Equações lineares

Uma **equação linear** é uma equação que pode ser colocada na forma padrão:

$$a_1x_1 + a_2x_2 + a_2x_2 + \ldots + a_nx_n = b$$

Em que:

$x_1, x_2, x_3, \ldots, x_n$ são as incógnitas ou variáveis;
$a_1, a_2, a_3, \ldots, a_n$ são números reais chamados coeficientes; e
b é um número real chamado termo independente.

Exemplos:

1.1. A equação $2x + y = 2$ é uma equação linear com duas variáveis (x e y).

1.2. A equação $x^2 - 5x + 6 = 0$ não é uma equação linear, pois não pode ser escrita na forma padrão, já que apresenta o termo x^2.

1.3. A equação $x + xy - 7 = 0$ também não é uma equação linear, pois apresenta o termo xy, o que impede a colocação na forma padrão.

Exemplos:

1.4 A equação $2x + y = 2$ tem uma solução dada pelo par ordenado (0, 2), pois $2(0) + 2 = 2$, mas o par (1, 3) não é solução da equação, pois $2(1) + 3 = 5 \neq 2$.

1.5 A equação $x + 2y - 4z + t = 3$ tem uma solução (3, 2 ,1, 0), mas (1, 2, 4, 5) não é solução da equação linear.

- Uma equação linear $ax = b$, com uma incógnita x e coeficientes a e $b \in \mathbb{R}$, pode apresentar como solução uma das três possibilidades:

  I. Se $a \neq 0$, a equação possui solução única $x = \dfrac{b}{a}$;
  II. Se $a = 0$, mas $b \neq 0$, a equação não tem solução;
  III. Se $a = 0$ e $b = 0$, a equação apresenta infinitas soluções.

- Uma equação linear, com n incógnitas, na forma

$$0x_1 + 0x_2 + 0x_2 + \ldots + 0x_n = b,$$

é chamada de equação degenerada.

Teorema 1.1: uma equação degenerada $0x_1 + 0x_2 + 0x_2 + \ldots + 0x_n = b$, com n incógnitas e b um número real:

I. Não tem solução, se $b \neq 0$;
II. Tem infinitas soluções, se $b = 0$.

1.6. $3x+1=x+7$

$2x=6$

$x=3$

Solução Única, $S:\{3\}$

1.7 $x+2=x+5$

$x-x=5-2$

$0x=3$

$x=\frac{3}{0}\}$ SEM SOLUÇÃO

$S: \phi$

1.8 $2x+4=2x+4$

$2x-2x=4-4$

$0x=0$

$x=\frac{0}{0}\}$ INDETERMINAÇÃO INFINITAS SOLUÇÕES

$S: \mathbb{R}$.

1.9 $2x-3y+z=5$

Isolando x, y ou z, neste caso z,

$z=-2x+3y+5$

Tome $x=\lambda_1$ e $y=\lambda_2$

$z=-2\lambda_1+3\lambda_2+5$

$S:\{(x,y,z)=(\lambda_1,\lambda_2,-2\lambda_1+3\lambda_2+5)\}$; $\lambda_1,\lambda_2\in\mathbb{R}$

ou seja, infinitas soluções em função de λ_1, λ_2 aleatórios.

1.10) $4+2x-y+2z=3+2x-y+2z+1$

$2x-2x+y-y-2z+2z=4-4$

$0x+0y+0z=0$

infinitas soluções, pois $\forall(x,y,z)\in\mathbb{R}^3$ segue $0=0$.

$S=\mathbb{R}^3$ ou $S:\{(x,y,z)=(\lambda_1,\lambda_2,\lambda_3)\}$ $\lambda_i\in\mathbb{R}$.

Sistemas de equações lineares

Um **sistema de *m* equações lineares e *n* incógnitas** é um conjunto finito de equações lineares representado na forma padrão:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \vdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots + a_{mn}x_n = b_m \end{cases}$$

Em que:

$x_1, x_2, x_3, \ldots, x_n$ são incógnitas ou variáveis;

a_{ij} com $i \in \{1, 2, \ldots, m\}$ e $j \in \{1, 2, \ldots, n\}$ são os coeficientes das incógnitas; e

$b_1, b_2, b_3, \ldots, b_m$ são os termos independentes.

