CAPÍTULO 5

Matrizes

Introdução

ERNESTO REGHRAN/PULSAR IMAGENS

Em 2010, pouco mais de 9 mil pessoas residiam na zona rural de Manaus, enquanto cerca de 1792 mil residiam na zona urbana. Vista da cidade de Manaus (AM), 2015.

Em jornais, revistas e na internet frequentemente encontramos informações numéricas organizadas em forma de tabelas, com linhas e colunas. Vejamos alguns casos.

População nos Censos Demográficos, segundo as Grandes Regiões, as Unidades da Federação e a situação do domicílio – 1980/2010

Ano	Situação do domicílio	BRASIL	Região Norte	Região Nordeste	Região Sudeste	Região Sul	Região Centro-Oeste
1980[1]	Urbana	82 013 375	3 398 897	17 959 640	43 550 664	12 153 971	4 950 203
	Rural	39 137 198	3 368 352	17 459 516	9 029 863	7 226 155	2 053 312
1991[2]	Urbana	110 875 826	5 931 567	25 753 355	55 149 437	16 392 710	7 648 757
	Rural	36 041 633	4 325 699	16 716 870	7 511 263	5 724 316	1 763 485
2000[2]	Urbana	137 755 550	9 002 962	32 929 318	65 441 516	20 306 542	10 075 212
	Rural	31 835 143	3 890 599	14 763 935	6 855 835	4 783 241	1 541 533
2010[2]	Urbana	160 925 792	11 644 509	38 821 246	74 696 178	23 260 896	12 482 963
	Rural	29 830 007	4 199 945	14 260 704	5 668 232	4 125 995	1 575 131

(1) População recenseada. (2) População residente.

Fonte: IBGE, Censo Demográfico 1980, 1991, 2000 e 2010. Disponível em: <www.censo2010.ibge.gov.br/sinopse/index.php?dados=8>.Acesso em: 10 mar. 2016.

Produção, consumo e importação de feijão (mil toneladas)

Ano	Produção		Consumo		Importação	
	Projeção	Limite superior	Projeção	Limite superior	Projeção	Limite superior
2015/16	3363	4022	3357	3778	150	296
2016/17	3334	4267	3364	3959	149	357
2017/18	3345	4290	3371	4100	149	403
2018/19	3355	4313	3379	4219	149	442
2019/20	3366	4335	3386	4326	149	476
2020/21	3376	4358	3393	4423	148	507
2021/22	3387	4380	3400	4512	148	536
2022/23	3397	4403	3407	4596	148	562
2023/24	3408	4425	3414	4675	147	587
2024/25	3418	4447	3421	4751	147	611

Fonte: Projeções do agronegócio Brasil 2014/15 a 2024/25 — Projeções de longo prazo. jul. 2015. Disponível em: <www.agricultura.gov.br/arq_editor/PROJECOES_DO_AGRONEGOCIO_2025_WEB.pdf>. Acesso em: 10 mar. 2016.

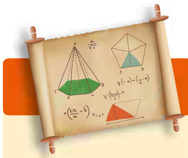
Sejam **m** e **n** números naturais não nulos.

Uma tabela de $m \cdot n$ números reais dispostos em **m** linhas (filas horizontais) e **n** colunas (filas verticais) é uma matriz do tipo (ou formato) $m \times n$, ou simplesmente matriz $m \times n$.

Representamos usualmente uma matriz colocando seus elementos (números reais) entre parênteses ou entre colchetes.

Vejamos alguns exemplos:

- $A = \begin{pmatrix} 5 & -2 & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$ é uma matriz 1×3.
- $B = \begin{pmatrix} 3 & -7 \\ \frac{1}{2} & 0 \\ -1 & 4 \end{pmatrix}$ é uma matriz 3×2.
- $C = \begin{bmatrix} 6 & 2 \\ 3 & -1 \end{bmatrix}$ é uma matriz 2×2.
- $D = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 2 & 1 & 3 \\ -1 & 0 & 0 & 9 \end{bmatrix}$ é uma matriz 3×4.
- $E = \begin{pmatrix} 4 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$ é uma matriz 3×1.



UM POUCO DE **HISTÓRIA**

Como surgiram as matrizes

As matrizes teriam surgido com a escola inglesa Trinity College, em um artigo do matemático Arthur Cayley (1821-1895), datado de 1858. Vale lembrar, no entanto, que, bem antes, no século III a.C., os chineses já desenvolviam um processo de resolução de sistemas lineares em que aparecia implícita a ideia das matrizes.

Cayley criou as matrizes no contexto de estrutura algébrica (assunto de Matemática do Ensino Superior), sem pensar em suas aplicações práticas que apareceriam posteriormente, como a representação de informações numéricas em tabelas, organizadas segundo linhas e colunas, a computação gráfica, as imagens digitais etc.

Fonte de pesquisa: BOYER, Carl B. *História da Matemática*. 3ª ed. São Paulo: Edgard Blucher, 2010.

ALAMY/FOTOARENA

Trinity College, Cambridge, Inglaterra, 2015.

Representação de uma matriz

Consideremos uma matriz **A** do tipo m × n. Um elemento qualquer dessa matriz pode ser representado pelo símbolo $\mathbf{a}_{ij}$, no qual o índice **i** refere-se à linha e o índice **j** refere-se à coluna em que se encontra tal elemento.

Vamos convencionar que as linhas são numeradas de cima para baixo, e as colunas, da esquerda para a direita.

De modo geral, uma matriz **A** do tipo m × n é representada por $A = (a_{ij})_{m \times n}$, em que **i** e **j** são números inteiros positivos tais que $1 \leq i \leq m$, $1 \leq j \leq n$, e $\mathbf{a}_{ij}$ é um elemento qualquer de **A**. Acompanhe o exemplo a seguir.

EXEMPLO 1

Seja a matriz $A = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ -2 & 5 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}_{3 \times 2}$

- O elemento que está na linha 1, coluna 1, é $a_{11} = -1$.
- O elemento que está na linha 1, coluna 2, é $a_{12} = 0$.
- O elemento que está na linha 2, coluna 1, é $a_{21} = -2$.
- O elemento que está na linha 2, coluna 2, é $a_{22} = 5$.
- O elemento que está na linha 3, coluna 1, é $a_{31} = 3$.
- O elemento que está na linha 3, coluna 2, é $a_{32} = 4$.

EXERCÍCIO **RESOLVIDO**

1 Escreva a matriz $A = (a_{ij})_{2 \times 3}$, em que $a_{ij} = i - j$.

Solução:

A é uma matriz do tipo 2 × 3 e pode ser genericamente representada por $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \end{pmatrix}$.

Fazendo $a_{ij} = i - j$, temos:

- $a_{11} = 1 - 1 = 0$
- $a_{12} = 1 - 2 = -1$
- $a_{13} = 1 - 3 = -2$
- $a_{21} = 2 - 1 = 1$
- $a_{22} = 2 - 2 = 0$
- $a_{23} = 2 - 3 = -1$

Assim, $A = \begin{pmatrix} 0 & -1 & -2 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix}$.

Matrizes especiais

Vejamos alguns tipos de matrizes especiais.

- **Matriz linha:** é uma matriz formada por uma única linha.
  - $A = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 4 \end{pmatrix}$ é uma matriz linha 1 × 3.
  - $B = \begin{bmatrix} 0 & -3 \end{bmatrix}$ é uma matriz linha 1 × 2.
- **Matriz coluna:** é uma matriz formada por uma única coluna.
  - $A = \begin{bmatrix} 2 \\ -4 \\ 6 \\ -8 \end{bmatrix}$ é uma matriz coluna 4 × 1.
  - $B = \begin{bmatrix} 3 \\ \frac{1}{4} \\ 0 \end{bmatrix}$ é uma matriz coluna 3 × 1.
- **Matriz nula:** é uma matriz cujos elementos são todos iguais a zero.
  Pode-se indicar a matriz nula m × n por $0_{m \times n}$.
  - $0_{2 \times 3} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ é a matriz nula 2 × 3.
  - $0_{2 \times 2} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ é a matriz nula 2 × 2.
- **Matriz quadrada:** é uma matriz que possui número de linhas igual ao número de colunas.
  - $A = \begin{pmatrix} 4 & 3 \\ 1 & \sqrt{2} \end{pmatrix}$ é uma matriz quadrada 2 × 2. Dizemos que **A** é matriz quadrada de ordem 2.

- $B = \begin{pmatrix} 5 & -1 & \frac{1}{3} \\ -2 & 0 & 7 \\ \sqrt{3} & 1 & 4 \end{pmatrix}$ é uma matriz quadrada 3×3. Dizemos que **B** é quadrada de ordem 3.

Seja **A** uma matriz quadrada de ordem **n**. Temos que:

- os elementos de **A** cujo índice da linha é igual ao índice da coluna constituem a **diagonal principal** de **A**.

  Se **A** é uma matriz quadrada de ordem 3, os elementos $\mathbf{a_{11}}$, $\mathbf{a_{22}}$ e $\mathbf{a_{33}}$ formam a diagonal principal de **A**:

  $$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix}$$

- os elementos da matriz **A** cuja soma dos índices da linha e da coluna é igual a $n + 1$ constituem a **diagonal secundária** de **A**.

  Retomando o exemplo anterior, os elementos $\mathbf{a_{13}}$, $\mathbf{a_{22}}$ e $\mathbf{a_{31}}$ formam a diagonal secundária de **A**.

  $$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix}$$

Matriz transposta

Dada uma matriz $A = (a_{ij})_{m \times n}$, chama-se **transposta de A** (indica-se por $\mathbf{A^t}$) a matriz:

$$A^t = (a'_{ji})_{n \times m}$$

tal que $a'_{ji} = a_{ij}$ para todo **i** e todo **j**.

Em outras palavras, a matriz $\mathbf{A^t}$ é obtida a partir de **A** trocando-se, ordenadamente, suas linhas pelas colunas.

- A transposta de $A = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 5 & 9 \end{pmatrix}$ é $A^t = \begin{pmatrix} 1 & 5 \\ 3 & 9 \end{pmatrix}$.

  Para a matriz **A**, observe que: $a_{11} = 1 = a'_{11}$

  $a_{12} = 3 = a'_{21}$

  $a_{21} = 5 = a'_{12}$

  $a_{22} = 9 = a'_{22}$

- A transposta de $B = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{bmatrix}$ é $B^t = \begin{bmatrix} 1 & 4 \\ 2 & 5 \\ 3 & 6 \end{bmatrix}$.

- A transposta de $C = \begin{pmatrix} 4 & 0 & 1 \\ -1 & 2 & 3 \\ 5 & -4 & 7 \end{pmatrix}$ é $C^t = \begin{pmatrix} 4 & -1 & 5 \\ 0 & 2 & -4 \\ 1 & 3 & 7 \end{pmatrix}$.

EXERCÍCIOS

FAÇA NO CADERNO

1 Dê o tipo (formato) de cada uma das seguintes matrizes:

a) $A = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ -7 & 2 \\ 4 & 2 \end{bmatrix}$

b) $B = \begin{pmatrix} 3 & -4 & 2 & 9 \end{pmatrix}$

c) $C = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ -4 & 2 \end{bmatrix}$

d) $D = \begin{bmatrix} 1 & 5 & 7 \\ 3 & 1 & 4 \\ -2 & 9 & 6 \end{bmatrix}$

e) $E = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix}$

f) $F = \begin{bmatrix} 1 & 4 & 2 & -3 \\ 2 & 7 & 0 & -1 \\ 3 & 9 & 0 & -5 \end{bmatrix}$

2 Em cada caso, determine o elemento $\mathbf{a}_{22}$, se existir:

a) $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 7 \\ -5 & 4 & 3 \\ -1 & 2 & 5 \end{bmatrix}$

b) $A = \begin{bmatrix} 4 \\ 3 \\ -7 \\ 1 \end{bmatrix}$

c) $A = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ -3 & 1 \end{pmatrix}$

d) $A = \begin{bmatrix} 4 & 10 & 7 \\ 5 & 1 & -1 \end{bmatrix}$

3 Escreva a matriz $A = (a_{ij})_{2 \times 2}$, em que $a_{ij} = 3i - 2j$.

4 Determine a matriz $B = (b_{ij})_{3 \times 2}$, sendo $b_{ij} = 2 + i + j$.

5 Qual é a soma dos elementos da matriz $C = (c_{ij})_{2 \times 4}$, em que $c_{ij} = 1 + i - j$?

6 Em cada caso, obtenha a transposta da matriz dada:

a) $A = \begin{bmatrix} 7 & -4 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$

b) $B = \begin{bmatrix} 6 & 2 \\ 1 & 0 \\ 4 & -1 \end{bmatrix}$

c) $C = \begin{bmatrix} 0 & 3 & -9 \\ 0 & -1 & 5 \end{bmatrix}$

d) $D = \begin{pmatrix} -8 & 7 & 5 \end{pmatrix}$

e) $E = \begin{pmatrix} 0 & -2 \\ 1 & 11 \\ 0{,}5 & 7 \\ 3 & 4{,}1 \end{pmatrix}$

f) $F = \begin{bmatrix} 5 \\ 7 \\ 1 \\ 0 \\ 3 \end{bmatrix}$

g) $G = \begin{bmatrix} 2 & 1 & -2 \\ -3 & 1 & 2 \\ 3 & -1 & 2 \end{bmatrix}$

7 Seja $A = (a_{ij})_{3 \times 2}$, em que $a_{ij} = 2i + 3j$. Escreva a matriz $\mathbf{A}^t$.

8 Qual é o elemento $\mathbf{a}_{46}$ da matriz $A = (a_{ij})_{8 \times 8}$, em que $a_{ij} = (-1)^{i+j} \cdot \frac{2j}{i}$?

