CAPÍTULO 4

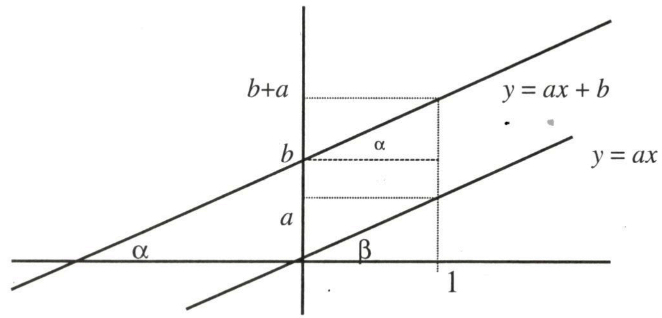
Derivadas

4.1 Introdução

Antes de apresentarmos o conceito de derivada, faremos algumas considerações sobre dois tópicos: coeficiente angular de uma reta e taxa de variação de uma função.

a) *Coeficiente angular de uma reta*

O gráfico da função $y = ax + b$ é uma reta. Como para $x = 0$ obtemos $y = b$, o número b, chamado *coeficiente linear*, indica o ponto em que a reta $y = ax + b$ intercepta o eixo das ordenadas.



A reta $y = ax$ passa pela origem do sistema de coordenadas $(0, 0)$, e é paralela à reta $y = ax + b$. Para verificar que estas retas são de fato paralelas, indiquemos por α o ângulo formado pelo eixo das abscissas e a reta $y = ax + b$ e por β o ângulo formado pelo eixo das abscissas e a reta $y = ax$. Para $x = 1$ temos

$$ax = a \qquad \text{e} \qquad ax + b = a + b$$

e, assim, obtemos

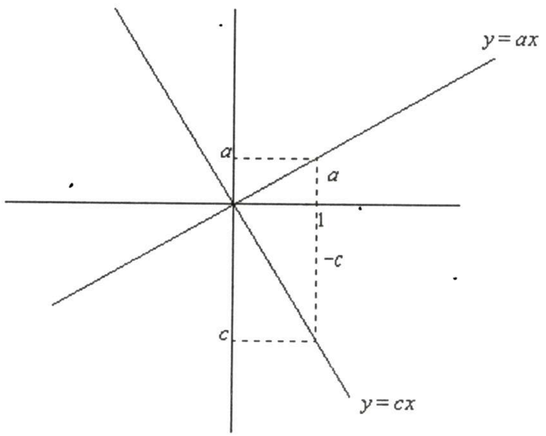
$$\operatorname{tg} \alpha = a \qquad \text{e} \qquad \operatorname{tg} \beta = a.$$

Portanto, $\alpha = \beta$, e as retas $y = ax + b$ e $y = ax$ são paralelas.

Vemos então que o ângulo α formado pelo eixo das abscissas e a reta $y = ax + b$ (ou $y = ax$) depende apenas do número a. Este número $a = \operatorname{tg} \alpha$ é chamado *coeficiente angular* da reta $y = ax + b$.

Observação 1- Duas retas $y = ax + b$ e $y = cx + d$ são perpendiculares se, e somente se, $ac = -1$.

Para provar o fato enunciado nesta observação, consideremos duas retas perpendiculares $y = ax$ e $y = cx$, num sistema de coordenadas cartesianas ortogonais.



O triângulo de vértices (0, 0), (1, a) e (1, 0) é semelhante ao triângulo de vértices (1, c), (0, 0) e (1, 0), pois ambos são retângulos e seus ângulos agudos são congruentes por terem lados respectivamente perpendiculares. Logo, seus lados são proporcionais, isto é,

$$\frac{1}{a} = \frac{1}{x}.$$

Assim,

$$a \cdot (-c) = 1,$$

ou seja,

$$ac = -1.$$

Como, num plano, por um ponto dado passa uma única perpendicular a uma reta, a reta $y = cx$ é a única perpendicular à reta $y = ax$ que passa pela origem.

