CAPÍTULO 5

Matrizes

Exercícios

1. **a)** 3×2
b) 1×4
c) 2×2
d) 3×3
e) 3×1
f) 3×4

2. **a)** 4
b) $\nexists$
c) 1
d) 1

3. $A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 \cdot 1 - 2 \cdot 1 & 3 \cdot 1 - 2 \cdot 2 \\ 3 \cdot 2 - 2 \cdot 1 & 3 \cdot 2 - 2 \cdot 2 \end{bmatrix} =$

$= \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 4 & 2 \end{bmatrix}$

4. $B = \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \\ b_{31} & b_{32} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2+1+1 & 2+1+2 \\ 2+2+1 & 2+2+2 \\ 2+3+1 & 2+3+2 \end{pmatrix} =$

$= \begin{pmatrix} 4 & 5 \\ 5 & 6 \\ 6 & 7 \end{pmatrix}$

5. $C = \begin{pmatrix} c_{11} & c_{12} & c_{13} & c_{14} \\ c_{21} & c_{22} & c_{23} & c_{24} \end{pmatrix}$

$c_{11} = 1 + 1 - 1 = 1$ $\quad c_{12} = 1 + 1 - 2 = 0$
$c_{13} = 1 + 1 - 3 = -1$ $\quad c_{14} = 1 + 1 - 4 = -2$
$c_{21} = 1 + 2 - 1 = 2$ $\quad c_{22} = 1 + 2 - 2 = 1$
$c_{23} = 1 + 2 - 3 = 0$ $\quad c_{24} = 1 + 2 - 4 = -1$

Assim, $C = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & -2 \\ 2 & 1 & 0 & -1 \end{pmatrix}$

A soma pedida é: $1 + 2 + 1 + (-1) + (-2) + (-1) = 0$

6. **a)** $A^t = \begin{bmatrix} 7 & 1 \\ -4 & 0 \end{bmatrix}$

b) $B^t = \begin{bmatrix} 6 & 1 & 4 \\ 2 & 0 & -1 \end{bmatrix}$

c) $C^t = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 3 & -1 \\ -9 & 5 \end{bmatrix}$

d) $D^t = \begin{pmatrix} -8 \\ 7 \\ 5 \end{pmatrix}$

e) $E^t = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0{,}5 & 3 \\ -2 & 11 & 7 & 4{,}1 \end{pmatrix}$

f) $F^t = [\ 5 \quad 7 \quad 1 \quad 0 \quad 3\ ]$

g) $G^t = \begin{bmatrix} 2 & -3 & 3 \\ 1 & 1 & -1 \\ -2 & 2 & 2 \end{bmatrix}$

7. $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2+3 & 2+6 \\ 4+3 & 4+6 \\ 6+3 & 6+6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 & 8 \\ 7 & 10 \\ 9 & 12 \end{pmatrix}$

$A^t = \begin{pmatrix} 5 & 7 & 9 \\ 8 & 10 & 12 \end{pmatrix}$

8. $a_{46} = (-1)^{4+6} \cdot \dfrac{2 \cdot 6}{4} = (-1)^{10} \cdot 3 = 3$

9. $A = \begin{bmatrix} 1 \cdot 1 & 1 \cdot 2 & 1 \cdot 3 \\ 2 \cdot 1 & 2 \cdot 2 & 2 \cdot 3 \\ 3 \cdot 1 & 3 \cdot 2 & 3 \cdot 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 4 & 6 \\ 3 & 6 & 9 \end{bmatrix}$;

diagonal principal: 1, 4 e 9; diagonal secundária: 3, 4 e 3.

10. **a)** $a_{21} = 1\,485$
b) $2\,040 - 1\,850 = 190$
c) 1 bola: $1\,320 + 1\,850 = 3\,170$
$3\,170 \cdot$ R\$ 3,00 = R\$ 9 510,00
2 bolas: $1\,485 + 2\,040 = 3\,525$
$3\,525 \cdot$ R\$ 5,00 = R\$ 17 625,00
A arrecadação no bimestre foi de 27 135 reais ($9\,510 + 17\,625 = 27\,135$).

11. **a)** **X** e **Y**: $d_{12} = d_{21} = 15$ km
Z e **X**: $d_{13} = d_{31} = 27$ km
Y e **Z**: $d_{23} = d_{32} = 46$ km
b) $D^t = D$

12. $A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$

13. **a)** $A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos \pi & \text{sen } 2\pi \\ \cos 2\pi & \cos 2\pi \\ \cos 3\pi & \cos 3\pi \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 1 & 1 \\ -1 & -1 \end{bmatrix}$

b) $A^t = \begin{bmatrix} -1 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & -1 \end{bmatrix}$

14. **a)** Como $q_{34} = 0$ e $q_{43} = 1$, concluímos que o placar do jogo foi Canadá 0×1 México.
b) $q_{12} = 0$ e $q_{21} = 1 \Rightarrow$ Argentina 0×1 Brasil
$q_{13} = 2$ e $q_{31} = 3 \Rightarrow$ Argentina 2×3 Canadá
$q_{14} = 2$ e $q_{41} = 1 \Rightarrow$ Argentina 2×1 México
$q_{23} = 3$ e $q_{32} = 3 \Rightarrow$ Brasil 3×3 Canadá
$q_{24} = 2$ e $q_{42} = 2 \Rightarrow$ Brasil 2×2 México

Pontuação final:
Argentina: 3 pontos (1 vitória e 2 derrotas)
Brasil: 5 pontos (1 vitória e 2 empates)
Canadá: 4 pontos (1 vitória, 1 empate e 1 derrota)
México: 4 pontos (1 vitória, 1 empate e 1 derrota)
Menor pontuação: Argentina, com 3 pontos.