9 Seja a matriz $A = (a_{ij})_{3 \times 3}$, em que $a_{ij} = i \cdot j$. Forneça os elementos que pertencem às diagonais principal e secundária de **A**.

10 Na matriz seguinte, estão representadas as quantidades de sorvetes de 1 bola e de 2 bolas comercializados no primeiro bimestre de um ano em uma sorveteria:

$$A = \begin{pmatrix} 1\,320 & 1\,850 \\ 1\,485 & 2\,040 \end{pmatrix}$$


THINKSTOCK/GETTY IMAGES

Cada elemento $\mathbf{a}_{ij}$ dessa matriz representa o número de unidades do sorvete do tipo **i** (i = 1 representa uma bola e i = 2, duas bolas) vendidas no mês **j** (j = 1 representa janeiro e j = 2, fevereiro).

a) Quantos sorvetes de duas bolas foram vendidos em janeiro?

b) Em fevereiro, quantos sorvetes de duas bolas foram vendidos a mais que os de uma bola?

c) Se o sorvete de uma bola custa R\$ 3,00 e o de duas bolas custa R\$ 5,00, qual foi a arrecadação bruta da sorveteria no primeiro bimestre com a venda desses dois tipos de sorvete?

11 A matriz **D** seguinte representa as distâncias (em quilômetros) entre as cidades **X**, **Y** e **Z**:

$$D = \begin{bmatrix} 0 & 15 & 27 \\ 15 & 0 & 46 \\ 27 & 46 & 0 \end{bmatrix}$$

Cada elemento $\mathbf{a}_{ij}$ dessa matriz fornece a distância entre as cidades **i** e **j**, com $\{i, j\} \subset \{1, 2, 3\}$. Se a cidade **X** é representada pelo número 1, **Y** por 2 e **Z** por 3:

a) determine as distâncias entre **X** e **Y**, **Z** e **X**, e **Y** e **Z**.

b) qual é a transposta da matriz **D**?

12 Dê a matriz $A = (a_{ij})_{4 \times 3}$, em que: $a_{ij} = \begin{cases} 0, \text{ se } i \geqslant j \\ 1, \text{ se } i < j \end{cases}$

13 Seja $A = (a_{ij})_{3 \times 2}$, em que: $a_{ij} = \begin{cases} \cos(\pi i), \text{ se } i \geqslant j \\ \text{sen}(\pi j), \text{ se } i < j \end{cases}$

a) Escreva **A**. **b)** Escreva $\mathbf{A}^t$.

14 O quadrangular final de um torneio panamericano de futebol feminino reúne as seleções de Argentina, Brasil, Canadá e México, que jogam entre si no sistema "todos contra todos" uma única vez. Na matriz **Q** seguinte está representada a quantidade de gols que a seleção do país **i** marcou no jogo contra a seleção do país **j**, com $\{i, j\} \subset \{1, 2, 3, 4\}$, sendo que os índices 1, 2, 3 e 4 representam, respectivamente, as seleções de Argentina, Brasil, Canadá e México. (Se $i = j$, o elemento $\mathbf{q}_{ij}$ será indicado por **x**.)

$$Q = \begin{pmatrix} x & 0 & 2 & 2 \\ 1 & x & 3 & 2 \\ 3 & 3 & x & 0 \\ 1 & 2 & 1 & x \end{pmatrix}$$

No futebol, a vitória vale 3 pontos, o empate vale 1 e a derrota não pontua.

a) Qual foi o placar de Canadá × México?

b) Qual seleção terminou com a menor pontuação? Qual foi essa pontuação?

15 Na tabela a seguir, estão representadas as quantidades de proteínas, colesterol, cálcio e carboidrato encontradas em alguns tipos de queijos.

Composição por 100 g

	Proteínas (g)	Colesterol (mg)	Cálcio (mg)	Carboidrato (g)
Queijo minas frescal	17,4	62	579	3,2
Queijo mozarela	22,6	80	875	3,0
Queijo parmesão	35,6	106	992	1,7

Fonte: Tabela Brasileira de Composição de Alimentos (TACO) 4ª edição revisada e ampliada. 2011. Disponível em: <www.unicamp.br/nepa/taco/contar/taco_4_edicao_ampliada_e_revisada.pdf?arquivo=taco_4_versao_ampliada_e_revisada.pdf>. Acesso em: 10 mar. 2016.

a) A essa tabela é possível associar uma matriz $Q = (q_{ij})_{m \times n}$. Quais são os valores de **m** e **n**?

b) Obtenha os valores de $\mathbf{q}_{23}$ e $\mathbf{q}_{31}$, explicando seus respectivos significados.

c) Danilo consome, semanalmente, duas porções de 500 g de queijo mozarela cada uma. Substituindo-o por queijo minas frescal, quantos miligramas a menos de colesterol ele terá ingerido ao fim de um ano? Considere o ano com 52 semanas.

d) Uma amostra de queijo parmesão apresenta mais ou menos que a metade de carboidratos presente em uma amostra de mesma massa de queijo frescal?

16 Chama-se **traço** de uma matriz quadrada a soma dos elementos de sua diagonal principal.

a) Determine os traços de cada uma das matrizes seguintes:

$$A = \begin{bmatrix} -1 & 4 \\ 3 & -5 \end{bmatrix}; \; B = \begin{bmatrix} 1 & 2 & -2 \\ 0 & 5 & 3 \\ -4 & 1 & 3 \end{bmatrix} \quad \text{e} \quad C = (c_{ij})_{4 \times 4} \text{ em que } c_{ij} = 3i + j - 1.$$

b) Determine $0 \leqslant \theta < 2\pi$, de modo que o traço da matriz $M = \begin{pmatrix} \text{sen}\,\theta & -1 \\ 4 & \cos\frac{\pi}{3} \end{pmatrix}$ seja igual a 1.

Matrizes e imagens digitais

Você sabia que uma imagem na tela de um computador ou uma foto tirada em uma câmera digital podem ser representadas por matrizes?

SHUTTERSTOCK

Uma imagem digital é formada por um grande número de pontos. Cada um desses pontos é chamado ***pixel*** (do inglês "picture element"). O *pixel* é a menor unidade (elemento) de uma imagem digital. Em linguagem informal, *pixels* são minúsculos "pontinhos" coloridos que, reunidos, compõem uma imagem. O **megapixel** é um múltiplo do *pixel* e corresponde a 1 milhão de *pixels*. Por exemplo, uma imagem digital obtida por uma câmera com resolução de 3 840 *pixels* na horizontal e 2 400 *pixels* na vertical ($3\,840 \times 2\,400$) corresponde a um total de 9 216 000 *pixels* (pois $3\,840 \cdot 2\,400 = 9\,216\,000$), ou seja, aproximadamente 9 *megapixels*. A título de curiosidade, para compartilhamento de fotos na internet ou envio por *e-mail*, são suficientes câmeras de 1 ou 2 *megapixels*.

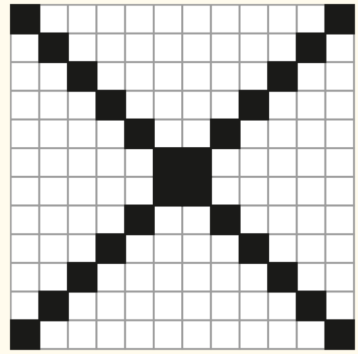
Quanto maior o número de *pixels*, maior será o número de detalhes disponíveis no momento da captura da foto e, desse modo, maior é a chance de uma melhor resolução de imagem no momento que a foto for impressa (a resolução depende também da capacidade de captação do sensor da câmera).

Para compreender o modo pelo qual uma imagem digital é processada e digitalizada, vamos iniciar com um exemplo simples, no qual serão usadas apenas duas cores (imagens binárias): preto e branco.

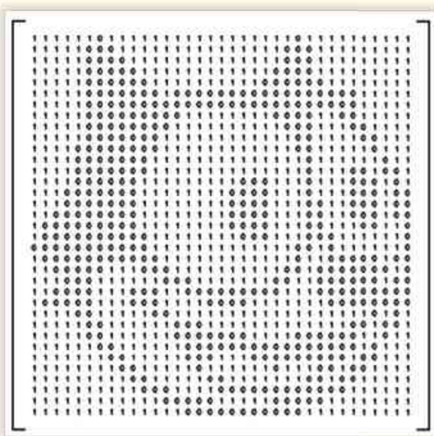
Uma determinada imagem pode ser associada por meio de um algoritmo computacional a uma matriz cujos elementos são os números 0 e 1. Convencionaremos que 0 indica a cor preta e 1 indica a cor branca.

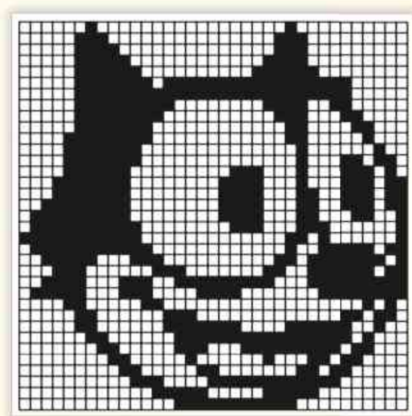
Seja **M** a matriz 12 × 12 dada a seguir; a imagem à direita correspondente a essa matriz **M**.

$$M = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$



No exemplo seguinte, a matriz 35 × 35 à esquerda fornece a imagem digital do gato Félix, à direita.





Reprodução de imagem disponível em: <www.uff.br/cdme/matrix/matrix-html/matrix_boolean/matrix_boolean_br.html>. Acesso em: 10 mar. 2016.

As imagens digitais são representações processadas por um computador ou adquiridas por meio de um dispositivo de captura e processadas, posteriormente, por algoritmos computacionais. Como informação digital, elas podem ser armazenadas, processadas e transformadas por qualquer sistema de informação multimídia.

Na computação, a menor unidade de informação que pode ser transmitida ou armazenada é 1 *bit* (do inglês "binary digit" ou "dígito binário"). O *bit* pode assumir apenas dois valores: 0 e 1. Normalmente, em imagens 2D (duas dimensões) capturadas em uma câmera digital, os programas computacionais associam a cada unidade de imagem um valor inteiro não negativo correspondente a 1 *byte* = 8 *bits*.

- O 1º *bit* pode ser 0 ou 1; temos 2 possibilidades;
- O 2º *bit* pode ser 0 ou 1; temos 2 possibilidades;

⋮ ⋮ ⋮ ⋮ ⋮

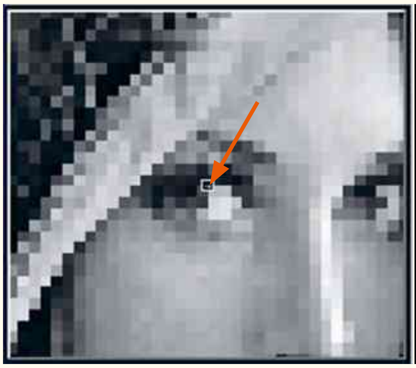
- O 8º *bit* pode ser 0 ou 1; temos 2 possibilidades.

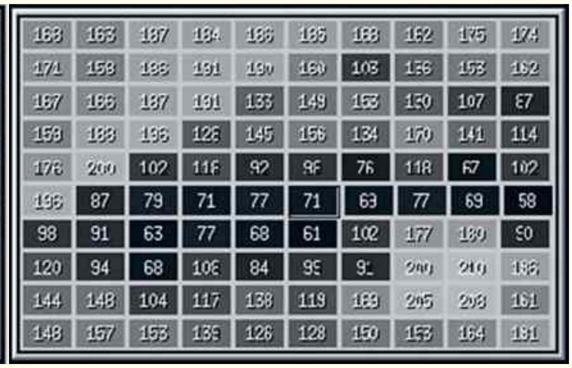
Assim, o número de valores distintos possíveis que podem ser associados a um *pixel* é $\underbrace{2 \cdot 2 \cdot ... \cdot 2}_{8 \text{ fatores}} = 2^8 = 256$.

Nessas condições, 0 passa a indicar a cor preta (ausência total de intensidade luminosa) e 255 passa a indicar a cor branca (intensidade luminosa máxima), sendo que os valores intermediários 1, 2, 3, ..., 252, 253 e 254 passam a indicar as inúmeras tonalidades de cinza. Do cinza muito escuro ao cinza muito claro há 254 tonalidades distintas!

É através dessa codificação que são formadas as imagens digitais em preto e branco, com as tonalidades intermediárias de cinza.

Observe estas duas imagens.





168	163	187	184	186	185	168	162	175	174
171	158	188	191	190	160	103	136	153	162
167	166	187	191	133	149	153	130	107	87
159	188	196	126	145	156	134	170	141	114
176	200	102	116	92	95	76	118	67	102
196	87	79	71	77	71	63	77	69	58
98	91	63	77	68	61	102	177	180	50
120	94	68	106	84	95	91	200	210	186
144	148	104	117	138	119	169	205	208	161
148	157	153	139	126	128	150	153	164	181

Reprodução de imagens disponível em: <www.ic.unicamp.br/~cpg/material-didatico/mo815/9802/curso/node6.html>. Acesso em: 10 mar. 2016.

A imagem digital da esquerda mostra um rosto feminino e há um destaque em uma pequena parte do olho. A imagem da direita mostra uma matriz 10×10 (são 100 *pixels*, pois $10 \cdot 10 = 100$) associada a essa parte destacada. Observe que cada um dos elementos dessa matriz guarda um número inteiro entre 0 e 255, correspondente à tonalidade de cinza utilizada em cada *pixel*, que está indicada na própria matriz.

