2 Limites e Derivadas

1986 Petcolas/Megna, Fundamental Photographs, NYC

Uma bola cai com cada vez mais velocidade com o passar do tempo. Galileu descobriu que a distância da queda é proporcional ao quadrado do tempo em que ela está em queda. O Cálculo então nos permite conhecer a velocidade da bola em um dado momento.

Em *Uma Apresentação do Cálculo*, vimos como a ideia de limite é a base dos vários ramos do cálculo. Por isso, é apropriado começar nosso estudo de cálculo examinando os limites e suas propriedades. O tipo especial de limite usado para encontrar as tangentes e as velocidades dá origem à ideia central do cálculo diferencial – a derivada.

2.1 Os Problemas da Tangente e da Velocidade

Nesta seção vamos ver como surgem os limites quando tentamos encontrar a tangente de uma curva ou a velocidade de um objeto.

O Problema da Tangente

A palavra *tangente* vem do latim *tangens*, que significa "tocando". Assim, uma tangente a uma curva é uma reta que toca a curva. Em outros termos, uma reta tangente deve ter a mesma direção que a curva no ponto de contato. Como tornar precisa essa ideia?

Para um círculo, poderíamos simplesmente, como Euclides, dizer que a tangente é uma reta que intercepta o círculo uma única vez, conforme a Figura 1(a). Para as curvas mais complicadas essa definição é inadequada. A Figura l(b) mostra duas retas, l e t, passando através de um ponto P em uma curva C. A reta l intersecta C somente uma vez, mas certamente não se parece com o que pensamos ser uma tangente. A reta t, por outro lado, parece ser uma tangente, mas intercepta C duas vezes.

Para sermos objetivos, vamos examinar no exemplo a seguir o problema de encontrar uma reta t tangente à parábola $y = x^2$.

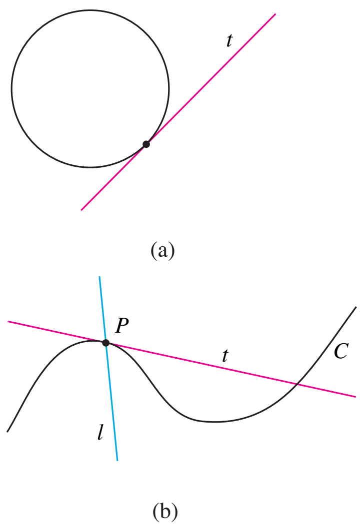


FIGURA 1

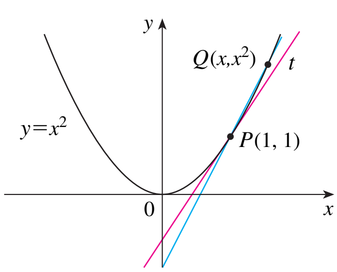


FIGURA 2

x	m_{PQ}
2	3
1,5	2,5
1,1	2,1
1,01	2,01
1,001	2,001

x	m_{PQ}
0	1
0,5	1,5
0,9	1,9
0,99	1,99
0,999	1,999

EXEMPLO 1 Encontre uma equação da reta tangente à parábola $y = x^2$ no ponto $P(1, 1)$.

SOLUÇÃO Podemos encontrar uma equação da reta tangente t assim que soubermos sua inclinação m. A dificuldade está no fato de conhecermos somente o ponto P, em t, quando precisamos de dois pontos para calcular a inclinação. Observe, porém, que podemos calcular uma aproximação de m escolhendo um ponto próximo $Q(x, x^2)$ sobre a parábola (como na Figura 2) e calculando a inclinação m_{PQ} da reta secante PQ. [Uma **reta secante**, do latim *secans*, significando corte, é uma linha que corta (intersecta) uma curva mais de uma vez.]

Escolhemos $x \neq 1$ de forma que $Q \neq P$. Então

$$m_{PQ} = \frac{x^2 - 1}{x - 1}$$

Por exemplo, para o ponto $Q(1{,}5,\ 2{,}25)$, temos

$$m_{PQ} = \frac{2{,}25 - 1}{1{,}5 - 1} = \frac{1{,}25}{0{,}5} = 2{,}5$$

As tabelas mostram os valores de m_{PQ} para vários valores de x próximos a 1. Quanto mais próximo Q estiver de P, mais próximo x estará de 1, e a tabela indica que m_{PQ} estará mais próximo de 2. Isso sugere que a inclinação da reta tangente t deve ser $m = 2$.

Dizemos que a inclinação da reta tangente é o *limite* das inclinações das retas secantes e expressamos isso simbolicamente escrevendo que

$$\lim_{Q \to P} m_{PQ} = m \qquad \text{e} \qquad \lim_{x \to 1} \frac{x^2 - 1}{x - 1} = 2$$

Supondo que a inclinação da reta tangente seja realmente 2, podemos usar a forma ponto-inclinação da equação de uma reta (veja o Apêndice B) para escrever a equação da tangente no ponto $(1, 1)$ como

$$y - 1 = 2(x - 1) \qquad \text{ou} \qquad y = 2x - 1$$

A Figura 3 ilustra o processo de limite que ocorre neste exemplo. À medida que Q tende a P ao longo da parábola, as retas secantes correspondentes giram em torno de P e tendem à reta tangente t.

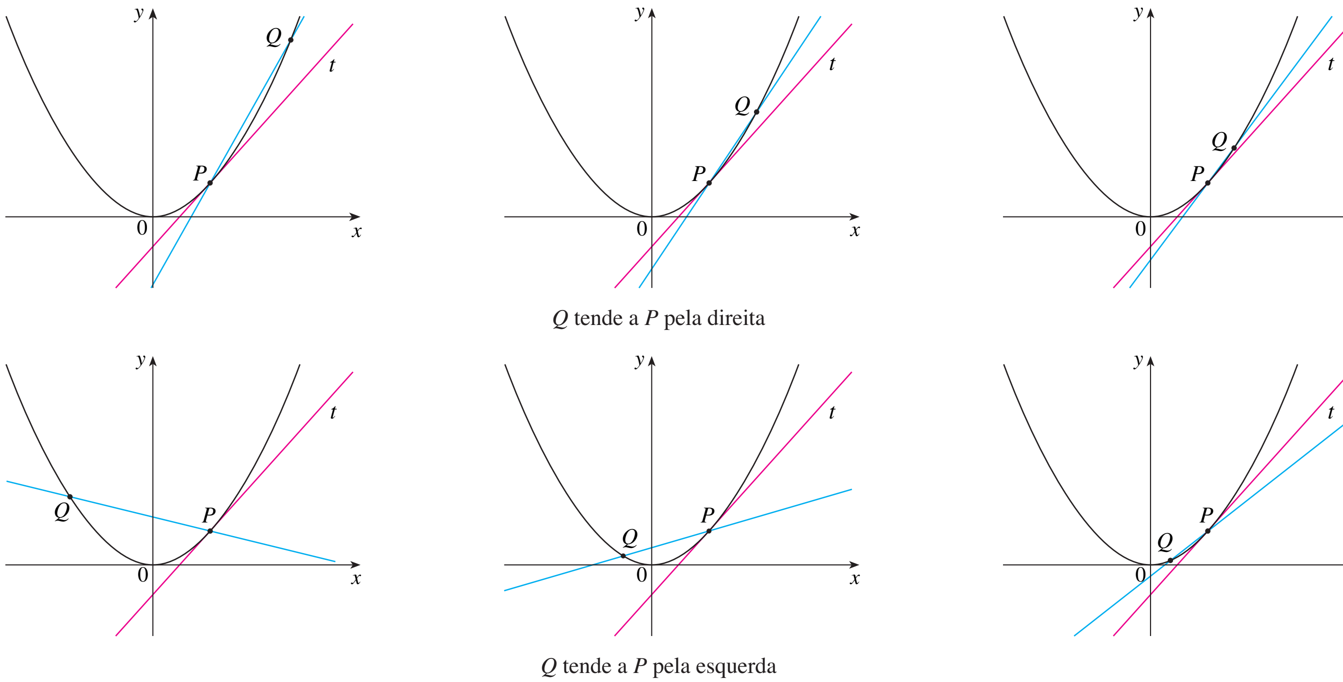


FIGURA 3

> **TEC** Em *Visual 2.1*, você pode ver como o processo na Figura 3 funciona para funções adicionais.

Em ciências, muitas funções não são descritas por equações explícitas; elas são definidas por dados experimentais. O exemplo a seguir mostra como estimar a inclinação da reta tangente ao gráfico de uma dessas funções.

EXEMPLO 2 O flash de uma câmera opera armazenando carga em um capacitor e liberando-a instantaneamente ao ser disparado. Os dados na tabela à esquerda descrevem a carga Q armazenada no capacitor (medida em microcoulombs) no instante t (medido em segundos após o flash ter sido disparado). Use os dados para esboçar o gráfico desta função e estimar a inclinação da reta tangente no ponto onde $t = 0{,}04$. [*Observação:* A inclinação da reta tangente representa a corrente elétrica fluindo do capacitor à lâmpada do flash (medida em microamperes.]

t	Q
0,00	100,00
0,02	81,87
0,04	67,03
0,06	54,88
0,08	44,93
0,10	36,76

SOLUÇÃO Na Figura 4 marcamos os pontos dados e os usamos para esboçar uma curva que aproxima o gráfico da função.

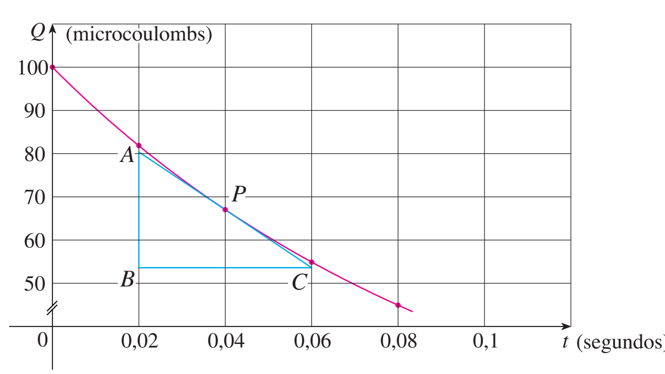


FIGURA 4

Dados os pontos $P(0{,}04;\ 67{,}03)$ e $R(0{,}00;\ 100{,}00)$ no gráfico, descobrimos que a inclinação da reta secante PR é

$$m_{PR} = \frac{100{,}00 - 67{,}03}{0{,}00 - 0{,}04} = -824{,}25.$$

R	m_{PR}
(0,00; 100,00)	$-824{,}25$
(0,02; 81,87)	$-742{,}00$
(0,06; 54,88)	$-607{,}50$
(0,08; 44,93)	$-552{,}50$
(0,10; 36,76)	$-504{,}50$

A tabela à esquerda mostra os resultados de cálculos semelhantes para as inclinações de outras retas secantes. A partir dela podemos esperar que a inclinação da reta tangente em $t = 0{,}04$ esteja em algum ponto entre -742 e $-607{,}5$. De fato, a média das inclinações das duas retas secantes mais próximas é

$$\tfrac{1}{2}(-742 - 607{,}5) = -674{,}75$$

Assim, por esse método, estimamos que a inclinação da reta tangente é -675.

Outro método é traçar uma aproximação da reta tangente em P e medir os lados do triângulo ABC, como na Figura 4. Isso dá uma estimativa da inclinação da reta tangente como

$$-\frac{|AB|}{|BC|} \approx -\frac{80{,}4 - 53{,}6}{0{,}06 - 0{,}02} = -670$$

O significado físico da resposta do Exemplo 2 é que a corrente que flui do capacitor para o flash após 0,04 s é de cerca de –670 microamperes.

O Problema da Velocidade

Se você observar o velocímetro de um carro no tráfego urbano, verá que o ponteiro não fica parado por muito tempo; isto é, a velocidade do carro não é constante. Podemos conjecturar, pela observação do velocímetro, que o carro tem uma velocidade definida em cada momento. Mas como definir essa velocidade "instantânea"? Vamos investigar o exemplo da bola caindo.

EXEMPLO 3 Suponha que uma bola seja solta a partir do ponto de observação no alto da Torre CN, em Toronto, 450 m acima do solo. Encontre a velocidade da bola após 5 segundos.

SOLUÇÃO Por meio de experimentos feitos séculos atrás, Galileu descobriu que a distância percorrida por qualquer objeto em queda livre é proporcional ao quadrado do tempo de queda. (Esse modelo para a queda livre despreza a resistência do ar.) Se a distância percorrida após t segundos for chamada $s(t)$ e medida em metros, então a Lei de Galileu pode ser expressa pela equação

$$s(t) = 4{,}9t^2$$

A dificuldade em encontrar a velocidade após 5 segundos está em tratarmos de um único instante de tempo $(t = 5)$, ou seja, não temos um intervalo de tempo. Porém, podemos aproximar a quantidade desejada calculando a velocidade média sobre o breve intervalo de tempo de um décimo de segundo, de $t = 5$ até $t = 5{,}1$:


A Torre CN em Toronto foi o maior edifício do mundo por 32 anos.

$$\begin{aligned} \text{velocidade média} &= \frac{\text{mudança de posição}}{\text{tempo decorrido}} \\ &= \frac{s(5{,}1) - s(5)}{0{,}1} \\ &= \frac{4{,}9(5{,}1)^2 - 4{,}9(5)^2}{0{,}1} = 49{,}49 \text{ m/s} \end{aligned}$$

A tabela a seguir mostra os resultados de cálculos similares da velocidade média em períodos de tempo cada vez menores.

Intervalo de tempo	Velocidade média (m/s)
$5 \leqslant t \leqslant 6$	53,9
$5 \leqslant t \leqslant 5{,}1$	49,49
$5 \leqslant t \leqslant 5{,}05$	49,245
$5 \leqslant t \leqslant 5{,}01$	49,049
$5 \leqslant t \leqslant 5{,}001$	49,0049

Parece que, à medida que encurtamos o período do tempo, a velocidade média fica cada vez mais próxima de 49 m/s. A **velocidade instantânea** quando $t = 5$ é definida como o valor limite dessas velocidades médias em períodos de tempo cada vez menores, começando em $t = 5$. Assim, a velocidade (instantânea) após 5 segundos é

$$v = 49 \text{ m/s}$$

Você deve ter percebido que os cálculos usados na solução desse problema são muito semelhantes àqueles usados anteriormente nesta seção para encontrar as tangentes. Na realidade, há uma estreita relação entre o problema da tangente e o cálculo de velocidades. Se traçarmos o gráfico da função distância percorrida pela bola (como na Figura 5) e considerarmos os pontos $P(a; 4{,}9a^2)$ e $Q(a + h; 4{,}9(a + h)^2)$ sobre o gráfico, então a inclinação da reta secante PQ será

$$m_{PQ} = \frac{4{,}9(a + h)^2 - 4{,}9a^2}{(a + h) - a}$$

que é igual à velocidade média no intervalo de tempo $[a, a + h]$. Logo, a velocidade no instante $t = a$ (o limite dessas velocidades médias quando h tende a 0) deve ser igual à inclinação da reta tangente em P (o limite das inclinações das retas secantes).

