- Autovalores e autovetores

Seja $T : V \to V$ um operador linear. Dizemos que um vetor $v \in V$, com $v \neq 0$ é um autovetor de T, se existe $\lambda \in R$, tal que $T(v) = \lambda \cdot v$. A este número λ chamamos de autovalor de T, associado ao autovetor v.

Observação 4.1: geometricamente, se estivermos tratando de vetores no R^2 ou R^3, significa que a imagem de T pelo autovetor v é um múltiplo escalar de v, ou seja, v e $T(v)$ têm a mesma direção, porém os sentidos podem ser opostos, dependendo do sinal do autovalor λ.

4.1. Suponha o operador $T : R^2 \to R^2$, tal que

$$T(x, y) = (3x + y, x + 3y).$$

O vetor $v = (1, 2)$ é um autovetor de T. De fato,

$$T(1, 1) = (4, 4) = 4 \cdot (1, 1).$$

Ou seja, $T(v) = 4 \cdot v$, assim, $v = (1, 1)$ é um autovetor associado ao autovalor $\lambda = 4$. Geometricamente, o operador T levou o vetor v no seu quádruplo, isto é, v e $T(v)$ têm a mesma direção e o mesmo sentido.

4.2. Seja $T : R^2 \to R^2$, tal que $T(x, y) = (2x + 2y, x + 3y)$. Verifique se os vetores $u = (0, 3)$ e $v = (-2, 1)$ são autovetores de T.

Calculando $T(0, 3)$, temos $T(0, 3) = (6, 9)$, ou seja, o vetor $(6, 9)$ não é um múltiplo escalar de $u = (0, 3)$, logo, o vetor u não é um autovetor.

Fazendo o mesmo para $v = (-2, 1)$, temos

$$T(-2, 1) = (-2, 1) = 1 \cdot (-2, 1),$$

Dilatação e contração

$$T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$$
$$T(x, y) = \alpha(x, y)$$

Assim, pela própria definição tem-se que qualquer vetor $v = (x, y) \in \mathbb{R}^2$ é um autovetor de T associado ao autovalor α.

O mesmo vale para operadores definidos no $\mathbb{R}^3$.

Reflexão em relação à origem

$$T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$$
$$T(x, y) = (-x, -y)$$

Podemos reescrever este operador como $T(x, y) = -(x, y)$, ou seja, qualquer vetor $v = (x, y) \in \mathbb{R}^2$ é um autovetor de T associado ao autovalor $\lambda = -1$.

O mesmo vale para operadores definidos no $\mathbb{R}^3$.

Perceba que todos são autovetores associados ao autovalor $\lambda = -1$. Geometricamente, vemos que os vetores u e $T(u)$ têm a mesma direção, porém com sentidos opostos, bem como u_1 e $T(u_1)$ e u_2 e $T(u_2)$, como já havíamos dito na observação 4.1.

1. Verifique se os vetores a seguir são autovetores dos correspondentes operadores. Em caso afirmativo, escreva o autovalor. Use apenas a definição.

   a) $v = (-1, 4)$ e $T(x, y) = (-2x - y, 2x - 3y)$

a) Calculando $T(-1, 4)$ temos:

$$T(-1, 4) = (-2\cdot(-1) - 4, 2\cdot(-1) - 3\cdot 4) = (-2, -14).$$

Como $(-2, -14)$ não é múltiplo escalar de $v = (-1, 4)$ pelo operador T, então $v = (-1, 4)$ não é um autovetor.

b) $v = \left(\frac{3}{5}, -\frac{4}{5}\right)$ e $T(x, y) = (4x + 12y, 12x - 3y)$

b) Calculando $T\left(\frac{3}{5}, -\frac{4}{5}\right)$.

$$T\left(\frac{3}{5}, -\frac{4}{5}\right) = \left(4\cdot\frac{3}{5} + 12\cdot\left(-\frac{4}{5}\right), 12\cdot\frac{3}{5} - 3\cdot\left(-\frac{4}{5}\right)\right)$$

$$= \left(-\frac{36}{5}, \frac{48}{5}\right) = -12\cdot\left(\frac{3}{5}, -\frac{4}{5}\right)$$

