– Geometria das transformações lineares

Reflexões

1. A transformação reflexão em relação ao eixo *x*

O operador linear $T : R^2 \to R^2$ leva cada ponto (x, y) para sua imagem $(x, -y)$, simétrica em relação ao eixo dos x.

$$\begin{aligned} T &: R^2 \to R^2 \\ (x, y) &\mapsto (x, -y) \end{aligned} \qquad \text{ou } T(x, y) = (x, -y)$$

Podemos representar essa reflexão utilizando a matriz na forma canônica:

$$\begin{bmatrix} x \\ -y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} \Rightarrow [T] = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$$

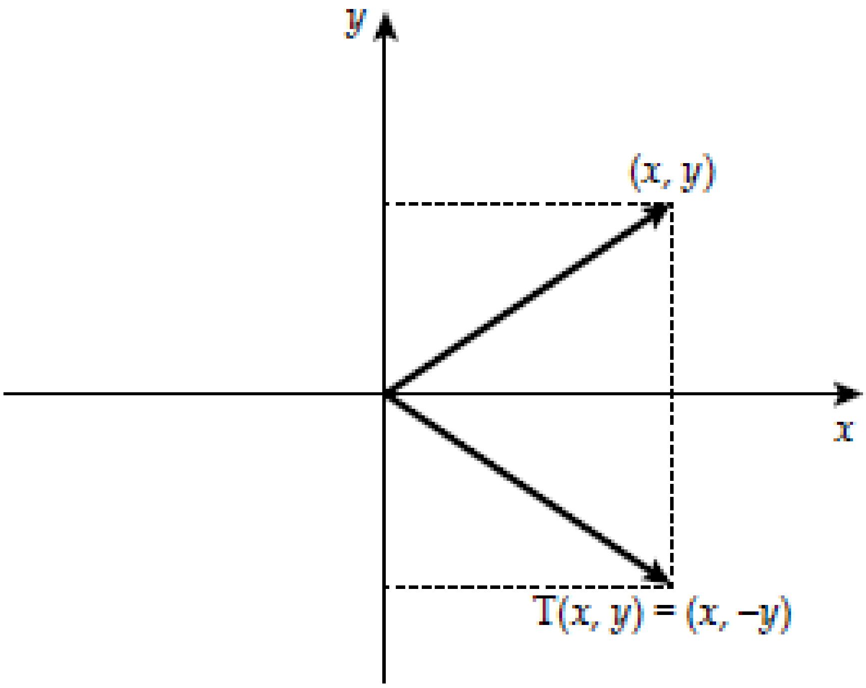


Figura 3.13 - Reflexão do vetor (x, y) em torno do eixo x

2. A transformação reflexão em relação ao eixo y

O operador linear $T : R^2 \to R^2$ leva cada ponto (x, y) para sua imagem $(-x, y)$, simétrica em relação ao eixo dos y.

$$T : R^2 \to R^2 \qquad \text{ou } T(x, y) = (-x, y)$$
$$(x, y) \mapsto (-x, y)$$

Reflexão utilizando a matriz na forma canônica:

$$\begin{bmatrix} -x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} \Rightarrow [T] = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

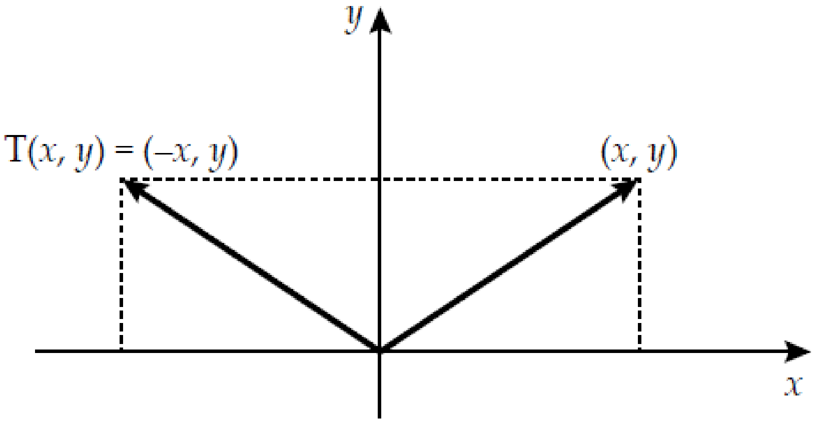


Figura 3.14 - Reflexão do vetor (x, y) em torno do eixo y

3. A transformação reflexão em relação à origem

O operador linear $T : R^2 \to R^2$ leva cada ponto (x, y) para sua imagem $(-x, -y)$, simétrica em relação à origem.

$$\begin{aligned} T &: R^2 \to R^2 \\ (x, y) &\mapsto (-x, -y) \end{aligned} \qquad \text{ou } T(x, y) = (-x, -y)$$

Reflexão utilizando a matriz na forma canônica:

$$\begin{bmatrix} -x \\ -y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} \Rightarrow [T] = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$$

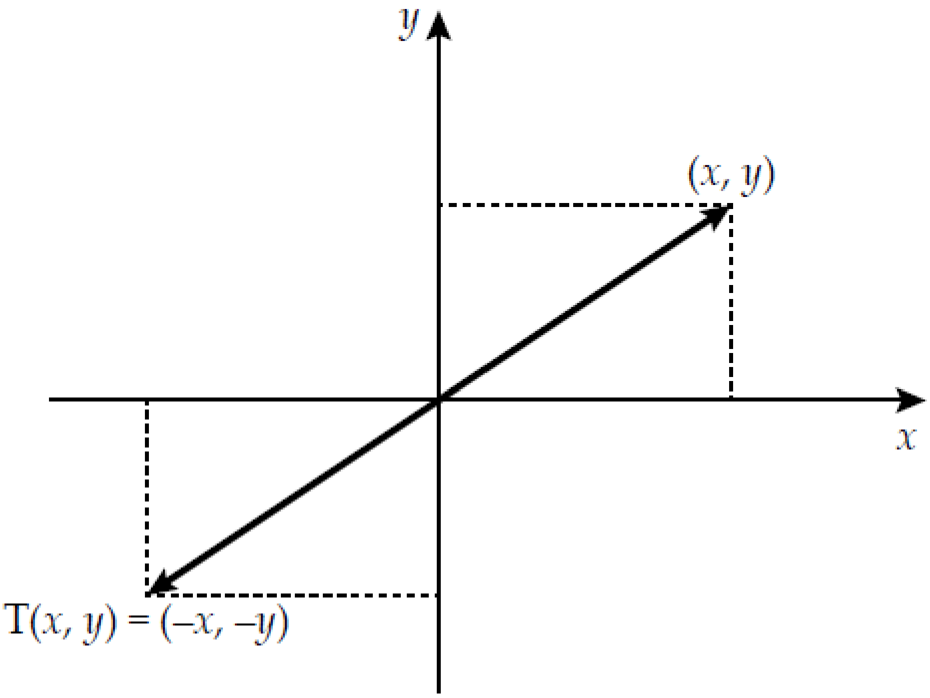


Figura 3.15 - Reflexão do vetor (x, y) em torno da origem

4. A transformação reflexão em torno da reta $y = x$

O operador linear $T : R^2 \to R^2$ leva cada ponto (x, y) para sua imagem (y, x).

