espaço vetorial

A1) $u+(w+v)=(u+v)+w$

A2) $u+v = v+u$

A3) $\exists\ \vec{0} \in V \mid u+\vec{0}=\vec{0}+u=u$

A4) $\exists\ -(u) \in V \mid -u+u=0$

M1) $a\cdot(u+v)=a\cdot u+a\cdot v$

M2) $(a+b)\cdot u = u\cdot a + u\cdot b$

M3) $a\cdot(b\cdot u)=(a+b)\cdot u$

M4) $1\cdot u = u$

Combinação linear

- verifique se o vetor $=(10,2,-1)$ é combinação linear dos $v_1=(1,-2,1)$ e $v_2=(3,3,2)$
- Escalares tal que $V=a\cdot v_1+b\cdot v_2$

temos:

$(10,+2,-1)=(1,-2,1)\cdot a + b\cdot(3,3,2)$

$=(a,-2a,a)+(3b,3b,2b)$

$\begin{cases} a+3b=10 \\ -2a+3b=2 \\ a+2b=-1 \end{cases}$ | escalonar ... $0=7$ SI - não é combinação linear

SPD - só 1 solução

SPI infinitas combinações

- Que combinações devem satisfazer $\{x,y,z$ para que o $v=(x,y,z)$ seja combinação L. de $u=(-1,3,-1)$ e $v=(1,-2,4)$

Solução: $(x,y,z)=a\cdot(-1,3,-1)+b\cdot(1,-2,4)$ $\begin{cases} -a+b=x \\ 3a-2b=y \\ -a+4b=z \end{cases}$

$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & x \\ 0 & 1 & & 3x+y \\ 0 & 0 & 1 & -10x-3y+z \end{array}\right]$ Todos vetores (x,y,z) que são combinação linear de v,u satisfazem a equação $10x+3y-z=0$, é um plano que passa na origem.

Subespaço

Subespaço - seja V um espaço vetorial. Um subconjunto W, não vazio, é um sub espaço vetorial de V se for satisfeito as seguintes condições.

1) $\vec{0}$ e W (optativa) | se não tiver não é sub espaço

2) $\forall\ u,v \in W$, tem-se: $u+v \in W$

3) $\forall\ u \in W$ e $a \in \mathbb{R}$, tem se: $a\cdot u \in W$

interpretação geométrica: I  II

I) não é subespaço pois a soma/multipl. não deu um V passa por cima II) passa por cima do gráfico

Exemplo: $W=\{(x,y,z) ; y=x, z=0\}$

1) $\vec{0}=(0,0,0) \to x=0$ logo $y=0, z=0$ então É subespaço V.

2) seja $u=(x_1,x_2,0)$
$v=(y_1,y_2,0)$
$\Rightarrow v+v=(x_1,x_2,0)+(y_1,y_2,0)$
$=(x_1+y_1),(x_2+y_2)+(0,0)$
$=(x,x,0)$
em q $x=x_1+y_1$ | como satisfaz a propriedade

3) seja $u=(x_1,x_1,0) \in W$ e $a \in \mathbb{R}$
$a\cdot u = a\cdot(x_1,y_1,0)$
$=(a\cdot x_1),(a\cdot y_1), a\cdot 0$
$=(x,x,0)$

Exemplo 2: $S=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 ; y=x+1\}$

$(0,1)$ não tem nulo $0+1=1$ ou $x=0, y=0+1=1$

$u=(x;x+1)$ $0\cdot(x,x+1)$ $0\cdot(x,x+1)$

Subespaço gerado

É o espaço de todos os vetores que podem ser obtidos através de uma combinação linear de um conjunto de vetores que pertence a um espaço vetorial V.

