Aluno: Lucas Andrei Cancelier Marin e Giovani Zanella

Prova 3 - Cálculo 2

2ª Prova - Cálculo 2

1.a

· Dada a EDO

$$y' - (\cos t) y = t e^{t^2 + \text{sen}\, t}$$

· Como ela já está na forma padrão iremos calcular a $\mu(x)$.

$$\mu(x) = e^{\int -\cos t\, dt}$$
$$= e^{-\text{sen}(t)}$$

· Multiplicando ambos os lados da EDO por $\mu(x)$, obtemos:

$$e^{-\text{sen}\, t} \frac{dy}{dx} - e^{-\text{sen}\, t} (\cos t) y = t e^{t^2 \cdot \text{sen}\, t} \cdot e^{-\text{sen}\, t}$$

$$\frac{d}{dx}(e^{-\text{sen}\, t} \cdot y) = \underbrace{\int t e^{t^2} dt}_{I}$$

· Resolvendo a integral I

$$\int t e^{t^2} dt = \frac{1}{2} \int e^u du = \frac{e^{t^2}}{2} + C$$

$u = t^2$

$\frac{du}{2} = t\, dt$

· Substituindo o resultado na conta obtemos

$$e^{-\text{sen}\, t} \cdot y = \frac{1}{2} \cdot e^{t^2} + C$$

· Portanto o resultado é

$$y = \frac{1}{2} \cdot e^{t^2 + \text{sen}\, t} + C e^{\text{sen}\, t}$$

b)

· Dada a EDO

$$\frac{dx}{dy} = \frac{x^2 y^2}{1+x}$$

· Primeiro devemos isolar as variáveis

$$\frac{dx}{dy} = \frac{x^2}{1+x} \cdot y^2$$

$$\frac{1}{x^2} dx = \frac{y^2}{1+x} dy$$

$$\frac{1+x}{x^2} dx = y^2 dy$$

· Agora é só calcular as integrais

$$\int \frac{1+x}{x^2} dx = \int y^2 dy$$

$$\int \frac{1}{x^2}\,dx + \int \frac{x}{x^2}\,dx = \int y^2\,dy$$

$$-\frac{1}{x} + \int \frac{1}{x}\,dx = \frac{y^3}{3}$$

$$-\frac{1}{x} + \ln|x| + C = \frac{y^3}{3}$$

· Multiplicando ambos os lados por x, tendo

$$-1 + x\ln|x| + Cx = \frac{y^3}{3}x$$

$$-3 + 3x\ln|x| + 3Cx = y^3 x$$

· Como 3C continua sendo uma constante irei substituir por K, logo o resultado final é

$$y^3 x = -3 + 3x\ln|x| + Kx$$

2a.

A quantidade de álcool no tanque 1 é dada por

$$\frac{dx}{dt} = \text{taxa de entrada} - \text{taxa de saída}$$

· Como a substancia que entra não contem álcool, logo a taxa de entrada é zero. Já a taxa de saída corresponde a:

taxa de saída = escoamento x concentração

taxa de saída = $10 \frac{l}{min} \cdot \frac{x(t)}{V(t)}$

• $x(t)$ é a quantidade de álcool e $V(t)$ é o volume do tanque 1, que por sua vez é estático, pois a taxa de entrada é a mesma da saída.

taxa de saída = $10 \frac{l}{min} \cdot \frac{x(t)}{100} \frac{g}{l} = \frac{x(t)}{10} \frac{g}{min}$

• Com essas equações, conseguimos montar uma EDO

$$\frac{dx}{dt} = 0 - \frac{x(t)}{10}$$

$$\frac{dx}{dt} + \frac{x(t)}{10} = 0$$

• Agora devemos calcular a $\mu(t)$.

$$\mu(x) = e^{\int \frac{1}{10} dt}$$

$$= e^{\frac{1}{10} \cdot t}$$

• Multiplicando ambos os lados da EDO por $\mu(x)$, temos:

$$e^{\frac{1}{10}t}\frac{dx}{dt} + e^{\frac{1}{10}}\frac{x(t)}{10} = 0$$

$$\frac{d}{dt}(e^{\frac{1}{10}t} \cdot x) = \int 0\, dt +$$

$$x = C \cdot e^{-\frac{1}{10}t}$$

· Em um instante $t = 0$ a concentração é igual a 100, então

$$x(0) = C \cdot e^{-\frac{1}{10}\cdot 0}$$

$$100 = C$$

· Logo a quantidade de álcool no tanque 1 é dada por

$$x(t) = 100e^{-\frac{1}{10}t}$$

b)

