máximo de f em $[a, b]$, então

$$m(b-a) \leq \int_a^b f(x)\,dx \leq M(b-a)\ .$$



(7) $\left|\int_a^b f(x)\,dx\right| \leq \int_a^b |f(x)|\,dx\,.$

Exercício: Considere uma função f contínua em $[-5,5]$ tal que $\int_0^5 f(x)\,dx = 4$.

Se f é uma função par, qual é o valor de $\int_{-5}^{5} f(x)\,dx$?

Solução: Como f é par, seu gráfico é simétrico em relação ao eixo y.
Logo,

$$\int_{-5}^{0} f(x)\,dx = \int_0^5 f(x)\,dx = 4\,.$$

Assim,

$$\int_{-5}^{5} f(x)\,dx = \int_{-5}^{0} f(x)\,dx + \int_0^5 f(x)\,dx = 4 + 4 = 8\,.$$

O Teorema Fundamental do Cálculo

O Teorema Fundamental do Cálculo estabelece uma conexão entre os dois ramos do cálculo: o cálculo diferencial e o cálculo integral. Ele dá a relação inversa precisa entre a derivada e a integral.

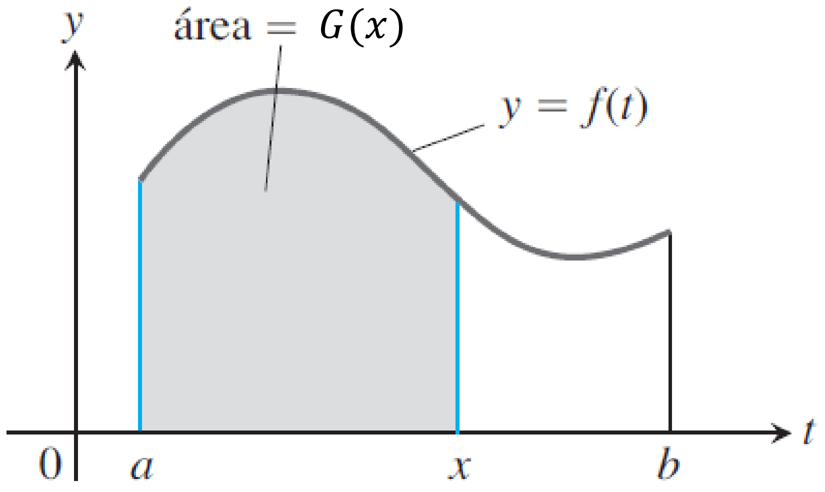
O Teorema Fundamental do Cálculo – Parte 1

Seja f uma função contínua em $[a, b]$. Assim, se $x \in [a, b]$, temos que f é contínua em $[a, x]$ e podemos considerar $\int_a^x f(t)\, dt$.

Essa integral define uma função G com domínio $[a, b]$, isto é,

$$G(x) = \int_a^x f(t)\, dt.$$

Quando f é não negativa e $x > a$, a função G fornece a área sob o gráfico de f de a até x.



O Teorema Fundamental do Cálculo – Parte 1 nos ensina a derivar uma função dada por uma integral.

Teorema Fundamental do Cálculo – Parte 1

Se f for contínua em $[a, b]$, então a função G definida por

$$G(x) = \int_a^x f(t)\,dt, \qquad a \leq x \leq b,$$

é contínua em $[a, b]$ e derivável em (a, b) e $G'(x) = f(x)$.

Exemplo: Determine a derivada da função $G(x) = \int_0^x \sqrt{1+t^2}\,dt$.

Solução: Pelo Teorema Fundamental do Cálculo – Parte 1, segue que

$$G'(x) = \frac{d}{dx}\left(\int_0^x \sqrt{1+t^2}\,dt\right) = \sqrt{1+x^2}.$$

Observação: Embora uma expressão da forma

$$G(x) = \int_a^x f(t)\, dt$$

possa parecer uma maneira estranha de definir uma função, elas aparecem com frequência na Física, Química e Estatística.

O Teorema Fundamental do Cálculo – Parte 2

O Teorema Fundamental do Cálculo – Parte 2 nos fornece um método simples para calcular integrais definidas.

Teorema Fundamental do Cálculo – Parte 2

Se f é uma função contínua em $[a,b]$, então

$$\int_a^b f(x)\,dx = F(b) - F(a),$$

onde F é uma primitiva de f em $[a,b]$.

Notação: É comum escrever

$$\int_a^b f(x)\,dx = F(x)\Big|_a^b = F(b) - F(a).$$

Exemplos

(1) Calcule as seguintes integrais definidas:

(a) $$\int_0^2 x^2\,dx = \left.\frac{x^3}{3}\right|_0^2 = \frac{2^3}{3} - \frac{0^3}{3} = \frac{8}{3}$$

(b) $$\int_0^{\frac{\pi}{2}} sen\,x\,dx = -\cos x\Big|_0^{\frac{\pi}{2}} = -\cos\left(\frac{\pi}{2}\right) - (-\cos(0)) = 0 + 1 = 1$$

(c) $$\int_0^1 \frac{1}{1+t^2}\,dt = \operatorname{arctg} t\Big|_0^1 = \operatorname{arctg} 1 - \operatorname{arctg} 0 = \frac{\pi}{4} - 0 = \frac{\pi}{4}$$

$(\mathbf{d})\ \int_{-1}^{3} |x-1|\, dx$

Temos que $|x-1| = \begin{cases} x-1, se\ x \geq 1 \\ -x+1, se\ x < 1 \end{cases}$.

Logo,

$$\int_{-1}^{3} |x-1|\, dx = \int_{-1}^{1} |x-1|\, dx + \int_{1}^{3} |x-1|\, dx$$

$$= \int_{-1}^{1} (-x+1)\, dx + \int_{1}^{3} (x-1)\, dx$$

$$= \left(-\frac{x^2}{2} + x\right)\Bigg|_{-1}^{1} + \left(\frac{x^2}{2} - x\right)\Bigg|_{1}^{3}$$

$$= 4$$

(2) Calcule as seguintes integrais definidas, utilizando o método da substituição:

(a) $\int_0^1 e^{-2x}\,dx$

Fazendo:

$u = -2x \qquad x = 0 \Rightarrow u = 0$

$du = -2dx \qquad x = 1 \Rightarrow u = -2$

Então:

$$\int_0^1 e^{-2x}\,dx = -\frac{1}{2}\int_0^{-2} e^u\,du$$

$$= \frac{1}{2}\int_{-2}^{0} e^u\,du$$

$$= \frac{1}{2}\,e^u\Big|_{-2}^{0}$$

$$= \frac{1}{2}(e^0 - e^{-2}) = \frac{1}{2}\left(1 - \frac{1}{e^2}\right)$$

$$\textbf{(b)} \int_{-1}^{0} x\sqrt{x+1}\,dx$$

Fazendo:

$u = x + 1 \qquad x = -1 \Rightarrow u = 0$

$du = dx \qquad x = 0 \Rightarrow u = 1$

Então:

$$\int_{-1}^{0} x\sqrt{x+1}\,dx = \int_{0}^{1} (u-1)\sqrt{u}\,du$$

$$= \int_{0}^{1} (u-1)u^{1/2}\,du$$

$$= \int_{0}^{1} u^{3/2} - u^{1/2}\,du$$

$$= \left(\frac{2}{5}u^{\frac{5}{2}} - \frac{2}{3}u^{\frac{3}{2}}\right)\Bigg|_{0}^{1} = -\frac{4}{15}$$

$(\mathbf{c})\ \int_0^{2\pi} x \cos x^2 \ dx$

Fazendo:

$u = x^2 \qquad x = 0 \Rightarrow u = 0$

$du = 2xdx \qquad x = 2\pi \Rightarrow u = 4\pi^2$

Então:

$$\int_0^{2\pi} x \cos x^2 \ dx = \frac{1}{2}\int_0^{4\pi^2} \cos u \ du$$

$$= \frac{1}{2} sen\, u\Big|_0^{4\pi^2}$$

$$= \frac{1}{2}\left(sen(4\pi^2) - sen(0)\right)$$

$$= \frac{1}{2} sen(4\pi^2)$$

$(\mathbf{d})\ \int_0^1 \frac{x}{1+x^2}\,dx$

Fazendo:

$u = 1 + x^2$ $\quad\quad x = 0 \Rightarrow u = 1$

$du = 2xdx$ $\quad\quad x = 1 \Rightarrow u = 2$

Então:

$$\int_0^1 \frac{x}{1+x^2}\,dx = \frac{1}{2}\int_1^2 \frac{1}{u}\,du$$

$$= \frac{1}{2}\ln u\Big|_1^2$$

$$= \frac{1}{2}(\ln 2 - \ln 1)$$

$$= \frac{1}{2}\ln 2$$

(3) Obtenha o valor das integrais abaixo, utilizando integração por partes:

$$\boxed{\int_a^b u\,dv = uv\Big|_a^b - \int_a^b v\,du}$$

(a) $\displaystyle\int_0^1 xe^x\,dx$

Fazendo:

$u = x \qquad dv = e^x dx$

$du = dx \qquad v = e^x$

Logo,

$$\int_0^1 xe^x\,dx = xe^x\Big|_0^1 - \int_0^1 e^x\,dx$$

$$= xe^x\Big|_0^1 - e^x\Big|_0^1$$

$$= (1e^1 - 0e^0) - (e^1 - e^0)$$

$$= e - e + 1$$

$$= 1$$

$(\mathbf{b}) \int_1^2 \ln x \ dx$

Já vimos que: $\int \ln x \, dx = x \ln x - x + k$

Logo,

$$\int_1^2 \ln x \ dx = (x \ln x - x)\Big|_1^2$$

$$= (2 \ln 2 - 2) - (1 \ln 1 - 1)$$

$$= 2 \ln 2 \ - 1$$

$(\mathbf{c})\ \int_0^{\pi} e^x sen\ x\ dx$

Já vimos que: $\int e^x\ sen\ x\ dx = \frac{1}{2}e^x(sen\ x - \cos x) + k$

Logo,

$$\int_0^{\pi} e^x sen\ x\ dx = \left(\frac{1}{2}e^x(sen\ x - \cos x)\right)\Big|_0^{\pi}$$

$$= \left[\frac{1}{2}e^{\pi}(sen\ \pi - \cos\pi)\right] - \left[\frac{1}{2}e^{0}(sen\ 0 - \cos 0)\right]$$

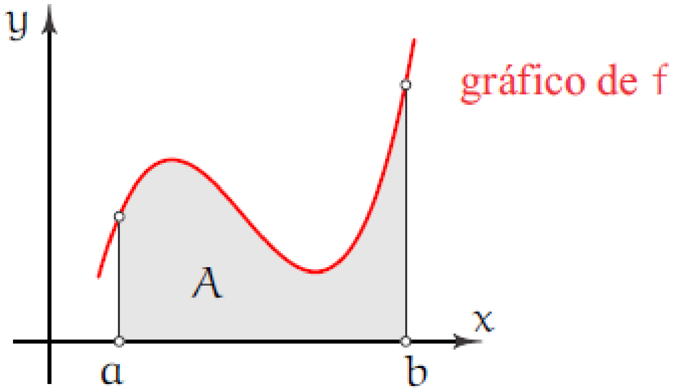
$$= \frac{1}{2}e^{\pi} + \frac{1}{2}$$

$$= \frac{1}{2}(e^{\pi} + 1)$$

Cálculo de Áreas

Seja $f: [a, b] \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ uma função contínua.
Vimos que se $f(x) \geq 0$ em $[a, b]$, então a área da região limitada pelas retas $x = a, x = b, y = 0$ e pelo gráfico de f é dada por

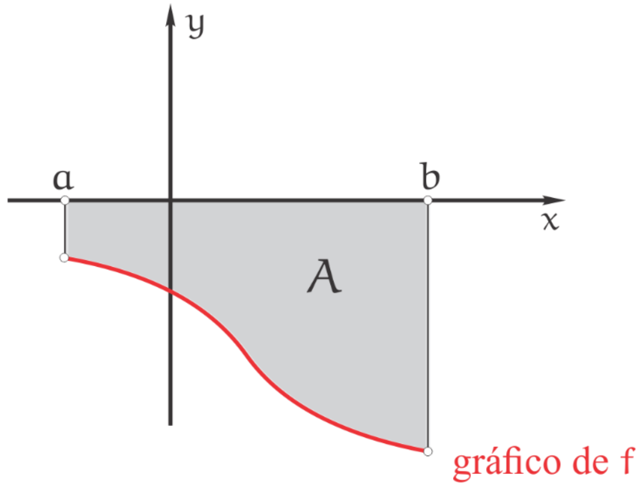
$$\boxed{A = \int_a^b f(x)\, dx.}$$



Se $f(x) \leq 0$, então $\displaystyle\int_a^b f(x)\, dx \leq 0.$

Assim, a área A, neste caso, é dada por

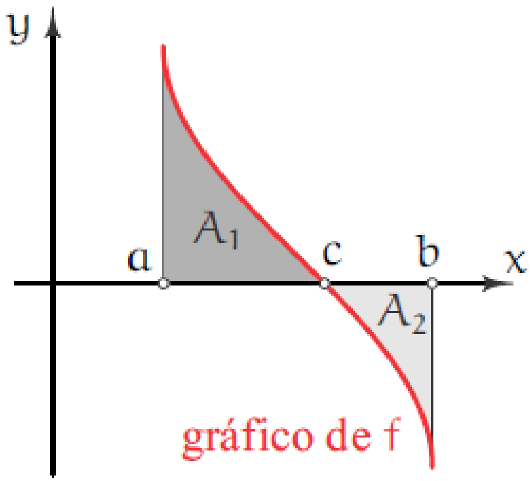
$$\boxed{A = -\int_a^b f(x)\, dx.}$$



Observação

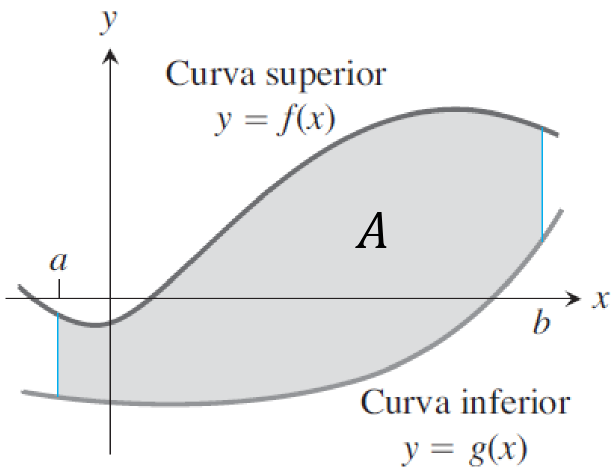
(1) Se $f(x) \geq 0$ para $a \leq x \leq c$ e $f(x) \leq 0$ para $c \leq x \leq b$, então a área, neste caso, é dada por:

$$\boxed{\begin{aligned} A &= A_1 + A_2 \\ &= \int_a^c f(x)\,dx - \int_c^b f(x)\,dx \end{aligned}}$$



(2) **(Área entre Curvas)** Sejam $f, g: [a,b] \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ funções contínuas com $f(x) \geq g(x)$, para todo $x \in [a,b]$. Então a área entre as curvas $y = f(x)$ e $y = g(x)$ é dada por:

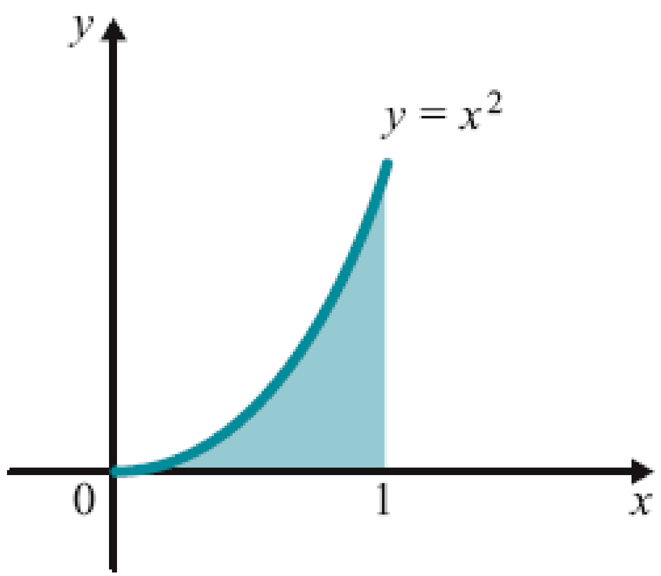
$$\boxed{A = \int_a^b (f(x) - g(x))\,dx}$$



Exemplos

(1) Calcule a área da região limitada pelas retas $x = 0, x = 1, y = 0$ e pelo gráfico de $f(x) = x^2$.

Solução: Um esboço da região é dado na figura ao lado.



A área da região é dada por

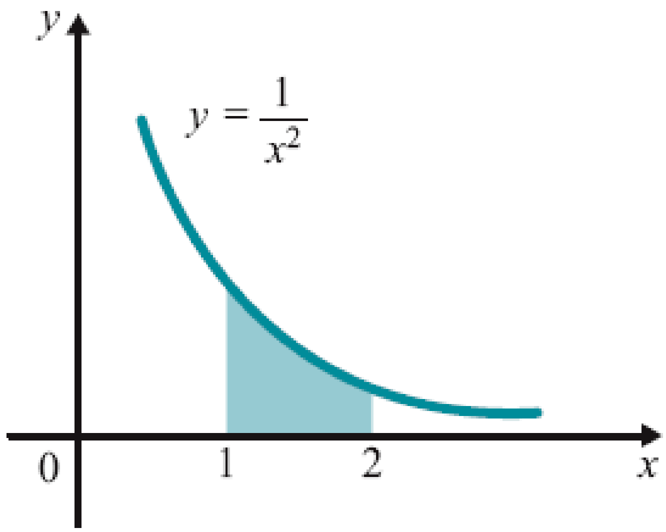
$$A = \int_0^1 x^2\,dx = \left.\frac{x^3}{3}\right|_0^1 = \left(\frac{1}{3} - 0\right) = \frac{1}{3}.$$

(2) Calcular a área do conjunto $S = \left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : 1 \leq x \leq 2 \text{ e } 0 \leq y \leq \frac{1}{x^2}\right\}$.

Solução: O conjunto S é igual à região do plano limitada pelas retas $x = 1, x = 2, y = 0$ e pelo gráfico da função $y = \frac{1}{x^2}$.

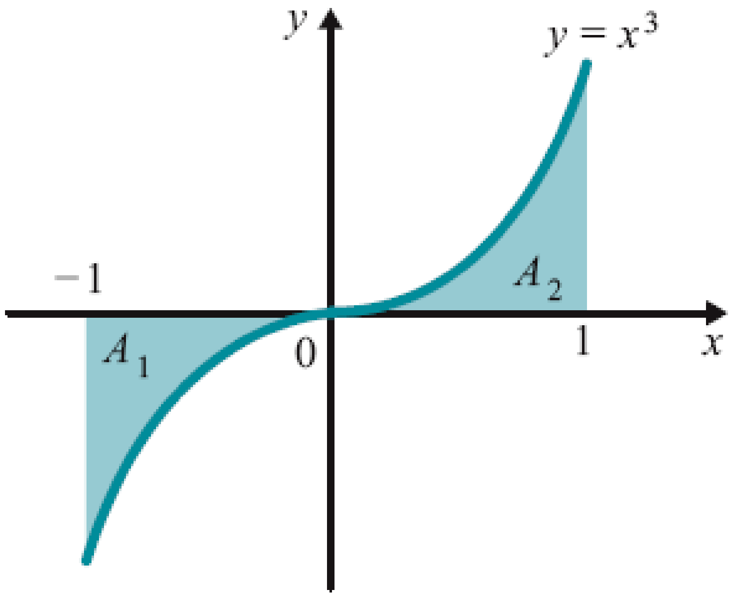
A área de S é dada por:

$$A = \int_1^2 \frac{1}{x^2}\, dx = -\frac{1}{x}\Big|_1^2 = \left(-\frac{1}{2} - (-1)\right) = -\frac{1}{2} + 1 = \frac{1}{2}.$$



(**3**) Calcule a área da região limitada pelo gráfico de $f(x) = x^3$, pelo eixo x e pelas retas $x = -1$ e $x = 1$.

Solução: Um esboço da região é dada na figura a seguir.



Temos que a área A da região é dada por

$$A = A_1 + A_2.$$

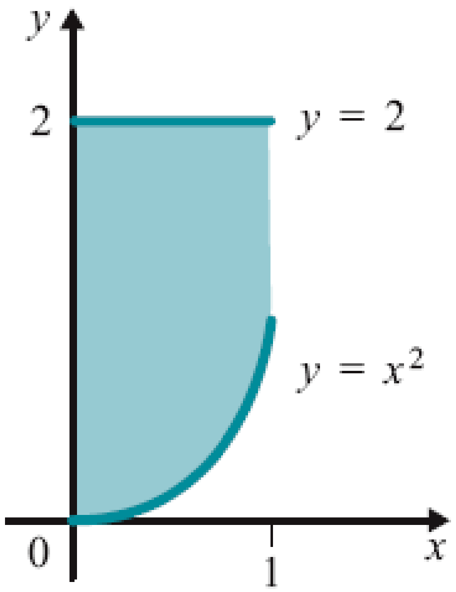
$$A_1 = -\int_{-1}^{0} x^3\,dx = \left.\frac{x^4}{4}\right|_{-1}^{0} = \frac{1}{4}$$

$$A_2 = \int_{0}^{1} x^3\,dx = \left.\frac{x^4}{4}\right|_{0}^{1} = \frac{1}{4}$$

Logo, a área da região é $A = \frac{1}{4} + \frac{1}{4} = \frac{1}{2}$.

(4) Calcule a área da região limitada pelas retas $x = 0, x = 1, y = 2$ e pelo gráfico de $y = x^2$.

Solução: Um esboço da região é dada na figura a seguir.



A área da região é dada por:

$$A = \int_0^1 (2 - x^2)\, dx = \left(2x - \frac{x^3}{3}\right)\Bigg|_0^1 = \frac{5}{3}.$$

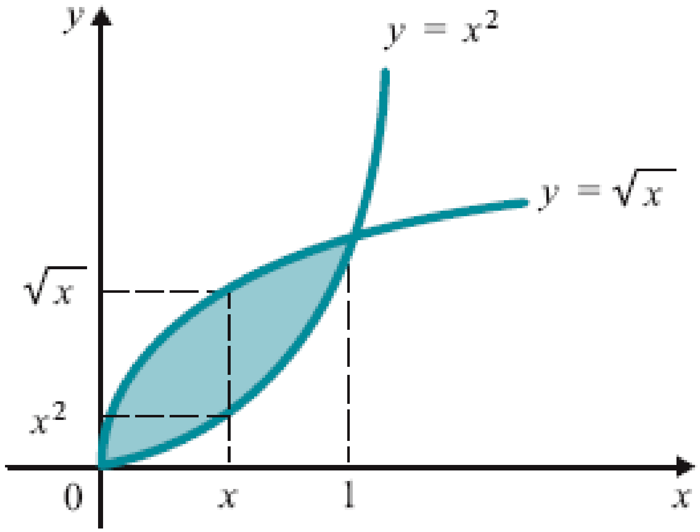
(5) Calcule a área limitada pelas curvas $y = \sqrt{x}$ e $y = x^2$.