15. **a)** $m = 3$ e $n = 4$.
b) $q_{23} = 875 \Rightarrow$ Em 100 g de queijo mozarela encontramos 875 mg de cálcio.
$q_{31} = 35{,}6 \Rightarrow$ Em 100 g de queijo parmesão encontramos 35,6 g de proteínas.
c) Queijo mozarela: 1 kg (1 000 g) por semana $\Rightarrow$ $\Rightarrow 10 \cdot (80 \text{ mg}) = 800$ mg de colesterol por semana.
Queijo minas frescal: 1 kg (1 000 g) por semana $\Rightarrow$ $\Rightarrow 10 \cdot (62 \text{ mg}) = 620$ mg de colesterol por semana.
Por semana, a diferença de colesterol ingerida é de 180 mg.
Em 52 semanas, a ingestão será de 9 360 mg a menos de colesterol.
d) Mais que a metade, pois $\dfrac{1{,}7}{3{,}2} > \dfrac{1{,}7}{3{,}4} = \dfrac{1}{2}$.

16. a) Traço A $= (-1) + (-5) = -6$;

Traço B $= 1 + 5 + 3 = 9$;

Traço C $= c_{11} + c_{22} + c_{33} + c_{44}$;

$c_{11} = 3 \cdot 1 + 1 - 1 = 3$

$c_{22} = 3 \cdot 2 + 2 - 1 = 7$

$c_{33} = 3 \cdot 3 + 3 - 1 = 11$

$c_{44} = 3 \cdot 4 + 4 - 1 = 15$

Assim, o traço de **C** é igual a: $3 + 7 + 11 + 15 = 36$.

b) Traço M $= \text{sen}\,\theta + \cos\frac{\pi}{3} = \frac{1}{2} + \text{sen}\,\theta$.

$\frac{1}{2} + \text{sen}\,\theta = 1 \Rightarrow \text{sen}\,\theta = \frac{1}{2} \Rightarrow \theta = \frac{\pi}{6}$ ou $\theta = \frac{5\pi}{6}$

17. $a = 2$, $b = 1$, $c = 6$ e $d = 4$.

18. $\begin{cases} x + y = 7 & * \\ z = 2 \\ z^2 = 4 \Rightarrow z = \pm 2 \\ x - y = 1 & ** \end{cases} \qquad z = 2$

Adicionando * e ** temos:

$2x = 8 \Rightarrow x = 4$ e $y = 3$

19. a) $\begin{cases} m - 1 = 3 \Rightarrow m = 4 \\ 2m = 0 \Rightarrow m = 0 \\ 1 - m = -3 \Rightarrow m = 4 \\ m = 4 \end{cases}$ não existe $m \in \mathbb{R}$ que satisfaça simultaneamente

b) $\begin{cases} 9 - m^2 = 0 \Rightarrow m = \pm 3 \\ -3 = m \end{cases} \Rightarrow m = -3$

20. Devemos ter $\begin{cases} p + q = 6 \\ 2p - q = 3 \end{cases} \Rightarrow p = q = 3$

21. $\begin{bmatrix} a + 3 & d \\ b + 2 & 5 - e \\ c + 1 & 2f \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{cases} a + 3 = 0 \Rightarrow a = -3 \\ b + 2 = 0 \Rightarrow b = -2 \\ c + 1 = 0 \Rightarrow c = -1 \\ d = 0 \\ 5 - e = 0 \Rightarrow e = 5 \\ 2f = 0 \Rightarrow f = 0 \end{cases}$

22. a) $A^t = \begin{pmatrix} 0 & -3 \\ -3 & 5 \end{pmatrix}$; **A** é simétrica.

$B^t = \begin{bmatrix} 5 & 5 \\ -5 & -5 \end{bmatrix}$; **B** não é simétrica.

$C = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}$; $C^t = C$; **C** é simétrica.

b) $\begin{pmatrix} 3 & 2 & y \\ x & -2 & 5 \\ 3 & z & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & x & 3 \\ 2 & -2 & z \\ y & 5 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow x = 2, y = 3$ e $z = 5$

$x + 2y - z = 2 + 6 - 5 = 3$

23. a) $\begin{pmatrix} 11 & 5 \\ 14 & 12 \end{pmatrix}$

b) $\begin{bmatrix} 11 & 16 \\ 2 & 7 \\ 1 & 5 \end{bmatrix}$

c) $(-5 \quad -1 \quad -8 \quad -3)$

d) $\begin{bmatrix} 5 & -1 & 0 \\ 1 & 5 & -1 \\ 4 & 1 & 5 \end{bmatrix}$

24. a) $c_{78} = a_{78} + b_{78}$

$\left.\begin{aligned} a_{78} &= 2 \cdot 7 - 8 = 6 \\ b_{78} &= 7 + 8 = 15 \end{aligned}\right] \Rightarrow c_{78} = 6 + 15 = 21$

$c_{95} = a_{95} + b_{95}$

$\left.\begin{aligned} a_{95} &= 2 \cdot 9 - 5 = 13 \\ b_{95} &= 9 + 5 = 14 \end{aligned}\right] \Rightarrow c_{95} = 13 + 14 = 27$

b) $c_{ij} = a_{ij} + b_{ij}$

$c_{ij} = (2i - j) + (i + j) = 3i$

25. a) $X = \begin{pmatrix} 5 & 0 \\ 2 & 3 \\ 7 & 8 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 4 & 3 \\ 1 & 1 \\ 2 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -3 \\ 1 & 2 \\ 5 & 8 \end{pmatrix}$

b) $X = \begin{pmatrix} -1 & 2 & 11 \\ -3 & 4 & 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & 4 & 7 \\ -2 & 5 & -3 \end{pmatrix} \Rightarrow$

$\Rightarrow X = \begin{pmatrix} 0 & 6 & 18 \\ -5 & 9 & -2 \end{pmatrix}$

c) $X = \begin{pmatrix} 2 & 5 \\ 3 & 9 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -1 & -3 \\ -2 & 4 \end{pmatrix} \Rightarrow X = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 13 \end{pmatrix}$

26. a)

$$\begin{array}{r c} & \begin{array}{ccccc} \textbf{P} & \textbf{M} & \textbf{B} & \textbf{H} & \textbf{F} \end{array} \\ \begin{array}{r} \text{aluno } \textbf{A} \rightarrow \\ \text{aluno } \textbf{B} \rightarrow \\ \text{aluno } \textbf{C} \rightarrow \end{array} & \begin{bmatrix} 3 & 3 & 0 & 5 & 5 \\ 1 & 1 & 3 & 4 & 2 \\ 8 & 5 & 5 & 4 & 5 \end{bmatrix} \end{array}$$

b) **C**; **C**; **A**.

