INSTITUTO FEDERAL
Catarinense
Campus Blumenau

Assunto: Integrais trigonométricas, Integrais impróprias
Professor: Fabricio Alves Oliveira

Essa lista deverá ser resolvida de forma manuscrita e entregue no dia da segunda prova.

(1) Calcule as integrais trigonométricas:

(a) $\int \operatorname{sen} 3x \operatorname{sen} 5x \, dx$ (b) $\int \cos 2x \cos x \, dx$ (c) $\int \operatorname{sen}^5 x \, dx$

(d) $\int \cos^2 5x \, dx$ (e) $\int \operatorname{sen}^2 x \cos^4 x \, dx$ (f) $\int \operatorname{sen}^2 2x \cos^2 3x \, dx$

(g) $\int \cos x \cos^2 4x \, dx$ (h) $\int \operatorname{tg}^5 x \sec^2 x \, dx$ (i) $\int \operatorname{tg}^3 2x \sec 2x \, dx$

(j) $\int \operatorname{tg}^6 x \, dx$ (k) $\int \sec^5 x \, dx$ (l) $\int \operatorname{cossec}^4 x \operatorname{cotg}^6 x \, dx$

(m) $\int \operatorname{cotg}^5 x \, dx$ (n) $\int \operatorname{cossec}^4 x \, dx$

(2) Verifique que:

(a) $\int \operatorname{sen}^n x \, dx = -\frac{1}{n} \operatorname{sen}^{n-1} x \cos x + \frac{n-1}{n} \int \operatorname{sen}^{n-2} x \, dx, n \geq 2$

(b) $\int \operatorname{tg}^n x \, dx = \frac{\operatorname{tg}^{n-1} x}{n-1} - \int \operatorname{tg}^{n-2} x \, dx, n \geq 2$

(c) $\int \operatorname{tg}^n x \sec^2 x \, dx = \frac{\operatorname{tg}^{n+1} x}{n+1} + k, n \neq -1$

(d) $\int \sec^{n+1} x \operatorname{tg} x \, dx = \frac{\sec^{n+1} x}{n+1} + k, \neq -1$

(e) $\int \operatorname{cotg}^n x \operatorname{cossec}^2 x \, dx = -\frac{\operatorname{cotg}^{n+1} x}{n+1} + k, n \neq -1$

(f) $\int \operatorname{cossec}^n x \operatorname{cossec} x \operatorname{cotg} x \, dx = -\frac{\operatorname{cossec}^{n+1} x}{n+1} + k, n \neq -1$

(3) Utilize a mudança de variável $u = \operatorname{tg}\left(\frac{x}{2}\right)$ para calcular as integrais:

(a) $\int \frac{\operatorname{sen} x}{1 + \sec x} \, dx$ (b) $\int \frac{1}{\operatorname{sen} x + \cos x} \, dx$

(4) Determine se cada integral é convergente ou divergente e calcule aquelas que são convergentes.

(a) $\int_1^\infty \frac{1}{(3x+1)^2} \, dx$ (b) $\int_{-\infty}^0 \frac{1}{2x-5} \, dx$ (c) $\int_{-\infty}^{-1} \frac{1}{\sqrt{2-w}} \, dw$

(d) $\int_0^\infty \frac{x}{(x^2+2)^2} \, dx$ (e) $\int_4^\infty e^{-y/2} \, dy$ (f) $\int_{-\infty}^{-1} e^{-2t} \, dt$

(g) $\int_{-\infty}^\infty \frac{x}{1+x^2} \, dx$ (h) $\int_{-\infty}^\infty (2 - v^4) \, dv$ (i) $\int_{-\infty}^\infty x e^{-x^2} \, dx$

(j) $\int_0^3 \frac{1}{\sqrt{x}} \, dx$ (k) $\int_0^3 \frac{1}{x\sqrt{x}} \, dx$ (l) $\int_{-1}^0 \frac{1}{x^2} \, dx$

(m) $\int_1^9 \frac{1}{\sqrt[3]{x-9}} \, dx$ (n) $\int_{-2}^3 \frac{1}{x^4} \, dx$ (o) $\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} \, dx$

(**5**) Esboce a região abaixo e calcule sua área (se a área for finita).

(a) $R = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2; x \leq 1, 0 \leq y \leq e^x\right\}$

(b) $R = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2; 0 \leq y \leq \dfrac{2}{x^2+9}\right\}$

(c) $R = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2; -2 \leq x \leq 0, 0 \leq y \leq \dfrac{1}{\sqrt{x+2}}\right\}$

(**6**) Use o Teste da Comparação para determinar se as integrais abaixo são convergentes ou divergentes.

