

integrais trigonométricas

- 1) Produto sen e cos: $\int \sin(a\pi)x \cos(b\pi)x dx$, $\int \cos(a\pi)x \cos(b\pi)x dx$, $\int \sin(a\pi)x \sin(b\pi)x dx$
- $\sin(a\pi)x \cdot \cos(b\pi)x = \frac{1}{2} [\sin(a+b)x + \sin(a-b)x]$
 - $\sin(a\pi)x \cdot \sin(b\pi)x = \frac{1}{2} [\cos(a-b)x - \cos(a+b)x]$
- 2) Potências sen e cos
- $\int \sin^n(x) dx$ → n ímpar: $\sin^2 x = 1 - \cos^2 x$, $u = \cos x$
 - n par: $1 - \cos(2x)/2$
 - $\int \cos^n(x) dx$ → n ímpar: $\cos^2 x = 1 - \sin^2 x$, $u = \sin x$
 - n par: $1 + \cos(2x)/2$
- 3) Potências sec, tg, cosec, cotg
- $\int \sec^n(x) dx$
 - $\int \tan^n(x) dx$
 - $\int \csc^n(x) dx$
 - $\int \cot^n(x) dx$
- $\Rightarrow 1 + \tan^2(x) = \sec^2(x) \Rightarrow 1 + \cot^2(x) = \csc^2(x)$
- Para n ímpar usar integração por partes

4) Produto de potência de tg e sec

m ímpar: separar um fator de $\sec(x) \cdot \tan(x)$, use $\tan^2(x) = \sec^2(x) - 1$, faça $u = \sec x$

n par: separar um fator de $\sec^2(x)$, use $\sec^2(x) = 1 + \tan^2(x)$, $u = \tan(x)$

m par, n ímpar: usar $\tan^2(x) = \sec^2(x) - 1$, para obter uma integral com potência de sec

5) Produto de potência cotangente e cosecante

m ímpar: separar um fator de $\csc(x) \cot(x)$, use $\cot^2(x) = \csc^2(x) - 1$, faça $u = \csc x$

n par: separar um fator de $\csc^2(x)$, use $\csc^2(x) = 1 + \cot^2(x)$, faça $u = \cot(x)$

m par, n ímpar: usar $\cot^2(x) = \csc^2(x) - 1$, para obter uma integral com potências de csc

Integração de funções racionais sen/cos, substituição universal $u = \tan(\frac{x}{2})$

$$\sin x = \frac{\cancel{u}}{1+u^2}, \cos x = \frac{1-\cancel{u}^2}{1+u^2}, dx = \frac{2}{1+u^2} du, u = \tan(\frac{x}{2})$$

Integrais improprias: integrais cujo integrando está definido em intervalos não limitados $[a, +\infty], [-\infty, b]$ ou mesmo $]-\infty, +\infty[$

Quando o resultado for finito, convergem. Quando o limite não existir ou for $\pm\infty$, divergem

① Integrais improprias do tipo I

$$\int_a^{+\infty} f(x) dx = \lim_{T \rightarrow +\infty} \left(\int_a^T f(x) dx \right)$$

$$\int_{-\infty}^b f(x) dx = \lim_{T \rightarrow -\infty} \left(\int_T^b f(x) dx \right)$$

② Integrais improprias do tipo II

usar quando função não está definida em a ou b

$$\int_a^b f(x) dx = \lim_{\epsilon \rightarrow 0^+} \left(\int_{a-\epsilon}^b f(x) dx \right)$$

Teste de comparação

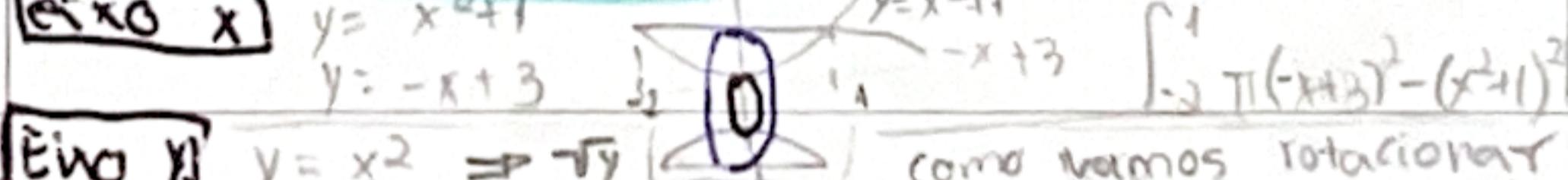
① se $\int_a^{+\infty} g(x) dx$ converge, então $\int_a^{+\infty} f(x) dx$ converge (se a maior converge, a menor converge)

