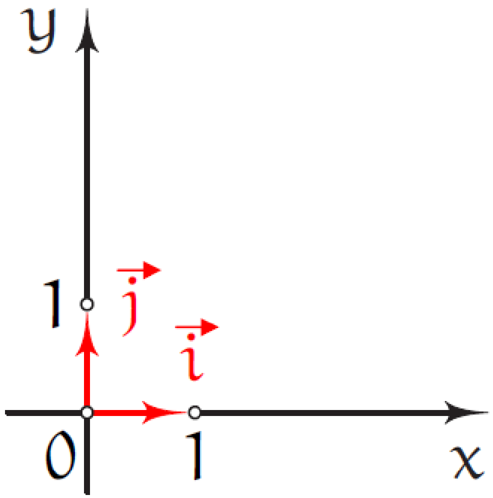
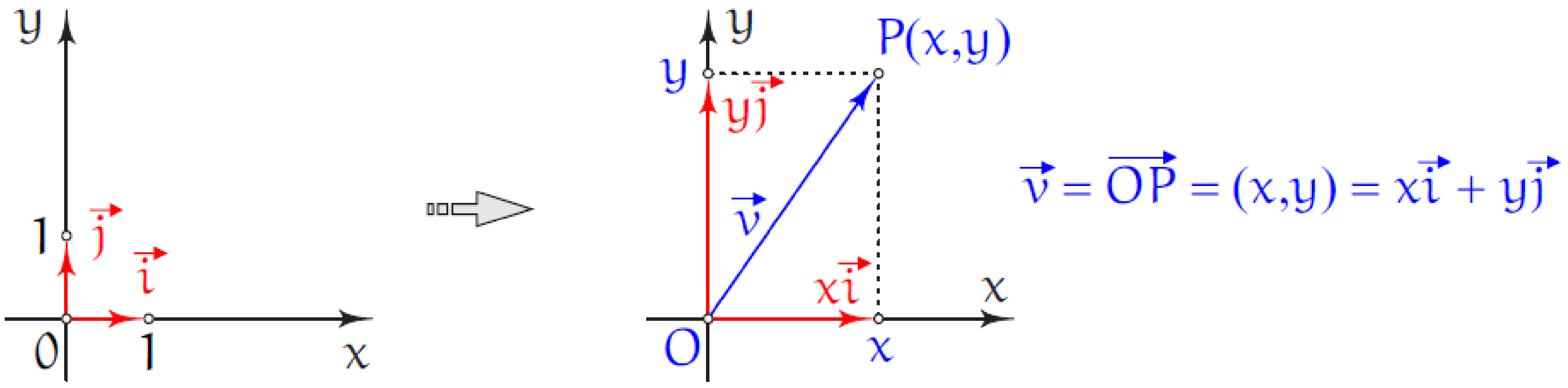
Vetores: Abordagem Algébrica

Vetores no Plano

- Sejam $\vec{i}$ e $\vec{j}$ vetores ortogonais, com comprimento 1.
- Fixado um ponto O no espaço, os dois segmentos orientados representantes de $\vec{i}$ e $\vec{j}$ com origem em O determinam um par de retas perpendiculares orientadas chamadas de **eixos.**
- Dizemos que um plano determinado por esses eixos está munido de um **sistema de coordenadas cartesianas ortogonais.** Simplificadamente, chamamos este plano de **plano cartesiano.**
- É comum representar os eixos pela notação Ox e Oy e o plano cartesiano por xOy. O eixo Ox é chamado de **eixo das abscissas** e o eixo Oy é chamado de **eixo das ordenadas.**
- Chamamos o conjunto $B = \{\vec{i}, \vec{j}\}$ de **base canônica** do plano cartesiano.



Proposição: Seja xOy plano cartesiano com base canônica $B = \{\vec{i}, \vec{j}\}$. Se $\vec{v} = \overrightarrow{OP}$ é vetor no plano xOy, então existem únicos $x, y \in \mathbb{R}$ tais que $\vec{v} = x\vec{i} + y\vec{j}$. Reciprocamente, se (x, y) é um par ordenado de números reais, então existe um único vetor $\vec{v} = \overrightarrow{OP}$ no plano xOy tal que $\vec{v} = x\vec{i} + y\vec{j}$.



- Essa proposição estabelece uma bijeção entre o conjunto dos vetores do plano cartesiano e o conjunto dos pares ordenados de números reais, indicado por $\mathbb{R}^2$.

- Desta forma, podemos representar $\vec{v} = \overrightarrow{OP}$ por meio de um único par ordenado de números reais (x, y) e escrever

$$\vec{v} = \overrightarrow{OP} = (x, y).$$

Nomenclatura e Observações

- Em $\vec{v} = \overrightarrow{OP} = (x, y)$ ou $P(x, y)$, os números x e y são chamados **coordenadas cartesianas,** sendo x a **abscissa** e y a **ordenada**.

- Vetor nulo: $\vec{0} = (0, 0)$

- $P \in Ox \Rightarrow P = (x, 0)$

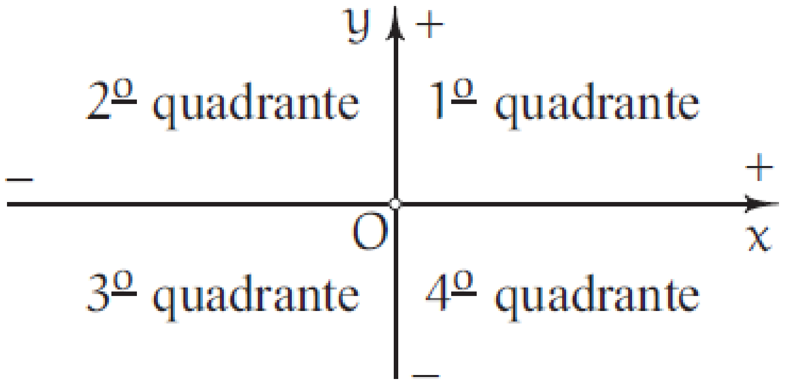
- $P \in Oy \Rightarrow P = (0, y)$

- Vetores paralelos ao eixo das abscissas (Ox): $\vec{v} = (x, 0)$.