Se você observar bem, verá que podemos representar o sistema acima por meio de matrizes. Ou seja:

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{bmatrix}$$

1. Matriz de coeficientes: matriz formada pelos coeficientes das incógnitas;

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix}$$

2. Matriz (vetor) das incógnitas: matriz coluna formada pelas incógnitas do sistema;

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}$$

3. Matriz (vetor) dos termos independentes: matriz coluna formada pelos termos independentes do sistema;

$$\begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{bmatrix}$$

4. Matriz aumentada: formada pelos coeficientes das incógnitas e pelos termos independentes.

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} & b_2 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} & b_n \end{bmatrix}$$

Se chamarmos:

A = Matriz dos coeficientes;
X = Vetor das incógnitas;
B = Vetor de termos independentes.

Um sistema de equações lineares pode ser representado na notação matricial AX = B.

Exemplos

1.11. Dado o sistema:

$$\begin{cases} 2x_1 + 4x_2 - 6x_3 = 10 \\ 4x_1 + 2x_2 + 2x_3 = 16 \\ 2x_1 + 8x_2 - 4x_3 = 24 \end{cases}$$

Temos:

$\begin{bmatrix} 2 & 4 & -6 \\ 4 & 2 & 2 \\ 2 & 8 & -4 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 10 \\ 16 \\ 24 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 2 & 4 & -6 & 10 \\ 4 & 2 & 2 & 16 \\ 2 & 8 & -4 & 24 \end{bmatrix}$
Matriz de coeficientes	Matriz (vetor) das incógnitas	Matriz (vetor) dos termos independentes	Matriz aumentada

Representação matricial:

$$\begin{bmatrix} 2 & 4 & -6 \\ 4 & 2 & 2 \\ 2 & 8 & -4 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 10 \\ 16 \\ 24 \end{bmatrix}$$

1.12. Um sistema e sua representação matricial:

$$\begin{cases} x_1 + 4x_2 - 3x_3 + 2x_4 = 5 \\ \qquad\qquad\quad x_3 - 4x_4 = 2 \end{cases} \Rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 4 & -3 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & -4 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 \\ 2 \end{bmatrix}$$

1.13. Um sistema homogêneo e sua representação matricial:

$$\begin{cases} 3x_1 - 2x_2 = 0 \\ 6x_1 - 4x_2 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{bmatrix} 3 & -2 \\ 6 & -4 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Todo sistema linear homogêneo tem pelo menos uma solução denominada solução trivial. Assim, um sistema homogêneo com m equações lineares e n incógnitas tem, no mínimo, como solução a *n-upla* (0, 0, …,0).

Lembre-se de que um sistema de equações lineares pode ser:

I. sistema possível ou compatível e determinado: admite-se solução única;
II. sistema possível ou compatível e indeterminado: admitem-se infinitas soluções;
III. sistema impossível ou incompatível: se não tem solução.

Observação 1.1: um sistema homogêneo é sempre possível, pois admite pelo menos a solução trivial.

REGRA DE CRAMER

→ Serve somente para sistemas de eq. lineares "quadrados", ou seja, com mesma qt. de equações e variáveis.

SISTEMAS 2x2

$$\begin{cases} a_{11}X + a_{12}Y = b_1 \\ a_{21}X + a_{22}Y = b_2 \end{cases}$$

$$D = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} \qquad Dx = \begin{vmatrix} b_1 & a_{12} \\ b_2 & a_{22} \end{vmatrix}$$

→ Trocar coluna dos "x" pelos resultados

$$Dy = \begin{vmatrix} a_{11} & b_1 \\ a_{21} & b_2 \end{vmatrix}$$

$$X = \frac{Dx}{D} \quad e \quad Y = \frac{Dy}{D}$$

i) se $D \neq 0$; sistema possível e determinado, SDP, solução única.

ii) se $D = 0$ e $Dx = 0 = Dy$, sistema possível e indeterminado (SPI), infinitas soluções.

iii) se $D = 0$ e ($Dx \neq 0$ ou $Dy \neq 0$), sistema impossível, sem solução.

CRAMER 3X3

$$\begin{cases} a_{11}X + a_{12}Y + a_{13}Z = b_1 \\ a_{21}X + a_{22}Y + a_{23}Z = b_2 \\ a_{31}X + a_{32}Y + a_{33}Z = b_3 \end{cases}$$

$$D = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} \qquad Dx = \begin{vmatrix} b_1 & a_{12} & a_{13} \\ b_2 & a_{22} & a_{23} \\ b_3 & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$$

$$Dy = \begin{vmatrix} a_{11} & b_1 & a_{13} \\ a_{21} & b_2 & a_{23} \\ a_{31} & b_3 & a_{33} \end{vmatrix} \qquad Dz = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & b_2 \\ a_{31} & a_{32} & b_3 \end{vmatrix}$$

$$X = \frac{Dx}{D} \qquad Y = \frac{Dy}{D} \qquad Z = \frac{Dz}{D}$$

segue os mesmos padrões de soluções do 2x2.

