CAPÍTULO

8

SUPERFÍCIES QUÁDRICAS

8.1 Introdução

A equação geral do 2º grau nas três variáveis x, y e z:

$$ax^2 + by^2 + cz^2 + 2dxy + 2exz + 2fyz + mx + ny + pz + q = 0, \tag{1}$$

onde pelo menos um dos coeficientes a, b, c, d, e ou f é diferente de zero, representa uma *superfície quádrica* ou simplesmente uma *quádrica*.

Observemos que se a superfície quádrica dada pela equação (1) for cortada pelos planos coordenados ou por planos paralelos a eles, a curva de interseção será uma *cônica*. A interseção de uma superfície com um plano é chamada *traço* da superfície no plano.

Por exemplo, o traço da superfície quádrica (1) no plano $z = 0$ é a cônica

$$ax^2 + by^2 + 2dxy + mx + ny + q = 0$$

contida no plano $z = 0$, isto é, no plano xOy.

Por outro lado, através de mudanças de coordenadas (rotação e/ou translação), a equação (1) pode ser transformada em uma das formas:

$$Ax^2 + By^2 + Cz^2 = D \tag{2}$$

ou:

$$\begin{aligned} Ax^2 + By^2 + Rz &= 0 \\ Ax^2 + Ry + Cz^2 &= 0 \\ Rx + By^2 + Cz^2 &= 0 \end{aligned} \tag{3}$$

onde a equação (2) representa uma quádrica *centrada* e as equações (3) quádricas *não centradas*.

Nosso objetivo é identificar e esboçar o gráfico de uma quádrica, conhecida sua equação.

8.2 Superfícies Quádricas Centradas

Se nenhum dos coeficientes da equação (2) for nulo, ela pode ser escrita sob uma das formas:

$$\pm\frac{x^2}{a^2} \pm \frac{y^2}{b^2} \pm \frac{z^2}{c^2} = 1 \qquad (4)$$

denominadas, qualquer delas, *forma canônica* ou *padrão* de uma superfície quádrica centrada.

As possíveis combinações de sinais nesta equação permitem concluir a existência de apenas três tipos de superfícies, conforme sejam três, dois ou um o número de coeficientes positivos dos termos do 1º membro da equação. Se os referidos coeficientes forem todos negativos, não existe lugar geométrico.

8.2.1 Elipsóide

O *elipsóide* é a superfície representada pela equação

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1 \qquad (5)$$

em que todos os coeficientes dos termos do 1º membro da equação (4) são positivos, onde a, b e c são reais positivos e representam as medidas dos semi-eixos do elipsóide (Fig. 8.2.1-a).

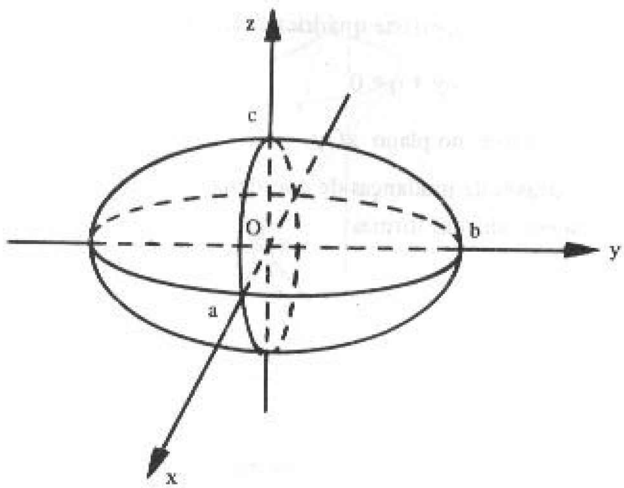

Figura 8.2.1-a

O traço no plano xOy é a elipse:

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1, \quad z = 0$$

e os traços nos planos xOz e yOz são as elipses:

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1, \quad y = 0 \quad \text{e} \quad \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1, \quad x = 0, \text{ respectivamente.}$$