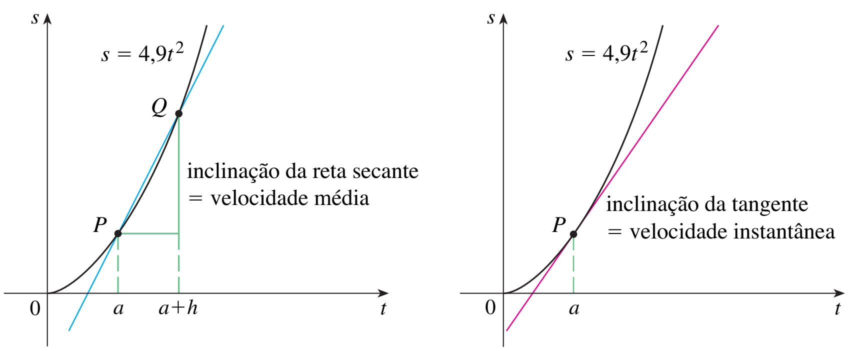


FIGURA 5

Os Exemplos 1 e 3 mostram que para resolver problemas de velocidade e de tangente precisamos encontrar limites. Após estudarmos métodos para o cálculo de limites nas próximas quatro seções, retornaremos aos problemas de encontrar tangentes e velocidades na Seção 2.7.

2.1 Exercícios

1. Um tanque com capacidade para 1.000 litros de água é drenado pela base em meia hora. Os valores na tabela mostram o volume V de água remanescente no tanque (em litros) após t minutos.

t (min)	5	10	15	20	25	30
V (L)	694	444	250	111	28	0

(a) Se P é o ponto (15, 250) sobre o gráfico de V, encontre as inclinações das retas secantes PQ, onde Q é o ponto sobre o gráfico com $t = 5$, 10, 20, 25 e 30.

(b) Estime a inclinação da reta tangente em P pela média das inclinações de duas retas secantes.

(c) Use um gráfico da função para estimar a inclinação da tangente em P. (Essa inclinação representa a razão na qual a água flui do tanque após 15 minutos.)

2. Um monitor é usado para medir os batimentos cardíacos de um paciente após uma cirurgia. Ele fornece um número de batimentos cardíacos após t minutos. Quando os dados na tabela são colocados em um gráfico, a inclinação da reta tangente representa a taxa de batimentos cardíacos por minuto.

t (min)	36	38	40	42	44
Batimentos cardíacos	2.530	2.661	2.806	2.948	3.080

O monitor estima esse valor calculando a inclinação de uma reta secante. Use os dados para estimar a taxa de batimentos cardíacos após 42 minutos, utilizando a reta secante entre os pontos para os valores de t dados.

(a) $t = 36$ e $t = 42$ (b) $t = 38$ e $t = 42$

(c) $t = 40$ e $t = 42$ (d) $t = 42$ e $t = 44$

Quais são suas conclusões?

3. O ponto $P(2, -1)$ está sobre a curva $y = 1/(1 - x)$.

(a) Se Q é o ponto $(x, 1/(1 - x))$, use sua calculadora para determinar a inclinação da reta secante PQ, com precisão de seis casas decimais, para os seguintes valores de x:

(i) 1,5 (ii) 1,9 (iii) 1,99 (iv) 1,999

(v) 2,5 (vi) 2,1 (vii) 2,01 (viii) 2,001

(b) Usando os resultados da parte (a), estime o valor da inclinação da reta tangente à curva no ponto $P(2, -1)$.

(c) Usando a inclinação da parte (b), encontre uma equação da reta tangente à curva em $P(2, -1)$.

4. O ponto $P(0{,}5; 0)$ está sobre a curva $y = \cos \pi x$.

(a) Se Q é o ponto $(x, \cos \pi x)$, use sua calculadora para determinar a inclinação da reta secante PQ (com precisão de seis casas decimais) para os seguintes valores de x:

(i) 0 (ii) 0,4 (iii) 0,49 (iv) 0,499

(v) 1 (vi) 0,6 (vii) 0,51 (viii) 0,501

(b) Usando os resultados da parte (a), estime o valor da inclinação da reta tangente à curva no ponto $P(0{,}5; 0)$.

(c) Use a inclinação obtida na parte (b) para achar uma equação da reta tangente à curva em $P(0{,}5; 0)$.

(d) Esboce a curva, duas das retas secantes e a reta tangente.

5. Uma bola é atirada no ar com velocidade de 10 m/s. Sua altura em metros após t segundos é dada por $y = 10t - 4{,}9t^2$.

(a) Encontre a velocidade média para o período de tempo que começa quando $t = 1{,}5$ s e dura

(i) 0,5 s (ii) 0,1 s

(iii) 0,05 s (iv) 0,01 s

(b) Estime a velocidade instantânea quando $t = 1{,}5$ s.

6. Se uma pedra for jogada para cima no planeta Marte com velocidade de 10 m/s, sua altura (em metros) t segundos mais tarde é dada por $y = 10t - 1{,}86t^2$.

(a) Encontre a velocidade média entre os intervalos de tempo dados:

(i) [1, 2] (ii) [1; 1,5] (iii) [1; 1,1]

(iv) [1; 1,01] (v) [1; 1,001]

(b) Estime a velocidade instantânea quando $t = 1$.

7. A tabela mostra a posição de um ciclista.

t (segundos)	0	1	2	3	4	5
s (metros)	0	1,4	5,1	10,7	17,7	25,8

(a) Encontre a velocidade média nos períodos de tempo a seguir:

(i) [1, 3] (ii) [2, 3] (iii) [3, 5] (iv) [3, 4]

(b) Use o gráfico de s como uma função de t para estimar a velocidade instantânea quando $t = 3$.

8. O deslocamento (em centímetros) de uma partícula se movendo para frente e para trás ao longo de uma reta é dado pela equação de movimento $s = 2 \operatorname{sen} \pi t + 3 \cos \pi t$, em que t é medido em segundos.

(a) Encontre a velocidade média em cada período de tempo:

(i) [1, 2] (ii) [1; 1,1]

(iii) [1; 1,01] (iv) [1; 1,001]

(b) Estime a velocidade instantânea da partícula quando $t = 1$.

9. O ponto $P(1, 0)$ está sobre a curva $y = \operatorname{sen}(10\pi/x)$.

(a) Se Q for o ponto $(x, \operatorname{sen}(10\pi/x))$, encontre a inclinação da reta secante PQ (com precisão de quatro casas decimais) para $x = 2$, 1,5, 1,4, 1,3, 1,2, 1,1, 0,5, 0,6, 0,7, 0,8 e 0,9. As inclinações parecem tender a um limite?

(b) Use um gráfico da curva para explicar por que as inclinações das retas secantes da parte (a) não estão próximas da inclinação da reta tangente em P.

(c) Escolhendo as retas secantes apropriadas, estime a inclinação da reta tangente em P.

2.2 O Limite de uma Função

Tendo visto na seção anterior como surgem os limites quando queremos encontrar as tangentes a uma curva ou a velocidade de um objeto, vamos voltar nossa atenção para os limites em geral e para os métodos de calculá-los.

Vamos analisar o comportamento da função f definida por $f(x) = x^2 - x + 2$ para valores de x próximos de 2. A tabela a seguir fornece os valores de $f(x)$ para valores de x próximos de 2, mas não iguais a 2.

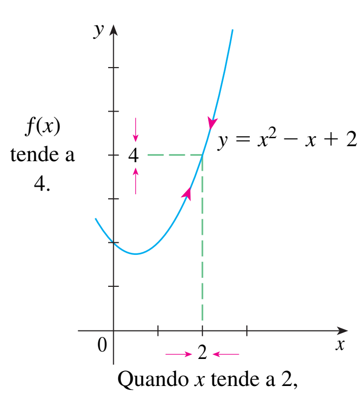


FIGURA 1

x	$f(x)$	x	$f(x)$
1,0	2,000000	3,0	8,000000
1,5	2,750000	2,5	5,750000
1,8	3,440000	2,2	4,640000
1,9	3,710000	2,1	4,310000
1,95	3,852500	2,05	4,152500
1,99	3,970100	2,01	4,030100
1,995	3,985025	2,005	4,015025
1,999	3,997001	2,001	4,003001

Da tabela e do gráfico de f (uma parábola) mostrado na Figura 1, vemos que quando x estiver próximo de 2 (de qualquer lado de 2), $f(x)$ tenderá a 4. De fato, parece que podemos tornar os valores de $f(x)$ tão próximos de 4 quanto quisermos, ao tornar x suficientemente próximo de 2. Expressamos isso dizendo que "o limite da função $f(x) = x^2 - x + 2$ quando x tende a 2 é igual a 4". A notação para isso é

$$\lim_{x \to 2} (x^2 - x + 2) = 4$$

Em geral, usamos a seguinte notação.

1 Definição Suponha que $f(x)$ seja definido quando está próximo ao número a. (Isso significa que f é definido em algum intervalo aberto que contenha a, exceto possivelmente no próprio a.) Então escrevemos

$$\lim_{x \to a} f(x) = L$$

e dizemos "o limite de $f(x)$, quando x tende a a, é igual a L"

se pudermos tornar os valores de $f(x)$ arbitrariamente próximos de L (tão próximos de L quanto quisermos), tornando x suficientemente próximo de a (por ambos os lados de a), mas não igual a a.

Grosso modo, isso significa que os valores de $f(x)$ tendem a L quando x tende a a. Em outras palavras, os valores de $f(x)$ tendem a ficar cada vez mais próximos do número L à medida que x tende ao número a (por qualquer lado de a), mas $x \neq a$. (Uma definição mais precisa será dada na Seção 2.4.)

Uma notação alternativa para

$$\lim_{x \to a} f(x) = L$$

é

$$f(x) \to L \quad \text{quando} \quad x \to a$$

que geralmente é lida como "$f(x)$ tende a L quando x tende a a".

Observe a frase "mas $x \neq a$" na definição de limite. Isso significa que, ao procurar o limite de $f(x)$ quando x tende a a, nunca consideramos $x = a$. Na verdade, $f(x)$ não precisa sequer estar definida quando $x = a$. A única coisa que importa é como f está definida *próximo de a*.

A Figura 2 mostra os gráficos de três funções. Note que, na parte (c), $f(a)$ não está definida e, na parte (b), $f(a) \neq L$. Mas, em cada caso, não importando o que acontece em a, é verdade que $\lim_{x \to a} f(x) = L$.

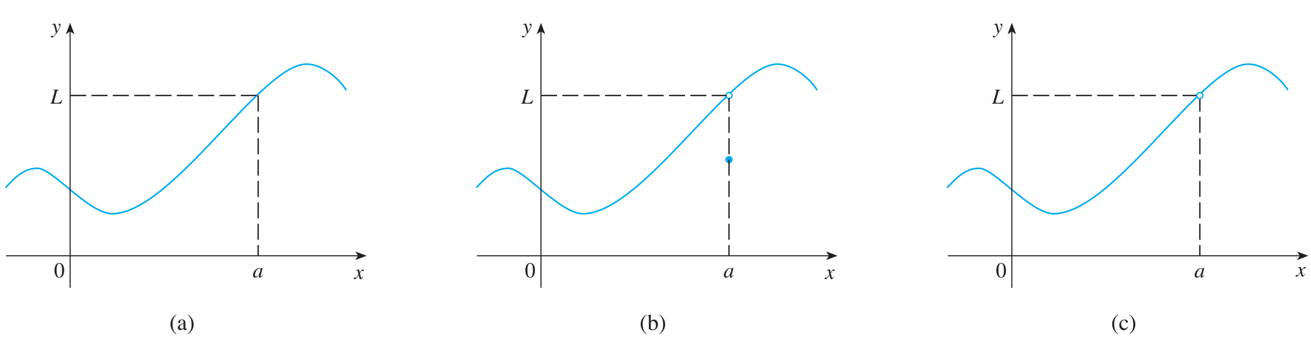


FIGURA 2 $\lim_{x \to a} f(x) = L$ nos três casos

EXEMPLO 1 Estime o valor de $\lim_{x \to 1} \dfrac{x - 1}{x^2 - 1}$.

SOLUÇÃO Observe que a função $f(x) = (x - 1)/(x^2 - 1)$ não está definida quando $x = 1$, mas isso não importa, pois a definição de $\lim_{x \to a} f(x)$ diz que devemos considerar valores de x que estão próximos de a, mas não são iguais a a.

As tabelas à esquerda na próxima página dão os valores de $f(x)$ (com precisão de seis casas decimais) para os valores de x que tendem a 1 (mas não são iguais a 1). Com base nesses valores, podemos conjecturar que

$x < 1$	$f(x)$
0,5	0,666667
0,9	0,526316
0,99	0,502513
0,999	0,500250
0,9999	0,500025

$x > 1$	$f(x)$
1,5	0,400000
1,1	0,476190
1,01	0,497512
1,001	0,499750
1,0001	0,499975

$$\lim_{x \to 1} \frac{x - 1}{x^2 - 1} = 0{,}5$$

O Exemplo 1 está ilustrado pelo gráfico de f na Figura 3. Agora, vamos mudar ligeiramente f definindo seu valor como 2 quando $x = 1$ e chamando a função resultante de g:

$$g(x) = \begin{cases} \dfrac{x - 1}{x^2 - 1} & \text{se } x \neq 1 \\ 2 & \text{se } x = 1 \end{cases}$$

Essa nova função g tem o mesmo limite quando x tende a 1 (veja a Figura 4).

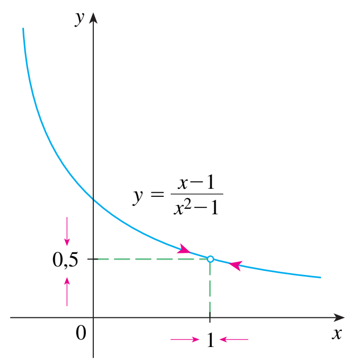


FIGURA 3

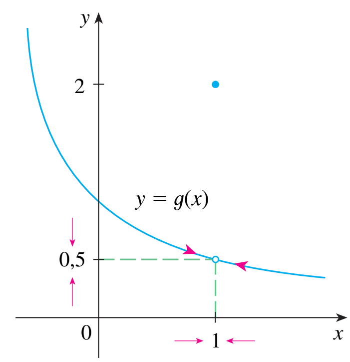


FIGURA 4

EXEMPLO 2 Estime o valor de $\displaystyle\lim_{t \to 0} \frac{\sqrt{t^2 + 9} - 3}{t^2}$.