Utilizando a mesma ideia da questão anterior temos que

$$\frac{dy}{dt} = \text{taxa de entrada} - \text{taxa de saída}$$

· A taxa de entrada é igual a quantidade de liquido vinda do tanque 1 vezes a concentração do tanque.

$$\text{taxa de entrada} = 10 \cdot \frac{x(t)}{100} = \frac{x(t)}{10}$$

• Podemos substituir $x(t)$ pelo resultado da questão anterior, logo

$$\text{taxa de entrada} = \frac{100e^{-\frac{1}{10}t}}{10} = 10e^{-\frac{1}{10}t}$$

• A taxa de saída é dada por

$$\text{taxa de saída} = 10\,\frac{l}{min} \cdot \frac{y(t)}{V(t)}$$

• Novamente o volume do tanque 2 é estático logo

$$\text{taxa de saída} = 10\,\frac{l}{min} \cdot \frac{y(t)}{100} = \frac{y(t)}{10}$$

• Com as duas equações podemos montar e organizar a EDO.

$$\frac{dy}{dt} = 10e^{-\frac{1}{10}t} - \frac{y t}{10}$$

$$\frac{dy}{dt} + \frac{y(t)}{10} = 10e^{-\frac{1}{10}t}$$

• Agora devemos calcular $u(t)$

$$\mu(t) = e^{\int \frac{1}{10} dt}$$
$$= e^{\frac{1}{10} t}$$

· Multiplicando ambos os lados da EDO por $\mu(t)$, temos

$$e^{\frac{1}{10}t} \cdot \frac{dy}{dt} + e^{\frac{1}{10}t} \frac{y(t)}{10} = 10 \cdot e^{-\frac{1}{10}t} \cdot e^{\frac{1}{10}t}$$

$$\frac{d}{dx}\left(e^{\frac{1}{10}t} \cdot y\right) = 10$$

$$e^{\frac{1}{10}t} \cdot y = \int 10\, dt$$
$$e^{\frac{1}{10}t} \cdot y = 10t + C$$
$$y = 10t e^{-\frac{1}{10}t} + C e^{-\frac{1}{10}t}$$

Em um instante 0 a quantidade de álcool no tanque 2 é 0, logo.

$$y(0) = 10 \cdot 0 \cdot e^{-\frac{1}{10} \cdot 0} + C e^{-\frac{1}{10} \cdot 0}$$

$$0 = C$$

· Logo a quantidade de álcool no tanque 2 em um instante t é dada por

$$y(t) = 10 \cdot t \cdot e^{-\frac{1}{10}t}$$

c)

· Primeiro vamos derivar $y(t)$:

$$y' = (10t)' e^{-\frac{1}{10}t} + (e^{-\frac{1}{10}t})' 10t$$

$$y' = 10e^{-\frac{1}{10}t} - t \cdot e^{-\frac{1}{10}t}$$

$$y' = e^{-\frac{1}{10}t}(10 - t)$$

· Podemos observar que no ponto onde $t = 10$ existe um ponto crítico, logo substituindo na equação obtemos

$$y(10) = 10 \cdot 10 \cdot e^{-\frac{1}{10} \cdot 10}$$

$$= 100 \cdot e^{-1}$$

$$y = \frac{100}{e} \cong 36,78$$

∴ Logo a quantidade máxima é $\frac{100}{e}$.

3a

· Dado o PVI

$$\begin{cases} y'' - 4y = 0 \\ y(0) = 2,\ y'(0) = 4 \end{cases}$$

· Primeiro vamos obter as raízes

$$a^2 - 4 = 0 \Rightarrow a^2 = 4 \Rightarrow a = \pm\sqrt{4}$$

$\Rightarrow a = \pm 2$

· Portanto temos a solução

$y = C_1 e^{2x} + C_2 e^{-2x}$

· Derivando obtemos:

$y' = 2C_1 e^{2x} - 2C_2 e^{-2x}$

· Aplicando as condições do PVI, temos

$y(0) = C_1 e^0 + C_2 e^0$
$= C_1 + C_2 = 2$

$y'(0) = 2C_1 e^0 - 2C_2 e^0 = 4$
$2C_1 - 2C_2 = 4$

· Montando um sistema:

$$\begin{cases} C_1 + C_2 = 2 \\ 2C_1 - 2C_2 = 4 \end{cases}$$

· Isolando C_1 na equação 1, temos

$C_1 = 2 - C_2$

· Substituindo C_1 na equação 2, obtemos:

$2(2 - C_2) - 2C_2 = 4$
$-4C_2 = 0 \Rightarrow C_2 = 0$

D S T Q Q S S

• Substituindo C2 na equação 1, temos

$C1 + 0 = 2$
$C1 = 2$

• Logo

$y(x) = 2e^{2x} + 0e^{-2x}$
$y(x) = 2e^{2x}$

b)
• Dado o PVI

$\begin{cases} y'' - 2y' + 10 = 0 \\ y(0) = 4 \text{ e } y'(0) = 1 \end{cases}$

• Primeiro vamos encontrar as raízes da EDO

$r^2 - 2r + 10 = 0$

$\sqrt{\Delta} = 4 - 4 \cdot 1 \cdot 10$
$\sqrt{\Delta} = -36$
$= 6i$

$r = \frac{2 \pm 6i}{2}$ – $r' = 1 + 3i$
– $r'' = 1 - 3i$

• Logo

$y = e^{x}(C1 \cos(3x) + C2 \operatorname{sen}(3x))$

· Derivando y, obtemos

$$y' = (e^x)'(c_1 \cos 3x + c_2 \operatorname{sen} 3x) + e^x(c_1 \cos 3x + c_2 \operatorname{sen} 3x)'$$

$$y' = e^x(c_1 \cos(3x) + c_2 \operatorname{sen}(3x)) + e^x(-3c_1 \operatorname{sen} 3x + 3c_2 \cos 3x)$$

· Aplicando as condições do PVI, temos

$$y(0) = e^0(c_1 \cos 0 + c_2 \operatorname{sen} 0) = 4$$
$$4 = c_1$$

$$y'(0) = e^0(c_1 \cos 0 + c_2 \operatorname{sen}(0)) + e^0(-3c_1 \operatorname{sen} 0 + 3c_2 \cos 0)$$
$$1 = c_1 \cos 0 + 3c_2$$
$$1 = 4 + 3c_2$$
$$-3 = 3c_2$$
$$-1 = c_2$$

· Logo

$$y(x) = e^x(4\cos 3x - \operatorname{sen} 3x)$$

4.
Dada a EDO

$$y'' - 8y' + 20y = 100x^2 - 26xe^x$$

· Primeiro devemos encontrar uma solução homogênea

D S T Q Q S S
D L M M J V S

• Para isso devemos encontrar as raízes

$$r^2 - 8r + 20 = 0$$

$$\sqrt{\Delta} = 64 - 4 \cdot 1 \cdot 20$$
$$= 64 - 80$$
$$= -16$$
$$= 4i$$

$$r = \frac{8 \pm 4i}{2} = r' = 4 + 2i; \quad r'' = 4 - 2i;$$

• Logo

$$y_c = e^{4x}(C_1 \cos(2x) + C_2 \operatorname{sen}(2x))$$

• A solução particular contém 1 polinômio de 2º grau, e 1 de primeiro com um exponencial.

$$y_p = Ax^2 + Bx + C + (Dx + E)e^x$$
$$= Ax^2 + Bx + C + De^x x + Ee^x$$

• Derivando y, obtemos:

$$y'_p = 2Ax + B + De^x + De^x x + Ee^x$$
$$= 2Ax + B + De^x x + (D + E)e^x$$

• Derivada de segunda ordem de y.

$$y''_p = 2A + De^x + De^x x + (D + E)e^x = 2A + De^x x (2D + E)e^x$$

• Somando tudo, temos

$$2A+(2D+E)e^x+De^x x-16Ax-8B-8De^x x-8(D+E)e^x+20Ax^2$$
$$+20Bx+20C+20De^x x+20Ee^x=100x^2-26xe^x$$

$$20Ax^2+(-16A+20B)x+(2A-8B+20C)+13Dxe^x+(-6D+13E)e^x$$
$$=100x^2-26xe^x$$

• Montando o sistema

$$\begin{cases} 20A=100 \\ -16A+20B=0 \\ 2A-8B+20C=0 \\ 13D=-26 \\ -6D+13E=0 \end{cases}$$

