SEÇÃO 3 – Propriedades de autovalores e autovetores

VER DEMONSTRAÇÕES NA SECÇÃO 3 DO MATERIAL COMPLETO.

Propriedade 1: seja v um autovetor do operador linear T associado ao autovalor λ. Então, o autovetor $\alpha \cdot v$ ($\alpha \neq 0$) é também um autovetor de T associado ao autovalor λ.

Em outras palavras, se v é um autovetor associado a um autovalor λ, então qualquer múltiplo escalar de v também é um autovetor associado ao mesmo autovalor λ. Assim, todo operador linear que possui pelo menos um autovetor tem infinitos autovetores associados ao mesmo autovalor.

Propriedade 2: sejam $T : V \to V$ e o conjunto $T_\lambda = \{v \in V;\ T(v) = \lambda \cdot v\}$. T_λ é um subespaço vetorial.

Em outras palavras, o conjunto de todos os autovetores v associados ao mesmo autovalor λ é um subespaço vetorial de V.

4.7. Seja $T : R^2 \to R^2$ em que $T(x, y) = (2x + 2y, y)$.

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$A - I\lambda = \begin{pmatrix} 2-\lambda & 2 \\ 0 & 1-\lambda \end{pmatrix}$$

$$\det(A - I\lambda) = \begin{vmatrix} 2-\lambda & 2 \\ 0 & 1-\lambda \end{vmatrix} = (2-\lambda)(1-\lambda) = 0$$

$$\lambda_1 = 1 \wedge \lambda_2 = 2$$

Se $\lambda_1 = 1$

$(A - I\lambda_1)V_1 = 0$

$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{matrix} x + 2y = 0 \\ x = -2y \end{matrix}$

$V_1 = (-2y, y) = y(-2, 1)$

$V_1 = (-2, 1)$ é autovet. As. ao autov. $\lambda_1 = 1$

Pela P2, $T_{\lambda_1} = \{v \in \mathbb{R}^2 / x = -2y\}$ é subespaço vetorial de T.
($x = -2y$ são retas que passam por $P(0,0)$).

Se $\lambda_2 = 2$ $\quad A - I\lambda = \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$

$(A - I\lambda_2)V_2 = 0$

$\begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \rightarrow x \in \mathbb{R} \wedge y = 0$

$V_2 = (x, 0) = x(1, 0)$

$V_2 = (1, 0)$ é autovetor assoc. ao autovalor $\lambda_2 = 2$.

$T_{\lambda_2} = \{v \in \mathbb{R}^2 / y = 0\}$ e SEV de T pela P2 ($y = 0$ é o $0x$).

4.8. Tome o exemplo 4.4 da Seção 2:

seja $T : R^3 \to R^3$, tal que $T(x, y, z) = (x, 2x - 2y, -3x + y + 2z)$.

Este operador linear tem os seguintes autovetores e autovalores:

Autovalor	**Autovetor**
$\lambda_1 = -2$	$v_1 = (0, -4, 1)$
$\lambda_2 = 1$	$v_2 = \left(1, \frac{2}{3}, \frac{7}{3}\right)$
$\lambda_3 = 2$	$v_3 = (0, 0, 1)$

Pela propriedade 2, temos os seguintes subespaços vetoriais:

- $T_{\lambda_1} = \{v \in R^2; x = 0 \text{ e } z = -4y\}$, que, geometricamente, é uma reta no espaço que passa pela origem e pertence ao plano yOz;
- $T_{\lambda_2} = \{v \in R^2; y = \frac{2}{3}x \text{ e } z = \frac{7}{3}x\}$, que geometricamente é uma reta no espaço que passa pela origem; e
- $T_{\lambda_2} = \{v \in R^2; x = y = 0\}$, que geometricamente é o eixo z.

