4- Distâncias

Distâncias

Todas as noções de distância entre pontos, retas e planos que serão estudadas nesta seção são provenientes uma única noção: a de que a distância entre dois desses objetos no espaço, digamos F_1 e F_2, é a menor distância que se pode obter entre um ponto de F_1 e um ponto de F_2.

Vamos estudar seis casos:

- Distância entre dois pontos;
- Distância entre ponto e reta;
- Distância entre ponto e plano;
- Distância entre duas retas;
- Distância entre reta e plano;
- Distância entre dois planos.

Distância entre Dois Pontos

Dados dois pontos P e Q no espaço, definimos a distância entre P e Q, indicada por $d(P,Q)$, como sendo o comprimento do segmento de reta com extremos em P e Q, o que equivale dizer que a distância entre P e Q é o comprimento do vetor $\overrightarrow{PQ}$.

Proposição: Se $P(x_1, y_1, z_1)$ e $Q(x_2, y_2, z_2)$, então a distância entre P e Q é dada por

$$d(P,Q) = \|\overrightarrow{PQ}\| = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2}\ .$$

Obviamente, se $P = Q$, então $d(P,Q) = 0$.

Exemplo: Calcule a distância entre os pontos $P(2,-1,3)$ e $Q(1,1,5)$.

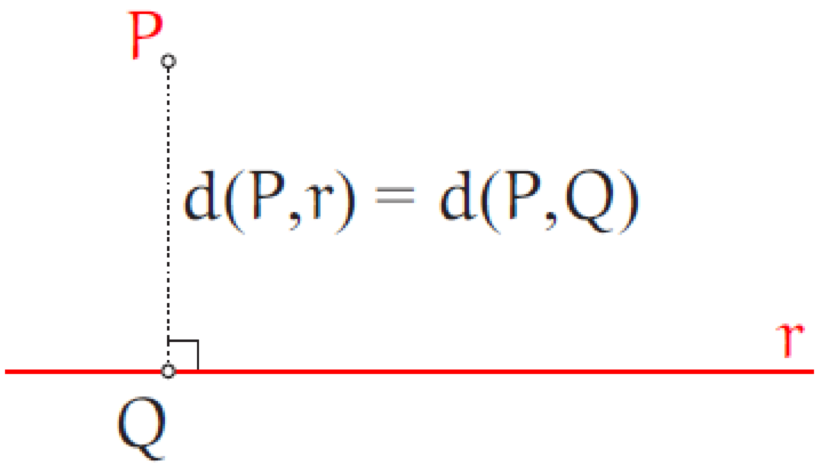
Solução: Temos que $\overrightarrow{PQ} = Q - P = (-1,2,2)$, logo

$$d(P,Q) = \|\overrightarrow{PQ}\| = \sqrt{(-1)^2 + 2^2 + 2^2} = \sqrt{9} = 3.$$

Distância de Ponto a Reta

Dados o ponto P e a reta r no espaço, definimos a distância do ponto P à reta r, indicada por $d(P,r)$, como sendo o comprimento do segmento de reta PQ perpendicular a r baixado a partir de P, com $Q \in r$, ou seja, $d(P,r) = d(P,Q)$.

Obviamente, se $P \in r$, então $d(P,r) = 0$.



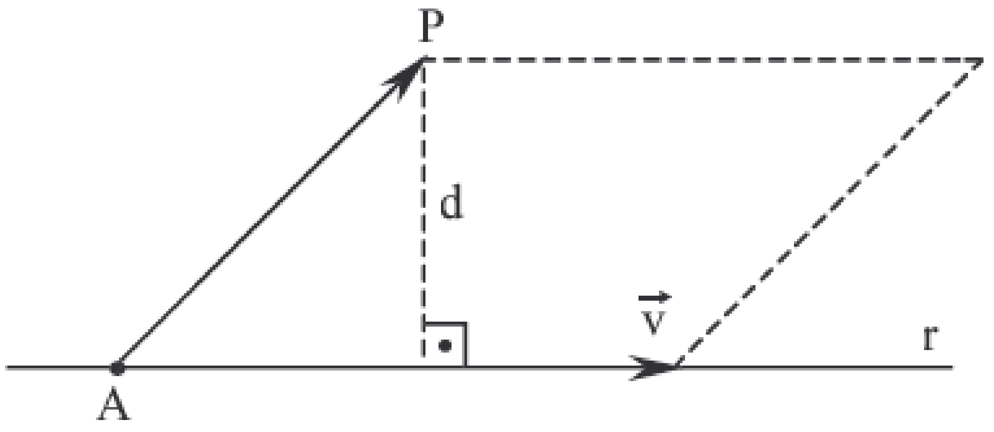
Proposição: Sejam P um ponto e r uma reta com vetor diretor $\vec{v}$ no espaço. Então,