Reciprocamente, suponhamos agora que as retas $y = ax$ e $y = cx$ satisfaçam a relação

$$ac = -1.$$

Neste caso a reta $y = cx$ é a reta $y = -\dfrac{x}{a}$.

Pelo que vimos acima, a única reta perpendicular a $y = ax$ que passa pela origem é a reta $y = -\dfrac{x}{a}$.

Portanto, quando $ac = -1$, a reta $y = cx$ é perpendicular à reta $y = ax$.

Convidamos o leitor a determinar a equação da reta que passa pelo ponto (3, 2) e forma um ângulo de 30° com o eixo dos x, bem como a equação da reta perpendicular a esta, e que passa pelo ponto (−1, 2).

b) *Taxa de variação de uma função* .

A *taxa de variação média* de uma função f num intervalo $[a,b]$ é o quociente entre a variação da função f neste intervalo e o comprimento do intervalo:

$$\frac{f(b) - f(a)}{b - a}.$$

A taxa média de variação de uma função fornece a variação média da função por unidade acrescida à variável.

Se, por exemplo, num período de 10 meses a massa de um animal passou de 180kg para 330kg, então a variação mensal média de sua massa (ou a taxa de variação média de sua massa) é dada por

$$\frac{330-180}{10}=\frac{150}{10}=15.$$

Este resultado significa que em média o animal adquiriu 15kg a cada mês.

Poderíamos dizer então que a taxa de variação da massa do animal é a "velocidade" com que sua massa varia.

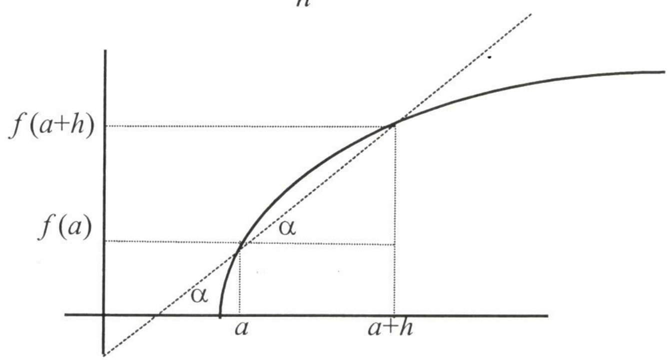
Um exemplo popular de taxa de variação é a velocidade. Na verdade, a velocidade de um móvel é a taxa de variação da função que fornece a sua posição, em relação ao tempo.

4.2 A derivada de uma função

Consideremos uma função $f : \mathrm{I} \to \mathbb{R}$, sendo I um intervalo e f contínua num ponto $a \in \mathrm{I}$.

Para $h \neq 0$ tal que $a + h \in \mathrm{I}$, podemos traçar uma reta ("secante" ao gráfico de f) passando pelos pontos $(a, f(a))$ e $(a+h, f(a+h))$. Se α é o ângulo entre o eixo das abscissas e esta reta, então temos

$$\operatorname{tg}\alpha=\frac{f(a+h)-f(a)}{h}.$$



Ou seja, o coeficiente angular da reta em pauta é igual à taxa de variação

Quando existe

$$\mathrm{L}=\lim_{h\to 0}\frac{f(a+h)-f(a)}{h},$$

dizemos que a reta que passa por $(a, f(a))$ e tem coeficiente angular L é a *reta tangente* ao gráfico de f no ponto $(a, f(a))$.

Dizemos também que este limite é a *inclinação* do gráfico de f no ponto $(a, f(a))$.

Este limite é ainda denominado *taxa de variação instantânea* de f no ponto a.

A reta *normal ao gráfico de* f no ponto $(a, f(a))$ é a reta que passa por este ponto e é perpendicular à reta tangente ao gráfico de f no mesmo ponto.

Se $p(t)$ é a posição de um móvel num instante t, então sua velocidade média num intervalo de tempo $[t, t+h]$ é

$$\frac{p(t+h)-p(t)}{h}.$$

Se existir o limite

$$\mathrm{L}=\lim_{h\to 0}\frac{p(t+h)-p(t)}{h},$$

então L é a *velocidade instantânea* do móvel no instante t.