Pode ser feitos com sistemas, (nXn) com n>3, segue o mesmo padrão.

Teorema 1.2: se um sistema na forma escalonada apresentar a equação degenerada $0x_1 + 0x_2 + 0x_2 + \ldots + 0x_n = b$, então:

I. Se $b = 0$, essa equação pode ser omitida do sistema sem modificar o conjunto solução;

II. Se $b \neq 0$, o sistema não tem solução.

Um sistema de equações lineares está na **forma triangular** se o número de equações é igual ao número de incógnitas e se tem a seguinte forma:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n = b_1 \\ \qquad\quad a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \qquad\qquad\qquad\qquad \vdots \\ \qquad\qquad\qquad\quad a_{mn}x_n = b_m \end{cases}$$

Em que: $a_{ij} \neq 0, \forall\ i = j$

Você pode observar que a matriz dos coeficientes é uma matriz triangular superior.

Teorema 1.3: um sistema na forma escalonada pode apresentar:

I. solução única se o número de variáveis for igual ao número de equações;

II. infinitas soluções se o número de equações for menor que o número de variáveis. Nesse caso, teremos variáveis livres.

1.17

$$\begin{cases} 2x+4y-z=11 \\ 5y+z=2 \\ 3z=-9 \end{cases}$$

O sistema tem forma triangular

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 4 & -1 & 11 \\ 0 & 5 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 3 & -9 \end{array}\right)$$

Portanto basta fazer retro-substituições

$3z=-9$

$z=-9/3$

$\boxed{z=-3}$

$5y+z=2$

$5y+(-3)=2$

$5y=5$

$y=1$

$2x+4y-z=11$

$2x+4(1)-(-3)=11$

$2x+4+3=11$

$2x+7=11$

$2x=4$

$x=2$

$S:\{(2,1,-3)\}$

S.P.D.

Poderíamos usar o método de GAUSS-JORDAN, que consiste escalonar a matriz Aumentada até a matriz A ficar escalonada.

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 4 & -1 & 11 \\ 0 & 5 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 3 & -9 \end{array}\right) \xrightarrow[L_2 = L_2 - \frac{1}{3} L_3]{L_1 = L_1 + \frac{1}{3} L_3}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 4 & 0 & 8 \\ 0 & 5 & 0 & 5 \\ 0 & 0 & 3 & -9 \end{array}\right) \xrightarrow[L_2 = \frac{1}{5} L_1 \quad L_3 = \frac{1}{3} L_3]{L_1 = \frac{1}{2} L_1}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 0 & 4 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -3 \end{array}\right) \xrightarrow{L_1 = L_1 - 2L_2}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -3 \end{array}\right) \Rightarrow \begin{array}{l} x = 2 \\ y = 1 \\ z = -3 \end{array}$$

$$S: \{(2, 1, -3)\}$$

1.18)

$$\begin{cases} x_1 + 4x_2 - 3x_3 + 2x_4 = 5 \\ x_3 - 4x_4 = 2 \end{cases}$$

$x_3 - 4x_4 = 2$

$\boxed{x_3} = 2 + 4x_4$

$x_1 + 4x_2 - 3\boxed{x_3} + 2x_4 = 5$

$x_1 + 4x_2 - 3(2 + 4x_4) + 2x_4 = 5$

$x_1 + 4x_2 - 6 - 12x_4 + 2x_4 = 5$

$x_1 + 4x_2 - 10x_4 = 11$

$x_1 = -4x_2 + 10x_4 + 11$

$x_2 = \lambda_1$ e $x_4 = \lambda_2$

$$\begin{cases} x_1 = -4\lambda_1 + 10\lambda_2 + 11 \\ x_2 = \lambda_1 \\ x_3 = 2 + 4\lambda_2 \\ x_4 = \lambda_2 \end{cases}$$

$S_G : \{(x_1, x_2, x_3, x_4) = (-4\lambda_1 + 10\lambda_2 + 11,\ \lambda_1,\ 2 + 4\lambda_2,\ \lambda_2)$
$\forall \lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}$.

se $\lambda_1, \lambda_2 = 0$, $S_P = (11, 0, 2, 0)$

se $\lambda_1 = 1$ e $\lambda_2 = 2$; $S_P = (27, 1, 4, 2)$

$\vdots$

S.P.I.