$$\begin{aligned} T &: R^2 \to R^2 \\ (x, y) &\mapsto (y, x) \end{aligned} \qquad \text{ou } T(x, y) = (y, x)$$

Reflexão utilizando a matriz na forma canônica:

$$\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} \quad \Rightarrow \quad [T] = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$$

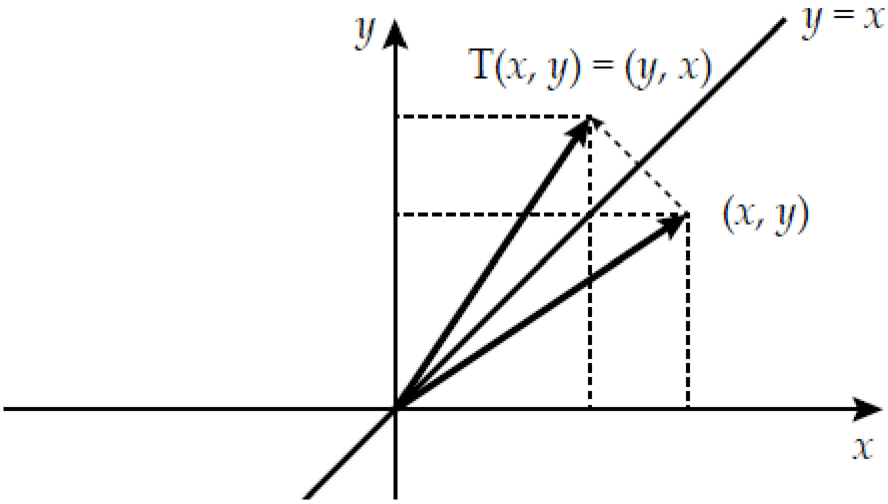


Figura 3.16 - Reflexão do vetor (x, y) em torno da reta $y = x$

5. A Reflexão de vetor em torno do plano *xy*

O operador linear $T : R^3 \to R^3$ leva cada ponto (x, y, z) para sua imagem $(x, y, -z)$ simétrica em relação ao plano xy.

$$\begin{aligned} T : R^3 &\to R^3 \\ (x, y, z) &\mapsto (x, y, -z) \end{aligned} \qquad \text{ou } T(x, y, z) = (x, y, -z)$$

Utilizando a matriz na forma canônica:

$$\begin{bmatrix} x \\ y \\ -z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} \Rightarrow [T] = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}$$

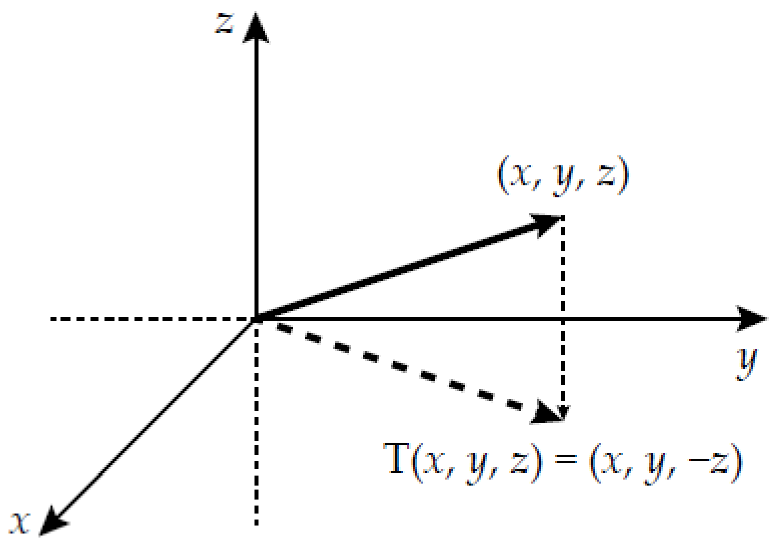


Figura 3.17 - Reflexão do vetor (x, y, z) em torno do plano xy

6. A reflexão de um vetor em torno do plano xz

O operador linear $T : R^3 \to R^3$ leva cada ponto (x, y, z) para sua imagem $(x, -y, z)$ simétrica em relação ao plano xz.

$$\begin{aligned} T : R^3 &\to R^3 \\ (x, y, z) &\mapsto (x, -y, z) \end{aligned} \qquad \text{ou } T(x, y, z) = (x, -y, z)$$

Utilizando a matriz na forma canônica:

$$\begin{bmatrix} x \\ -y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} \Rightarrow [T] = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

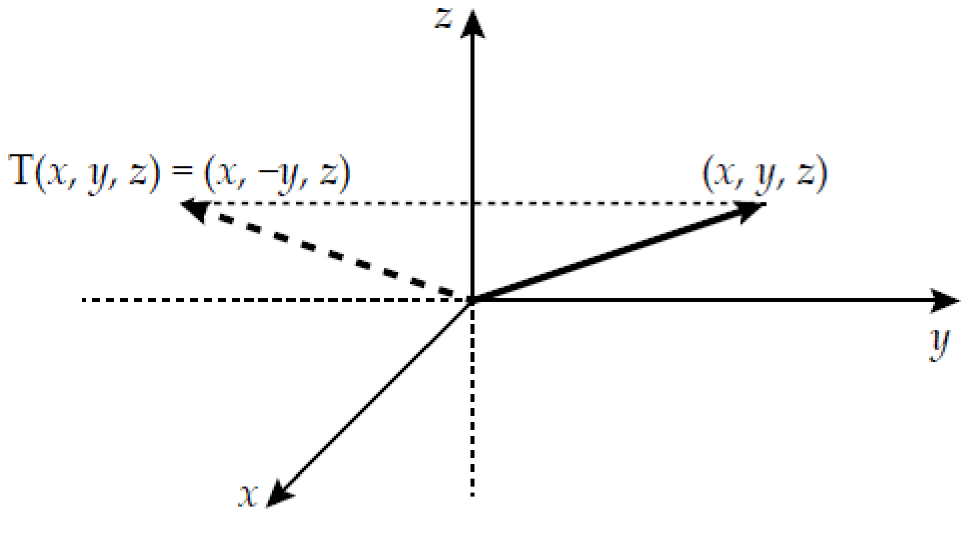


Figura 3.18 - Reflexão do vetor (x, y, z) em torno do plano xz

7. A reflexão de um vetor em torno do plano *zy*

O operador linear $T : R^3 \rightarrow R^3$ leva cada ponto (x, y, z) para sua imagem $(-x, y, z)$ simétrica em relação ao plano zy.