Se pelo menos dois dos valores a, b e c são iguais, o elipsóide é de *revolução*. Por exemplo, se $a = c$, o elipsóide é obtido girando a elipse

$$\frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1, \quad x = 0$$

do plano yOz em torno do eixo dos y. A Figura 8.2.1-b mostra o elipsóide de revolução:

$$\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{16} + \frac{z^2}{4} = 1$$

onde $a = c = 2$, que se obtém girando a elipse:

$$\frac{y^2}{16} + \frac{z^2}{4} = 1, \quad x = 0 \text{ em torno do eixo dos } y.$$

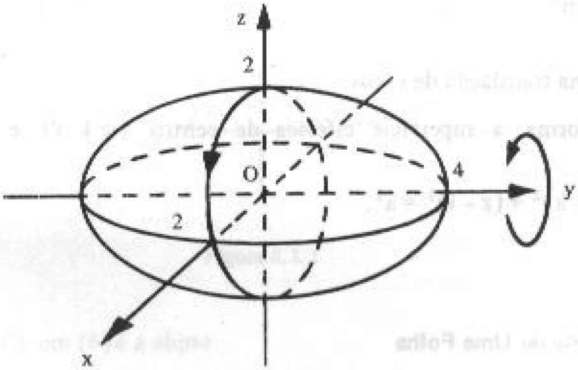

Figura 8.2.1-b

O traço no plano xOz é a circunferência:

$$\frac{x^2}{4} + \frac{z^2}{4} = 1, \quad y = 0.$$

No caso de $a = b = c$, a equação (5) toma a forma:

$$x^2 + y^2 + z^2 = a^2$$

e representa uma superfície esférica de centro $(0, 0, 0)$ e raio a.

Consideremos um plano paralelo ao plano xOy, isto é, um plano da forma $z = k$. Substituindo z por k na equação (5) vem:

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 - \frac{k^2}{c^2}$$

Se $|k| < c$, $1 - \frac{k^2}{c^2} > 0$, e, portanto, o traço no plano $z = k$ é uma elipse. Se $|k| = c$, os planos $z = c$ e $z = -c$ tangenciam o elipsóide nos pontos $(0, 0, c)$ e $(0, 0, -c)$. Se $|k| > c$, $1 - \frac{k^2}{c^2} < 0$ e, conseqüentemente, não existe gráfico. Considerações análogas podem ser feitas relativamente aos planos paralelos aos planos xOz e yOz.

Se o centro do elipsóide é o ponto (h, k, ℓ) e seus eixos forem paralelos aos eixos coordenados, a equação (5) assume a forma:

$$\frac{(x - h)^2}{a^2} + \frac{(y - k)^2}{b^2} + \frac{(z - \ell)^2}{c^2} = 1$$

obtida através de uma translação de eixos.

Da mesma forma, a superfície esférica de centro (h, k, ℓ) e raio a, tem equação:

$$(x - h)^2 + (y - k)^2 + (z - \ell)^2 = a^2.$$

8.2.2 Hiperbolóide de Uma Folha

Se na equação (4) dois coeficientes dos termos do 1º membro são positivos e um é negativo, a equação representa um *hiperbolóide de uma folha*.

A equação

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1 \tag{6}$$

é uma forma canônica da equação do hiperbolóide de uma folha ao longo do eixo dos z (Fig. 8.2.2). As outras duas formas canônicas são:

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1 \quad \text{e} \quad -\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$$

e representam hiperbolóides de uma folha ao longo dos eixos Oy e Ox, respectivamente.