② se $\int_a^{+\infty} f(x) dx$ diverge, então $\int_a^{+\infty} g(x) dx$ diverge (se a menor diverge, a maior diverge)

VOLUME de sólidos

metodo da seção trans: $V = \int_a^b A(x) dx$

metodo do anel: $\int_a^b \pi(R^2(x) - r^2(x)) dx$



Eixo X: $y = x^2 \Rightarrow T_y$, $y = 2x \Rightarrow P_x$

como vamos rotacionar em y, a função deve ser $f(y)$

como vamos rotacionar em y, a função deve ser $f(y)$

como vamos rotacionar em y, a função deve ser $f(y)$

como vamos rotacionar em y, a função deve ser $f(y)$

como vamos rotacionar em y, a função deve ser $f(y)$

como vamos rotacionar em y, a função deve ser $f(y)$

como vamos rotacionar em y, a função deve ser $f(y)$

como vamos rotacionar em y, a função deve ser $f(y)$

como vamos rotacionar em y, a função deve ser $f(y)$

como vamos rotacionar em y, a função deve ser $f(y)$

como vamos rotacionar em y, a função deve ser $f(y)$

como vamos rotacionar em y, a função deve ser $f(y)$

como vamos rotacionar em y, a função deve ser $f(y)$

como vamos rotacionar em y, a função deve ser $f(y)$

como vamos rotacionar em y, a função deve ser $f(y)$

como vamos rotacionar em y, a função deve ser $f(y)$

como vamos rotacionar em y, a função deve ser $f(y)$

como vamos rotacionar em y, a função deve ser $f(y)$

como vamos rotacionar em y, a função deve ser $f(y)$

como vamos rotacionar em y, a função deve ser $f(y)$

como vamos rotacionar em y, a função deve ser $f(y)$

como vamos rotacionar em y, a função deve ser $f(y)$

como vamos rotacionar em y, a função deve ser $f(y)$

como vamos rotacionar em y, a função deve ser $f(y)$

como vamos rotacionar em y, a função deve ser $f(y)$

como vamos rotacionar em y, a função deve ser $f(y)$

como vamos rotacionar em y, a função deve ser $f(y)$

como vamos rotacionar em y, a função deve ser $f(y)$

como vamos rotacionar em y, a função deve ser $f(y)$

como vamos rotacionar em y, a função deve ser $f(y)$

como vamos rotacionar em y, a função deve ser $f(y)$

como vamos rotacionar em y, a função deve ser $f(y)$

como vamos rotacionar em y, a função deve ser $f(y)$

como vamos rotacionar em y, a função deve ser $f(y)$

como vamos rotacionar em y, a função deve ser $f(y)$

como vamos rotacionar em y, a função deve ser $f(y)$

como vamos rotacionar em y, a função deve ser $f(y)$

como vamos rotacionar em y, a função deve ser $f(y)$

como vamos rotacionar em y, a função deve ser $f(y)$

como vamos rotacionar em y, a função deve ser $f(y)$

como vamos rotacionar em y, a função deve ser $f(y)$

como vamos rotacionar em y, a função deve ser $f(y)$

como vamos rotacionar em y, a função deve ser $f(y)$

como vamos rotacionar em y, a função deve ser $f(y)$

como vamos rotacionar em y, a função deve ser $f(y)$

como vamos rotacionar em y, a função deve ser $f(y)$

como vamos rotacionar em y, a função deve ser $f(y)$

como vamos rotacionar em y, a função deve ser $f(y)$

como vamos rotacionar em y, a função deve ser $f(y)$

como vamos rotacionar em y, a função deve ser $f(y)$

como vamos rotacionar em y, a função deve ser $f(y)$

como vamos rotacionar em y, a função deve ser $f(y)$

como vamos rotacionar em y, a função deve ser $f(y)$

como vamos rotacionar em y, a função deve ser $f(y)$

como vamos rotacionar em y, a função deve ser $f(y)$

como vamos rotacionar em y, a função deve ser $f(y)$

como vamos rotacionar em y, a função deve ser $f(y)$

como vamos rotacionar em y, a função deve ser $f(y)$

como vamos rotacionar em y, a função deve ser $f(y)$

como vamos rotacionar em y, a função deve ser $f(y)$

como vamos rotacionar em y, a função deve ser $f(y)$

como vamos rotacionar em y, a função deve ser $f(y)$