27. a) $A^t = \begin{pmatrix} 0 & -5 \\ 5 & 0 \end{pmatrix}$; $A = -A^t$

$B^t = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$; $B^t = B$

Apenas **A** é antissimétrica.

b) Devemos ter:

$\begin{pmatrix} 0 & m \\ -2 & 3 \end{pmatrix} = -\begin{pmatrix} 0 & -2 \\ m & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ -m & -3 \end{pmatrix}$

Como $3 \neq -3$, $\nexists m \in \mathbb{R}$ que satisfaça a condição.

28. **X** deve ter o mesmo formato de **A**;

façamos $X = \begin{bmatrix} p & q \\ r & s \\ t & u \end{bmatrix}$

$(X + A)^t = B \Rightarrow \left(\begin{bmatrix} p & q \\ r & s \\ t & u \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 4 & 2 \\ -1 & 0 \\ 5 & 1 \end{bmatrix}\right)^t = \begin{bmatrix} 1 & -2 & 4 \\ 5 & 6 & 0 \end{bmatrix} \Rightarrow$

$\Rightarrow \begin{bmatrix} p + 4 & q + 2 \\ r - 1 & s \\ t + 5 & u + 1 \end{bmatrix}^t = \begin{bmatrix} 1 & -2 & 4 \\ 5 & 6 & 0 \end{bmatrix}$

$\begin{bmatrix} p + 4 & r - 1 & t + 5 \\ q + 2 & s & u + 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & -2 & 4 \\ 5 & 6 & 0 \end{bmatrix}$, de onde:

$p + 4 = 1 \Rightarrow p = -3$; $\quad r - 1 = -2 \Rightarrow r = -1$;

$t + 5 = 4 \Rightarrow t = -1$; $q + 2 = 5 \Rightarrow q = 3$;

$s = 6$; $\quad u + 1 = 0 \Rightarrow u = -1$

$X = \begin{bmatrix} -3 & 3 \\ -1 & 6 \\ -1 & -1 \end{bmatrix}$

29. **a)** $\begin{pmatrix} 4 & 8 & 12 \\ -12 & 20 & -4 \end{pmatrix}$ **c)** $\begin{pmatrix} -2 & -4 & -6 \\ 6 & -10 & 2 \end{pmatrix}$

b) $\begin{pmatrix} \frac{1}{3} & \frac{2}{3} & 1 \\ -1 & \frac{5}{3} & -\frac{1}{3} \end{pmatrix}$

30. **a)** $3A + B = \begin{pmatrix} 6 & 12 \\ 3 & 15 \\ 0 & 21 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 3 & -2 \\ -1 & 6 \\ 9 & 8 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 9 & 10 \\ 2 & 21 \\ 9 & 29 \end{pmatrix}$

b) $A - 3B = \begin{pmatrix} 2 & 4 \\ 1 & 5 \\ 0 & 7 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 9 & -6 \\ -3 & 18 \\ 27 & 24 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -7 & 10 \\ 4 & -13 \\ -27 & -17 \end{pmatrix}$

c) $2 \cdot \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 4 & 5 & 7 \end{pmatrix} + 3 \cdot \begin{pmatrix} 3 & -1 & 9 \\ -2 & 6 & 8 \end{pmatrix} =$

$= \begin{pmatrix} 4 & 2 & 0 \\ 8 & 10 & 14 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 9 & -3 & 27 \\ -6 & 18 & 24 \end{pmatrix} =$

$= \begin{pmatrix} 13 & -1 & 27 \\ 2 & 28 & 38 \end{pmatrix}$

31. $2 \cdot X = \begin{pmatrix} 18 & -2 & 2 \\ 2 & 8 & 8 \end{pmatrix} \Rightarrow X = \begin{pmatrix} 9 & -1 & 1 \\ 1 & 4 & 4 \end{pmatrix}$

32. $2A + B = X + 2C \Rightarrow$

$\Rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 4 & 3 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} = X + \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow$

$\Rightarrow \begin{pmatrix} 5 & 6 \\ 2 & 2 \end{pmatrix} = X + \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow X = \begin{pmatrix} 5 & 5 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}$

33. $2 \cdot X^t + A = B \Rightarrow 2 \cdot X^t = B - A \Rightarrow X^t = \frac{1}{2} \cdot (B - A)$, isto é:

$X^t = \frac{1}{2} \cdot \begin{bmatrix} -6 & -2 & -8 \\ 2 & 4 & -2 \end{bmatrix} \Rightarrow X^t = \begin{bmatrix} -3 & -1 & -4 \\ 1 & 2 & -1 \end{bmatrix} \Rightarrow$

$\Rightarrow X = \begin{bmatrix} -3 & 1 \\ -1 & 2 \\ -4 & -1 \end{bmatrix}$

34. **a)** $\begin{bmatrix} -2 & 5 \\ -2 & 13 \end{bmatrix}$ **b)** $\begin{bmatrix} 0 & 3 & 2 & 7 \\ -10 & 9 & 6 & -19 \end{bmatrix}$

c) $2 \times \underbrace{2 \quad 3} \times 2 \to$ Não existe o produto.

d) $\begin{bmatrix} -2 \\ -4 \\ -6 \end{bmatrix}$ **e)** $\begin{pmatrix} -15 & 10 \\ 0 & 17 \\ 4 & 3 \\ 8 & 6 \end{pmatrix}$

f) $3 \times \underbrace{1 \quad 1} \times 3 \to$ Temos: $\begin{pmatrix} 12 & -4 & 16 \\ 18 & -6 & 24 \\ 30 & -10 & 40 \end{pmatrix}_{3 \times 3}$

g) $2 \times \underbrace{1 \quad 2} \times 1 \to$ Não existe o produto.