Solução:

- Pontos de intersecção:

$$\begin{cases} y = \sqrt{x} \\ y = x^2 \end{cases} \Rightarrow x^2 = \sqrt{x} \Rightarrow x = 0 \text{ ou } x = 1.$$

- Um esboço da região é dado a seguir.



A área da região é dada por:

$$A = \int_0^1 (\sqrt{x} - x^2)\, dx = \left(\frac{2}{3}x^{\frac{3}{2}} - \frac{x^3}{3}\right)\Bigg|_0^1 = \frac{1}{3}.$$

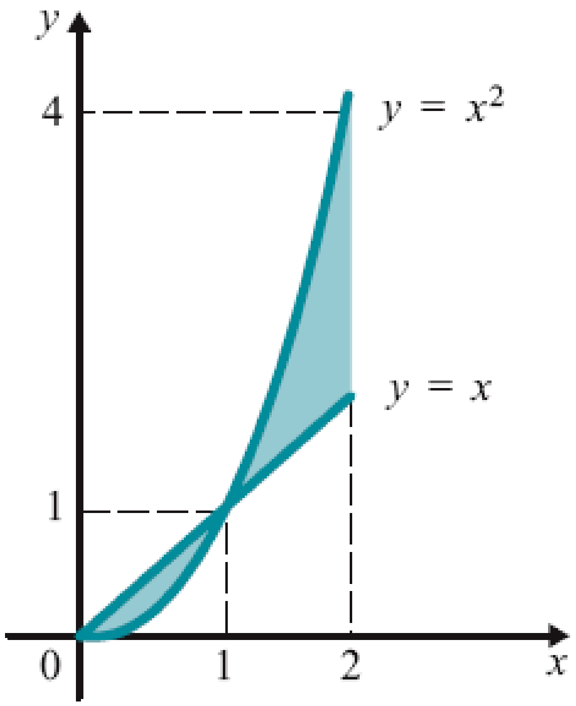
(6) Calcule a área da região compreendida entre os gráficos de $y = x$ e $y = x^2$, com $0 \leq x \leq 2$.

Solução:

- Pontos de intersecção:

$$\begin{cases} y = x \\ y = x^2 \end{cases} \Rightarrow x = x^2 \Rightarrow x = 0 \text{ ou } x = 1.$$

- Um esboço da região é dado a seguir.



A área da região é dada por:

$$A = \int_0^1 (x - x^2)\, dx + \int_1^2 (x^2 - x)\, dx$$

$$= \left(\frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{3}\right)\Bigg|_0^1 + \left(\frac{x^3}{3} - \frac{x^2}{2}\right)\Bigg|_1^2$$

$$= \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{3}\right) + \left[\left(\frac{8}{3} - \frac{4}{2}\right) - \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{2}\right)\right]$$

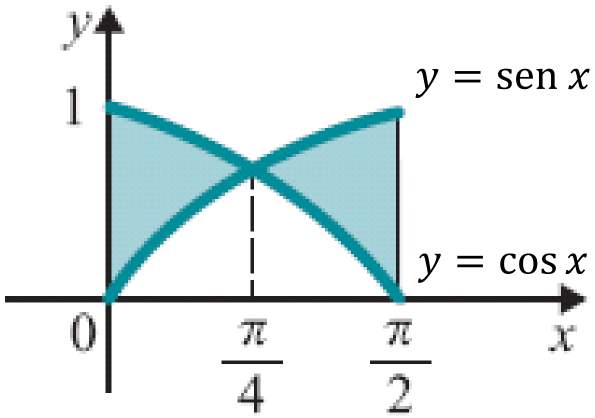
$$= 1$$

(7) Calcule a área do conjunto do plano limitado pelas retas $x = 0, x = \frac{\pi}{2}$ e pelos gráficos de $y = \operatorname{sen} x$ e $y = \cos x$.

Solução:

- O ponto de intersecção de $y = sen\, x$ e $y = \cos x$, com $0 \leq x \leq \frac{\pi}{2}$, é dado por $x = \frac{\pi}{4}$.

- Um esboço da região é dado na figura ao lado.



A área da região é dada por:

$$A = \int_0^{\pi/4} (\cos x - sen\, x)\, dx + \int_{\pi/4}^{\pi/2} (sen\, x - \cos x)\, dx$$

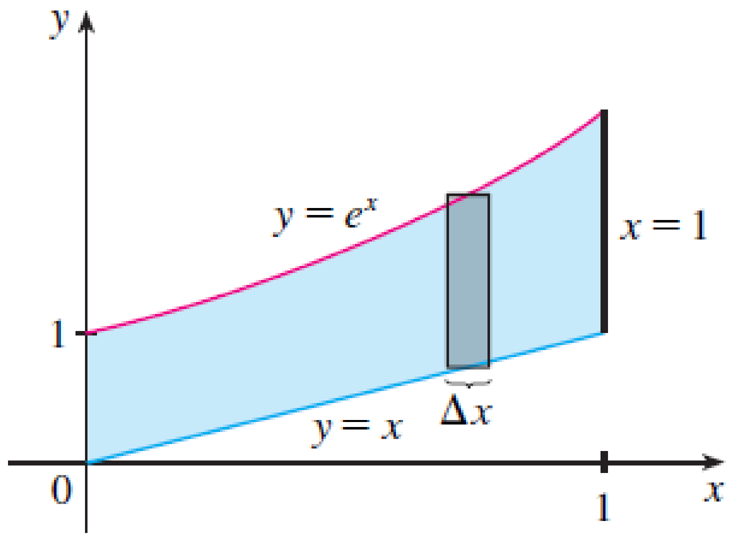
$$= (sen\, x + \cos x)\Big|_0^{\pi/4} + (-\cos x - sen\, x)\Big|_{\pi/4}^{\pi/2}$$

$$= \left[\left(sen\left(\frac{\pi}{4}\right) + \cos\left(\frac{\pi}{4}\right)\right) - (sen\,(0) + \cos(0))\right] + \left[\left(-\cos\left(\frac{\pi}{2}\right) - sen\left(\frac{\pi}{2}\right)\right) - \left(-\cos\left(\frac{\pi}{4}\right) - sen\left(\frac{\pi}{4}\right)\right)\right]$$

$$= 2(\sqrt{2} - 1)$$

(8) Calcular a área da região limitada acima por $y = e^x$, limitada abaixo por $y = x$ e limitada nos lados por $x = 0$ e $x = 1$.

Solução: Um esboço da região é mostrado a seguir.

