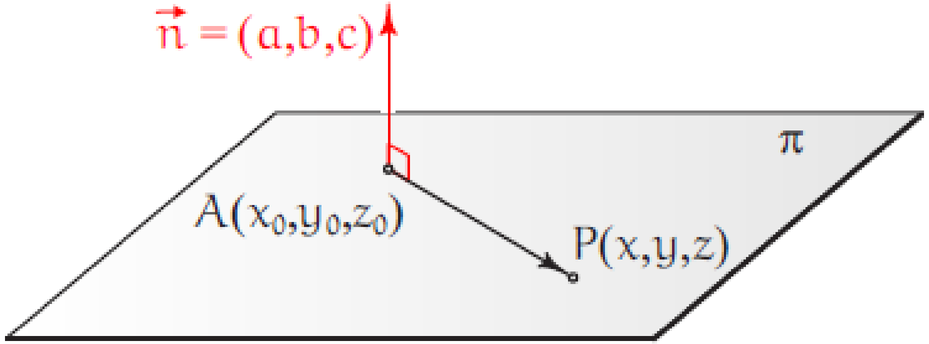
3- Planos no Espaço

Planos no Espaço

Equação Geral de um Plano

Sejam $A(x_0, y_0, z_0)$ um ponto pertencente ao plano π e $\vec{n} = (a, b, c)$, não nulo, um vetor ortogonal a π.
Como $\vec{n} \perp \pi$, então $\vec{n}$ é ortogonal a todo vetor representado em π. Logo, um ponto $P(x, y, z)$ pertence a π se, e somente se, o vetor $\overrightarrow{AP}$ é ortogonal a $\vec{n}$, ou seja,



$$\overrightarrow{AP} \cdot \vec{n} = 0 \Rightarrow (x - x_0, y - y_0, z - z_0) \cdot (a, b, c) = 0$$
$$\Rightarrow a(x - x_0) + b(y - y_0) + c(z - z_0) = 0$$
$$\Rightarrow ax + by + cz - ax_0 - by_0 - cz_o = 0$$

Fazendo $d = -ax_0 - by_0 - cz_0$, obtemos

$$\boxed{\pi: ax + by + cz + d = 0.}$$

Essa equação é chamada **equação geral do plano π**.
O vetor $\vec{n} = (a, b, c)$ é chamado **vetor normal** ao plano π.

Observações:

(1) Os coeficientes a, b e c da equação geral do plano são as coordenadas de um vetor normal ao plano.

(2) Se $\vec{n} = (a, b, c)$ é um vetor normal a π, qualquer vetor $k\vec{n}, k \neq 0$ é também vetor normal a π.

Exemplos:

(1) Obter uma equação geral do plano π que passa pelo ponto $A(2, -1, 3)$ e tem $\vec{n} = (3, 2, -4)$ como um vetor normal.

Solução: Como $\vec{n} = (3, 2, -4)$ é normal a π, então a equação geral desse plano é da forma

$$3x + 2y - 4z + d = 0.$$

Como $A(2, -1, 3) \in \pi$, então ele satisfaz a equação acima:

$$3(2) + 2(-1) - 4(3) + d = 0 \Rightarrow d = 8.$$

Logo, uma equação geral do plano π é

$$\pi\colon\ 3x + 2y - 4z + 8 = 0.$$

(2) A reta $r\colon \begin{cases} x = 5 + 3t \\ y = -4 + 2t \\ z = 1 + t \end{cases}, t \in \mathbb{R}$, é perpendicular ao plano π que passa pelo ponto $A(2, 1, -2)$.

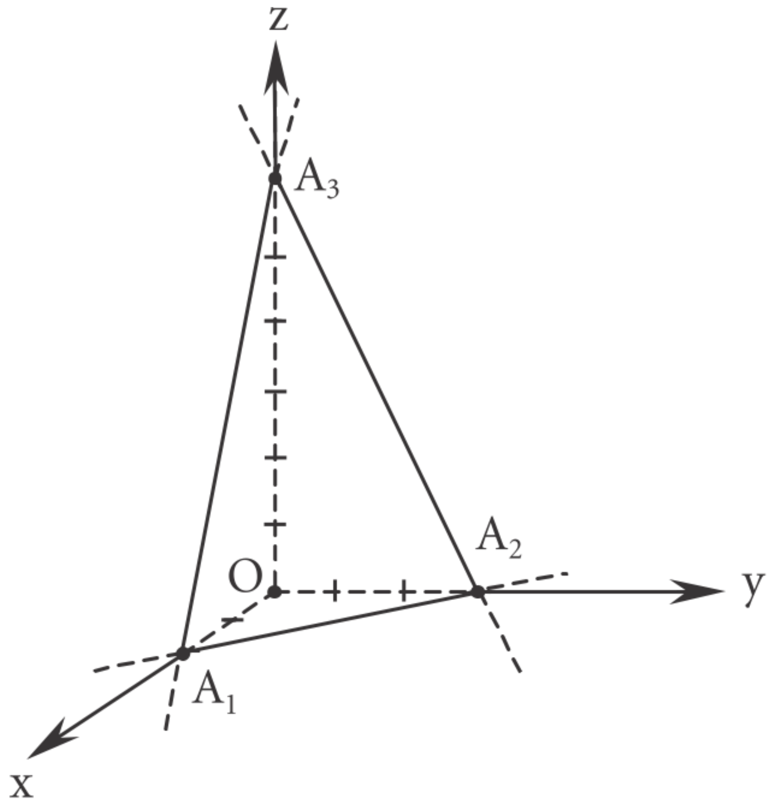
Determine uma equação geral de π e faça um esboço desse plano.

Solução: Como $r \perp \pi$, qualquer vetor diretor de r é um vetor normal ao plano. Assim, $\vec{n} = (3, 2, 1)$ é um desses vetores e, portanto, π possui equação geral da forma

$$3x + 2y + z + d = 0.$$

Como $A \in \pi$, então $3(2) + 2(1) + (-2) + d = 0 \Rightarrow d = -6.$
Logo,

$$\pi\colon 3x + 2y + z - 6 = 0.$$



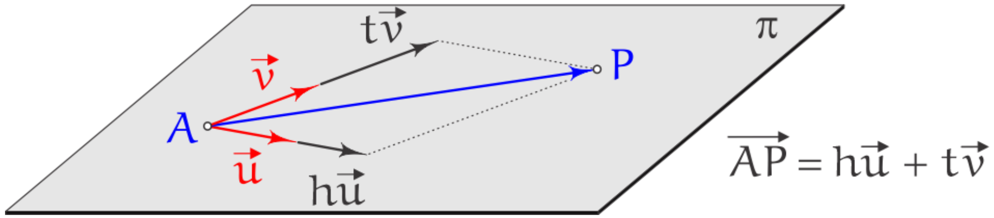
Para representar graficamente esse plano, obteremos três de seus pontos.
Se na equação de π fizermos:

- $y = 0$ e $z = 0 \Rightarrow x = 2$
- $x = 0$ e $z = 0 \Rightarrow y = 3$
- $x = 0$ e $y = 0 \Rightarrow z = 6$

Obtemos assim, os pontos $A_1(2, 0, 0), A_2(0, 3, 0)$ e $A_3(0, 0, 6)$, que são os pontos onde π intersecta os eixos coordenados.

Equação Vetorial e Equações Paramétricas de um Plano

Seja $A(x_0, y_0, z_0)$ um ponto pertencente a um plano π e $\vec{u} = (a_1, b_1, c_1)$ e $\vec{v} = (a_2, b_2, c_2)$ dois vetores paralelos a π, sendo $\vec{u}$ e $\vec{v}$ não paralelos.
Para todo ponto P do plano, os vetores $\overrightarrow{AP}, \vec{u}$ e $\vec{v}$ são coplanares.