Se $m(t)$ é a massa de um animal no instante t, então a taxa de variação média da massa desse animal no intervalo $[t, t+h]$ é

$$\frac{m(t+h)-m(t)}{h}.$$

Quando existe o limite

$$\mathrm{L} = \lim_{h\to 0} \frac{m(t+h)-m(t)}{h},$$

dizemos que L é a taxa de *variação instantânea* da massa do animal no instante t.

Se $g(t)$ é a altura de uma planta no instante t, então a taxa de variação média da altura dessa planta no intervalo de tempo $[t, t+h]$ é

$$\frac{g(t+h)-g(t)}{h}.$$

Quando existe o limite

$$\mathrm{L} = \lim_{h\to 0} \frac{g(t+h)-g(t)}{h},$$

dizemos que L é a taxa de *variação instantânea* da altura da planta no instante t.

Existem inúmeras situações que levam a este limite, o que justifica a definição que segue.

Definição - Seja $a \in \mathrm{I}$, onde I é um intervalo contido no domínio de uma função f. Se existir o limite

$$\mathrm{L} = \lim_{h\to 0} \frac{f(a+h)-f(a)}{h},$$

diremos que f é *derivável no ponto* a e que sua *derivada* neste ponto é $f'(a) = \mathrm{L}$.

A derivada da função f no ponto a pode também ser indicada por

$$\mathrm{D}f(a), \quad \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}f(a), \quad \text{ou} \quad \frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}x}(a).$$

A fração

$$\frac{f(a+h)-f(a)}{h}$$

é chamada *razão incremental* ou *quociente de Newton* da função f no ponto a.

Naturalmente, o limite

$$\lim_{h\to 0} \frac{f(a+h)-f(a)}{h}$$

pode ser escrito

$$\lim_{x\to a} \frac{f(x)-f(a)}{x-a}$$

ou, ainda,

$$\lim_{\Delta x\to 0} \frac{f(a+\Delta x)-f(a)}{\Delta x}.$$

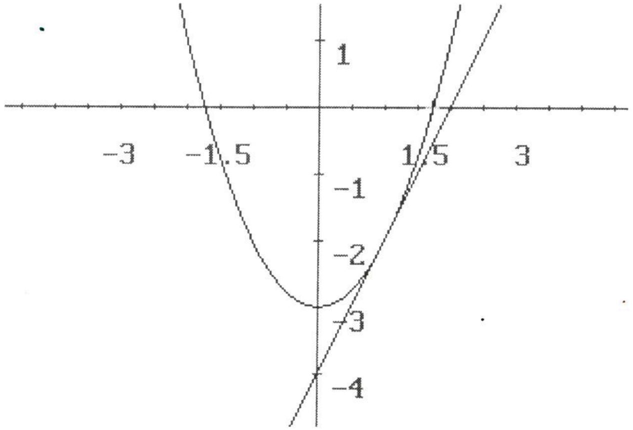
Se uma função f for derivável em todos os pontos de seu domínio, diremos simplesmente que f é *derivável*.

Definição - Seja $f : X \to \mathbb{R}$ uma função derivável. A função $f' : X \to \mathbb{R}$ que a cada ponto $x \in X$ associa o número real $f'(x)$, é chamada *função derivada primeira* de f.

Exemplo 1 - Seja $f(x) = x^2 - 3$. Para calcular a derivada de f no ponto $x = 1$ calculamos

$$\lim_{h\to 0} \frac{f(1+h)-f(1)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{(1+h)^2-3-(1^2-3)}{h}$$

$$= \lim_{h\to 0} \frac{1+2h+h^2-1}{h}$$
$$= \lim_{h\to 0} \frac{h(2+h)}{h}$$
$$= \lim_{h\to 0} (2+h)$$
$$= 2.$$