OU, POR GAUSS-JORDAN.

$$\begin{cases} x_1 + 4x_2 - 3x_3 + 2x_4 = 5 \\ x_3 - 4x_4 = 2 \end{cases}$$

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 4 & -3 & 2 & 5 \\ 0 & 0 & 1 & -4 & 2 \end{array}\right) \xrightarrow{L_1 = L_1 + 3L_2}$$

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 4 & 0 & -10 & 11 \\ 0 & 0 & 1 & -4 & 2 \end{array}\right)$$

x_2 e x_4 livres. $x_2 = \lambda_1$ e $x_4 = \lambda_2$

$$x_3 - 4x_4 = 2$$
$$x_3 = 2 + 4x_4$$
$$x_3 = 2 + 4\lambda_2$$

$$x_1 + 4x_2 - 10x_4 = 11$$
$$x_1 = 11 - 4x_2 + 10x_4$$
$$x_1 = 11 - 4\lambda_1 + 10\lambda_2$$

$$S = \{(11 - 4\lambda_1 + 10\lambda_2,\ \lambda_1,\ 2 + 4\lambda_2,\ \lambda_2)\}.$$

- Sistemas equivalentes

Dois sistemas de equações lineares são ditos **equivalentes** quando as equações envolvem as mesmas variáveis e admitem a mesma solução, ou seja, toda solução do primeiro é também solução do segundo e vice-versa.

1.19. Os sistemas S1 e S2 abaixo são equivalentes, já que possuem a mesma solução (10, 2)

$$S1 = \begin{cases} 3x_1 + 6x_2 = 42 \\ 2x_1 - 4x_2 = 12 \end{cases} \quad \text{e} \quad S2 = \begin{cases} x_1 + 2x_2 = 14 \\ x_1 - 2x_2 = 6 \end{cases}$$

Pois:

$$S1 = \begin{cases} 3 \cdot 10 + 6 \cdot 2 = 30 + 12 = 42 \\ 2 \cdot 10 - 4 \cdot 2 = 20 - 8 = 12 \end{cases} \quad \text{e} \quad S2 = \begin{cases} 10 + 2 \cdot 2 = 10 + 4 = 14 \\ 10 - 2 \cdot 2 = 10 - 4 = 6 \end{cases}$$

1.20. Considere os sistemas abaixo:

$$S3 = \begin{cases} 3x_1 + 2x_2 - x_3 = 0 \\ \qquad\quad x_2 \qquad\; = 4 \\ \qquad\qquad 2x_3 = 4 \end{cases} \quad \text{e} \quad S4 = \begin{cases} 3x_1 + 2x_2 - x_3 = 0 \\ -3x_1 - x_2 + x_3 = 4 \\ 3x_1 + 2x_2 + x_3 = 4 \end{cases}$$

Observe que S3 está na forma triangular, se partirmos da última equação teremos o valor da variável $x_3 = 2$. Da segunda equação temos $x_2 = 4$, substituindo na primeira equação, obtemos:

$$3x_1 + 2 \cdot 4 - 2 = 0$$

$3x_1 = -6 \Rightarrow x_1 = -2$, solução (–2, 4, 2)

Um sistema de m equações lineares E_i, $i = 1, \ldots, m$ se transforma em um sistema equivalente quando se efetuam as seguintes operações elementares:

I. Permutação de duas equações: $E_i \leftrightarrow E_j$, $i = 1, \ldots, m$ e $j = 1, \ldots, m$;

II. Multiplicação de uma equação por um número real k diferente de zero: $E_i = kE_i$, $i = 1, \ldots, m$;

III. Substituição de uma equação por sua soma com outra previamente multiplicada por um número real k diferente de zero: $E_i = E_i + kE_j$, $i = 1, \ldots, m$ e $j = 1, \ldots, m$.