Por fim, para as imagens coloridas, no modelo mais usado de câmera, cada *pixel* pode ser decomposto em três cores primitivas — vermelho, verde e azul —, representadas pelas suas iniciais em inglês ("red" para vermelho, "green" para verde e "blue" para azul). Esse sistema é conhecido como RGB.

A cada *pixel* está associada uma tripla ordenada de valores, indicando, nessa ordem, a intensidade de vermelho, verde e azul no ponto de imagem considerado. Assim, por exemplo, temos as seguintes correspondências:

vermelho: RGB (255, 0, 0)

verde: RGB (0, 255, 0)

azul: RGB (0, 0, 255)

amarelo: RGB (255, 255, 0)

abóbora: RGB (255, 117, 24)

azul cobalto: RGB (0, 71, 171)

cobre: RGB (184, 115, 51)

laranja: RGB $(\underbrace{255}_{\text{intensidade de vermelho}}, \underbrace{165}_{\text{intensidade de verde}}, \underbrace{0}_{\text{intensidade de azul}})$

Está curioso para saber a quantidade de tonalidades coloridas distintas que podem ser obtidas em um *pixel*? Esse número é superior a 16 milhões! Entenda o porquê:

- O primeiro elemento da tripla RGB, que dá a intensidade de vermelho, pode assumir 256 valores distintos.
- O segundo elemento da tripla RGB, que dá a intensidade de verde, pode assumir 256 valores distintos.
- O terceiro elemento da tripla RGB, que dá a intensidade de azul, pode assumir 256 valores distintos.

Assim, o número de tonalidades coloridas distintas em cada *pixel* é:

$$256 \cdot 256 \cdot 256 = 16\,777\,216$$

Fontes de pesquisa: Matrizes e imagens digitais. Disponível em: <www.uff.br/cdme/matrix/matrix-html/matrix/br.html>. Acesso em: 10 mar. 2016.; Fundamentos de processamento de imagem digital. Disponível em: <www.ic.unicamp.br/~cpg/material-didatico/mo815/9802/curso/curso.html>. Acesso em: 10 mar. 2016.

Igualdade de matrizes

Duas matrizes **A** e **B** de mesmo tipo $m \times n$ são iguais se todos os seus elementos correspondentes são iguais, isto é, sendo $A = (a_{ij})_{m \times n}$ e $B = (b_{ij})_{m \times n}$, temos que $A = B$ se $a_{ij} = b_{ij}$, para todo **i** ($i = 1, 2, ..., m$) e para todo **j** ($j = 1, 2, ..., n$).

Por exemplo, para que as matrizes $A = \begin{pmatrix} a & 1 \\ 2 & b \end{pmatrix}$ e $B = \begin{pmatrix} 3 & d \\ c & -5 \end{pmatrix}$ sejam iguais, devemos ter: $\begin{cases} a = 3 \\ 1 = d \\ 2 = c \\ b = -5 \end{cases}$

OBSERVAÇÃO

Dizemos que elementos de mesmo índice (linha e coluna) são correspondentes.

EXERCÍCIOS

FAÇA NO CADERNO

17 Determine os números reais **a**, **b**, **c** e **d** para que se tenha $\begin{pmatrix} a & 1 \\ 4 & c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & b \\ d & 6 \end{pmatrix}$

18 Determine **x**, **y** e **z** reais que satisfaçam

$$\begin{pmatrix} x + y & 2 \\ 4 & x - y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7 & z \\ z^2 & 1 \end{pmatrix}$$

19 Em cada item determine, caso exista, o número real **m** que satisfaz a igualdade:

a) $\begin{pmatrix} m - 1 & 0 \\ 1 - m & m \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 2m \\ -3 & 4 \end{pmatrix}$

b) $\begin{pmatrix} 9 - m^2 & 1 \\ -3 & 7 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ m & 7 \end{pmatrix}$

20 Determine os números reais **p** e **q** de modo que as matrizes $\begin{pmatrix} p + q & -2 \\ 0 & 2p - q \end{pmatrix}$ e $\begin{pmatrix} 6 & -2 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$ sejam iguais.

21 Determine os números reais **a**, **b**, **c**, **d**, **e** e **f** que tornam verdadeira a igualdade:

$$\begin{bmatrix} a + 3 & b + 2 & c + 1 \\ d & 5 - e & 2f \end{bmatrix}^t = 0_{3 \times 2}$$

22 Uma matriz quadrada **A** é dita simétrica se $A = A^t$.

a) Entre as matrizes seguintes, quais são simétricas?

$A = \begin{pmatrix} 0 & -3 \\ -3 & 5 \end{pmatrix}$

$B = \begin{pmatrix} 5 & -5 \\ 5 & -5 \end{pmatrix}$

$C = \begin{pmatrix} \text{sen } \pi & \cos \pi \\ \text{sen } \frac{3\pi}{2} & \cos \frac{3\pi}{2} \end{pmatrix}$

b) Sabendo que a matriz $\begin{pmatrix} 3 & 2 & y \\ x & -2 & 5 \\ 3 & z & 1 \end{pmatrix}$ é simétrica, qual é o valor de $x + 2y - z$?

Adição de matrizes

As tabelas abaixo representam o número de unidades vendidas, em uma concessionária, de dois veículos 0 km, modelos **A** e **B**, de acordo com o tipo de combustível, durante os dois primeiros meses de determinado ano:

Janeiro

Modelo \ Combustível	Flex	Gasolina	Álcool
A	4453	1985	415
B	2693	1378	289

Fevereiro

Modelo \ Combustível	Flex	Gasolina	Álcool
A	5893	2031	531
B	3412	1597	402

De que maneira podemos determinar as vendas de cada tipo de veículo no primeiro bimestre desse ano? Intuitivamente, sabemos que é preciso somar os elementos correspondentes das tabelas anteriores. Usando matrizes, temos:

$$\begin{bmatrix} 4453 & 1985 & 415 \\ 2693 & 1378 & 289 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 5893 & 2031 & 531 \\ 3412 & 1597 & 402 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 10346 & 4016 & 946 \\ 6105 & 2975 & 691 \end{bmatrix}$$

Assim, por exemplo, 4016 é o número total de veículos do modelo **A**, a gasolina, vendidos no primeiro bimestre.

Dadas duas matrizes do mesmo tipo, $A = (a_{ij})_{m \times n}$ e $B = (b_{ij})_{m \times n}$, a soma de **A** com **B** (representa-se por $A + B$) é a matriz $C = (c_{ij})_{m \times n}$, em que $c_{ij} = a_{ij} + b_{ij}$, para $1 \leqslant i \leqslant m$ e $1 \leqslant j \leqslant n$.

Em outras palavras, a matriz soma **C** é do mesmo tipo que **A** e **B** e é tal que cada um de seus elementos é a soma de elementos correspondentes de **A** e **B**.

- $\begin{bmatrix} 3 & -4 & 2 \\ -1 & 5 & 3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & -1 & \frac{1}{2} \\ -3 & -4 & -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & -5 & \frac{5}{2} \\ -4 & 1 & 2 \end{bmatrix}$

- $\begin{pmatrix} 0 & -2 \\ 1 & 3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1,2 & -1 \\ 4 & -3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1,2 & -3 \\ 5 & 0 \end{pmatrix}$

EXERCÍCIO **RESOLVIDO**

2 Resolva a equação matricial $A + X = B$, sendo $A = \begin{bmatrix} 3 & 2 & 1 \\ -1 & -4 & 2 \end{bmatrix}$ e $B = \begin{bmatrix} 7 & 5 & 1 \\ 1 & 6 & 7 \end{bmatrix}$.

Solução:

Uma equação matricial é aquela em que a incógnita é uma matriz.

A matriz procurada é do tipo 2×3 e podemos representá-la por $X = \begin{bmatrix} a & b & c \\ d & e & f \end{bmatrix}$.

Temos:

$$\begin{bmatrix} 3 & 2 & 1 \\ -1 & -4 & 2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} a & b & c \\ d & e & f \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 7 & 5 & 1 \\ 1 & 6 & 7 \end{bmatrix}$$

Daí:

$$\begin{bmatrix} 3 + a & 2 + b & 1 + c \\ -1 + d & -4 + e & 2 + f \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 7 & 5 & 1 \\ 1 & 6 & 7 \end{bmatrix}$$

Do conceito de igualdade, temos:

- $3 + a = 7 \Rightarrow a = 4$
- $-1 + d = 1 \Rightarrow d = 2$
- $2 + b = 5 \Rightarrow b = 3$
- $-4 + e = 6 \Rightarrow e = 10$
- $1 + c = 1 \Rightarrow c = 0$
- $2 + f = 7 \Rightarrow f = 5$

Logo, $X = \begin{bmatrix} 4 & 3 & 0 \\ 2 & 10 & 5 \end{bmatrix}$.

Propriedades

Sendo **A**, **B** e **C** matrizes do mesmo tipo ($m \times n$) e $0_{m \times n}$ a matriz nula, do tipo $m \times n$, valem as seguintes propriedades para a adição de matrizes:

I. **Comutativa:** $A + B = B + A$

II. **Associativa:** $(A + B) + C = A + (B + C)$

III. **Existência do elemento neutro:** existe **M** tal que $A + M = A$, qualquer que seja a matriz $A_{m \times n}$.

Observe que, nesse caso, **M** é a matriz nula do tipo $m \times n$.

IV. **Existência do oposto (ou simétrico):** existe **A'** tal que $A + A' = 0_{m \times n}$.

Para exemplificar, vejamos a demonstração das propriedades II e III.

- Para a propriedade II, dadas as matrizes $A = (a_{ij})_{m \times n}$, $B = (b_{ij})_{m \times n}$ e $C = (c_{ij})_{m \times n}$, temos:

  $(A + B) + C = D = (d_{ij})_{m \times n}$ e $A + (B + C) = E = (e_{ij})_{m \times n}$

  Queremos mostrar que $D = E$.

  Para todo $i \in \{1, 2, ..., m\}$ e para todo $j \in \{1, 2, ..., n\}$, temos:

  $$d_{ij} = (a_{ij} + b_{ij}) + c_{ij}$$

  Usando a propriedade associativa da adição de números reais, podemos escrever:

  $d_{ij} = a_{ij} + (b_{ij} + c_{ij}) = e_{ij}$ e, então, $D = E$, isto é, $(A + B) + C = A + (B + C)$

- Para a propriedade III, como $A + M = A$, então $a_{ij} + m_{ij} = a_{ij} \Rightarrow m_{ij} = 0$, para todo **i** e todo **j**. Assim $M = 0_{m \times n}$, ou seja, o elemento neutro da adição é a matriz nula.

Matriz oposta

Seja a matriz $A = (a_{ij})_{m \times n}$. Chama-se **oposta de A** a matriz representada por $-A$, tal que $A + (-A) = 0_{m \times n}$, sendo $0_{m \times n}$ a matriz nula do tipo $m \times n$.

Observe que a matriz $-A$ é obtida de **A** trocando-se o sinal de cada um de seus elementos:

- $A = \begin{bmatrix} 3 & \frac{1}{3} & -1 \\ -2 & 4 & 0 \end{bmatrix}$; então, $-A = \begin{bmatrix} -3 & -\frac{1}{3} & 1 \\ 2 & -4 & 0 \end{bmatrix}$.

- $B = \begin{bmatrix} 7 & -4 \\ 0{,}5 & 5 \end{bmatrix}$; então, $-B = \begin{bmatrix} -7 & 4 \\ -0{,}5 & -5 \end{bmatrix}$.

PENSE NISTO:

Note que, se $B = (b_{ij})_{m \times n}$ é a oposta de $A = (a_{ij})_{m \times n}$, então $b_{ij} = -a_{ij}$, para todo $i \in \{1, 2, ..., m\}$ e $j \in \{1, 2, ..., n\}$.

Se **B** é oposta de **A**, $A + B = 0$ e daí concluímos que, para todo **j**, $a_{ij} + b_{ij} = 0$, isto é, $a_{ij} = -b_{ij}$, ou ainda, $b_{ij} = -a_{ij}$.

Subtração de matrizes

Dadas duas matrizes do mesmo tipo $A = (a_{ij})_{m \times n}$ e $B = (b_{ij})_{m \times n}$, chama-se diferença entre **A** e **B** (representa-se por $A - B$) a matriz soma de **A** com a oposta de **B**, isto é:

$$A - B = A + (-B)$$

Observe os exemplos a seguir:

- $\begin{pmatrix} 2 & 5 \\ -1 & 6 \\ 4 & -2 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} -2 & 3 \\ 2 & 5 \\ 3 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 5 \\ -1 & 6 \\ 4 & -2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2 & -3 \\ -2 & -5 \\ -3 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & 2 \\ -3 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$

- $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -3 & 2 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -2 & 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -3 & 2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 2 & -5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ -1 & -3 \end{pmatrix}$

EXERCÍCIO **RESOLVIDO**

3 Resolva a equação X − A + B = C, sendo $A = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ -2 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 0 \\ 4 \\ -5 \end{pmatrix}$ e $C = \begin{pmatrix} 2 \\ -2 \\ 3 \end{pmatrix}$.

Solução:

1º modo:

A matriz **X** procurada é do tipo 3 × 1, e a representaremos por $X = \begin{pmatrix} m \\ n \\ p \end{pmatrix}$.