$$d(P,r) = \frac{\|\vec{v} \times \overrightarrow{AP}\|}{\|\vec{v}\|}$$

sendo A um ponto qualquer de r.

Demonstração: Considere na reta r um ponto A e um vetor diretor $\vec{v}$.
Os vetores $\vec{v}$ e $\overrightarrow{AP}$ determinam um paralelogramo cuja altura corresponde à distância $d = d(P,r)$.
A área desse paralelogramo é dada por

$$S = (base)(altura) = \|\vec{v}\|d.$$



Vimos também que a área desse paralelogramo é igual a

$$S = \|\vec{v} \times \overrightarrow{AP}\|.$$

Logo,

$$\|\vec{v}\|d = \|\vec{v} \times \overrightarrow{AP}\| \Rightarrow d = \frac{\|\vec{v} \times \overrightarrow{AP}\|}{\|\vec{v}\|}.$$

$\square$

Exemplo: Calcule a distância do ponto $P(2,1,4)$ à reta $r: \begin{cases} x = -1 + 2t \\ y = 2 - t \\ z = 3 - 2t \end{cases}$.

Solução: A reta r passa pelo ponto $A(-1,2,3)$ e tem a direção do vetor $\vec{v} = (2,-1,-2)$.
Temos que:

- $\overrightarrow{AP} = P - A = (3,-1,1)$

- $\vec{v} \times \overrightarrow{AP} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 2 & -1 & -2 \\ 3 & -1 & 1 \end{vmatrix} = (-3,-8,1)$

Logo,

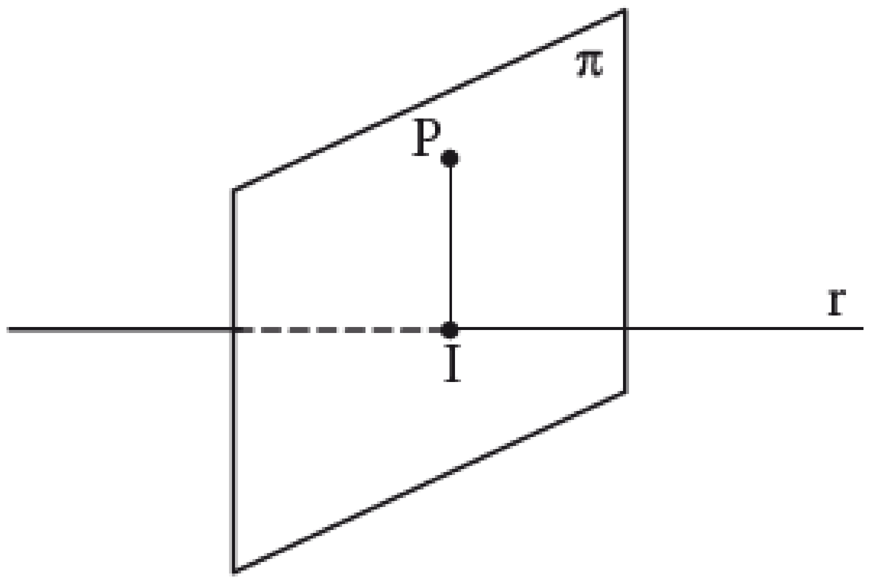
$$d(P,r) = \frac{\left\|\vec{v} \times \overrightarrow{AP}\right\|}{\|\vec{v}\|} = \frac{\|(-3,-8,1)\|}{\|(2,-1,-2)\|} = \frac{\sqrt{(-3)^2 + (-8)^2 + 1^2}}{\sqrt{2^2 + (-1)^2 + (-2)^2}} = \frac{\sqrt{74}}{3}.$$

Observação: Outra forma de calcular a distância de um ponto P a uma reta r consiste em:

($\mathbf{1}$) Encontrar uma equação geral do plano π que passa por P e é perpendicular à reta r (um vetor normal a π é um vetor diretor de r);

($\mathbf{2}$) Determinar o ponto I de intersecção de π e r;

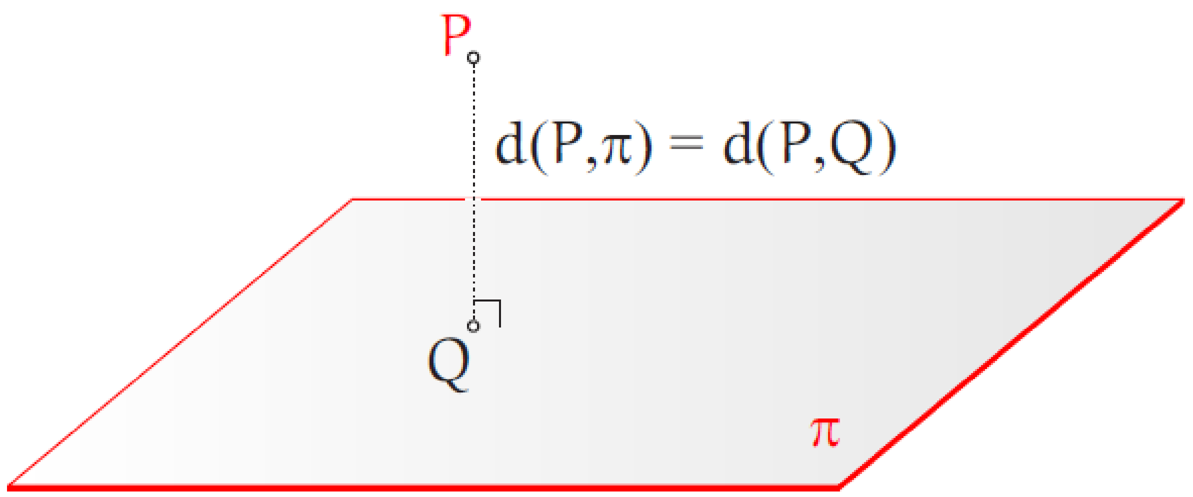
($\mathbf{3}$) Calcular a distância por $d(P,r) = \|\overrightarrow{PI}\|$.



Distância de Ponto a Plano

Dados o ponto P e o plano π no espaço, definimos a distância do ponto P ao plano π, indicada por $d(P,\pi)$, como sendo o comprimento do segmento de reta PQ perpendicular a π baixado a partir de P, com $Q \in \pi$, ou seja, $d(P,\pi) = d(P,Q)$.

Obviamente, se $P \in \pi$, então $d(P,\pi) = 0$.



Proposição: Sejam $P(x_0, y_0, z_0)$ um ponto e π um plano com equação geral $ax + by + cz + d = 0$. Então,

$$d(P,\pi) = \frac{|ax_0 + by_0 + cz_0 + d|}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}} \ .$$

Demonstração: Seja $A(x_1, y_1, z_1)$ um ponto qualquer de π e $\vec{n} = (a, b, c)$ um vetor normal a π.