$$\begin{aligned} T : R^3 &\rightarrow R^3 \\ (x, y, z) &\mapsto (-x, y, z) \end{aligned} \qquad \text{ou } T(x, y, z) = (-x, y, z)$$

Utilizando a matriz na forma canônica:

$$\begin{bmatrix} -x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} \Rightarrow [T] = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

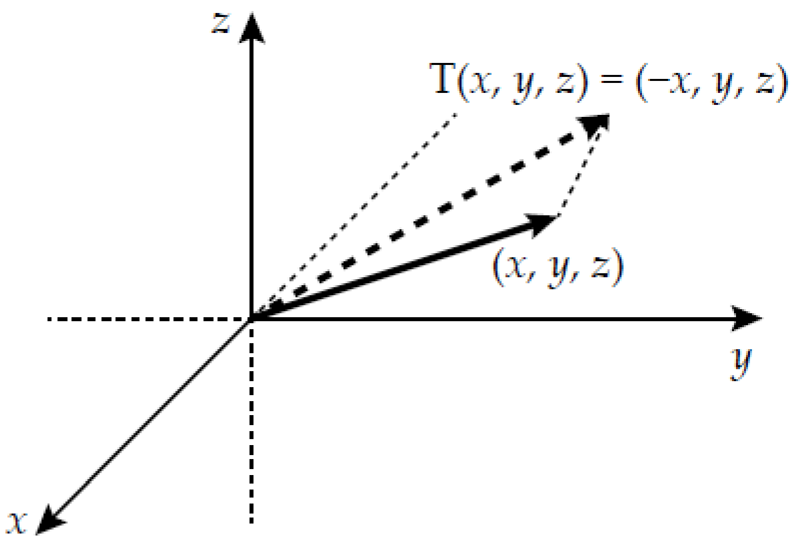


Figura 3.19 - Reflexão do vetor (x, y, z) em torno do plano yz

Projeções

Uma projeção ortogonal de R^2 ou R^3 é qualquer operador que leva cada vetor em sua projeção ortogonal sobre uma reta ou algum plano pela origem. Vamos apresentar a seguir algumas projeções:

1. Transformação projeção ortogonal sobre o eixo *x*

O operador linear $T : R^2 \to R^2$ leva cada vetor (x, y) para sua imagem $(x, 0)$ projetada no eixo x.

$$\begin{aligned} T &: R^2 \to R^2 \\ (x, y) &\mapsto (x, 0) \end{aligned} \qquad \text{ou } T(x, y) = (x, 0)$$

Utilizando a matriz na forma canônica:

$$\begin{bmatrix} x \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} \quad \Rightarrow \quad [T] = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

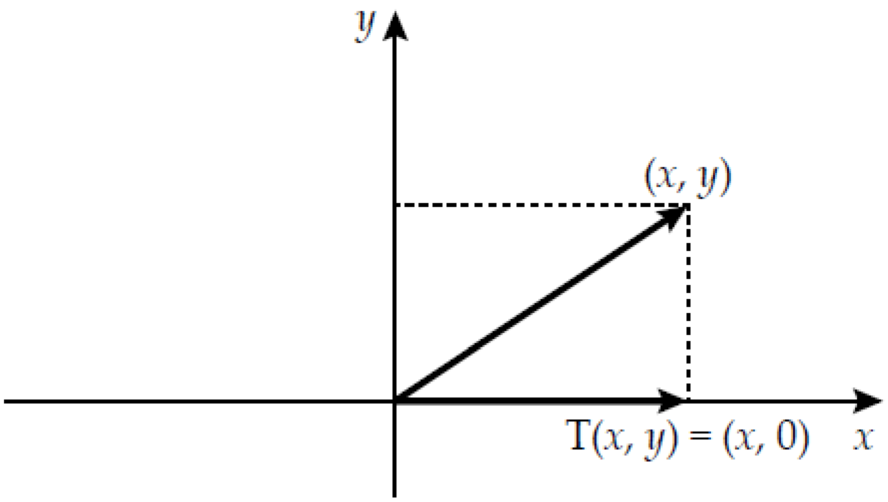


Figura 3.20 - Projeção ortogonal do vetor (x, y) sobre o eixo x

2. Transformação projeção ortogonal sobre o eixo *y*

O operador linear $T : R^2 \to R^2$ leva cada vetor (x, y) para sua imagem $(0, y)$, projetada no eixo y.

$$\begin{aligned} T &: R^2 \to R^2 \\ (x, y) &\mapsto (0, y) \end{aligned} \qquad \text{ou } T(x, y) = (0, y)$$

Reflexão utilizando a matriz na forma canônica:

$$\begin{bmatrix} 0 \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} \Rightarrow [T] = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

3. Projeção ortogonal de um vetor sobre o plano xy

O operador linear $T : R^3 \to R^3$ leva cada vetor (x, y, z) para sua imagem $(x, y, 0)$.

$$\begin{aligned} T : R^3 &\to R^3 \\ (x, y, z) &\mapsto (x, y, 0) \end{aligned} \qquad \text{ou } T(x, y, z) = (x, y, 0)$$

Utilizando a matriz na forma canônica:

$$\begin{bmatrix} x \\ y \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} \quad \Rightarrow \quad [T] = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

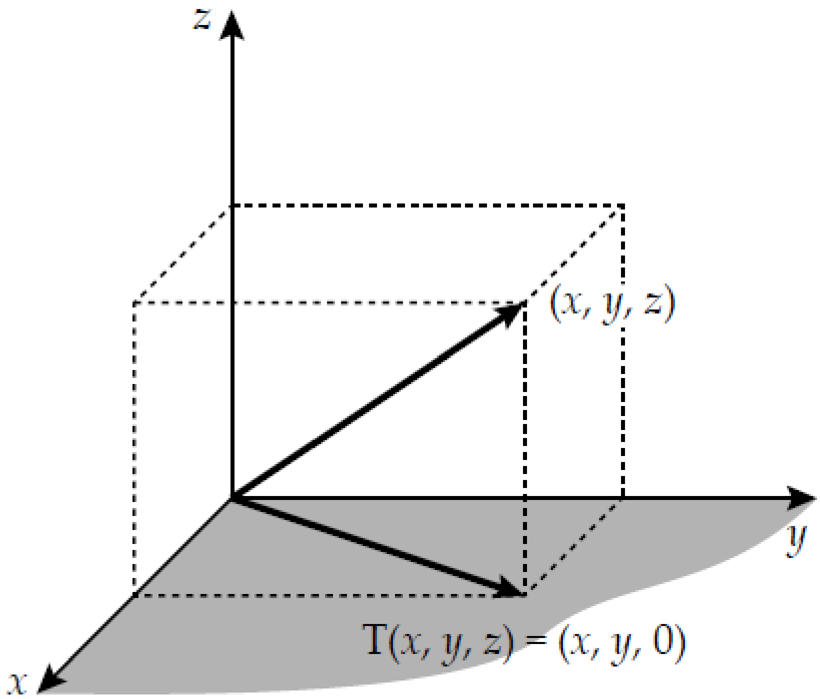


Figura 3.21 - Projeção ortogonal do vetor (x, y, z) no plano xy

4. Projeção ortogonal de um vetor sobre o plano *xz*

O operador linear $T : R^3 \to R^3$ leva cada vetor (x, y, z) para sua imagem $(x, 0, z)$.