Temos:

$$X - A + B = C \Rightarrow \begin{pmatrix} m \\ n \\ p \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ -2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 4 \\ -5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ -2 \\ 3 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} m-1 \\ n+1 \\ p-3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ -2 \\ 3 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{cases} m - 1 = 2 \Rightarrow m = 3 \\ n + 1 = -2 \Rightarrow n = -3 \\ p - 3 = 3 \Rightarrow p = 6 \end{cases} \Rightarrow X = \begin{pmatrix} 3 \\ -3 \\ 6 \end{pmatrix}$$

2º modo:

Recorrendo às propriedades da adição de matrizes, podemos "isolar" a matriz **X** procedendo da mesma forma se **X**, **A**, **B** e **C** fossem números reais. Obtemos:

$$X = C - B + A$$

Assim:

$$X = \begin{pmatrix} 2 \\ -2 \\ 3 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 \\ 4 \\ -5 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ -2 \end{pmatrix} \Rightarrow X = \begin{pmatrix} 3 \\ -3 \\ 6 \end{pmatrix}$$

PENSE NISTO:

Use propriedades da adição de matrizes para obter outra solução para o exercício resolvido 2.

$A + X = B \Rightarrow X = B - A = \begin{bmatrix} 7 & 5 & 1 \\ 1 & 6 & 7 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 3 & 2 & 1 \\ -1 & -4 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 & 3 & 0 \\ 2 & 10 & 5 \end{bmatrix}$

EXERCÍCIOS

FAÇA NO CADERNO

23 Efetue:

a) $\begin{pmatrix} 5 & 7 \\ 9 & 4 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 6 & -2 \\ 5 & 8 \end{pmatrix}$

b) $\begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 2 & 5 \\ 4 & 1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 11 & 17 \\ 0 & 2 \\ -3 & 4 \end{bmatrix}$

c) $\begin{pmatrix} 1 & 5 & 0 & 4 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 6 & 6 & 8 & 7 \end{pmatrix}$

d) $\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 3 & 4 \\ -1 & -2 & -5 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 3 \\ -3 & -2 & -7 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 4 & -1 & 1 \\ 0 & 3 & -2 \\ 2 & 1 & 3 \end{bmatrix}$

24 Sejam as matrizes $A = (a_{ij})_{10 \times 12}$, em que $a_{ij} = 2i - j$, e $B = (b_{ij})_{10 \times 12}$, em que $b_{ij} = i + j$. Seja C = A + B, em que $c_{ij} = a_{ij} + b_{ij}$.

a) Obtenha os valores dos elementos $\mathbf{c_{78}}$ e $\mathbf{c_{95}}$.

b) Obtenha a fórmula que fornece o valor de um elemento genérico $\mathbf{c_{ij}}$ em função de **i** e **j**.

25 Resolva as seguintes equações matriciais:

a) $X + \begin{pmatrix} 4 & 3 \\ 1 & 1 \\ 2 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 & 0 \\ 2 & 3 \\ 7 & 8 \end{pmatrix}$

b) $X - \begin{pmatrix} 1 & 4 & 7 \\ -2 & 5 & -3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 2 & 11 \\ -3 & 4 & 1 \end{pmatrix}$

c) $\begin{pmatrix} \frac{1}{2} & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \frac{3}{2} & 4 \\ 3 & 7 \end{pmatrix} = X - \begin{pmatrix} -1 & -3 \\ -2 & 4 \end{pmatrix}$

26 As tabelas a seguir indicam o número de faltas de três alunos (**A**, **B** e **C**) em cinco disciplinas (Português, Matemática, Biologia, História e Física, representadas por suas iniciais), nos meses de março e abril.

Março

	P	M	B	H	F
Aluno A	2	1	0	4	2
Aluno B	1	0	2	1	1
Aluno C	5	4	2	2	2

Abril

	P	M	B	H	F
Aluno A	1	2	0	1	3
Aluno B	0	1	1	3	1
Aluno C	3	1	3	2	3

a) Qual é a matriz que representa o número de faltas desses alunos no primeiro bimestre em cada disciplina?

b) No primeiro bimestre, qual aluno teve o maior número de faltas em Português? E em Matemática? E em História?

27 Uma matriz quadrada **A** é dita antissimétrica se $A = -A^t$.

a) A matriz $\begin{pmatrix} 0 & 5 \\ -5 & 0 \end{pmatrix}$ é antissimétrica? E a matriz $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$?

b) Existe algum valor real de **m** para o qual a matriz $\begin{bmatrix} 0 & m \\ -2 & 3 \end{bmatrix}$ é antissimétrica? Determine-o, se existir.

28 Determine a matriz **X**, tal que $(X + A)^t = B$, sendo:

$$A = \begin{bmatrix} 4 & 2 \\ -1 & 0 \\ 5 & 1 \end{bmatrix} \quad \text{e} \quad B = \begin{bmatrix} 1 & -2 & 4 \\ 5 & 6 & 0 \end{bmatrix}$$

Multiplicação de um número real por uma matriz

Seja a matriz $A = (a_{ij})_{m \times n}$ e **k** um número real. O produto de **k** pela matriz **A** (indica-se: $k \cdot A$) é a matriz $B = (b_{ij})_{m \times n}$, em que $b_{ij} = k \cdot a_{ij}$, para todo $i \in \{1, 2, ..., m\}$ e para todo $j \in \{1, 2, ..., n\}$.

Isso significa que **B** é obtida de **A** multiplicando-se por **k** cada um dos elementos de **A**.

Observe os exemplos a seguir:

- Se $A = \begin{pmatrix} 2 & 4 & 7 \end{pmatrix}$, então $3 \cdot A = \begin{pmatrix} 6 & 12 & 21 \end{pmatrix}$.
- Se $A = \begin{bmatrix} 4 & 6 \\ 10 & 1 \end{bmatrix}$, então $\frac{1}{2} \cdot A = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 5 & \frac{1}{2} \end{bmatrix}$.
- Se $A = \begin{pmatrix} -1 & 4 & \sqrt{2} \\ \frac{1}{2} & -3 & 0 \end{pmatrix}$, então $(-2) \cdot A = \begin{pmatrix} 2 & -8 & -2\sqrt{2} \\ -1 & 6 & 0 \end{pmatrix}$.

Propriedades

Sejam **k** e **ℓ** números reais e **A** e **B** matrizes do mesmo tipo. Valem as seguintes propriedades:

I. $k \cdot (\ell \cdot A) = (k \cdot \ell) \cdot A$

II. $k \cdot (A + B) = k \cdot A + k \cdot B$

III. $(k + \ell) \cdot A = k \cdot A + \ell \cdot A$

IV. $1 \cdot A = A$

A título de exemplo, vamos provar a propriedade **II**. As demais são análogas.

Dadas as matrizes $A = (a_{ij})_{m \times n}$ e $B = (b_{ij})_{m \times n}$ e sendo $k \in \mathbb{R}$, temos:

$$k \cdot (A + B) = C = (c_{ij})_{m \times n};\ \ k \cdot A = D = (d_{ij})_{m \times n}\ \text{ e }\ k \cdot B = E = (e_{ij})_{m \times n}$$

Vamos mostrar que $C = D + E$.

Para todo $i \in \{1, 2, \dots, m\}$ e todo $j \in \{1, 2, \dots, n\}$, temos que:

$$c_{ij} = k \cdot (a_{ij} + b_{ij})$$

Usando a propriedade distributiva da multiplicação em relação à adição, para números reais, obtemos:

$$c_{ij} = k \cdot a_{ij} + k \cdot b_{ij} = d_{ij} + e_{ij}$$

Daí, podemos concluir que $C = D + E$, isto é: $k \cdot (A + B) = k \cdot A + k \cdot B$

EXERCÍCIOS

FAÇA NO CADERNO

29 Dada a matriz $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -3 & 5 & -1 \end{pmatrix}$, obtenha as matrizes:

a) $4 \cdot A$ **b)** $\frac{1}{3} \cdot A$ **c)** $-2 \cdot A$

30 Sejam as matrizes $A = \begin{pmatrix} 2 & 4 \\ 1 & 5 \\ 0 & 7 \end{pmatrix}$ e $B = \begin{pmatrix} 3 & -2 \\ -1 & 6 \\ 9 & 8 \end{pmatrix}$.

Determine as seguintes matrizes:

a) $3A + B$ **b)** $A - 3B$ **c)** $2 \cdot A^t + 3 \cdot B^t$

31 Resolva a equação matricial:

$$\begin{pmatrix} -7 & 2 & 1 \\ 6 & 4 & -3 \end{pmatrix} + 2 \cdot X = \begin{pmatrix} 11 & 0 & 3 \\ 8 & 12 & 5 \end{pmatrix}$$

32 Dadas as matrizes $A = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{3}{2} \\ \frac{1}{2} & 0 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 4 & 3 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$ e $C = \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} & 0 \end{pmatrix}$, determine a matriz **X** que verifica a equação $2A + B = X + 2C$.

33 Determine a matriz **X** que satisfaz a equação:

$$2 \cdot X^t + A = B,$$

sendo $A = \begin{bmatrix} 4 & 3 & 2 \\ -1 & 0 & 5 \end{bmatrix}$ e $B = \begin{bmatrix} -2 & 1 & -6 \\ 1 & 4 & 3 \end{bmatrix}$.

Multiplicação de matrizes

A tabela abaixo representa as notas obtidas em um curso de espanhol pelos alunos **X**, **Y** e **Z**, em cada bimestre do ano letivo.

	1º bimestre	2º bimestre	3º bimestre	4º bimestre
Aluno X	7	8	6	8
Aluno Y	4	5	5	7
Aluno Z	8	7	9	10

Para calcular a nota final do ano, o professor deve fazer uma média ponderada usando como pesos, respectivamente, 1, 2, 3 e 4. Assim, a média de cada aluno será determinada pela fórmula:

$$\frac{(\text{nota}_{1^{\underline{o}}\text{ bim.}} \cdot 1) + (\text{nota}_{2^{\underline{o}}\text{ bim.}} \cdot 2) + (\text{nota}_{3^{\underline{o}}\text{ bim.}} \cdot 3) + (\text{nota}_{4^{\underline{o}}\text{ bim.}} \cdot 4)}{1 + 2 + 3 + 4}$$

que equivale a fazer:

$$(\text{nota}_{1^{\underline{o}}\text{ bim.}} \cdot 0{,}1) + (\text{nota}_{2^{\underline{o}}\text{ bim.}} \cdot 0{,}2) + (\text{nota}_{3^{\underline{o}}\text{ bim.}} \cdot 0{,}3) + (\text{nota}_{4^{\underline{o}}\text{ bim.}} \cdot 0{,}4)$$

Podemos representar a tabela das notas bimestrais pela matriz:

$$A = \begin{bmatrix} 7 & 8 & 6 & 8 \\ 4 & 5 & 5 & 7 \\ 8 & 7 & 9 & 10 \end{bmatrix}$$

Vamos representar os pesos dos bimestres (expressos na forma decimal, em relação à soma dos pesos) pela matriz:

$$B = \begin{bmatrix} 0,1 \\ 0,2 \\ 0,3 \\ 0,4 \end{bmatrix}$$

Vamos calcular as médias de cada aluno:

- aluno **X**: $(7 \cdot 0,1) + (8 \cdot 0,2) + (6 \cdot 0,3) + (8 \cdot 0,4) = 7,3$
- aluno **Y**: $(4 \cdot 0,1) + (5 \cdot 0,2) + (5 \cdot 0,3) + (7 \cdot 0,4) = 5,7$
- aluno **Z**: $(8 \cdot 0,1) + (7 \cdot 0,2) + (9 \cdot 0,3) + (10 \cdot 0,4) = 8,9$

Essas médias podem ser registradas em uma matriz **C**, que é o produto da matriz **A** (notas) pela matriz **B** (pesos):

$$C = \begin{bmatrix} 7 & 8 & 6 & 8 \\ 4 & 5 & 5 & 7 \\ 8 & 7 & 9 & 10 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 0,1 \\ 0,2 \\ 0,3 \\ 0,4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 7,3 \\ 5,7 \\ 8,9 \end{bmatrix}$$

A ideia utilizada para obter a matriz **C** será usada agora para definirmos matematicamente a multiplicação de matrizes.

Dadas as matrizes $A = (a_{ij})_{m \times n}$ e $B = (b_{jk})_{n \times p}$, chama-se **produto de A por B**, e se indica por $A \cdot B$, a matriz $C = (c_{ik})_{m \times p}$, em que $c_{ik} = a_{i1} \cdot b_{1k} + a_{i2} \cdot b_{2k} + a_{i3} \cdot b_{3k} + a_{i4} \cdot b_{4k} + \ldots + a_{in} \cdot b_{nk}$; para todo $i \in \{1, 2, \ldots, m\}$ e todo $k \in \{1, 2, \ldots, p\}$.

Acompanhe o procedimento que devemos seguir para obter o elemento $\mathbf{c_{ik}}$ da matriz **C**:

1º) Tomamos ordenadamente os **n** elementos da linha **i** da matriz **A**: $\mathbf{a_{i1}}, \mathbf{a_{i2}}, \ldots, \mathbf{a_{in}}$. 1

2º) Tomamos ordenadamente os **n** elementos da coluna **k** da matriz **B**: $\mathbf{b_{1k}}, \mathbf{b_{2k}}, \ldots, \mathbf{b_{nk}}$. 2

3º) Multiplicamos o 1º elemento de 1 pelo 1º elemento de 2, o 2º elemento de 1 pelo 2º elemento de 2, e assim sucessivamente.

4º) Somamos os produtos obtidos.