- Vetores paralelos ao eixo das ordenadas (Oy): $\vec{v} = (0, y)$.

- $\vec{i} = (1, 0)$ e $\vec{j} = (0, 1)$

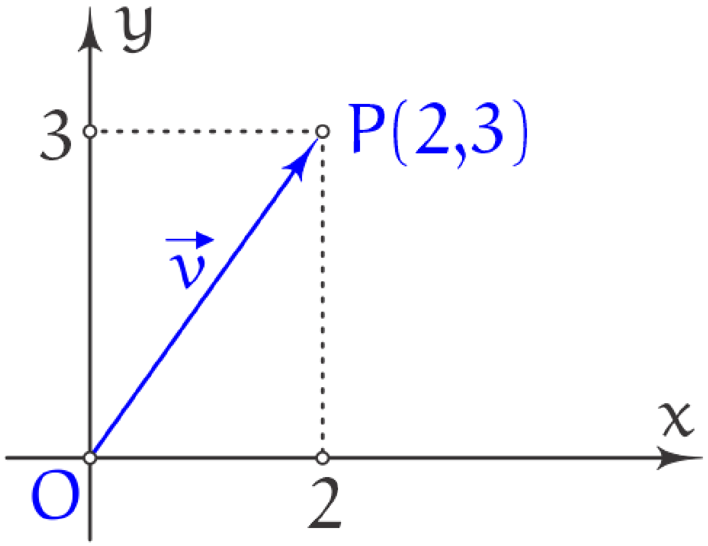
- Os eixos do sistema de coordenadas dividem o plano em quatro regiões chamadas de **quadrantes.**



Exemplo: Considere o vetor $\vec{v} = \overrightarrow{OP} = (2,3)$.

Temos que:

- $\vec{v}$ está associado ao ponto $P(2,3)$
- $\vec{v} = 2\vec{i} + 3\vec{j}$
- 2 e 3 são as coordenadas de $\vec{v}$.
- 2 é a abscissa de $\vec{v}$.
- 3 é a ordenada de $\vec{v}$.

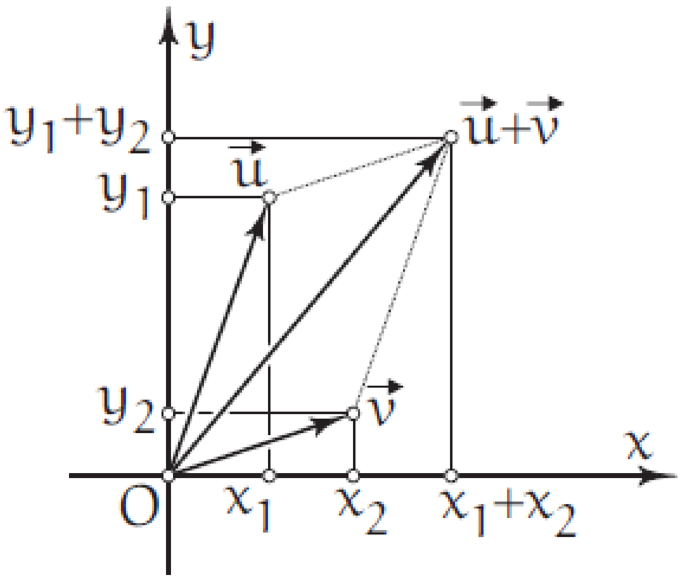


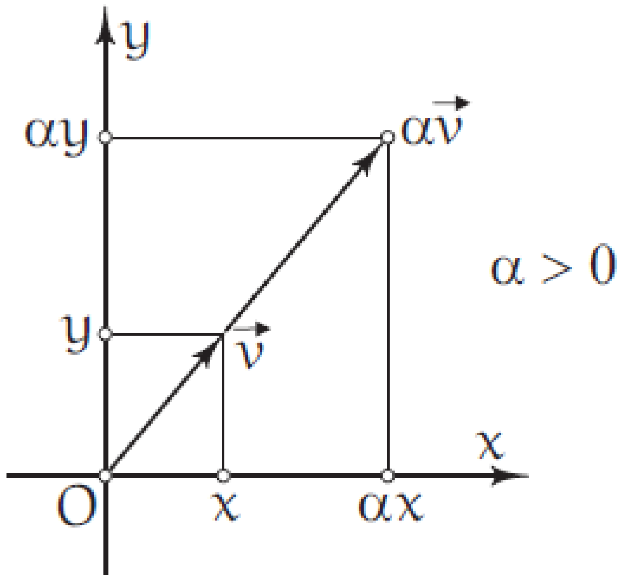
Propriedades:

(1) **(operações)** Sejam os vetores $\vec{u} = (x_1, y_1)$ e $\vec{v} = (x_2, y_2)$ e $\alpha \in \mathbb{R}$. Definimos:

(i) $\vec{u} + \vec{v} = (x_1 + x_2,\ y_1 + y_2)$

(ii) $\alpha\vec{u} = (\alpha x_1, \alpha y_1)$





(2) (condição de paralelismo) Os vetores não nulos $\vec{u} = (x_1, y_1)$ e $\vec{v} = (x_2, y_2)$ são **paralelos** se, e somente se, existe $\alpha \in \mathbb{R}$ tal que $\vec{u} = \alpha\vec{v}$, ou seja,

$$(x_1, y_1) = \alpha(x_2, y_2) \Leftrightarrow (x_1, y_1) = (\alpha x_2, \alpha y_2)$$

