Lista matemática Discreta — Giovani Zanella

Seção 2.1)

3.) a) Sim, a repetição de eleemtentos não importa
b) não, pois o segundo conj tem o elemento 1 e um sub conjunto {1}
c) não, pq temos o elemento vazio com um conjunto composto pelo elemento vazio

7) a) F
b) F
c) F
d) V
e) F
f) V
G) V

17) Cardinalidade é a qtd de elem. em um conjunto

a) 1
b) 1
c) 2
d) 3

19) Conj das partes p/ cada letra

a) $\{\emptyset, a\}$ b) $\{\emptyset, a, b, \{a, b\}\}$ c) $\{\emptyset, \{\emptyset\}, \{\emptyset, \{\emptyset\}\}\}$

23) $A = \{a, b, c, d\}$ $B = \{y, z\}$

a) $\{(a,y), (b,y), (c,y), (d,y), (a,z), (b,z), (c,z), (d,z)\}$

b) $\{(y,a)\ (y,b)\ (y,c), (y,d), (z,a), (z,b), (z,c), (z,d)\}$

28) $A = \{A, b, c\}$ $B = \{x, y\}$ $C = \{0, 1\}$

a) $A \times B \times C =$

$A \times B =$ {(a,x),(a,y),(b,x),(b,y),(c,x),(c,y),}

$(A \times B) \times C =$ {(a,x,0),(a,y,0),(b,x,0),(b,y,0),(c,x,0),(c,y,0),(a,x,1),(a,y,1),(b,x,1),(b,y,1),(c,x,1),(c,y,1)}

Seção 2.2)

14) $A - B = \{1, 5, 7, 8\}$ $B - A = \{2, 10\}$ $A \cap B = \{3, 6, 9\}$

tem em A mas N em B $A = \{1, 5, 7, 8, 3, 6, 9\}$ $B = \{2, 10, 3, 6, 9\}$

15) a) A e B for conjunto $\Rightarrow \overline{A \cup B} = \bar{A} \cap \bar{B}$

1°) hipotese : $\overline{A \cup B}$ (vdd) Complemento
Tese : $\bar{A} \cap \bar{B}$ Provar

$x \in \bar{A} \cap \bar{B}$, então $x \notin A$ e $x \notin B$, por hipotese temos $\overline{A \cup B}$, ou seja $x \notin A \cup B$, logo $x \in \overline{A \cup B}$

2) hipotese : $\bar{A} \cap \bar{B}$ Tese : $\overline{A \cup B}$

não pertence na união, então n pertence em A, B

$x \in \overline{A \cup B}$, $x \notin A$ e $x \notin B$, Por hipotese sabemos que $x \in \bar{A} \cap \bar{B}$, pela de de Complemento se $x \notin A$ então $x \in \bar{A}$ e $x \in \bar{B}$, logo $x \in \bar{A} \cap \bar{B}$

16) a) $(A \cap B) \subseteq A$

$x \in (A \cap B)$ $x \in A$ e $x \in B$, conclui que x era um elemento da intersecção mostramos que tambem pertence ao A

b) $A \subseteq (A \cup B)$ = $x \in A$, pela def de união $x \in A \cup B$

c) $A - B \subseteq A$ = $x \in A - B$, pela def de diferença de conj. temos $x \in A$ e $x \notin B$

D) $A \cap (B - A) = \emptyset$

$x \in (A \cap (B - A)) \Rightarrow x \in A$ e $x \in B - A \Rightarrow x \in A$ e $x \in B$ e $x \notin A$, isso gera uma contradição, concluimos que nenhum elemento pode $\in$ simultaneamente em ambos conjuntos

e) $A \cup (B - A) = B - A$

$x \in A \cup (B - A) \Rightarrow x \in A$ ou $x \in B - A \Rightarrow x \in A$ ou $x \in B$ e $x \notin A$, logo $x \in A \cup B$

18) a) $\underset{}{\overset{\text{tese}}{(A \cup B)}} \subseteq \overset{\text{hip}}{(A \cup B \cup C)}$

$x \in A \cup B$, pela def de união $x \in A$ ou $x \in B$.