SOLUÇÃO A tabela fornece uma lista de valores da função para vários valores de t próximos de 0.

t	$\dfrac{\sqrt{t^2 + 9} - 3}{t^2}$
$\pm 1{,}0$	0,16228
$\pm 0{,}5$	0,16553
$\pm 0{,}1$	0,16662
$\pm 0{,}05$	0,16666
$\pm 0{,}01$	0,16667

À medida que t tende a 0, os valores da função parecem tender a 0,1666666 . . . e, assim, podemos conjecturar que

$$\lim_{t \to 0} \frac{\sqrt{t^2 + 9} - 3}{t^2} = \frac{1}{6}$$

t	$\dfrac{\sqrt{t^2 + 9} - 3}{t^2}$
$\pm 0{,}0005$	0,16800
$\pm 0{,}0001$	0,20000
$\pm 0{,}00005$	0,00000
$\pm 0{,}00001$	0,00000

O que aconteceria no Exemplo 2 se tivéssemos dado valores ainda menores para t? A tabela ao lado mostra os resultados obtidos em uma calculadora; você pode observar que algo estranho acontece.

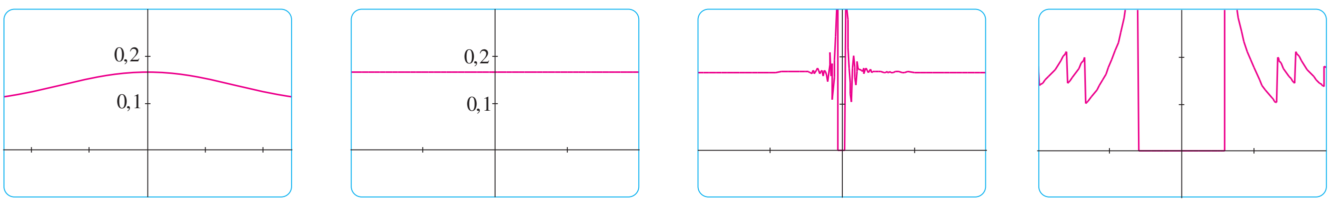
Se você tentar fazer esses cálculos em sua calculadora, poderá obter valores diferentes, mas finalmente vai obter o valor 0 para um t suficientemente pequeno. Isso significa que a resposta é realmente 0, e não $\frac{1}{6}$? Não, o valor do limite é $\frac{1}{6}$, como veremos na próxima seção. O problema é que a calculadora dá valores falsos, pois $\sqrt{t^2 + 9}$ fica muito próximo de 3 quando t é pequeno. (Na realidade, quando t é suficientemente pequeno, o valor obtido na calculadora para $\sqrt{t^2 + 9}$ é 3,000. . ., com tantas casas decimais quanto a calculadora for capaz de fornecer).

Para maiores explicações do motivo de calculadoras às vezes fornecerem valores falsos, acesse na Trilha "Mentiras que a minha calculadora e computador me contaram". Leia com atenção o ítem "Os perigos da subtração".

Algo muito parecido acontece ao tentarmos fazer o gráfico da função

$$f(t) = \frac{\sqrt{t^2 + 9} - 3}{t^2}$$

do Exemplo 2 em uma calculadora gráfica ou computador. As partes (a) e (b) da Figura 5 mostram gráficos bem precisos de f e, quando usamos o *trace mode* (se disponível), podemos facilmente estimar que o limite é de cerca de $\frac{1}{6}$. Porém, se dermos um *zoom*, como em (c) e (d), obteremos gráficos imprecisos, novamente em virtude de problemas com a subtração.



(a) $[-5, 5]$ por $[-0{,}1; 0{,}3]$ (b) $[-0{,}1; 0{,}1]$ por $[-0{,}1; 0{,}3]$ (c) $[-10^{-6}, 10^{-6}]$ por $[-0{,}1; 0{,}3]$ (d) $[-10^{-7}, 10^{-7}]$ por $[-0{,}1; 0{,}3]$

FIGURA 5

EXEMPLO 3 Faça uma estimativa de $\lim_{x \to 0} \frac{\text{sen}\, x}{x}$.

SOLUÇÃO A função $f(x) = (\text{sen}\, x)/x$ não está definida quando $x = 0$. Usando uma calculadora (e lembrando-se de que, se $x \in \mathbb{R}$, sen x indica o seno de um ângulo cuja medida em *radianos* é x), construímos a tabela ao lado usando valores com precisão de oito casas decimais. Da tabela e do gráfico da Figura 6, temos que

$$\lim_{x \to 0} \frac{\text{sen}\, x}{x} = 1$$

Essa suposição está de fato correta, como será demonstrado no Capítulo 3 usando argumentos geométricos.

x	$\frac{\text{sen}\, x}{x}$
$\pm 1{,}0$	0,84147098
$\pm 0{,}5$	0,95885108
$\pm 0{,}4$	0,97354586
$\pm 0{,}3$	0,98506736
$\pm 0{,}2$	0,99334665
$\pm 0{,}1$	0,99833417
$\pm 0{,}05$	0,99958339
$\pm 0{,}01$	0,99998333
$\pm 0{,}005$	0,99999583
$\pm 0{,}001$	0,99999983

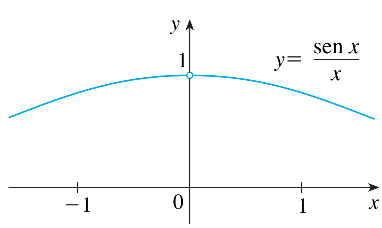


FIGURA 6

EXEMPLO 4 Analise $\lim_{x \to 0} \text{sen}\, \frac{\pi}{x}$.

SOLUÇÃO Mais uma vez a função $f(x) = \text{sen}(\pi/x)$ não está definida em 0. Calculando a função para alguns valores pequenos de x, temos

$$f(1) = \text{sen}\, \pi = 0 \qquad f\left(\tfrac{1}{2}\right) = \text{sen}\, 2\pi = 0$$

$$f\left(\tfrac{1}{3}\right) = \text{sen}\, 3\pi = 0 \qquad f\left(\tfrac{1}{4}\right) = \text{sen}\, 4\pi = 0$$

$$f(0{,}1) = \text{sen}\, 10\pi = 0 \qquad f(0{,}01) = \text{sen}\, 100\pi = 0$$

Da mesma maneira, $f(0{,}001) = f(0{,}0001) = 0$. Com base nessa informação, ficaríamos tentados a conjecturar que

$$\lim_{x \to 0} \text{sen}\, \frac{\pi}{x} = 0.$$

Sistemas de Computação Algébrica
Os sistemas de computação algébrica (SCA) têm comandos para calcular limites. A fim de evitar falhas como as ilustradas nos Exemplos 2, 4 e 5, eles não encontram os limites por experimentação numérica. Em vez disso, usam técnicas mais sofisticadas, como o cálculo de séries infinitas. Se você tiver acesso a um SCA, use o comando de limite para calcular os limites nos exemplos desta seção e verificar suas respostas para os exercícios deste capítulo.

Dessa vez, no entanto, nossa conjectura está errada. Observe que, embora $f(1/n) = \operatorname{sen} n\pi = 0$ para todo número inteiro n, é também verdadeiro que $f(x) = 1$ para infinitos valores de x que tendem a 0. Você poderá ver isto a partir do gráfico de f mostrado na Figura 7.

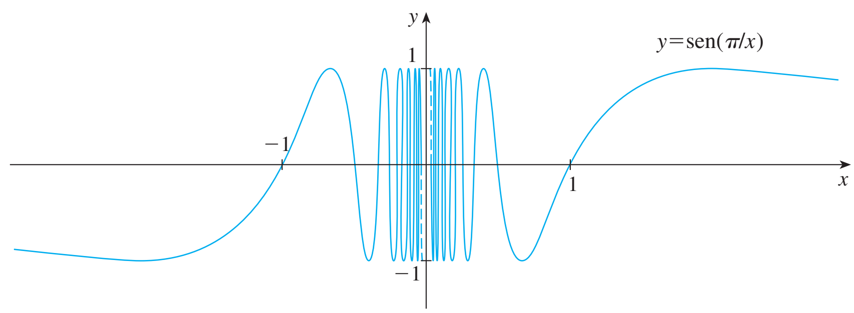


FIGURA 7

As linhas tracejadas perto do eixo de y indicam que os valores de $\operatorname{sen}(\pi/x)$ oscilam entre 1 e -1 infinitas vezes quando x tende a 0 (veja o Exercício 45).

Uma vez que os valores de $f(x)$ não tendem a um número fixo quando x tende a 0,

$$\lim_{x \to 0} \operatorname{sen} \frac{\pi}{x} \quad \text{não existe}$$

EXEMPLO 5 Encontre $\displaystyle \lim_{x \to 0} \left(x^3 + \frac{\cos 5x}{10\,000} \right)$.

x	$x^3 + \dfrac{\cos 5x}{10.000}$
1	1,000028
0,5	0,124920
0,1	0,001088
0,05	0,000222
0,01	0,000101

x	$x^3 + \dfrac{\cos 5x}{10.000}$
0,005	0,00010009
0,001	0,00010000

SOLUÇÃO Como antes, construímos uma tabela de valores. Pela primeira tabela à esquerda, parece que

$$\lim_{x \to 0} \left(x^3 + \frac{\cos 5x}{10\,000} \right) = 0$$

Mas, se continuarmos com os valores ainda menores de x, a segunda tabela sugere que

$$\lim_{x \to 0} \left(x^3 + \frac{\cos 5x}{10\,000} \right) = 0{,}000100 = \frac{1}{10\,000}$$

Mais tarde, veremos que $\lim_{x \to 0} \cos 5x = 1$, e então segue que o limite é 0,0001.

Os Exemplos 4 e 5 ilustram algumas das armadilhas na conjectura sobre o valor de um limite. É fácil conjecturar um valor falso se usarmos os valores não apropriados de x, mas é difícil saber quando parar de calcular valores. E, como mostra a discussão após o Exemplo 2, algumas vezes as calculadoras e os computadores dão valores falsos. Nas duas próximas seções, porém, vamos desenvolver métodos infalíveis no cálculo de limites.

EXEMPLO 6 A função de Heaviside, H, é definida por

$$H(t) = \begin{cases} 0 & \text{se } t < 0 \\ 1 & \text{se } t \geqslant 0 \end{cases}$$

[Essa função, cujo nome homenageia o engenheiro elétrico Oliver Heaviside (1850-1925), pode ser usada para descrever uma corrente elétrica que é ligada em $t = 0$.] Seu gráfico está na Figura 8.

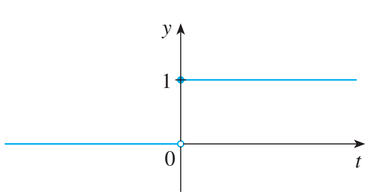


FIGURA 8
A função Heaviside

Quando t tende a 0 pela esquerda, $H(t)$ tende a 0. Quando t tende a 0 pela direita, $H(t)$ tende a 1. Não há um número único para o qual $H(t)$ tende quando t tende a 0. Portanto, $\lim_{t \to 0} H(t)$ não existe.

Limites Laterais

Vimos no Exemplo 6 que $H(t)$ tende a 0 quando t tende a 0 pela esquerda, e $H(t)$ tende a 1 quando t tende a 0 pela direita. Indicamos essa situação simbolicamente escrevendo

$$\lim_{t \to 0^-} H(t) = 0 \qquad \text{e} \qquad \lim_{t \to 0^+} H(t) = 1$$

O símbolo "$t \to 0^-$" indica que estamos considerando somente valores de t menores que 0. Da mesma forma, "$t \to 0^+$" indica que estamos considerando somente valores de t maiores que 0.

$\boxed{2}$ **Definição** Escrevemos

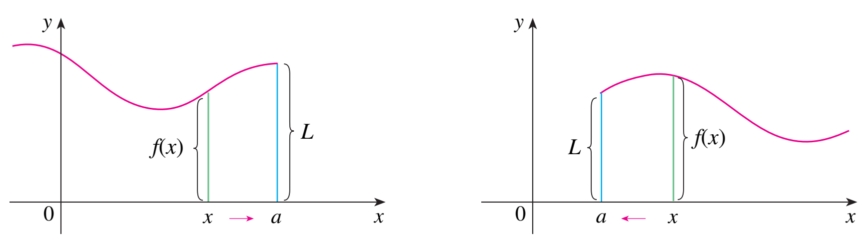
$$\lim_{x \to a^-} f(x) = L$$

e dizemos que o **limite à esquerda** de **$f(x)$ quando x tende a a** [ou o **limite d e$f(x)$ quando x tende a a pela esquerda**] é igual a L se pudermos tornar os valores de $f(x)$ arbitrariamente próximos de L, para x suficientemente próximo de a e x menor que a.

Perceba que a Definição 2 difere da Definição 1 somente por necessitarmos que x seja menor que a. De maneira semelhante, se exigirmos que x seja maior que a, obtemos "o **limite à direita de $f(x)$ quando x tende a a** é igual a L" e escrevemos

$$\lim_{x \to a^+} f(x) = L$$

Dessa forma, o símbolo "$x \to a^+$" indica que estamos considerando somente $x > a$. Essas definições estão ilustradas na Figura 9.



(a) $\lim_{x \to a^-} f(x) = L$ (b) $\lim_{x \to a^+} f(x) = L$

FIGURA 9

Comparando a Definição 1 com as definições de limites laterais, vemos ser verdadeiro o que segue.

$$\boxed{3} \quad \lim_{x \to a} f(x) = L \quad \text{se e somente se} \quad \lim_{x \to a^-} f(x) = L \quad \text{e} \quad \lim_{x \to a^+} f(x) = L$$

EXEMPLO 7 O gráfico de uma função g é apresentado na Figura 10. Use-o para estabelecer os valores (caso existam) dos seguintes limites:

(a) $\lim_{x \to 2^-} g(x)$ (b) $\lim_{x \to 2^+} g(x)$ (c) $\lim_{x \to 2} g(x)$

(d) $\lim_{x \to 5^-} g(x)$ (e) $\lim_{x \to 5^+} g(x)$ (f) $\lim_{x \to 5} g(x)$

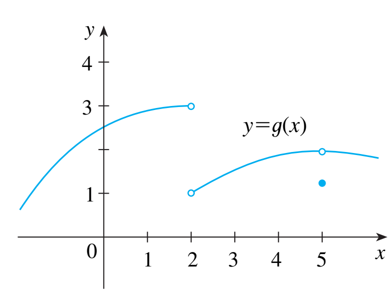


FIGURA 10

SOLUÇÃO A partir do gráfico, vemos que os valores de $g(x)$ tendem a 3 à medida que os de x tendem a 2 pela esquerda, mas tendem a 1 quando x tende a 2 pela direita. Logo

$$\text{(a)} \lim_{x \to 2^-} g(x) = 3 \qquad \text{e} \qquad \text{(b)} \lim_{x \to 2^+} g(x) = 1$$

(c) Uma vez que são diferentes os limites à esquerda e à direita, concluímos de $\boxed{3}$ que $\lim_{x \to 2} g(x)$ não existe.