1.11) Resolver pelo método de Gauss

Escrever A como triangular

$$\begin{cases} 2x + 4y - 6z = 10 \\ 4x + 2y + 2z = 16 \\ 2x + 8y - 4z = 24 \end{cases}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 4 & -6 & 10 \\ 4 & 2 & 2 & 16 \\ 2 & 8 & -4 & 24 \end{array}\right) \xrightarrow[L_3 = L_3 - L_1]{L_2 = L_2 - 2L_1}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 4 & -6 & 10 \\ 0 & -6 & 14 & -4 \\ 0 & 4 & +2 & 14 \end{array}\right) \xrightarrow{L_3 = 6L_3 + 4L_2}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 4 & -6 & 10 \\ 0 & -6 & 14 & -4 \\ 0 & 0 & 68 & 68 \end{array}\right)$$

$$68x_3 = 68 \qquad x_3 = 1$$

$$-6x_2 + 14x_3 = -4$$
$$-6x_2 + 14(1) = -4$$
$$-6x_2 = -18$$
$$x_2 = \frac{-18}{-6}$$
$$x_2 = +3$$

$$2x_1 + 4x_2 - 6x_3 = 10$$
$$2x_1 + 4(3) - 6(1) = 10$$
$$2x_1 + 12 - 6 = 10$$
$$2x_1 = 4$$
$$x_1 = 2$$

$$S = \{(2, 3, 1)\}$$

AGORA, POR GAUSS-JORDAN

$$\begin{cases} 2x + 4y - 6z = 10 \\ 4x + 2y + 2z = 16 \\ 2x + 8y - 4z = 24 \end{cases} \xrightarrow{\text{pelo anterior}} \ldots$$

$$\begin{pmatrix} 2 & 4 & -6 & 10 \\ 0 & -6 & 14 & -4 \\ 0 & 0 & 68 & 68 \end{pmatrix} \xrightarrow[L_3 = \frac{1}{68}L_3]{L_1 = \frac{1}{2}L_1 \quad L_2 = -\frac{1}{6}L_2} \begin{pmatrix} 1 & 2 & -3 & | & 5 \\ 0 & 1 & -\frac{7}{3} & | & +\frac{2}{3} \\ 0 & 0 & 1 & | & 1 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow[L_2 = L_2 + \frac{7}{3}L_3]{L_1 = L_1 + 3L_3} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 8 \\ 0 & 1 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{L_1 = L_1 - 2L_2}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & | & 2 \\ 0 & 1 & 0 & | & 3 \\ 0 & 0 & 1 & | & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{cases} x = 2 \\ y = 3 \\ z = 1 \end{cases}$$

$$S = \{(2, 3, 1)\}$$

1.25)

$$\begin{cases} x_1+2x_2-5x_3+3x_4+6x_5=14 \\ -2x_3+7x_5=12 \\ 2x_1+4x_2-5x_3+6x_4-5x_5=-1 \end{cases}$$

$$\left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & 2 & -5 & 3 & 6 & 14 \\ 0 & 0 & -2 & 0 & 7 & 12 \\ 2 & 4 & -5 & 6 & -5 & -1 \end{array}\right) \xrightarrow{L_3=L_3-2L_1}$$

$$\left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & 2 & -5 & 3 & 6 & 14 \\ 0 & 0 & -2 & 0 & 7 & 12 \\ 0 & 0 & 5 & 0 & -17 & -29 \end{array}\right) \xrightarrow{L_2=-\frac{1}{2}L_2}$$

$$\left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & 2 & -5 & 3 & 6 & 14 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -\frac{7}{2} & -6 \\ 0 & 0 & 5 & 0 & -17 & -29 \end{array}\right) \xrightarrow{L_3=L_3-5L_2}$$

$$\left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & 2 & -5 & 3 & 6 & 14 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -\frac{7}{2} & -6 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{2} & 1 \end{array}\right) \xrightarrow{L_3=2L_3}$$

$$\left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & 2 & -5 & 3 & 6 & 14 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -\frac{7}{2} & -6 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 2 \end{array}\right) \xrightarrow[L_2=L_2+\frac{7}{2}L_3]{L_1=L_1-6L_3}$$

$$\left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & 2 & -5 & 3 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 2 \end{array}\right) \xrightarrow{L_1=L_1+5L_2}$$

$$\left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & 2 & 0 & 3 & 0 & 7 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 2 \end{array}\right)$$

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 + 3x_4 = 7 \\ x_3 = 1 \\ x_5 = 2 \end{cases}$$

$x_3 = 1$, $x_5 = 2$, $x_2 = \lambda_1$ e $x_4 = \lambda_2$

$x_1 + 2x_2 + 3x_4 = 7$

$x_1 = 7 - 2\lambda_1 - 3\lambda_2$

$$S = \{(7 - 2\lambda_1 - 3\lambda_2, \lambda_1, 1, \lambda_2, 2)\}$$

S.P.I.