h) $\begin{pmatrix} 10 & -4 & 3 \\ 13 & -1 & 3 \\ 9 & 6 & 3 \end{pmatrix}$

35. **a)** $\underset{\substack{\downarrow \\ 3 \times 2}}{A} \cdot \underset{\substack{\downarrow \\ 2 \times 2}}{B} = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 0 \\ -1 & 4 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 11 & 4 \\ 4 & 2 \\ 10 & 3 \end{pmatrix}$

b) $\underset{\substack{\downarrow \\ 2 \times 2}}{B} \cdot \underset{\substack{\downarrow \\ 3 \times 2}}{A} \to$ Não existe o produto.

c) $\underset{\substack{\downarrow \\ 3 \times 2}}{A} \cdot \underset{\substack{\downarrow \\ 2 \times 1}}{C} = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 0 \\ -1 & 4 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 4 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 8 \\ -8 \end{pmatrix}$

d) $\underset{\substack{\downarrow \\ 2 \times 2}}{B^t} \cdot \underset{\substack{\downarrow \\ 2 \times 1}}{C} = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 4 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \\ 3 \end{pmatrix}$

e) $\underset{\substack{\downarrow \\ 2 \times 2}}{B} \cdot \underset{\substack{\downarrow \\ 2 \times 3}}{A^t} = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 3 & 0 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 & 4 & 2 \\ 6 & 6 & 1 \end{pmatrix}$

36. $A \cdot B$ é 3×2, pois **A** é 3×3 e **B** é 3×2.

a) $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \\ 2 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 5 & 8 \\ 1 & 9 \\ 7 & -3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c_{11} & c_{12} \\ c_{21} & c_{22} \\ c_{31} & c_{32} \end{pmatrix}$

$c_{22} = 0 \cdot 8 + 1 \cdot 9 + 2 \cdot (-3) = 9 - 6 = 3$

b) $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \\ 2 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 5 & 8 \\ 1 & 9 \\ 7 & -3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c_{11} & c_{12} \\ c_{21} & c_{22} \\ c_{31} & c_{32} \end{pmatrix}$

$c_{31} = 2 \cdot 5 + 0 \cdot 1 + 1 \cdot 7 = 17$

c) Não existe esse elemento, pois a matriz $C = A \cdot B$ é 3×2.

37. Para calcular o elemento $\mathbf{c}_{43}$ da matriz $A \cdot B$, devemos obter os elementos da linha 4 da matriz **A** e os elementos da coluna 3 da matriz **B**. Temos:

$a_{41} = 4 + 1 = 5$ e $b_{13} = 2 \cdot 1 - 3 = -1$
$a_{42} = 4 + 2 = 6$ e $b_{23} = 2 \cdot 2 - 3 = 1$
$a_{43} = 4 + 3 = 7$ e $b_{33} = 2 \cdot 3 - 3 = 3$

Portanto: $c_{43} = 5 \cdot (-1) + 6 \cdot 1 + 7 \cdot 3 \Rightarrow c_{43} = 22$

38. $\begin{pmatrix} 2 & x \\ y & -3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 4 \\ -5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 8 - 5x \\ 4y + 15 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 \\ -1 \end{pmatrix}$

$\begin{cases} 8 - 5x = -2 \Rightarrow x = 2 \\ 4y + 15 = -1 \Rightarrow y = -4 \end{cases}$

39. **a)** $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7 & 10 \\ 15 & 22 \end{pmatrix}$

b) $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 3 & 4 \\ 5 & 6 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 3 & 4 \\ 5 & 6 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 11 & 12 & 2 \\ 20 & 33 & 12 \\ 5 & 18 & 34 \end{pmatrix}$

40. **a)** $A^2 = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = I_2$

b) $A^3 = A^2 \cdot A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} = A$

c) $A^4 = A^3 \cdot A = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = I_2$

d) $A^{35} = ?$

Observe que $A^5 = A^4 \cdot A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} =$

$= \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} = A$

$A^6 = A^5 \cdot A = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = I_2$

Enfim, $A^n = \begin{cases} A, \text{ se } \mathbf{n} \text{ é ímpar.} \\ I_2, \text{ se } \mathbf{n} \text{ é par.} \end{cases}$

Daí $A^{35} = A$

e) $A^{106} = I_2$, pois **n** é par.

41. $A \cdot A = \begin{bmatrix} -4 & m \\ 2 & -1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} -4 & m \\ 2 & -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 16 + 2m & -5m \\ -10 & 2m + 1 \end{bmatrix} =$

$= \begin{bmatrix} 22 & -15 \\ -10 & m + 4 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{cases} 16 + 2m = 22 \\ -5m = -15 \\ 2m + 1 = m + 4 \end{cases} \Rightarrow m = 3$

42.
- A pontuação final do aluno **A** é:
  $4 \cdot 7 + 6 \cdot 6 + 7 \cdot 5 = 99$
- A pontuação final do aluno **B** é:
  $9 \cdot 7 + 3 \cdot 6 + 2 \cdot 5 = 91$
- A pontuação final do aluno **C** é:
  $7 \cdot 7 + 8 \cdot 6 + 10 \cdot 5 = 147$

A multiplicação matricial é:

$\begin{pmatrix} 4 & 6 & 7 \\ 9 & 3 & 2 \\ 7 & 8 & 10 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 7 \\ 6 \\ 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 99 \\ 91 \\ 147 \end{pmatrix}$

43. $X \cdot \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 7 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 & 2 \\ 5 & -7 \end{pmatrix}$

$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 7 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 & 2 \\ 5 & -7 \end{pmatrix} \Rightarrow$

$\Rightarrow \begin{pmatrix} 2a + 7b & a + 3b \\ 2c + 7d & c + 3d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 & 2 \\ 5 & -7 \end{pmatrix}$

Então:

$\begin{cases} 2a + 7b = 6 \\ a + 3b = 2 \end{cases} \Rightarrow a = -4 \text{ e } b = 2$

$\begin{cases} 2c + 7d = 5 \\ c + 3d = -7 \end{cases} \Rightarrow c = -64 \text{ e } d = 19$

