7- Função Exponencial

Função Exponencial

Chama-se **função exponencial** qualquer função $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dada por uma lei da forma $f(x) = a^x$, em que a é um número real dado, $a > 0$ e $a \neq 1$.

$$\boxed{f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}, f(x) = a^x \ \ (a > 0 \text{ e } a \neq 1)}$$

Exemplos:

(a) $f(x) = 2^x$ **(b)** $f(x) = \left(\frac{1}{2}\right)^x$ **(c)** $f(x) = \left(\sqrt{2}\right)^x$ **(d)** $f(x) = e^x$

Observe que, na definição acima, há restrições em relação à base **a**.
De fato:

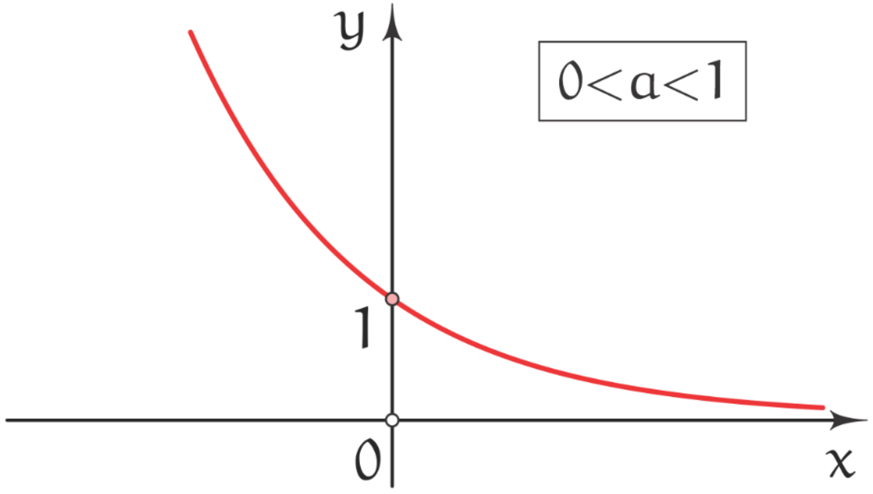
- Se $a < 0$, nem sempre o número a^x é real, como, por exemplo, $(-3)^{\frac{1}{2}} \notin \mathbb{R}$.
- Se $a = 0$, temos:

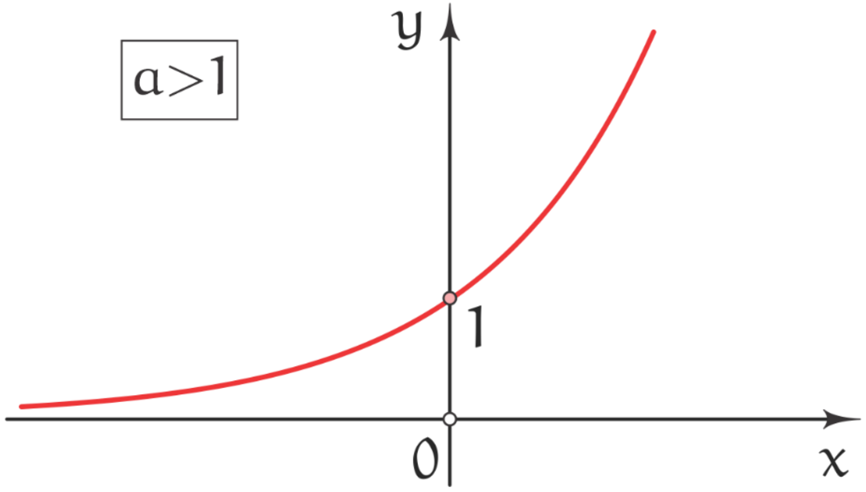
$$\begin{cases} \text{se } x > 0,\ y = 0^x = 0 \text{ (função constante)} \\ \text{se } x < 0, \text{ não se define } 0^x \text{ (por exemplo, } 0^{-3}) \\ \text{se } x = 0, \text{ não se define } 0^0 \end{cases}$$

- Se $a = 1$, para todo $x \in \mathbb{R}$, a função dada por $y = 1^x = 1$ é constante.

Gráfico da Função Exponencial

O gráfico de uma função exponencial $f(x) = a^x$ possui um dos aspectos abaixo, dependendo do valor de a.