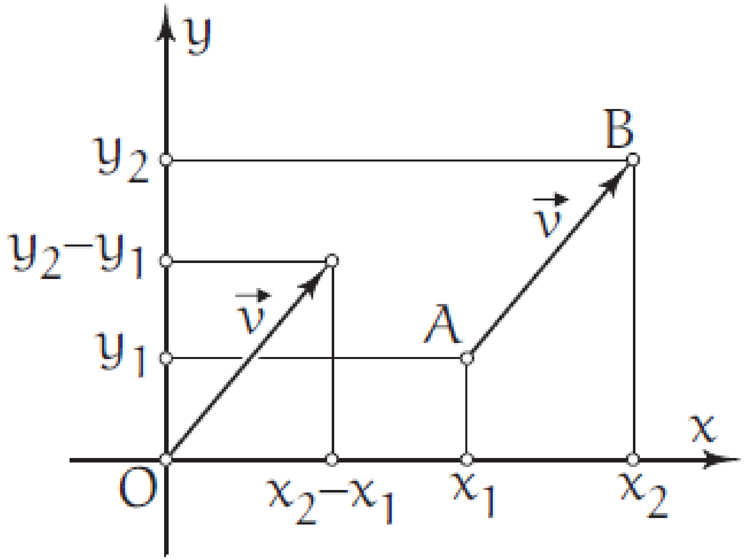
$$\Leftrightarrow \begin{cases} x_1 = \alpha x_2 \\ y_1 = \alpha y_2 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \frac{x_1}{x_2} = \frac{y_1}{y_2} = \alpha$$

Portanto, dois vetores são paralelos quando suas coordenadas são proporcionais.

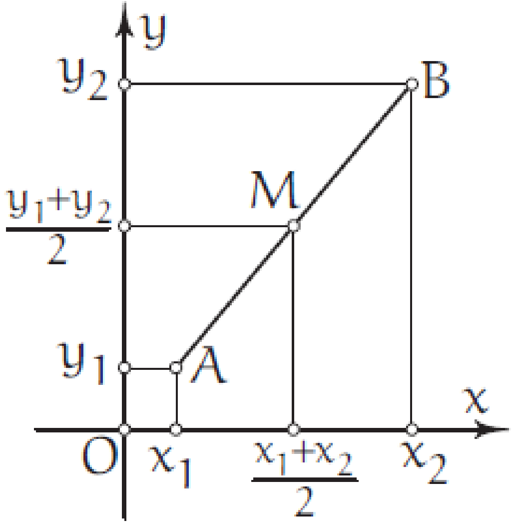
(3) (vetor definido por dois pontos) Se $A = (x_1, y_1)$ e $B = (x_2, y_2)$, então

$$\overrightarrow{AB} = B - A = (x_2 - x_1, y_2 - y_1).$$

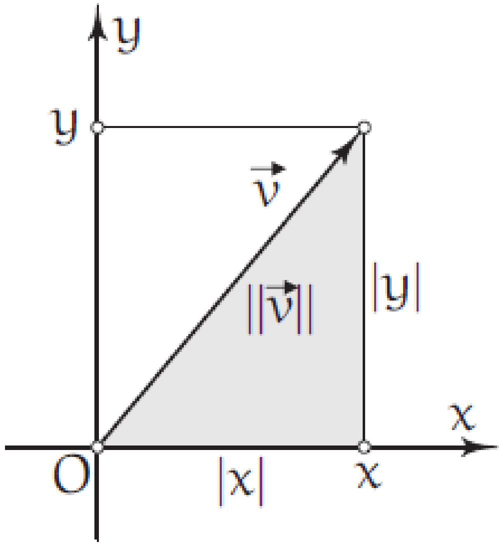


(4) (ponto médio) Se $A = (x_1, y_1)$ e $B = (x_2, y_2)$, então as coordenadas do ponto médio M do segmento AB é

$$M = \left(\frac{x_1 + x_2}{2}, \frac{y_1 + y_2}{2}\right)$$



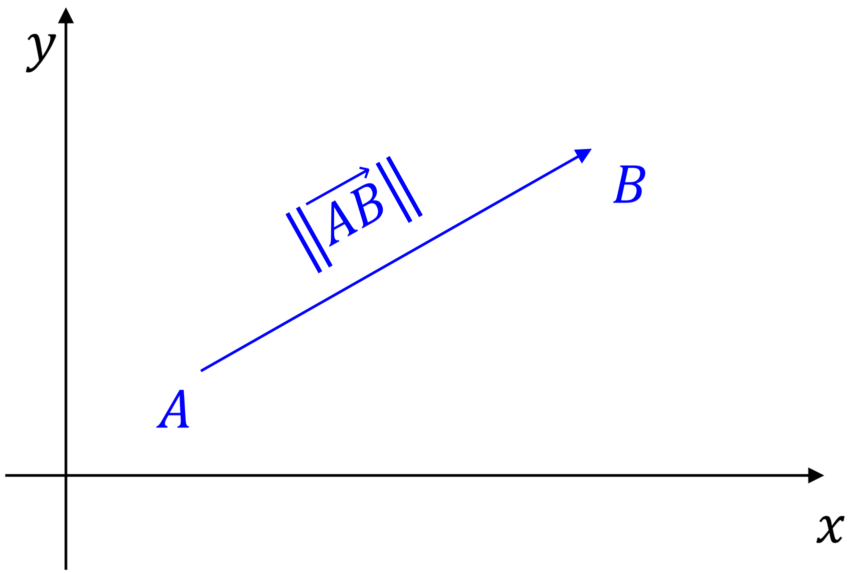
(5) (módulo) Se $\vec{v} = (x, y)$, então $\|\vec{v}\| = \sqrt{x^2 + y^2}$.



Observação: (distância entre dois pontos) A distância entre os pontos $A = (x_1, y_1)$ e $B = (x_2, y_2)$ é igual ao comprimento do vetor $\overrightarrow{AB}$, isto é, $d(A, B) = \|\overrightarrow{AB}\|$.

Como $\overrightarrow{AB} = B - A = (x_2 - x_1, y_2 - y_1)$, então:

$$d(A, B) = \|\overrightarrow{AB}\| = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$$



Exemplos

(1) Dados os vetores $\vec{u} = (2, -3)$ e $\vec{v} = (-1,4)$ e os pontos $A = (-1,2)$, $B = (3, -1)$ e $C = (-2,4)$, determine:

(a) $3\vec{u} + 2\vec{v}$

(b) $2\vec{v} - 4\vec{u}$

(c) $\|\vec{u}\|$

(d) O versor de $\vec{u}$.