Um ponto $P(x, y, z)$ pertence a π se, e somente se, existirem $h, t \in \mathbb{R}$ tais que $\overrightarrow{AP} = h\vec{u} + t\vec{v}$, ou seja,

$$P - A = h\vec{u} + t\vec{v} \Rightarrow \boxed{P = A + h\vec{u} + t\vec{v}.}$$

Em coordenadas, temos que

$$\boxed{\pi: (x, y, z) = (x_0, y_0, z_0) + h(a_1, b_1, c_1) + t(a_2, b_2, c_2),\ \ h, t \in \mathbb{R}.}$$

Essa equação é chamada **equação vetorial do plano π**.
Os vetores $\vec{u}$ e $\vec{v}$ são chamados **vetores diretores** de π e os números reais h e t são chamados de **parâmetros** da equação vetorial de π.

Da equação vetorial de π, segue que

$$(x, y, z) = (x_0 + a_1 h + a_2 t, y_0 + b_1 h + b_2 t, z_0 + c_1 h + c_2 t),$$

ou seja,

$$\boxed{\pi: \begin{cases} x = x_0 + a_1 h + a_2 t \\ y = y_0 + b_1 h + b_2 t \\ z = z_0 + c_1 h + c_2 t \end{cases}, h, t \in \mathbb{R}.}$$

Essas equações são chamadas **equações paramétricas do plano $\boldsymbol{\pi}$**.
Os números reais h e t são chamados de **parâmetros.**

Observações:

(1) Dado um plano π, sua equação vetorial ou seu sistema de equações paramétricas não são únicos, pois temos liberdade para escolher $A \in \pi$ e os vetores diretores $\vec{u}$ e $\vec{v}$.

(2) Na equação vetorial ou no sistema de equações paramétricas de π, há uma correspondência biunívoca entre os pontos de π e os pares ordenados de parâmetros (h, t), ou seja, para cada ponto de π temos um único par ordenado (h, t) e vice-versa.

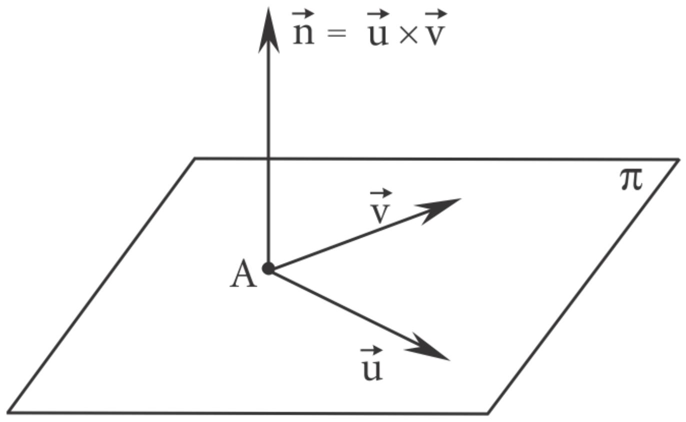
Exemplos:

(1) Seja o plano π que passa pelo ponto $A(2,2,-1)$ e é paralelo aos vetores $\vec{u}=(2,-3,1)$ e $\vec{v}=(-1,5,-3)$. Obter uma equação vetorial, um sistema de equações paramétricas e uma equação geral de π.

Solução: Temos que:

- **Equação vetorial:** $\pi\colon (x,y,z)=(2,2,-1)+h(2,-3,1)+t(-1,5,-3), h,t\in\mathbb{R}$
- **Equações paramétricas:** $\pi\colon \begin{cases} x=2+2h-t \\ y=2-3h+5t\,, & h,t\in\mathbb{R} \\ z=-1+h-3t \end{cases}$
- **Equação geral:** Como o vetor $\vec{u}\times\vec{v}$ é simultaneamente ortogonal a $\vec{u}$ e $\vec{v}$, então ele é um vetor normal ao plano π. Logo,

$$\vec{n}=\vec{u}\times\vec{v}=\begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 2 & -3 & 1 \\ -1 & 5 & -3 \end{vmatrix}=(4,5,7).$$



Então, a equação geral de π tem a forma: $4x+5y+7z+d=0$.
Como $A\in\pi \Rightarrow 4(2)+5(2)+7(-1)+d=0 \Rightarrow d=-11$.
Portanto, $\pi\colon 4x+5y+7z-11=0$.

(**2**) Dado o plano π determinado pelos pontos $A(1,-1,2), B(2,1,-3)$ e $C(-1,-2,6)$, obter um sistema de equações paramétricas e uma equação geral de π.

Solução: Temos que:

- **Equações paramétricas:**

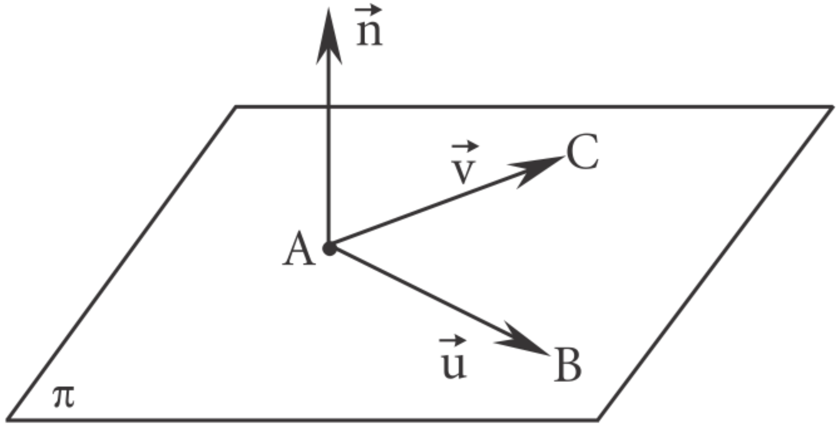
Os vetores não paralelos $\vec{u} = \overrightarrow{AB} = (1,2,-5)$ e $\vec{v} = \overrightarrow{AC} = (-2,-1,4)$ são vetores diretores de π. Logo, um sistema de equações paramétricas de π (usando o ponto A) é:

$$\pi: \begin{cases} x = 1 + h - 2t \\ y = -1 + 2h - t \, , h, t \in \mathbb{R}. \\ z = 2 - 5h + 4t \end{cases}$$

- **Equação geral:**

Como $\vec{u}$ e $\vec{v}$ são vetores diretores de π, então um vetor normal é:

$$\vec{n} = \vec{u} \times \vec{v} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 1 & 2 & -5 \\ -2 & -1 & 4 \end{vmatrix} = (3,6,3).$$



A equação geral de π tem a forma: $3x + 6y + 3z + d = 0$.
Como $A \in \pi \Rightarrow 3(1) + 6(-1) + 3(2) + d = 0 \Rightarrow d = -3$.
Portanto, $\pi: 3x + 6y + 3z - 3 = 0$, ou seja,

$$\pi: x + 2y + z - 1 = 0.$$

(**3**) Dado o plano π de equação $2x - y - z + 4 = 0$, determinar um sistema de equações paramétricas de π.