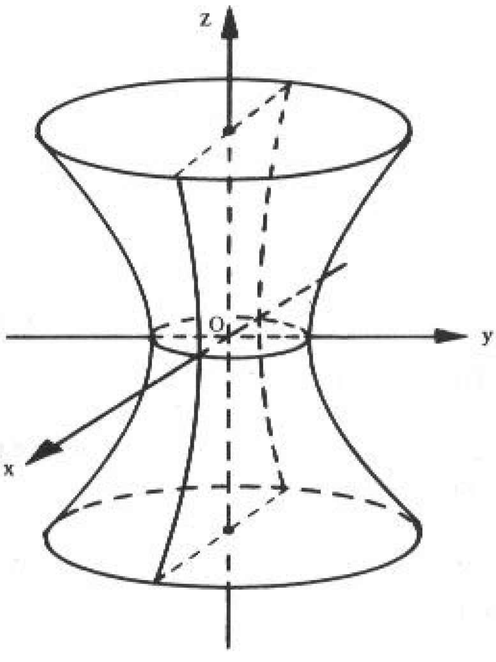

Figura 8.2.2

O traço no plano xOy em (6) é a elipse:

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1, \quad z = 0$$

e os traços nos planos xOz e yOz são as hipérboles:

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1, \quad y = 0$$

$$\text{e } \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1, \quad x = 0$$

respectivamente.

Um traço no plano $z = k$ é uma elipse que aumenta de tamanho à medida que o plano se afasta do plano xOy. Os traços nos planos $x = k$ $y = k$ são hipérboles.

Se na equação (6) tivermos $a = b$, o hiperbolóide é de revolução, gerado pela rotação de uma hipérbole em torno de seu eixo imaginário, no caso, o eixo Oz. O traço no plano xOy é a circunferência

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{a^2} = 1, \quad z = 0$$

ou:

$$x^2 + y^2 = a^2, \quad z = 0.$$

8.2.3 Hiperbolóide de Duas Folhas

Se na equação (4) um coeficiente dos termos do 1º membro é positivo e dois são negativos, a equação representa um *hiperbolóide de duas folhas.*

A equação

$$-\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1 \tag{7}$$

é uma forma canônica da equação do hiperbolóide de duas folhas ao longo do eixo dos y (Fig. 8.2.3). As outras duas formas canônicas são:

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1 \quad \text{e} \quad -\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$$

e representam hiperbolóides de duas folhas ao longo dos eixos Ox e Oz, respectivamente.

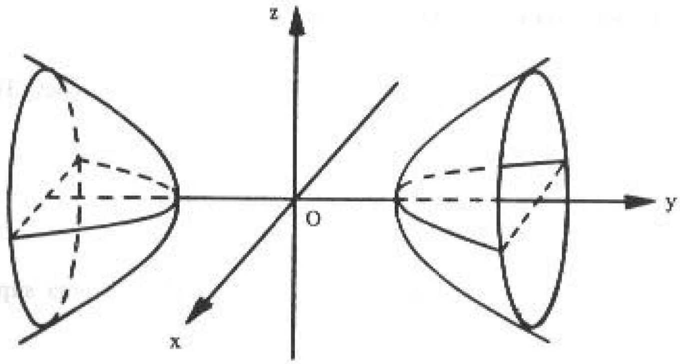

Figura 8.2.3

Os traços nos planos xOy e yOz em (7) são, respectivamente, as hipérboles:

$$\frac{y^2}{b^2} - \frac{x^2}{a^2} = 1, \quad z = 0$$

e:

$$\frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1, \quad x = 0$$

O plano xOz não intercepta a superfície, nem qualquer plano $y = k$, onde $|k| < b$.

Se $|k| > b$, o traço no plano $y = k$ é a elipse:

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{z^2}{c^2} = \frac{k^2}{b^2} - 1, \; y = k$$

Os traços nos planos $x = k$ e $z = k$ são hipérboles.

Se na equação (7) tivermos $a = c$, o hiperbolóide é de revolução, gerado pela rotação de uma hipérbole em torno de seu eixo real. O traço no plano $y = k$, $|k| > b$, é a circunferência:

$$-\frac{x^2}{a^2} + \frac{k^2}{b^2} - \frac{z^2}{a^2} = 1, \; y = k$$

ou:

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{z^2}{a^2} = \frac{k^2}{b^2} - 1, y = k$$

8.3 Superfícies Quádricas Não Centradas

Se nenhum dos coeficientes dos termos do 1º membro das equações (3) for nulo, elas podem ser escritas sob uma das formas:

$$\pm\frac{x^2}{a^2}\pm\frac{y^2}{b^2}=cz;\ \pm\frac{x^2}{a^2}\pm\frac{z^2}{c^2}=by;\ \pm\frac{y^2}{b^2}\pm\frac{z^2}{c^2}=ax \qquad (8)$$

denominadas, qualquer delas, *forma canônica* ou *padrão* de uma superfície quádrica não centrada.