(a) $\displaystyle\int_1^\infty \frac{x}{\sqrt{1+x^6}}\,dx$ (b) $\displaystyle\int_1^\infty \frac{\cos^2 x}{1+x^2}\,dx$ (c) $\displaystyle\int_1^\infty \frac{2+e^{-x}}{x}\,dx$

(d) $\displaystyle\int_0^1 \frac{e^{-x}}{\sqrt{x}}\,dx$ (e) $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{x\operatorname{sen} x}\,dx$ (f) $\displaystyle\int_1^\infty \frac{1}{x+e^{2x}}\,dx$

Respostas

(1)

(a) $\frac{\operatorname{sen} 2x}{4} - \frac{\operatorname{sen} 8x}{16} + k$

(b) $\frac{\operatorname{sen} 3x}{6} + \frac{\operatorname{sen} x}{2} + k$

(c) $-\cos x + \frac{2\cos^3 x}{3} - \frac{\cos^5 x}{5} + k$

(d) $\frac{x}{2} + \frac{\operatorname{sen} 10x}{20} + k$

(e) $-\frac{\operatorname{sen} x \cos^5 x}{6} + \frac{\cos^3 x \operatorname{sen} x}{24} + \frac{\cos x \operatorname{sen} x}{16} + \frac{x}{16} + k$

(f) $\frac{x}{4} + \frac{\operatorname{sen} 6x}{24} - \frac{\operatorname{sen} 4x}{16} - \frac{\operatorname{sen} 10x}{80} - \frac{\operatorname{sen} 2x}{16} + k$

(g) $\frac{\operatorname{sen} x}{2} + \frac{\operatorname{sen} 9x}{36} + \frac{\operatorname{sen} 7x}{28} + k$

(h) $\frac{\operatorname{tg}^6 x}{6} + k$

(i) $\frac{\sec^3 2x}{6} - \frac{\sec 2x}{2} + k$

(j) $\frac{\operatorname{tg}^5 x}{5} - \frac{\operatorname{tg}^3 x}{3} + \operatorname{tg} x - x + k$

(k) $\frac{\sec^3 x \operatorname{tg} x}{4} + \frac{3 \sec x \operatorname{tg} x}{8} + \frac{3}{8} \ln|\sec x + \operatorname{tg} x| + k$

(l) $-\frac{\operatorname{cotg}^9 x}{9} - \frac{\operatorname{cotg}^7 x}{7} + k$

(m) $-\frac{\operatorname{cotg}^4 x}{4} + \frac{\operatorname{cotg}^2 x}{2} + \ln|\operatorname{sen} x| + k$

(n) $-\frac{\operatorname{cotg}^3 x}{3} - \operatorname{cotg} x + k$

(3)

(a) $-\ln\left(1 + \operatorname{tg}^2 \frac{x}{2}\right) - \frac{2}{1+\operatorname{tg}^2 \frac{x}{2}} + k$

(b) $\frac{\sqrt{2}}{2} \ln\left|\frac{\operatorname{tg}\left(\frac{x}{2}\right) - 1 + \sqrt{2}}{\operatorname{tg}\left(\frac{x}{2}\right) - 1 - \sqrt{2}}\right| + k$

(4)

(a) A integral é convergente e seu valor é $\dfrac{1}{12}$.

(b) A integral é divergente.

(c) A integral é divergente.

(d) A integral é convergente e seu valor é $\dfrac{1}{4}$.

(e) A integral é convergente e seu valor é $2e^{-2}$.

(f) A integral é divergente.

(g) A integral é divergente.

(h) A integral é divergente.

(i) A integral é convergente e seu valor é 0.

(j) A integral é convergente e seu valor é $2\sqrt{3}$.

(k) A integral é divergente.

(l) A integral é divergente.

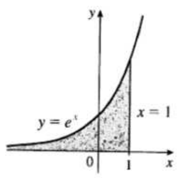
(m) A integral é convergente e seu valor é -6.

(n) A integral é divergente.

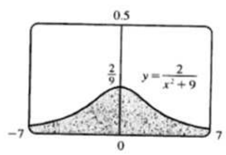
(o) A integral é convergente e seu valor é $\dfrac{\pi}{2}$.

(5)

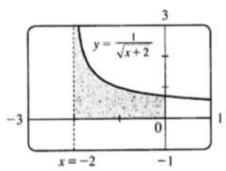
a) Área $= e$



b) Área$= \dfrac{2\pi}{3}$



c) Área$= 2\sqrt{2}$



(6)

(a) A integral é convergente.
(b) A integral é convergente.
(c) A integral é divergente.
(d) A integral é convergente.
(e) A integral é divergente.
(f) A integral é convergente.