$$\begin{aligned} T : R^3 &\to R^3 \\ (x, y, z) &\mapsto (x, 0, z) \end{aligned} \qquad \text{ou } T(x, y, z) = (x, 0, z)$$

Utilizando a matriz na forma canônica:

$$\begin{bmatrix} x \\ 0 \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} \Rightarrow [T] = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

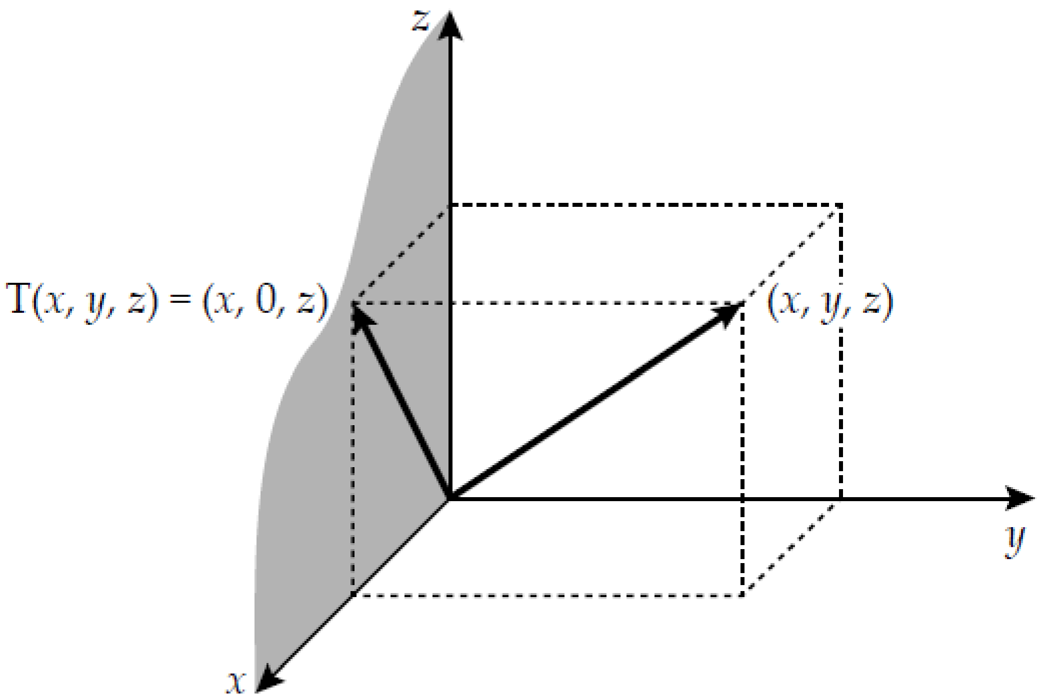


Figura 3.22 - Projeção ortogonal do vetor (x, y, z) no plano xz

5. Projeção ortogonal de um vetor sobre o plano *yz*

O operador linear $T : R^3 \rightarrow R^3$ leva cada vetor (x, y, z) para sua imagem $(0, y, z)$.

$$\begin{aligned} T : R^3 &\rightarrow R^3 \\ (x, y, z) &\mapsto (0, y, z) \end{aligned} \qquad \text{ou } T(x, y, z) = (0, y, z)$$

Utilizando a matriz na forma canônica:

$$\begin{bmatrix} 0 \\ x \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} \quad \Rightarrow \quad [T] = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

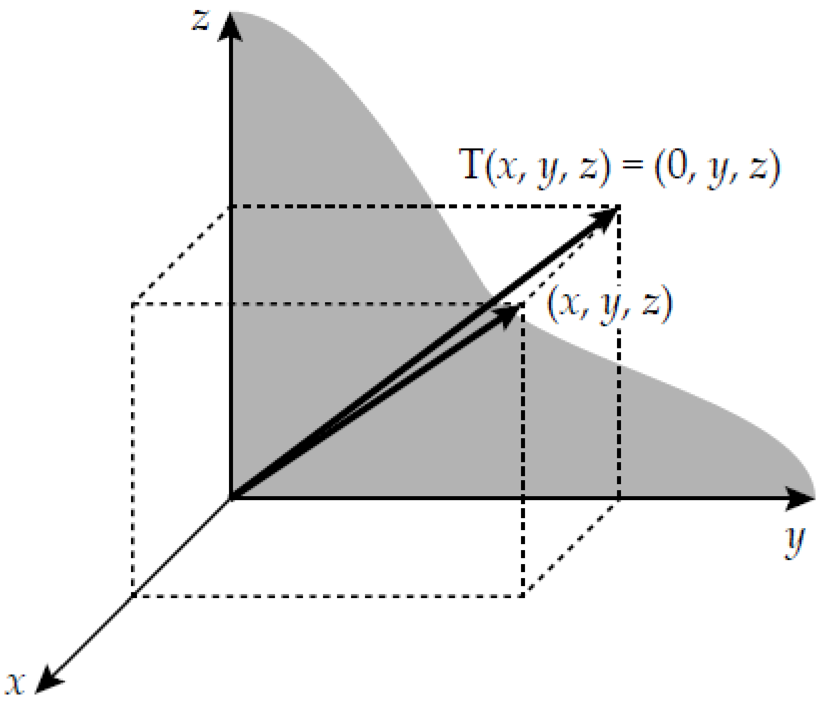


Figura 3.23 - Projeção ortogonal do vetor (x, y, z) no plano *yz*

Exemplos

3.30. Considere os operadores lineares P_1, P_2 e P_3 em R^3 definidos respectivamente por:

$$P_1(x, y, z) = (x, y, 0),\ P_2(x, y, z) = (x, 0, z) \text{ e } P_3(x, y, z) = (0, y, z)$$

Temos:

a) $P_1(x, y, z) = (x, y, 0)$ representa geometricamente a projeção do vetor no plano xOy. Para o vetor $u = (2, 4, 6) \in R^3$, temos $P_1(u) = P_1(2, 4, 6) = (2, 4, 0)$.