como vamos rotacionar em y, a função deve ser $f(y)$

como vamos rotacionar em y, a função deve ser $f(y)$

como vamos rotacionar em y, a função deve ser $f(y)$

como vamos rotacionar em y, a função deve ser $f(y)$

como vamos rotacionar em y, a função deve ser $f(y)$

como vamos rotacionar em y, a função deve ser $f(y)$

como vamos rotacionar em y, a função deve ser $f(y)$

como vamos rotacionar em y, a função deve ser $f(y)$

como vamos rotacionar em y, a função deve ser $f(y)$

como vamos rotacionar em y, a função deve ser $f(y)$

como vamos rotacionar em y, a função deve ser $f(y)$

como vamos rotacionar em y, a função deve ser $f(y)$

como vamos rotacionar em y, a função deve ser $f(y)$

como vamos rotacionar em y, a função deve ser $f(y)$

como vamos rotacionar em y, a função deve ser $f(y)$

como vamos rotacionar em y, a função deve ser $f(y)$

como vamos rotacionar em y, a função deve ser $f(y)$

como vamos rotacionar em y, a função deve ser $f(y)$

como vamos rotacionar em y, a função deve ser $f(y)$

como vamos rotacionar em y, a função deve ser $f(y)$

como vamos rotacionar em y, a função deve ser $f(y)$

como vamos rotacionar em y, a função deve ser $f(y)$

como vamos rotacionar em y, a função deve ser $f(y)$

como vamos rotacionar em y, a função deve ser $f(y)$

como vamos rotacionar em y, a função deve ser $f(y)$

como vamos rotacionar em y, a função deve ser $f(y)$

como vamos rotacionar em y, a função deve ser $f(y)$

como vamos rotacionar em y, a função deve ser $f(y)$

como vamos rotacionar em y, a função deve ser $f(y)$

como vamos rotacionar em y, a função deve ser $f(y)$

como vamos rotacionar em y, a função deve ser $f(y)$

como vamos rotacionar em y, a função deve ser $f(y)$

como vamos rotacionar em y, a função deve ser $f(y)$

como vamos rotacionar em y, a função deve ser $f(y)$

como vamos rotacionar em y, a função deve ser $f(y)$

como vamos rotacionar em y, a função deve ser $f(y)$

como vamos rotacionar em y, a função deve ser $f(y)$

como vamos rotacionar em y, a função deve ser $f(y)$

como vamos rotacionar em y, a função deve ser $f(y)$

como vamos rotacionar em y, a função deve ser $f(y)$

Lista 1 **3(b)** Use $u = \operatorname{tg} \frac{x}{2}$, $\int \frac{1}{\sin x + \cos x} dx$

$$= \int \frac{1}{(\frac{2u}{1+u^2}) + (\frac{1-u^2}{1+u^2})} \cdot \frac{2}{(1+u^2)} du$$

termo raiz parém

0, 1, x2 fica zero

raiz do delta não é

exata, completar quadrado

$$(u-1)^2 - 2 = -2 \int (u-1)^2 - 2 du$$

$$= -2 \int \frac{1}{u^2 - 2u - 1} du = -2 \int \frac{1}{(u-1)^2 - 2} du$$

$$w = u^{-1} \quad dw = du \quad = -2 \int \frac{1}{w^2 - 2} dw$$

$$\frac{dw+1}{(w-1)(w+1)} \quad w(A+B) = 0 \quad \sqrt{w}(A-B) = 1 \quad A+B=0 \quad A-B=\frac{1}{\sqrt{w}}$$

$$= -\frac{1}{\sqrt{w}} \int \frac{1}{w-1} dw + \frac{1}{\sqrt{w}} \int \frac{1}{w+1} dw = \frac{1}{\sqrt{w}} \ln \left| \frac{\sqrt{w}-1+\sqrt{w}}{\sqrt{w}-1-\sqrt{w}} \right|$$

$$6) a) \int_1^\infty \frac{1}{1+x^6} dx \quad \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{1+x^6} \right) = \frac{1}{\infty} = 0 \quad \text{usar a regra de l'Hopital, converge}$$

$$b) \int_0^\infty \frac{\cos^2 x}{1+x^2} dx \quad 0 \leq \cos^2 x \leq 1 \quad \int_0^\infty \frac{1}{1+x^2} dx = \pi - \frac{\pi}{4} = \frac{\pi}{4} \quad \text{converge}$$

$$c) \int_0^\infty \frac{2+x^2}{x} dx \quad \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{2+x^2}{x} \right) = \frac{2}{0} = \infty \quad \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{2+x^2}{x} \right) = \frac{2}{x} \leq 1 \quad \int_0^\infty \frac{2}{x} dx = \ln(\infty)$$

$$d) \int_0^1 \frac{e^{-x}}{x} dx \quad e^{-x} \leq 1 \quad \int_0^1 \frac{1}{x} dx = 2 \pi \quad \text{converge}$$