Assim:

$$c_{ik} = a_{i1} \cdot b_{1k} + a_{i2} \cdot b_{2k} + \ldots + a_{in} \cdot b_{nk}$$

OBSERVAÇÕES

- A definição garante a existência do produto $A \cdot B$ se o número de colunas de **A** é igual ao número de linhas de **B**.
- A matriz produto $C = A \cdot B$ é uma matriz cujo número de linhas é igual ao número de linhas de **A** e o número de colunas é igual ao número de colunas de **B**. Observemos o esquema abaixo:

$$A_{(m \times \mathbf{n})} \cdot B_{(\mathbf{n} \times p)} = C_{(m \times p)}$$

garante a existência do produto

EXEMPLO 2

Dadas as matrizes $A = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 1 \\ -1 & 0 & 2 \end{pmatrix}$ e $B = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 0 & 5 \\ 4 & 1 \end{pmatrix}$, vamos determinar, se existirem, $A \cdot B$ e $B \cdot A$.

- Como **A** é do tipo 2×3 e **B** é do tipo 3×2, segue que $C = A \cdot B$ existe e é do tipo 2×2.

  Escrevendo os elementos de **C** em sua forma genérica, temos $C = \begin{pmatrix} c_{11} & c_{12} \\ c_{21} & c_{22} \end{pmatrix}_{2 \times 2}$.

  Da definição, temos:

  - $\mathbf{c_{11}}$ (linha 1 de **A** e coluna 1 de **B**): $c_{11} = 2 \cdot 1 + 3 \cdot 0 + 1 \cdot 4 = 6$

  $$\begin{array}{|c|c|c|}\hline 2 & 3 & 1 \\ \hline \end{array} \qquad \begin{array}{|c|}\hline 1 \\ \hline 0 \\ \hline 4 \\ \hline \end{array}$$

  - $\mathbf{c_{12}}$ (linha 1 de **A** e coluna 2 de **B**): $c_{12} = 2 \cdot (-2) + 3 \cdot 5 + 1 \cdot 1 = 12$

  $$\begin{array}{|c|c|c|}\hline 2 & 3 & 1 \\ \hline \end{array} \qquad \begin{array}{|c|}\hline -2 \\ \hline 5 \\ \hline 1 \\ \hline \end{array}$$

  - $\mathbf{c_{21}}$ (linha 2 de **A** e coluna 1 de **B**): $c_{21} = (-1) \cdot 1 + 0 \cdot 0 + 2 \cdot 4 = 7$

  $$\begin{array}{|c|c|c|}\hline -1 & 0 & 2 \\ \hline \end{array} \qquad \begin{array}{|c|}\hline 1 \\ \hline 0 \\ \hline 4 \\ \hline \end{array}$$

  - $\mathbf{c_{22}}$ (linha 2 de **A** e coluna 2 de **B**): $c_{22} = (-1) \cdot (-2) + 0 \cdot 5 + 2 \cdot 1 = 4$

  $$\begin{array}{|c|c|c|}\hline -1 & 0 & 2 \\ \hline \end{array} \qquad \begin{array}{|c|}\hline -2 \\ \hline 5 \\ \hline 1 \\ \hline \end{array}$$

Logo, $C = \begin{pmatrix} 6 & 12 \\ 7 & 4 \end{pmatrix}$.

- Como **B** é do tipo 3×2 e **A** é do tipo 2×3, segue que $D = B \cdot A$ existe e é do tipo 3×3.

  Assim, $D = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 0 & 5 \\ 4 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 & 3 & 1 \\ -1 & 0 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} d_{11} & d_{12} & d_{13} \\ d_{21} & d_{22} & d_{23} \\ d_{31} & d_{32} & d_{33} \end{pmatrix}$.

  Aplicando a definição, obtemos:

  - $\mathbf{d_{11}}$ (linha 1 de **B** e coluna 1 de **A**): $d_{11} = 1 \cdot 2 + (-2) \cdot (-1) = 4$

  $$\begin{array}{|c|c|}\hline 1 & -2 \\ \hline \end{array} \qquad \begin{array}{|c|}\hline 2 \\ \hline -1 \\ \hline \end{array}$$

  - $\mathbf{d_{12}}$ (linha 1 de **B** e coluna 2 de **A**): $d_{12} = 1 \cdot 3 + (-2) \cdot 0 = 3$

  $$\begin{array}{|c|c|}\hline 1 & -2 \\ \hline \end{array} \qquad \begin{array}{|c|}\hline 3 \\ \hline 0 \\ \hline \end{array}$$

  - $\mathbf{d_{13}}$ (linha 1 de **B** e coluna 3 de **A**): $d_{13} = 1 \cdot 1 + (-2) \cdot 2 = -3$

  $$\begin{array}{|c|c|}\hline 1 & -2 \\ \hline \end{array} \qquad \begin{array}{|c|}\hline 1 \\ \hline 2 \\ \hline \end{array}$$

- $\mathbf{d_{21}}$ (linha 2 de **B** e coluna 1 de **A**): $d_{21} = 0 \cdot 2 + 5 \cdot (-1) = -5$

$$\begin{array}{|c|c|}\hline 0 & 5 \\ \hline \end{array} \qquad \begin{array}{|c|}\hline 2 \\ \hline -1 \\ \hline \end{array}$$

- $\mathbf{d_{22}}$ (linha 2 de **B** e coluna 2 de **A**): $d_{22} = 0 \cdot 3 + 5 \cdot 0 = 0$

$$\begin{array}{|c|c|}\hline 0 & 5 \\ \hline \end{array} \qquad \begin{array}{|c|}\hline 3 \\ \hline 0 \\ \hline \end{array}$$

- $\mathbf{d_{23}}$ (linha 2 de **B** e coluna 3 de **A**): $d_{23} = 0 \cdot 1 + 5 \cdot 2 = 10$

$$\begin{array}{|c|c|}\hline 0 & 5 \\ \hline \end{array} \qquad \begin{array}{|c|}\hline 1 \\ \hline 2 \\ \hline \end{array}$$

- $\mathbf{d_{31}}$ (linha 3 de **B** e coluna 1 de **A**): $d_{31} = 4 \cdot 2 + 1 \cdot (-1) = 7$

$$\begin{array}{|c|c|}\hline 4 & 1 \\ \hline \end{array} \qquad \begin{array}{|c|}\hline 2 \\ \hline -1 \\ \hline \end{array}$$

- $\mathbf{d_{32}}$ (linha 3 de **B** e coluna 2 de **A**): $d_{32} = 4 \cdot 3 + 1 \cdot 0 = 12$

$$\begin{array}{|c|c|}\hline 4 & 1 \\ \hline \end{array} \qquad \begin{array}{|c|}\hline 3 \\ \hline 0 \\ \hline \end{array}$$

- $\mathbf{d_{33}}$ (linha 3 de **B** e coluna 3 de **A**): $d_{33} = 4 \cdot 1 + 1 \cdot 2 = 6$

$$\begin{array}{|c|c|}\hline 4 & 1 \\ \hline \end{array} \qquad \begin{array}{|c|}\hline 1 \\ \hline 2 \\ \hline \end{array}$$

Logo, $D = \begin{pmatrix} 4 & 3 & -3 \\ -5 & 0 & 10 \\ 7 & 12 & 6 \end{pmatrix}$.

Observe, neste exemplo, que $C = A \cdot B$ é uma matriz 2×2 e $D = B \cdot A$ é uma matriz 3×3.

EXEMPLO 3

Dadas as matrizes $A = \begin{bmatrix} -1 & 2 \\ 0 & 5 \end{bmatrix}$ e $B = \begin{bmatrix} 1 & -3 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$, vamos determinar, se existirem, $A \cdot B$ e $B \cdot A$.

Como **A** é do tipo 2×2 e **B** também, concluímos que existem $A \cdot B$ e $B \cdot A$, pois:

$$A_{2 \times \underbrace{2 \cdot B_{2}}_{} \times 2} \Rightarrow A \cdot B \text{ é do tipo } 2 \times 2$$

$$B_{2 \times \underbrace{2 \cdot A_{2}}_{} \times 2} \Rightarrow B \cdot A \text{ é do tipo } 2 \times 2$$

Temos:

$$A \cdot B = \begin{bmatrix} -1 & 2 \\ 0 & 5 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & -3 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} c_{11} & c_{12} \\ c_{21} & c_{22} \end{bmatrix}$$

- $c_{11} = (-1) \cdot 1 + 2 \cdot 1 = 1$
- $c_{12} = (-1) \cdot (-3) + 2 \cdot 2 = 7$
- $c_{21} = 0 \cdot 1 + 5 \cdot 1 = 5$
- $c_{22} = 0 \cdot (-3) + 5 \cdot 2 = 10$

Daí, $A \cdot B = \begin{bmatrix} 1 & 7 \\ 5 & 10 \end{bmatrix}$

PENSE NISTO:

É sempre possível multiplicar duas matrizes quadradas de mesma ordem? O que se pode afirmar em relação ao tipo da matriz produto?

Sim; qualquer que seja a ordem **n** dessas matrizes, temos:

$$(n \times \underbrace{n)(n}_{\text{iguais}} \times n)$$

A matriz produto também é quadrada de ordem **n**.

$$B \cdot A = \begin{bmatrix} 1 & -3 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} -1 & 2 \\ 0 & 5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} d_{11} & d_{12} \\ d_{21} & d_{22} \end{bmatrix}$$

- $d_{11} = 1 \cdot (-1) + (-3) \cdot 0 = -1$
- $d_{12} = 1 \cdot 2 + (-3) \cdot 5 = -13$
- $d_{21} = 1 \cdot (-1) + 2 \cdot 0 = -1$
- $d_{22} = 1 \cdot 2 + 2 \cdot 5 = 12$

Daí, $B \cdot A = \begin{bmatrix} -1 & -13 \\ -1 & 12 \end{bmatrix}$

Observe, neste exemplo, que $A \cdot B \neq B \cdot A$.

EXERCÍCIOS **RESOLVIDOS**

4 Sejam as matrizes $A = (a_{ij})_{6 \times 3}$, em que $a_{ij} = i - j$, e $B = (b_{jk})_{3 \times 8}$, em que $b_{jk} = j + k$. Sendo $C = A \cdot B = (c_{ik})_{6 \times 8}$, qual é o valor do elemento $\mathbf{c_{35}}$?

Solução:

O elemento $\mathbf{c_{35}}$ da matriz produto **C** será obtido multiplicando-se ordenadamente os elementos da linha 3 de **A** e os da coluna 5 de **B** e, em seguida, somando os produtos obtidos.

Dessa forma, usamos a "regra de formação" dos elementos de **A** e **B** para determinar apenas as filas procuradas:

$$A = \begin{pmatrix} \dots & \dots & \dots \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \\ \dots & \dots & \dots \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \dots & \dots & \dots \\ 2 & 1 & 0 \\ \dots & \dots & \dots \end{pmatrix}_{6 \times 3}; \; B = \begin{pmatrix} \dots & b_{15} & \dots \\ \dots & b_{25} & \dots \\ \dots & b_{35} & \dots \end{pmatrix}_{3 \times 8} = \begin{pmatrix} \dots & 6 & \dots \\ \dots & 7 & \dots \\ \dots & 8 & \dots \end{pmatrix}$$

Assim, $c_{35} = 2 \cdot 6 + 1 \cdot 7 + 0 \cdot 8 = 19$.

5 Resolva a equação matricial $A \cdot X = B$, sendo $A = \begin{pmatrix} 5 & 7 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$ e $B = \begin{pmatrix} 4 \\ 1 \end{pmatrix}$.

Solução:

Precisamos, inicialmente, determinar o tipo da matriz **X**.

Temos:

$$\underset{(2 \times 2)}{\overset{A}{\downarrow}} \quad \cdot \quad \underset{(n \times p)}{\overset{X}{\downarrow}} \quad = \quad \underset{(2 \times 1)}{\overset{B}{\downarrow}}$$

Devemos ter:

- $n = 2$, para garantir a existência do produto;
- $p = 1$, pois o número de colunas de **X** é igual ao número de colunas de **B**.

Assim, $X = \begin{pmatrix} r \\ s \end{pmatrix}$

Daí, $\begin{pmatrix} 5 & 7 \\ 2 & 3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} r \\ s \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 1 \end{pmatrix}$

Efetuando a multiplicação, obtemos:

$\begin{pmatrix} 5r + 7s \\ 2r + 3s \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 1 \end{pmatrix}$, donde resulta o sistema $\begin{cases} 5r + 7s = 4 \\ 2r + 3s = 1 \end{cases}$, cuja solução é $r = 5$ e $s = -3$.

Assim, $X = \begin{pmatrix} 5 \\ -3 \end{pmatrix}$.

EXERCÍCIOS

FAÇA NO CADERNO

34 Determine, se existirem, os produtos:

a) $\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ -2 & 1 \end{bmatrix}$

b) $\begin{bmatrix} 1 & -2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} -2 & 3 & 2 & -1 \\ -1 & 0 & 0 & -4 \end{bmatrix}$

c) $\begin{bmatrix} -2 & 1 \\ 0 & 3 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ -1 & -4 \\ 2 & 4 \end{bmatrix}$

d) $\begin{bmatrix} 3 & 4 & 1 \\ 5 & 6 & 1 \\ 7 & 8 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 2 \\ -3 \\ 4 \end{bmatrix}$

e) $\begin{bmatrix} -5 & 0 \\ -1 & 3 \\ 1 & 1 \\ 2 & 2 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 3 & -2 \\ 1 & 5 \end{bmatrix}$

f) $\begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 5 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 6 & -2 & 8 \end{pmatrix}$

g) $\begin{pmatrix} 4 \\ 3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$

h) $\begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 0 & 3 & 1 \\ 5 & -2 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 3 & 0 & 1 \\ 4 & -1 & 1 \\ 1 & 2 & 0 \end{pmatrix}$

35 Sejam as matrizes:

$A = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 0 \\ -1 & 4 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}$ e $C = \begin{pmatrix} 4 \\ -1 \end{pmatrix}$

Determine, se existir:

a) $A \cdot B$

b) $B \cdot A$

c) $A \cdot C$

d) $B^t \cdot C$

e) $B \cdot A^t$

Matriz identidade

Seja **A** uma matriz quadrada de ordem **n**.