• Resolvendo o sistema, temos:

$$20A=100 \quad A=5$$

$$-16A+20B=0 \quad 20B=80 \quad B=4$$

$$2A-8B+20C=0 \quad 10-32+20C= \quad 20C=22 \quad C=\frac{11}{10}$$

$$13D=-26 \quad D=-2$$

$$-6D+13E=0 \quad 13E=-12 \quad E=-\frac{12}{13}$$

• Substituindo os resultados do sistema na formula de y_p, temos

$$y_p = 5x^2 + 4x + \frac{11}{10} - 2xe^x - \frac{11}{13}e^x$$

• Logo a resposta é

$$y = y_c + y_p$$

$$y = e^{4x}(c_1 \cos 2x + c_2 \operatorname{sen} 2x) + 5x^2 + 4x + \frac{11}{10} + \left(-2x - \frac{12}{13}\right)e^x$$

5.

• Dada a EDO

$$y'' + y = \sec x \, tg\, x$$

• Primeiro vamos achar a solução da homogenea associada

$$r^2 + 1 = 0$$

$$\sqrt{\Delta} = -4$$
$$= 2i$$

$$r = \frac{\pm 2i}{2} = \begin{matrix} r' = +i \\ r'' = -i \end{matrix}$$

• Portanto y_c é

$$y_c = e^{0x}(c_1 \cos x + c_2 \operatorname{sen} x)$$
$$y_c = c_1 \cos x + c_2 \operatorname{sen} x$$

· Agora vamos encontrar a solução particular:

Identificando $y_1 = \cos x$, $y_2 = \operatorname{sen} x$ e $g(x) = \sec x \operatorname{tg} x$.

· Primeiro verificamos se é LI

$$w(y_1, y_2) = \begin{vmatrix} \cos x & \operatorname{sen} x \\ -\operatorname{sen} x & \cos x \end{vmatrix} = \cos^2(x) + \operatorname{sen}^2(x) = 1$$

· Portanto é LI, logo y_1 e y_2 formam conjunto fundamental de soluções.

· Agora vamos calcular w_1 e w_2

$$w_1 = \begin{vmatrix} 0 & \operatorname{sen}(x) \\ \sec x \operatorname{tg} x & \cos(x) \end{vmatrix} = -\operatorname{sen}(x) \sec x \operatorname{tg}(x)$$

$$= -\frac{\operatorname{sen} x}{\cos(x)} \cdot \frac{\operatorname{sen} x}{\cos x} = -\operatorname{tg}^2(x)$$

$$w_2 = \begin{vmatrix} \cos x & 0 \\ -\operatorname{sen} x & \sec x \operatorname{tg}(x) \end{vmatrix} = \cos(x) \sec(x) \operatorname{tg}(x)$$

$$= \cos(x) \frac{1}{\cos(x)} \cdot \frac{\operatorname{sen}(x)}{\cos(x)} = \operatorname{tg}(x)$$

· Agora que obtemos w_1 e w_2, vamos calcular u_1 e u_2.

$$u_1 = \int \frac{w_1}{w} = \int -\frac{\operatorname{tg}^2 x}{1} dx = -\int \sec^2 x \, dx + \int 1 \, dx$$

$$= -\operatorname{tg} x + x + c$$

$u_2 = \int \frac{w_2}{w}\,dx = \int tg\,x\,dx = -\ln|\cos x| + c$

• Aplicando u_1, u_2 na formula abaixo obtemos:

$y_p = u_1 y_1 + u_2 y_2$

$= -tg(x)\cos(x) + x\cos(x) - \operatorname{sen} x \ln|\cos x|$

$= -\frac{\operatorname{sen} x}{\cos(x)}\cos(x) + x\cos(x) - \operatorname{sen} x \ln|\cos x|$

$= -\operatorname{sen}(x) + x\cos(x) - \operatorname{sen}(x)\ln|\cos x|$

• Agora somamos a solução da homogenea associada com a solução particular.

$y = y_c + y_p$

$y = c_1\cos(x) + c_2\operatorname{sen}(x) - \operatorname{sen}(x) + x\cos(x) - \operatorname{sen}(x)\ln|\cos x|$

$= c_1\cos(x) + (c_2 - 1)\operatorname{sen}(x) + x\cos(x) - \operatorname{sen}(x)\ln|\cos x|$

• $c_2 - 1$ continua sendo uma constante então substituirei por K, assim $K = c_2 - 1$.

$y = c_1\cos(x) + K\operatorname{sen}(x) + x\cos(x) - \operatorname{sen}(x)\ln|\cos x|$ //