$X = \begin{pmatrix} -4 & 2 \\ -64 & 19 \end{pmatrix}$

44. a)
- Número de sanduíches de "carne louca" vendidos:
  $18 + 22 + 28 = 68$
- Valor arrecadado com a venda dessas 68 unidades:
  $68 \cdot 6$ reais $= 408$ reais
- 777 reais $- 408$ reais $= 369$ reais
- Número de sanduíches *hot-dog* vendidos:
  $369 \div 4{,}50 = 82$
- Valor desconhecido da tabela: $82 - 22 - 36 = 24$

b) $\begin{bmatrix} 22 & 18 \\ 36 & 22 \\ 24 & 28 \end{bmatrix}_{3 \times 2} \cdot \begin{bmatrix} 4{,}50 \\ 6{,}00 \end{bmatrix}_{2 \times 1} = \begin{bmatrix} 207 \\ 294 \\ 276 \end{bmatrix} \begin{matrix} \leftarrow \text{total da barraca I} \\ \leftarrow \text{total da barraca II} \\ \leftarrow \text{total da barraca III} \end{matrix}$

45. $A \cdot B = \begin{bmatrix} 2 & 5 \\ 3 & x \\ y & 1 \\ 4 & 10 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 5 \\ -2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 15 - 2x \\ 5y - 2 \\ 0 \end{bmatrix} = 0_{4 \times 1};$

devemos ter:

$\begin{cases} 15 - 2x = 0 \Rightarrow x = \dfrac{15}{2} \\ \text{e} \\ 5y - 2 = 0 \Rightarrow y = \dfrac{2}{5} \end{cases}$

46. Devemos ter: $\begin{pmatrix} 0 & x \\ y & 3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 5 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & x \\ y & 3 \end{pmatrix} \Rightarrow$

$\Rightarrow \begin{pmatrix} -x & 5x \\ y - 3 & 2y + 15 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2y & x + 6 \\ 5y & -x + 15 \end{pmatrix}$

Daí:

$\begin{cases} -x = 2y & (1) \\ 5x = x + 6 & (2) \Rightarrow x = \dfrac{3}{2} \\ y - 3 = 5y & (3) \Rightarrow y = -\dfrac{3}{4} \\ 2y + \cancel{15} = -x + \cancel{15} & (4) \text{ é equivalente a } (1) \end{cases}$

(2) e (3) satisfazem (1): de fato, $x = -2y =$

$= -2 \cdot \left(\dfrac{-3}{4}\right) = \dfrac{3}{2}$

47. Seja $\begin{bmatrix} x & y \\ z & w \end{bmatrix}$ a matriz procurada.

Devemos ter: $\begin{bmatrix} x & y \\ z & w \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -2 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -2 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x & y \\ z & w \end{bmatrix} \Rightarrow$

$\Rightarrow \begin{bmatrix} -2y & x \\ -2w & z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} z & w \\ -2x & -2y \end{bmatrix} \Rightarrow$

$\Rightarrow \begin{cases} -2y = z \\ x = w \\ -2w = -2x \Leftrightarrow x = w \\ z = -2y \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} z = -2y \\ x = w \end{cases}$; a forma geral da matriz procurada é $\begin{bmatrix} x & y \\ -2y & x \end{bmatrix}$; $x \in \mathbb{R}$ e $y \in \mathbb{R}$

1º exemplo: $x = 1$ e $y = 1$; a matriz é $\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -2 & 1 \end{bmatrix}$.

2º exemplo: $x = 2$ e $y = 0$; a matriz é $\begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}$.

3º exemplo: $x = -1$ e $y = -1$; a matriz é $\begin{bmatrix} -1 & -1 \\ 2 & -1 \end{bmatrix}$.

48. a)
- Bicarbonato: $2{,}3 \cdot 6000 + 2{,}5 \cdot 4000 =$
  $= 13\,800 + 10\,000 = 23\,800$ (23 800 g, ou seja, 23,8 kg)
- Carbonato: $0{,}5 \cdot 6000 + 0{,}5 \cdot 4000 =$
  $= 3000 + 2000 = 5000$ (5 000 g, ou seja, 5 kg)
- Ácido: $2{,}2 \cdot 6000 + 2 \cdot 4000 =$
  $= 13\,200 + 8000 = 21\,200$ g (21 200 g, ou seja, 21,2 kg)

b) $\begin{pmatrix} 2{,}3 & 2{,}5 \\ 0{,}5 & 0{,}5 \\ 2{,}2 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 6000 \\ 4000 \end{pmatrix}$

c) Sejam $\begin{cases} \mathbf{x}\text{: nº de envelopes na versão } \mathbf{T} \\ \mathbf{y}\text{: nº de envelopes na versão } \mathbf{E} \end{cases}$

Temos: $\begin{cases} x + y = 15000 \\ 2{,}3x + 2{,}5y = 35600 \end{cases} \Rightarrow x = 9500 \text{ e } y = 5500$

Logo, são 9500 envelopes na versão **T** e 5500 na versão **E**.

49. a) Seja $X = \begin{pmatrix} p \\ q \end{pmatrix}$;

$$\begin{pmatrix} 1 & -3 \\ 2 & 5 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} p \\ q \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ -11 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{cases} p - 3q = 0 \\ 2p + 5q = -11 \end{cases} \Rightarrow$$

$\Rightarrow q = -1 \text{ e } p = -3$

$X = \begin{pmatrix} -3 \\ -1 \end{pmatrix}$

b) Seja $X = \begin{pmatrix} p & q \\ r & s \end{pmatrix}$;

$$\begin{pmatrix} 13 & 4 \\ -5 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} p & q \\ r & s \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 9 \\ 20 & 35 \end{pmatrix} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{pmatrix} 13p + 4r & 13q + 4s \\ -5p & -5q \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 9 \\ 20 & 35 \end{pmatrix} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} 13p + 4r = 0 \\ -5p = 20 \end{cases} \Rightarrow p = -4 \text{ e } r = 13$$

$$\text{e} \begin{cases} 13q + 4s = 9 \\ -5q = 35 \end{cases} \Rightarrow q = -7 \text{ e } s = 25$$