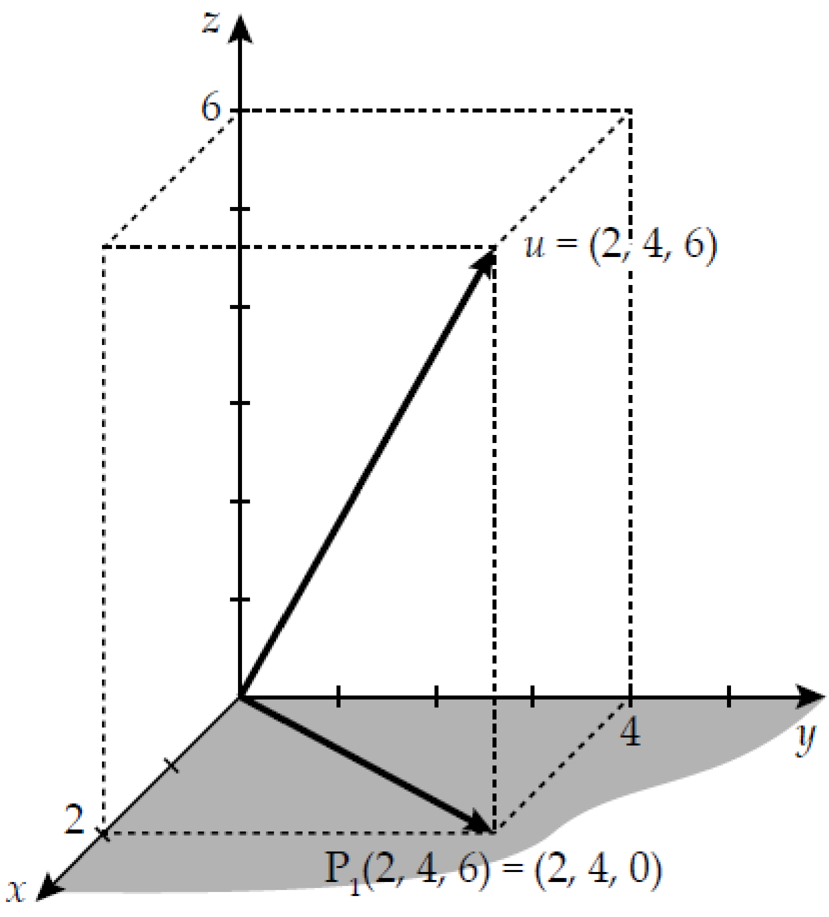


Figura 3.24 - Projeção do vetor $u = (2, 4, 6)$ no plano xOy

b) $P_2(x, y, z) = (x, 0, z)$ geometricamente projeta o vetor no plano xOz. Para o vetor $u = (2, 4, 6) \in R^3$, temos $P_2(u) = P_1(2, 4, 6) = (2, 0, 6)$.

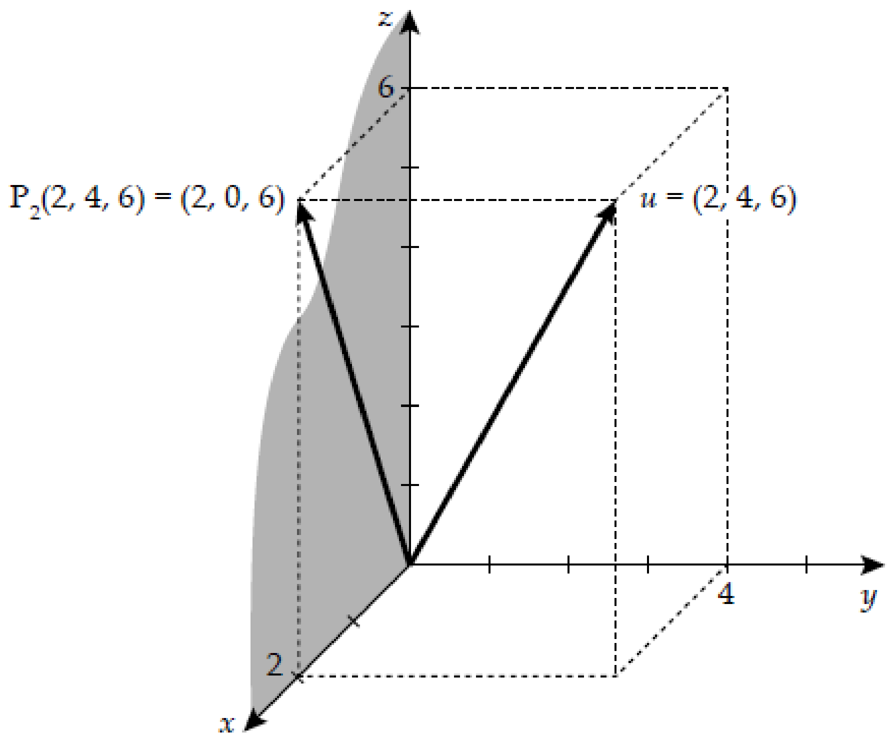


Figura 3.25 - Projeção do vetor $u = (2, 4, 6)$ no plano xOz

c) $P_3(x, y, z) = (0, y, z)$ projeta o vetor no plano yOz. Para o vetor $u = (2, 4, 6) \in R^3$, temos $P_3(u) = P_1(2, 4, 6) = (0, 4, 6)$.

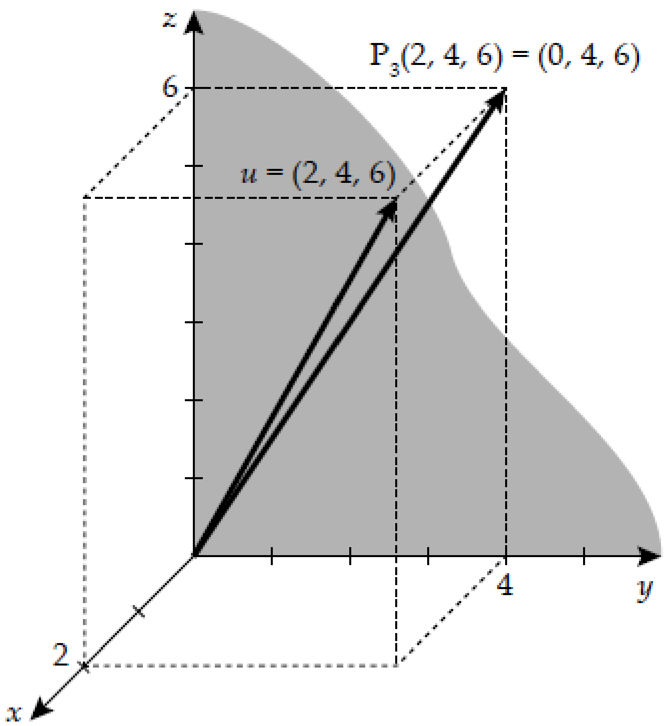


Figura 3.26 - Projeção do vetor $u = (2, 4, 6)$ no plano yOz

Rotações

É um tipo de operador que rotaciona cada vetor em R^3 em torno de um ângulo θ fixado. Ou no R^3 em relação a um raio partindo da origem.