$$e) \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{x \sin x} dx \quad \frac{1}{x \sin x} \Rightarrow \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{x} dx + \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{\sin x} dx = \lim_{b \rightarrow 0^+} \left(\int_0^b \frac{1}{x} dx \right) + \lim_{a \rightarrow 0^+} \left(\int_a^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{\sin x} dx \right) \quad \text{diverge}$$

$$f) \int_1^\infty \frac{1}{x+c^{2x}} dx = \frac{1}{x+e^{2x}} \leq \frac{1}{e^{2x}} \quad \int_1^\infty \frac{1}{e^{2x}} dx = \frac{1}{2e^2} \quad \text{converge}$$

3) a base de um sólido S é uma região elíptica, limitada pela curva $9x^2 + 4y^2 = 36$. Os seções transversais perpendiculares ao eixo x , são triângulos isocelos retos com hipotenusa na base.

$$\text{área da base} = \frac{1}{2} \times \text{base} \times \text{altura} \quad \text{base} = \sqrt{36-9x^2} \quad \text{altura} = \sqrt{36-9x^2}$$

$$\text{intervalo} \quad y=0 \Rightarrow 9x^2 - 4y^2 = 36 \Rightarrow 9x^2 - 0 = 36 \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} 9x^2 = 36 \\ x = \pm \frac{2\sqrt{3}}{3} \end{array} \right. \quad \Rightarrow x = \pm \frac{2\sqrt{3}}{3} \quad -2 \leq y \leq 2$$

$$4) \text{determine o volume do sólido } S, \text{ cuja base é a região limitada por } y=x^2 \text{ e } y=1$$

$$\text{seção transversal perpendiculares ao eixo } y, \text{ são triângulos equilateros}$$

$$\text{área triângulo} = \frac{\sqrt{3}}{4} s^2 \quad s = \text{lado} = f(y) \cdot 2 = 2\sqrt{y} \quad \text{Equilátero} \quad A(y) = \frac{\sqrt{3}}{4} (2\sqrt{y})^2 = \frac{\sqrt{3}}{4} y^2$$

$$5) \text{determine o sólido cuja base é a região limitada por } y=x^2 \text{ e } y=1, \text{ e seções perpendiculares ao eixo } X$$

$$\text{perpendiculares ao eixo } y \quad \text{metade do lado} = \sqrt{y}, \text{ lado todo} = 2\sqrt{y}$$

$$6) \text{calcule o sólido cujo base é o semi-círculo } x^2 + y^2 = r^2, \text{ } x \geq 0, \text{ e } y \geq 0, \text{ e cuja seção transversais}$$

$$7) \text{calcule o valor de uma esfera de raio } r \text{ e altura } h.$$

$$\text{a calcia pode ser obtida pela rotação em torno do eixo } y \text{ da região de semi-círculo } x^2 + y^2 = r^2, x \geq 0 \text{ e } r-h \leq y \leq r$$

$$\text{área da seção transversal: } A(y) = \pi r^2 = \pi(r^2 - y^2)$$

$$8) \text{calcule o comprimento das curvas abaixo}$$

$$9) \text{a) } y = \frac{x^2}{2} - \frac{\ln x}{4} \quad \text{b) } y = \frac{1}{2} + \frac{1}{16x^2}$$

$$10) \text{superfície de revolução obtida pelo giro de } x^3, 0 \leq x \leq 2, \text{ em torno de } x$$