$X = \begin{pmatrix} -4 & -7 \\ 13 & 25 \end{pmatrix}$

50. 1ª semana:
$2{,}7 \cdot 2{,}35 + 2{,}43 \cdot 3{,}40 + 3{,}45 \cdot 1{,}7 + 4{,}155 \cdot 2{,}6 =$
$= 6{,}345 + 8{,}262 + 5{,}865 + 10{,}803 \simeq 31{,}28$
(Aproximadamente 31,28 reais.)
2ª semana:
$1{,}64 \cdot 2{,}35 + 3{,}12 \cdot 3{,}40 + 3{,}39 \cdot 1{,}7 + 3{,}7 \cdot 2{,}6 =$
$= 3{,}854 + 10{,}608 + 5{,}763 + 9{,}62 \simeq 29{,}85$ (Aproximadamente 29,85 reais.)

$$\begin{pmatrix} 2{,}7 & 2{,}43 & 3{,}45 & 4{,}155 \\ 1{,}64 & 3{,}12 & 3{,}39 & 3{,}7 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2{,}35 \\ 3{,}40 \\ 1{,}70 \\ 2{,}60 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 31{,}28 \\ 29{,}86 \end{pmatrix}$$

51. a) $$\begin{bmatrix} 177 & 16 & 98 & 43 & 14 \\ 26 & 5 & 82 & 10 & 6 \end{bmatrix}_{2 \times 5} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 2 & 3 & 3 \end{bmatrix}_{5 \times 3} = \begin{bmatrix} 346 & 297 & 553 \\ 130 & 197 & 167 \end{bmatrix}_{2 \times 3}$$

b) $c_{12} = 297$: 297 mg é a quantidade total de cálcio encontrada na receita II.

c) $c_{23} = 167$: 167 mg é a quantidade total de magnésio encontrada na receita III.

52. $\begin{pmatrix} 2 & -5 \\ -1 & 3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 3 & 5 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ e

$\begin{pmatrix} 3 & 5 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 & -5 \\ -1 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

Logo, a matriz é inversa da matriz dada.

53. $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow$

$$\Rightarrow \begin{pmatrix} a + 2c & b + 2d \\ a & b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} a + 2c = 1 \\ a = 0 \end{cases} \Rightarrow c = \frac{1}{2} \text{ e } \begin{cases} b + 2d = 0 \\ b = 1 \end{cases} \Rightarrow d = -\frac{1}{2}$$

A inversa é: $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \end{pmatrix}$

54. $\begin{pmatrix} 3 & 6 \\ 2 & 4 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow$

$$\Rightarrow \begin{pmatrix} 3a + 6c & 3b + 6d \\ 2a + 4c & 2b + 4d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} 3a + 6c = 1 \\ 2a + 4c = 0 \end{cases} \text{ I} \quad \text{e} \quad \begin{cases} 3b + 6d = 0 \\ 2b + 4d = 1 \end{cases} \text{ II}$$

$$\Downarrow$$

$$\begin{cases} -\cancel{6a} - \cancel{12c} = -2 \\ \cancel{6a} + \cancel{12c} = 0 \end{cases} +$$

$$0 = -2 \quad \text{(falso)}$$

O sistema I não admite solução, e o mesmo ocorre com o sistema II. Logo, não existe a matriz inversa.

55. Devemos ter $A \cdot A^{-1} = I_2 \Rightarrow A \cdot A = I_2 \Rightarrow$

$$\Rightarrow \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 0 & x \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 0 & x \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} 1 & -1 + x \\ 0 & x^2 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{cases} -1 + x = 0 \Rightarrow x = 1 \\ x^2 = 1 \Rightarrow x = \pm 1 \end{cases} \Rightarrow x = 1$$

56. • Inversa de **A**: $\begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow$

$$\Rightarrow \begin{pmatrix} 3a + 2c & 3b + 2d \\ a + c & b + d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} 3a + 2c = 1 \\ a + c = 0 \end{cases} \Rightarrow a = 1 \text{ e } c = -1$$

$$\text{e} \begin{cases} 3b + 2d = 0 \\ b + d = 1 \end{cases} \Rightarrow b = -2 \text{ e } d = 3$$

$A^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ -1 & 3 \end{pmatrix}$

• Inversa de **B**: $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -3 & 4 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} e & f \\ g & h \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow$

$$\Rightarrow \begin{pmatrix} g & h \\ -3e + 4g & -3f + 4h \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \text{ onde: } g = 1;$$

$e = \frac{4}{3}$; $h = 0$ e $f = -\frac{1}{3}$.

Daí: $B^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{4}{3} & -\frac{1}{3} \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$

a) $A^{-1} + B = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ -1 & 3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -3 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -4 & 7 \end{pmatrix}$

b) $A^{-1} \cdot B = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ -1 & 3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -3 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 & -7 \\ -9 & 11 \end{pmatrix}$

c) $B^{-1} \cdot A = \begin{pmatrix} \frac{4}{3} & -\frac{1}{3} \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{11}{3} & \frac{7}{3} \\ 3 & 2 \end{pmatrix}$

57. $\begin{pmatrix} y & -3 \\ -2 & x \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x & x-4 \\ x-5 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

$\begin{pmatrix} xy - 3x + 15 & xy - 4y - 3 \\ -2x + x^2 - 5x & -2x + 8 + x \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow$

$\Rightarrow \begin{cases} xy - 3x + 15 = 1 & (1) \\ xy - 4y - 3 = 0 & (2) \\ x^2 - 7x = 0 & (3) \\ -x + 8 = 1 & (4) \end{cases}$

De (3) temos: $x = 0$ ou $x = 7$
De (4) temos: $x = 7$ $\Big] \Rightarrow x = 7$

Em (1): $7y - 3 \cdot 7 + 15 = 1 \Rightarrow 7y = 7 \Rightarrow y = 1$

58. $A + A^{-1} = I_2 \Rightarrow A^{-1} = I_2 - A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} x & -x \\ 1 & 0 \end{bmatrix} =$

$= \begin{bmatrix} 1-x & x \\ -1 & 1 \end{bmatrix}$

Como $A \cdot A^{-1} = I_2$, temos:

$\begin{bmatrix} x & -x \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1-x & x \\ -1 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \Rightarrow$

$\Rightarrow \begin{bmatrix} x - x^2 + x & x^2 - x \\ 1 - x & x \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \Rightarrow$

$\Rightarrow \begin{bmatrix} 2x - x^2 & x^2 - x \\ 1 - x & x \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \Rightarrow$

$\Rightarrow \begin{cases} 2x - x^2 = 1 & (1) \\ x^2 - x = 0 & (2) \\ 1 - x = 0 \Rightarrow x = 1 & (3) \\ x = 1 & (4) \end{cases}$

De (1) temos: $-x^2 + 2x - 1 = 0 \Rightarrow x^2 - 2x + 1 = 0 \Rightarrow$
$\Rightarrow (x-1)^2 = 0 \Rightarrow x = 1$

De (2) obtemos: $x = 0$ ou $x = 1$

O único valor de **x** que satisfaz simultaneamente todas as condições é $x = 1$.

59. a) $\begin{pmatrix} 5 & 3 \\ 3 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow$

$\Rightarrow \begin{pmatrix} 5a + 3c & 5b + 3d \\ 3a + 2c & 3b + 2d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow$

$\Rightarrow \begin{cases} 5a + 3c = 1 \\ 3a + 2c = 0 \end{cases} \Rightarrow a = 2$ e $c = -3$

e $\begin{cases} 5b + 3d = 0 \\ 3b + 2d = 1 \end{cases} \Rightarrow b = -3$ e $d = 5$

$A^{-1} = \begin{pmatrix} 2 & -3 \\ -3 & 5 \end{pmatrix}$

b) Como **A** é inversível, temos que:

$A^{-1} \cdot (A \cdot X) = A^{-1} \cdot B \Rightarrow$

$\Rightarrow \underbrace{(A^{-1} \cdot A)}_{I_2} \cdot X = A^{-1} \cdot B \Rightarrow$

$\Rightarrow X = A^{-1} \cdot B = \begin{pmatrix} 2 & -3 \\ -3 & 5 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 11 & 4 \\ 9 & 8 \end{pmatrix} \Rightarrow$

$\Rightarrow X = \begin{pmatrix} -5 & -16 \\ 12 & 28 \end{pmatrix}$

60. $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 3 & 0 \\ 2 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \Rightarrow$

$\Rightarrow \begin{bmatrix} a + 2g & b + 2h & c + 2i \\ 3d & 3e & 3f \\ 2a + g & 2b + h & 2c + i \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \Rightarrow$

$\Rightarrow \begin{cases} a + 2g = 1 \\ 3d = 0 \\ 2a + g = 0 \end{cases} \Rightarrow d = 0$ e $\begin{cases} a + 2g = 1 \\ 2a + g = 0 \end{cases} \Rightarrow$

$\Rightarrow g = \frac{2}{3}$ e $a = -\frac{1}{3}$

$\begin{cases} b + 2h = 0 \\ 3e = 1 \\ 2b + h = 0 \end{cases} \Rightarrow e = \frac{1}{3}$ e $\begin{cases} b + 2h = 0 \\ 2b + h = 0 \end{cases} \Rightarrow b = h = 0$

$\begin{cases} c + 2i = 0 \\ 3f = 0 \\ 2c + i = 1 \end{cases} \Rightarrow f = 0$ e $\begin{cases} c + 2i = 0 \\ 2c + i = 1 \end{cases} \Rightarrow i = -\frac{1}{3}$ e $c = \frac{2}{3}$

Assim, $X^{-1} = \begin{bmatrix} -\frac{1}{3} & 0 & \frac{2}{3} \\ 0 & \frac{1}{3} & 0 \\ \frac{2}{3} & 0 & -\frac{1}{3} \end{bmatrix}$

61. De $(X \cdot B)^{-1} = A$ (a inversa de $X \cdot B$ é a matriz **A**), temos:

$(X \cdot B) \cdot A = I_2$; $X = \begin{pmatrix} p & q \\ r & s \end{pmatrix}$

$X \cdot B = \begin{pmatrix} p & q \\ r & s \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} p & -2p - q \\ r & -2r - s \end{pmatrix}$

$(X \cdot B) \cdot A = I_2 \Rightarrow \begin{pmatrix} p & -2p - q \\ r & -2r - s \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow$

$\Rightarrow \begin{pmatrix} 4p + q & -5p - 3q \\ 4r + s & -5r - 3s \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow$

$\Rightarrow \begin{cases} 4p + q = 1 \\ -5p - 3q = 0 \end{cases} \Rightarrow p = \frac{3}{7}$ e $q = -\frac{5}{7}$

e $\begin{cases} 4r + s = 0 \\ -5r - 3s = 1 \end{cases} \Rightarrow r = \frac{1}{7}$ e $s = -\frac{4}{7}$

Assim, $X = \begin{pmatrix} \frac{3}{7} & -\frac{5}{7} \\ \frac{1}{7} & -\frac{4}{7} \end{pmatrix}$

Desafio

a) Se **A** é ortogonal, $A^{-1} = A^t$;
temos: $A \cdot A^{-1} = I_3 \Rightarrow A \cdot A^t = I_3 \Rightarrow$

$$\Rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} \\ x & y & z \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 & x \\ 0 & \frac{\sqrt{2}}{2} & y \\ 0 & \frac{\sqrt{2}}{2} & z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & x \\ 0 & \frac{1}{2} + \frac{1}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2}(y+z) \\ x & \frac{\sqrt{2}}{2}(y+z) & x^2 + y^2 + z^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{cases} x = 0 & (1) \\ \frac{\sqrt{2}}{2}(y+z) = 0 \Rightarrow y = -z & (2) \\ x^2 + y^2 + z^2 = 1 & (3) \end{cases}$$

Substituindo 1 e 2 em 3, temos:

$0^2 + (-z)^2 + z^2 = 1 \Rightarrow 2z^2 = 1 \Rightarrow z^2 = \frac{1}{2} \Rightarrow z = \pm\frac{\sqrt{2}}{2}$;

- Se $z = \frac{\sqrt{2}}{2}$, em 2, temos que $y = -\frac{\sqrt{2}}{2}$ e uma possível solução é $x = 0$, $y = -\frac{\sqrt{2}}{2}$ e $z = \frac{\sqrt{2}}{2}$.
- Se $z = -\frac{\sqrt{2}}{2}$, em 2, obtemos $y = \frac{\sqrt{2}}{2}$ e a solução é $x = 0$, $y = \frac{\sqrt{2}}{2}$ e $z = -\frac{\sqrt{2}}{2}$.

b) Suponhamos que $\begin{pmatrix} \sqrt{2} & x \\ y & \sqrt{2} \end{pmatrix}$ fosse ortogonal.