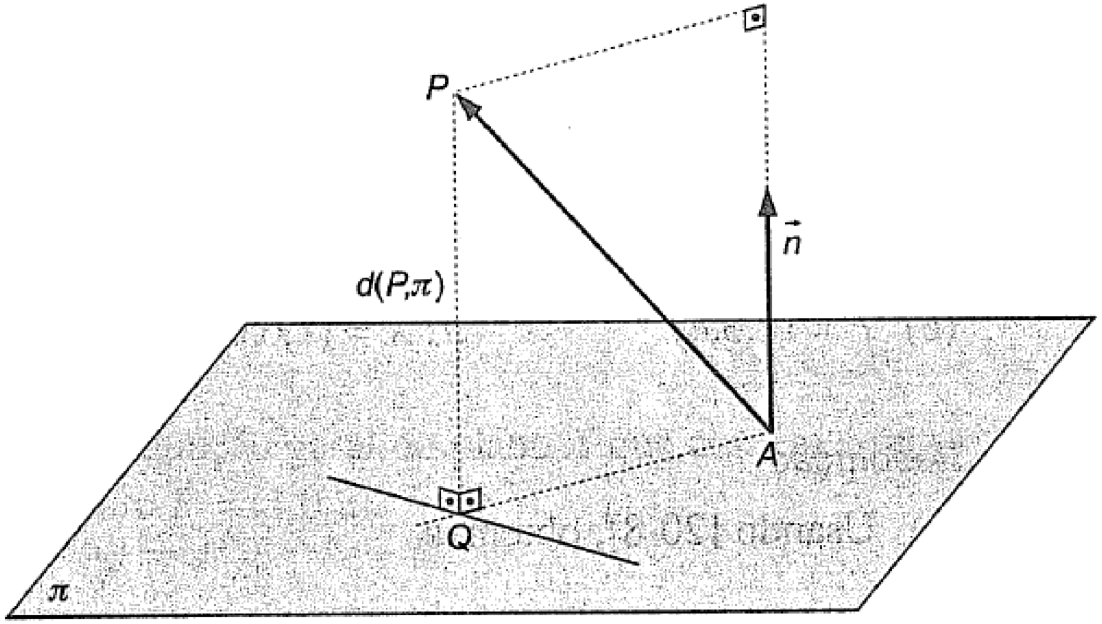
Temos que

$$d = d(P,\pi) = \left\| proj_{\vec{n}} \overrightarrow{AP} \right\| = \frac{|\overrightarrow{AP} \cdot \vec{n}|}{\|\vec{n}\|}.$$

Como $\overrightarrow{AP} = (x_0 - x_1, y_0 - y_1, z_0 - z_1)$, então:

$$d(P,\pi) = \frac{|(x_0 - x_1, y_0 - y_1, z_0 - z_1) \cdot (a, b, c)|}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}}$$

$$= \frac{|ax_0 + by_0 + cz_0 - ax_1 - by_1 - cz_1|}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}} \ .$$



Como o ponto $A(x_1, y_1, z_1) \in \pi$, então ele satisfaz a equação geral de π, ou seja,

$$ax_1 + by_1 + cz_1 + d = 0 \Rightarrow d = -ax_1 - by_1 - cz_1.$$

Logo,

$$\begin{aligned} d(P,\pi) &= \frac{|ax_0 + by_0 + cz_0 - ax_1 - by_1 - cz_1|}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}} \\ &= \frac{|ax_0 + by_0 + cz_0 + d|}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}}. \end{aligned}$$

$\square$

Exemplo: Calcule a distância do ponto $P(4, 2, -3)$ ao plano $\pi: 2x + 3y - 6z + 3 = 0$.

Solução: Temos que

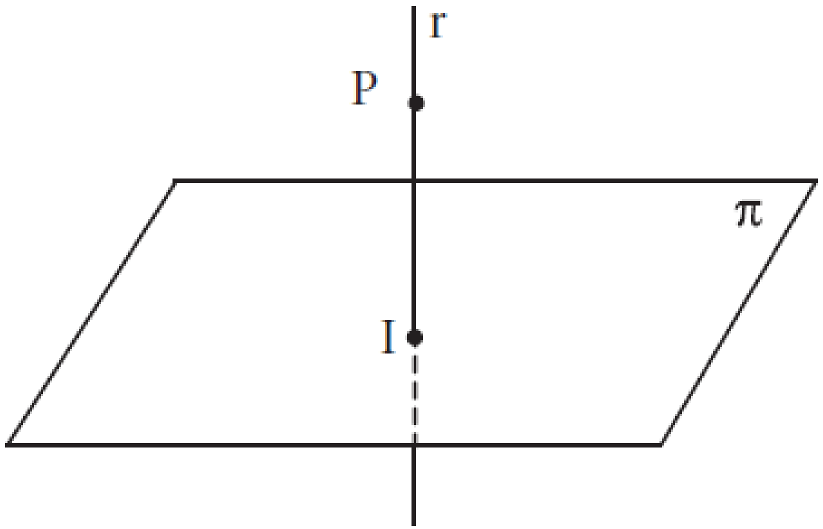
$$d(P,\pi) = \frac{|ax_0 + by_0 + cz_0 + d|}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}} = \frac{|2.4 + 3.2 + (-6)(-3) + 3|}{\sqrt{2^2 + 3^2 + (-6)^2}} = \frac{35}{7} = 5.$$

Observação: Outra forma de calcular a distância de um ponto P a um plano π consiste em:

$(\mathbf{1})$ Encontrar equações da reta r que passa por P e é perpendicular ao plano π (um vetor diretor de r é um vetor normal a π);

$(\mathbf{2})$ Determinar o ponto I de intersecção de r e π;

$(\mathbf{3})$ Calcular a distância por $d(P,\pi) = \|\overrightarrow{PI}\|$.