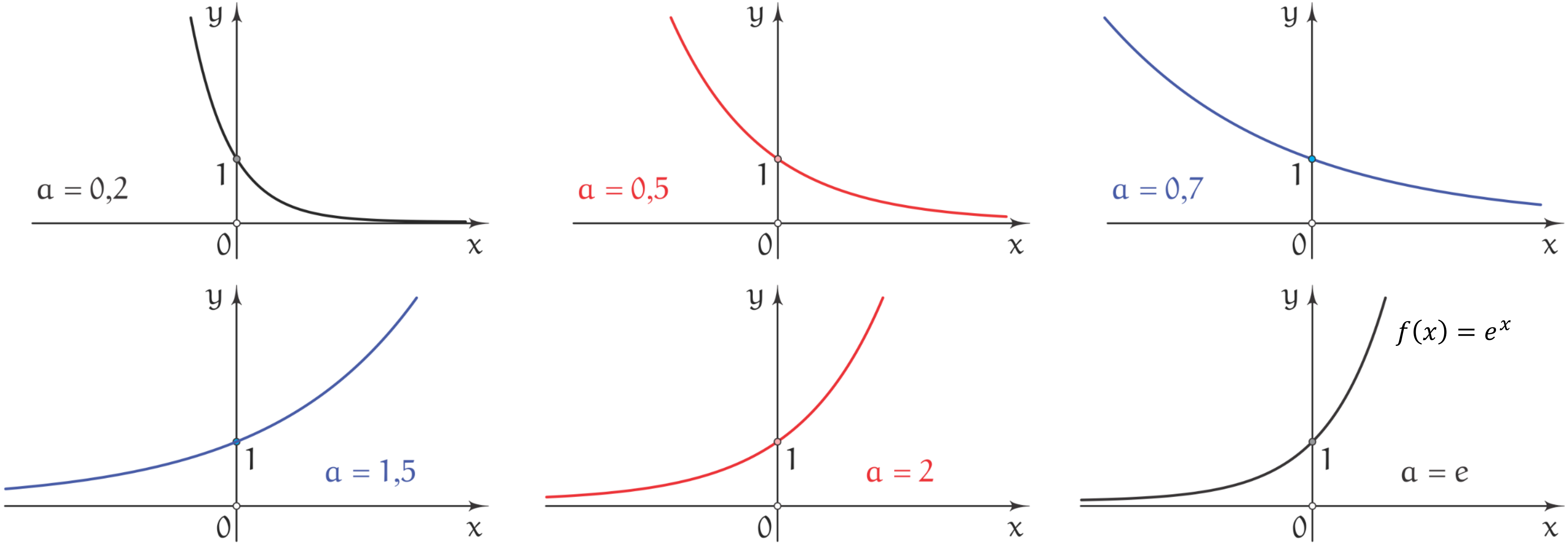




Propriedades:

- O gráfico da função exponencial intersecta o eixo y no ponto $(0,1)$, pois
$$x = 0 \Rightarrow y = a^0 = 1.$$
- A imagem de $f(x) = a^x$ é dada por $Im(f) = \{y \in \mathbb{R}\,|y > 0\} = \mathbb{R}_+^*$.
- Quando $0 < a < 1$, temos que $y = a^x$ é decrescente;
- Quando $a > 1$, temos que $y = a^x$ é crescente;
- Se $0 < a < 1$, então a^x se aproxima de zero quando x assume valores positivos cada vez maiores;
- Se $a > 1$, então a^x se aproxima de zero quando x assume valores negativos cada vez menores;
- A função exponencial é injetora;

Exemplo: A figura a seguir mostra os gráficos das funções exponenciais $f(x) = a^x$, com a tomando os valores $0{,}2$; $0{,}5$; $0{,}7$; $1{,}5$; 2 e o número de Euler $e \cong 2{,}718$.



O último gráfico que corresponde ao gráfico da **função exponencial de base *e***, ou seja,

$$f(x) = e^x.$$

Essa função será importante para estudos posteriores.

Os gráficos das funções exponenciais são chamados de **curvas exponenciais**.

Observação:

Existem outras funções de $\mathbb{R}$ em $\mathbb{R}$ cujas leis apresentam a variável x no expoente de alguma potência, como

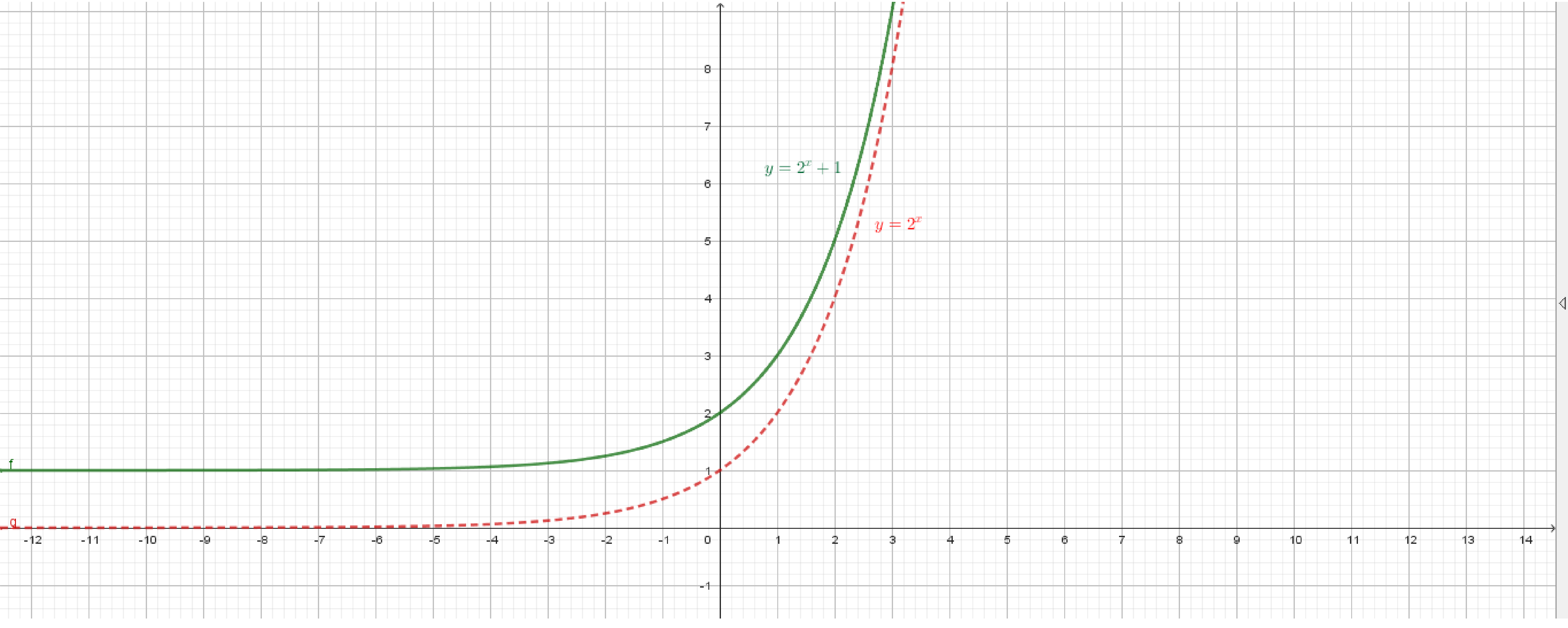
$$y = 3 \cdot 2^x, \qquad y = 2^{x-1} + 3, \qquad y = \left(\frac{1}{5}\right)^{x+3} - 1.$$

Os gráficos dessas funções também são curvas exponenciais semelhantes às apresentadas no exemplo anterior e também são tratadas como funções exponenciais.