O gráfico mostra também que

$$\text{(d)} \lim_{x \to 5^-} g(x) = 2 \qquad \text{e} \qquad \text{(e)} \lim_{x \to 5^+} g(x) = 2$$

(f) Agora, os limites à esquerda e à direita são iguais; assim, de $\boxed{3}$, temos

$$\lim_{x \to 5} g(x) = 2$$

Apesar desse fato, observe que $g(5) \neq 2$.

Limites Infinitos

x	$\dfrac{1}{x^2}$
± 1	1
$\pm 0{,}5$	4
$\pm 0{,}2$	25
$\pm 0{,}1$	100
$\pm 0{,}05$	400
$\pm 0{,}01$	10.000
$\pm 0{,}001$	1.000.000

EXEMPLO 8 Encontre $\lim_{x \to 0} \dfrac{1}{x^2}$, se existir.

SOLUÇÃO À medida que x tende a 0, x^2 também tende a 0, e $1/x^2$ fica muito grande. (Veja a tabela na margem.) De fato, a partir do gráfico da função $f(x) = 1/x^2$ da Figura 11, parece que a função $f(x)$ pode se tornar arbitrariamente grande ao tornarmos os valores de x suficientemente próximos de 0. Assim, os valores de $f(x)$ não tendem a um número, e não existe $\lim_{x \to 0} (1/x^2)$.

Para indicar o tipo de comportamento exibido no Exemplo 8 usamos a notação

$$\lim_{x \to 0} \frac{1}{x^2} = \infty$$

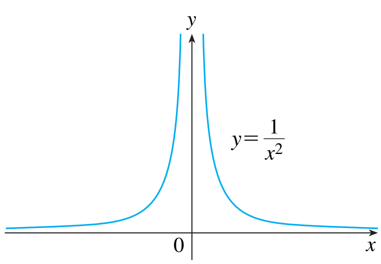


FIGURA 11

Isso não significa que consideramos ∞ como um número. Tampouco significa que o limite existe. Expressa simplesmente uma maneira particular de não existência de limite: $1/x^2$ pode ser tão grande quanto quisermos, tornando x suficientemente perto de 0.

Em geral, simbolicamente, escrevemos

$$\lim_{x \to a} f(x) = \infty$$

para indicar que os valores de $f(x)$ tendem a se tornar cada vez maiores (ou "a crescer ilimitadamente") à medida que x se tornar cada vez mais próximo de a.

4 Definição Seja f uma função definida em ambos os lados de a, exceto possivelmente no próprio a. Então

$$\lim_{x \to a} f(x) = \infty$$

significa que podemos fazer os valores de $f(x)$ ficarem arbitrariamente grandes (tão grandes quanto quisermos) tornando x suficientemente próximo de a, mas não igual a a.

Outra notação para $\lim_{x \to a} f(x) = \infty$ é

$$f(x) \to \infty \qquad \text{quando} \qquad x \to a$$

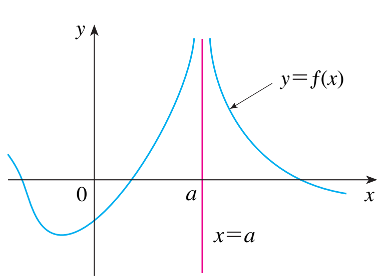


FIGURA 12
$\lim_{x \to a} f(x) = \infty$

Novamente, o símbolo ∞ não é um número; todavia, a expressão $\lim_{x \to a} f(x) = \infty$ é usualmente lida como

"o limite de $f(x)$, quando x tende a a, é infinito"

ou "$f(x)$ se torna infinito quando x tende a a"

ou "$f(x)$ cresce ilimitadamente quando x tende a a"

Essa definição está ilustrada na Figura 12.

Um tipo análogo de limite, para funções que se tornam grandes em valor absoluto, porém negativas, quando x tende a a, cujo significado está na Definição 5, é ilustrado na Figura 13.

5 Definição Seja f definida em ambos os lados de a, exceto possivelmente no próprio a. Então

$$\lim_{x \to a} f(x) = -\infty$$

significa que os valores de $f(x)$ podem ser arbitrariamente grandes, porém negativos, ao tornarmos x suficientemente próximo de a, mas não igual a a.

Quando dizemos que um número é um "negativo grande", queremos dizer que ele é negativo, mas que seu valor absoluto é grande.

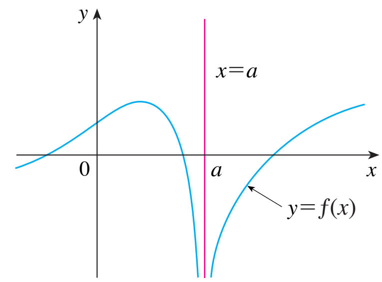


FIGURA 13
$\lim_{x \to a} f(x) = -\infty$

O símbolo $\lim_{x \to a} f(x) = -\infty$ pode ser lido das seguintes formas: "o limite de $f(x)$ quando tende a a é menos infinito", ou "$f(x)$ decresce ilimitadamente quando x tende a a". Como exemplo, temos

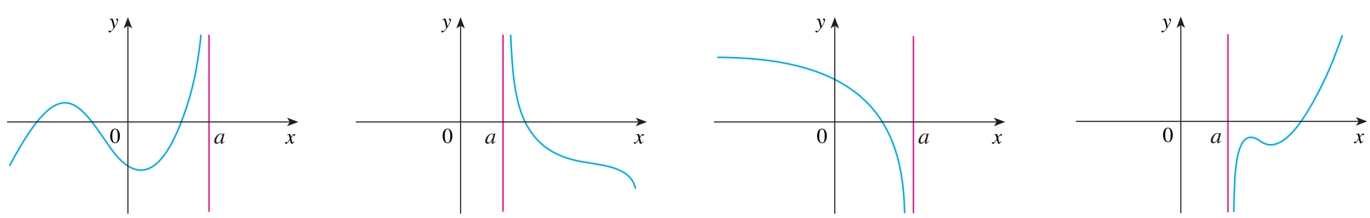
$$\lim_{x \to 0} \left(-\frac{1}{x^2} \right) = -\infty$$

Definições similares podem ser dadas no caso de limites laterais

$$\lim_{x \to a^-} f(x) = \infty \qquad \lim_{x \to a^+} f(x) = \infty$$

$$\lim_{x \to a^-} f(x) = -\infty \qquad \lim_{x \to a^+} f(x) = -\infty$$

lembrando que "$x \to a^-$" significa considerar somente os valores de x menores que a, ao passo que "$x \to a^+$" significa considerar somente $x > a$. Ilustrações desses quatro casos são dados na Figura 14.



(a) $\lim_{x \to a^-} f(x) = \infty$ (b) $\lim_{x \to a^+} f(x) = \infty$ (c) $\lim_{x \to a^-} f(x) = -\infty$ (d) $\lim_{x \to a^+} f(x) = -\infty$

FIGURA 14

6 Definição A reta $x = a$ é chamada **assíntota vertical** da curva $y = f(x)$ se pelo menos uma das seguintes condições estiver satisfeita:

$$\lim_{x \to a} f(x) = \infty \qquad \lim_{x \to a^-} f(x) = \infty \qquad \lim_{x \to a^+} f(x) = \infty$$

$$\lim_{x \to a} f(x) = -\infty \qquad \lim_{x \to a^-} f(x) = -\infty \qquad \lim_{x \to a^+} f(x) = -\infty$$

Por exemplo, o eixo y é uma assíntota vertical da curva $y = 1/x^2$, pois $\lim_{x \to 0} (1/x^2) = \infty$. Na Figura 14, a reta $x = a$ é uma assíntota vertical em cada um dos quatro casos considerados. Em geral, o conhecimento de assíntotas verticais é muito útil no esboço de gráficos.

EXEMPLO 9 Encontre $\displaystyle\lim_{x \to 3^+} \frac{2x}{x-3}$ e $\displaystyle\lim_{x \to 3^-} \frac{2x}{x-3}$.

SOLUÇÃO Se x está próximo a 3 mas é maior que 3, então o denominador $x - 3$ é um número positivo pequeno e $2x$ está próximo a 6. Portanto, o quociente $2x/(x-3)$ é um número *positivo* grande. Então, intuitivamente, temos que

$$\lim_{x \to 3^+} \frac{2x}{x-3} = \infty$$

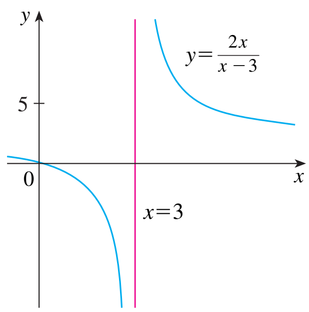


FIGURA 15

Analogamente, se x está próximo a 3 mas é menor que 3, então $x - 3$ é um número negativo pequeno, mas $2x$ ainda é um número positivo (próximo a 6). Portanto, $2x/(x - 3)$ é um número *negativo* grande. Assim,

$$\lim_{x \to 3^-} \frac{2x}{x - 3} = -\infty$$

O gráfico da curva $y = 2x/(x - 3)$ está dado na Figura 15. A reta $x = 3$ é uma assíntota vertical.

EXEMPLO 10 Encontre as assíntotas verticais de $f(x) = \operatorname{tg} x$.

SOLUÇÃO Como

$$\operatorname{tg} x = \frac{\operatorname{sen} x}{\cos x}$$

existem assíntotas verticais em potencial nos pontos nos quais $\cos x = 0$. De fato, como $\cos x \to 0^+$ quando $x \to (\pi/2)^-$ e $\cos x \to 0^-$ quando $x \to (\pi/2)^+$, enquanto $\operatorname{sen} x$ é positivo quando x está próximo de $\pi/2$, temos

$$\lim_{x \to (\pi/2)^-} \operatorname{tg} x = \infty \qquad \text{e} \qquad \lim_{x \to (\pi/2)^+} \operatorname{tg} x = -\infty$$

Isso mostra que a reta $x = \pi/2$ é uma assíntota vertical. Um raciocínio similar mostra que as retas $x = (2n + 1)\pi/2$, onde n é um número inteiro, são todas assíntotas verticais de $f(x) = \operatorname{tg} x$. O gráfico da Figura 16 confirma isso.

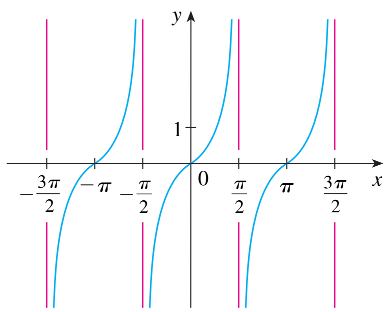


FIGURA 16
$y = \operatorname{tg} x$

Outro exemplo de uma função cujo gráfico tem uma assíntota vertical é a função logaritmo natural $y = \ln x$. Da Figura 17, vemos que

$$\boxed{\lim_{x \to 0^+} \ln x = -\infty}$$

e, assim, a reta $x = 0$ (o eixo y) é uma assíntota vertical. Na realidade, isso é válido para $y = \log_a x$ desde que $a > 1$. (Veja as Figuras 11 e 12 na Seção 1.6.)

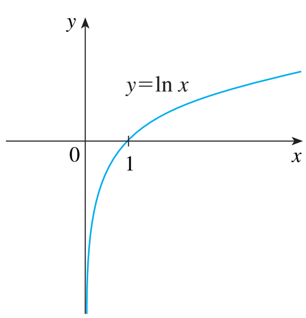


FIGURA 17
O eixo y é uma assíntota vertical da função logaritmo natural.

2.2 Exercícios

1. Explique com suas palavras o significado da equação

$$\lim_{x \to 2} f(x) = 5$$

É possível que a equação anterior seja verdadeira, mas que $f(2) = 3$? Explique.

2. Explique o que significa dizer que

$$\lim_{x \to 1^-} f(x) = 3 \qquad \text{e} \qquad \lim_{x \to 1^+} f(x) = 7$$

Nesta situação, é possível que $\lim_{x \to 1} f(x)$ exista? Explique.

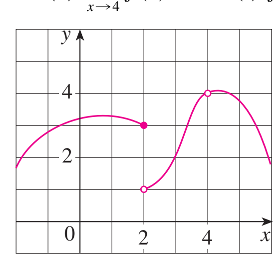
3. Explique o significado de cada uma das notações a seguir.

(a) $\lim_{x \to -3} f(x) = \infty$ (b) $\lim_{x \to 4^+} f(x) = -\infty$

4. Use o gráfico dado de f para dizer o valor de cada quantidade, se ela existir. Se não existir, explique por quê.

(a) $\lim_{x \to 2^-} f(x)$ (b) $\lim_{x \to 2^+} f(x)$ (c) $\lim_{x \to 2} f(x)$

(d) $f(2)$ (e) $\lim_{x \to 4} f(x)$ (f) $f(4)$



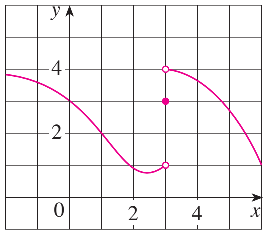
É necessário uma calculadora gráfica ou computador

1. As Homework Hints estão disponíveis em www.stewartcalculus.com

5. Para a função f, cujo gráfico é dado, diga o valor de cada quantidade indicada, se ela existir. Se não existir, explique por quê.

(a) $\lim_{x\to 1} f(x)$ (b) $\lim_{x\to 3^-} f(x)$ (c) $\lim_{x\to 3^+} f(x)$

(d) $\lim_{x\to 3} f(x)$ (e) $f(3)$



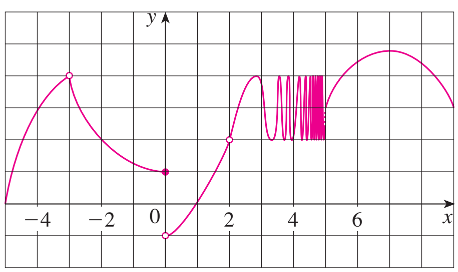
6. Para a função h cujo gráfico é dado, diga o valor da cada quantidade, se ela existir. Se não existir, explique por quê.

(a) $\lim_{x\to -3^-} h(x)$ (b) $\lim_{x\to -3^+} h(x)$ (c) $\lim_{x\to -3} h(x)$

(d) $h(-3)$ (e) $\lim_{x\to 0^-} h(x)$ (f) $\lim_{x\to 0^+} h(x)$

(g) $\lim_{x\to 0} h(x)$ (h) $h(0)$ (i) $\lim_{x\to 2} h(x)$

(j) $h(2)$ (k) $\lim_{x\to 5^+} h(x)$ (l) $\lim_{x\to 5^-} h(x)$

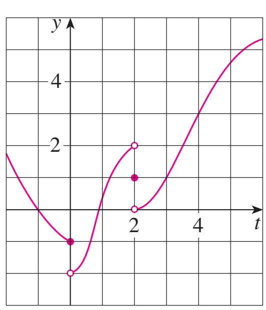


7. Para a função g cujo gráfico é dado, diga o valor da cada quantidade, se ela existir. Se não existir, explique por quê.