Solução: Basta tomar três pontos A, B e C não alinhados de π e proceder como no exemplo anterior. Fazendo

- $x = 0$ e $y = 0 \Rightarrow z = 4 \rightarrow A(0,0,4) \in \pi$
- $x = 1$ e $y = 0 \Rightarrow z = 6 \rightarrow B(1,0,6) \in \pi$
- $x = 0$ e $y = 1 \Rightarrow z = 3 \rightarrow C(0,1,3) \in \pi$

Os vetores $\vec{u} = \overrightarrow{AB} = (1,0,2)$ e $\vec{v} = \overrightarrow{AC} = (0,1,-1)$ são não paralelos, e logo são vetores diretores de π. Assim, um sistema de equações paramétricas de π (usando o ponto A) é:

$$\pi: \begin{cases} x = 0 + 1.h + 0.t \\ y = 0 + 0.h + 1.t \\ z = 4 + 2h + (-1).t \end{cases}, h, t \in \mathbb{R}, \text{ ou seja, } \pi: \begin{cases} x = h \\ y = t \\ z = 4 + 2h - t \end{cases}, h, t \in \mathbb{R}.$$

Observação: É importante que os vetores diretores sejam não paralelos. Se eles forem paralelos, então basta trocar um dos pontos de modo a garantir que $\vec{u} = \overrightarrow{AB}$ e $\vec{v} = \overrightarrow{AC}$ não sejam paralelos.

(4) Determinar uma equação geral do plano π que contém as retas

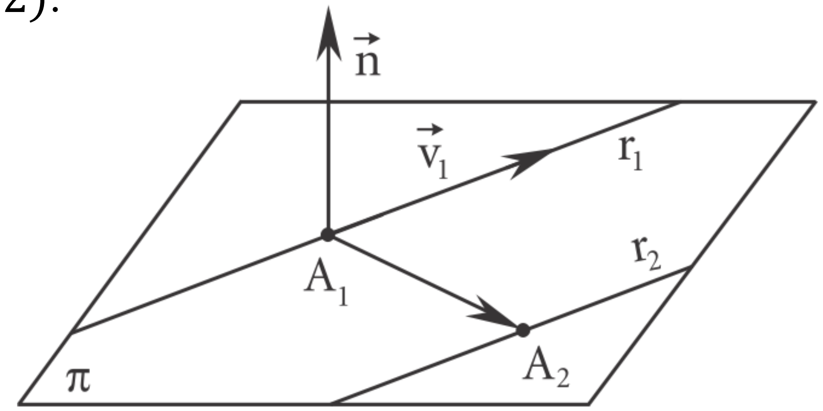
$$r_1: \begin{cases} y = x + 1 \\ z = -3x - 2 \end{cases} \quad \text{e} \quad r_2: \begin{cases} x = 2t \\ y = 3 + 2t \; , t \in \mathbb{R} \\ z = 1 - 6t \end{cases}$$

Solução: Os vetores diretores das retas são, respectivamente, $\vec{v}_1 = (1, 1, -3)$ e $\vec{v}_2 = (2, 2, -6)$. Como $\vec{v}_2 = 2\vec{v}_1$, as retas r_1 e r_2 são paralelas. Logo, $\vec{v}_1$ e $\vec{v}_2$ não podem ser tomados como vetores diretores do plano.

Tendo em vista que os pontos $A_1(0, 1\ -2) \in r_1$ e $A_2(0, 3, 1) \in r_2$ também pertencem a π, o vetor $\overrightarrow{A_1A_2} = (0, 2, 3)$ está representado neste plano.

Então, $\vec{v}_1$ e $\overrightarrow{A_1A_2}$ (ou $\vec{v}_2$ e $\overrightarrow{A_1A_2}$) são vetores diretores de π. Logo, um vetor normal de π é:

$$\vec{n} = \vec{v}_1 \times \overrightarrow{A_1A_2} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 1 & 1 & -3 \\ 0 & 2 & 3 \end{vmatrix} = (9, -3, 2).$$



Portanto, uma equação geral de π é da forma: $9x - 3y + 2z + d = 0$.

Como $A_1 \in \pi \Rightarrow 9(0) - 3(1) + 2(-2) + d = 0 \Rightarrow d = 7$.

Logo,

$$\pi: 9x - 3y + 2z + 7 = 0.$$

(5) Escrever uma equação geral para o plano π que contém a reta

$$r: \begin{cases} x = 4 \\ y = 3 \end{cases} \text{ e o ponto } B(-3, 2, 1).$$

Solução: Observe que a reta r é paralela ao eixo Oz, logo ela tem a direção do vetor $\vec{v} = (0, 0, 1)$. Além disso, qualquer ponto da forma $(4, 3, z) \in r$. Então, seja $A(4, 3, 0)$ um ponto de r.
Desse modo, os vetores não paralelos $\vec{v} = (0, 0, 1)$ e $\overrightarrow{AB} = (-7, -1, 1)$ são vetores diretores de π.
Logo, um vetor normal de π é dado por:

$$\vec{n} = \vec{v} \times \overrightarrow{AB} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 0 & 0 & 1 \\ -7 & -1 & 1 \end{vmatrix} = (1, -7, 0).$$

Então, uma equação geral de π é da forma: $x - 7y + d = 0$.
Como $B \in \pi \Rightarrow -3 - 7(2) + d = 0 \Rightarrow d = 17$.
Portanto,

$$\pi: x - 7y + 17 = 0.$$

Exercícios

(1) Seja $\pi: 2x - y + 3z + 1 = 0$. Calcular:
(a) O ponto de π que tem abscissa 4 e ordenada 3;
(b) O valor de k para que o ponto $P(2, k+1, k)$ pertença a π.

(2) Determinar a equação geral do plano que passa pelos pontos $A(-3, 1, -2)$ e $B(-1, 2, 1)$ e é paralelo ao vetor $\vec{v} = 2\vec{i} - 3\vec{k}$.

(3) Dada a equação geral do plano $\pi: 3x - 2y - z - 6 = 0$, determinar um sistema de equações paramétricas de π.

(4) Obtenha as equações paramétricas dos planos π_1 e π_2, onde:
(a) π_1 é o plano que passa pelos pontos $A(1, 1, 4), B(6, 5, 4)$ e $C(-2, 0, 2)$;
(b) π_2 é o plano que passa pelo ponto $D(1, 1, 1)$ e é paralelo aos vetores $\vec{u} = (2, 3, -2)$ e $\vec{v} = (8, 5, 2)$.

(5) O plano $\pi: x + y - z - 2 = 0$ intersecta os eixos cartesianos nos pontos A, B e C. Calcular a área do triangulo ABC.

Casos Particulares da Equação Geral do Plano

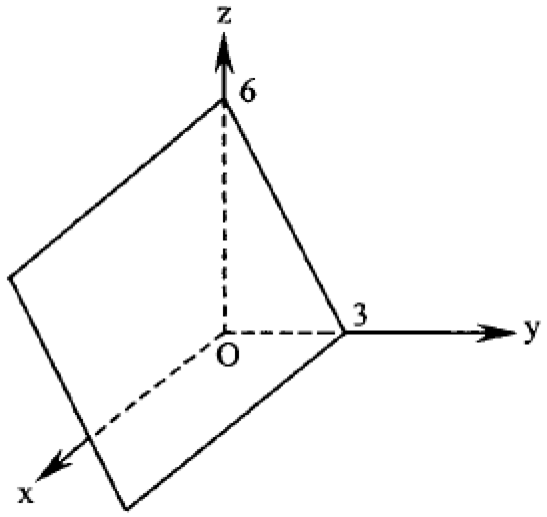
A nulidade de um ou mais coeficientes na equação geral do plano indica que este ocupa uma posição particular em relação aos eixos ou planos coordenados.
Na equação $\boldsymbol{ax + by + cz + d = 0}$, se:

1º caso:

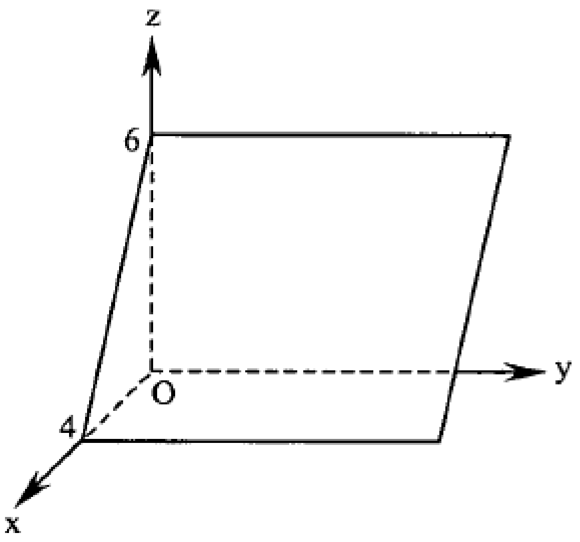
$d = 0 \Rightarrow ax + by + cz = 0$, com $abc \neq 0 \Rightarrow$ o plano contém a origem.