Exemplos:

(1) Construa o gráfico da função $f(x) = 2^x + 1$

Solução: Observe que o gráfico de f corresponde ao gráfico de $y = 2^x$ somado a uma unidade. Logo, para construir esse gráfico basta transladar o gráfico de $y = 2^x$ uma unidade para cima.

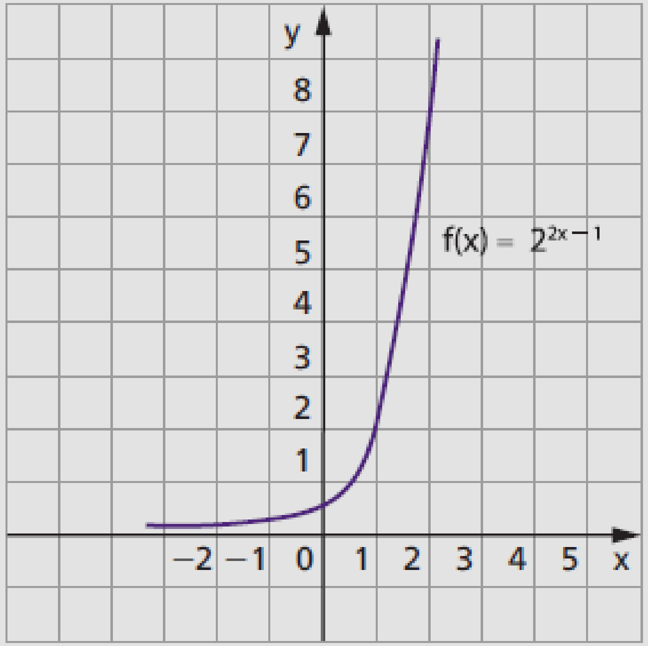


(2) Construa o gráfico da função $f(x) = 2^{2x-1}$.

Solução

Vamos contruir uma tabela da seguinte maneira: atribuímos valores a $2x - 1$, calculamos 2^{2x-1} e finalmente x.

x	$2x-1$	$y=2^{2x-1}$
-1	-3	$\frac{1}{8}$
$-\frac{1}{2}$	-2	$\frac{1}{4}$
0	-1	$\frac{1}{2}$
$\frac{1}{2}$	0	1
1	1	2
$\frac{3}{2}$	2	4
2	3	8

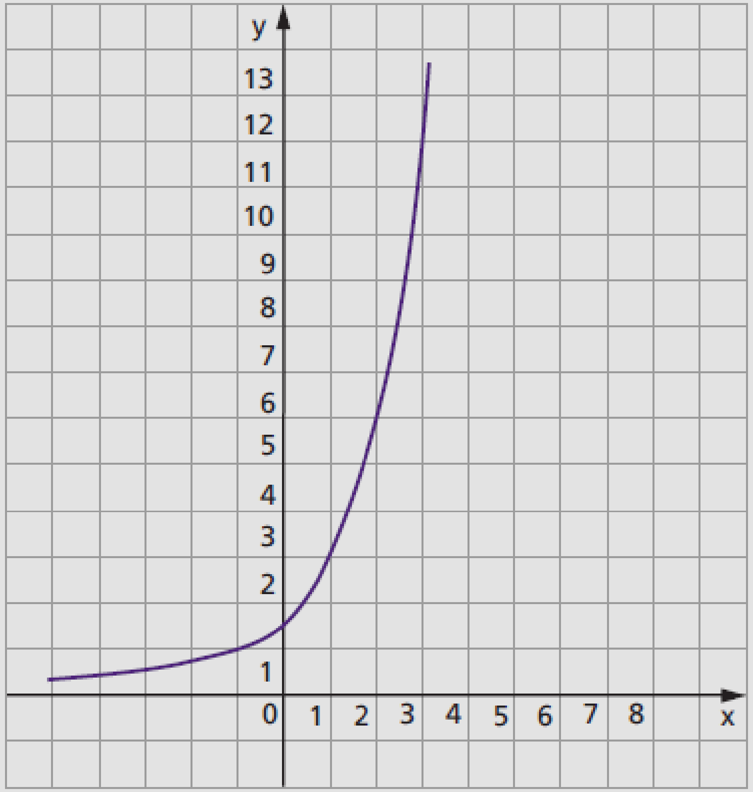


(3) Construa o gráfico da função $f(x) = 3 \cdot 2^{x-1}$.

Solução

Vamos construir uma tabela atribuindo valores a $x - 1$ e calculando 2^{x-1}, $3 \cdot 2^{x-1}$ e x. Temos:

x	$x - 1$	2^{x-1}	$y = 3 \cdot 2^{x-1}$
-2	-3	$\frac{1}{8}$	$\frac{3}{8}$
-1	-2	$\frac{1}{4}$	$\frac{3}{4}$
0	-1	$\frac{1}{2}$	$\frac{3}{2}$
1	0	1	3
2	1	2	6
3	2	4	12
4	3	8	24



Equações Exponenciais

Uma **equação exponencial** é aquela que apresenta a incógnita no expoente de pelo menos uma de suas potências.

Exemplos de equações exponenciais:

(**a**) $2^x = 64$ (**b**) $\left(\frac{1}{9}\right)^x = 81$ (**c**) $9^x - 3^x = 72$

Método da redução a uma base comum

Um método usado para resolver equações exponenciais consiste em reduzir ambos os membros da equação à potência de mesma base a (quando isso for possível) e, daí, aplicar a propriedade:

$$\boxed{a^{x_1} = a^{x_2} \Rightarrow x_1 = x_2.}$$

Essa propriedade segue do fato das funções exponenciais serem injetoras.