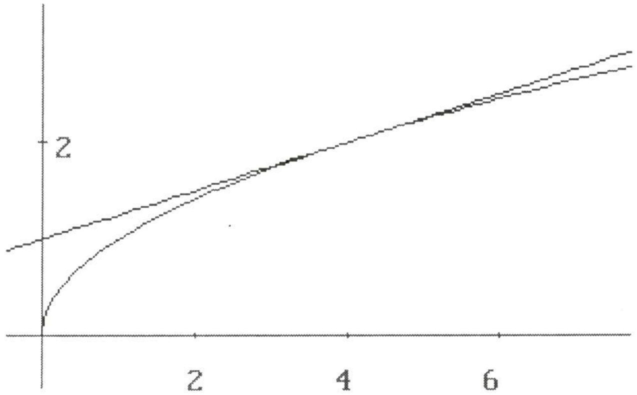
Portanto $f'(1)=2$, e assim o coeficiente angular da reta tangente ao gráfico de f no ponto $(1,-2)$ é 2. Se α é o ângulo formado pelo eixo dos x e a reta tangente ao gráfico de f no ponto $(1,-2)$, então $\operatorname{tg}\alpha = 2$.

Exemplo 2- Calculemos a derivada da função $f(x)=\sqrt{x}$ no ponto $x=4$.

Devemos calcular o limite

$$\lim_{x\to 4} \frac{f(x)-f(4)}{x-4} = \lim_{x\to 4} \frac{\sqrt{x}-\sqrt{4}}{x-4}$$
$$= \lim_{x\to 4} \frac{\sqrt{x}-2}{x-4}$$
$$= \lim \frac{\sqrt{x}-2}{} \cdot \frac{\sqrt{x}+2}{}$$

$$= \lim_{x\to 4} \frac{x-4}{(x-4)(\sqrt{x}+2)}$$
$$= \lim_{x\to 4} \frac{1}{\sqrt{x}+2}$$
$$= \frac{1}{2+2} = \frac{1}{4}.$$



Se α é o ângulo formado pelo eixo dos x e a reta tangente ao gráfico de f no ponto $(4,2)$, então $\operatorname{tg}\alpha = \frac{1}{4}$.

4.3 Derivadas laterais

Definição - Seja $a \in I$, onde I é um intervalo aberto contido no domínio de uma função f.

Dizemos que f é *derivável à direita* no ponto a quando existe

$$\lim_{x \to a^+} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} = \lim_{h \to 0^+} \frac{f(a+h) - f(a)}{h}.$$

No caso afirmativo, este limite é a derivada à direita de f no ponto a, e é representado por

$$f'(a^+) \text{ ou } f_+'(a).$$

Dizemos que f é *derivável à esquerda* no ponto a quando existe

$$\lim_{x \to a^-} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} = \lim_{h \to 0^-} \frac{f(a+h) - f(a)}{h}.$$

No caso afirmativo, este limite é a derivada à esquerda de f no ponto a, e é representado por

$$f'(a^-) \text{ ou } f_-'(a).$$

Exemplo 3- Seja $f(x) = \begin{cases} x^2 - 1 & \text{se } x \le 2 \\ 5 - x & \text{se } x > 2 \end{cases}$.

Então temos

$$\begin{aligned} f'(2^+) &= \lim_{x \to 2^+} \frac{f(x) - f(2)}{x - 2} \\ &= \lim_{x \to 2^+} \frac{5 - x - 3}{x - 2} \\ &= \lim_{x \to 2^+} \frac{-(x-2)}{x - 2} \\ &= \lim_{x \to 2^+} -1 = -1 \end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned} f'(2^-) &= \lim_{x \to 2^-} \frac{f(x) - f(2)}{x - 2} \\ &= \lim_{x \to 2^-} \frac{x^2 - 1 - 3}{x - 2} \\ &= \lim_{x \to 2^-} \frac{(x-2)(x+2)}{x - 2} \\ &= \lim_{x \to 2^-} (x+2) = 4 \end{aligned}$$

Como $f'(2^+) \neq f'(2^-)$, fica claro que não existe $f'(2)$, ou seja, f não é derivável no ponto $x = 2$. Isto é, na verdade, uma conseqüência do teorema que segue.