2º caso:

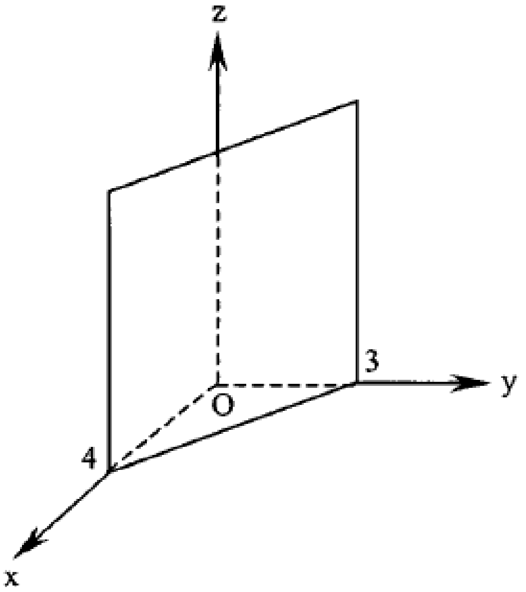
- $a = 0 \Rightarrow by + cz + d = 0$, com $bcd \neq 0 \Rightarrow$ o plano é paralelo ao eixo Ox.
- $b = 0 \Rightarrow ax + cz + d = 0$, com $acd \neq 0 \Rightarrow$ o plano é paralelo ao eixo Oy.
- $c = 0 \Rightarrow ax + by + d = 0$, com $abd \neq 0 \Rightarrow$ o plano é paralelo ao eixo Oz.



Plano paralelo ao eixo Ox



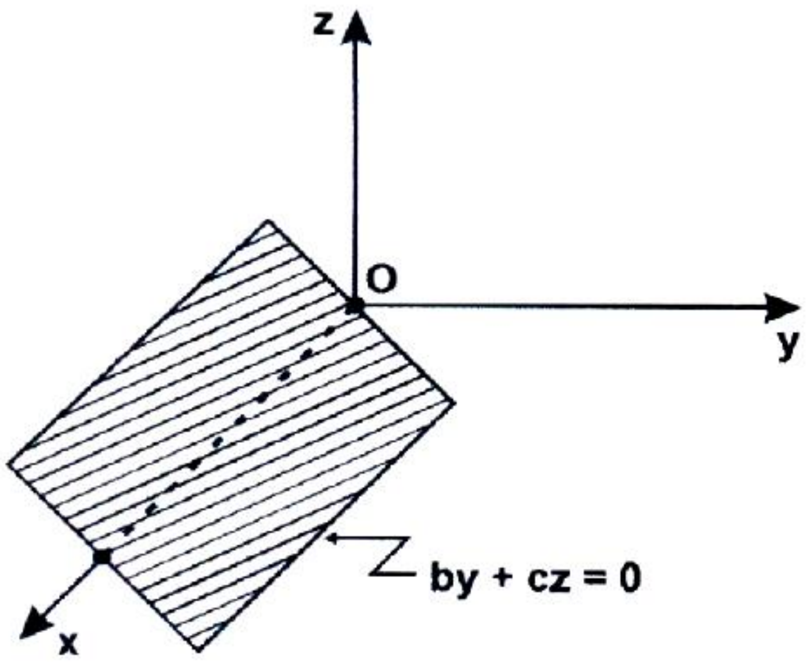
Plano paralelo ao eixo Oy



Plano paralelo ao eixo Oz

3º caso:

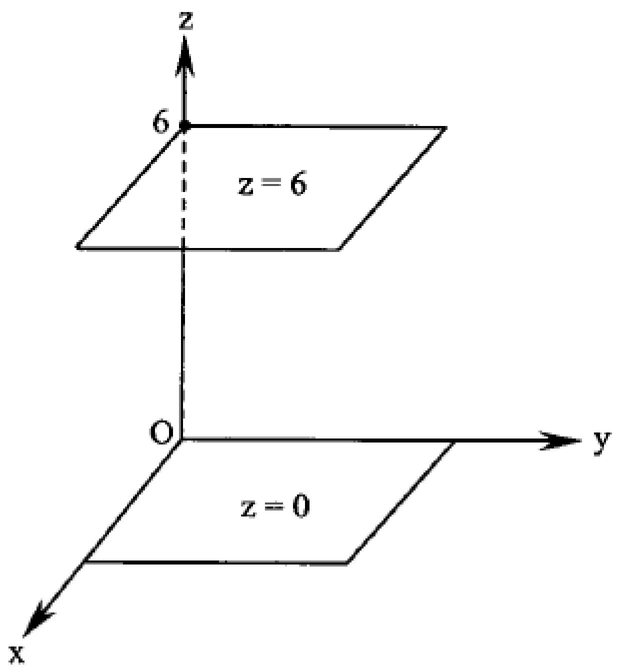
- $a = d = 0 \Rightarrow by + cz = 0$, com $bc \neq 0 \Rightarrow$ o plano conterá o eixo Ox.
- $b = d = 0 \Rightarrow ax + cz = 0$, com $ac \neq 0 \Rightarrow$ o plano conterá o eixo Oy.
- $c = d = 0 \Rightarrow ax + by = 0$, com $ab \neq 0 \Rightarrow$ o plano conterá o eixo Oz.



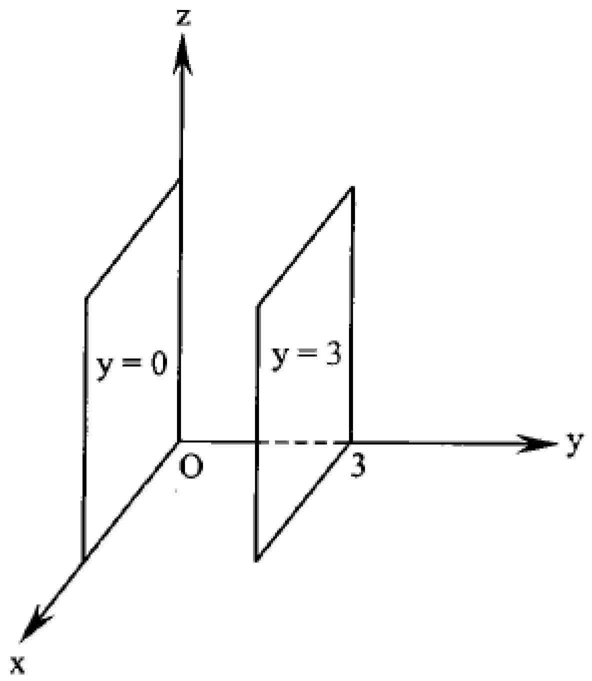
Plano que contém o eixo Ox

4º caso:

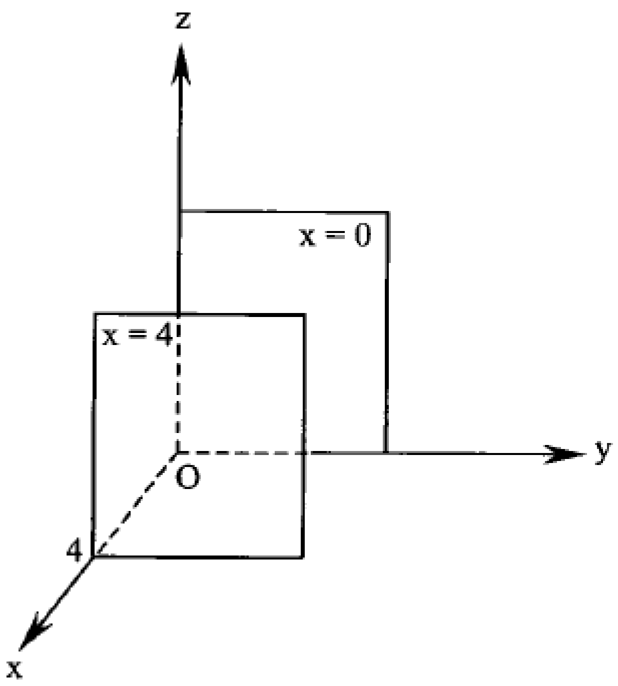
- $a = b = 0 \Rightarrow cz + d = 0$, com $cd \neq 0 \Rightarrow$ o plano é paralelo ao plano xOy.
- $a = c = 0 \Rightarrow by + d = 0$, com $bd \neq 0 \Rightarrow$ o plano é paralelo ao plano xOz.
- $b = c = 0 \Rightarrow ax + d = 0$, com $ad \neq 0 \Rightarrow$ o plano é paralelo ao plano yOz.



Plano paralelo ao plano xOy



Plano paralelo ao plano xOz



Plano paralelo ao plano yOz

Exemplo: Indique o posicionamento de cada plano dado a seguir em relação ao sistema cartesiano no espaço.

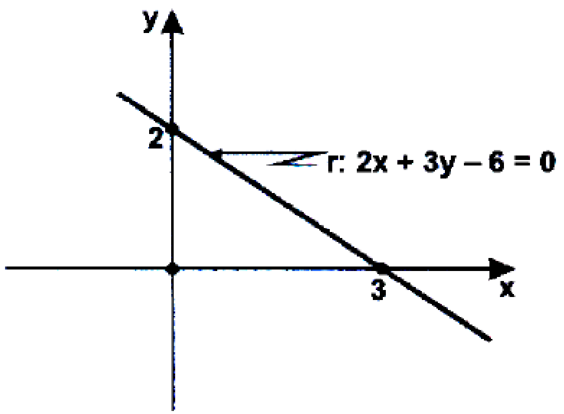
(**a**) $3x + y - 4z = 0 \Rightarrow$ plano que passa pela origem

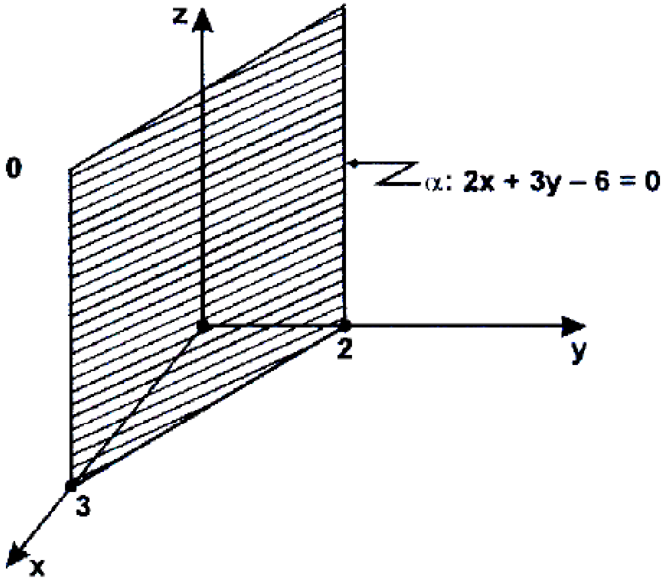
(**b**) $2x + 3z - 3 = 0 \Rightarrow$ plano paralelo ao eixo Oy

(**c**) $4x + 3y = 0 \Rightarrow$ plano que contém o eixo Oz

(**d**) $x - 3 = 0 \Rightarrow$ plano paralelo ao plano yOz

Observação: Em $\mathbb{R}^2$, a equação $2x + 3y - 6 = 0$ representa uma reta. Entretanto, como vimos anteriormente, em $\mathbb{R}^3$, tal equação representa um plano paralelo ao eixo Oz.





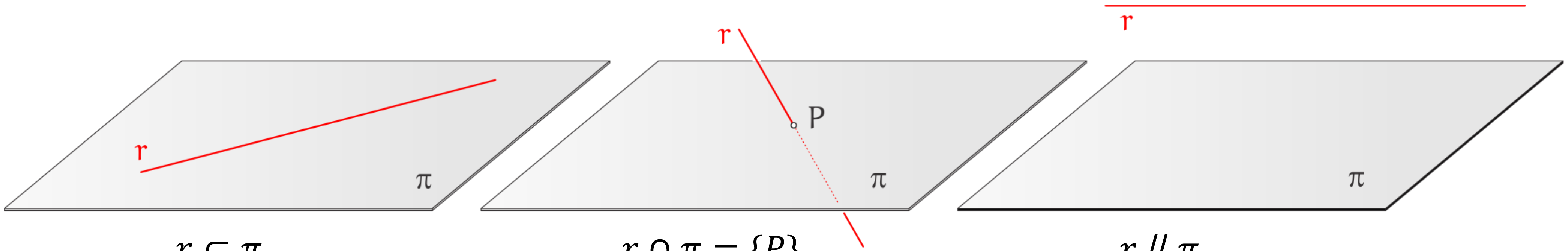
Posições Relativas entre uma Reta e um Plano

Sejam r uma reta e π um plano no espaço. Podem ocorrer três situações:

(**i**) r está contida em π;

(**ii**) r e π são concorrentes;

(**iii**) r e π são paralelos.

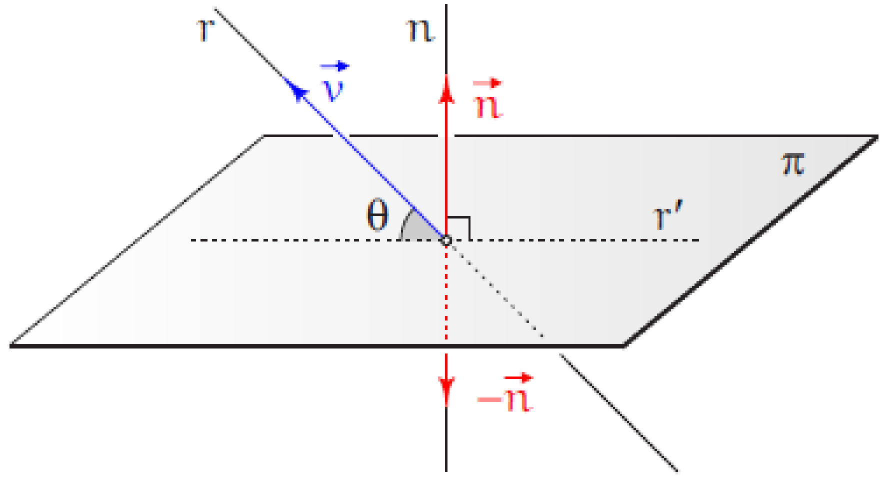


$r \subset \pi$ $\qquad$ $r \cap \pi = \{P\}$ $\qquad$ $r \,//\, \pi$

Ângulo entre uma Reta e um Plano

Inicialmente, relembre que dois ângulos de medidas α e β são ditos **complementares** (ou um dos ângulos é o **complemento** do outro) quando $\alpha + \beta = 90°$ (ou $\alpha + \beta = \frac{\pi}{2}$ rad).