Exemplo: Resolva, em $\mathbb{R}$, as seguintes equações exponenciais.

(a) $2^x = 32$

(b) $8^x = \frac{1}{32}$

(c) $\left(\sqrt{3}\right)^x = \sqrt[3]{81}$

(d) $3^{2x+1} \cdot 9^{3x+1} = 27^{x-1}$

(e) $5^{x-3} = 1$

(f) $9^x + 3^x = 12$

(g) $4^{x+1} - 9 \cdot 2^x + 2 = 0$

Inequações Exponenciais

Uma **inequação exponencial** é aquela que apresenta a incógnita no expoente de pelo menos uma de suas potências.

Exemplos de inequações exponenciais:

(**a**) $2^x > 32$ (**b**) $\left(\frac{1}{3}\right)^x \leq 27$ (**c**) $4^x - 2^x \leq 12$

Método da redução a uma base comum

Este método será aplicado quando ambos os membros da inequação puderem ser representados como potências de mesma base a ($a > 0$ e $a \neq 1$).
Lembremos que a função exponencial $f(x) = a^x$ é crescente, se $a > 1$, ou decrescente, se $0 < a < 1$; portanto:

- Se $a > 1$, tem-se: $\boxed{a^{x_1} < a^{x_2} \Rightarrow x_1 < x_2}$
- Se $0 < a < 1$, tem-se: $\boxed{a^{x_1} < a^{x_2} \Rightarrow x_1 > x_2}$

Exemplo: Resolva, em $\mathbb{R}$, as seguintes inequações exponenciais.

(a) $2^x > 64$

(b) $\left(\frac{1}{3}\right)^x \leq 27$

(c) $\left(\sqrt{2}\right)^x \geq 8\sqrt{2}$

(d) $(0{,}7)^{2x-1} > 1$

(e) $(3^x)^{2x-7} > \frac{1}{27}$

(f) $7^x - 6 \geq 7^{1-x}$

7- Função Logarítmica

Logaritmos

Sendo a e b números reais positivos, com $a \neq 1$, chama-se **logaritmo de b na base a** o expoente x ao qual se deve elevar a base a de modo que a potência a^x seja igual a b.

$$\boxed{\log_a b = x \Leftrightarrow a^x = b}$$

Dizemos que:

- a é a **base do logaritmo**;
- b é o **lagaritmando**;
- x é o **logaritmo**.

Exemplos:

(**a**) $\log_2 8 = 3$, pois $2^3 = 8$

(**b**) $\log_3 9 = 2$, pois $3^2 = 9$

(**c**) $\log_2 \frac{1}{4} = -2$, pois $2^{-2} = \frac{1}{4}$

(**d**) $\log_5 5 = 1$, pois $5^1 = 5$

(**e**) $\log_4 1 = 0$, pois $4^0 = 1$

(**f**) $\log_3 \sqrt{3} = \frac{1}{2}$, pois $3^{\frac{1}{2}} = \sqrt{3}$

Observação: As restrições para a $(a > 0$ e $a \neq 1)$ e para $b\,(b > 0)$ indicadas na definição garantem a existência e a unicidade de $\log_a b$.

Exemplo: Calcule, usando a definição:

a) $\log_{\sqrt[3]{9}} 3$

Façamos $\log_{\sqrt[3]{9}} 3 = x$. Temos:

$$(\sqrt[3]{9})^x = 3 \Rightarrow (\sqrt[3]{3^2})^x = 3 \Rightarrow \sqrt[3]{3^{2x}} = 3 \Rightarrow 3^{\frac{2x}{3}} = 3 \Rightarrow \frac{2x}{3} = 1 \Rightarrow x = \frac{3}{2}$$

b) $\log_{16} 0{,}25$

Façamos $\log_{16} 0{,}25 = y$. Temos:

$$16^y = 0{,}25 \Rightarrow (2^4)^y = \frac{1}{4} \Rightarrow 2^{4y} = 2^{-2} \Rightarrow 4y = -2 \Rightarrow y = -\frac{1}{2}$$

Consequências da Definição

(1) O logaritmo de 1 em qualquer base a é igual a 0.

$$\log_a 1 = 0, \text{ pois } a^0 = 1.$$

(2) O logaritmo da base, qualquer que seja ela, é igual a 1.

$$\log_a a = 1, \text{ pois } a^1 = a.$$

(3) A potência de base a e expoente $\log_a b$ é igual a b.

$$a^{\log_a b} = b,$$

pois o logaritmo de b na base a é justamente o expoente que se deve dar à base a para que a potência fique igual a b.

(4) Se dois logaritmos em uma mesma base são iguais, então os logaritmandos também são iguais.

$$\log_a b = \log_a c \Rightarrow b = c,$$

pois $\log_a b - \log_a c \Rightarrow a^{\log_a c} = b \Rightarrow c = b$.

Notações Importantes

(i) O **logaritmo de base 10** (logaritmo decimal) é representado por

$$\log_{10} x = \log x.$$

(ii) O **logaritmo cuja base é o número de Euler** $e \cong 2{,}718$ (logaritmo natural ou logaritmo neperiano) é denotado por

$$\log_e x = \ln x.$$

Atenção!

Na área de computação é muito utilizado o logaritmo de base 2, e ele costuma ser indicado simplesmente por $\log_2 x = \log x$. Desse modo, para evitar confusão com os logaritmos decimais, verifique em qual base estão indicados os logaritmos.