(a) $\lim_{t\to 0^-} g(t)$ (b) $\lim_{t\to 0^+} g(t)$ (c) $\lim_{t\to 0} g(t)$

(d) $\lim_{t\to 2^-} g(t)$ (e) $\lim_{t\to 2^+} g(t)$ (f) $\lim_{t\to 2} g(t)$

(g) $g(2)$ (h) $\lim_{t\to 4} g(t)$

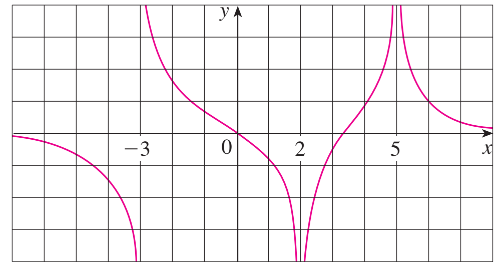


8. Para a função R, cujo gráfico é mostrado a seguir, diga quem são:

(a) $\lim_{x\to 2} R(x)$ (b) $\lim_{x\to 5} R(x)$

(c) $\lim_{x\to -3^-} R(x)$ (d) $\lim_{x\to -3^+} R(x)$

(e) As equações das assíntotas verticais.

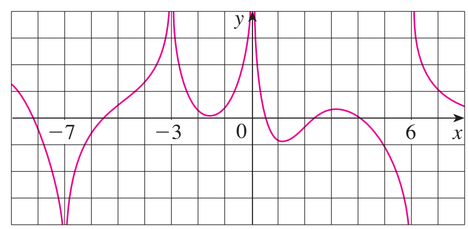


9. Para a função f cujo gráfico é mostrado a seguir, determine o seguinte:

(a) $\lim_{x\to -7} f(x)$ (b) $\lim_{x\to -3} f(x)$ (c) $\lim_{x\to 0} f(x)$

(d) $\lim_{x\to 6^-} f(x)$ (e) $\lim_{x\to 6^+} f(x)$

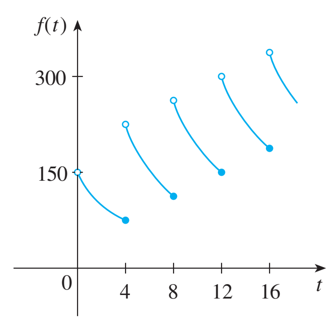
(f) As equações das assíntotas verticais.



10. Um paciente recebe uma injeção de 150 mg de uma droga a cada 4 horas. O gráfico mostra a quantidade $f(t)$ da droga na corrente sanguínea após t horas. Encontre

$$\lim_{t\to 12^-} f(t) \quad \text{e} \quad \lim_{t\to 12^+} f(t)$$

e explique o significado desses limites laterais.



11–12 Esboce o gráfico da função e use-o para determinar os valores de a para os quais $\lim_{x\to a} f(x)$ existe:

11. $f(x) = \begin{cases} 1 + x & \text{se } x < -1 \\ x^2 & \text{se } -1 \leqslant x < 1 \\ 2 - x & \text{se } x \geqslant 1 \end{cases}$

12. $f(x) = \begin{cases} 1 + \operatorname{sen} x & \text{se } x < 0 \\ \cos x & \text{se } 0 \leqslant x \leqslant \pi \\ \operatorname{sen} x & \text{se } x > \pi \end{cases}$

13–14 Use o gráfico da função f para dizer o valor de cada limite, se existir. Se não existir, explique por quê.

(a) $\lim_{x\to 0^-} f(x)$ (b) $\lim_{x\to 0^+} f(x)$ (c) $\lim_{x\to 0} f(x)$

13. $f(x) = \dfrac{1}{1 + e^{1/x}}$

14. $f(x) = \dfrac{x^2 + x}{\sqrt{x^3 + x^2}}$

15–18 Esboce o gráfico de um exemplo de uma função f que satisfaça a todas as condições dadas.

15. $\lim\limits_{x\to 1^-} f(x) = 2, \quad \lim\limits_{x\to 1^+} f(x) = -2, \quad f(1) = 2$

16. $\lim\limits_{x\to 0^-} f(x) = 1, \quad \lim\limits_{x\to 0^+} f(x) = -1, \quad \lim\limits_{x\to 2^-} f(x) = 0,$
$\lim\limits_{x\to 2^+} f(x) = 1, \quad f(2) = 1, \quad f(0)$ não está definido

17. $\lim\limits_{x\to 3^+} f(x) = 4, \quad \lim\limits_{x\to 3^-} f(x) = 2, \quad \lim\limits_{x\to -2} f(x) = 2,$
$f(3) = 3, \quad f(-2) = 1$

18. $\lim\limits_{x\to 0^-} f(x) = 2, \quad \lim\limits_{x\to 0^+} f(x) = 0, \quad \lim\limits_{x\to 4^-} f(x) = 3,$
$\lim\limits_{x\to 4^+} f(x) = 0, \quad f(0) = 2, \quad f(4) = 1$

19–22 Faça uma conjectura sobre o valor do limite (se ele existir) por meio dos valores da função nos números dados (com precisão de seis casas decimais).

19. $\lim\limits_{x\to 2} \dfrac{x^2 - 2x}{x^2 - x - 2}$,
$x = 2{,}5,\ 2{,}1,\ 2{,}05,\ 2{,}01,\ 2{,}005,\ 2{,}001,$
$1{,}9,\ 1{,}95,\ 1{,}99,\ 1{,}995,\ 1{,}999$

20. $\lim\limits_{x\to -1} \dfrac{x^2 - 2x}{x^2 - x - 2}$,
$x = 0,\ -0{,}5,\ -0{,}9,\ -0{,}95,\ -0{,}99,\ -0{,}999,$
$-2,\ -1{,}5,\ -1{,}1,\ -1{,}01,\ -1{,}001$

21. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{e^x - 1 - x}{x^2}, \quad x = \pm 1,\ \pm 0{,}5,\ \pm 0{,}1,\ \pm 0{,}05,\ \pm 0{,}01$

22. $\lim\limits_{x\to 0^+} x \ln(x + x^2), \quad x = 1,\ 0{,}5,\ 0{,}1,\ 0{,}05,\ 0{,}01,\ 0{,}005,\ 0{,}001$

23–26 Use uma tabela de valores para estimar o valor do limite. Se você tiver alguma ferramenta gráfica, use-a para confirmar seu resultado.

23. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sqrt{x + 4} - 2}{x}$

24. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\operatorname{tg} 3x}{\operatorname{tg} 5x}$

25. $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{x^6 - 1}{x^{10} - 1}$

26. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{9^x - 5^x}{x}$

27. (a) A partir do gráfico da função $f(x) = (\cos 2x - \cos x)/x^2$ e dando *zoom* no ponto em que o gráfico cruza o eixo y, estime o valor de $\lim_{x\to 0} f(x)$.
(b) Verifique sua resposta da parte (a), calculando $f(x)$ para valores de x que se aproximem de 0.

28. (a) Estime o valor de

$$\lim_{x\to 0} \frac{\operatorname{sen} x}{\operatorname{sen} \pi x}$$

traçando o gráfico da função $f(x) = (\operatorname{sen} x)/(\operatorname{sen} \pi x)$. Forneça sua resposta com precisão de duas casas decimais.
(b) Verifique sua resposta da parte (a) calculando $f(x)$ para valores de x que se aproximem de 0.

29–37 Determine o limite infinito.

29. $\lim\limits_{x\to -3^+} \dfrac{x + 2}{x + 3}$

30. $\lim\limits_{x\to -3^-} \dfrac{x + 2}{x + 3}$

31. $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{2 - x}{(x - 1)^2}$

32. $\lim\limits_{x\to 5^-} \dfrac{e^x}{(x - 5)^3}$

33. $\lim\limits_{x\to 3^+} \ln(x^2 - 9)$

34. $\lim\limits_{x\to \pi^-} \cot x$

35. $\lim\limits_{x\to 2\pi^-} x \csc x$

36. $\lim\limits_{x\to 2^-} \dfrac{x^2 - 2x}{x^2 - 4x + 4}$

37. $\lim\limits_{x\to 2^+} \dfrac{x^2 - 2x - 8}{x^2 - 5x + 6}$

38. (a) Encontre as assíntotas verticais da função

$$y = \frac{x^2 + 1}{3x - 2x^2}$$

(b) Confirme sua resposta da parte (a) fazendo o gráfico da função.

39. Determine $\lim\limits_{x\to 1^-} \dfrac{1}{x^3 - 1}$ e $\lim\limits_{x\to 1^+} \dfrac{1}{x^3 - 1}$
(a) calculando $f(x) = 1/(x^3 - 1)$ para valores de x que se aproximam de 1 pela esquerda e pela direita,
(b) raciocinando como no Exemplo 9, e
(c) a partir do gráfico de f.

40. (a) A partir do gráfico da função $f(x) = (\operatorname{tg} 4x)/x$ e dando *zoom* no ponto em que o gráfico cruza o eixo y, estime o valor de $\lim_{x\to 0} f(x)$.
(b) Verifique sua resposta da parte (a) calculando $f(x)$ para valores de x que se aproximam de 0.

41. (a) Estime o valor do limite $\lim_{x\to 0} (1 + x)^{1/x}$ com cinco casas decimais. Esse número lhe parece familiar?
(b) Ilustre a parte (a) fazendo o gráfico da função $y = (1 + x)^{1/x}$.

42. (a) Faça o gráfico da função $f(x) = e^x + \ln|x - 4|$ para $0 \leqslant x \leqslant 5$. Você acha que o gráfico é uma representação precisa de f?
(b) Como você faria para que o gráfico represente melhor f?

43. (a) Avalie a função $f(x) = x^2 - (2^x/1.000)$ para $x = 1,\ 0{,}8,\ 0{,}6,\ 0{,}4,\ 0{,}2,\ 0{,}1$ e $0{,}05$, e conjecture qual o valor de

$$\lim_{x\to 0} \left(x^2 - \frac{2^x}{1.000} \right)$$

(b) Avalie $f(x)$ para $x = 0{,}04,\ 0{,}02,\ 0{,}01,\ 0{,}005,\ 0{,}003$ e $0{,}001$. Faça uma nova conjectura.

44. (a) Avalie $h(x) = (\operatorname{tg} x - x)/x^3$ para $x = 1,\ 0{,}5,\ 0{,}1,\ 0{,}05,\ 0{,}01$ e $0{,}005$.
(b) Estime o valor de $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\operatorname{tg} x - x}{x^3}$
(c) Calcule $h(x)$ para valores sucessivamente menores de x até finalmente atingir um valor de 0 para $h(x)$. Você ainda está confiante que a conjectura em (b) está correta? Explique como finalmente obteve valores 0. (Na Seção 4.4 veremos um método para calcular esse limite.)
(d) Faça o gráfico da função h na janela retangular $[-1, 1]$ por $[0, 1]$. Dê *zoom* até o ponto onde o gráfico corta o eixo y para estimar o limite de $h(x)$ quando x tende a 0. Continue

dando *zoom* até observar distorções no gráfico de h. Compare com os resultados da parte (c).

45. Faça o gráfico da função $f(x) = \operatorname{sen}(\pi/x)$ do Exemplo 4 na janela retangular $[-1, 1]$ por $[-1, 1]$. Então dê um *zoom* em direção à origem diversas vezes. Comente o comportamento dessa função.

46. Na teoria da relatividade, a massa de uma partícula com velocidade v é

$$m = \frac{m_0}{\sqrt{1 - v^2/c^2}}$$

onde m_0 é a massa da partícula em repouso e c, a velocidade da luz. O que acontece se $v \to c^-$?

47. Use um gráfico para estimar as equações de todas as assíntotas verticais da curva

$$y = \operatorname{tg}(2 \operatorname{sen} x) \qquad -\pi \leqslant x \leqslant \pi$$

Encontre, então, as equações exatas dessas assíntotas.

48. (a) Use evidências numéricas e gráficas para fazer uma conjectura sobre o valor do limite

$$\lim_{x \to 1} \frac{x^3 - 1}{\sqrt{x} - 1}$$

(b) A que distância de 1 deverá estar x para garantir que a função da parte (a) esteja a uma distância de 0,5 de seu limite?

2.3 Cálculos Usando Propriedades dos Limites

Na Seção 2.2 empregamos gráficos e calculadoras para fazer conjecturas sobre o valor de limites, mas vimos que esses métodos nem sempre levam a respostas corretas. Nesta seção usaremos as *Propriedades dos Limites*, para calculá-los.

Propriedades dos Limites Supondo que c seja uma constante e os limites

$$\lim_{x \to a} f(x) \qquad \text{e} \qquad \lim_{x \to a} g(x)$$

existam, então

1. $\lim_{x \to a} [f(x) + g(x)] = \lim_{x \to a} f(x) + \lim_{x \to a} g(x)$

2. $\lim_{x \to a} [f(x) - g(x)] = \lim_{x \to a} f(x) - \lim_{x \to a} g(x)$

3. $\lim_{x \to a} [cf(x)] = c \lim_{x \to a} f(x)$

4. $\lim_{x \to a} [f(x)\,g(x)] = \lim_{x \to a} f(x) \cdot \lim_{x \to a} g(x)$

5. $\displaystyle\lim_{x \to a} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{\lim_{x \to a} f(x)}{\lim_{x \to a} g(x)}$ se $\lim_{x \to a} g(x) \neq 0$

Essas cinco propriedades podem ser enunciadas da seguinte forma:

1. O limite de uma soma é a soma dos limites. — Propriedade da Soma
2. O limite de uma diferença é a diferença dos limites. — Propriedade da Diferença
3. O limite de uma constante multiplicando uma função é a constante multiplicando o limite desta função. — Propriedade da Multiplicação por Constante
4. O limite de um produto é o produto dos limites. — Propriedade do Produto
5. O limite de um quociente é o quociente dos limites (desde que o limite do denominador não seja zero). — Propriedade do Quociente

É fácil acreditar que essas propriedades são verdadeiras. Por exemplo, se $f(x)$ estiver próximo de L e $g(x)$ estiver próximo a M, é razoável concluir que $f(x) + g(x)$ está próximo a $L + M$. Isso nos dá uma base intuitiva para acreditar que a Propriedade 1 é verdadeira. Na Seção 2.4 daremos uma definição precisa de limite e a usaremos para demonstrar essa propriedade. As demonstrações das propriedades remanescentes encontram-se no Apêndice F.

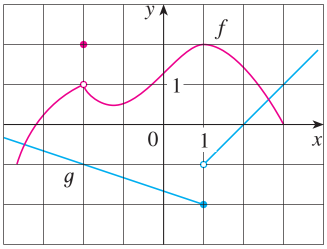


FIGURA 1

EXEMPLO 1 Use as Propriedades dos Limites e os gráficos de f e g na Figura 1 para calcular os seguintes limites, se eles existirem.