(e) O ponto D de modo que $\overrightarrow{CD} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AB}$.

(f) O ponto médio do segmento AB.

(g) $d(B, C)$

(2) Determine um ponto P, pertencente ao eixo das abscissas, que seja equidistante dos pontos $A = (-1, -2)$ e $B = (5, -4)$.

(3) Dados os vetores no plano $\vec{u} = (2, -4)$, $\vec{v} = (-5, 1)$ e $\vec{w} = (-12, 6)$, determine números a e b tais que $\vec{w} = a\vec{u} + b\vec{v}$.

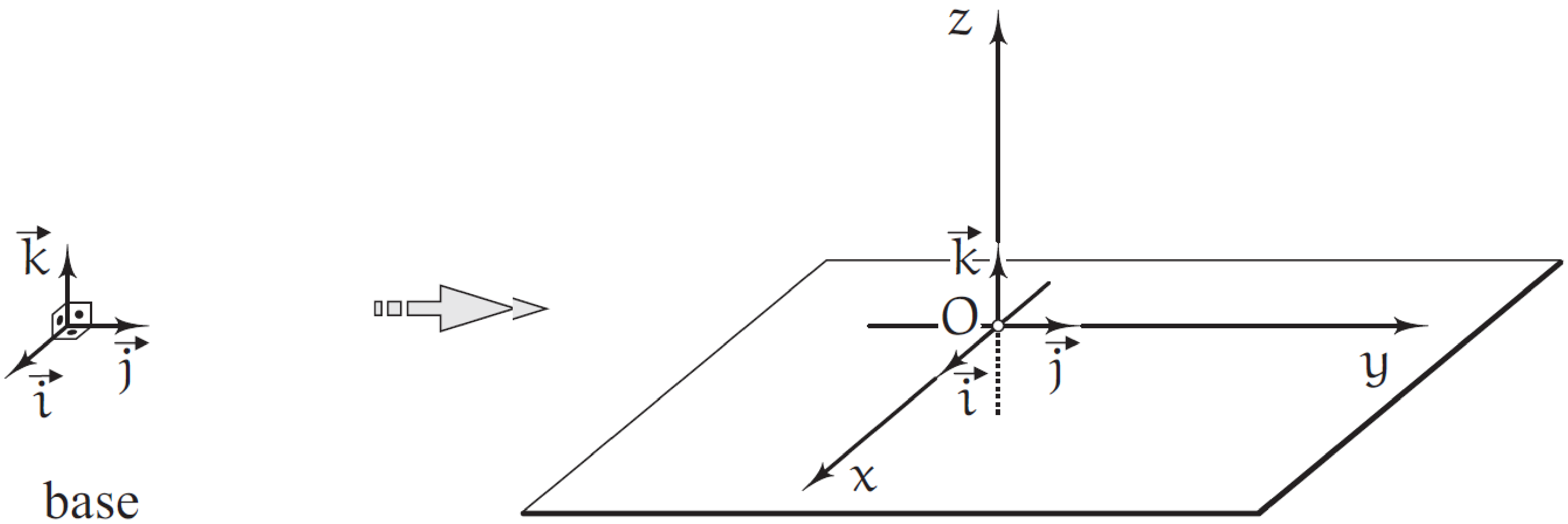
(4) Determine a extremidade do segmento que representa o vetor $\vec{v} = (2, -5)$, sabendo que sua origem é o ponto $A(-1,3)$.

(5) Calcule os valores de a para que o vetor $\vec{v} = \left(a, \frac{1}{2}\right)$ seja unitário.

(**6**) Determine o vetor $\vec{w}$ na igualdade $3\vec{w} + 2\vec{u} = \frac{1}{2}\vec{v} + \vec{w}$, sendo dados $\vec{u} = (3, -1)$ e $\vec{v} = (-2, 4)$.

Vetores no Espaço

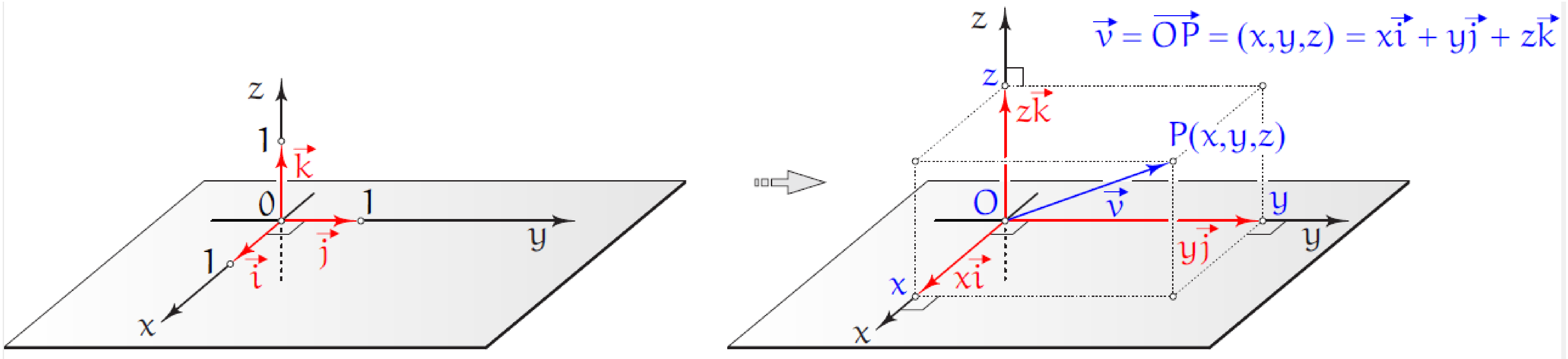
- Sejam $\vec{i}, \vec{j}$ e $\vec{k}$ vetores dois a dois ortogonais, com comprimento 1.
- Fixado um ponto O no espaço, os três segmentos orientados representantes de $\vec{i}, \vec{j}$ e $\vec{k}$ com origem em O determinam três eixos dois a dois perpendiculares no espaço.
- Nessas condições, dizemos que o espaço está munido de um **sistema de coordenadas cartesianas ortogonais.** Simplificadamente, chamamos este espaço de **espaço cartesiano.**
- É comum representar os eixos pela notação Ox, Oy e Oz e o sistema de coordenadas no espaço por $Oxyz$. Os eixos Ox, Oy e Oz, são chamados de **eixo das abscissas**, **eixo das ordenadas** e **eixo das cotas**, respectivamente.
- Também é comum representar no espaço, os três eixos de tal modo que seus sentidos satisfazem a chamada *"regra da mão direita"*, ou seja, os sentidos de $\vec{i}, \vec{j}$ e $\vec{k}$ são determinados pelos sentidos naturais dos dedos indicador, médio e polegar, respectivamente, da mão direita.
- Chamamos o conjunto $B = \{\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}\}$ de **base canônica** do espaço.