A é denominada **matriz identidade de ordem n** (indica-se por $\mathbf{I_n}$) se os elementos de sua diagonal principal são todos iguais a 1, e os demais elementos são iguais a zero. Assim:

- $I_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ é a matriz identidade de ordem 2.
- $I_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ é a matriz identidade de ordem 3.

$\vdots$

- $I_n = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & & \vdots \\ \vdots & & \ddots & 0 \\ 0 & \dots & \dots & 1 \end{pmatrix}$ é a matriz identidade de ordem **n**.

Propriedades

Vamos observar, por meio de exemplos, algumas propriedades relativas à multiplicação de matrizes envolvendo a matriz identidade.

I. **A** é uma matriz quadrada de ordem **n**.

- Seja $A = \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 4 & 3 \end{bmatrix}$.

$$A \cdot I_2 = \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 4 & 3 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 4 & 3 \end{bmatrix} = A$$

$$I_2 \cdot A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 4 & 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 4 & 3 \end{bmatrix} = A$$

$$B \cdot I_3 = \begin{bmatrix} 3 & -1 & 2 \\ 0 & 5 & 4 \\ -3 & -2 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & -1 & 2 \\ 0 & 5 & 4 \\ -3 & -2 & 1 \end{bmatrix} = B$$

$$I_3 \cdot B = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 3 & -1 & 2 \\ 0 & 5 & 4 \\ -3 & -2 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & -1 & 2 \\ 0 & 5 & 4 \\ -3 & -2 & 1 \end{bmatrix} = B$$

PENSE NISTO:

Seja $B = \begin{bmatrix} 3 & -1 & 2 \\ 0 & 5 & 4 \\ -3 & -2 & 1 \end{bmatrix}$.

Verifique que $B \cdot I_3 = B$ e $I_3 \cdot B = B$.

II. **A** não é uma matriz quadrada, isto é, $\mathbf{A}_{m \times n}$, com $m \neq n$:

- Seja $A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & -3 \\ 4 & 5 & -2 \end{bmatrix}_{2 \times 3}$. Temos:

$$I_2 \cdot A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 2 & 1 & -3 \\ 4 & 5 & -2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 1 & -3 \\ 4 & 5 & -2 \end{bmatrix}$$

Note que $A \cdot I_2$ não existe.

$$A \cdot I_3 = \begin{bmatrix} 2 & 1 & -3 \\ 4 & 5 & -2 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 1 & -3 \\ 4 & 5 & -2 \end{bmatrix}$$

Note que $I_3 \cdot A$ não existe.

- Seja $B = \begin{bmatrix} 4 & 5 \\ 3 & 1 \\ -2 & 0 \end{bmatrix}_{3 \times 2}$.

$$I_3 \cdot B = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 4 & 5 \\ 3 & 1 \\ -2 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 & 5 \\ 3 & 1 \\ -2 & 0 \end{bmatrix}$$

Note que $B \cdot I_3$ não existe.

$$B \cdot I_2 = \begin{bmatrix} 4 & 5 \\ 3 & 1 \\ -2 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 & 5 \\ 3 & 1 \\ -2 & 0 \end{bmatrix}$$

Note que $I_2 \cdot B$ não existe.

Em geral, pode-se dizer que:

- Se **A** é quadrada de ordem **n**, temos: $A \cdot I_n = I_n \cdot A = A$.
- Se $A = (a_{ij})_{m \times n}$, com $m \neq n$, temos: $I_m \cdot A = A$ e $A \cdot I_n = A$.

Propriedades da multiplicação de matrizes

Supondo que as matrizes **A**, **B** e **C** sejam de tipos tais que as operações abaixo possam ser realizadas, valem as seguintes propriedades para a multiplicação de matrizes:

I. Associativa: $(A \cdot B) \cdot C = A \cdot (B \cdot C)$

II. Distributiva à direita em relação à adição: $(A + B) \cdot C = A \cdot C + B \cdot C$

III. Distributiva à esquerda em relação à adição: $C \cdot (A + B) = C \cdot A + C \cdot B$

Observe a validade das propriedades I e II nos exemplos a seguir.

- Propriedade I: Sejam $A = \begin{pmatrix} 4 & 0 \\ 3 & -1 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} -4 & 5 & 1 \\ 1 & 0 & -3 \end{pmatrix}$ e $C = \begin{pmatrix} 8 \\ 11 \\ -6 \end{pmatrix}$.

$$A \cdot B = \begin{pmatrix} -16 & 20 & 4 \\ -13 & 15 & 6 \end{pmatrix} \Rightarrow (A \cdot B) \cdot C = \begin{pmatrix} -16 & 20 & 4 \\ -13 & 15 & 6 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 8 \\ 11 \\ -6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 68 \\ 25 \end{pmatrix}$$

$$B \cdot C = \begin{pmatrix} 17 \\ 26 \end{pmatrix} \Rightarrow A \cdot (B \cdot C) = \begin{pmatrix} 4 & 0 \\ 3 & -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 17 \\ 26 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 68 \\ 25 \end{pmatrix}$$

- Propriedade II: Sejam $A = \begin{pmatrix} 3 & -1 & 4 \\ 5 & 7 & 2 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 0 & -2 & 2 \\ 1 & -4 & 8 \end{pmatrix}$ e $C = \begin{pmatrix} 8 \\ 11 \\ -6 \end{pmatrix}$.

$$A + B = \begin{pmatrix} 3 & -3 & 6 \\ 6 & 3 & 10 \end{pmatrix} \Rightarrow (A + B) \cdot C = \begin{pmatrix} 3 & -3 & 6 \\ 6 & 3 & 10 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 8 \\ 11 \\ -6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -45 \\ 21 \end{pmatrix} \quad *$$

$$A \cdot C = \begin{pmatrix} 3 & -1 & 4 \\ 5 & 7 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 8 \\ 11 \\ -6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -11 \\ 105 \end{pmatrix}; \quad B \cdot C = \begin{pmatrix} 0 & -2 & 2 \\ 1 & -4 & 8 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 8 \\ 11 \\ -6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -34 \\ -84 \end{pmatrix}$$

$$A \cdot C + B \cdot C = \begin{pmatrix} -11 \\ 105 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -34 \\ -84 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -45 \\ 21 \end{pmatrix}$$, que coincide com *.

Ao estudar as propriedades da multiplicação de matrizes, é importante observar que:

A multiplicação de matrizes não é comutativa, isto é, em geral, $A \cdot B \neq B \cdot A$.

Sejam $A = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ -1 & 5 \end{pmatrix}$ e $B = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$; vamos determinar $A \cdot B$ e $B \cdot A$.

$$A_{2 \times 2} \cdot B_{2 \times 2} = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ -1 & 5 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 & 8 \\ -5 & 9 \end{pmatrix}$$

$$\neq$$

$$B_{2 \times 2} \cdot A_{2 \times 2} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ -1 & 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 5 \\ -4 & 7 \end{pmatrix}$$

Existem casos em que apenas uma das multiplicações pode ser feita. Por exemplo, se **A** é do tipo 2×3 e **B** é do tipo 3×4, então:

$\exists\ (A \cdot B)$ e é do tipo 2×4;

$\nexists\ (B \cdot A)$, pois o número de colunas de **B** é 4 e o número de linhas de **A** é 2.

Se $A \cdot B$ e $B \cdot A$ existem e $A \cdot B = B \cdot A$, dizemos que **A** e **B** comutam. Acompanhe o exemplo a seguir.

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 5 & -1 \end{pmatrix} \text{ e } B = \begin{pmatrix} -1 & -3 \\ -5 & 2 \end{pmatrix}$$

$$A \cdot B = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 5 & -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -1 & -3 \\ -5 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -17 & 0 \\ 0 & -17 \end{pmatrix}$$

$$B \cdot A = \begin{pmatrix} -1 & -3 \\ -5 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 5 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -17 & 0 \\ 0 & -17 \end{pmatrix}$$

Também é importante observar, ao estudar as propriedades da multiplicação de matrizes, que:

Não vale a propriedade do anulamento do produto na multiplicação de matrizes.

A conhecida propriedade $a \cdot b = 0 \Rightarrow a = 0$ ou $b = 0$, válida para **a** e **b** reais, não é válida para matrizes. Isso significa que é possível que o produto entre duas matrizes seja a matriz nula sem que nenhuma das matrizes seja nula.

Observe:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -1 & -1 \end{bmatrix} \text{ e } B = \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} \Rightarrow A \cdot B = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -1 & -1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

PENSE NISTO:

Considere $A = \begin{bmatrix} 1 & 5 \\ -3 & 4 \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} 9 & -2 \\ 0 & 8 \end{bmatrix}$ e $C = \begin{bmatrix} -4 & 5 \\ 7 & 1 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}$ e verifique que $C \cdot (A + B) = C \cdot A + C \cdot B$.

$(A + B) = \begin{bmatrix} 10 & 3 \\ -3 & 12 \end{bmatrix} \Rightarrow C \cdot (A + B) =$

$= \begin{bmatrix} -4 & 5 \\ 7 & 1 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 10 & 3 \\ -3 & 12 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -55 & 48 \\ 67 & 33 \\ -6 & 24 \end{bmatrix}$

$C \cdot A = \begin{bmatrix} -4 & 5 \\ 7 & 1 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 5 \\ -3 & 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -19 & 0 \\ 4 & 39 \\ -6 & 8 \end{bmatrix}$

$C \cdot B = \begin{bmatrix} -4 & 5 \\ 7 & 1 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 9 & -2 \\ 0 & 8 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -36 & 48 \\ 63 & -6 \\ 0 & 16 \end{bmatrix}$

$C \cdot A + C \cdot B = \begin{bmatrix} -19 & 0 \\ 4 & 39 \\ -6 & 8 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -36 & 48 \\ 63 & -6 \\ 0 & 16 \end{bmatrix} =$

$= \begin{bmatrix} -55 & 48 \\ 67 & 33 \\ -6 & 24 \end{bmatrix}$

EXERCÍCIO **RESOLVIDO**

6 Determine os valores reais de **x** e **y** de modo que as matrizes $A = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ -3 & 4 \end{pmatrix}$ e $B = \begin{pmatrix} 3 & x \\ y & 1 \end{pmatrix}$ comutem.

Solução:

Devemos ter $A \cdot B = B \cdot A$.

$$A \cdot B = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ -3 & 4 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 3 & x \\ y & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 & 2x \\ -9 + 4y & -3x + 4 \end{pmatrix}$$

$$B \cdot A = \begin{pmatrix} 3 & x \\ y & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ -3 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 - 3x & 4x \\ 2y - 3 & 4 \end{pmatrix}$$

Daí:

$$\begin{pmatrix} 6 & 2x \\ -9 + 4y & -3x + 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 - 3x & 4x \\ 2y - 3 & 4 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{cases} 6 = 6 - 3x & \Rightarrow x = 0 \\ 2x = 4x & \Rightarrow x = 0 \\ -9 + 4y = 2y - 3 & \Rightarrow y = 3 \\ -3x + 4 = 4 & \Rightarrow x = 0 \end{cases} \Rightarrow x = 0 \text{ e } y = 3$$

EXERCÍCIOS

FAÇA NO CADERNO

36 Sejam as matrizes $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \\ 2 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ e $B = \begin{pmatrix} 5 & 8 \\ 1 & 9 \\ 7 & -3 \end{pmatrix}$.

Se $C = (c_{ij})_{3 \times 2}$ é a matriz produto $A \cdot B$, determine, se existirem, os elementos:

a) c_{22} **b)** c_{31} **c)** c_{33}

37 Sejam as matrizes $A = (a_{ij})_{6 \times 3}$, em que $a_{ij} = i + j$, e $B = (b_{jk})_{3 \times 4}$, em que $b_{jk} = 2j - k$. Sendo $C = (c_{ik})_{6 \times 4}$ a matriz produto $A \cdot B$, determine o elemento c_{43}.

38 Determine **x** e **y** reais, a fim de que: $\begin{pmatrix} 2 & x \\ y & -3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 4 \\ -5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 \\ -1 \end{pmatrix}$.

39 Seja **A** uma matriz quadrada de ordem **n**; definimos $A^2 = A \cdot A$. Assim, determine A^2 nos seguintes casos:

a) $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$ **b)** $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 3 & 4 \\ 5 & 6 & 0 \end{pmatrix}$

40 Generalizando a definição dada no exercício anterior, temos:

Se $n \in \mathbb{N}^*$ e **A** é uma matriz quadrada, definimos $A^n = \underbrace{A \cdot A \cdot \ldots \cdot A}_{\textbf{n} \text{ fatores}}$.

Sendo $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$, determine:

a) A^2 **b)** A^3 **c)** A^4 **d)** A^{35} **e)** A^{106}

41 Sabendo que $A = \begin{bmatrix} -4 & m \\ 2 & -1 \end{bmatrix}$ e $A^2 = \begin{bmatrix} 22 & -15 \\ -10 & m + 4 \end{bmatrix}$, determine o valor de **m**.

42 A tabela abaixo mostra as notas obtidas pelos alunos **A**, **B** e **C** nas provas de Português, Matemática e conhecimentos gerais em um exame vestibular.