(a) $\lim_{x \to -2} [f(x) + 5g(x)]$ (b) $\lim_{x \to 1} [f(x)g(x)]$ (c) $\lim_{x \to 2} \dfrac{f(x)}{g(x)}$

SOLUÇÃO

(a) Dos gráficos de f e g vemos que

$$\lim_{x \to -2} f(x) = 1 \qquad \text{e} \qquad \lim_{x \to -2} g(x) = -1$$

Portanto, temos

$$\begin{aligned} \lim_{x \to -2} [f(x) + 5g(x)] &= \lim_{x \to -2} f(x) + \lim_{x \to -2} [5g(x)] && \text{(pela Propriedade 1)} \\ &= \lim_{x \to -2} f(x) + 5 \lim_{x \to -2} g(x) && \text{(pela Propriedade 3)} \\ &= 1 + 5(-1) = -4 \end{aligned}$$

(b) Vemos que $\lim_{x \to 1} f(x) = 2$. Mas $\lim_{x \to 1} g(x)$ não existe, pois os limites à esquerda e à direita são diferentes:

$$\lim_{x \to 1^-} g(x) = -2 \qquad \lim_{x \to 1^+} g(x) = -1$$

Assim, não podemos usar a Propriedade 4 para o limite solicitado. Mas *podemos* usar a Propriedade 4 para os limites laterais:

$$\lim_{x \to 1^-} [f(x)g(x)] = 2 \cdot (-2) = -4 \qquad \lim_{x \to 1^+} [f(x)g(x)] = 2 \cdot (-1) = -2$$

Os limites à esquerda e à direita não são iguais, logo $\lim_{x \to 1} [f(x)g(x)]$ não existe.

(c) Os gráficos mostram que

$$\lim_{x \to 2} f(x) \approx 1{,}4 \qquad \text{e} \qquad \lim_{x \to 2} g(x) = 0$$

Como o limite do denominador é 0, não podemos usar a Propriedade 5. O limite dado não existe, pois o denominador tende a 0, enquanto o numerador tende a um número diferente de 0. ■

Usamos a Propriedade do Produto repetidamente com $g(x) = f(x)$ para obter a seguinte equação.

Propriedade da Potência

6. $\lim_{x \to a} [f(x)]^n = \left[\lim_{x \to a} f(x)\right]^n$ onde n é um inteiro positivo

Para aplicar essas seis propriedades, vamos precisar usar dois limites especiais:

7. $\lim_{x \to a} c = c$ **8.** $\lim_{x \to a} x = a$

Esses limites são óbvios do ponto de vista intuitivo (expresse-os em palavras ou esboce os gráficos de $y = c$ e $y = x$), mas as demonstrações baseadas na definição precisa serão pedidas nos exercícios da Seção 2.4.

Se pusermos agora $f(x) = x$ nas Propriedades 6 e 8, vamos obter outro limite especial útil.

9. $\lim_{x \to a} x^n = a^n$ onde n é um inteiro positivo

Um limite similar é válido para as raízes da forma a seguir. (Para as raízes quadradas, a demonstração está esboçada no Exercício 37 da Seção 2.4.)

10. $\lim_{x \to a} \sqrt[n]{x} = \sqrt[n]{a}$ onde n é um inteiro positivo

(Se n for par, supomos que $a > 0$.)

De forma mais geral, temos a seguinte Propriedade, que será demonstrada na Seção 2.5 como consequência da Propriedade 10.

Propriedade da Raiz

11. $\lim_{x \to a} \sqrt[n]{f(x)} = \sqrt[n]{\lim_{x \to a} f(x)}$ onde n é um inteiro positivo

$\left[\text{Se } n \text{ for par, supomos que } \lim_{x \to a} f(x) > 0.\right]$

EXEMPLO 2 Calcule os limites a seguir justificando cada passagem.

(a) $\lim_{x \to 5} (2x^2 - 3x + 4)$ (b) $\lim_{x \to -2} \dfrac{x^3 + 2x^2 - 1}{5 - 3x}$

SOLUÇÃO

(a)
$$\begin{aligned}
\lim_{x \to 5} (2x^2 - 3x + 4) &= \lim_{x \to 5} (2x^2) - \lim_{x \to 5} (3x) + \lim_{x \to 5} 4 && \text{(pelas Propriedades 2 e 1)} \\
&= 2 \lim_{x \to 5} x^2 - 3 \lim_{x \to 5} x + \lim_{x \to 5} 4 && \text{(pela Propriedade 3)} \\
&= 2(5^2) - 3(5) + 4 && \text{(pelas Propriedades 9, 8 e 7)} \\
&= 39.
\end{aligned}$$

(b) Começamos aplicando a Propriedade 5, mas seu uso só ficará completamente justificado no último passo, quando virmos que os limites do numerador e do denominador existem e o do denominador não é 0.

$$\begin{aligned}
\lim_{x \to -2} \frac{x^3 + 2x^2 - 1}{5 - 3x} &= \frac{\lim_{x \to -2} (x^3 + 2x^2 - 1)}{\lim_{x \to -2} (5 - 3x)} && \text{(pela Propriedade 5)} \\
&= \frac{\lim_{x \to -2} x^3 + 2 \lim_{x \to -2} x^2 - \lim_{x \to -2} 1}{\lim_{x \to -2} 5 - 3 \lim_{x \to -2} x} && \text{(pelas Propriedades 1, 2 e 3)} \\
&= \frac{(-2)^3 + 2(-2)^2 - 1}{5 - 3(-2)} && \text{(pelas Propriedades 9, 8 e 7)} \\
&= -\frac{1}{11}
\end{aligned}$$

OBSERVAÇÃO: Se tornamos $f(x) = 2x^2 - 3x + 4$, então $f(5) = 39$. Em outras palavras, teríamos obtido a resposta correta no Exemplo 2(a) substituindo x por 5. Analogamente, a substituição direta fornece a resposta correta na parte (b). As funções no Exemplo 2 são polinomial e racional, respectivamente, e o uso similar das Propriedades dos Limites demonstra que a substituição direta sempre funciona para essas funções (veja os Exercícios 55 e 56). Enunciamos esse fato a seguir.

Propriedade de Substituição Direta Se f for uma função polinomial ou racional e a estiver no domínio de f, então

$$\lim_{x \to a} f(x) = f(a)$$

As funções que possuem essa propriedade de substituição direta, chamadas de *contínuas em a*, serão estudadas na Seção 2.5. Entretanto, nem todos os limites podem ser calculados pela substituição direta, como mostram os exemplos a seguir.

Newton e os Limites

Isaac Newton nasceu no Natal, em 1642, ano da morte de Galileu. Quando entrou na Universidade de Cambridge em 1661, Newton não sabia muito de matemática, mas aprendeu rapidamente lendo Euclides e Descartes e frequentando as aulas de Isaac Barrow. Cambridge foi fechada devido à praga em 1665 e 1666, e Newton voltou para casa para refletir sobre o que aprendeu. Esses dois anos foram incrivelmente produtivos, pois neste tempo ele fez quatro de suas principais descobertas: (1) suas representações de funções como somas de séries infinitas, incluindo o teorema binominal; (2) seu trabalho sobre o cálculo diferencial e integral; (3) suas leis de movimento e da gravitação universal; e (4) seus experimentos com prismas sobre a natureza da luz e da cor. Devido ao medo de controvérsias e críticas, Newton relutou em publicar suas descobertas, e não o fez até 1687, quando, a pedido do astrônomo Halley, publicou *Principia Mathematica*. Neste trabalho, o maior tratado científico já escrito, Newton tornou pública sua versão de cálculo e usou-a para pesquisar mecânica, dinâmica de fluidos e movimentos de ondas, e explicar o movimento de planetas e cometas.

O início do cálculo é encontrado nos cálculos de áreas e volumes pelos gregos antigos, como Eudoxo e Arquimedes. Embora aspectos da ideia de um limite estejam implícitos em seu "método de exaustão", Eudoxo e Arquimedes nunca formularam explicitamente o conceito de limite. Da mesma maneira, matemáticos como Cavalieri, Fermat e Barrow, precursores imediatos de Newton no desenvolvimento de cálculo, não usaram limites realmente. Foi Isaac Newton quem primeiro falou explicitamente sobre limites. Explicou que a ideia principal de limites é que as quantidades "se aproximam mais do que por qualquer diferença dada". Newton declarou que o limite era um conceito básico no cálculo, mas foi deixado para outros matemáticos posteriores, como Cauchy esclarecer suas ideias sobre limites.

EXEMPLO 3 Encontre $\lim_{x \to 1} \dfrac{x^2 - 1}{x - 1}$.

SOLUÇÃO Seja $f(x) = (x^2 - 1)/(x - 1)$. Não podemos encontrar o limite substituindo $x = 1$ porque $f(1)$ não está definido. Nem podemos aplicar a Propriedade do Quociente porque o limite do denominador é 0. De fato, precisamos fazer inicialmente algumas operações algébricas. Fatoramos o numerador como uma diferença de quadrados:

$$\frac{x^2 - 1}{x - 1} = \frac{(x - 1)(x + 1)}{x - 1}$$

O numerador e o denominador têm um fator comum, que é $x - 1$. Ao tornarmos o limite quando x tende a 1, temos $x \neq 1$ e, assim, $x - 1 \neq 0$. Portanto, podemos cancelar o fator comum e calcular o limite, como segue:

$$\begin{aligned} \lim_{x \to 1} \frac{x^2 - 1}{x - 1} &= \lim_{x \to 1} \frac{(x - 1)(x + 1)}{x - 1} \\ &= \lim_{x \to 1} (x + 1) \\ &= 1 + 1 = 2 \end{aligned}$$

O limite nesse exemplo já apareceu na Seção 2.1, quando tentávamos encontrar a tangente à parábola $y = x^2$ no ponto $(1, 1)$.

OBSERVAÇÃO: No Exemplo 3 conseguimos calcular o limite substituindo a função dada $f(x) = (x^2 - 1)/(x - 1)$ por outra mais simples, $g(x) = x + 1$, que tem o mesmo limite. Isso é válido porque $f(x) = g(x)$, exceto quando $x = 1$ e, no cômputo de um limite, quando x tende a 1, não consideramos o que acontece quando x é exatamente *igual* a 1. Em geral, temos o seguinte fato útil.

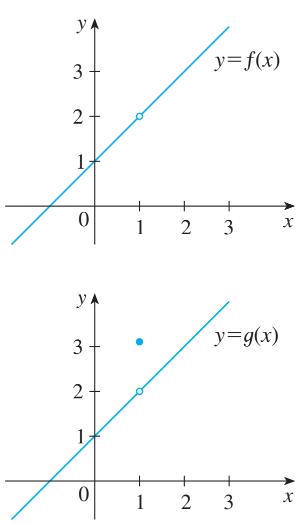


FIGURA 2
Gráficos das funções f (do Exemplo 3) e g (do Exemplo 4)

> Se $f(x) = g(x)$ quando $x \neq a$, então $\lim_{x \to a} f(x) = \lim_{x \to a} g(x)$, desde que o limite exista.

EXEMPLO 4 Encontre $\lim_{x \to 1} g(x)$ onde

$$g(x) = \begin{cases} x + 1 & \text{se } x \neq 1 \\ \pi & \text{se } x = 1 \end{cases}$$

SOLUÇÃO Aqui g está definida em $x = 1$ e $g(1) = \pi$, mas o valor de um limite, quando x tende a 1, não depende do valor da função em 1. Como $g(x) = x + 1$ para $x \neq 1$, temos

$$\lim_{x \to 1} g(x) = \lim_{x \to 1} (x + 1) = 2$$

Observe que os valores das funções nos Exemplos 3 e 4 são idênticos, exceto quando $x = 1$ (veja a Figura 2), e assim elas têm o mesmo limite quando x tende a 1.

EXEMPLO 5 Calcule $\lim_{h \to 0} \dfrac{(3 + h)^2 - 9}{h}$.

SOLUÇÃO Se definirmos

$$F(h) = \frac{(3 + h)^2 - 9}{h}$$

então, como no Exemplo 3, não podemos calcular $\lim_{h \to 0} F(h)$ fazendo $h = 0$, uma vez que $F(0)$ não está definida. Mas, se simplificarmos algebricamente $F(h)$, encontraremos que

$$F(h) = \frac{(9 + 6h + h^2) - 9}{h} = \frac{6h + h^2}{h} = 6 + h$$

(Lembre-se de que consideramos apenas $h \neq 0$ quando fazemos h tender a 0.) Assim,

$$\lim_{h \to 0} \frac{(3 + h)^2 - 9}{h} = \lim_{h \to 0} (6 + h) = 6$$

EXEMPLO 6 Encontre $\displaystyle\lim_{t \to 0} \frac{\sqrt{t^2 + 9} - 3}{t^2}$.

SOLUÇÃO Não podemos aplicar a Propriedade do Quociente de imediato, uma vez que o limite do denominador é 0. Aqui as operações algébricas preliminares consistem em racionalizar o numerador:

$$\begin{aligned}
\lim_{t \to 0} \frac{\sqrt{t^2 + 9} - 3}{t^2} &= \lim_{t \to 0} \frac{\sqrt{t^2 + 9} - 3}{t^2} \cdot \frac{\sqrt{t^2 + 9} + 3}{\sqrt{t^2 + 9} + 3} \\
&= \lim_{t \to 0} \frac{(t^2 + 9) - 9}{t^2\left(\sqrt{t^2 + 9} + 3\right)} \\
&= \lim_{t \to 0} \frac{t^2}{t^2\left(\sqrt{t^2 + 9} + 3\right)} \\
&= \lim_{t \to 0} \frac{1}{\sqrt{t^2 + 9} + 3} \\
&= \frac{1}{\sqrt{\lim_{t \to 0} (t^2 + 9)} + 3} \\
&= \frac{1}{3 + 3} = \frac{1}{6}
\end{aligned}$$

Esse cálculo confirma a conjectura que fizemos no Exemplo 2 da Seção 2.2.

Para alguns limites, é melhor calcular primeiro os limites laterais (à esquerda e à direita). O seguinte teorema é um lembrete do que descobrimos na Seção 2.2, isto é, que o limite bilateral existe se e somente se ambos os limites laterais (à esquerda e à direita) existem e são iguais.

1 Teorema $\displaystyle\lim_{x \to a} f(x) = L$ se, e somente se $\displaystyle\lim_{x \to a^-} f(x) = L = \lim_{x \to a^+} f(x)$

Quando calculamos limites laterais, aproveitamos o fato de que as Propriedades dos Limites são válidas também para eles.

EXEMPLO 7 Mostre que $\displaystyle\lim_{x \to 0} |x| = 0$.