base canônica

plano cartesiano xOy

Proposição: Seja $Oxyz$ sistema de coordenadas cartesianas ortogonais no espaço com base canônica $B = \{\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}\}$. Se $\vec{v} = \overrightarrow{OP}$, então existem únicos $x, y, z \in \mathbb{R}$ tais que $\vec{v} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}$. Reciprocamente, se (x, y, z) é terna ordenada de números reais, então existe um único vetor $\vec{v} = \overrightarrow{OP}$ tal que $\vec{v} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}$.



- A proposição anterior estabelece uma bijeção entre o conjunto dos vetores do espaço e o conjunto das ternas ordenadas de números reais, indicado por $\mathbb{R}^3$.

- Desta forma, podemos representar $\vec{v} = \overrightarrow{OP}$ por meio de uma única terna ordenada de números reais (x, y, z) e escrever

$$\vec{v} = \overrightarrow{OP} = (x, y, z).$$

Nomenclatura e Observações

- Em $\vec{v} = \overrightarrow{OP} = (x, y, z)$, os números x, y e z são as **coordenadas cartesianas,** sendo x a **abscissa**, y a **ordenada** e z a **cota.**

- Vetor nulo: $\vec{0} = (0, 0, 0)$.

- $P \in Ox \Rightarrow P = (x, 0,0)$

- $P \in Oy \Rightarrow P = (0, y, 0)$

- $P \in Oz \Rightarrow P = (0,0, z)$

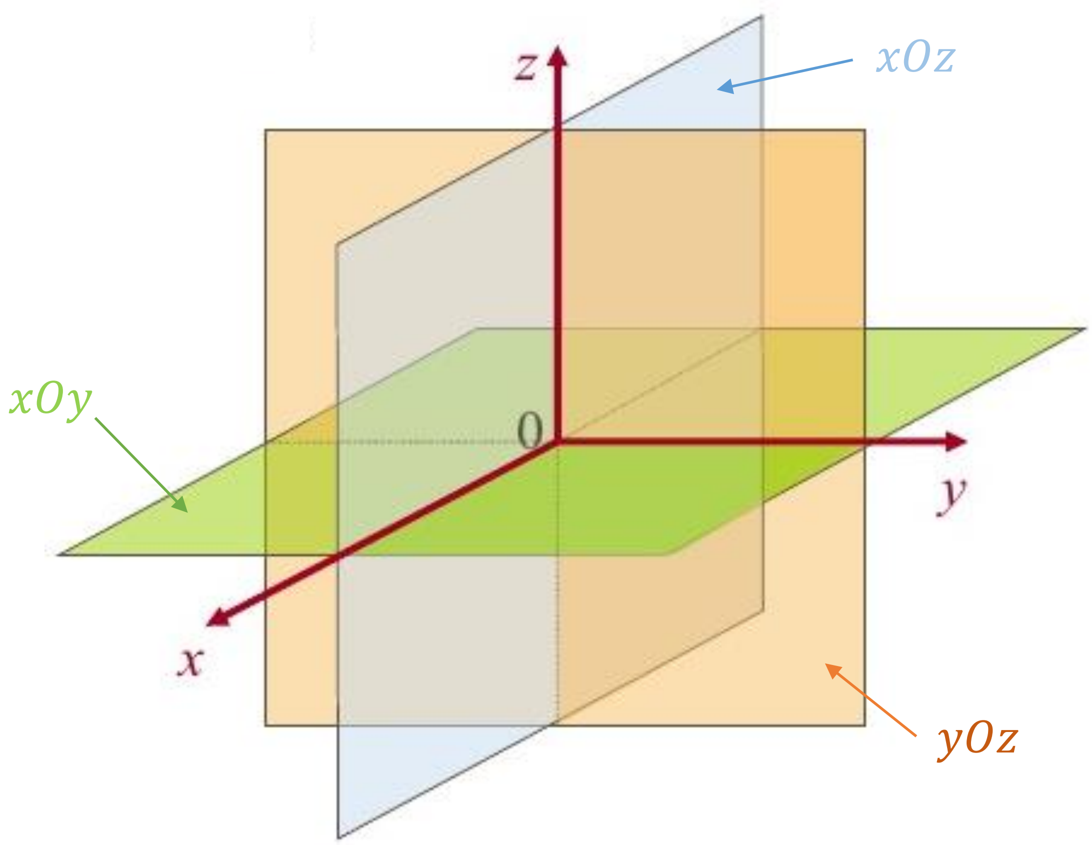
- Vetores paralelos ao eixo das abscissas (Ox): $\vec{v} = (x, 0, 0)$.

- Vetores paralelos ao eixo das ordenadas (Oy): $\vec{v} = (0, y, 0)$.

- Vetores paralelos ao eixo das cotas (Oz): $\vec{v} = (0, 0, z)$.

- $\vec{i} = (1,0,0)$, $\vec{j} = (0,1,0)$ e $\vec{k} = (0,0,1)$.