Sejam r uma reta com vetor diretor $\vec{v}$ e π um plano com vetor normal $\vec{n}$ no espaço. Considere os ângulos formados pelos vetores $\vec{v}$ e $\vec{n}$ e pelos vetores $\vec{v}$ e $-\vec{n}$. O complemento do menor desses dois ângulos é chamado de **ângulo entre a reta r e o plano π**.



Como consequência, reta e plano poderão formar ângulo nulo, agudo ou reto, mas nunca obtuso.

A proposição a seguir nos permite calcular o ângulo entre uma reta e um plano no espaço.

Proposição: Se r é uma reta com vetor diretor $\vec{v}$ e π é um plano com vetor normal $\vec{n}$, então a medida θ do ângulo formado pela reta r e o plano π é tal que

$$\operatorname{sen}\theta = \frac{|\vec{v}\cdot\vec{n}|}{\|\vec{v}\|\|\vec{n}\|}, \quad \text{com } 0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{2}.$$

Exemplo: Determinar a medida do ângulo entre

$$r: \begin{cases} y = -x + 2 \\ z = \frac{1}{2}x - \frac{1}{2} \end{cases} \text{ e } \pi: \sqrt{\frac{45}{7}}x + y + 2z - 10 = 0.$$

Solução: Temos que

- Vetor diretor de $r: \vec{v} = \left(1, -1, \frac{1}{2}\right)$
- Vetor normal a $\pi: \vec{n} = \left(\sqrt{\frac{45}{7}}, 1, 2\right)$

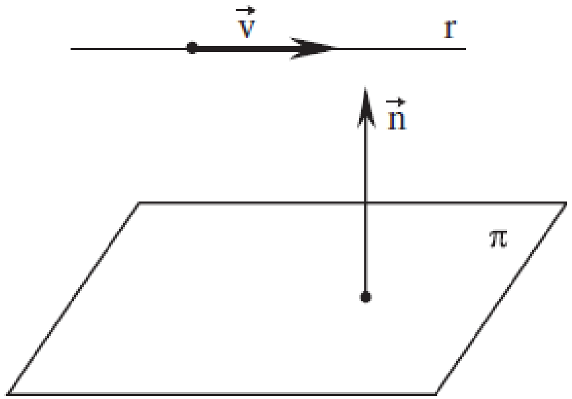
Logo,

$$sen\,\theta = \frac{\left|\left(1, -1, \frac{1}{2}\right) \cdot \left(\sqrt{\frac{45}{7}}, 1, 2\right)\right|}{\sqrt{1 + 1 + \frac{1}{4}}\,\sqrt{\frac{45}{7} + 1 + 4}} = \frac{1}{2} \Rightarrow \theta = arcsen\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{\pi}{6} \text{ rad.}$$

Condições de Paralelismo e Perpendicularismo entre uma Reta e um Plano

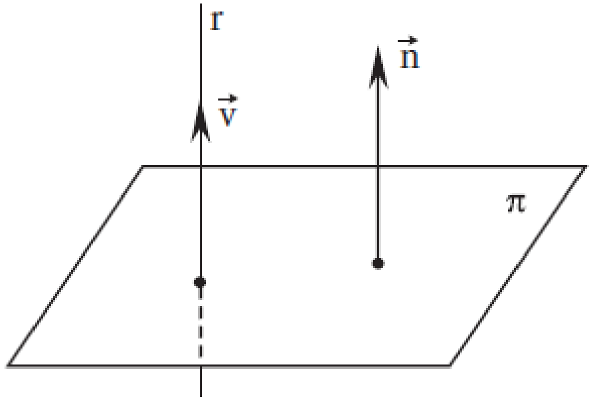
Sejam uma reta r com a direção do vetor $\vec{v}$ e um plano π, sendo $\vec{n}$ um vetor normal a π. Temos que:

(**a**) ***r* é paralela a *π*** se, e somente se, $\vec{v}$ é ortogonal a $\vec{n}$.



$$\boxed{r//\pi \Leftrightarrow \vec{v} \perp \vec{n} \Leftrightarrow \vec{v} \cdot \vec{n} = 0}$$

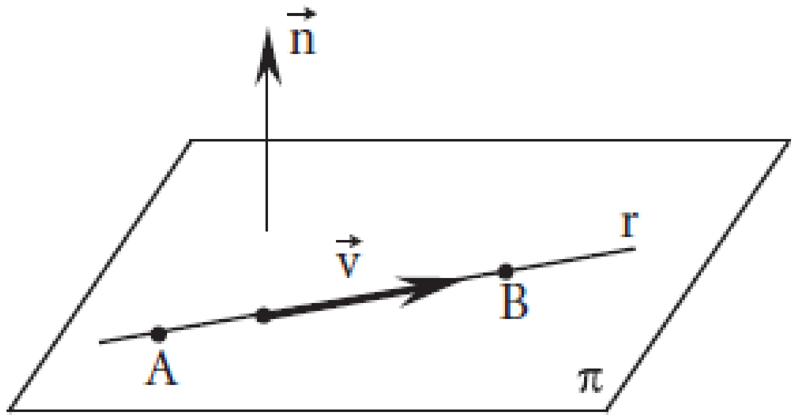
(**b**) ***r* é perpendicular a *π*** se, e somente se, $\vec{v}$ e $\vec{n}$ são paralelos.



$$\boxed{r \perp \pi \Leftrightarrow \vec{v}//\vec{n} \Leftrightarrow \vec{v} = \alpha\vec{n}}$$

Condições para que uma reta esteja contida em um plano

Uma reta ***r* está contida em um plano *π*** quando:



(**1**) Dois pontos A e B de r forem também de π;

ou

(**2**) Um vetor diretor $\vec{v}$ de r é ortogonal ao vetor $\vec{n}$, normal ao plano π; e um ponto A pertencente a r pertence também a π.

Exemplo: Determinar os valores de m e n para que a reta $r: \begin{cases} x = 3 + t \\ y = -1 - t, t \in \mathbb{R} \\ z = -2 - t \end{cases}$ esteja contida no plano $\pi: 2x + my + nz - 5 = 0$.

Solução: Vamos usar o critério (**1**), dado acima.
Sejam $A(3, -1, -2)$ e $B(4, -2, -3)$ dois pontos de r. Como $r \subset \pi$, as coordenadas de A e B devem satisfazer a equação de π, ou seja,

$$\begin{cases} 2(3) + m(-1) + n(-2) - 5 = 0 \\ 2(4) + m(-2) + n(-3) - 5 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} m + 2n = 1 \\ 2m + 3n = 3 \end{cases} \Rightarrow \; m = 3 \text{ e } n = -1.$$