As possíveis combinações de sinais nesta equação permitem concluir a existência de apenas dois tipos de superfícies, conforme os coeficientes dos termos de segundo grau tenham o mesmo sinal ou sinais contrários.

8.3.1 Parabolóide Elíptico

Se nas equações (8) os coeficientes dos termos de segundo grau tiverem sinais iguais, a equação representa um *parabolóide elíptico*.

A equação:

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=cz \qquad (9)$$

é uma forma canônica da equação do parabolóide elíptico ao longo do eixo dos z (Fig. 8.3.1). As outras duas formas canônicas são:

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{z^2}{c^2}=by \quad \text{e} \quad \frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=ax$$

e representam parabolóides elípticos ao longo dos eixos Oy e Ox, respectivamente.

O traço no plano xOy em (9) é a origem (0, 0, 0) e os traços nos planos xOz e yOz são as parábolas

$$\frac{x^2}{a^2}=cz,\quad y=0 \quad \text{e} \quad \frac{y^2}{b^2}=cz,\quad x=0,$$

respectivamente.

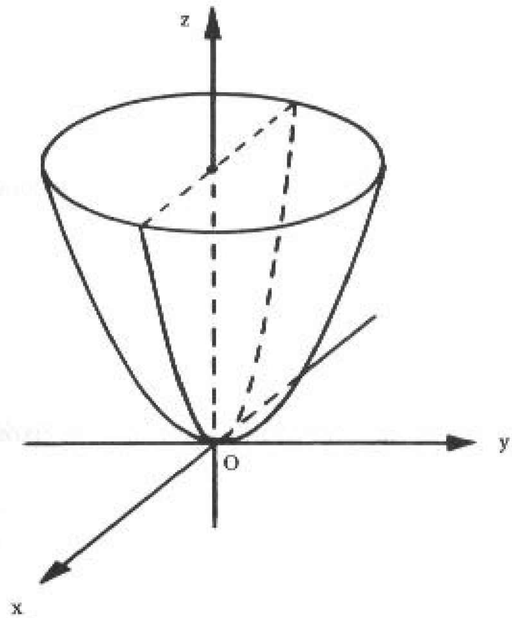

Figura 8.3.1

Se $c > 0$, a superfície situa-se inteiramente acima do plano xOy e, para $c < 0$, a superfície está inteiramente abaixo deste plano. Assim, o sinal de c coincide com o de z, pois caso contrário não haveria lugar geométrico.

Um traço no plano $z = k$, $k > 0$ (Fig. 8.3.1), é uma elipse que aumenta de tamanho à medida que o plano se afasta do plano xOy. Os traços nos planos $x = k$ e $y = k$ são parábolas.

Se na equação (9) tivermos $a = b$, o parabolóide é de revolução e pode ser gerado pela rotação da parábola:

$$\frac{y^2}{b^2} = cz, \quad x = 0$$

em torno do eixo dos z. Neste caso, o traço no plano $z = k$ é uma circunferência.

8.3.2 Parabolóide Hiperbólico

Se nas equações (8) os coeficientes dos termos de segundo grau tiverem sinais contrários, a equação representa um *parabolóide hiperbólico.*

A equação:

$$\frac{y^2}{b^2} - \frac{x^2}{a^2} = cz \tag{10}$$

é uma forma canônica da equação do parabolóide hiperbólico ao longo do eixo dos z (Fig. 8.3.2). As outras formas canônicas são

$$\frac{z^2}{c^2} - \frac{x^2}{a^2} = by \quad e \quad \frac{z^2}{c^2} - \frac{y^2}{b^2} = ax$$

e representam parabolóides hiperbólicos situados ao longo dos eixos Oy e Ox, respectivamente.