1. Rotação pelo ângulo θ no sentido anti-horário

O operador linear $T : R^2 \rightarrow R^2$ leva cada vetor (x, y) para sua imagem no plano girando esse vetor no sentido anti-horário por um ângulo positivo θ. Para isso, a transformação linear é:

$$T(x, y) = (x\cos\theta - y\,\text{sen}\,\theta,\ x\,\text{sen}\,\theta - y\cos\theta)$$

Cuja matriz canônica é representada por:

$$[T] = \begin{bmatrix} \cos\theta & -\text{sen}\,\theta \\ \text{sen}\,\theta & \cos\theta \end{bmatrix}$$

pois:

$$\begin{bmatrix} x\cos\theta - y\,\text{sen}\,\theta \\ x\,\text{sen}\,\theta + y\cos\theta \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos\theta & -\text{sen}\,\theta \\ \text{sen}\,\theta & \cos\theta \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$$

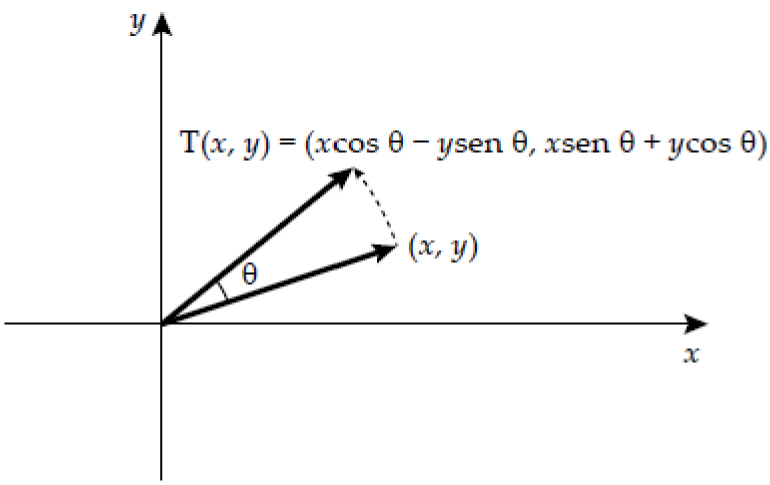


Figura 3.27 - Rotação do vetor (x, y) pelo ângulo θ

2. Rotação anti-horária em torno dos eixos coordenados

O operador linear $T : R^3 \to R^3$ leva um vetor (x, y, z) a girar fixando um ângulo θ, em torno de um eixo. Com isso, observamos, geometricamente, que ele varre uma porção de um cone. Nesse caso, o ângulo θ é chamado de ângulo de rotação.

- Em torno do eixo x:

$$T(x, y, z) = (x, y\cos\theta - z\,\text{sen}\,\theta, y\,\text{sen}\,\theta - z\cos\theta)$$

Cuja matriz canônica é:

$$[T] = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\theta & -\text{sen}\,\theta \\ 0 & \text{sen}\,\theta & \cos\theta \end{bmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} x \\ y\cos\theta - z\,\text{sen}\,\theta \\ y\,\text{sen}\,\theta - z\cos\theta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\theta & -\text{sen}\,\theta \\ 0 & \text{sen}\,\theta & \cos\theta \end{pmatrix} * \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$$

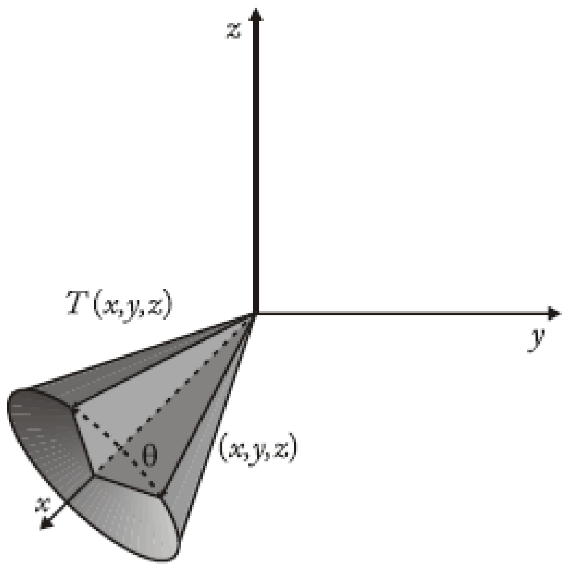


Figura 3.28 - Rotação anti-horária do vetor (x, y, z) em torno do eixo x

- Em torno do eixo y:

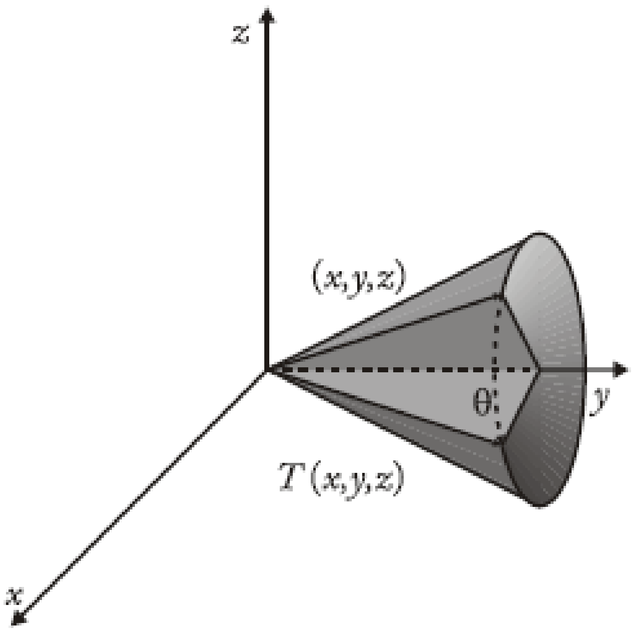
$$T(x, y, z) = (x\cos\theta + z\,\text{sen}\,\theta,\ y,\ -x\,\text{sen}\,\theta + y\cos\theta)$$

Cuja matriz canônica é:

$$[T] = \begin{bmatrix} \cos\theta & 0 & \text{sen}\,\theta \\ 0 & 1 & 0 \\ -\text{sen}\,\theta & 0 & \cos\theta \end{bmatrix}$$

pois:

$$\begin{pmatrix} x\text{Cos}\theta + Y\text{sen}\theta \\ 1Y \\ -X\text{sen}\theta + \text{Cos}\theta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \text{Cos}\theta & 0 & \text{sen}\theta \\ 0 & 1 & 0 \\ -\text{sen}\theta & 0 & \text{Cos}\theta \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} x \\ Y \\ Z \end{pmatrix}$$



igura 3.29 - Rotação anti-horária do vetor (x, y, z) em torno do eixo y

- Em torno do eixo z:

$$T(x, y, z) = (x\cos\theta - y\,\text{sen}\,\theta,\ x\,\text{sen}\,\theta + y\cos\theta,\ z)$$