- Os eixos Ox, Oy e Oz determinam três planos cartesianos no espaço, chamados de **planos coordenados.**



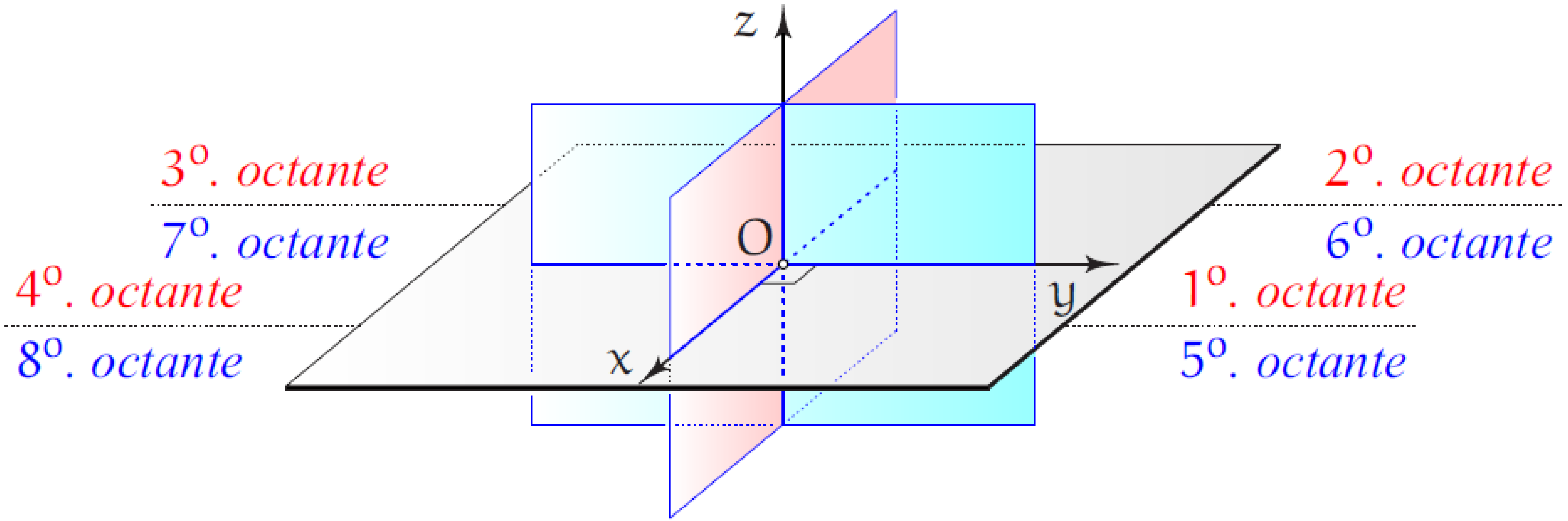
$$P \in xOy \Rightarrow P = (x, y, 0)$$

$$P \in xOz \Rightarrow P = (x, 0, z)$$

$$P \in yOz \Rightarrow P = (0, y, z)$$

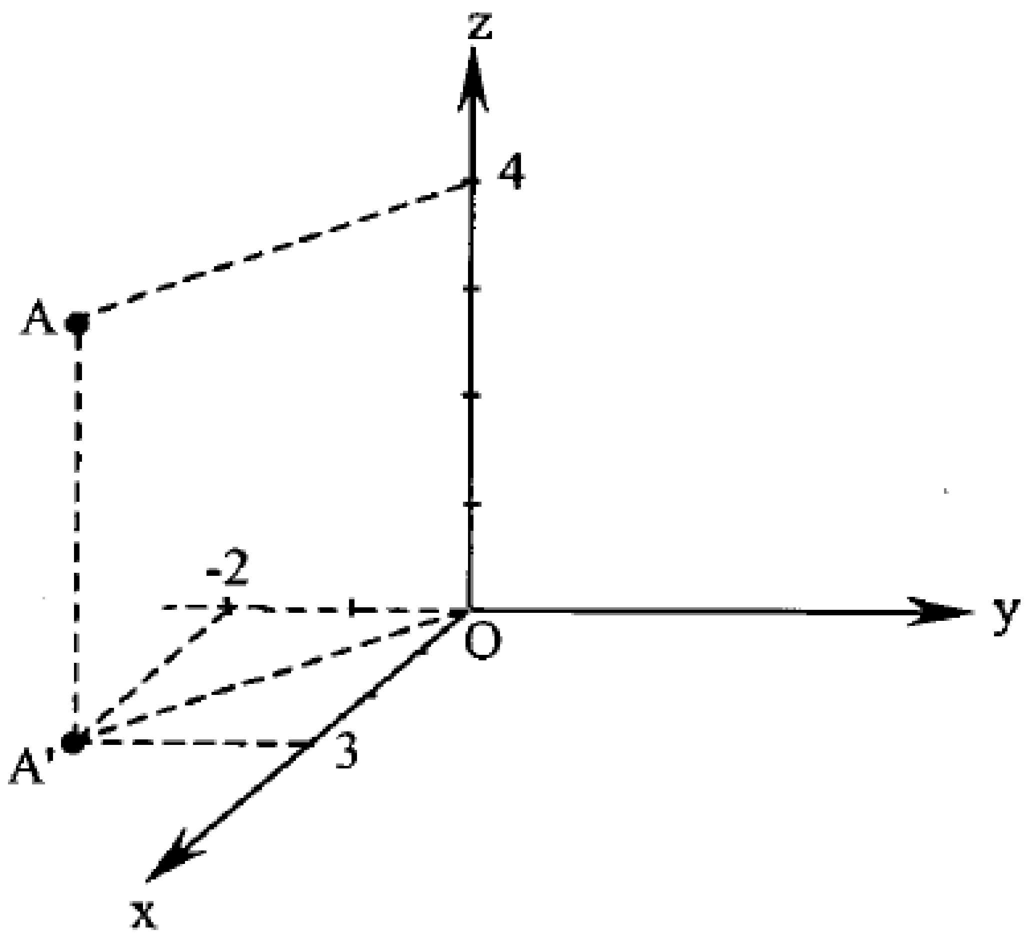
- Vetores paralelos ao plano xOy: $\vec{v} = (x, y, 0)$.
- Vetores paralelos ao plano xOz: $\vec{v} = (x, 0, z)$.
- Vetores paralelos ao plano yOz: $\vec{v} = (0, y, z)$.