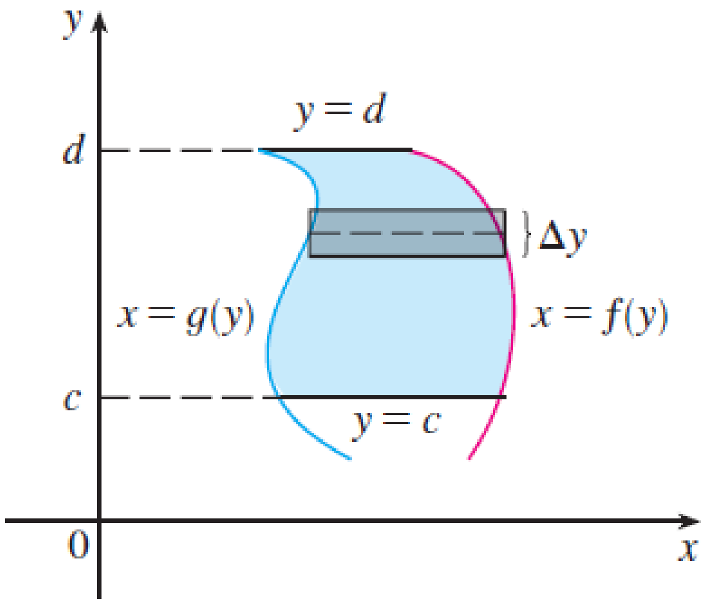


A área é dada por:

$$A = \int_0^1 (e^x - x)\, dx = \left(e^x - \frac{x^2}{2}\right)\Bigg|_0^1 = e - \frac{3}{2}$$

Observação:

Se uma região é delimitada por curvas com equações $x = f(y), x = g(y), y = c$ e $y = d$, em que f e g são contínuas e $f(y) \geq g(y)$ para $c \leq y \leq d$, então sua área é:



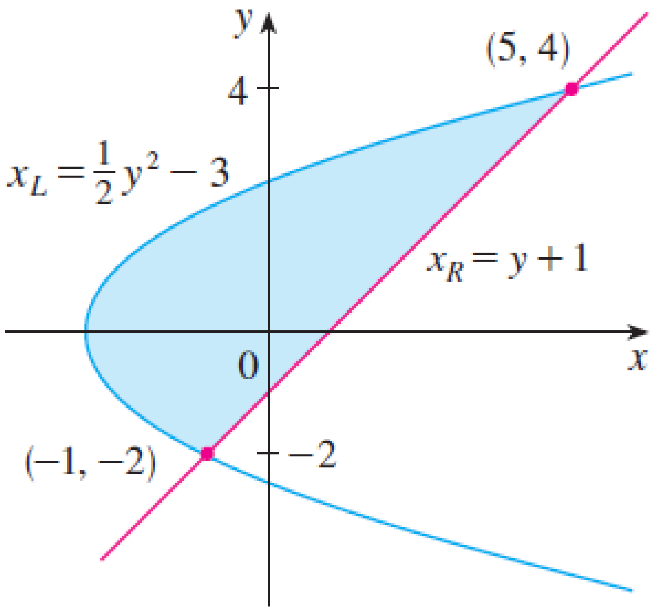
$$\boxed{A = \int_c^d (f(y) - g(y))\, dy}$$

(**9**) Encontre a área delimitada pela reta $y = x - 1$ e pela parábola $y^2 = 2x + 6$.

Solução: Temos que

$$\begin{cases} x = y + 1 \\ y^2 - 2x - 6 = 0 \end{cases} \Rightarrow y^2 - 2(y+1) - 6 = 0 \Rightarrow y^2 - 2y - 8 = 0 \Rightarrow y = -2 \text{ ou } y = 4,$$

logo os pontos de intersecção são $(-1, -2)$ e $(5, 4)$.
Isolando x nas equações, segue que as curvas de fronteira à esquerda e à direita são dadas por $x_L = \dfrac{y^2}{2} - 3$ e $x_R = y + 1$.



Logo,

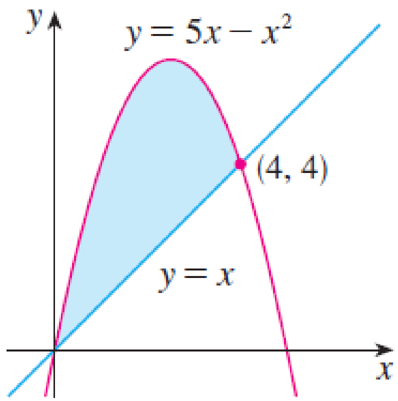
$$A = \int_{-2}^{4} \left[(y+1) - \left(\frac{y^2}{2} - 3 \right) \right] dy$$

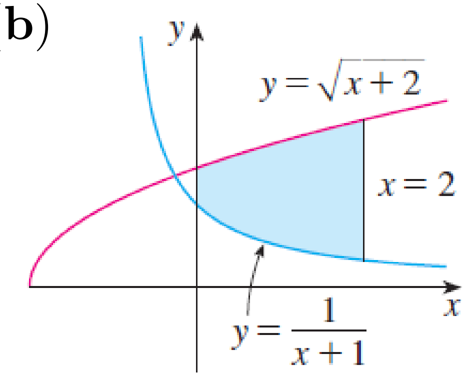
$$= \int_{-2}^{4} \left(-\frac{y^2}{2} + y + 4 \right) dy$$

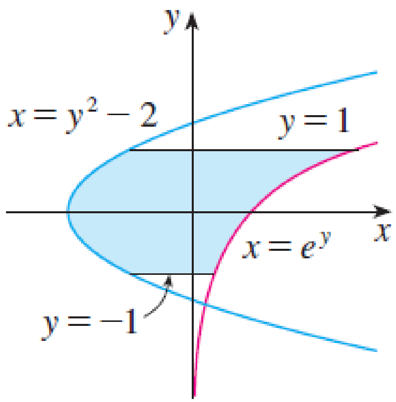
$$= 18$$

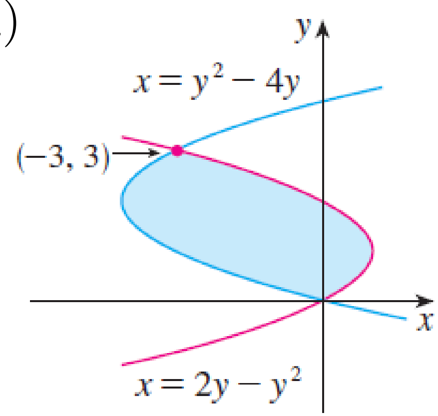
Exercícios

(1) Encontre a área da região indicada:

(a)


(b)


(c)


(d)


Respostas: (a) $\frac{32}{3}$, (b) $\frac{16}{3} - \ln 3 - \frac{4}{3}\sqrt{2}$, (c) $e - \frac{1}{e} + \frac{10}{3}$, (d) 9

(2) Esboce a região delimitada pelas curvas indicadas e encontre sua área.

(a) $y = e^x, y = x^2 - 1, x = -1, x = 1$ $R\!: e - \dfrac{1}{e} + \dfrac{4}{3}$

(b) $y = sen\, x, y = x, x = \dfrac{\pi}{2}, x = \pi$ $R\!: \dfrac{3\pi^2}{8} - 1$

(c) $y = \sqrt{x-1},\ x - y = 1$ $R\!: \dfrac{1}{6}$

(d) $x = 1 - y^2, x = y^2 - 1$ $R\!: \dfrac{8}{3}$

Técnica de Integração
Substituição Trigonométrica

Consideremos integrais indefinidas $\int f(x)\,dx$ tais que a expressão analítica de f possui alguma das expressões

$$\sqrt{a^2-x^2}, \sqrt{a^2+x^2} \text{ ou } \sqrt{x^2-a^2}, \text{ com } a>0.$$

Neste caso, é possível fazer uma substituição trigonométrica $x = g(\theta)$ para resolver a integral.
As substituições em cada caso são:

Casos	Substituição
Caso 1: $\sqrt{a^2-x^2}$	$x = asen(\theta)$, com $-\frac{\pi}{2} \leq \theta \leq \frac{\pi}{2}$
Caso 2: $\sqrt{a^2+x^2}$	$x = atg(\theta)$, com $-\frac{\pi}{2} < \theta < \frac{\pi}{2}$
Caso 3: $\sqrt{x^2-a^2}$	$x = asec(\theta)$, com $0 \leq \theta < \frac{\pi}{2}$ ou $\pi \leq \theta < \frac{3\pi}{2}$