Distância entre Duas Retas

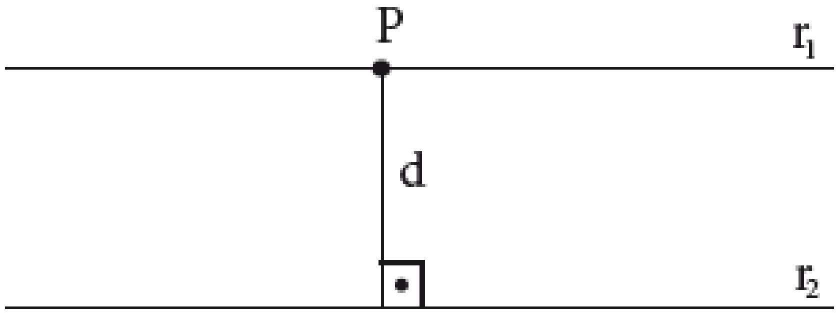
Sejam r_1 e r_2 retas distintas no espaço. Queremos calcular a distância entre essas duas retas, denotada por $d(r_1, r_2)$. Temos três casos a considerar:

(1) r_1 e r_2 são concorrentes:

Neste caso: $d(r_1, r_2) = 0$.

(2) r_1 e r_2 são paralelas:

Neste caso, definimos a distância entre as retas r_1 e r_2 como sendo a distância de um ponto P qualquer de r_1 até r_2, ou seja, $d(r_1, r_2) = d(P, r_2)$.



(3) r_1 e r_2 são reversas:

Seja r_1 a reta definida pelo ponto A_1 e pelo vetor diretor $\vec{v}_1$ e a reta r_2 pelo ponto A_2 e pelo vetor diretor $\vec{v}_2$.

Os vetores $\vec{v}_1$, $\vec{v}_2$ e $\overrightarrow{A_1A_2}$, por serem não coplanares, determinam um paralelepípedo cuja altura é a distância $d = d(r_1, r_2)$ que se quer calcular (a reta r_2 é paralela ao plano da base do paralelepípedo definida por $\vec{v}_1$ e $\vec{v}_2$).

O volume V do paralelepípedo é dado por

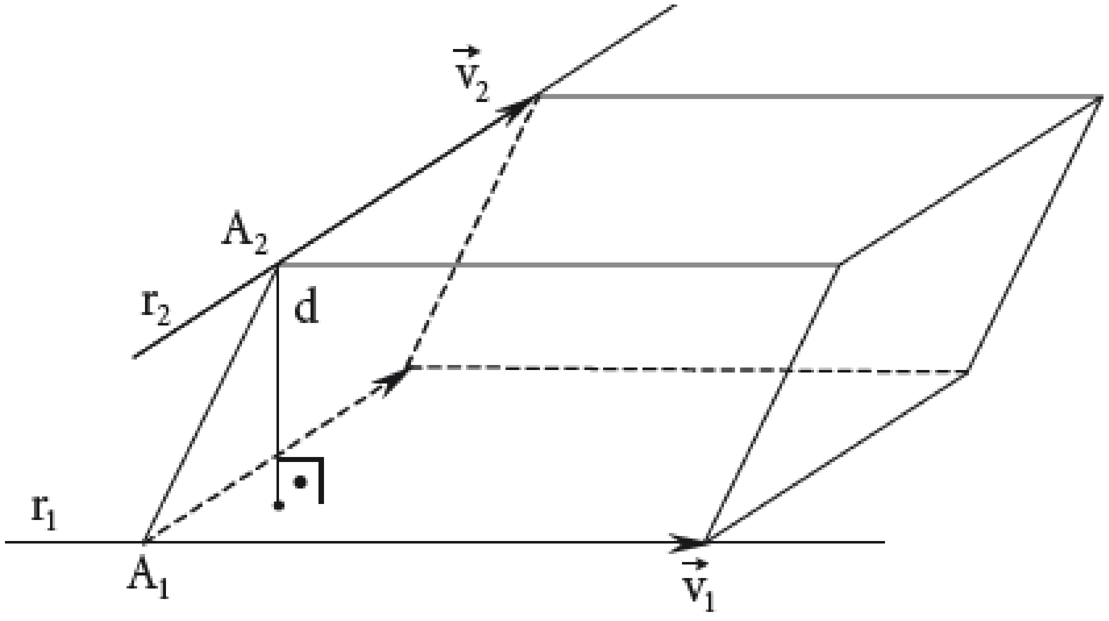
$$V = (\acute{a}rea\ da\ base)(altura) = \|\vec{v}_1 \times \vec{v}_2\| d.$$