Por hip. $A \cup B \cup C$, como $x \in A$ ou $x \in B$ automaticamente teremos $x \in A \cup B \cup C$

c) $(A - B) - C \subseteq A - C$

Seja $x \in (A - B) - C$, pela def de diferença siguinifica que $(x \in A$ e $x \notin B)$ e $x \notin C$, logo se $x \in A$ e $x \notin C$, reescrevendo $x \in A - C$

d) $(A - C) \cap (C - B) = \emptyset$

Seja $x \in (A - C) \cap (C - B)$, pela def de interse $x \in (A - C)$ e $x \in (C - B)$, agr pela def de diferença $x \in A$ e $x \notin C$ e $x \in C$ e $x \notin B$

$\therefore$ temos uma contradição, logo nenhum elemento pode estar na Intersec dos conjuntos.

19) $A-B = A \cap \overline{B}$

1) hip : $A-B$
tese : $A \cap \overline{B}$

Seja $x \in A \cap \overline{B}$, pela def de inter e complementar temos que, $x \in A$ e $x \in \overline{B}$, logo $x \notin B$, como $x \in A$ e $x \notin B$ usando def diferença $x \in A - B$.

2) hip : $A \cap \overline{B}$
tese : $A - B$

Seja $x \in A - B$, logo $x \in A$ e $x \notin B$, como $x \notin B$, ou seja, $x \in \overline{B}$
Como $x \in A$ e $x \in \overline{B}$, pela def "$\cap$" $x \in A \cap \overline{B}$

20) $(A \cap B) \cup (A \cap \overline{B}) = A$

1) $(A \cap B) \cup (A \cap \overline{B}) \subseteq A$

Seja $x \in (A \cap B) \cup (A \cap \overline{B})$, logo pela def "$\cup$" e "$\cap$" temos, $x \in (A \cap B)$ ou $x \in (A \cap \overline{B})$, então $x \in A$ e $x \in B$ ou $x \in A$ e $x \in \overline{B}$
Em ambos os casos $x \in A$, independentemente de estar ou ñ em B
$\therefore (A \cap B) \cup (A \cap \overline{B}) \in A$

2) $A \subseteq (A \cap B) \cup (A \cap \overline{B})$

Seja $x \in A$, temos
caso 1 : se $x \in B$, e por hip $x \in A$, então $x \in (A \cap B)$
Caso 2 : se $x \in \overline{B}$, e por hip $x \in A$, então $x \in (A \cap \overline{B})$
pela def "$\cup$" $(A \cap B) \cup (A \cap \overline{B})$, independete da situacão se $x \in$ a B ou $\overline{B}$, x estará em um dos conjuntos.

23) $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$
tese hip

1) $A \cup (B \cap C) \subseteq (A \cup B) \cap (A \cup C)$

Seja $x \in A \cup (B \cap C)$, pela def de união $x \in A$ ou $x \in (B \cap C)$ e pela intersecção $x \in A$ ou $x \in B$ e $x \in C$, Sendo $x \in A$ pela adição da união temos $x \in A$ ou $x \in B$ e $x \in A$ ou C, ou seja $x \in (A \cup B) \cap (A \cup C)$.

2) $(A \cup B) \cap (A \cup C) \subseteq A \cup (B \cap C)$
$x \in (A \cup B) \cap (A \cup C)$, pela def de intersecção $x \in (A \cup B)$ e $x \in (A \cup C)$
pela def de união $x \in A$ ou $x \in B$ e $x \in A$ ou $x \in C$, pela adição da união temos, $x \in A$ ou $x \in (B \cap C)$, logo $x \in A \cup (B \cap C)$

32) $\{1, 3, 5\}$ e $\{1, 2, 3\}$

A−B ={5} (elementos em A que não estão em B).
B−A ={2} (elementos em B que não estão em A).