26)
$$\begin{cases} -x_2 - x_3 + x_4 = 0 \\ x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 6 \\ 2x_1 + 4x_2 + x_3 - 2x_4 = -1 \\ 4x_1 - x_2 - 3x_3 + 3x_4 = 6 \end{cases}$$

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 0 & -1 & -1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 6 \\ 2 & 4 & 1 & -2 & -1 \\ 4 & -1 & -3 & 3 & 6 \end{array}\right) \rightarrow$$

$L_1 \leftrightarrow L_2$
$L_3 = L_3 - 2L_2$
$L_4 = L_4 - 4L_2$
$L_1 = -L_1$

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 6 \\ 0 & 1 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 2 & -1 & -4 & -13 \\ 0 & -5 & -7 & -1 & -18 \end{pmatrix} \xrightarrow[L_4 = L_4 + 5L_2]{L_3 = L_3 - 2L_2}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 6 \\ 0 & 1 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -3 & -2 & -13 \\ 0 & 0 & -2 & -6 & -18 \end{pmatrix} \xrightarrow[L_3 = -\frac{1}{3}L_3]{L_4 = 3L_4 - 2L_3} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 6 \\ 0 & 1 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \frac{2}{3} & \frac{13}{3} \\ 0 & 0 & 0 & -14 & -28 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow{L_4 = -\frac{1}{14}L_4} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 & 6 \\ 0 & 1 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \frac{2}{3} & \frac{13}{3} \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 2 \end{array}\right) \xrightarrow[\substack{L_2 = L_2 + L_4 \\ L_3 = L_3 - \frac{2}{3}L_4}]{L_1 = L_1 - L_4}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 2 \end{pmatrix} \xrightarrow[L_2 = L_2 - L_3]{L_1 = L_1 - L_3}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 2 \end{pmatrix} \xrightarrow{L_1 = L_1 - L_2}$$

$$
\begin{array}{cccc}
\left(\begin{array}{cccc|c}
1 & 0 & 0 & 0 & 2 \\
0 & 1 & 0 & 0 & -1 \\
0 & 0 & 1 & 0 & 3 \\
0 & 0 & 0 & 1 & 2
\end{array}\right) \\
\begin{array}{cccc}
x_1 & x_2 & x_3 & x_4
\end{array}
\end{array}
$$

$$S = \{(2, -1, 3, 2)\}$$

S.P.D.

27) $\begin{cases} x_1 + 2x_2 - 3x_3 = 0 \\ 2x_1 + 4x_2 - 2x_3 = 2 \\ 3x_1 + 6x_2 - 4x_3 = 3 \end{cases}$

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 0 \\ 2 & 4 & -2 & 2 \\ 3 & 6 & -4 & 3 \end{pmatrix} \xrightarrow[L_3 = L_3 - 3L_1]{L_2 = L_2 - 2L_1}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & -8 & 2 \\ 0 & 0 & -13 & 3 \end{pmatrix} \xrightarrow[L_2 = -\frac{1}{2}L_2]{L_3 = 8L_3 - 13L_2}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 4 & -1 \\ \boxed{0} & \boxed{0} & \boxed{0} & \boxed{-2} \end{pmatrix} \quad S.I.$$

pois segue $0x_1 + 0x_2 + 0x_3 = -2$

$$\boxed{0 = -2}$$

IMPOSSÍVEL

Não há solução

$$S = \emptyset$$

28)

$$\begin{cases} 2x-5y+3z=1 \\ 3y-z+x=2 \\ -3=-11y+5z \\ -5+4x=-y-z \end{cases}$$

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 2 & -5 & 3 & 1 \\ 1 & 3 & -1 & 2 \\ 0 & 11 & -5 & 3 \\ 4 & 1 & 1 & 5 \end{array}\right] \begin{array}{l} L_1 \leftrightarrow L_2 \\ \longleftrightarrow \\ L_1=L_1-2L_2 \\ L_4=L_4-4L_2 \end{array}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 3 & -1 & 2 \\ 0 & -11 & 5 & -3 \\ 0 & +11 & -5 & 3 \\ 0 & -11 & 5 & -3 \end{bmatrix} \begin{array}{l} L_3=L_3+L_2 \\ \longrightarrow \\ L_4=L_4-L_2 \\ L_2=-L_2 \end{array}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 3 & -1 & 2 \\ 0 & +11 & -5 & 3 \\ \cancel{0} & \cancel{0} & \cancel{0} & \cancel{0} \\ \cancel{0} & \cancel{0} & \cancel{0} & \cancel{0} \end{bmatrix} \longrightarrow \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 3 & -1 & 2 \\ 0 & 11 & -5 & 3 \end{array}\right] \begin{array}{l} L_1=11L_1-3L_2 \\ \longrightarrow \\ L_2=\frac{1}{11}L_2 \end{array}$$

$$\begin{array}{cccc} & & & \\ \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 4 & 13 \\ 0 & 1 & -5 & 3 \end{array}\right] \\ x \quad y \quad z \mid R \end{array}$$