Ou seja, $T(v) = -12v$, portanto, $v = \left(\frac{3}{5}, -\frac{4}{5}\right)$ é um autovetor de T associado ao autovalor $\lambda = -12$.

c) $v = (2, 1, 2)$ e $T(x, y, z) = (x + 2y + z, -x + 3y + z, 2y + 2z)$

c) Calculando $T(2, 1, 2)$.

$$T(2, 1, 2) = (2 + 2\cdot 1 + 2, -2 + 3\cdot 1 + 2, 2\cdot 1 + 2\cdot 2) = (6, 3, 6) = 3(2, 1, 2)$$

Isto é, $T(v) = 3v$ e, portanto, $v = (2, 1, 2)$ é um autovetor de T associado ao autovalor $\lambda = 3$.

2. Seja $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ e suponha que $\lambda_1 = -2$ e $\lambda_2 = 5$ são autovalores associados aos autovetores $v_1 = (1, 1)$ e $v_2 = (-3, -2)$, respectivamente. Determine $T(2v_1 - 3v_2)$.

$$T(2v_1 - 3v_2) = 2T(v_1) - 3T(v_2)$$

$$= 2T(1,1) - 3T(-3,-2)$$

$$T(v_1) = T(1,1) = \lambda_1(1,1) = -2(1,1)$$

$$T(v_2) = T(-3,-2) = \lambda_2(-3,-2) = 5(-3,-2)$$

$$T(2v_1 - 3v_2) = 2\underbrace{T(1,1)}_{-2(1,1)} - 3\underbrace{T(-3,-2)}_{5(-3,-2)}$$

$$= 2(-2(1,1) - 3(5(-3,-2))$$

$$= (-4,-4) + (+45,+30)$$

$$\boxed{T(2v_1 - 3v_2) = (+41, +26)}$$

3. Suponha que o operador $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ tenha autovalores $v_1 = (-1, 2)$ e $v_2 = (3, 4)$ associados aos autovalores $\lambda_1 = 2$ e $\lambda_2 = -3$, respectivamente. Determine o valor de $T(10, 10)$. Dica: primeiramente encontre a combinação de $v = (10, 10)$ em relação a v_1 e v_2.

$\lambda_1 = 2$ é A.V. de $v_1 = (-1,2) \Rightarrow T(v_1) = 2v_1$

$\lambda_2 = -3$ é A.V. de $v_2 = (3,4) \Rightarrow T(v_2) = -3v_2$

Pela dica, como v_1 e v_2 são uma base de $\mathbb{R}^2$, segue C.L.

$$(10,10) = a(-1,2) + b(3,4)$$

$$\begin{cases} -a + 3b = 10 \\ 2a + 4b = 10 \end{cases} \qquad \left(\begin{array}{cc|c} -1 & 3 & 10 \\ 2 & 4 & 10 \end{array}\right) \xrightarrow[L_1 = -L_1]{L_2 = (L_2 + 2L_1) : 10}$$

$$\left(\begin{array}{ccc} +1 & -3 & -10 \\ 0 & 1 & 3 \end{array}\right) \xrightarrow{L_1 = L_1 + 3L_2} \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 3 \end{array}\right)$$

$a = -1$ e $b = 3$.

$\therefore (10,10) = -1(-1,2) + 3(3,4)$ Aplicar T

$$T(10,10) = -1\underbrace{T(-1,2)}_{T(v_1) = 2v_1} + 3\underbrace{T(3,4)}_{T(v_2) = -3v_2}$$

$$T(10,10) = -1 \cdot 2(-1,2) + 3 \cdot (-3) \cdot (3,4)$$

$$T(10,10) = (+2,-4) + (-27,-36)$$

$$\boxed{T(10,10) = (-25,-40)}$$

$$\left(\text{ou } T(10,10) = -5(5,8)\right)$$