Observação: As consequências da definição para o logaritmo natural ficam:

$(\mathbf{1})\ \ln 1 = 0$ $\quad$ $(\mathbf{2})\ \ln e = 1$ $\quad$ $(\mathbf{3})\ e^{\ln x} = x$

Propriedades Operatórias

(1) Logaritmo do produto:

$$\boxed{\log_a(b \cdot c) = \log_a b + \log_a c}$$

(2) Logaritmo do quociente:

$$\boxed{\log_a\left(\frac{b}{c}\right) = \log_a b - \log_a c}$$

(3) Logaritmo da potência:

$$\boxed{\log_a b^r = r \cdot \log_a b}$$

Mudança de Base

Há situações em que nos defrontamos com um logaritmo em certa base e temos de convertê-lo a outra base. A fórmula de mudança de base é dada por:

$$\boxed{\log_a b = \frac{\log_c b}{\log_c a}}$$

Exemplo:

Vejamos agora como é possível obter o valor de $\log_2 5$ usando a calculadora. Podemos transformar $\log_2 5$ para base 10 ou para base **e**:

- base 10: $\log_2 5 = \dfrac{\log_{10} 5}{\log_{10} 2} \simeq \dfrac{0{,}699}{0{,}3010} \simeq 2{,}32$
- base **e**: $\log_2 5 = \dfrac{\log_e 5}{\log_e 2} = \dfrac{\ell n\, 5}{\ell n\, 2} \simeq \dfrac{1{,}609}{0{,}693} \simeq 2{,}32$

Exercícios:

(1) Calcule pela definição, os seguintes logaritmos.

(a) $\log_2 32$ (b) $\log_3 81$ (c) $\log_8 16$

(d) $\log_{0,2} \sqrt[3]{25}$ (e) $\log 0{,}01$ (f) $\ln e$

(2) Supondo x, y e b reais positivos, com $b \neq 1$ e sabendo que $\log_b x = 2$ e $\log_b y = 3$, qual é o valor de:

(a) $\log_b(xy)$ (b) $\log_b\left(\frac{x}{y}\right)$ (c) $\log_b\left(\frac{x^3}{y^2}\right)$ (d) $\log_b(b\sqrt{xy})$

(3) Qual é o valor real de x que satisfaz a equação $\log_2(x-2) + \log_2 x = 3$?

(4) Resolva, em $\mathbb{R}$, as seguintes equações:

a) $2 \cdot \log_7 (x + 3) = \log_7 (x^2 + 45)$
b) $\log (4x - 1) - \log (x + 2) = \log x$
c) $3 \cdot \log_5 2 + \log_5 (x - 1) = 0$

Função Logarítmica

Dado um número real a, com $a > 0$ e $a \neq 1$, chama-se **função logarítmica de base a** a função $f\colon \mathbb{R}_+^* \to \mathbb{R}$ dada pela lei $f(x) = \log_a x$.

$$\boxed{f\colon \mathbb{R}_+^* \to \mathbb{R}, f(x) = \log_a x \quad (a > 0 \text{ e } a \neq 1)}$$

Exemplos de funções logarítmicas:

(**a**) $f(x) = \log_2 x$ (**b**) $f(x) = \log x$ (**c**) $f(x) = \ln x$

Exemplo: Determine o domínio da função $f(x) = \log_{(x-2)}(5-2x)$.

Devemos ter:

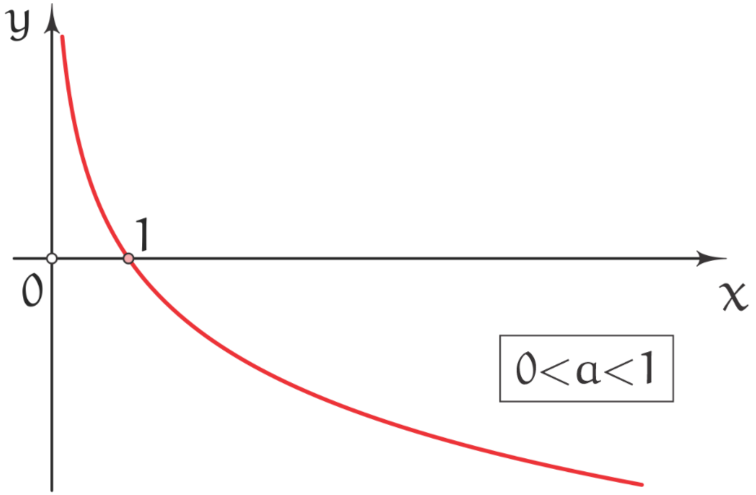
- $5 - 2x > 0 \Rightarrow -2x > -5\ (-1) \Rightarrow 2x < 5 \Rightarrow x < \frac{5}{2}$
- $x - 2 > 0 \Rightarrow x > 2$
- $x - 2 \neq 1 \Rightarrow x \neq 1 + 2 \Rightarrow x \neq 3$

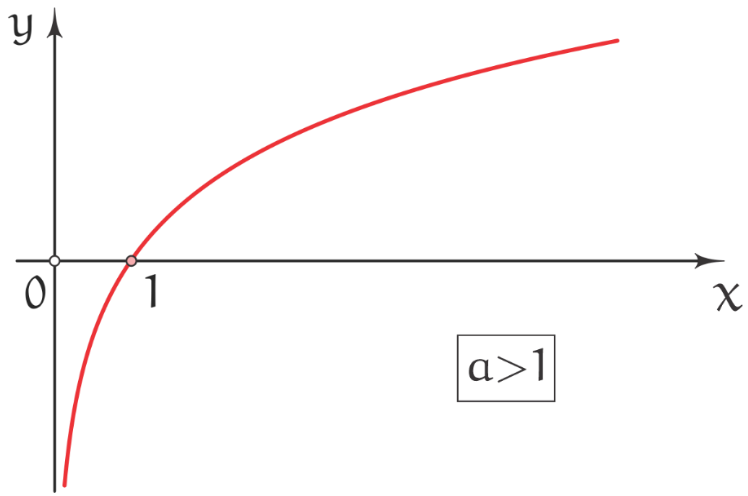
Fazendo a intersecção das três condições, obtemos

$$D(f) = \left\{x \in \mathbb{R}\colon 2 < x < \frac{5}{2}\right\}.$$

Gráfico da Função Logarítmica

O gráfico de uma função logarítmica $f(x) = \log_a x$ possui um dos aspectos abaixo, dependendo do valor de a.