- Os planos coordenados dividem o espaço em oito regiões, chamadas de **octantes.** O primeiro octante é constituído dos pontos de coordenadas todas positivas. Os demais octantes acima do plano xOy se sucedem em ordem numérica, a partir do primeiro, no sentido anti-horário. Os octantes abaixo do plano xOy se sucedem na mesma ordem a partir do quinto que, por convenção, se situa sob o primeiro.



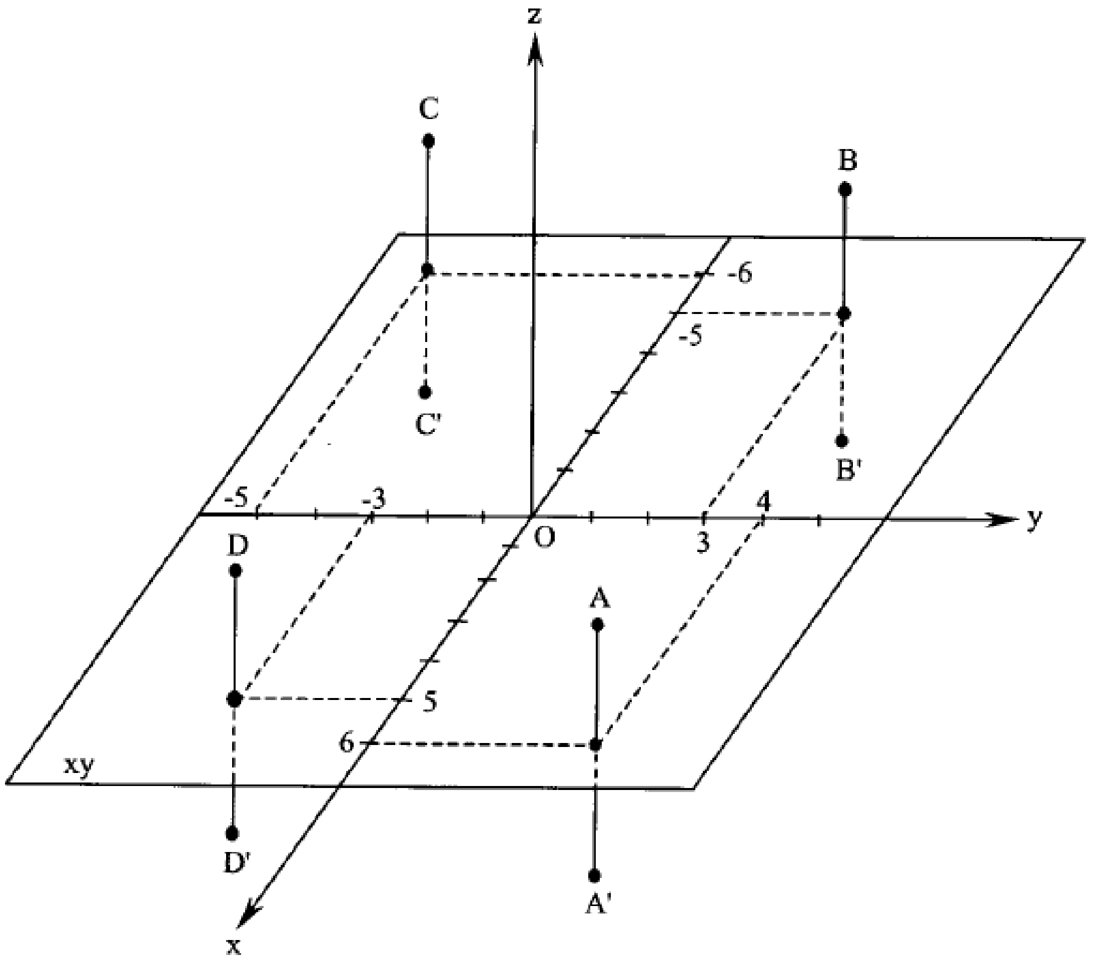
- Para marcar um ponto no espaço, digamos $A(3, -2, 4)$, procedemos assim:

  1º) marca-se o ponto $A'(3, -2, 0)$ no plano xy;
  2º) desloca-se A' paralelamente ao eixo dos z, 4 unidades para cima (se fosse -4 seriam 4 unidades para baixo) para obter o ponto A.



Exemplo: Marque os pontos abaixo no espaço:

$A(6,4,2)$, situado no 1º octante;
$B(-5,3,2)$, situado no 2º octante;
$C(-6,-5,2)$, situado no 3º octante;
$D(5,-3,2)$, situado no 4º octante;
$A'(6,4,-2)$, situado no 5º octante;
$B'(-5,3,-2)$, situado no 6º octante;
$C'(-6,-5,-2)$, situado no 7º octante;
$D'(5,-3,-2)$, situado no 8º octante;



Propriedades:

As propriedades para vetores no espaço são análogas às dos vetores no plano.

(1) (operações) Sejam os vetores $\vec{u} = (x_1, y_1, z_1)$ e $\vec{v} = (x_2, y_2, z_2)$ e $\alpha \in \mathbb{R}$. Definimos

(i) $\vec{u} + \vec{v} = (x_1 + x_2,\ y_1 + y_2, z_1 + z_2)$

(ii) $\alpha\vec{u} = (\alpha x_1, \alpha y_1, \alpha z_1)$

(2) (condição de paralelismo) Os vetores não nulos $\vec{u} = (x_1, y_1, z_1)$ e $\vec{v} = (x_2, y_2, z_2)$ são **paralelos** se, e somente se, existe $\alpha \in \mathbb{R}$ tal que $\vec{u} = \alpha\vec{v}$, ou seja, se

$$\frac{x_1}{x_2} = \frac{y_1}{y_2} = \frac{z_1}{z_2} = \alpha.$$

(3) (vetor definido por dois pontos) Se $A = (x_1, y_1, z_1)$ e $B = (x_2, y_2, z_2)$, então

$$\overrightarrow{AB} = B - A = (x_2 - x_1, y_2 - y_1, z_2 - z_1).$$

(4) (ponto médio) Se $A = (x_1, y_1, z_1)$ e $B = (x_2, y_2, z_2)$, então as coordenadas do ponto médio M do segmento AB é

$$M = \left(\frac{x_1 + x_2}{2}, \frac{y_1 + y_2}{2}, \frac{z_1 + z_2}{2}\right).$$