SOLUÇÃO Lembre-se de que

$$|x| = \begin{cases} x & \text{se } x \geqslant 0 \\ -x & \text{se } x < 0 \end{cases}$$

Uma vez que $|x| = x$ para $x > 0$, temos

$$\lim_{x \to 0^+} |x| = \lim_{x \to 0^+} x = 0$$

Para $x < 0$, temos $|x| = -x$ e, assim,

$$\lim_{x \to 0^-} |x| = \lim_{x \to 0^-} (-x) = 0$$

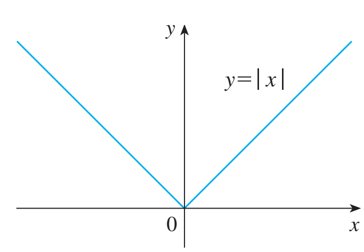


FIGURA 3

O resultado do Exemplo 7 parece plausível pela Figura 3.

Portanto, pelo Teorema 1,

$$\lim_{x \to 0} |x| = 0$$

EXEMPLO 8 Demonstre que $\lim_{x \to 0} \dfrac{|x|}{x}$ não existe.

SOLUÇÃO

$$\lim_{x \to 0^+} \frac{|x|}{x} = \lim_{x \to 0^+} \frac{x}{x} = \lim_{x \to 0^+} 1 = 1$$

$$\lim_{x \to 0^-} \frac{|x|}{x} = \lim_{x \to 0^-} \frac{-x}{x} = \lim_{x \to 0^-} (-1) = -1$$

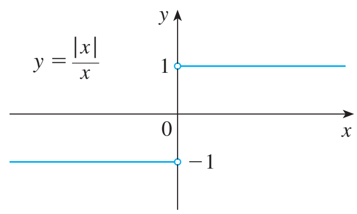


FIGURA 4

Uma vez que os limites laterais à esquerda e à direita são diferentes, segue do Teorema 1 que $\lim_{x \to 0} |x|/x$ não existe. O gráfico da função $f(x) = |x|/x$ é mostrado na Figura 4 e confirma os limites laterais que encontramos.

EXEMPLO 9 Se

$$f(x) = \begin{cases} \sqrt{x - 4} & \text{se } x > 4 \\ 8 - 2x & \text{se } x < 4 \end{cases}$$

determine se $\lim_{x \to 4} f(x)$ existe.

SOLUÇÃO Uma vez que $f(x) = \sqrt{x - 4}$ para $x > 4$, temos

$$\lim_{x \to 4^+} f(x) = \lim_{x \to 4^+} \sqrt{x - 4} = \sqrt{4 - 4} = 0$$

Mostra-se no Exemplo 3 da Seção 2.4 que $\lim_{x \to 0^+} \sqrt{x} = 0$.

Uma vez que $f(x) = 8 - 2x$ para $x < 4$, temos

$$\lim_{x \to 4^-} f(x) = \lim_{x \to 4^-} (8 - 2x) = 8 - 2 \cdot 4 = 0$$

Os limites laterais (à esquerda e à direita) são iguais. Dessa forma, o limite existe e vale

$$\lim_{x \to 4} f(x) = 0.$$

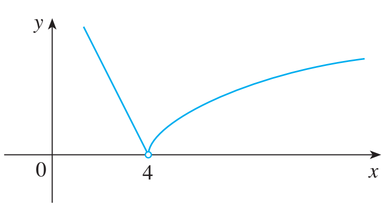


FIGURA 5

O gráfico de f é exibido na Figura 5.

EXEMPLO 10 A **função maior inteiro** é definida por $[\![x]\!]$ = o maior inteiro que é menor que ou igual a x. (Por exemplo, $[\![4]\!] = 4$, $[\![4{,}8]\!] = 4$, $[\![\pi]\!] = 3$, $[\![\sqrt{2}\,]\!] = 1$, $[\![-\frac{1}{2}]\!] = -1$.) Mostre que $\lim_{x \to 3} [\![x]\!]$ não existe.

Outras notações para $[\![x]\!]$ são $[x]$ e $\lfloor x \rfloor$. A função maior inteiro é as vezes chamada de *função piso*.

SOLUÇÃO O gráfico da função maior inteiro é exibido na Figura 6. Uma vez que $[\![x]\!] = 3$ para $3 \leqslant x < 4$, temos

$$\lim_{x \to 3^+} [\![x]\!] = \lim_{x \to 3^+} 3 = 3$$

Uma vez que $[\![x]\!] = 2$ para $2 \leqslant x < 3$, temos

$$\lim_{x \to 3^-} [\![x]\!] = \lim_{x \to 3^-} 2 = 2$$

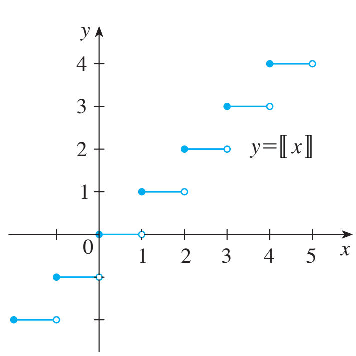


FIGURA 6
Função maior inteiro

Como esses limites laterais não são iguais, pelo Teorema 1, $\lim_{x \to 3} [\![x]\!]$ não existe.

Os próximos dois teoremas dão duas propriedades adicionais dos limites. Suas demonstrações podem ser encontradas no Apêndice F.

[2] Teorema Se $f(x) \leqslant g(x)$ quando x está próximo a a (exceto possivelmente em a) e os limites de f e g, ambos existem quando x tende a a, então

$$\lim_{x \to a} f(x) \leqslant \lim_{x \to a} g(x)$$

[3] Teorema do Confronto Se $f(x) \leqslant g(x) \leqslant h(x)$ quando x está próximo a a (exceto possivelmente em a) e

$$\lim_{x \to a} f(x) = \lim_{x \to a} h(x) = L$$

então
$$\lim_{x \to a} g(x) = L$$

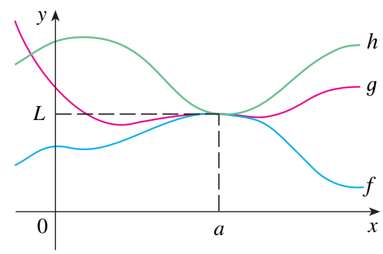


FIGURA 7

O Teorema do Confronto, algumas vezes chamado Teorema do Sanduíche ou do Imprensamento, está ilustrado na Figura 7. Ele diz que se $g(x)$ ficar imprensado entre $f(x)$ e $h(x)$ nas proximidades de a, e se f e h tiverem o mesmo limite L em a, então t será forçada a ter o mesmo limite L em a.

EXEMPLO 11 Mostre que $\displaystyle\lim_{x \to 0} x^2 \operatorname{sen} \frac{1}{x} = 0$.

SOLUÇÃO Observe primeiro que **não** podemos usar

$$\lim_{x \to 0} x^2 \operatorname{sen} \frac{1}{x} = \lim_{x \to 0} x^2 \cdot \lim_{x \to 0} \operatorname{sen} \frac{1}{x}$$

porque $\lim_{x \to 0} \operatorname{sen}(1/x)$ não existe (veja o Exemplo 4 da Seção 2.2).

Ao invés disso, aplicamos o Teorema do Confronto de modo que precisamos encontrar uma função f menor que $g(x) = x^2 \operatorname{sen}(1/x)$ e uma função h maior que g tal que $f(x)$ e $h(x)$ tendam a 0. Para fazer isso, usamos nosso conhecimento da função seno. Como o seno de qualquer número está entre -1 e 1, podemos escrever

[4]
$$-1 \leqslant \operatorname{sen} \frac{1}{x} \leqslant 1$$

Qualquer inequação permanece verdadeira quando multiplicada por um número positivo. Sabemos que $x^2 \geqslant 0$ para todos os valores de x e então, multiplicando cada lado das inequações em [4] por x^2, temos

$$-x^2 \leqslant x^2 \operatorname{sen} \frac{1}{x} \leqslant x^2$$

como ilustrado na Figura 8. Sabemos que

$$\lim_{x \to 0} x^2 = 0 \qquad \text{e} \qquad \lim_{x \to 0} (-x^2) = 0$$

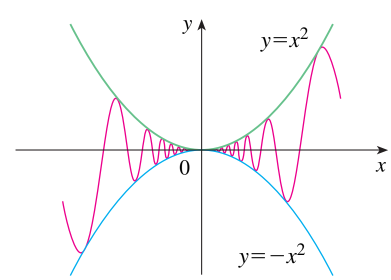


FIGURA 8
$y = x^2 \operatorname{sen}(1/x)$

Tomando-se $f(x) = -x^2$, $g(x) = x^2 \operatorname{sen}(1/x)$, e $h(x) = x^2$ no Teorema do Confronto, obtemos

$$\lim_{x \to 0} x^2 \operatorname{sen} \frac{1}{x} = 0$$

2.3 Exercícios

1. Dado que

$$\lim_{x\to 2} f(x) = 4 \qquad \lim_{x\to 2} g(x) = -2 \qquad \lim_{x\to 2} h(x) = 0$$

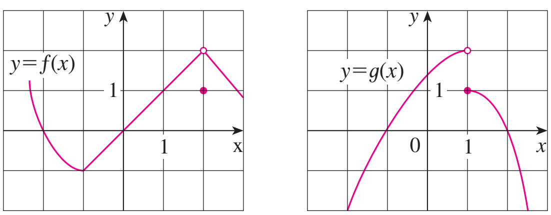
encontre, se existir, o limite. Caso não exista, explique por quê.

(a) $\lim_{x\to 2} [f(x) + 5g(x)]$ (b) $\lim_{x\to 2} [g(x)]^3$

(c) $\lim_{x\to 2} \sqrt{f(x)}$ (d) $\lim_{x\to 2} \dfrac{3f(x)}{g(x)}$

(e) $\lim_{x\to 2} \dfrac{g(x)}{h(x)}$ (f) $\lim_{x\to 2} \dfrac{g(x)h(x)}{f(x)}$

2. Os gráficos de f e g são dados. Use-os para calcular cada limite. Caso não exista, explique por quê.



(a) $\lim_{x\to 2} [f(x) + g(x)]$ (b) $\lim_{x\to 1} [f(x) + g(x)]$

(c) $\lim_{x\to 0} [f(x)g(x)]$ (d) $\lim_{x\to -1} \dfrac{f(x)}{g(x)}$

(e) $\lim_{x\to 2} [x^3 f(x)]$ (f) $\lim_{x\to 1} \sqrt{3 + f(x)}$

3–9 Calcule o limite justificando cada passagem com as Propriedades dos Limites que forem usadas.

3. $\lim_{x\to -2} (3x^4 + 2x^2 - x + 1)$

4. $\lim_{x\to -1} (x^4 - 3x)(x^2 + 5x + 3)$

5. $\lim_{t\to -2} \dfrac{t^4 - 2}{2t^2 - 3t + 2}$

6. $\lim_{u\to -2} \sqrt{u^4 + 3u + 6}$

7. $\lim_{x\to 8} (1 + \sqrt[3]{x})(2 - 6x^2 + x^3)$

8. $\lim_{t\to 2} \left(\dfrac{t^2 - 2}{t^3 - 3t + 5}\right)^2$

9. $\lim_{x\to 2} \sqrt{\dfrac{2x^2 + 1}{3x - 2}}$

10. (a) O que há de errado com a equação a seguir?

$$\frac{x^2 + x - 6}{x - 2} = x + 3$$

(b) Em vista de (a), explique por que a equação

$$\lim_{x\to 2} \frac{x^2 + x - 6}{x - 2} = \lim_{x\to 2} (x + 3)$$

está correta.

11–32 Calcule o limite, se existir.

11. $\lim_{x\to 2} \dfrac{x^2 + x - 6}{x - 2}$

12. $\lim_{x\to -4} \dfrac{x^2 + 5x + 4}{x^2 + 3x - 4}$

13. $\lim_{x\to 2} \dfrac{x^2 - x + 6}{x - 2}$

14. $\lim_{x\to -1} \dfrac{x^2 - 4x}{x^2 - 3x - 4}$

15. $\lim_{t\to -3} \dfrac{t^2 - 9}{2t^2 + 7t + 3}$

16. $\lim_{x\to -1} \dfrac{2x^2 + 3x + 1}{x^2 - 2x - 3}$

17. $\lim_{h\to 0} \dfrac{(-5 + h)^2 - 25}{h}$

18. $\lim_{h\to 0} \dfrac{(2 + h)^3 - 8}{h}$

19. $\lim_{x\to -2} \dfrac{x + 2}{x^3 + 8}$

20. $\lim_{t\to 1} \dfrac{t^4 - 1}{t^3 - 1}$

21. $\lim_{h\to 0} \dfrac{\sqrt{9 + h} - 3}{h}$

22. $\lim_{u\to 2} \dfrac{\sqrt{4u + 1} - 3}{u - 2}$

23. $\lim_{x\to -4} \dfrac{\dfrac{1}{4} + \dfrac{1}{x}}{4 + x}$

24. $\lim_{x\to -1} \dfrac{x^2 + 2x + 1}{x^4 - 1}$

25. $\lim_{t\to 0} \dfrac{\sqrt{1 + t} - \sqrt{1 - t}}{t}$

26. $\lim_{t\to 0} \left(\dfrac{1}{t} - \dfrac{1}{t^2 + t}\right)$

27. $\lim_{x\to 16} \dfrac{4 - \sqrt{x}}{16x - x^2}$

28. $\lim_{h\to 0} \dfrac{(3 + h)^{-1} - 3^{-1}}{h}$

29. $\lim_{t\to 0} \left(\dfrac{1}{t\sqrt{1 + t}} - \dfrac{1}{t}\right)$

30. $\lim_{x\to -4} \dfrac{\sqrt{x^2 + 9} - 5}{x + 4}$

31. $\lim_{h\to 0} \dfrac{(x + h)^3 - x^3}{h}$

32. $\lim_{h\to 0} \dfrac{\dfrac{1}{(x + h)^2} - \dfrac{1}{x^2}}{h}$

33. (a) Estime o valor de

$$\lim_{x\to 0} \frac{x}{\sqrt{1 + 3x} - 1}$$

traçando o gráfico da função $f(x) = x/(\sqrt{1 + 3x} - 1)$

(b) Faça uma tabela de valores de $f(x)$ para x próximo de 0 e estime qual será o valor do limite.

(c) Use as Propriedades dos Limites para mostrar que sua estimativa está correta.

34. (a) Use um gráfico de

$$f(x) = \frac{\sqrt{3 + x} - \sqrt{3}}{x}$$

para estimar o valor de $\lim_{x\to 0} f(x)$ com duas casas decimais.

(b) Use uma tabela de valores de $f(x)$ para estimar o limite com quatro casas decimais.

(c) Use as Propriedades dos Limites para encontrar o valor exato do limite.

35. Use o Teorema do Confronto para mostrar que $\lim_{x\to 0} (x^2 \cos 20\pi x) = 0$. Ilustre, fazendo os gráficos das funções $f(x) = -x^2$, $g(x) = x^2 \cos 20\pi x$ e $h(x) = x^2$ na mesma tela.

36. Empregue o Teorema do Confronto para mostrar que

$$\lim_{x \to 0} \sqrt{x^3 + x^2}\ \text{sen}\ \frac{\pi}{x} = 0.$$

Ilustre, fazendo os gráficos das funções f, g e h (como no Teorema do Confronto) na mesma tela.