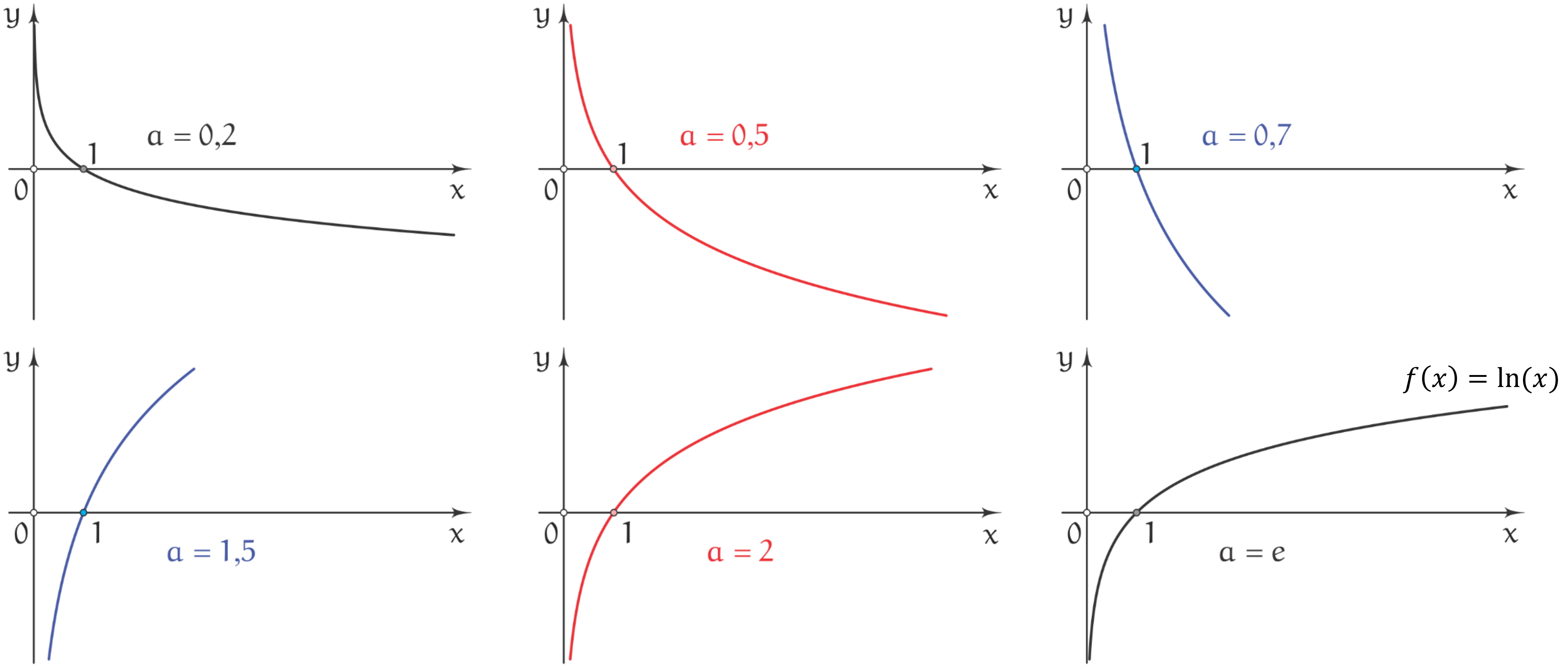




Propriedades:

- O gráfico da função logarítmica intersecta o eixo x no ponto $(1, 0)$, pois $\log_a 1 = 0$.
- Quando $0 < a < 1$, temos que $y = \log_a x$ é decrescente.
- Quando $a > 1$, temos que $y = \log_a x$ é crescente.
- A imagem de f é o conjunto dos números reais, ou seja, $Im(f) = \mathbb{R}$.
- A função logarítmica é bijetora.
- Se $0 < a < 1$, temos que: quando x se aproxima de zero por valores positivos, o gráfico de f se aproxima de $+\infty$.
- Se $a > 1$, temos que: quando x se aproxima de zero por valores positivos, o gráfico de f se aproxima de $-\infty$.

Exemplo: A figura a seguir mostra os gráficos das funções $f\colon \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$ dadas por $f(x) = \log_a(x)$, com a tomando os valores $0{,}2; 0{,}5; 0{,}7; 1{,}5; 2$ e o número de Euler e.