Esse volume também pode ser calculado por

$$V = \left|\left(\vec{v}_1, \vec{v}_2, \overrightarrow{A_1A_2}\right)\right|.$$

Logo,

$$d = d(r_1, r_2) = \frac{\left|\left(\vec{v}_1, \vec{v}_2, \overrightarrow{A_1A_2}\right)\right|}{\|\vec{v}_1 \times \vec{v}_2\|}.$$

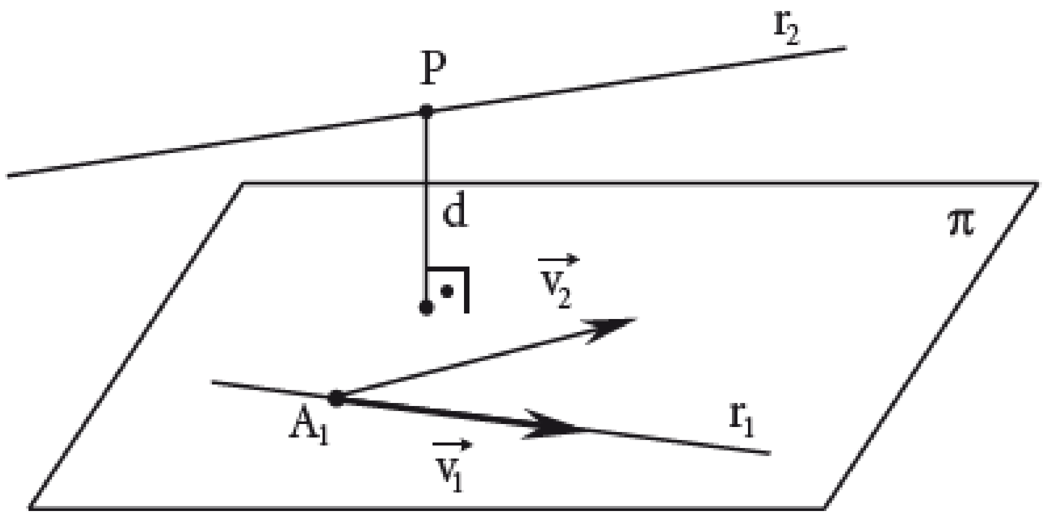


Observação: Outra forma de calcular a distância entre duas retas reversas consiste em:

(**1**) Encontrar uma equação geral do plano π definido pelo ponto A_1 e pelos vetores diretores $\vec{v}_1$ e $\vec{v}_2$ (um vetor normal a π é dado por $\vec{n} = \vec{v}_1 \times \vec{v}_2$);

(**2**) Como $\vec{v}_2$ é vetor diretor de π, então a reta r_2 é paralela a π. Logo, a distância entre as retas pode ser calculada por

$$d(r_1, r_2) = d(r_2, \pi) = d(P, \pi),\ P \in r_2.$$



Exemplo: Calcular a distância entre as retas

$$r_1:\begin{cases} x=-1+t \\ y=3-2t \\ z=-1-t \end{cases} \quad \text{e} \quad r_2:\begin{cases} y=x-3 \\ z=-x+1 \end{cases}$$

Solução: A reta r_1 passa pelo ponto $A_1(-1,3,-1)$ e tem a direção do vetor $\vec{v}_1=(1,-2,-1)$ e a reta r_2 pelo ponto $A_2(0,-3,1)$ e tem a direção de $\vec{v}_2=(1,1,-1)$.
Temos que:

- $\overrightarrow{A_1A_2}=(1,-6,2)$
- $(\vec{v}_1,\vec{v}_2,\overrightarrow{A_1A_2})=\begin{vmatrix} 1 & -2 & -1 \\ 1 & 1 & -1 \\ 1 & -6 & 2 \end{vmatrix}=9$ (retas reversas)
- $\vec{v}_1\times\vec{v}_2=\begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 1 & -2 & -1 \\ 1 & 1 & -1 \end{vmatrix}=(3,0,3)$

Logo,

$$d(r_1,r_2)=\frac{|(\vec{v}_1,\vec{v}_2,\overrightarrow{A_1A_2})|}{\|\vec{v}_1\times\vec{v}_2\|}$$

$$=\frac{|9|}{\sqrt{3^2+0^2+3^2}}$$

$$=\frac{3}{\sqrt{2}}$$

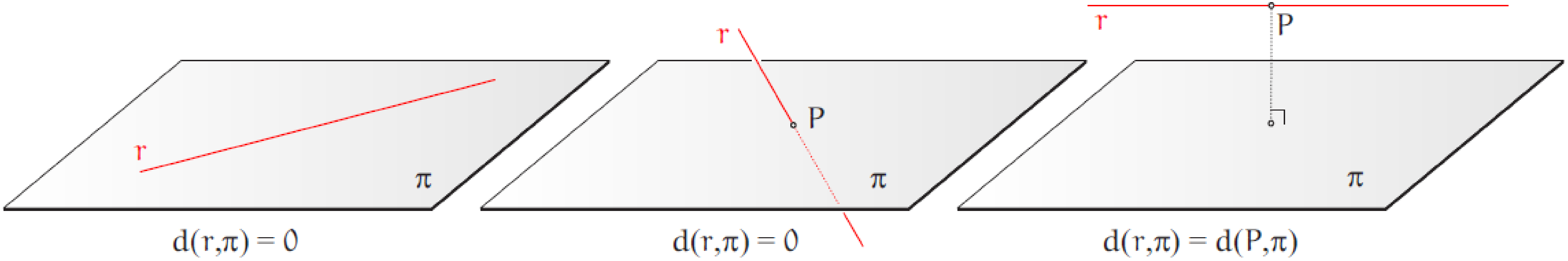
Distância de uma Reta a um Plano

Sejam r uma reta e π um plano no espaço. Queremos calcular a distância entre a reta r e o plano π, denotada por $d(r,\pi)$. Temos três situações a considerar:

(**1**) $r \subset \pi$: Definimos $d(r,\pi) = 0$.

(**2**) r e π são concorrentes: Também definimos $d(r,\pi) = 0$.

(**3**) r e π são paralelos: Definimos $d(r,\pi) = d(P,\pi)$, sendo P um ponto qualquer de r.



Exemplo: Calcular a distância da reta

$$r: \begin{cases} x = 3 \\ y = 4 \end{cases}$$

ao plano $\pi: x + y - 12 = 0$.

Solução: Temos que:

- A reta r é paralela ao eixo z, e possui vetor diretor $\vec{v} = (0, 0, 1)$.
- O vetor normal ao plano π é dado por $\vec{n} = (1,1,0)$.

Como o produto escalar $\vec{v} \cdot \vec{n} = 0$, então a reta r é paralela ao plano π.
Seja $P(3, 4, 0)$ um ponto de r, então