Cuja matriz canônica é:

$$[T] = \begin{bmatrix} \cos\theta & -\text{sen}\,\theta & 0 \\ \text{sen}\,\theta & \cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

pois:

$$\begin{pmatrix} x\cos\theta - y\,\text{sen}\,\theta \\ x\,\text{sen}\,\theta + y\cos\theta \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\text{sen}\,\theta & 0 \\ \text{sen}\,\theta & \cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$$

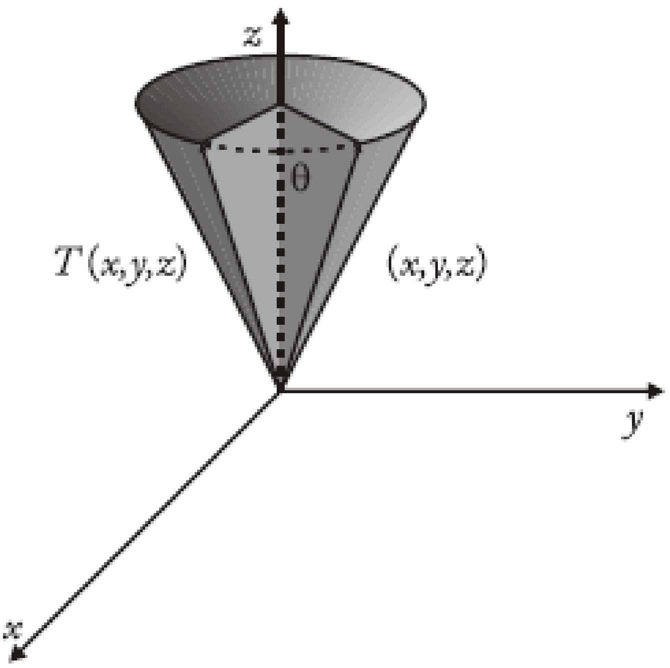


Figura 3.30 - Rotação anti-horária do vetor (x, y, z) em torno do eixo y

Exemplos

3.30. Dado um vetor qualquer $u = (x, y) \in \mathbb{R}^2$, rotacionando u, por um ângulo de $\frac{\pi}{3} = 60°$, a imagem do vetor $w = T(u)$ é dada por:

$$w = \begin{bmatrix} \cos\frac{\pi}{3} & -\text{sen}\frac{\pi}{3} \\ \text{sen}\frac{\pi}{3} & \cos\frac{\pi}{3} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{\sqrt{3}}{2} \\ \frac{\sqrt{3}}{2} & \frac{1}{2} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{2}x - \frac{\sqrt{3}}{2}y \\ \frac{\sqrt{3}}{2}x + \frac{1}{2}y \end{bmatrix}$$

Se u = (4,2), então:

$$w = \begin{bmatrix} \frac{1}{2}\cdot 4 - \frac{\sqrt{3}}{2}\cdot 2 \\ \frac{\sqrt{3}}{2}\cdot 4 + \frac{1}{2}\cdot 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2-\sqrt{3} \\ 2\sqrt{3}+1 \end{bmatrix}$$

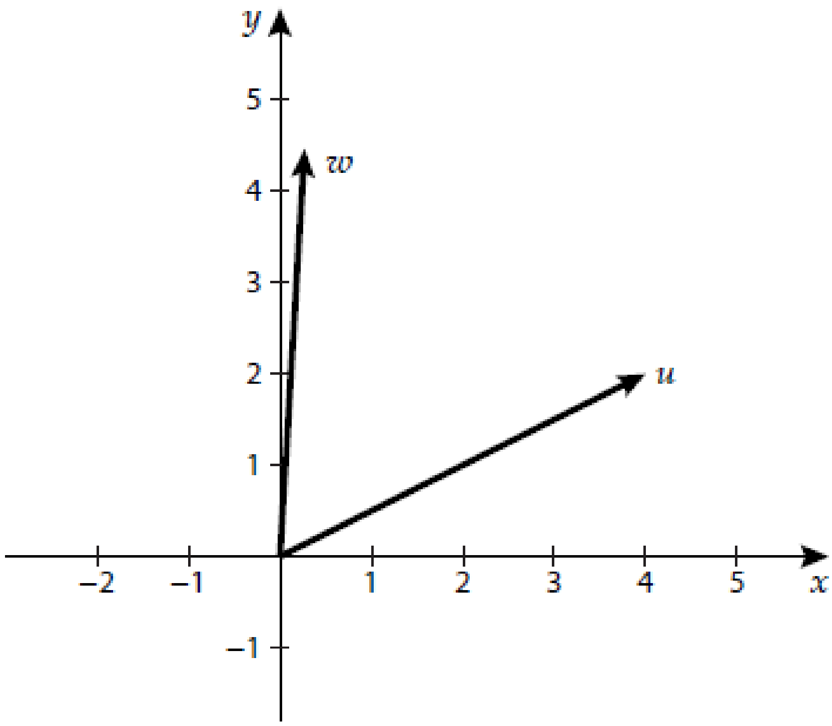


Figura 3.31 - Rotação do vetor (4, 2) pelo ângulo $\frac{\pi}{3}$

3.31. Utilize multiplicação matricial para encontrar a imagem do vetor $u = (6, -2, 2)$ rotacionado por $\theta = 45°$ em torno do eixo z.

Cuja matriz canônica é:

$$[T] = \begin{bmatrix} \cos\theta & -\operatorname{sen}\theta & 0 \\ \operatorname{sen}\theta & \cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \text{ com } \theta = 45°$$

Então, o vetor $w \in R^3$ obtido dessa rotação é:

$$w = \begin{bmatrix} \cos\theta & -\operatorname{sen}\theta & 0 \\ \operatorname{sen}\theta & \cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 6 \\ -2 \\ 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} & -\frac{\sqrt{2}}{2} & 0 \\ \frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 6 \\ -2 \\ 2 \end{bmatrix}$$

$$w = \begin{bmatrix} 6\frac{\sqrt{2}}{2} + 2\frac{\sqrt{2}}{2} \\ 6\frac{\sqrt{2}}{2} - 2\frac{\sqrt{2}}{2} \\ 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4\sqrt{2} \\ 2\sqrt{2} \\ 2 \end{bmatrix}$$

Dilatações e contrações

Dado um escalar não negativo α, então o operador $T(u) = \alpha u$, em que u é um valor do R^2 ou do R^3 é chamado de homotetia de razão α.

- Se $0 \leq \alpha \leq 1$, temos uma contração de razão α.
- Se $\alpha \geq 1$, temos uma dilatação de razão α.