$W=\{v \in V \mid v=a\cdot v_1+b\cdot v_2 \cdots a_n\cdot v_n\}$ o subespaço W é gerado a partir de A

$W=G(A)$ └ são geradores de W

A é o conjunto geradores

Exemplo 1 | $V=\mathbb{R}^2$ e $A=\{u=(-2,3)\}$

qual o seu espaço g. por u

é dado por:

$A=[u]=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 / (x,y)=a\cdot(u)\}$,

$(x,y)=a\cdot u$
$(x,y)=a\cdot(-2,3)$
$(x,y)=-2a, 3a$

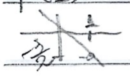
$\begin{cases} -2a=x & \text{I} \\ 3a=y & \text{II} \end{cases}$

I) $a=\frac{-x}{2}$

II) $y=3a \Rightarrow y=3\cdot\left(\frac{-x}{2}\right) \Rightarrow \boxed{y=\frac{-3x}{2}}$

geometricamente:

$y(1)=\frac{-3\cdot 1}{2} \Rightarrow y=\frac{-3}{2}$ $x=1$



portanto $\overset{\text{gerador}}{[-2,3]}=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \mid y=\frac{-3x}{2}\}$

Exemplo 2 | $V=\mathbb{R}^3$ $\{u=(2,1,0)$ $v=(0,0,4)$ $w=(0,2,5)$

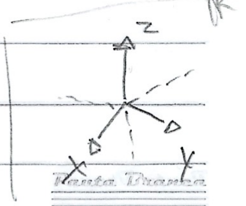
$V=(x,y,z)$

$[u,v,w]=\{(x,y,z)=a\cdot u+b\cdot v+c\cdot w\}$

$\begin{cases} 2a=x \\ a+2c=y \\ 4b+5c=z \end{cases}$ $\boxed{a=\frac{x}{2}}$ $\boxed{c=\frac{y}{2}-\frac{x}{4}}$

$b=\frac{5x}{16}-\frac{5y}{8}+\frac{z}{4}$

Como isolamos todas as variaveis em função de x,y,z logo gera todo $\mathbb{R}^3$



LD ou LI - LD) é um conjunto de vetores $\{v_1, v_2, \cdots, v_n\}$ se existem escalares não todos simultaneamente nulo, além do $(0,0,\cdots 0)$.

LI) Um conjunto $\{v_1, v_2, \cdots, v_3\}$ se a única solução da equação é a trivial, onde todos os escalares = zero.

EXEMPLO 1)	EXEMPLO 2	DICA
$A = \{v_1 = (1,0)\ v_2 = (0,1)\}$	$B = \{(1,0), (0,1), (2,-3)\}$	① se dois vetores são proporcionais é LD
$a \cdot v_1 + b \cdot v_2 = \vec{0} = (0,0)$	$a \cdot \binom{1}{0} + b\binom{0}{1} + c\binom{2}{-3} = \binom{0}{0}$	EX - $A = \{\overset{v_1}{(2,3)}, \overset{v_2}{(4,6)}\}$ o v2 é o dobro do v1
$a \cdot (1,0) + b \cdot (0,1) = (0,0)$	$\begin{cases} a + 2c = 0 \\ b - 3c = 0 \end{cases}$	② faz até montar o sistema, escalona ou
$(a,0) + (0,b) = (0,0)$	$a = -2c$ $b = 3c$	resolve da forma que
$\begin{cases} a + 0 = 0 \\ 0 + b = 0 \end{cases}$ $\therefore$ LI	$\therefore$ LD	vc viu no vídeo (escalonar na forma de SL.)

③ se tem mais variáveis que equações

Base) $A = \{v_1, v_2, \cdots, v_n\} \in V$, A só é base de V se:

① A é LI ② A gera todo V $(G(a) = V)$

Passo a Passo

Ⅰ $a \cdot v_1 + b \cdot v_2 + \cdots = \vec{0}$

Ⅱ $\overbrace{(x, y, z)}^{\text{vetor algebrico}} = \boxed{a v_1 + b v_2 + \cdots}$ isola abc em função xyz

DIMENSÃO) V tem dimensão $n \in \mathbb{N}$ se V tem base com n vetores. A quantidade de variáveis livres da base é a dimensão de V.