L'Hopital

Se $\lim_{x\to a} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{0}{0}$ ou $\lim_{x\to a} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{\pm\infty}{\pm\infty}$ então $\lim_{x\to a} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to a} \frac{f'(x)}{g'(x)}$, a é um número, $+\infty$ ou $-\infty$.

Análise do Comportamento da Função

Ponto Crítico

$x = c$ é um ponto crítico de $f(x)$ se

1. $f'(c) = 0$ ou,
2. $f'(c)$ não existe.

Crescente/Decrescente

1. Se $f'(x) > 0$ para todo x em um intervalo $[a, b]$, então $f(x)$ é crescente em $[a, b]$.
2. Se $f'(x) < 0$ para todo x em um intervalo $[a, b]$, então $f(x)$ é decrescente em $[a, b]$.
3. Se $f'(x) = 0$ para todo x em um intervalo $[a, b]$, então $f(x)$ é constante em $[a, b]$.

Concavidade

1. Se $f''(x) > 0$ para todo x em um intervalo $[a, b]$, então $f(x)$ tem concavidade para cima em $[a, b]$.
2. Se $f''(x) < 0$ para todo x em um intervalo $[a, b]$, então $f(x)$ tem concavidade para baixo em $[a, b]$.

Pontos Máximos e Mínimos

Máximo e Mínimo Locais

1. $x = c$ é um máximo local de $f(x)$ se $f(c) \geq f(x)$ para todo valor de x em um intervalo aberto contendo c.

2. $x = c$ é um mínino local de $f(x)$ se $f(c) \leq f(x)$ para todo valor de x em um intervalo aberto contendo c.

Máximo e Mínimo Globais

1. $x = c$ é um máximo global de $f(x)$ se $f(c) \geq f(x)$ para todo valor de x no domínio.

2. $x = c$ é um mínino global de $f(x)$ se $f(c) \leq f(x)$ para todo valor de x no domínio.

Testes

Teste da 1ª Derivada

Se $x = c$ é um ponto crítico de $f(x)$ então $x = c$

1. é um máximo relativo de $f(x)$ se $f'(x) > 0$ à esquerda de $x = c$ e $f'(x) < 0$ à direita de $x = c$.

2. é um mínimo relativo de $f(x)$ se $f'(x) < 0$ à esquerda de $x = c$ e $f'(x) > 0$ à direita de $x = c$.

3. não é um máximo relativo de $f(x)$ se $f'(x)$ possui o mesmo sinal em ambos os lados de $x = c$.

Teste da 2ª Derivada

Se $x = c$ é um ponto crítico de $f(x)$ tal que $f'(c) = 0$ então $x = c$

1. é um máximo relativo de $f(x)$ se $f''(x) < 0$.

2. é um mínimo relativo de $f(x)$ se $f''(x) > 0$.

3. potencialmente é um mínimo, máximo ou nenhum deles se $f''(x) = 0$.

Pontos de Inflexão

$x = c$ é um ponto de inflexão de $f(x)$ se a concavidade de $f(x)$ muda de sinal em $x = c$.

Condições Suficientes para Inflexão

São condições suficientes para que $f(x)$ tenha um ponto de inflexão em x_0 se

1. $f(x)$ for k vezes diferenciável em um certo intervalo de x próximo à x_0 com k ímpar e $k \geq 3$ é que:

   $f^{(n)}(x_0) = 0$ para $n = 2, \ldots, k-1$ e $f^{(k)}(x_0) \neq 0$.

2. se $f''(x_0 + c)$ e $f''(x_0 - c)$ tenham sinais opostos no âmbito de x_0.

Fórmula de Taylor

$P_n(x) = f(c) + f'(c)(x-c) + \frac{f''(c)}{2!}(x-c)^2 + \frac{f'''(c)}{3!}(x-c)^3 + \cdots + \frac{f^{(n)}(c)}{n!}(x-c)^n$

Aproximação com Diferencial

$f(x+a) \approx f(x) + a \cdot f('x)$

Ex.: $\sqrt{98}$, $x = 100$, $a = -2$, $f(x) = \sqrt{x}$

$\sqrt{98} \approx \sqrt{100} + (-2) \cdot \frac{1}{2\sqrt{100}} = 10 - \frac{1}{10} = 9.9$