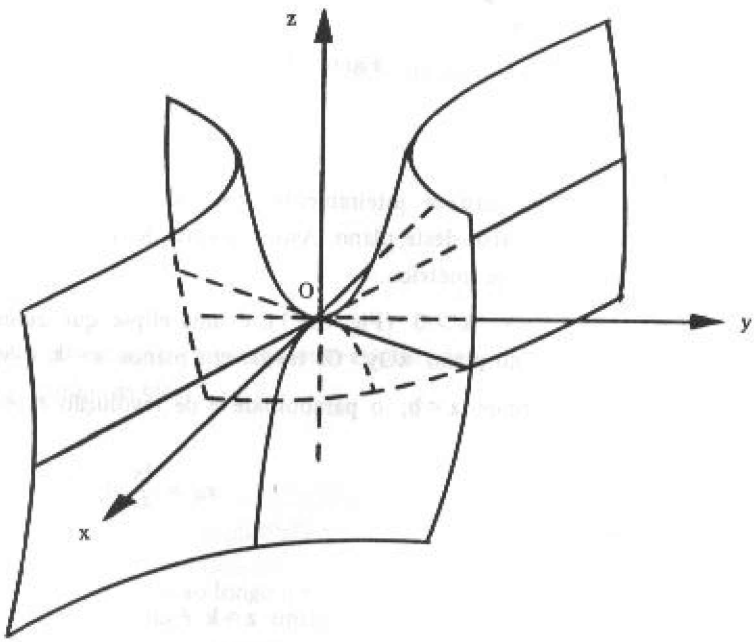

Figura 8.3.2

A figura mostra um esboço de um parabolóide hiperbólico descrito pela equação (10), onde $c > 0$.

O traço em (10) no plano xOy é o par de retas:

$$\frac{y^2}{b^2} - \frac{x^2}{a^2} = 0, \quad z = 0,$$

isto é: $\frac{y}{b} + \frac{x}{a} = 0, \quad z = 0$ e $\frac{y}{b} - \frac{x}{a} = 0, \quad z = 0$ e os traços nos planos xOz e yOz são as parábolas:

$$-\frac{x^2}{a^2} = cz, \quad y = 0 \quad \text{e} \quad \frac{y^2}{b^2} = cz, \quad x = 0$$

que têm o eixo dos z como eixo de simetria e concavidade para baixo e para cima, respectivamente.

O traço no plano $z = k$ é uma hipérbole cujo eixo real é paralelo ao eixo dos y se $k > 0$ e paralelo ao eixo dos x se $k < 0$. Os traços nos planos $x = k$ e $y = k$ são parábolas.

8.4 Superfície Cônica

Superfície cônica é uma superfície gerada por uma reta que se move apoiada numa curva plana qualquer e passando sempre por um ponto dado não situado no plano desta curva.

A reta é denominada *geratriz*, a curva plana é a *diretriz* e o ponto fixo dado é o *vértice* da superfície cônica.

Consideremos o caso particular da superfície cônica cuja diretriz é uma elipse (ou circunferência) com o vértice na origem do sistema e com seu eixo sendo um dos eixos coordenados. Nestas condições, a superfície cônica cujo eixo é o eixo dos z (Fig. 8.4) tem equação:

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 0$$

O traço no plano xOy é o ponto (0, 0, 0).