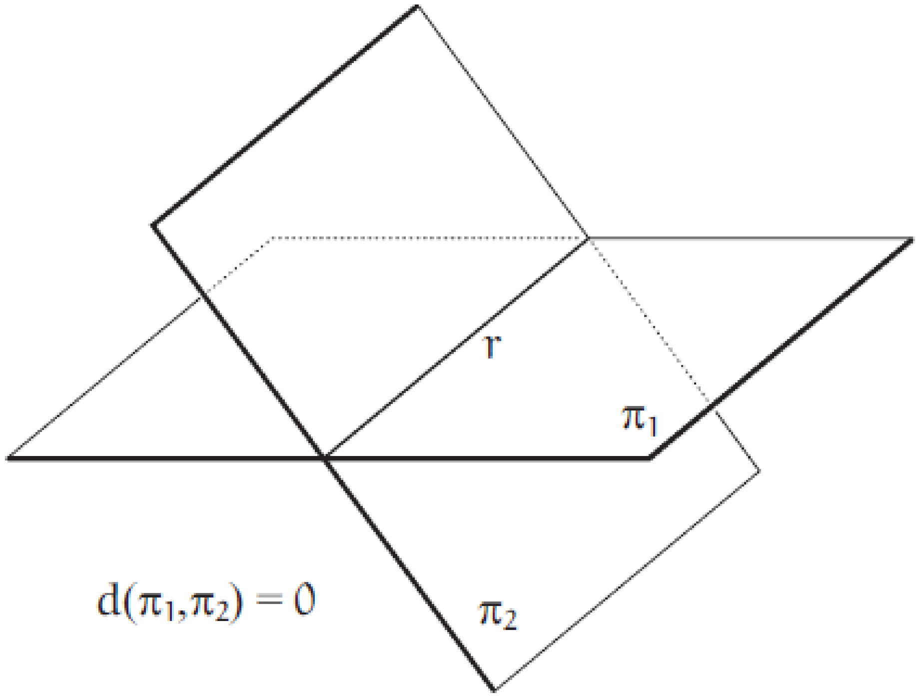
$$d(r, \pi) = d(P, \pi) = \frac{|1(3) + 1(4) + 0(0) - 12|}{\sqrt{1^2 + 1^2 + 0^2}} = \frac{5}{\sqrt{2}}.$$

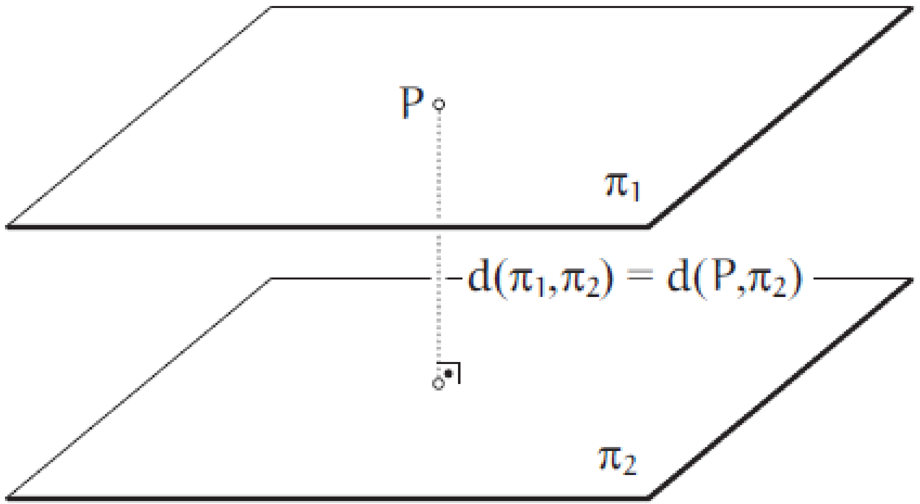
Distância entre Dois Planos

Sejam π_1 e π_2 planos distintas no espaço. Queremos calcular a distância entre esses dois planos, denotada por $d(\pi_1, \pi_2)$. Temos dois casos a considerar:

(**1**) π_1 e π_2 são concorrentes: Definimos $d(\pi_1, \pi_2) = 0$.
Observe que, neste caso, $\pi_1 \cap \pi_2 = r$, sendo r uma reta.

(**2**) π_1 e π_2 são paralelos: Definimos $d(\pi_1, \pi_2) = d(P, \pi_2)$, sendo P um ponto qualquer de π_1.





Exemplo: Calcular a distância entre os planos

$$\pi_1 : 2x - 2y + z - 5 = 0 \ \text{ e } \ \pi_2 : 4x - 4y + 2z + 14 = 0.$$

Solução: Inicialmente, veja que os vetores normais de π_1 e π_2 são paralelos:

$$\vec{n}_1 = (2, -2, 1) \text{ e } \vec{n}_2 = (4, -4, 2).$$

Logo, os planos π_1 e π_2 também são paralelos.
Seja $P(0, 0, 5)$ um ponto de π_1, então

$$d(\pi_1, \pi_2) = d(P, \pi_2) = \frac{|4(0) - 4(0) + 2(5) + 14|}{\sqrt{4^2 + (-4)^2 + 2^2}} = \frac{24}{6} = 4.$$