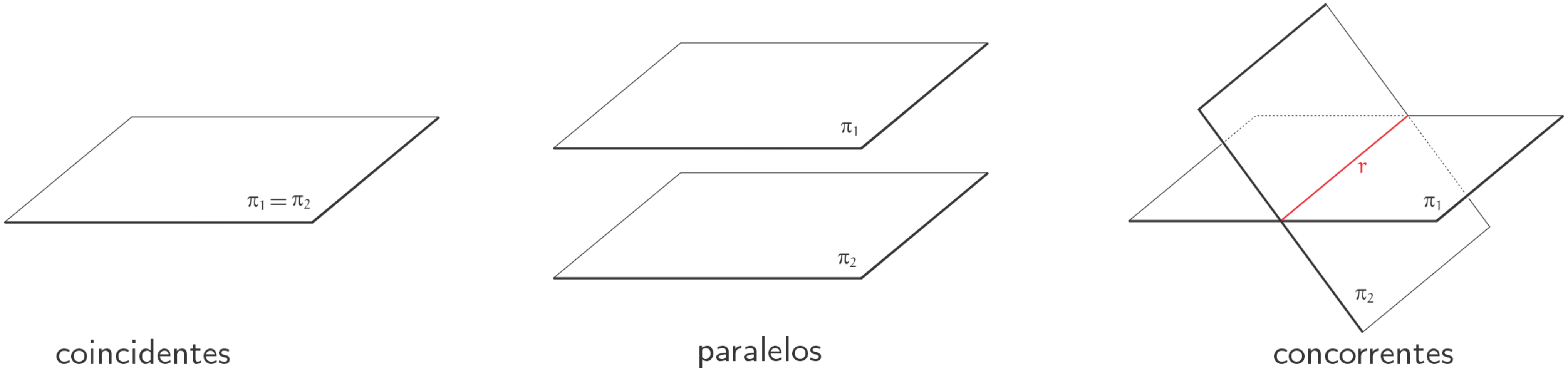
Posições Relativas de Dois Planos no Espaço

Dois planos π_1 e π_2, no espaço, podem ser:

(a) **coincidentes:** $\pi_1 = \pi_2$

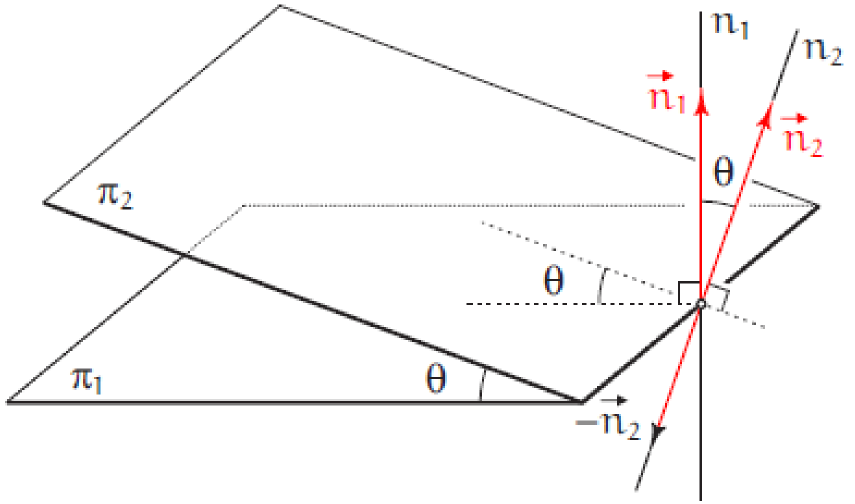
(b) **paralelos:** $\pi_1 \cap \pi_2 = \emptyset$

(c) **concorrentes:** $\pi_1 \cap \pi_2 = \{r\}$, r é a reta de intersecção dos planos π_1 e π_2



Ângulo entre Dois Planos no Espaço

Sejam π_1 e π_2 planos no espaço com vetores normais $\vec{n}_1$ e $\vec{n}_2$. Considere os ângulos formados pelos vetores $\vec{n}_1$ e $\vec{n}_2$ e pelos vetores $\vec{n}_1$ e $-\vec{n}_2$. O menor desses dois ângulos é chamado de **ângulo entre os planos π_1 e π_2.**



Como consequência, reta e plano poderão formar ângulo nulo, agudo ou reto, mas nunca obtuso.

Observe que essa é a mesma definição do ângulo entre as retas normais n_1 e n_2 a π_1 e π_2.

A fórmula para o cálculo da medida θ do ângulo entre dois planos é a mesma usada para o cálculo da medida do ângulo entre duas retas:

$$\boxed{\cos\theta = \frac{|\vec{n}_1 \cdot \vec{n}_2|}{\|\vec{n}_1\|\|\vec{n}_2\|}}, \quad \text{com } 0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{2}.$$

Exemplo: Determinar a medida do ângulo entre os planos

$$\pi_1 : X = (0,0,0) + h_1(1,0,0) + t_1(1,1,1),\ h_1, t_1 \in \mathbb{R}$$

e

$$\pi_2 : X = (1,0,0) + h_2(-1,2,0) + t_2(0,1,0),\ h_2, t_2 \in \mathbb{R}.$$

Solução: Foram dadas as equações vetoriais dos planos. Chamando os vetores diretores de π_1 de $\vec{u}_1 = (1,0,0)$ e $\vec{u}_2 = (1,1,1)$ e os vetores diretores de π_2 de $\vec{v}_1 = (-1,2,0)$ e $\vec{v}_2 = (0,1,0)$, temos que:

- Vetor normal a π_1: $\vec{n}_1 = \vec{u}_1 \times \vec{u}_2 = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = (0,-1,1)$

- Vetor normal a π_2: $\vec{n}_2 = \vec{v}_1 \times \vec{v}_2 = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ -1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{vmatrix} = (0,0,-1).$

Logo,

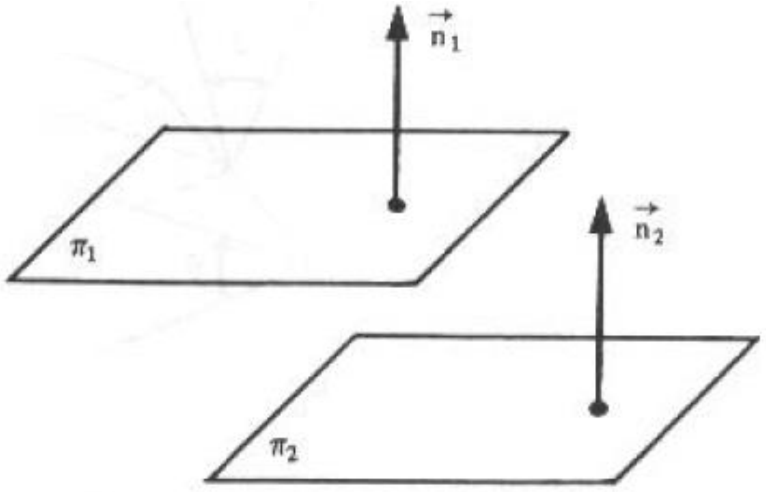
$$\cos\theta = \frac{|\vec{n}_1 \cdot \vec{n}_2|}{\|\vec{n}_1\|\|\vec{n}_2\|} = \frac{|(0,-1,1)\cdot(0,0,-1)|}{\sqrt{2}\sqrt{1}} = \frac{\sqrt{2}}{2} \Rightarrow \theta = \arccos\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right) = \frac{\pi}{4} \text{ rad}.$$

Condições de Paralelismo e Perpendicularismo entre Dois Planos

Consideremos dois planos π_1 e π_2, e sejam $\vec{n}_1$ e $\vec{n}_2$ vetores normais a π_1 e π_2, respectivamente.
Temos que:

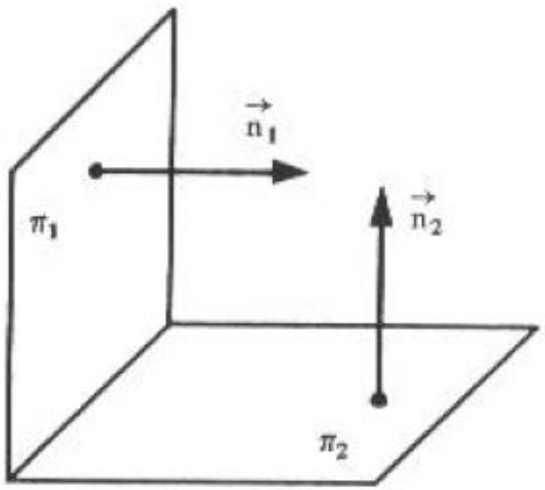
(**a**) $\boldsymbol{\pi_1}$ **é paralelo a** $\boldsymbol{\pi_2}$ se, e somente se, $\vec{n}_1$ é paralelo a $\vec{n}_2$.