Teorema 1 - Se $a \in I$, onde I é um intervalo aberto contido no domínio de f, então f será derivável no ponto a se, e somente se, existirem $f'(a^+)$ e $f'(a^-)$ e valer $f'(a^+) = f'(a^-)$. No caso afirmativo temos

$$f'(a) = f'(a^+) = f'(a^-).$$

Demonstração - Pelo teorema 10 do capítulo 3 sabemos que

$$\lim_{x \to a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a}$$

existe se, e somente se, existem

$$\lim_{x \to a^+} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} \quad \text{e} \quad \lim_{x \to a^-} \frac{f(x) - f(a)}{x - a}$$

e estes limites forem iguais. Isto prova o teorema.

Exemplo 4- Seja

$$f(x) = \begin{cases} x^3 - 2x & \text{se} \quad x < 1 \\ x - 2 & \text{se} \quad x \geq 1 \end{cases}$$

Então,

$$f'(1^-) = \lim_{x \to 1^-} \frac{f(x) - f(1)}{x - 1}$$

$$= \lim_{x \to 1^-} \frac{x^3 - 2x - (-1)}{x - 1}$$

$$= \lim_{x \to 1^-} \frac{(x-1)(x^2 + x - 1)}{x - 1}$$

$$= \lim_{x \to 1^-} (x^2 + x - 1) = 1,$$

e

$$f'(1^+) = \lim_{x \to 1^+} \frac{f(x) - f(1)}{x - 1}$$

$$= \lim_{x \to 1^+} \frac{(x-2) - (-1)}{x - 1}$$

$$= \lim_{x \to 1^+} \frac{x - 1}{x - 1} = 1.$$

Portanto, pelo teorema 1, f é derivável no ponto $x = 1$ e temos $f'(1) = 1$.

Teorema 2 - Seja $a \in$ I, onde I é um intervalo aberto contido no domínio de uma função f.

a) Se existe $f'(a^+)$, então f é contínua à direita no ponto a.

b) Se existe $f'(a^-)$, então f é contínua à esquerda no ponto a.

c) Se existe $f'(a)$, então f é contínua no ponto a.

Demonstração - Como as demonstrações dos três itens são muito semelhantes, provaremos apenas o item (c).

Como existe $f'(a)$, existe

$$\lim_{x \to a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a}.$$

Logo,

$$\lim_{x \to a} [f(x) - f(a)] = \lim_{x \to a} \left[\frac{f(x) - f(a)}{x - a} \cdot (x - a) \right]$$

21.6.11

$$= \lim_{x \to a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} \cdot \lim_{x \to a} (x - a)$$

$$= f'(a) \cdot 0 = 0.$$

Assim,

$$\lim_{x \to a} f(x) = f(a)$$

e f é contínua no ponto a.

4.4 Regras de derivação

Nesta seção obteremos fórmulas que nos permitirão calcular facilmente a derivada de um grande número de funções.

Teorema 3 - Se $f(x) = c$ para todo x, então $f'(x) = 0$ para todo x.

Demonstração - Para qualquer x temos

$$\lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{c - c}{h}.$$

$$= \lim_{h\to 0} 0 = 0.$$

Logo, $f'(x) = 0$.

Antes do próximo teorema, que fornece a derivada de $f(x) = x^n$, $n \in \mathbb{N}$, calcularemos a derivada de x^2 e de x^3.

Derivada de $f(x) = x^2$

$$\lim_{h\to 0} \frac{(x+h)^2 - x^2}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{x^2 + 2xh + h^2 - x^2}{h}$$
$$= \lim_{h\to 0} \frac{2xh + h^2}{h}$$
$$= \lim_{h\to 0} \frac{h(2x+h)}{h}$$
$$= \lim_{h\to 0} (2x+h)$$
$$= 2x$$

Logo,

$$(x^2)' = 2x.$$

Derivada de $f(x) = x^3$

Desenvolvendo $(x+h)^3$ pela fórmula do binômio de Newton obtemos

$$\lim_{h\to 0} \frac{(x+h)^3 - x^3}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{x^3 + 3x^2h + 3xh^2 + h^3 - x^3}{h}$$
$$= \lim_{h\to 0} \frac{h(3x^2 + 3xh + h^2)}{h}$$
$$= \lim_{h\to 0} (3x^2 + 3xh + h^2)$$
$$= 3x^2.$$