6. Seja o operador $T : R^3 \to R^3$, em que:

$$T(x, y, z) = (x - y, 2x + 3y + 2z, x + y + 2z).$$

Encontre os subespaços vetoriais T_λ para cada autovalor e expresse geometricamente cada um dos subespaços encontrados.

$$A=\begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 2 & 3 & 2 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix} ; \quad A-I_3\lambda=\begin{pmatrix} 1-\lambda & -1 & 0 \\ 2 & 3-\lambda & 2 \\ 1 & 1 & 2-\lambda \end{pmatrix}$$

$$\det(A-I\lambda)=\begin{vmatrix} 1-\lambda & -1 & 0 \\ 2 & 3-\lambda & 2 \\ 1 & 1 & 2-\lambda \end{vmatrix} = -\begin{vmatrix} 1 & 1 & 2-\lambda \\ 2 & 3-\lambda & 2 \\ 1-\lambda & -1 & 0 \end{vmatrix} =$$

$$= -\begin{vmatrix} 3-\lambda-2 & 2-2(2-\lambda) \\ -1-(1-\lambda) & 0-(1-\lambda)(2-\lambda) \end{vmatrix} =$$

$$= -\begin{vmatrix} -\lambda+1 & 2\lambda-2 \\ \lambda-2 & -\lambda^2+3\lambda-2 \end{vmatrix} =$$

$$\left(-\left[(-\lambda+1)(-\lambda^2+3\lambda-2)-(2\lambda-2)(\lambda-2)\right]=0\right)\cdot(-1)$$

$$\lambda^3-3\lambda^2+2\lambda-\lambda^2+3\lambda-2-2\lambda^2+4\lambda+2\lambda-4=0$$

$$\lambda^3-6\lambda^2+11\lambda-6=0$$

Candidatos$(\pm 1, \pm 2, \pm 3, \pm 6)$

	1	-6	11	-6
1	1	-5	6	0
2	1	-3	0	
3	1	0		

$$(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3)=(1,2,3)$$

1) $\lambda_1 = 1$

$(A - I\lambda_1)V_1 = 0$

$$\begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 2 & 2 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$-y = 0$

$y = 0 \longrightarrow x + z = 0$

$2x + 2y + 2z = 0$

$z = -x$

$x + \cancel{y} + z = 0$

$z = -x$

$\therefore \; V_1 = (x, 0, -x) = x(1, 0, -1)$

Autovalor $\lambda = 1$; Autovetor $V_1 = (1, 0, -1)$

SEV.

$T_{\lambda_1} = \{ v \in \mathbb{R} \,/\, y = 0 \wedge x = -z \}$

ou $z = -x$

que é a reta $r \in xOz$ e passa pelo ponto $O(0,0,0) \in \mathbb{R}^3$.

2) $\lambda_2 = 2$

$(A - I\lambda_2) = 0$

$$\begin{pmatrix} -1 & -1 & 0 \\ 2 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{array}{c} \begin{pmatrix} -1 & -1 & 0 \\ 2 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \\ x \quad y \quad z \end{array} \xrightarrow[\substack{L_2 \leftrightarrow L_3 \\ L_3 = L_3 + L_1}]{L_1 = -L_1} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow{L_2 = L_2 - 2L_1}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 2 \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$x + y = 0$

$\boxed{x = -y}$

$y - 2z = 0$

$-2z = -y$

$\boxed{z = \frac{1}{2}y}$

$\boxed{y \in \mathbb{R}}$

$\therefore \quad V_2 = (-y, y, \frac{1}{2}y) =$

$V_2 = y(-1, 1, \frac{1}{2})$

V_2 é o autovetor associado ao autovalor $\lambda_2 = 2$.

SEV: $T_{\lambda_2} = \{V \in \mathbb{R}^3 / x = y \wedge z = \frac{1}{2}y\}$

3) $\lambda_3 = 3$

$(A - \lambda I)V_3 = 0$

$$\begin{pmatrix} -2 & -1 & 0 \\ 2 & 0 & 2 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} -2 & -1 & 0 \\ 2 & 0 & 2 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix} \xrightarrow[L_2 = L_2 - 2L_3]{L_1 = L_1 + 2L_3} \begin{pmatrix} 0 & 1 & -2 \\ 0 & -2 & 4 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix} \xrightarrow[L_2 = -\frac{1}{2}L_1]{L_1 = 2L_1 + L_2}$$

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -2 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix} \xrightarrow{L_3 = L_3 - L_2} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -2 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$x + z = 0$ $\quad\quad$ $y - 2z = 0$

$x = -z$ $\quad\quad$ $y = 2z$

$\therefore$ $V_3 = (-z, 2z, z) = z(-1, 2, 1)$

Autovalor: $\lambda_3 = 3$

Autovetor: $V_3 = (-1, 2, 1)$

S.E.V.

$T_{\lambda 3} = \{ v \in \mathbb{R}^3 / x = -z \wedge y = 2z;\ z \in \mathbb{R} \}$