A⊕B= (A−B) ∪ (B−A) = {5}∪{2} = {2,5}

35) $A \oplus B = (A \cup B) - (A \cap B)$

Secão 2.3

9, 12, 13, 19

$N \geq x$ $N \leq x$

9) maior inferior $\lceil x \rceil$, menor inferior $\lfloor x \rfloor$

a) $\lceil \frac{3}{4} \rceil = \lceil 0{,}75 \rceil = 1$
b) $\lfloor \frac{7}{8} \rfloor = \lfloor 0{,}8 \rfloor = 0$
c) $\lceil -\frac{3}{4} \rceil = \lceil -0{,}75 \rceil = -1$
d) $\lfloor -\frac{7}{8} \rfloor = \lfloor -0{,}8 \rfloor = -1$
g) $\lfloor \frac{1}{2} + \lceil \frac{3}{2} \rceil \rfloor = \lfloor \frac{1}{2} + \frac{2}{2} \rfloor = \lfloor \frac{5}{2} \rfloor = 2$
h) $\lfloor \frac{1}{2} \cdot \lfloor \frac{5}{2} \rfloor \rfloor = \lfloor \frac{1}{2} \cdot 2 \rfloor = 1$

12)

a) $f(x) = 1 - 1$
$x_1 - 1 = x_2 - 1$
$x_1 = x_2$

b) $f(n) = n^2 + 1$
$n_1^2 + 1 = n_2^2 + 1$
$\sqrt[2]{n_1^2} = \sqrt[2]{n_2^2}$
$|n_1| = |n_2|$
$f(1) = 1 + 1 = 2$
$f(-1) = (-1)^2 + 1 = 2$
$\therefore$ Não é Injetora

c) $f(n) = n^3$
$n_1^3 = n_2^3$
$\sqrt[3]{n_1^3} = \sqrt[3]{n_2^3}$
$n_1 = n_2$

13)

a) $f(x) = x - 1$
$y = x - 1$
$x = y + 1$

b) $f(x) = x^2 + 1$
$y = x^2 + 1$
$x^2 = y - 1 \Rightarrow \sqrt{x^2} = \sqrt{y-1}$
$|x| = \sqrt{y-1}$
$\therefore$ não é sobrejetora

19)

a) $f(n) = 2x + 1$

i) Injetora
$2x_1 + 1 = 2x_2 + 1$
$2x_1 = 2x_2$
$x_1 = x_2$

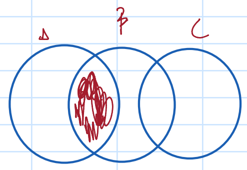
ii) sobrejetora
$y = 2x + 1$
$2x = y - 1$
$x = \frac{y-1}{2}$

$\therefore$ É bijetora

d) $f(x) = \frac{(x^2+1)}{(x^2+2)}$

ii) injetora
$f(1) = \frac{2}{3}$
$f(-1) = (\frac{2}{3})$
$\therefore$ Não é Injetora

27) a) $A \cap (B - C)$



30 -) Se f∘g é injetora, então g deve ser injetora.
Se g não fosse injetora, haveria $x1 \neq x2$ tais que $g(x1)=g(x2)$. Aplicando f, teríamos $f(g(x1))= f(g(x2))$, ou seja, $(f \circ g)(x1)=(f \circ g)(x2)$, o que contradiz a injetividade de f∘g.

31 - 36 - 37 -

31)

Se f∘g é sobrejetora, não podemos concluir necessariamente que g seja sobrejetora.

É possível que a imagem de gg seja um subconjunto de seu codomínio, mas essa imagem, ao ser aplicada em f, cubra todo o codomínio de f∘gf∘g. Assim, mesmo que gg não atinja todos os elementos de seu próprio codomínio, a composição f∘g pode ser sobrejetora, desde que ff compense essa “falta” e consiga atingir todos os valores no conjunto final.