Teríamos: $\begin{pmatrix} \sqrt{2} & x \\ y & \sqrt{2} \end{pmatrix} \cdot \underbrace{\begin{pmatrix} \sqrt{2} & y \\ x & \sqrt{2} \end{pmatrix}}_{\text{é a transposta da matriz dada}} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

$$\begin{pmatrix} 2 + x^2 & \sqrt{2}(x+y) \\ \sqrt{2}(x+y) & y^2 + 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{cases} 2 + x^2 = 1 & (1) \\ \sqrt{2} \cdot (x+y) = 0 & (2) \\ 2 + y^2 = 1 & (3) \end{cases}$$

De 1, temos: $x^2 = -1 \Rightarrow x \notin \mathbb{R}$

De 3, temos: $y^2 = -1 \Rightarrow y \notin \mathbb{R}$

CAPÍTULO 6

Sistemas lineares

Exercícios

1. São lineares as equações representadas nos itens *a*, *c*, *f* e *h*.

2. **a)** $2 \cdot 2 - (-3) = 4 + 3 = 7$; $(2, -3)$ é solução.
b) $2 \cdot 2 - 7 = 4 - 7 = -3 \neq 7$; $(2, 7)$ não é solução.
c) $2 \cdot 5 - 3 = 10 - 3 = 7$; $(5, 3)$ é solução.

3. **a)** $-1 + 2 \cdot 3 + 4 \cdot (-1) = -1 + 6 - 4 = 1$;
$(-1, 3, -1)$ é solução.
b) $0 + 2 \cdot (-4) + 4 \cdot (-1) = 0 - 8 - 4 = -12 \neq 1$;
$(0, -4, -1)$ não é solução.
c) $1 + 2 \cdot 1 + 4 \cdot 1 = 1 + 2 + 4 = 7 \neq 1$;
$(1, 1, 1)$ não é solução.
d) $0 + 2 \cdot 0 + 4 \cdot \frac{1}{4} = 1$; $\left(0, 0, \frac{1}{4}\right)$ é solução.

4. $3 \cdot 1 - 2 \cdot (-3) + m = 1 \Rightarrow 3 + 6 + m = 1 \Rightarrow m = -8$

5. **a)** $80x + 120y = 25\,200$ ou $8x + 12y = 2\,520$ ou $2x + 3y = 630$
b) Se $x = 45$, então: $90 + 3y = 630 \Rightarrow y = 180$ e o par $(45, 180)$ é solução da equação linear; sim, é possível.
Se $x = 65$, temos: $130 + 3y = 630 \Rightarrow y = \frac{500}{3} \notin \mathbb{N}$; não é possível.
c) Se $y = 3x$, então: $2x + 3 \cdot 3x = 630 \Rightarrow 11x = 630 \Rightarrow$ $\Rightarrow x \notin \mathbb{N}$; não é possível.
Se $y = \frac{x}{2}$ temos: $2x + 3 \cdot \frac{x}{2} = 630 \Rightarrow x = 180$ e $y = 90$; o par $(180, 90)$ é solução da equação linear; sim.

6. $3 \cdot m - 11 \cdot (2m + 1) = 4 \Rightarrow 3m - 22m - 11 = 4 \Rightarrow$ $\Rightarrow m = -\frac{15}{19}$

7. **a)** $x_1 = 0 \Rightarrow 4 \cdot 0 + 3x_2 = -5 \Rightarrow x_2 = -\frac{5}{3}$;
$\left(0, -\frac{5}{3}\right)$ é solução.
$x_2 = 1 \Rightarrow 4x_1 + 3 \cdot 1 = -5 \Rightarrow 4x_1 = -8 \Rightarrow x_1 = -2$;
$(-2, 1)$ é solução.
b) $x = 0$ e $y = 1 \Rightarrow 0 + 1 - z = 0 \Rightarrow z = 1$;
$(0, 1, 1)$ é solução.
$x = 1$ e $z = 2 \Rightarrow 1 + y - 2 = 0 \Rightarrow y = 1$;
$(1, 1, 2)$ é solução.
c) $(0, 2)$; $(1, 1)$; $(-5, 7)$; $\left(\frac{1}{3}, \frac{5}{3}\right)$, ...
d) $x_1 = x_2 = 0 \Rightarrow 0 + 0 + 5x_3 = 16 \Rightarrow x_3 = \frac{16}{5}$;
$\left(0, 0, \frac{16}{5}\right)$ é solução.
$x_1 = x_2 = 2 \Rightarrow 2 + 4 + 5x_3 = 16 \Rightarrow x_3 = 2$;
$(2, 2, 2)$ é solução.

8. Sejam $\begin{cases} \textbf{x} \text{ o número de moedas de R\$ 1,00} \\ \textbf{y} \text{ o número de notas de R\$ 5,00} \end{cases}$

$x + 5y = 35 \Rightarrow y = \frac{35 - x}{5}$

Para que **y** resulte inteiro, o numerador deve ser múltiplo de 5, então atribuímos a **x** os valores 0, 5, 10, 15, 20, 25, 30 e 35, obtendo, respectivamente, os resultados: (0, 7); (5, 6); (10, 5); (15, 4); (20, 3); (25, 2); (30,1) e (35, 0), ou seja, poderá fazer o pagamento de 8 formas diferentes.

9. **a)** **x**: número de moedas de R$ 1,00
y: número de notas de R$ 2,00
$x + 2y = 35 \Rightarrow y = \frac{35 - x}{2}$