$$f'(x) = 3x^2, (f(x))^2 = 9x^4, \int_0^2 2\pi \cdot x^3 \sqrt{1+9x^4} dx$$

$$11) \text{N} \quad x=y, y=\sqrt{x}$$

$$\text{em torno } x=2$$

$$R(x) = 2 - x_1 = 2 - y^2$$

$$r(x) = 2 - x_2 = 2 - y$$

$$12) \text{casca cilíndrica}$$

$$13) \text{casca } y = e^{-x^2}, y=0, x=0, \text{ eixo } y$$

$$14) \text{casca } y = x^3, y=\sqrt[3]{x}$$

$$15) \text{casca } y = \ln(x)$$

$$16) \text{casca } y = e^{-x}$$

$$17) \text{casca } y = x^2, y=\sqrt{x}$$

$$18) \text{casca } y = x^2, y=\sqrt[3]{x}$$

$$19) \text{casca } y = \ln(x)$$

$$20) \text{casca } y = x^2, y=\sqrt{x}$$

$$21) \text{casca } y = x^2, y=\sqrt[3]{x}$$

$$22) \text{casca } y = x^2, y=\sqrt[3]{x}$$

$$23) \text{casca } y = x^2, y=\sqrt{x}$$

$$24) \text{casca } y = x^2, y=\sqrt[3]{x}$$

$$25) \text{casca } y = x^2, y=\sqrt[3]{x}$$

$$26) \text{casca } y = x^2, y=\sqrt{x}$$

$$27) \text{casca } y = x^2, y=\sqrt[3]{x}$$

$$28) \text{casca } y = x^2, y=\sqrt{x}$$

$$29) \text{casca } y = x^2, y=\sqrt[3]{x}$$

$$30) \text{casca } y = x^2, y=\sqrt{x}$$

$$31) \text{casca } y = x^2, y=\sqrt[3]{x}$$

$$32) \text{casca } y = x^2, y=\sqrt{x}$$

$$33) \text{casca } y = x^2, y=\sqrt[3]{x}$$

$$34) \text{casca } y = x^2, y=\sqrt{x}$$

$$35) \text{casca } y = x^2, y=\sqrt[3]{x}$$

$$36) \text{casca } y = x^2, y=\sqrt{x}$$

$$37) \text{casca } y = x^2, y=\sqrt[3]{x}$$

$$38) \text{casca } y = x^2, y=\sqrt{x}$$

$$39) \text{casca } y = x^2, y=\sqrt[3]{x}$$

$$40) \text{casca } y = x^2, y=\sqrt{x}$$

$$41) \text{casca } y = x^2, y=\sqrt[3]{x}$$

$$42) \text{casca } y = x^2, y=\sqrt{x}$$

$$43) \text{casca } y = x^2, y=\sqrt[3]{x}$$

$$44) \text{casca } y = x^2, y=\sqrt{x}$$

$$45) \text{casca } y = x^2, y=\sqrt[3]{x}$$

$$46) \text{casca } y = x^2, y=\sqrt{x}$$

$$47) \text{casca } y = x^2, y=\sqrt[3]{x}$$

$$48) \text{casca } y = x^2, y=\sqrt{x}$$

$$49) \text{casca } y = x^2, y=\sqrt[3]{x}$$

$$50) \text{casca } y = x^2, y=\sqrt{x}$$

$$51) \text{casca } y = x^2, y=\sqrt[3]{x}$$

$$52) \text{casca } y = x^2, y=\sqrt{x}$$

$$53) \text{casca } y = x^2, y=\sqrt[3]{x}$$

$$54) \text{casca } y = x^2, y=\sqrt{x}$$

$$55) \text{casca } y = x^2, y=\sqrt[3]{x}$$

$$56) \text{casca } y = x^2, y=\sqrt{x}$$

$$57) \text{casca } y = x^2, y=\sqrt[3]{x}$$

$$58) \text{casca } y = x^2, y=\sqrt{x}$$

$$59) \text{casca } y = x^2, y=\sqrt[3]{x}$$

$$60) \text{casca } y = x^2, y=\sqrt{x}$$

$$61) \text{casca } y = x^2, y=\sqrt[3]{x}$$

$$62) \text{casca } y = x^2, y=\sqrt{x}$$

$$63) \text{casca } y = x^2, y=\sqrt[3]{x}$$

$$64) \text{casca } y = x^2, y=\sqrt{x}$$

$$65) \text{casca } y = x^2, y=\sqrt[3]{x}$$

$$66) \text{casca } y = x^2, y=\sqrt{x}$$

$$67) \text{casca } y = x^2, y=\sqrt[3]{x}$$

$$68) \text{casca } y = x^2, y=\sqrt{x}$$

$$69) \text{casca } y = x^2, y=\sqrt[3]{x}$$

$$70) \text{casca } y = x^2, y=\sqrt{x}$$

$$71) \text{casca } y = x^2, y=\sqrt[3]{x}$$

$$72) \text{casca } y = x^2, y=\sqrt{x}$$

$$73) \text{casca } y = x^2, y=\sqrt[3]{x}$$

$$74) \text{casca } y = x^2, y=\sqrt{x}$$

$$75) \text{casca } y = x^2, y=\sqrt[3]{x}$$

$$76) \text{casca } y = x^2, y=\sqrt{x}$$

$$77) \text{casca } y = x^2, y=\sqrt[3]{x}$$

$$78) \text{casca } y = x^2, y=\sqrt{x}$$

$$79) \text{casca } y = x^2, y=\sqrt[3]{x}$$

$$80) \text{casca } y = x^2, y=\sqrt{x}$$

$$81) \text{casca } y = x^2, y=\sqrt[3]{x}$$

$$82) \text{casca } y = x^2, y=\sqrt{x}$$