1. No plano: o operador linear $T : R^2 \to R^2$ leva cada vetor (x, y) para sua imagem a uma contração ou dilatação é dado por:

$$T(x, y) = (\alpha x, \alpha y)$$

Cuja matriz canônica é representada por:

$$[T] = \begin{bmatrix} \alpha & 0 \\ 0 & \alpha \end{bmatrix}, \text{ pois: } \begin{bmatrix} \alpha x \\ \alpha y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \alpha & 0 \\ 0 & \alpha \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$$

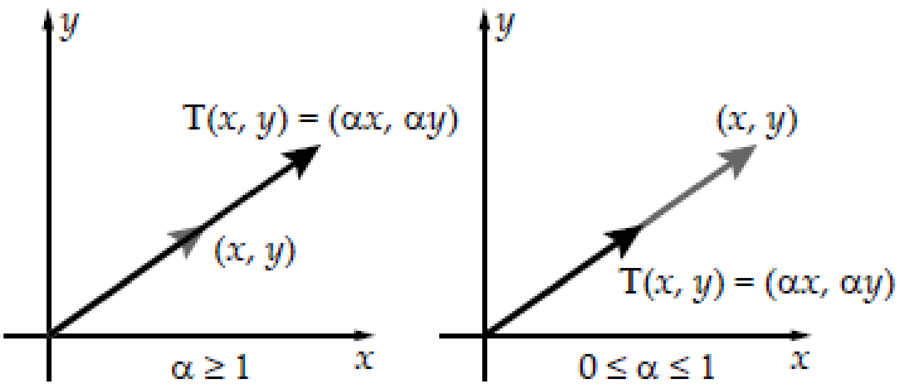


Figura 3.32 - Dilatação e contração do vetor (x, y) no R^2

2. No espaço: o operador linear $T : R^3 \to R^3$ leva cada vetor (x, y, z) para sua imagem a uma contração ou dilatação é dado por:

$$T(x, y, z) = (\alpha x, \alpha y, \alpha z)$$

Cuja matriz canônica é representada por:

$$[T] = \begin{bmatrix} \alpha & 0 & 0 \\ 0 & \alpha & 0 \\ 0 & 0 & \alpha \end{bmatrix}, \text{ pois: } \begin{bmatrix} \alpha x \\ \alpha y \\ \alpha z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \alpha & 0 & 0 \\ 0 & \alpha & 0 \\ 0 & 0 & \alpha \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}$$

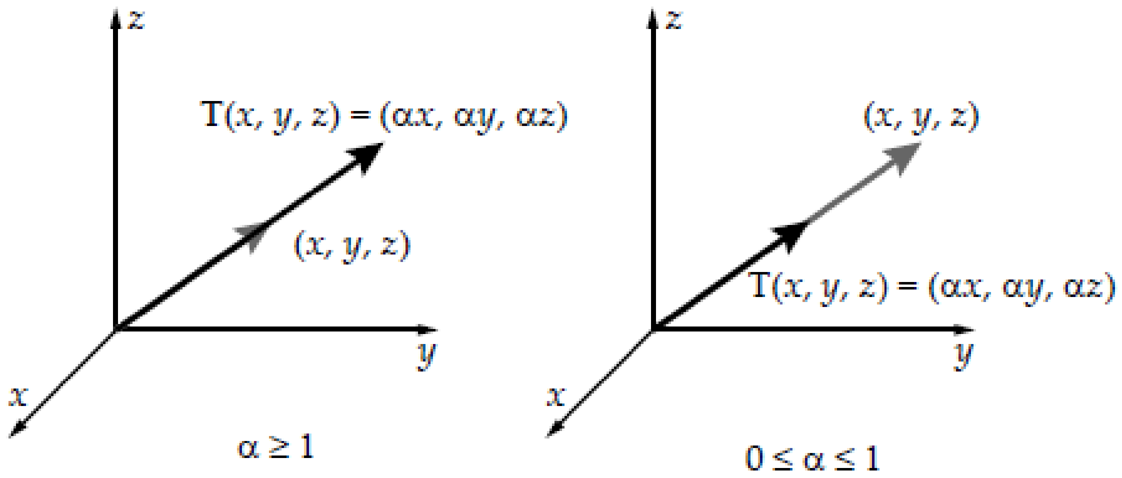


Figura 3.33 - Dilatação e contração do vetor (x, y, z) no R^3

Exemplo

3.32. Encontre a matriz canônica do operador linear $T : R^3 \rightarrow R^3$ que, primeiro, rotaciona um vetor no sentido anti-horário em torno do eixo *x* por um ângulo $\theta = \frac{\pi}{6}$ e, depois, reflete o vetor resultante em torno do plano *yz*.

Vamos inicialmente chamar de T_1 a transformação rotação cuja matriz canônica é $[T_1]$, e de T_2 a transformação reflexão com matriz canônica $[T_2]$. A composição dessas duas transformações é dada pelo produto das matrizes canônicas das transformações $[T_2]$ e $[T_1]$, nessa ordem, isto é:

$$[T] = [T_2] \times [T_1]$$

$$[T_1] = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\frac{\pi}{6} & -\operatorname{sen}\frac{\pi}{6} \\ 0 & \operatorname{sen}\frac{\pi}{6} & \cos\frac{\pi}{6} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{\sqrt{3}}{2} & -\frac{1}{2} \\ 0 & \frac{1}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2} \end{bmatrix}$$

$$[T_2] = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Portanto

$$[T] = [T_2] \times [T_1]$$

$$= \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\frac{\pi}{6} & -\operatorname{sen}\frac{\pi}{6} \\ 0 & \operatorname{sen}\frac{\pi}{6} & \cos\frac{\pi}{6} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{\sqrt{3}}{2} & -\frac{1}{2} \\ 0 & \frac{1}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2} \end{bmatrix}$$

20. Para os casos a seguir, determine a matriz do operador linear de R^2 em R^2 que representa as seguintes operações:

a) Rotação de 30° no sentido anti-horário;

b) Reflexão em relação do eixo y.

Solução

Aqui acontece uma combinação de transformações, chamada de a transformação que realiza a rotação e de a da reflexão, temos as seguintes matrizes que as representam:

a) Rotação de 30º no sentido anti-horário:

$$[T_1] = \begin{bmatrix} \cos 30° & -\operatorname{sen} 30° \\ \operatorname{sen} 30° & \cos 30° \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\sqrt{3}}{2} & -\frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2} \end{bmatrix}$$

b) Reflexão em torno do eixo y.

$$[T_2] = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Logo, a combinação será:

$$[T_2 o T_1] = [T_2] \cdot [T_1]$$

$$[T_2 o T_1] = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \frac{\sqrt{3}}{2} & -\frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\frac{\sqrt{3}}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2} \end{bmatrix}$$