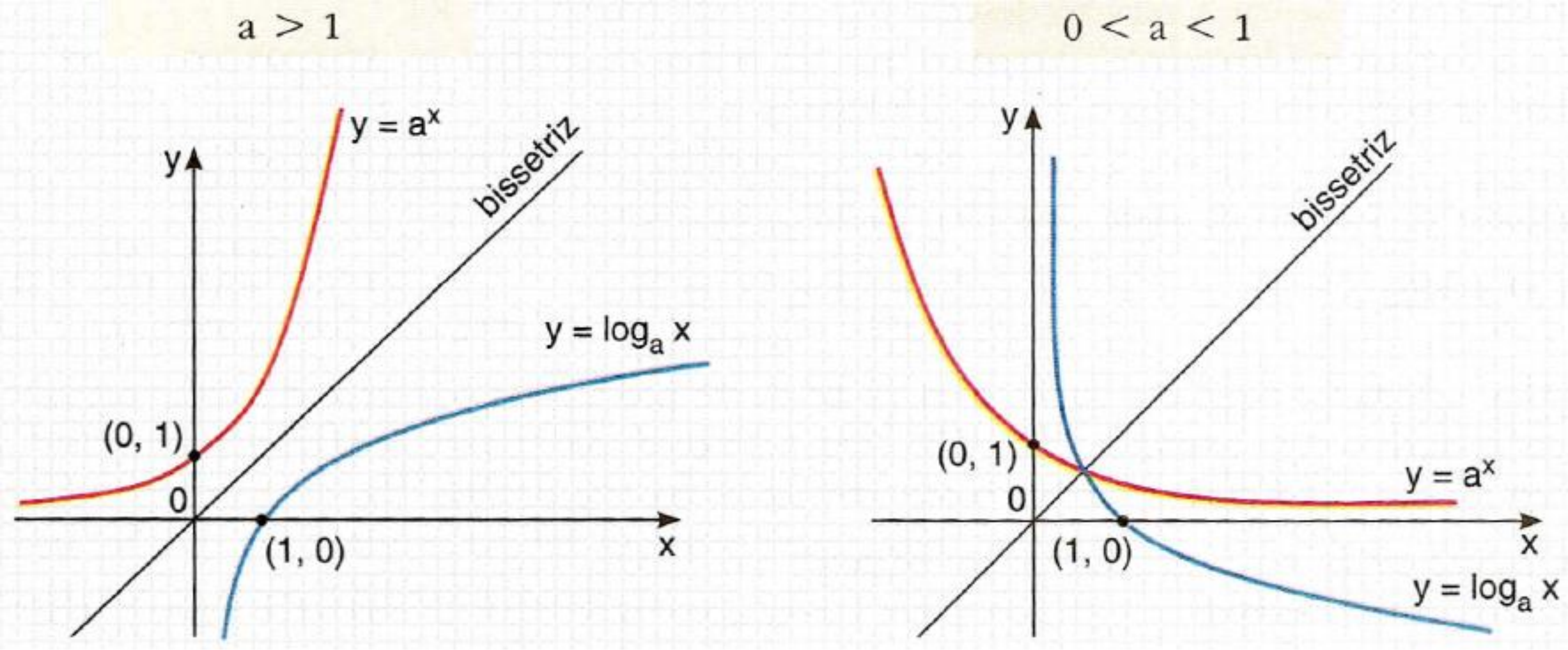


Uma atenção especial para o último gráfico que corresponde ao gráfico da **função logarítmica de base e**, ou seja, $f(x) = \log_e(x)$, que é chamada de **função logarítmica natural** e é denotada por

$$f(x) = \ln(x).$$

Relação entre Função Exponencial e Função Logarítmica

Pode-se provar que a função exponencial de base a $(y = a^x)$ e a função logarítmica de base a $(y = \log_a x)$ são **funções inversas uma da outra**.



Desse modo são válidas as seguintes relações:

$\boxed{a^{\log_a(x)} = x, \text{ para todo } x > 0}$

$\boxed{\log_a(a^x) = x\,, \text{ para todo } x \in \mathbb{R}}$

Revisitando as Equações Exponenciais

Existem equações exponenciais que não podem ser reduzidas a uma igualdade de potências de mesma base. Para resolver esse tipo de equação utilizamos os logaritmos.

Exemplo: Resolva a equação $3^x = 5$.

1º modo: Usar a definição de logaritmo

Da definição de logaritmo, segue que $3^x = 5 \Rightarrow x = \log_3 5$.
Para obter esse valor, podemos usar uma calculadora científica, aplicando a fórmula da mudança de base:

$$x = \log_3 5 = \frac{\log 5}{\log 3} \cong \frac{0{,}6990}{0{,}4771} \cong 1{,}465.$$

2º modo: Aplicar logaritmo nos dois lados da equação

Aplicando logaritmo decimal em ambos os membros da equação $3^x = 5$, obtemos:

$$\log 3^x = \log 5 \Rightarrow x \cdot \log 3 = \log 5 \Rightarrow x = \frac{\log 5}{\log 3} \cong 1{,}465.$$

Exemplos

(1) Seja $f: \mathbb{R} \to]1, +\infty[$ dada por $f(x) = 2^x + 1$.

(**a**) Obtenha a lei que define f^{-1}.
(**b**) Represente f e f^{-1} no mesmo plano cartesiano.

Solução:

(**a**) Vamos isolar o x na expressão da função $y = 2^x + 1$.
Temos que:

$$y = 2^x + 1 \Rightarrow 2^x = y - 1.$$

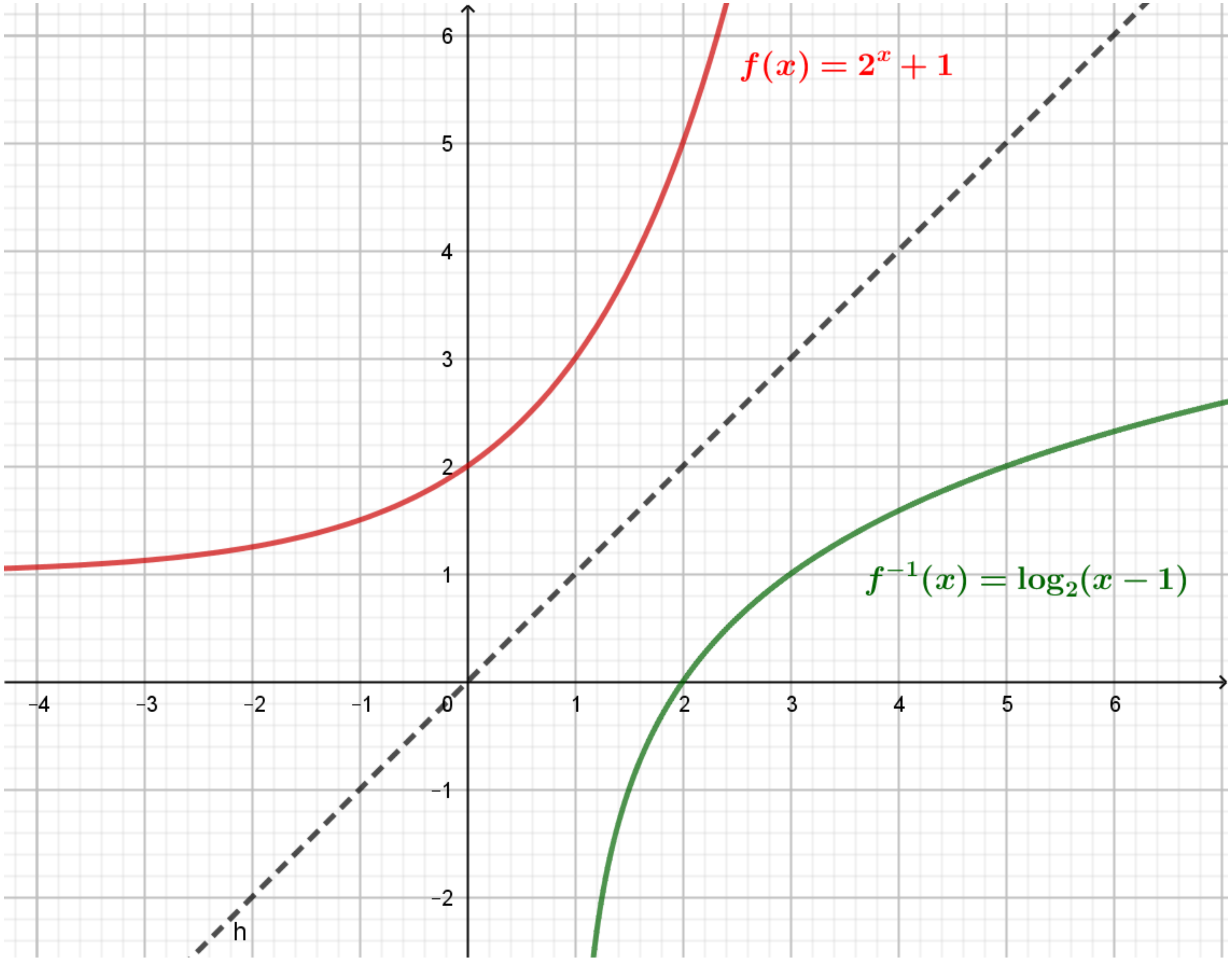
Aplicando logaritmo na base 2 dos dois lados da equação, obtemos:

$$\log_2(2^x) = \log_2(y-1)$$
$$\Rightarrow x = \log_2(y-1)$$

Trocando x e y de lugar, obtemos que a função inversa de f é dada por

$$f^{-1}(x) = \log_2(x-1).$$

(b) Gráficos de f e f^{-1} no mesmo plano cartesiano.



(2) Daqui a t anos o valor de uma máquina será $V(t) = 50(0{,}8)^t$ milhares de reais. Daqui a quanto tempo seu valor se reduzirá à metade? (Dado: $\log 2 = 0{,}3010$).

Solução:

Observe que, no presente momento, a máquina custa $V(0) = 50(0{,}8)^0 = 50$ mil reais.
Queremos determinar o tempo para que seu valor se reduza à metade, ou seja, queremos obter t tal que $V(t) = 25$, ou seja,

$$50(0{,}8)^t = 25 \Rightarrow (0{,}8)^t = \frac{25}{50} \Rightarrow (0{,}8)^t = \frac{1}{2}\,.$$

Aplicando logaritmo na base 10 em ambos os membros, obtemos:

$$\log(0{,}8)^t = \log\left(\frac{1}{2}\right) \Rightarrow \ t \cdot \log(0{,}8) = \log\left(\frac{1}{2}\right) \Rightarrow \ t = \frac{\log\left(\frac{1}{2}\right)}{\log\left(\frac{8}{10}\right)}\,.$$

Temos que

$$\log\left(\frac{1}{2}\right) = \log 1 - \log 2 = 0 - 0{,}3010 = -0{,}3010.$$

$$\log\left(\frac{8}{10}\right) = \log 8 - \log 10 = \log(2^3) - 1 = 3\log 2 - 1 = 3(0{,}3010) - 1 = -0{,}097.$$

Logo, $t = \frac{-0{,}3010}{-0{,}097} = 3{,}1030$, ou seja, o valor se reduzirá à metade em aproximadamente $3{,}10$ anos.

(**3**) Uma peça metálica foi aquecida até atingir a temperatura de $50\ ^\circ\mathrm{C}$. A partir daí, a peça resfriará de forma que, após t minutos, sua temperatura (em graus Celsius) será igual a $30 + 20e^{-0{,}2t}$. Usando a aproximação $\ln 2 = 0{,}7$, determine em quantos minutos a peça atingirá a temperatura de $35\ ^\circ\mathrm{C}$.

Solução:

Queremos encontrar t de modo que $T(t) = 35$, ou seja,

$$30 + 20e^{-0{,}2t} = 35 \Rightarrow 20e^{-0{,}2t} = 5 \Rightarrow e^{-0{,}2t} = \frac{5}{20} = \frac{1}{4}\,.$$

Aplicando o logaritmo natural nos dois lados da igualdade, obtemos:

$$\begin{aligned} &\ln(e^{-0{,}2t}) = \ln\left(\frac{1}{4}\right) \\ \Rightarrow\ & -0{,}2t = \ln 1 - \ln 4 \\ \Rightarrow\ & -0{,}2t = 0 - \ln(2^2) \\ \Rightarrow\ & -0{,}2t = -2\ln 2 \\ \Rightarrow\ & t = \frac{-2(0{,}7)}{-0{,}2} = 7. \end{aligned}$$

Portanto, a peça atingirá a temperatura de $35\ ^\circ\mathrm{C}$ em $t = 7$ minutos.