O traço no plano yOz tem equações:

$$\frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 0, \quad x = 0$$

ou:

$$\left(\frac{y}{b} - \frac{z}{c}\right)\left(\frac{y}{b} + \frac{z}{c}\right) = 0, \quad x = 0$$

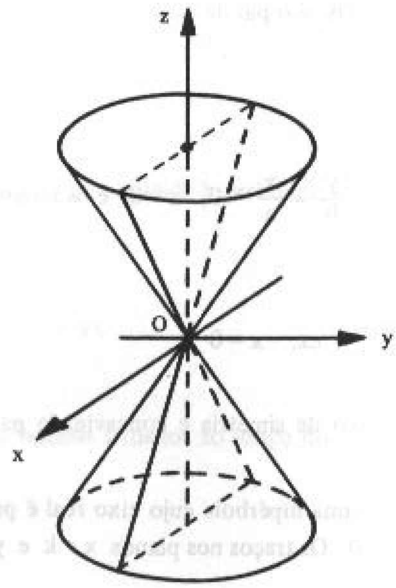

Figura 8.4

donde obtemos as duas retas que passam pela origem:

$$y = \frac{b}{c}z, \quad x = 0$$

e:

$$y = -\frac{b}{c}z, \quad x = 0$$

O traço no plano xOz, de forma análoga, é constituído por duas retas que passam pela origem.

Os traços nos planos $z = k$ são elipses e se $a = b$, são circunferências. Neste caso, temos a superfície cônica *circular reta.*

Os traços no plano $x = k$ e $y = k$ são hipérboles.

As superfícies cônicas cujos eixos são os eixos dos x e dos y, têm equações

$$-\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 0 \quad \text{e} \quad \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 0,$$

respectivamente.

8.5 Superfície Cilíndrica

Seja C uma curva plana e f uma reta fixa não contida nesse plano.

Superfície cilíndrica é a superfície gerada por uma reta r que se move paralelamente à reta fixa f em contato permanente com a curva plana C.

A reta r que se move é denominada *geratriz* e a curva C é a *diretriz* da superfície cilíndrica (Fig. 8.5-a).

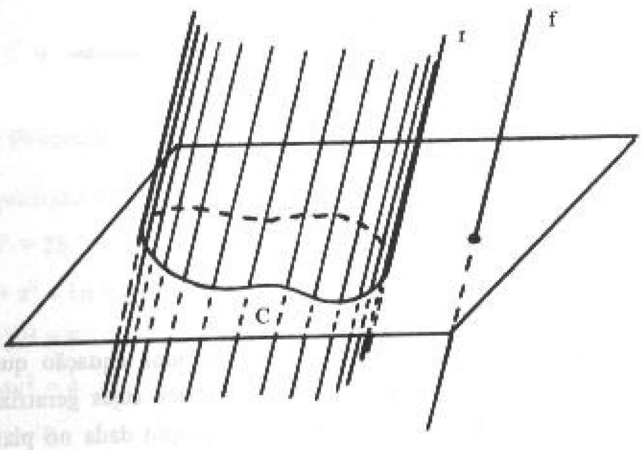

Figura 8.5-a

Em nosso estudo consideramos apenas superfícies cilíndricas cuja diretriz é uma curva que se encontra num dos planos coordenados e a geratriz é uma reta paralela ao eixo coordenado não contido no plano. Neste caso, a equação da superfície cilíndrica é a mesma de sua diretriz.

Por exemplo, se a diretriz for a parábola:

$$x^2 = 2y,$$

a equação da superfície cilíndrica também será:

$$x^2 = 2y \text{ (Fig. 8.5-b).}$$

Conforme a diretriz seja uma circunferência, elipse, hipérbole ou parábola, a superfície cilíndrica é chamada *circular, elíptica, hiperbólica* ou *parabólica.*

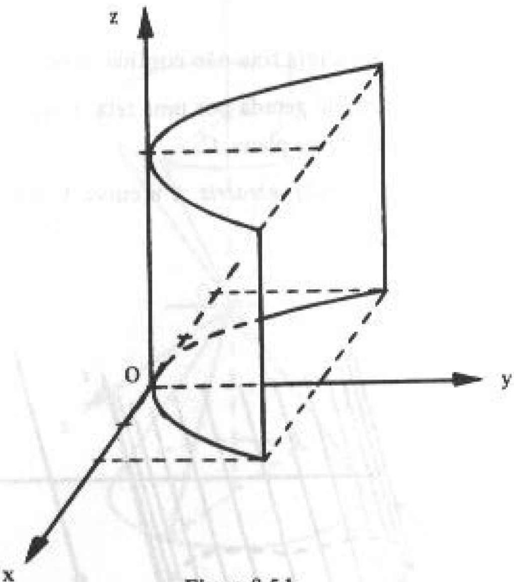

Figura 8.5-b

É importante observar que, em geral, o gráfico de uma equação que não contém uma determinada variável corresponde a uma superfície cilíndrica cujas geratrizes são paralelas ao eixo da variável ausente e cuja diretriz é o gráfico da equação dada no plano correspondente.