Com essas substituições as raízes ficam:

$$\sqrt{a^2-x^2} = \sqrt{a^2-a^2sen^2(\theta)} = \sqrt{a^2(1-sen^2(\theta))} = \sqrt{a^2\cos^2(\theta)} = acos(\theta)$$

$$\sqrt{a^2+x^2} = \sqrt{a^2+a^2tg^2(\theta)} = \sqrt{a^2(1+tg^2(\theta))} = \sqrt{a^2\,sec^2(\theta)} = asec(\theta)$$

$$\sqrt{x^2-a^2} = \sqrt{a^2\sec^2(\theta)-a^2} = \sqrt{a^2(\sec^2(\theta)-1)} = \sqrt{a^2tg^2(\theta)} = atg(\theta)$$

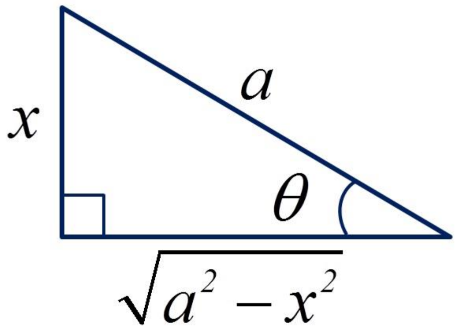
Com essas substituições, temos que:

$$\int f(x)\,dx = \int f\big(g(\theta)\big)g'(\theta)\,d\theta\,,$$

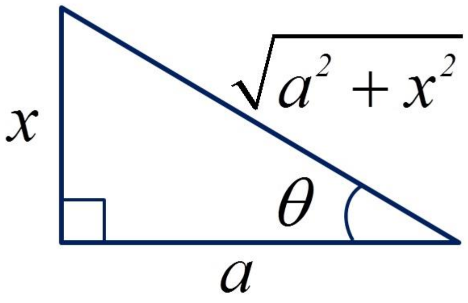
pois de $x = g(\theta)$, temos $\frac{dx}{d\theta} = g'(\theta)$, ou seja, $dx = g'(\theta)d\theta$.

A segunda integral acima, geralmente pode ser simplificada ou transformada em soma de integrais mais simples, conforme veremos nos exemplos a seguir.

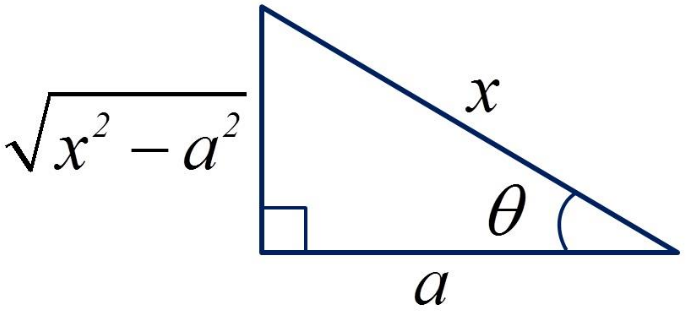
Após o cálculo dessa integral, devemos retornar à variável original x, por meio de identidades trigonométricas, das funções trigonométricas inversas ou com o auxílio dos seguintes triângulos retângulos:



1º Caso:



2º Caso



3º Caso

Exemplos: Calcule as integrais usando o método de substituição trigonométrica.

(**1**) $\int \sqrt{1-x^2}\,dx$ (1º Caso)

Solução: Fazendo

$x = sen(\theta)$
$dx = \cos(\theta)\,d\theta$
$\sqrt{1-x^2} = \sqrt{1-sen^2(\theta)} = \sqrt{\cos^2(\theta)} = \cos(\theta)$

temos que:

$$\int \sqrt{1-x^2}\,dx = \int \cos(\theta)\cos(\theta)\,d\theta = \int \cos^2(\theta)\,d\theta = \int \frac{1+\cos(2\theta)}{2}\,d\theta = \frac{\theta}{2} + \frac{sen(2\theta)}{4} + k$$

$$= \frac{\theta}{2} + \frac{2sen(\theta)cos(\theta)}{4} + k = \frac{\theta}{2} + \frac{sen(\theta)cos(\theta)}{2} + k$$

Para voltar à variável x, veja que

$x = sen(\theta) \Leftrightarrow \theta = arcsen(x)$
$\sqrt{1-x^2} = \cos(\theta).$

Portanto, $\int \sqrt{1-x^2}\,dx = \frac{arcsen(x)}{2} + \frac{x\sqrt{1-x^2}}{2} + k$

$(\mathbf{2})\ \int \sqrt{4+x^2}\,dx$ (2º Caso)

Solução: Fazendo

$$x = 2tg(\theta)$$
$$dx = 2\sec^2(\theta)\,d\theta$$
$$\sqrt{4+x^2} = \sqrt{4+4tg^2(\theta)} = \sqrt{4(1+tg^2(\theta))} = \sqrt{4\sec^2(\theta)} = 2\sec(\theta)$$

temos que:

$$\int \sqrt{4+x^2}\,dx = \int 2\sec(\theta)\,2\sec^2(\theta)\,d\theta = 4\int sec^3(\theta)\,d\theta$$

Usando o método de integração por partes, já vimos que $\int sec^3(\theta)\,d\theta = \frac{\sec(\theta)\,tg(\theta) + \ln|\sec(\theta)+tg(\theta)|}{2} + k.$

Logo, $$\int \sqrt{4+x^2}\,dx = 4\left(\frac{\sec(\theta)\,tg(\theta) + \ln|\sec(\theta)+tg(\theta)|}{2}\right) + k$$

$$= 2\sec(\theta)\,tg(\theta) + 2\ln|\sec(\theta)+tg(\theta)| + k$$

Para voltar à variável x, observe que

$$x = 2tg(\theta) \Rightarrow \frac{x}{2} = tg(\theta) \ \text{ e } \ \sqrt{4+x^2} = 2\sec(\theta) \Rightarrow \frac{\sqrt{4+x^2}}{2} = \sec(\theta).$$

Portanto, $$\int \sqrt{4+x^2}\,dx = \frac{\sqrt{4+x^2}\,x}{2} + 2\ln\left|\frac{\sqrt{4+x^2}+x}{2}\right| + k$$

$(\mathbf{3})\ \int \frac{1}{x^2\sqrt{x^2-9}}\,dx$ (3º Caso)

Solução: Fazendo

$$x = 3sec(\theta)$$
$$dx = 3\sec(\theta)\,tg(\theta)d\theta$$
$$\sqrt{x^2-9} = \sqrt{9\sec^2(\theta)-9} = \sqrt{9(\sec^2(\theta)-1)} = \sqrt{9\,tg^2(\theta)} = 3\text{tg}(\theta)$$

temos que:

$$\int \frac{1}{x^2\sqrt{x^2-9}}\,dx = \int \frac{3\sec(\theta)\,tg(\theta)}{9\sec^2(\theta)\,3\text{tg}(\theta)}d\theta = \frac{1}{9}\int \frac{1}{sec(\theta)}d\theta = \frac{1}{9}\int \cos(\theta)\,d\theta = \frac{1}{9}sen(\theta) + k$$

Para voltar à variável x, observe que:

$$x = 3sec(\theta) \Rightarrow \frac{x}{3} = sec(\theta) = \frac{1}{\cos(\theta)} \Rightarrow \cos(\theta) = \frac{3}{x}$$

$$\sqrt{x^2-9} = 3\,\text{tg}(\theta) = 3\frac{sen(\theta)}{\cos(\theta)} \Rightarrow sen(\theta) = \frac{\sqrt{x^2-9}}{3}\cos(\theta) \Rightarrow sen(\theta) = \frac{\sqrt{x^2-9}}{3}\cdot\frac{3}{x} = \frac{\sqrt{x^2-9}}{x}$$

Logo,

$$\int \frac{1}{x^2\sqrt{x^2-9}}\,dx = \frac{1}{9}\frac{\sqrt{x^2-9}}{x} + k$$

Exercícios:

(1) Calcule as seguintes integrais utilizando substituição trigonométrica.