37. Se $4x - 9 \leqslant f(x) \leqslant x^2 - 4x + 7$ para $x \geqslant 0$, encontre $\lim_{x \to 4} f(x)$.

38. Se $2x \leqslant g(x) \leqslant x^4 - x^2 + 2$ para todo x, avalie $\lim_{x \to 1} g(x)$.

39. Demonstre que $\lim_{x \to 0} x^4 \cos \dfrac{2}{x} = 0$.

40. Demonstre que $\lim_{x \to 0^+} \sqrt{x}\, e^{\text{sen}(\pi/x)} = 0$.

41-46 Encontre, quando existir, o limite. Caso não exista, explique por quê.

41. $\lim_{x \to 3} (2x + |x - 3|)$

42. $\lim_{x \to -6} \dfrac{2x + 12}{|x + 6|}$

43. $\lim_{x \to 0{,}5^-} \dfrac{2x - 1}{|2x^3 - x^2|}$

44. $\lim_{x \to -2} \dfrac{2 - |x|}{2 + x}$

45. $\lim_{x \to 0^-} \left(\dfrac{1}{x} - \dfrac{1}{|x|} \right)$

46. $\lim_{x \to 0^+} \left(\dfrac{1}{x} - \dfrac{1}{|x|} \right)$

---

47. A função sinal, denotada por sgn, é definida por

$$\text{sgn}\, x = \begin{cases} -1 & \text{se } x < 0 \\ 0 & \text{se } x = 0 \\ 1 & \text{se } x > 0 \end{cases}$$

(a) Esboce o gráfico dessa função.

(b) Encontre ou explique por que não existe cada um dos limites a seguir.

(i) $\lim_{x \to 0^+} \text{sgn}\, x$ (ii) $\lim_{x \to 0^-} \text{sgn}\, x$

(iii) $\lim_{x \to 0} \text{sgn}\, x$ (iv) $\lim_{x \to 0} |\text{sgn}\, x|$

48. Seja

$$f(x) = \begin{cases} x^2 + 1 & \text{se } x < 1 \\ (x - 2)^2 & \text{se } x \geqslant 1 \end{cases}$$

(a) Encontre $\lim_{x \to 1^-} f(x)$ e $\lim_{x \to 1^+} f(x)$.

(b) $\lim_{x \to 1} f(x)$ existe?

(c) Esboce o gráfico de f.

49. Seja $g(x) = \dfrac{x^2 + x - 6}{|x - 2|}$.

(a) Encontre

(i) $\lim_{x \to 2^+} g(x)$ (ii) $\lim_{x \to 2^-} g(x)$

(b) $\lim_{x \to 2} g(x)$ existe?

(c) Esboce o gráfico de g.

50. Seja

$$g(x) = \begin{cases} x & \text{se } x < 1 \\ 3 & \text{se } x = 1 \\ 2 - x^2 & \text{se } 1 < x \leqslant 2 \\ x - 3 & \text{se } x > 2 \end{cases}$$

(a) Determine as quantidades a seguir, se existirem.

(i) $\lim_{x \to 1^-} g(x)$ (ii) $\lim_{x \to 1} g(x)$ (iii) $g(1)$

(iv) $\lim_{x \to 2^-} g(x)$ (v) $\lim_{x \to 2^+} g(x)$ (vi) $\lim_{x \to 2} g(x)$

(b) Esboce o gráfico de g.

51. (a) Se o símbolo $[\![\ ]\!]$ denota a função maior inteiro do Exemplo 10, calcule

(i) $\lim_{x \to -2^+} [\![x]\!]$ (ii) $\lim_{x \to -2} [\![x]\!]$ (iii) $\lim_{x \to -2{,}4} [\![x]\!]$

(b) Se n for um inteiro, calcule

(i) $\lim_{x \to n^-} [\![x]\!]$ (ii) $\lim_{x \to n^+} [\![x]\!]$

(c) Para quais valores de a o limite $\lim_{x \to a} [\![x]\!]$ existe?

52. Seja $f(x) = [\![\cos x]\!]$, $-\pi \leqslant x \leqslant \pi$.

(a) Esboce o gráfico de f.

(b) Calcule cada limite, se existir

(i) $\lim_{x \to 0} f(x)$ (ii) $\lim_{x \to (\pi/2)^-} f(x)$

(iii) $\lim_{x \to (\pi/2)^+} f(x)$ (iv) $\lim_{x \to \pi/2} f(x)$

(c) Para quais valores de a o limite $\lim_{x \to a} f(x)$ existe?

53. Se $f(x) = [\![x]\!] + [\![-x]\!]$, mostre que existe $\lim_{x \to 2} f(x)$, mas que não é igual a $f(2)$.

54. Na Teoria da Relatividade, a fórmula da contração de Lorentz

$$L = L_0 \sqrt{1 - v^2/c^2}$$

expressa o comprimento L de um objeto como uma função de sua velocidade v em relação a um observador, onde L_0 é o comprimento do objeto em repouso e c é a velocidade da luz. Encontre $\lim_{v \to c^-} L$ e interprete o resultado. Por que é necessário o limite à esquerda?

55. Se p for um polinômio, mostre que $\lim_{x \to a} p(x) = p(a)$.

56. Se r for uma função racional, use o Exercício 55 para mostrar que $\lim_{x \to a} r(x) = r(a)$ para todo número a no domínio de r.

57. Se $\lim_{x \to 1} \dfrac{f(x) - 8}{x - 1} = 10$, encontre $\lim_{x \to 1} f(x)$.

58. Se $\lim_{x \to 0} \dfrac{f(x)}{x^2} = 5$, encontre os seguintes limites.

(a) $\lim_{x \to 0} f(x)$ (b) $\lim_{x \to 0} \dfrac{f(x)}{x}$

59. Se

$$f(x) = \begin{cases} x^2 & \text{se } x \text{ é racional} \\ 0 & \text{se } x \text{ é irracional} \end{cases}$$

demonstre que $\lim_{x \to 0} f(x) = 0$.

60. Mostre por meio de um exemplo que $\lim_{x \to a} [f(x) + g(x)]$ pode existir mesmo que nem $\lim_{x \to a} f(x)$ nem $\lim_{x \to a} g(x)$ existam.

61. Mostre por meio de um exemplo que $\lim_{x \to a} [f(x)\, g(x)]$ pode existir mesmo que nem $\lim_{x \to a} f(x)$ nem $\lim_{x \to a} g(x)$ existam.

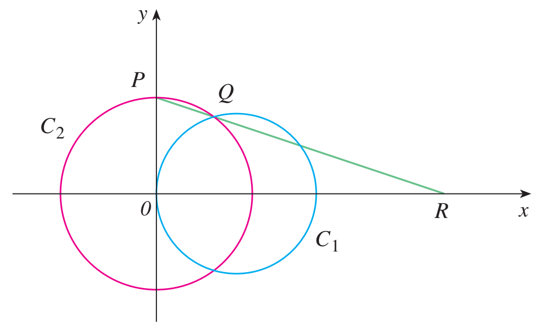
62. Calcule $\lim_{x \to 2} \dfrac{\sqrt{6 - x} - 2}{\sqrt{3 - x} - 1}$

63. Existe um número a tal que

$$\lim_{x \to -2} \frac{3x^2 + ax + a + 3}{x^2 + x - 2}$$

exista? Caso exista, encontre a e o valor do limite.

64. A figura mostra um círculo fixo C_1 de equação $(x - 1)^2 + y^2 = 1$ e um círculo C_2, a ser encolhido, com raio r e centro na origem. P é o ponto $(0, r)$, Q é o ponto de intersecção superior dos dois círculos, e R é o ponto de intersecção da reta PQ com o eixo x. O que acontecerá com R quando C_2 se contrair, isto é, quando $r \to 0^+$?



2.4 A Definição Precisa de um Limite

A definição intuitiva de limite dada na Seção 2.2 é inadequada para alguns propósitos, pois frases como "x está próximo de 2" e "$f(x)$ aproxima-se cada vez mais de L" são vagas. Para sermos capazes de demonstrar conclusivamente que

$$\lim_{x \to 0} \left(x^3 + \frac{\cos 5x}{10.000} \right) = 0{,}0001 \qquad \text{ou} \qquad \lim_{x \to 0} \frac{\operatorname{sen} x}{x} = 1$$

devemos tornar precisa a definição de limite.

Para chegar à definição precisa de limite, consideremos a função

$$f(x) = \begin{cases} 2x - 1 & \text{se } x \neq 3 \\ 6 & \text{se } x = 3 \end{cases}$$

É intuitivamente claro que quando x está próximo de 3, mas $x \neq 3$, então $f(x)$ está próximo de 5 e, sendo assim, $\lim_{x \to 3} f(x) = 5$.

Para obter informações mais detalhadas sobre como $f(x)$ varia quando x está próximo de 3, fazemos a seguinte pergunta:

Quão próximo de 3 deverá estar x para que $f(x)$ difira de 5 por menos que 0,1?

É costume usar a letra grega δ (delta) nessa situação.

A distância de x a 3 é $|x - 3|$, e a distância de $f(x)$ a 5 é $|f(x) - 5|$, logo, nosso problema é achar um número δ tal que

$$|f(x) - 5| < 0{,}1 \qquad \text{se} \qquad |x - 3| < \delta \quad \text{mas } x \neq 3$$

Se $|x - 3| > 0$, então $x \neq 3$; portanto uma formulação equivalente de nosso problema é achar um número δ tal que

$$|f(x) - 5| < 0{,}1 \qquad \text{se} \qquad 0 < |x - 3| < \delta$$

Observe que, se $0 < |x - 3| < (0{,}1)/2 = 0{,}05$, então

$$|f(x) - 5| = |(2x - 1) - 5| = |2x - 6| = 2|x - 3| < 2(0{,}05) = 0{,}1$$

isto é, $$|f(x) - 5| < 0{,}1 \qquad \text{se} \qquad 0 < |x - 3| < 0{,}05$$

Assim, uma resposta para o problema é dada por $\delta = 0{,}05$; isto é, se x estiver a uma distância de no máximo 0,05 de 3, então $f(x)$ estará a uma distância de no máximo 0,1 de 5.

Se mudarmos o número 0,1 em nosso problema para o número menor 0,01, então, usando o mesmo método, achamos que $f(x)$ diferirá de 5 por menos que 0,01, desde que x difira de 3 por menos que $(0{,}01)/2 = 0{,}005$:

$$|f(x) - 5| < 0{,}01 \qquad \text{se} \qquad 0 < |x - 3| < 0{,}005$$

De forma análoga,

$$|f(x) - 5| < 0{,}001 \qquad \text{se} \qquad 0 < |x - 3| < 0{,}0005$$

Os números 0,1, 0,01 e 0,001, anteriormente considerados, são *tolerâncias de erro* que podemos admitir. Para que o número 5 seja precisamente o limite de $f(x)$, quando x tende a 3, devemos não apenas ser capazes de tornar a diferença entre $f(x)$ e 5 menor que cada um desses três números; devemos ser capazes de torná-la menor que *qualquer* número positivo. E, por analogia ao procedimento adotado, nós podemos! Se chamarmos ε (a letra grega épsilon) a um número positivo arbitrário, então encontramos, como anteriormente, que

1 $$|f(x) - 5| < \varepsilon \qquad \text{se} \qquad 0 < |x - 3| < \delta = \frac{\varepsilon}{2}$$

Esta é uma maneira precisa de dizer que $f(x)$ está próximo de 5 quando x está próximo de 3, pois 1 diz que podemos fazer os valores de $f(x)$ ficarem dentro de uma distância arbitrária ε de 5 tomando os valores de x dentro de uma distância $\varepsilon/2$ de 3 (mas $x \neq 3$).

Observe que 1 pode ser reescrita como:

$$\text{se} \quad 3 - \delta < x < 3 + \delta \quad (x \neq 3) \qquad \text{então} \qquad 5 - \varepsilon < f(x) < 5 + \varepsilon$$

e isso está ilustrado na Figura 1. Tomando os valores de x ($\neq 3$) dentro do intervalo $(3 - \delta, 3 + \delta)$, podemos obter os valores de $f(x)$ dentro do intervalo $(5 - \varepsilon, 5 + \varepsilon)$.

Usando 1 como modelo, temos uma definição precisa de limite.

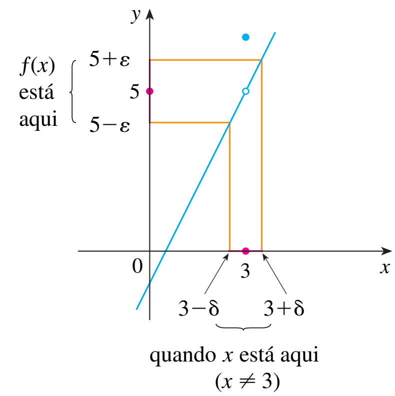


FIGURA 1

2 Definição Seja f uma função definida em algum intervalo aberto que contenha o número a, exceto possivelmente no próprio a. Então dizemos que o **limite de $f(x)$ quando x tende a a é L**, e escrevemos

$$\lim_{x \to a} f(x) = L$$

se para todo número $\varepsilon > 0$ houver um número $\delta > 0$ tal que

$$\text{se} \quad 0 < |x - a| < \delta \qquad \text{então} \qquad |f(x) - L| < \varepsilon$$

Uma vez que $|x - a|$ é a distância de x a a e $|f(x) - L|$ é a distância de $f(x)$ a L, e como ε pode ser arbitrariamente pequeno, a definição de limite pode ser expressa em palavras da seguinte forma:

$\lim_{x \to a} f(x) = L$ significa que a distância entre $f(x)$ e L fica arbitrariamente pequena tomando-se a distância de x a a suficientemente pequena (mas não igual a 0).

Alternativamente,

$\lim_{x \to a} f(x) = L$ significa que os valores de $f(x)$ podem ser tornados tão próximos de L quanto desejarmos, tornado-se x suficientemente próximo de a (mas não igual a a).

Podemos também reformular a Definição 2 em termos de intervalos, observando que a desigualdade $|x - a| < \delta$ é equivalente a $-\delta < x - a < \delta$, que pode ser escrita como $a - \delta < x < a + \delta$. Além disso, $0 < |x - a|$ é válida se, e somente se, $x - a \neq 0$, isto é, $x \neq a$. Analogamente, a desigualdade $|f(x) - L| < \varepsilon$ é equivalente ao par de desigualdades $L - \varepsilon < f(x) < L + \varepsilon$. Portanto, em termos de intervalos, a Definição 2 pode ser enunciada desta maneira:

$\lim_{x \to a} f(x) = L$ significa que para todo $\varepsilon > 0$ (não importa quão pequeno ε for) podemos achar $\delta > 0$ tal que, se x estiver no intervalo aberto $(a - \delta, a + \delta)$ e $x \neq a$, então $f(x)$ estará no intervalo aberto $(L - \varepsilon, L + \varepsilon)$.