Por exemplo, a equação

$$\frac{x^2}{4} + \frac{z^2}{9} = 1$$

representa uma superfície cilíndrica com geratrizes paralelas ao eixo dos y, sendo a diretriz uma elipse no plano xOz (Fig. 8.5-c).

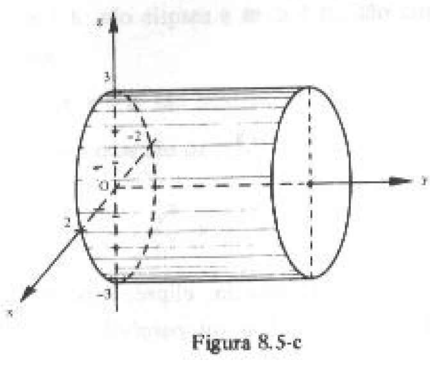

Figura 8.5-c

Observação

O gráfico da equação geral $ax^2 + by^2 + cz^2 + 2dxy + 2exz + 2fyz + mx + ny + pz + q = 0$ poderá representar quádricas degeneradas. Alguns exemplos são:

a) $x^2 - 16 = 0$; dois planos paralelos: $x = 4$ e $x = -4$.

b) $3y^2 = 0$; um plano: o plano $y = 0$.

c) $x^2 + 2y^2 = 0$; uma reta: o eixo dos z.

d) $2x^2 + 4y^2 + 5z^2 = 0$; um ponto: a origem $(0, 0, 0)$.

e) $3x^2 + 2y^2 + z^2 = -3$; o conjunto vazio.

8.6 Problemas Propostos

1) Identificar as quádricas representadas pelas equações:

a) $x^2 + y^2 + z^2 = 25$

b) $2x^2 + 4y^2 + z^2 - 16 = 0$

c) $x^2 - 4y^2 + 2z^2 = 8$

d) $z^2 - 4x^2 - 4y^2 = 4$

e) $x^2 + z^2 - 4y = 0$

f) $x^2 + y^2 + 4z = 0$

g) $4x^2 - y^2 = z$

h) $z^2 = x^2 + y^2$

i) $z = x^2 + y^2$

j) $x^2 + y^2 = 9$

l) $y^2 = 4z$

m) $x^2 - 4y^2 = 16$

n) $4y^2 + z^2 - 4x = 0$

o) $-x^2 + 4y^2 + z^2 = 0$

p) $16x^2 + 9y^2 - z^2 = 144$

q) $16x^2 - 9y^2 - z^2 = 144$

r) $2y^2 + 3z^2 - x^2 = 0$

s) $4x^2 + 9y^2 = 36z$

2) Reduzir cada uma das equações à forma canônica, identificar e construir o gráfico da quádrica que ela representa.

a) $9x^2 + 4y^2 + 36z^2 = 36$

b) $36x^2 + 9y^2 - 4z^2 = 36$

c) $36x^2 - 9y^2 - 4z^2 = 36$

d) $x^2 + y^2 + z^2 = 36$

e) $x^2 + y^2 - 9z = 0$

f) $x^2 + 4z^2 - 8y = 0$

g) $4x^2 - 9y^2 - 36z = 0$

h) $x^2 + 4y^2 - z^2 = 0$

i) $x^2 - y^2 + 2z^2 = 4$

j) $y^2 = x^2 + z^2$

l) $4x^2 + 2y^2 + z^2 = 1$

m) $x^2 + y + z^2 = 0$

n) $x^2 - 9y^2 = 9$

o) $x^2 - 4y^2 = 0$

3) Representar graficamente as seguintes superfícies cilíndricas:

a) $y = 4 - x^2$

b) $\frac{x^2}{4} + \frac{z^2}{9} = 1$

c) $x^2 + 4y^2 = 16$

d) $x^2 - 4y^2 = 16$ e $-3 \leqslant z \leqslant 3$

e) $x^2 + y^2 = 9$ e $0 \leqslant z \leqslant 4$

f) $z^2 = 4y$

g) $z = y^2 + 2$

h) $x - y = 0$

4) Determinar a equação de cada uma das superfícies esféricas definidas pelas seguintes condições:

a) Centro $C(2, -3, 1)$ e raio 4.

b) O segmento de extremos $A(-1, 3, -5)$ e $B(5, -1, -3)$ é um de seus diâmetros.

c) Centro $C(4, -1, -2)$ e tangente ao plano xOy.

d) Centro $C(-2, 3, 4)$ e tangente ao eixo dos z.

e) Centro $C(0, -4, 3)$ e tangente ao plano de equação: $x + 2y - 2z - 2 = 0$.

8.6.1 Respostas de Problemas Propostos

1) *a*) Superfície esférica

b) Elipsóide

c) Hiperbolóide de uma folha

d) Hiperbolóide de duas folhas

e) Parabolóide circular

f) Parabolóide circular

g) Parabolóide hiperbólico

h) Superfície cônica circular

i) Parabolóide circular

j) Superfície cilíndrica circular

l) Superfície cilíndrica parabólica

m) Superfície cilíndrica hiperbólica

n) Parabolóide elíptico

o) Superfície cônica elíptica

p) Hiperbolóide de uma folha

q) Hiperbolóide de duas folhas

r) Superfície cônica elíptica

s) Parabolóide elíptico

2) *a*) $\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{9}+\frac{z^2}{1}=1$, elipsóide

b) $\frac{x^2}{1}+\frac{y^2}{4}-\frac{z^2}{9}=1$, hiperbolóide de uma folha

c) $\frac{x^2}{1}-\frac{y^2}{4}-\frac{z^2}{9}=1$, hiperbolóide de duas folhas

d) $\frac{x^2}{36}+\frac{y^2}{36}+\frac{z^2}{36}=1$, superfície esférica de raio 6

e) $\frac{x^2}{1}+\frac{y^2}{1}=9z$, parabolóide circular

f) $\frac{x^2}{4}+\frac{z^2}{1}=2y$, parabolóide elíptico

g) $\frac{x^2}{9}-\frac{y^2}{4}=z$, parabolóide hiperbólico

h) $\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{1}-\frac{z^2}{4}=0$, superfície cônica

i) $\frac{x^2}{4}-\frac{y^2}{4}+\frac{z^2}{2}=1$, hiperbolóide de uma folha

j) $\frac{x^2}{1}+\frac{z^2}{1}-\frac{y^2}{1}=0$, superfície cônica

l) $\frac{x^2}{\frac{1}{4}}+\frac{y^2}{\frac{1}{2}}+\frac{z^2}{1}=1$, elipsóide

m) $\frac{x^2}{1}+\frac{z^2}{1}=-y$, parabolóide circular

n) $\frac{x^2}{9}-\frac{y^2}{1}=1$, superfície cilíndrica hiperbólica

o) dois planos: $x=2y$ e $x=-2y$

4) *a*) $x^2 + y^2 + z^2 - 4x + 6y - 2z - 2 = 0$

b) $x^2 + y^2 + z^2 - 4x - 2y + 8z + 7 = 0$

c) $x^2 + y^2 + z^2 - 8x + 2y + 4z + 17 = 0$

d) $x^2 + y^2 + z^2 + 4x - 6y - 8z + 16 = 0$

e) $9x^2 + 9y^2 + 9z^2 + 72y - 54z - 31 = 0$

Impressão e acabamento
Gráfica e Editora FCA
Tel. (011) 419-0200