	Português	Matemática	Conhecimentos gerais
A	4	6	7
B	9	3	2
C	7	8	10

Se os pesos das provas são 7 (em Português), 6 (em Matemática) e 5 (em conhecimentos gerais), qual a multiplicação de matrizes que permite determinar a pontuação final de cada aluno? Determine a pontuação de cada um.

43 Resolva a equação matricial $X \cdot \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 7 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 & 2 \\ 5 & -7 \end{pmatrix}$.

44 Na festa junina organizada pelos alunos do Ensino Médio de um colégio, o sanduíche de "carne louca" e o *hot dog* (cachorro-quente) eram vendidos em três barracas I, II e III espalhadas pelo colégio. Na tabela seguinte está representada a quantidade de cada sanduíche vendida por barraca em certa noite; exceção feita a um campo cujo valor se perdeu.

Sanduíche / Barraca	*Hot dog*	"Carne louca"
I	22	18
II	36	22
III	?	28

Sabendo que os preços unitários do *hot dog* e da "carne louca" eram R$ 4,50 e R$ 6,00, respectivamente, e que a soma dos valores arrecadados nas três barracas foi R$ 777,00 naquela noite:

a) determine o valor desconhecido da tabela.

b) represente, por meio de uma multiplicação de matrizes, os valores arrecadados em cada uma das barracas.

45 Sejam $A = \begin{bmatrix} 2 & 5 \\ 3 & x \\ y & 1 \\ 4 & 10 \end{bmatrix}$ e $B = \begin{bmatrix} 5 \\ -2 \end{bmatrix}$. Sabendo que $A \cdot B = 0_{4 \times 1}$, determine os valores de **x** e **y**.

46 Determine **x** e **y** reais a fim de que as matrizes $\begin{pmatrix} 0 & x \\ y & 3 \end{pmatrix}$ e $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 5 \end{pmatrix}$ comutem.

47 Dê exemplos de matrizes quadradas de ordem 2 que comutam com a matriz $\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -2 & 0 \end{bmatrix}$.

48 Um laboratório fabrica um antiácido efervescente em duas versões: tradicional (**T**) e especial (**E**). Na tabela seguinte, temos a composição de envelopes de 5 g, nas duas versões:

Versão / Componente	T	E
Bicarbonato de sódio	2,3 g	2,5 g
Carbonato de sódio	0,5 g	0,5 g
Ácido cítrico	2,2 g	2 g


FERNANDO FAVORETTO/CRIAR IMAGEM

a) Em um certo mês foram fabricados 6000 envelopes na versão **T** e 4000 envelopes na versão **E**. Calcule, em quilogramas, a quantidade necessária de cada componente para a fabricação dessas 10000 unidades.

b) Represente, por meio de multiplicação de matrizes, os valores encontrados no item *a*.

c) Em um outro mês foram produzidos 15000 envelopes do antiácido. Calcule a quantidade produzida de cada versão, sabendo que o consumo total de bicarbonato de sódio foi de 35,6 kg.

49 Resolva as seguintes equações matriciais:

a) $\begin{pmatrix} 1 & -3 \\ 2 & 5 \end{pmatrix} \cdot X = \begin{pmatrix} 0 \\ -11 \end{pmatrix}$

b) $\begin{pmatrix} 13 & 4 \\ -5 & 0 \end{pmatrix} \cdot X = \begin{pmatrix} 0 & 9 \\ 20 & 35 \end{pmatrix}$

50 Uma dona de casa registrou, na tabela seguinte, as quantidades (em gramas) de frutas compradas em duas semanas consecutivas, em um mesmo supermercado:

Fruta / Quantidade (g)	Banana	Maçã	Laranja	Mamão
1ª semana	2700	2430	3450	4155
2ª semana	1640	3120	3390	3700

Os preços do quilograma (kg) da banana, maçã, laranja e mamão, em vigor nesse período, eram respectivamente R$ 2,35, R$ 3,40, R$ 1,70 e R$ 2,60.

Determine, a partir do cálculo de um produto de matrizes, a quantia, em reais, gasta pela dona de casa, em cada semana.

51 Na matriz **A**, a seguir, estão representadas as quantidades de cálcio e magnésio, em miligramas, encontradas em 100 g de algumas verduras:

$$\begin{array}{cccccccc} & \text{Couve-manteiga refogada} & \text{Couve-flor cozida} & \text{Espinafre cru} & \text{Acelga crua} & \text{Alface americana} & & \\ A = & \left[\begin{matrix} 177 \\ 26 \end{matrix}\right. & \begin{matrix} 16 \\ 5 \end{matrix} & \begin{matrix} 98 \\ 82 \end{matrix} & \begin{matrix} 43 \\ 10 \end{matrix} & \left.\begin{matrix} 14 \\ 6 \end{matrix}\right] & \begin{matrix} \leftarrow \\ \leftarrow \end{matrix} & \begin{matrix} \text{Cálcio} \\ \text{Magnésio} \end{matrix} \end{array}$$

Em um restaurante foram elaboradas três receitas (I, II, III) nas quais foram usadas porções de 100 g desses alimentos. Na matriz **B** a seguir estão representadas as quantidades de porções:

$$\begin{array}{ccc} \text{Receita I} & \text{Receita II} & \text{Receita III} \end{array}$$

$$B = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 2 & 3 & 3 \end{bmatrix} \begin{array}{l} \leftarrow \text{Couve-manteiga} \\ \leftarrow \text{Couve-flor} \\ \leftarrow \text{Espinafre} \\ \leftarrow \text{Acelga} \\ \leftarrow \text{Alface americana} \end{array}$$

a) Determine a matriz $C = A \cdot B$.

b) Explique o significado do valor encontrado para o elemento $\mathbf{c}_{12}$ da matriz **C**.

c) Explique o significado do valor encontrado para o elemento $\mathbf{c}_{23}$ da matriz **C**.

Aplicações

Computação gráfica e matrizes

As transformações geométricas no plano (ou transformações 2D — duas dimensões) são muito usadas pela computação gráfica para a construção de figuras e produção de imagens. Tais imagens podem ser percebidas nos efeitos especiais utilizados no cinema, na TV e nos sistemas multimídia em geral, além de servir de ferramenta de auxílio em várias áreas da atividade humana.

As três transformações básicas são: **translação**, **rotação** e **escala**. Vamos estudá-las, relacionando--as com a teoria das matrizes e com a Trigonometria.

Representaremos um ponto qualquer P(x, y) de uma figura pela matriz coluna $P = \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$ e o ponto correspondente P'(x', y'), obtido pela transformação, por $P' = \begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix}$. Para cada transformação, vamos obter uma relação entre **P** e **P'** por meio de uma matriz (**M**) de transformação.

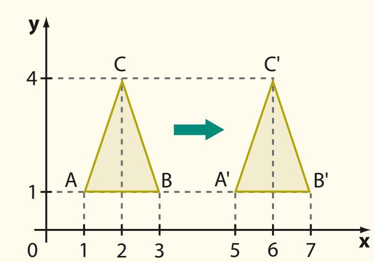
EVERETT COLLECTION/AGB PHOTO

O filme *Guardiões da Galáxia* apresenta personagens criados por computação gráfica, como o Groot.

Translação

A translação é uma transformação que desloca uma figura sem alterar sua forma e suas dimensões. Esse deslocamento pode ser vertical, horizontal ou segundo uma certa direção.

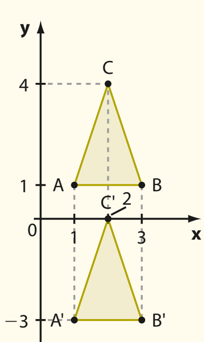
Consideremos o triângulo ABC ao lado, o qual é transformado no triângulo A'B'C' por uma translação horizontal.



Observe que, nessa transformação, a abscissa de cada ponto do △ABC é deslocada quatro unidades à direita, e a respectiva ordenada não sofre alteração.

Temos, portanto: $\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 4 \\ 0 \end{pmatrix}$, isto é, P' = P + M, sendo $M = \begin{pmatrix} 4 \\ 0 \end{pmatrix}$ a matriz dessa transformação.

Suponha agora que o △ABC fosse deslocado, na vertical, quatro unidades para baixo, como mostra a figura seguinte:



Observe, no △A'B'C', obtido pela translação, que a ordenada de cada um de seus pontos é deslocada quatro unidades para baixo e a respectiva abscissa não sofre alteração.

Assim, $\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 \\ 4 \end{pmatrix}$ e, desse modo, P' = P + M, sendo $M = -\begin{pmatrix} 0 \\ 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ -4 \end{pmatrix}$ a matriz dessa transformação.

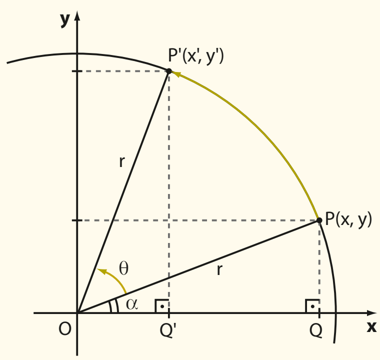
PENSE NISTO:

Qual é a matriz que transforma o triângulo de vértices A(1, 1), B(3, 1) e C(2, 4) no triângulo de vértices A'(5, 6), B'(7, 6) e C'(6, 9)?

Se P(x, y) é um ponto do triângulo ABC e P'(x', y') é um ponto do triângulo A'B'C', temos $P' = P + \begin{pmatrix} 4 \\ 5 \end{pmatrix}$, ou seja, $\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 4 \\ 5 \end{pmatrix}$

Rotação

Vamos considerar unicamente a rotação ("giro") de um ponto P(x, y), em torno da origem (0, 0), de um ângulo de medida **θ** graus (θ > 0), tomado no sentido anti-horário.



De acordo com o △OPQ, o ponto P(x, y) tem suas coordenadas expressas por:

$$x = r \cdot \cos \alpha \quad (1)$$

$$y = r \cdot \text{sen}\ \alpha \quad (2)$$

sendo $r = \sqrt{x^2 + y^2}$ a medida do raio da circunferência de centro na origem, passando por **P** e **P'**.

Ao girarmos **P** de um ângulo de medida **θ** (graus), ele se transforma no ponto **P'**. Da Trigonometria, obtemos as fórmulas sen (a + b) = sen a · cos b + sen b · cos a e cos (a + b) = cos a · cos b − sen a · sen b, válidas para quaisquer **a** e **b** reais. De acordo com o △OP'Q', temos:

- $\cos(\alpha + \theta) = \dfrac{x'}{r} \Rightarrow x' = r \cdot \cos(\alpha + \theta) = r \cdot (\cos \alpha \cos \theta - \text{sen}\ \alpha\ \text{sen}\ \theta)$ e, usando 1 e 2, escrevemos:

$$x' = r \cdot \left(\frac{x}{r} \cos \theta - \frac{y}{r} \text{sen}\ \theta\right) \Rightarrow \boxed{x' = x \cdot \cos \theta - y \cdot \text{sen}\ \theta}$$

- $\text{sen}(\alpha + \theta) = \dfrac{y'}{r} \Rightarrow y' = r \cdot \text{sen}(\alpha + \theta) = r \cdot (\text{sen}\ \alpha \cos \theta + \text{sen}\ \theta \cos \alpha)$ e, usando 1 e 2, escrevemos:

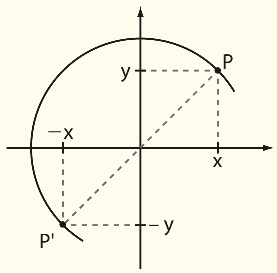
$$y' = r \cdot \left(\frac{y}{r} \cos \theta + \text{sen}\ \theta \cdot \frac{x}{r}\right) \Rightarrow \boxed{y' = y \cdot \cos \theta + x \cdot \text{sen}\ \theta}$$

Assim, escrevemos:

$$\begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos \theta & -\text{sen}\ \theta \\ \text{sen}\ \theta & \cos \theta \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$$

isto é, $P' = M \cdot P$, sendo $M = \begin{bmatrix} \cos \theta & -\text{sen}\ \theta \\ \text{sen}\ \theta & \cos \theta \end{bmatrix}$ a matriz de transformação.

Observe a figura seguinte, em que o ponto P(x, y) é rotacionado em torno da origem, no sentido anti-horário, de 180°. Quais são suas novas coordenadas?



Como θ = 180°, temos:

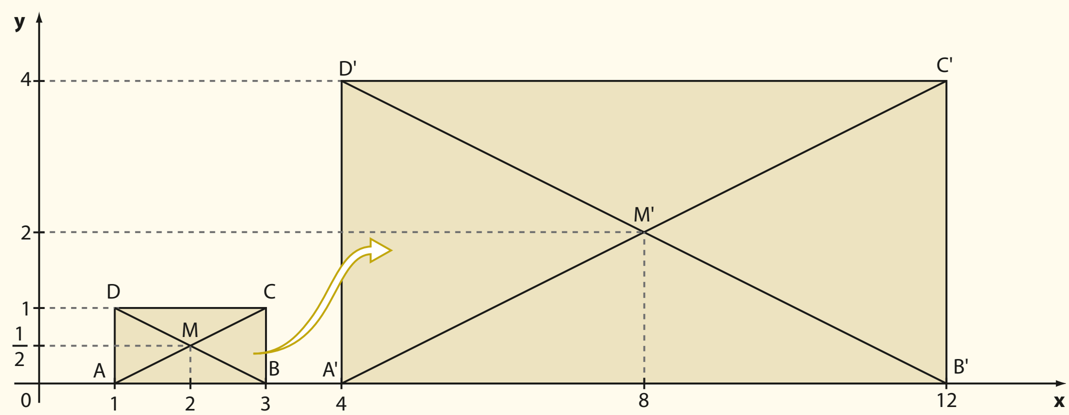
$$M = \begin{bmatrix} \cos 180° & -\text{sen}\ 180° \\ \text{sen}\ 180° & \cos 180° \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$$

$$\text{Assim, } P' = M \cdot P \Rightarrow \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \Rightarrow x' = -x \text{ e } y' = -y$$

Escala

Nessa transformação, ocorre uma modificação no tamanho da figura (ampliação ou redução), originando outra figura, semelhante ou não à primeira.