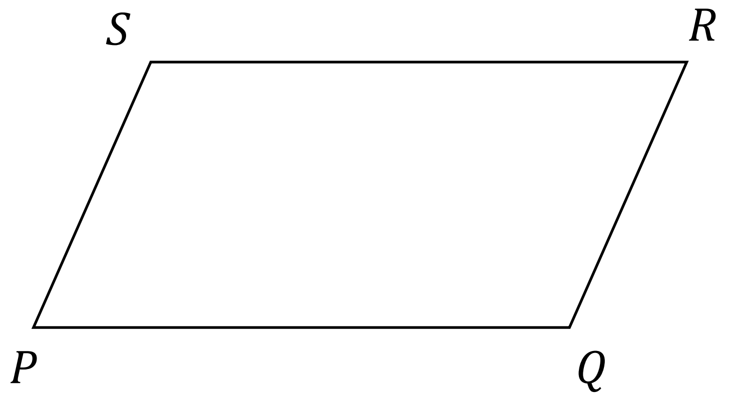
(5) (módulo) Se $\vec{v} = (x, y, z)$, então $\|\vec{v}\| = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$.

Exercícios

(1) Sejam os vetores $\vec{u} = (a^2 - 1, 3b - 3, 7)$ e $\vec{v} = \left(8, 3 - 2b, \frac{1}{2}c\ - 2\right).$ Determine os valores de a, b e c de modo que os vetores $\vec{u}$ e $\vec{v}$ sejam iguais.

(2) Dados os pontos $P(1,2,4), Q(2,3,2)$ e $R(2,1,-1)$, determine as coordenadas do ponto S tal que P, Q, R e S sejam vértices de um paralelogramo.

Solução:



Se P, Q, R e S são vértices do paralelogramo da figura ao lado, então $\overrightarrow{PQ} = \overrightarrow{SR}$ e $\overrightarrow{PS} = \overrightarrow{QR}$.

Se $S(x, y, z)$, então utilizando a primeira igualde, temos:

$$\overrightarrow{PQ} = \overrightarrow{SR} \Rightarrow Q - P = R - S$$

$$\Rightarrow (1,1,-2) = (2-x, 1-y, -1-z)$$

$$\Rightarrow \begin{cases} 2 - x = 1 \Rightarrow x = 1 \\ 1 - y = 1 \Rightarrow y = 0 \\ -1 - z = -2 \Rightarrow z = 1 \end{cases}$$

Logo, $S(1,0,1)$.

(**3**) Determine os valores de m e n para que sejam paralelos os vetores $\vec{u} = (m+1, 3, 1)$ e $\vec{v} = (4, 2, 2n-1)$.

Solução: Pela condição de paralelismo, $\vec{u}$ e $\vec{v}$ são paralelos se suas coordenadas forem proporcionais, ou seja,

$$\frac{m+1}{4} = \frac{3}{2} = \frac{1}{2n-1}.$$

Da primeira igualdade, segue que: $2(m+1) = 12 \Rightarrow m = 5$.

Da segunda igualdade, segue que: $3(2n-1) = 2 \Rightarrow n = \frac{5}{6}$.

(4) Calcule a e b para que os pontos $A(3,1,-2), B(1,5,1)$ e $C(a,b,7)$ sejam colineares.

Solução: Os pontos A, B e C são colineares se, e somente se, eles pertencem à mesma reta. Isto implica que os vetores $\overrightarrow{AB}$ e $\overrightarrow{BC}$ são paralelos.
Temos que

$$\overrightarrow{AB} = B - A = (-2,4,3) \quad \text{e} \quad \overrightarrow{BC} = C - B = (a-1, b-5, 6).$$

Pela condição de paralelismo:

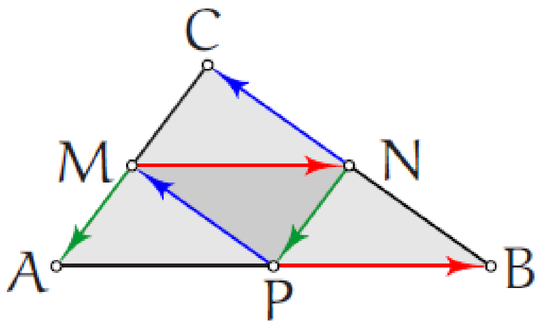
$$\frac{-2}{a-1} = \frac{4}{b-5} = \frac{3}{6}.$$

De $\frac{-2}{a-1} = \frac{3}{6}$, temos que $3(a-1) = -12 \Rightarrow a = -3$.

De $\frac{4}{b-5} = \frac{3}{6}$, temos que $3(b-5) = 24 \Rightarrow b = 13$.

(**5**) Determine os vértices de um triângulo, sabendo que os pontos médios de seus lados são $M(5,0,-2), N(3,1,-3)$ e $P(4,2,1)$.

Solução: Chamemos o triângulo de ABC, sendo $M, N,$ e P pontos médios de $CA.BC$ e AB, respectivamente.
Sabemos que o segmento que liga os pontos médios de dois lados de um triângulo é paralelo ao terceiro lado e mede a metade de seu comprimento.
Isto significa que, considerando os vetores representados na figura abaixo,



temos que:

$$\begin{cases} \overrightarrow{MN} = \overrightarrow{PB} \\ \overrightarrow{PM} = \overrightarrow{NC} \\ \overrightarrow{NP} = \overrightarrow{MA} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} N - M = B - P \\ M - P = C - N \\ P - N = A - M \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} (3,1,-3) - (5,0,-2) = B - (4,2,1) \\ (5,0,-2) - (4,2,1) = C - (3,1,-3) \\ (4,2,1) - (3,1,-3) = A - (5,0,-2) \end{cases} \Rightarrow \boxed{\begin{cases} B = (2,3,0) \\ C = (4,-1,-6) \\ A = (6,1,2) \end{cases}}.$$