$z=\lambda$

$$\begin{cases} 1y-5z=3 \\ y=3-5\lambda \end{cases} \quad \begin{cases} x+4z=13 \\ x=13-4\lambda \end{cases}$$

$$S=\{(x,y,z)=(13-4\lambda,\ 3-5\lambda,\ \lambda)\} \quad \forall \lambda \in \mathbb{R}.$$

2) Estude o S.L. em função de "K"

$$\begin{cases} x+y-z=1 \\ 2x+3y+Kz=3 \\ x+Ky+3z=2 \end{cases} \qquad \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & 1 \\ 2 & 3 & K & 3 \\ 1 & K & 3 & 2 \end{pmatrix} \xrightarrow[L_3=L_3-L_1]{L_2=L_2-2L_1}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & (K+2) & 1 \\ 0 & (K-1) & 4 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow[(L_3=L_3+(-K+1)L_2)]{L_3=L_3-(K-1)L_2}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & (K+2) & 1 \\ 0 & 0 & 4+(-K+1)(K+2) & \cancel{1}-K+\cancel{1} \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & K+2 & 1 \\ 0 & 0 & -K^2-K+6 & -K+2 \end{pmatrix}$$

$$(-K^2-K+6)z=-K+2$$

$$z=\frac{-K+2}{-K^2-K+6}$$

$$z=\frac{-K+2}{-(K+3)(K-2)}$$

$$z=\frac{(K-2)}{(K+3)(K-2)}$$

Se $K=+2$ então $z=\frac{0}{0}$ } SPI

se $K=-3$
$z=\frac{-5}{0}$ } SI

Se $K\neq-3$ e $K\neq2$
SPD.

SISTEMAS LINEARES HOMOGENEOS.

São aqueles que todas as equações lineares São iguais a zelo.

São semple possíveis, SPD ou SPI.

Tem no mínimo a solução trivial $\vec{0}$.

---

31) $\begin{cases} x+2y-3z+w=0 \\ x-3y+z-2w=0 \\ 2x-y-2z+5w=0 \end{cases}$ ⇒ Não plecisa colocar os lesultados zelos

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & -3 & 1 \\ 1 & -3 & 1 & -2 \\ 2 & -1 & -2 & 5 \end{pmatrix} \xrightarrow[L_3=L_3-2L_1]{L_2=L_2-L_1}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & -3 & 1 \\ 0 & -5 & 4 & -3 \\ 0 & -5 & 1 & 3 \end{pmatrix} \xrightarrow[L_2=-\frac{1}{5}L_2]{L_3=L_3-L_2}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & -3 & 1 \\ 0 & 1 & -\frac{4}{5} & \frac{3}{5} \\ 0 & 0 & -3 & 6 \end{pmatrix} \xrightarrow{L_3=-\frac{1}{3}L_3}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & -3 & 1 \\ 0 & 1 & -\frac{4}{5} & \frac{3}{5} \\ 0 & 0 & 1 & -2 \end{pmatrix} \xrightarrow[L_1=L_1+3L_3]{L_2=L_2+\frac{4}{5}L_3}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & -5 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & -2 \end{pmatrix} \xrightarrow{L_1 = L_1 - 2L_2}$$

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 0 & -3 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -2 & 0 \end{array}\right)$$

$w = \lambda$

$z - 2w = 0$
$z = 2\lambda$

$y - w = 0$
$y = -\lambda$

$x - 3w = 0$
$x = 3\lambda$

$S : \{(x, y, z, w) = (3\lambda, -\lambda, 2\lambda, \lambda)\} \quad \forall \lambda \in \mathbb{R}$

ou

$S : \{(x, y, z, w) = \lambda(3, -1, 2, 1)\} \quad \forall \lambda \in \mathbb{R}$.

· Matriz inversa e sistemas lineares

Só existe em matrizes quadradas e se o determinante da matriz for não-nulo.