(a) $\displaystyle\int \frac{\sqrt{9-x^2}}{x^2}\,dx$

(b) $\displaystyle\int \frac{1}{x^2\sqrt{x^2+4}}\,dx$

(c) $\displaystyle\int \frac{1}{\sqrt{x^2-a^2}}\,dx$, com $a > 0$

(d) $\displaystyle\int \frac{x}{\sqrt{3-2x-x^2}}\,dx$

(e) $\displaystyle\int \sqrt{1-4x^2}\,dx$

(2) Calcule a integral definida $\displaystyle\int_0^1 \sqrt{1+x^2}\,dx$.

(3) Mostre que a área do círculo de raio r é $A = \pi r^2$.

Técnica de Integração
Integração de Funções Racionais por Frações Parciais

Neste método estamos interessados em integrar uma função racional (quociente de polinômios) expressando-a como uma soma de frações mais simples, chamadas ***frações parciais.***

Considere a função racional $f(x) = \frac{p(x)}{q(x)}$, sendo p e q polinômios. A decomposição dessa função em frações mais simples depende do modo como o denominador se decompõe em fatores lineares e/ou quadráticos irredutíveis.

Para desenvolver o método, vamos supor que **o grau de p é menor que o grau de q**. Caso isso não ocorra, devemos primeiro efetuar a divisão de p por q.

Denominadores redutíveis do 2º grau e do 3º grau

Teorema 1: Sejam $\alpha, \beta, m, n \in \mathbb{R}$, com $\alpha \neq \beta$. Então existem $A, B \in \mathbb{R}$ tais que:

(a) $\dfrac{mx+n}{(x-\alpha)(x-\beta)} = \dfrac{A}{x-\alpha} + \dfrac{B}{x-\beta}$

(b) $\dfrac{mx+n}{(x-\alpha)^2} = \dfrac{A}{x-\alpha} + \dfrac{B}{(x-\alpha)^2}$

Teorema 2: Sejam $\alpha, \beta, \gamma, m, n, p \in \mathbb{R}$, com $\alpha, \beta, \gamma \neq 0$. Então existem A, B, C reais tais que:

(a) $\dfrac{mx^2+nx+p}{(x-\alpha)(x-\beta)(x-\gamma)} = \dfrac{A}{x-\alpha} + \dfrac{B}{x-\beta} + \dfrac{C}{x-\gamma}$

(b) $\dfrac{mx^2+nx+p}{(x-\alpha)(x-\beta)^2} = \dfrac{A}{x-\alpha} + \dfrac{B}{x-\beta} + \dfrac{C}{(x-\beta)^2}$

(c) $\dfrac{mx^2+nx+p}{(x-\alpha)^3} = \dfrac{A}{x-\alpha} + \dfrac{B}{(x-\alpha)^2} + \dfrac{C}{(x-\alpha)^3}$

Observações:

(**i**) As constantes A, B e C que os teoremas garantem existir são facilmente encontradas, conforme veremos nos exemplos a seguir.

(**ii**) Nos teoremas anteriores, nos restringimos aos casos em que o denominador q possui grau 2 ou 3 e que possui todas raízes reais. Esses teoremas podem ser generalizados facilmente para uma função racional $\frac{p(x)}{q(x)}$ em que o denominador possui qualquer grau, desde que suas raízes sejam reais.

Por exemplo, quando um fator linear $x - \alpha$ aparece no denominador com multiplicidade m, a decomposição é da forma:

$$\frac{p(x)}{(x-\alpha)^m} = \frac{A_1}{x-\alpha} + \frac{A_2}{(x-\alpha)^2} + \cdots + \frac{A_m}{(x-\alpha)^m}$$

Exemplos: Calcule as integrais a seguir.

(**1**) $\displaystyle\int \frac{x+3}{x^2-3x+2}\,dx$

Solução:

Temos $x^2 - 3x + 2 = (x-1)(x-2)$.

Assim,

$$\begin{aligned}\frac{x+3}{(x-1)(x-2)} &= \frac{A}{x-1} + \frac{B}{x-2}\\ &= \frac{A(x-2)+B(x-1)}{(x-1)(x-2)}\\ &= \frac{(A+B)x-2A-B}{(x-1)(x-2)}\end{aligned}$$

Então, $x + 3 = (A+B)x - 2A - B \;\Rightarrow \begin{cases} A+B=1\\ -2A-B=3\end{cases} \Rightarrow A=-4$ e $B=5$.

Logo,

$$\int \frac{x+3}{x^2-3x+2}\,dx = \int \frac{x+3}{(x-1)(x-2)}\,dx = \int -\frac{4}{x-1} + \frac{5}{x-2}\,dx = -4\ln|x-1| + 5\ln|x-2| + k$$

$(\mathbf{2})\ \int \frac{x+3}{(x-1)^2}\,dx$

Solução:

Veja que

$$\frac{x+3}{(x-1)^2} = \frac{A}{x-1} + \frac{B}{(x-1)^2}$$
$$= \frac{Ax + B - A}{(x-1)^2}$$

Daí, $\begin{cases} A = 1 \\ B - A = 3 \end{cases} \Rightarrow A = 1$ e $B = 4$.

Portanto,

$$\int \frac{x+3}{(x-1)^2}\,dx = \int \frac{1}{x-1} + \frac{4}{(x-1)^2}\,dx = \ln|x-1| + 4\int \frac{1}{(x-1)^2}\,dx = \ln|x-1| - \frac{4}{x-1} + k$$

Cálculo da integral $\int \frac{1}{(x-1)^2}\,dx$:

Fazendo $u = x - 1$, temos que $du = dx$, logo $\int \frac{1}{(x-1)^2}\,dx = \int \frac{1}{u^2}\,du = \int u^{-2}\,du = -\frac{1}{u} = -\frac{1}{x-1}$.

$(\mathbf{3})\ \int \frac{x^2+2}{x^2-3x+2}\,dx$

Solução:

Observe que o grau do polinômio do numerador é igual ao grau do polinômio do denominador. Então, devemos dividir um polinômio pelo outro:

$$\begin{array}{r|l} x^2+2 & x^2-3x+2 \\ \cline{2-2} -x^2+3x-2 & 1 \\ \hline 3x & \end{array} \Longrightarrow x^2+2 = 1\left(x^2-3x+2\right)+3x.$$

Logo,

$$\frac{x^2+2}{x^2-3x+2} = \frac{1(x^2-3x+2)+3x}{x^2-3x+2} = 1+\frac{3x}{x^2-3x+2}\,.$$

Assim,

$$\int \frac{x^2+2}{x^2-3x+2}\,dx = \int 1\,dx + \int \frac{3x}{x^2-3x+2}\,dx$$

$$= x + \int \frac{3x}{x^2-3x+2}\,dx.$$

Vamos agora calcular a integral $\int \frac{3x}{x^2-3x+2}\,dx.$

Temos $x^2 - 3x + 2 = (x-1)(x-2)$.
Assim,

$$\frac{3x}{(x-1)(x-2)} = \frac{A}{x-1} + \frac{B}{x-2}$$

$$= \frac{A(x-2) + B(x-1)}{(x-1)(x-2)}$$

$$= \frac{(A+B)x - 2A - B}{(x-1)(x-2)}$$

Então, $\begin{cases} A + B = 3 \\ -2A - B = 0 \end{cases} \Rightarrow A = -3$ e $B = 6$.

Logo,

$$\int \frac{3x}{x^2 - 3x + 2}\,dx = \int \frac{3x}{(x-1)(x-2)}\,dx = \int -\frac{3}{x-1} + \frac{6}{x-2}\,dx = -3\ln|x-1| + 6\ln|x-2| + k$$

Conclusão:

$$\int \frac{x^2+2}{x^2-3x+2}\,dx = x - 3\ln|x-1| + 6\ln|x-2| + k$$

(**4**) $\displaystyle\int \frac{2x+1}{x^3-x^2-x+1}\,dx$

Solução:

Temos $x^3-x^2-x+1=(x+1)(x-1)^2$.