Na figura seguinte, o retângulo ABCD é transformado no retângulo A'B'C'D'. Cada ponto (x, y) do retângulo ABCD é transformado no ponto (x', y') do retângulo A'B'C'D', com $x' = 4 \cdot x$ e $y' = 4 \cdot y$; observe que os retângulos ABCD e A'B'C'D' são semelhantes.



Podemos escrever $\begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 & 0 \\ 0 & 4 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$, isto é, $P' = M \cdot P$, sendo $M = \begin{bmatrix} 4 & 0 \\ 0 & 4 \end{bmatrix}$ a matriz de transformação.

As abscissas (e ordenadas) dos pontos **M** e **M'** são dadas pela média aritmética das abscissas (e ordenadas) das extremidades das diagonais. Professor, essa propriedade pode ser explorada do ponto de vista da Geometria Analítica (mesmo que esse conteúdo não seja visto neste volume). Observe que:

$A(1, 0)$ e $C(3, 1) \Rightarrow x_M = \frac{1 + 3}{2} =$

$= 2$ e $y_M = \frac{0 + 1}{2} = \frac{1}{2}$ (obtemos a mesma abscissa e a mesma ordenada usando os pontos **B** e **D**)

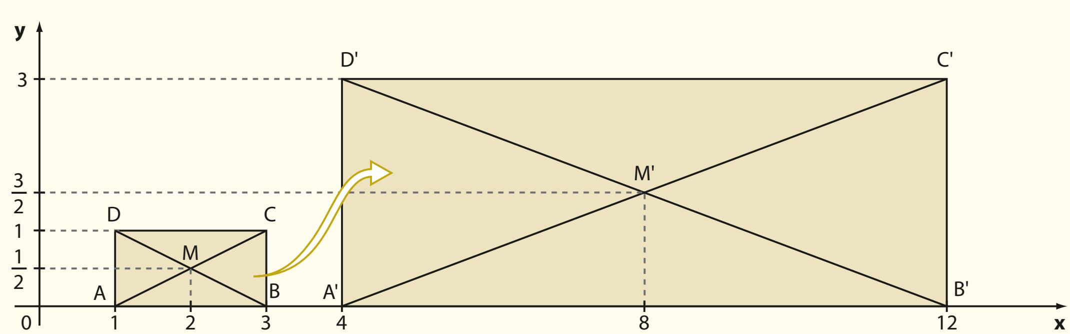
$A'(4, 0)$ e $C'(12, 4) \Rightarrow x_{M'} = \frac{4 + 12}{2} = 8$ e $y_{M'} = \frac{0 + 4}{2} = 2$ (obtemos a mesma abscissa e a mesma ordenada usando os pontos **B'** e **D'**)

Assim, as coordenadas do ponto médio de um segmento são dadas pela média aritmética das coordenadas dos extremos do segmento.

PENSE NISTO:

Em um retângulo, as diagonais intersectam-se em seus pontos médios. Veja os pontos **M** e **M'**. Qual é a relação entre suas abscissas (e ordenadas) e as abscissas (e ordenadas) das extremidades das diagonais?

Veja agora a transformação abaixo: cada ponto (x, y) do retângulo ABCD é transformado no ponto (x', y') do retângulo A'B'C'D', com $x' = 4 \cdot x$ e $y' = 3 \cdot y$:



Observe, nesse caso, que os retângulos ABCD e A'B'C'D' **não** são semelhantes.

Temos: $\begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 & 0 \\ 0 & 3 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$, isto é, $P' = M \cdot P$, sendo $M = \begin{bmatrix} 4 & 0 \\ 0 & 3 \end{bmatrix}$ a matriz de transformação.

Fonte de pesquisa: BOLDRINI, José L.; COSTA, Sueli I. Rodrigues; FIGUEIREDO, Vera Lúcia e WETZLER, Henry G. *Álgebra linear*. 3ª ed. São Paulo: Harbra, 1986.

Matriz inversa

Seja **A** uma matriz quadrada de ordem **n**. A matriz **A** é dita inversível (ou invertível) se existe uma matriz **B** (quadrada de ordem **n**), tal que:

$$A \cdot B = B \cdot A = I_n$$

Lembre que $\mathbf{I_n}$ representa a matriz identidade de ordem **n**.
Nesse caso, **B** é dita **inversa** de **A** e é indicada por $\mathbf{A^{-1}}$.

EXEMPLO **4**

A inversa de $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 5 & 3 \end{pmatrix}$ é $A^{-1} = \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ -5 & 2 \end{pmatrix}$, pois:

$$A \cdot A^{-1} = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 5 & 3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ -5 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = I_2$$

e

$$A^{-1} \cdot A = \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ -5 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 5 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = I_2$$

Para verificar se uma matriz quadrada é ou não invertível e, em caso afirmativo, determinar sua inversa, apresentaremos, a seguir, um processo baseado na definição de matriz inversa e na resolução de sistemas.

Vamos trabalhar com matrizes 2×2.

EXEMPLO **5**

Vamos verificar se existe a inversa de $A = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 5 & 4 \end{pmatrix}$.

Devemos verificar se existe $A^{-1} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$, tal que $A \cdot A^{-1} = I_2$.

Temos:

$$\begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 5 & 4 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} 3a + 2c & 3b + 2d \\ 5a + 4c & 5b + 4d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Do conceito de igualdade de matrizes seguem os sistemas:

$$\begin{cases} 3a + 2c = 1 \\ 5a + 4c = 0 \end{cases}, \text{ cuja solução é } a = 2 \text{ e } c = -\frac{5}{2}$$

$$\begin{cases} 3b + 2d = 0 \\ 5b + 4d = 1 \end{cases}, \text{ cuja solução é } b = -1 \text{ e } d = \frac{3}{2}$$

$$\text{Assim, } A^{-1} = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -\frac{5}{2} & \frac{3}{2} \end{pmatrix} = \frac{1}{2} \cdot \begin{pmatrix} 4 & -2 \\ -5 & 3 \end{pmatrix}.$$

É fácil verificar que a outra condição, $A^{-1} \cdot A = I_2$, está satisfeita.

EXEMPLO 6

Vamos verificar se existe a inversa de $X = \begin{bmatrix} 4 & 2 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}$.

Devemos verificar se existe $X^{-1} = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$, tal que $X \cdot X^{-1} = I_2$:

$$\begin{bmatrix} 4 & 2 \\ 2 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{bmatrix} 4a + 2c & 4b + 2d \\ 2a + c & 2b + d \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \Rightarrow \text{(1)} \begin{cases} 4a + 2c = 1 \\ 2a + c = 0 \end{cases} \text{ e (2)} \begin{cases} 4b + 2d = 0 \\ 2b + d = 1 \end{cases}$$

Vamos resolver o sistema (1):

$$\begin{cases} 4a + 2c = 1 \\ 2a + c = 0 \ (-2) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \cancel{4a} + \cancel{2c} = 1 \\ \underline{-\cancel{4a} - \cancel{2c} = 0} \quad (+) \\ 0 = 1 \quad \text{(Falso)} \end{cases}$$

O sistema acima não admite soluções, pois não existem **a** e **c** reais tais que $0 \cdot a + 0 \cdot c = 1$. Desse modo, já podemos concluir que não existe a inversa de **X** (o sistema (2) também não admite solução. Verifique.).

PENSE NISTO:

A matriz nula $0_{2 \times 2}$ é inversível? A matriz identidade $\mathbf{I_2}$ é inversível?

- Para que a matriz nula $0_{2 \times 2}$ seja inversível, devemos ter **a**, **b**, **c** e **d** tais que:

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Ora, é fácil ver que, em qualquer posição da matriz produto, só aparecerão elementos nulos e a igualdade nunca será satisfeita. Logo, a matriz nula $0_{2 \times 2}$ não é inversível.

- $\mathbf{I_2}$ é inversível:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

donde obtemos: $a = 1$, $b = 0$, $c = 0$ e $d = 1$.
Assim, a inversa de $\mathbf{I_2}$ é a própria matriz $\mathbf{I_2}$.

OBSERVAÇÃO

O processo apresentado nos exemplos anteriores pode ser aplicado a matrizes quadradas de ordem **n**, $n \geqslant 2$. Vale lembrar, no entanto, que, para $n \geqslant 3$, o processo é, em geral, trabalhoso.

EXERCÍCIO **RESOLVIDO**

7 Resolva a equação matricial $A \cdot X = B$, sendo $A = \begin{pmatrix} 5 & 7 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$ e $B = \begin{pmatrix} 4 \\ 1 \end{pmatrix}$.

Solução:

1º modo:

Para garantir a existência do produto $A \cdot X$, **X** deve ser uma matriz 2×1, a saber $X = \begin{pmatrix} r \\ s \end{pmatrix}$. Veja a continuação no exercício resolvido 5, na página 84.

2º modo:

Supondo que **A** seja invertível, de $A \cdot X = B$, temos:

$A^{-1} \cdot (A \cdot X) = A^{-1} \cdot B$ (multiplicamos, à esquerda, por A^{-1})

$(A^{-1} \cdot A) \cdot X = A^{-1} \cdot B$ (usamos a propriedade associativa da multiplicação)

$I \cdot X = A^{-1} \cdot B$ (usamos a definição de matriz inversa)

$X = A^{-1} \cdot B$ (*) (usamos a propriedade da matriz identidade)

Assim, verifiquemos se **A** é invertível:

$$\begin{pmatrix} 5 & 7 \\ 2 & 3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} 5a + 7c & 5b + 7d \\ 2a + 3c & 2b + 3d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

PENSE NISTO:

Na primeira passagem, poderíamos ter multiplicado, à direita, os dois membros por A^{-1}?

Poderíamos, mas não seria possível "isolar" a matriz X:
$A \cdot X = B \Rightarrow (A \cdot X) \cdot A^{-1} = B \cdot A^{-1} \Rightarrow$
$\Rightarrow A \cdot (X \cdot A^{-1}) = B \cdot A^{-1}$
mas não podemos, neste ponto, dentro dos parênteses, trocar a ordem das duas matrizes, pois, em geral, não vale a comutativa da multiplicação de matrizes.

Seguem os sistemas:

$\begin{cases} 5a + 7c = 1 \\ 2a + 3c = 0 \end{cases} \Rightarrow a = 3 \text{ e } c = -2$ e $\begin{cases} 5b + 7d = 0 \\ 2b + 3d = 1 \end{cases} \Rightarrow b = -7 \text{ e } d = 5$

Assim, concluímos que **A** é invertível e $A^{-1} = \begin{pmatrix} 3 & -7 \\ -2 & 5 \end{pmatrix}$.

Logo, substituindo A^{-1} e **B** em (*), temos: $X = A^{-1} \cdot B = \begin{pmatrix} 3 & -7 \\ -2 & 5 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 4 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \\ -3 \end{pmatrix}$

EXERCÍCIOS

FAÇA NO CADERNO

52 Verifique se $\begin{pmatrix} 2 & -5 \\ -1 & 3 \end{pmatrix}$ é a inversa de $\begin{pmatrix} 3 & 5 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$.

53 Determine, se existir, a inversa da matriz $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$.

54 Determine, se existir, a matriz inversa de $\begin{pmatrix} 3 & 6 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}$.

55 Para que valor(es) real(is) de **x** a inversa da matriz $A = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 0 & x \end{pmatrix}$ é a própria matriz **A**?

56 Sejam as matrizes $A = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ e $B = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -3 & 4 \end{pmatrix}$. Determine:

a) $A^{-1} + B$ **b)** $A^{-1} \cdot B$ **c)** $B^{-1} \cdot A$

57 Determine **x** e **y** reais sabendo que a inversa de $\begin{pmatrix} y & -3 \\ -2 & x \end{pmatrix}$ é a matriz $\begin{pmatrix} x & x-4 \\ x-5 & 1 \end{pmatrix}$.

58 Sendo $A = \begin{pmatrix} x & -x \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$, com $x \in \mathbb{R}$, determine os valores de **x** para os quais $A + A^{-1} = I_2$, sendo $\mathbf{I_2}$ a matriz identidade de ordem 2.

59 Sejam $A = \begin{pmatrix} 5 & 3 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}$ e $B = \begin{pmatrix} 11 & 4 \\ 9 & 8 \end{pmatrix}$.

a) Determine A^{-1}.

b) Usando o resultado do item *a*, resolva a equação $A \cdot X = B$.

60 Determine a inversa da matriz $X = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 3 & 0 \\ 2 & 0 & 1 \end{bmatrix}$.

61 Dadas as matrizes $A = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 3 \end{bmatrix}$ e $B = \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$, determine a matriz **X** (quadrada de ordem 2) tal que $(X \cdot B)^{-1} = A$.

DESAFIO

Uma matriz quadrada **A** se diz **ortogonal** se **A** é inversível e $A^{-1} = A^t$.

a) Determine os números reais **x**, **y** e **z** de modo que a matriz **B** seja ortogonal.

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} \\ x & y & z \end{pmatrix}$$

b) Mostre que não existem **x** e **y** reais de modo que a matriz **C** seja ortogonal.

$$C = \begin{pmatrix} \sqrt{2} & x \\ y & \sqrt{2} \end{pmatrix}$$