Propriedades da matriz inversa

Se A é uma matriz quadrada invertível, as seguintes propriedades são satisfeitas:

1. Sua matriz inversa é única: se B e C são ambas matrizes inversas da matriz A, então B = C.
2. Sua matriz inversa A^{-1} é também invertível, e a inversa dessa inversa $(A^{-1})^{-1}$ é igual à própria matriz A: $(A^{-1})^{-1} = A$.
3. A inversa de sua transposta é também invertível e é igual à transporta da inversa: $(A^T)^{-1} = (A^{-1})^T$.
4. O produto de sua inversa por sua transposta é também invertível: existe $(A^{-1}A^T)^{-1}$.
5. A inversa de seu produto por um número (diferente de zero) é igual ao produto do inverso desse número pela sua matriz inversa: $(nA)^{-1} = n^{-1}A^{-1}$.
6. Seu determinante é diferente de zero: $\det A \neq 0$.
7. A matriz inversa do produto de matrizes invertíveis é igual ao produto das inversas dessas matrizes com a ordem trocada. $(A_1 \cdot A_2 \cdot A_3 \cdot \ldots \cdot A_n)^{-1} = A_n^{-1} \cdot \ldots \cdot A_3^{-1} \cdot A_2^{-1} \cdot A_1^{-1}$.
8. A matriz inversa de uma matriz identidade de ordem n, (I_n), é a própria matriz identidade de ordem n: $(I_n)^{-1} = I_n$.

+

1.36. Encontre a inversa da matriz dada:

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

Processo:

$$\left[A \mid I_3\right] = \left[\begin{array}{ccc|ccc} 2 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \rightarrow L_1 \leftrightarrow L_2$$

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc} 2 & 0 & -1 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \rightarrow L_2 = L_2 + (-2)L_1$$

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 1 & -2 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \rightarrow L_3 = L_3 + (-1)L_2$$

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 1 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & -1 & 2 & 1 \end{array}\right] \rightarrow L_3 = (-1)L_3$$

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 1 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & -2 & -1 \end{array}\right] \rightarrow \begin{array}{l} L_1 = L_1 + L_3 \\ L_2 = L_2 + (-2)L_3 \end{array}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 & -1 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & -2 & -1 \end{bmatrix} = \left[I_3 \mid A^{-1} \right]$$

Como a matriz dos coeficientes foi transformada na matriz identidade, a matriz ao lado é a inversa A^{-1} da matriz A. Ou seja:

$$A^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & -1 & -1 \\ -1 & 2 & 2 \\ 1 & -2 & -1 \end{bmatrix}$$

Veja que, se A^{-1} é inversa de A, então o produto $A \cdot A^{-1} = A^{-1} \cdot A = I$, de fato:

Resolução de sistemas e matriz inversa

Dado um sistema de equações lineares com *n* equações e *n* variáveis, na forma matricial, cuja matriz dos coeficientes *A* é invertível, o método consiste em resolver a equação matricial $AX = B$, utilizando a inversa A^{-1} da matriz A dos coeficientes.

Ou seja:

Se $AX = B$, multiplicando ambos os lados da igualdade pela matriz A^{-1} inversa de A:

$$\begin{aligned} A^{-1}AX &= A^{-1}B \\ I_n X &= A^{-1}B \\ X &= A^{-1}B \end{aligned}$$

Ou seja, a solução do sistema, será obtida pelo produto da matriz A^{-1} inversa de A, pelo vetor de termos independentes B.

Exemplos

1.39. Resolva o seguinte sistema pelo método da matriz inversa:

$$S = \begin{cases} 2x_1 + x_2 = 8 \\ x_1 - x_3 = 4 \\ x_2 + x_3 = 1 \end{cases}$$

Escrevendo na forma matricial

$$\begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} . \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 8 \\ 4 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Para resolver o sistema pelo método da matriz inversa, precisamos encontrar a matriz inversa da matriz dos coeficientes.Mas observe que:

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

é a matriz cuja matriz inversa foi determinada no exemplo 1.36 anterior, ou seja:

$$A^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & -1 & -1 \\ -1 & 2 & 2 \\ 1 & -2 & -1 \end{bmatrix}$$

Assim, a solução do sistema é dada por:

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & -1 & -1 \\ -1 & 2 & 2 \\ 1 & -2 & -1 \end{bmatrix} . \begin{bmatrix} 8 \\ 4 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 \\ 2 \\ -1 \end{bmatrix}$$

Logo: $x_1 = 3$, $x_2 = 2$ e $x_3 = -1$.