Assim,

$$\frac{2x+1}{(x+1)(x-1)^2}=\frac{A}{x+1}+\frac{B}{x-1}+\frac{C}{(x-1)^2}=\frac{A(x-1)^2+B(x+1)(x-1)+C(x+1)}{(x+1)(x-1)^2}$$

Então, $2x+1=A(x-1)^2+B(x+1)(x-1)+C(x+1)$.

Como essa igualdade é válida para todo x real, fazendo:

- $x=1 \Rightarrow 3=2C \Rightarrow C=\frac{3}{2}$
- $x=-1 \Rightarrow -1=4A \Rightarrow A=-\frac{1}{4}$
- $x=0 \Rightarrow 1=-\frac{1}{4}-B+\frac{3}{2} \Rightarrow B=\frac{1}{4}$

Logo,

$$\int \frac{2x+1}{x^3-x^2-x+1}\,dx=-\frac{1}{4}\int\frac{1}{x+1}\,dx+\frac{1}{4}\int\frac{1}{x-1}\,dx+\frac{3}{2}\int\frac{1}{(x-1)^2}\,dx$$

$$=-\frac{1}{4}\ln|x+1|+\frac{1}{4}\ln|x-1|-\frac{3}{2(x-1)}+k$$

Exercícios: Calcule as seguintes integrais utilizando a técnica de frações parciais.

(1) $$\int \frac{x+4}{x^2+5x-6}\,dx$$

(2) $$\int \frac{x^2+2}{x^3-2x^2+x}\,dx$$

(3) $$\int \frac{x^3-x^2+1}{x^2-2x+1}\,dx$$

(4) $$\int \frac{2x^4+x-2}{x^3-x^2-2x}\,dx$$

Denominadores irredutíveis do 2º grau

(a) Integrais do tipo $\int \frac{p(x)}{ax^2+bx+c}\,dx$, com $\Delta = b^2-4ac<0$

Para resolver este tipo de integral devemos reescrever o denominador como soma de quadrados e fazer uma mudança de variáveis.

Exemplo: Calcule $\int \frac{2x+1}{x^2+2x+2}\,dx$.

Solução:

Observe que as raízes do denominador não são reais, pois $\Delta = b^2-4ac=-4<0$.

Temos que

$$\begin{aligned} x^2+2x+2 &= x^2+2x+1+1 \\ &= (x+1)^2+1 \end{aligned}$$

Logo,

$$\int \frac{2x+1}{x^2+2x+2}\,dx = \int \frac{2x+1}{1+(x+1)^2}\,dx.$$

Fazendo $u=x+1$, temos que $du=dx$.

Daí,

$$\int \frac{2x+1}{1+(x+1)^2}\, dx = \int \frac{2(u-1)+1}{1+u^2}\, du$$

$$= \int \frac{2u-1}{1+u^2}\, du$$

$$= \int \frac{2u}{1+u^2}\, du - \int \frac{1}{1+u^2}\, du$$

$$= \ln(1+u^2) - arctg(u) + k$$

$$= \ln(1+(x+1)^2) - arctg(x+1) + k$$

$$= \ln(x^2+2x+2) - arctg(x+1) + k$$

$$\int \frac{2u}{1+u^2}\, du = \int \frac{1}{w}\, dw = \ln|w| + k_1 = \ln|1+u^2| + k_1 = \ln(1+u^2) + k_1$$

$$w = 1+u^2$$
$$dw = 2udu$$

(b) Integrais do tipo $\int \frac{p(x)}{(x-\alpha)(ax^2+bx+c)}\,dx$, com $\Delta = b^2 - 4ac < 0$

Teorema 3: Sejam $m, n, p, a, b, c, \alpha \in \mathbb{R}$ tais que $\Delta = b^2 - 4ac < 0$. Então existem constantes A, B e C tais que

$$\frac{mx^2+nx+p}{(x-\alpha)(ax^2+bx+c)} = \frac{A}{x-\alpha} + \frac{Bx+C}{ax^2+bx+c}$$

Exemplo: Calcule $\int \frac{8x^2+x+1}{x^3-8}\,dx$.

Solução:

Temos que $x^3 - 8 = (x-2)(x^2+2x+4)$.

Além disso, observe que o polinômio x^2+2x+4 não possui raízes reais, pois $\Delta = b^2 - 4ac = -12 < 0$.

Vamos usar o Teorema 3 para reescrever o integrando:

$$\frac{8x^2+x+1}{(x-2)(x^2+2x+4)} = \frac{A}{x-2} + \frac{Bx+C}{x^2+2x+4}$$

$$= \frac{A(x^2+2x+4)+(Bx+C)(x-2)}{(x-2)(x^2+2x+4)} \Rightarrow$$

Então, devemos ter $8x^2 + x + 1 = A(x^2 + 2x + 4) + (Bx + C)(x - 2)$.

Como essa igualdade é válida para todo x real, fazendo:

- $x = 2 \Rightarrow A = \frac{35}{12}$
- $x = 0 \Rightarrow C = \frac{16}{3}$
- $x = 1 \Rightarrow B = \frac{61}{12}$

Logo,

$$\begin{aligned}
\int \frac{8x^2 + x + 1}{x^3 - 8}\, dx &= \int \left(\frac{A}{x - 2} + \frac{Bx + C}{x^2 + 2x + 4} \right) dx \\
&= \frac{35}{12} \int \frac{1}{x - 2}\, dx + \int \frac{\frac{61}{12}x + \frac{16}{3}}{x^2 + 2x + 4} dx \\
&= \frac{35}{12} \ln|x - 2| + \frac{1}{12} \int \frac{61x + 64}{x^2 + 2x + 4}\, dx
\end{aligned}$$

Vamos agora resolver a integral $\int \frac{61x + 64}{x^2 + 2x + 4}\, dx$.

Veja que $\displaystyle\int \frac{61x+64}{x^2+2x+4}\,dx = \int \frac{61x+64}{(x+1)^2+3}\,dx.$

Fazendo $u = x+1$, temos que $du = dx$, logo

$$\int \frac{61x+64}{(x+1)^2+3}\,dx = \int \frac{61(u-1)+64}{u^2+3}\,du = \int \frac{61u+3}{u^2+3}\,du$$

$$= \int \frac{61u}{u^2+3}\,du + 3\int \frac{1}{u^2+3}\,du$$

$$= \frac{61}{2}\ln(u^2+3) + 3\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\,arctg\left(\frac{u}{\sqrt{3}}\right)\right) + k_1$$

$$= \frac{61}{2}\ln\big((x+1)^2+3\big) + \sqrt{3}\,arctg\left(\frac{x+1}{\sqrt{3}}\right) + k_1$$

Conclusão:

$$\int \frac{8x^2+x+1}{x^3-8}\,dx = \frac{35}{12}\ln|x-2| + \frac{1}{12}\left(\frac{61}{2}\ln\big((x+1)^2+3\big) + \sqrt{3}\,arctg\left(\frac{x+1}{\sqrt{3}}\right)\right) + k$$

$$= \frac{35}{12}\ln|x-2| + \frac{61}{24}\ln(x^2+2x+4) + \frac{\sqrt{3}}{12}\,arctg\left(\frac{x+1}{\sqrt{3}}\right) + k$$

Observação:

Se um fator irredutível do $2^{\underline{o}}$ grau aparecer com multiplicidade m, então a decomposição é da forma

$$\frac{p(x)}{(ax^2+bx+c)^m} = \frac{A_1x+B_1}{ax^2+bx+c} + \frac{A_2x+B_2}{(ax^2+bx+c)^2} + \cdots + \frac{A_mx+B_m}{(ax^2+bx+c)^m}$$

Exercício: Calcule a integral $\displaystyle\int \frac{4x^2+4}{(x+1)(x^2+2x+5)}\,dx.$