$$\boxed{\pi_1 // \pi_2 \Leftrightarrow \vec{n}_1 // \vec{n}_2 \Leftrightarrow \vec{n}_2 = \alpha \vec{n}_1}$$



(**b**) $\boldsymbol{\pi_1}$ **é perpendicular a** $\boldsymbol{\pi_2}$ se, e somente se, $\vec{n}_1$ é ortogonal a $\vec{n}_2$.

$$\boxed{\pi_1 \perp \pi_2 \Leftrightarrow \vec{n}_1 \perp \vec{n}_2 \Leftrightarrow \vec{n}_1 \cdot \vec{n}_2 = 0}$$



Exemplo: Determinar os valores de m e n para que os planos

$$\pi_1: (2m-1)x - 2y + nz - 3 = 0 \quad \text{e} \quad \pi_2: 4x + 4y - z = 0$$

sejam paralelos.

Solução: Os vetores normais de π_1 e π_2 são dados por $\vec{n}_1 = (2m-1, -2, n)$ e $\vec{n}_2 = (4, 4, -1)$.
Os planos são paralelos se, e somente se, as coordenadas dos vetores normais forem proporcionais:

$$\frac{2m-1}{4} = \frac{-2}{4} = \frac{n}{-1}.$$

Da primeira igualdade, segue que $m = -\frac{1}{2}$ e, da segunda igualdade, $n = \frac{1}{2}$.

Observação: Considere os planos

$$\pi_1: a_1x + b_1y + c_1z + d_1 = 0 \quad \text{e} \quad \pi_2: a_2x + b_2y + c_2z + d_2 = 0.$$

Se

$$\frac{a_1}{a_2} = \frac{b_1}{b_2} = \frac{c_1}{c_2} = \frac{d_1}{d_2},$$

então os planos π_1 e π_2 são **coincidentes**, pois, nesse caso, a equação de um dos planos é igual a outra equação multiplicada por um escalar.

Intersecção de Reta com Plano

Quando uma reta e um plano são concorrentes, vimos que a intersecção desses objetos é um ponto.

Exemplo: Determinar o ponto de intersecção da reta r com o plano π, em que

$$r: \begin{cases} x = -1 + 2t \\ y = 5 + 3t \\ z = 3 - t \end{cases}, t \in \mathbb{R} \text{ e } \pi: 2x - y + 3z - 4 = 0.$$

Solução: Qualquer ponto de r é da forma $(x, y, z) = (-1 + 2t, 5 + 3t, 3 - t)$. Se um deles é comum com o plano π, suas coordenadas verificam a equação de π:

$$2(-1 + 2t) - (5 + 3t) + 3(3 - t) - 4 = 0 \Rightarrow t = -1.$$

Substituindo esse valor de t nas equações de r, obtém-se:

$$x = -1 + 2(-1) = -3,\ y = 5 + 3(-1) = 2 \text{ e } z = 3 - (-1) = 4.$$

Logo, a intersecção de r e π é o ponto $P(-3, 2, 4)$.

Intersecção de Dois Planos

Sabemos que a intersecção de dois planos não paralelos é uma reta, cujas equações se deseja determinar. O exemplo a seguir, ilustra dois procedimentos que podem ser utilizados para encontrar as equações dessa reta.

Exemplo: Determinar a reta r intersecção dos planos não paralelos

$$\pi_1: 5x - y + z - 5 = 0 \text{ e } \pi_2: x + y + 2z - 7 = 0.$$

Solução 1: Como r está contida nos dois planos, as coordenadas de qualquer ponto (x, y, z) pertencente a r, devem satisfazer, simultaneamente, as equações dos dois planos:

$$r: \begin{cases} 5x - y + z - 5 = 0 \\ x + y + 2z - 7 = 0 \end{cases}.$$

Esse sistema possui infinitas soluções (os infinitos pontos de r). Em termos de x, sua solução é:

$$r: \begin{cases} y = 3x - 1 \\ z = -2x + 4 \end{cases}$$

que são as equações reduzidas de r na variável x.

Solução 2: Outra maneira de obter equações de r é determinar um de seus pontos e um vetor diretor. Para determinar o ponto $A \in r$ que tem abscissa zero, fazemos $x = 0$ nas equações do plano e obtemos o sistema:

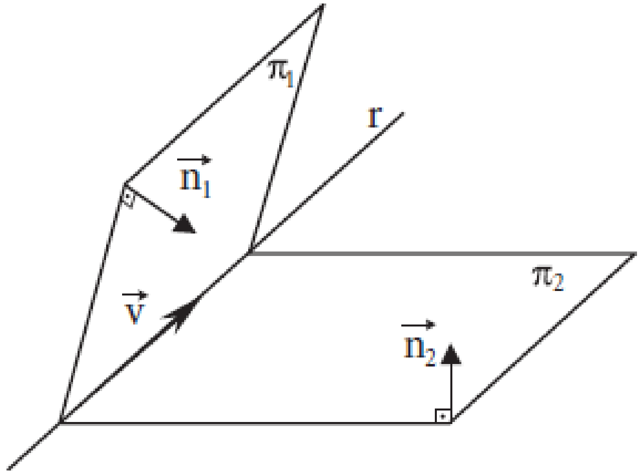
$$\begin{cases} -y + z - 5 = 0 \\ y + 2z - 7 = 0 \end{cases}.$$

Resolvendo esse sistema, obtemos $y = -1$ e $z = 4$. Logo, $A(0, -1, 4)$.
Como um vetor diretor de r é simultaneamente ortogonal a $\vec{n}_1 = (5, -1, 1)$ e $\vec{n}_2 = (1, 1, 2)$, normais aos planos π_1 e π_2, respectivamente, então ele é múltiplo do vetor

$$\vec{n}_1 \times \vec{n}_2 = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 5 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{vmatrix} = (-3, -9, 6).$$

Tomando o vetor diretor $\vec{v} = -\frac{1}{3}(-3, -9{,}6) = (1, 3, -2)$, temos que as equações paramétricas de r, são dadas por:

$$r: \begin{cases} x = t \\ y = -1 + 3t, \quad t \in \mathbb{R}. \\ z = 4 - 2t \end{cases}$$



Exercícios

(1) Determinar a e b de modo que os planos $\pi_1: ax + by + 4z - 1 = 0$ e $\pi_2: 3x - 5y - 2z + 5 = 0$ sejam paralelos.

(2) Determinar m de modo que os planos $\pi_1: 2mx + 2y - z = 0$ e $\pi_2: 3x - my + 2z - 1 = 0$ sejam perpendiculares.

(3) Mostrar que a reta

$$r: \begin{cases} \dfrac{x-1}{1} = \dfrac{y+1}{-2} \\ z = 0 \end{cases}$$

Está contida no plano $\pi: 2x + y - 3z - 1 = 0$.

(4) Determinar a medida do ângulo entre:

(a) Os planos $\pi_1: x + 2y + z - 10 = 0$ e $\pi_2: 2\mathrm{x} + \mathrm{y} - \mathrm{z} + 1 = 0$;

(b) a reta $r: \frac{x-2}{3} = \frac{-y}{4} = \frac{z+1}{5}$ e o plano $\pi: 2x - y + 7z - 1 = 0$.

(5) Obtenha uma equação geral do plano π que passa pelo ponto $P(1, 1, 2)$ e é paralelo ao plano

$$\pi_1: x - y + 2z + 1 = 0.$$