

Integrais Trigonométricas

1. Produto de seno e cosseno:

$$\int \sin(ax) \cos(bx) \, dx$$

$$\int \cos(ax) \cos(bx) \, dx$$

$$\int \sin(ax) \sin(bx) \, dx$$

• Identidades:

$$\sin(a) \cos(b) = \frac{1}{2}[\sin(a+b) + \sin(a-b)]$$

$$\cos(a) \cos(b) = \frac{1}{2}[\cos(a+b) + \cos(a-b)]$$

$$\sin(a) \sin(b) = \frac{1}{2}[\cos(a-b) - \cos(a+b)]$$

2. Potências de seno e cosseno:

$$\int \sin^n(x) \, dx$$

- n ímpar: $\sin^2(x) = 1 - \cos^2(x)$ e $u = \cos(x)$
- n par: $\sin^2(x) = \frac{1 - \cos(2x)}{2}$

$$\int \cos^n(x) \, dx$$

- n ímpar: $\cos^2(x) = 1 - \sin^2(x)$ e $u = \sin(x)$
- n par: $\cos^2(x) = \frac{1 + \cos(2x)}{2}$

3. Produtos e potências de seno e cosseno:

$$\int \sin^m(x) \cos^n(x) \, dx$$

- m e n pares: $\sin^2(x) = \frac{1 - \cos(2x)}{2}$ e $\cos^2(x) = \frac{1 + \cos(2x)}{2}$
- m ímpar: $\sin^2(x) = 1 - \cos^2(x)$ e $u = \cos(x)$
- n ímpar: $\cos^2(x) = 1 - \sin^2(x)$ e $u = \sin(x)$

4. Potências de secante, tangente, cossecante e cotangente:

$$\int \sec^n(x) \, dx$$

$$\int \tan^n(x) \, dx$$

$$\int \csc^n(x) \, dx$$

$$\int \cot^n(x) \, dx$$

Na preparação o integrando, usamos as seguintes identidades:

- $1 + \tan^2(x) = \sec^2(x)$
- $1 + \cot^2(x) = \csc^2(x)$
- Para n ímpar, usar integração por partes

Derivadas e integrais úteis:

$$(\tan(x))' = \sec^2(x)$$

$$(\cot(x))' = -\csc^2(x)$$

$$(\sec(x))' = \sec(x) \tan(x)$$

$$(\csc(x))' = -\csc(x) \cot(x)$$

$$\int \tan(x) \, dx = -\ln|\cos(x)| + k$$

$$\int \cot(x) \, dx = \ln|\sec(x)| + k$$

$$\int \sec(x) \, dx = \ln|\sec(x) + \tan(x)| + k$$

$$\int \csc(x) \, dx = \ln|\csc(x) - \cot(x)| + k$$

5. Produtos de potências de tangente e secante:

$$\int \tan^m(x) \cdot \sec^n(x) dx$$

- m ímpar:
 1. Separar um fator de $\sec(x) \tan(x)$
 2. Use $\tan^2(x) = \sec^2(x) - 1$
 3. Faça $u = \sec(x)$
- n par:
 1. Separar um fator de $\sec^2(x)$
 2. Use $\sec^2(x) = 1 + \tan^2(x)$
 3. Faça $u = \tan(x)$
- m par e n ímpar:
 1. Usar $\tan^2(x) = \sec^2(x) - 1$ para obter uma integral com potências de secante.

6. Produtos de potências de cotangente e cossecante

$$\int \cot^m(x) \cdot \csc^n(x) dx$$

- m ímpar:
 1. Separe um fator de $\csc(x) \cot(x)$
 2. Use $\cot^2(x) = \csc^2(x) - 1$
 3. Faça $u = \csc(x)$
- n par:
 1. Separe um fator de $\csc^2(x)$
 2. Use $\csc^2(x) = 1 + \cot^2(x)$
 3. Faça $u = \cot(x)$
- m par e n ímpar:
 1. Use $\cot^2(x) = \csc^2(x) - 1$ para obter uma integral com potências de cossecante.

Observação: fórmulas de recorrência

Para o cálculo de integrais trigonométricas de potência n com $n \geq 5$ indica-se o uso das fórmulas de recorrência:

$$\int \sin^n(x) dx = -\frac{1}{n} \sin^{n-1}(x) \cos(x) + \frac{n-1}{n} \int \sin^{n-2}(x) dx$$

$$\int \cos^n(x) dx = \frac{1}{n} \cos^{n-1}(x) \sin(x) + \frac{n-1}{n} \int \cos^{n-2}(x) dx$$

$$\int \sec^n(x) dx = \frac{\sec^{n-2}(x)}{n-1} + \frac{n-2}{n-1} \int \sec^{n-2}(x) dx$$

$$\int \tan^n(x) dx = \frac{\tan^{n-1}(x)}{n-1} - \int \tan^{n-2}(x) dx$$

$$\int \csc^n(x) dx = -\frac{\csc^{n-2}(x) \cot(x)}{n-1} + \frac{n-2}{n-1} \int \csc^{n-2}(x) dx$$

$$\int \cot^n(x) dx = -\frac{\cot^{n-1}(x)}{n-1} - \int \cot^{n-2}(x) dx$$