Logo,

$$(x^3)' = 3x^2.$$

Teorema 4 - Se $f(x) = x^n$ $(n \in \mathbb{N})$ para todo x, então $f'(x) = nx^{n-1}$

Demonstração - Desenvolvendo $(x+h)^n$ através da fórmula do binômio de Newton, obtemos

$$\lim_{h\to 0} \frac{(x+h)^n - x^n}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{1}{h}\left(x^n + C_n^1 x^{n-1}h + C_n^2 x^{n-2}h^2 + \ldots + h^n - x^n\right)$$
$$= \lim_{h\to 0} \frac{1}{h}\left[h\left(nx^{n-1} + C_n^2 x^{n-2}h + \ldots + h^{n-1}\right)\right]$$
$$= \lim_{h\to 0} \left(nx^{n-1} + C_n^2 x^{n-2}h + \ldots + h^{n-1}\right)$$
$$= nx^{n-1}.$$

Logo,

$$(x^n)' = nx^{n-1}.$$

Teorema 5 - Se u e v são funções deriváveis com o mesmo domínio e c é uma constante, então

a) $f(x) = c \cdot u(x)$ é derivável e $f'(x) = c \cdot u'(x)$;

b) $f(x) = u(x) + v(x)$ é derivável e $f'(x) = u'(x) + v'(x)$;

c) $f(x) = u(x) \cdot v(x)$ é derivável e $f'(x) = u'(x) \cdot v(x) + u(x) \cdot v'(x)$;

d) $f(x) = \dfrac{u(x)}{v(x)}$ é derivável e $f'(x) = \dfrac{v(x) \cdot u'(x) - u(x) \cdot v'(x)}{[v(x)]^2}$.

[Subentende-se que este item só se aplica aos pontos x do domínio de f, isto é, os pontos x com $v(x) \neq 0$.]

Usualmente escrevemos as fórmulas sem indicar a variável x:

$$(c \cdot u)' = c \cdot u'$$

$$(u + v)' = u' + v'$$

$$(u \cdot v)' = u' \cdot v + u \cdot v'$$

$$\left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{v \cdot u' - u \cdot v'}{v^2}.$$

Demonstração - Para demonstrar os itens (a) e (b) basta calcular o limite

$$\lim_{h\to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}, \text{ que é simples.}$$

a) $$\lim_{h\to 0} \frac{f(x+h)-f(x)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{c\cdot u(x+h) - c\cdot u(x)}{h}$$

$$= \lim_{h\to 0} \left[c \cdot \frac{u(x+h)-u(x)}{h} \right]$$

$$= c \cdot u'(x).$$

b) $$\lim_{h\to 0} \frac{f(x+h)-f(x)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{u(x+h)+v(x+h)-u(x)-v(x)}{h}$$

$$= \lim_{h\to 0} \left[\frac{u(x+h)-u(x)}{h} + \frac{v(x+h)-v(x)}{h} \right]$$

$$= u'(x) + v'(x).$$

c) Para a função $f(x) = u(x) \cdot v(x)$, o quociente de Newton é

$$\frac{f(x+h)-f(x)}{h} = \frac{u(x+h)\cdot v(x+h) - u(x)\cdot v(x)}{h}$$

$$= \frac{u(x+h)\cdot v(x+h) - u(x)\cdot v(x+h) + u(x)\cdot v(x+h) - u(x)\cdot v(x)}{h}$$

$$= v(x+h) \cdot \frac{u(x+h)-u(x)}{h} + u(x) \cdot \frac{v(x+h)-v(x)}{h}.$$

Logo,

$$\lim_{h\to 0} \frac{f(x+h)-f(x)}{h} = \lim_{h\to 0} v(x+h) \frac{u(x+h)-u(x)}{h} + \lim_{h\to 0} u(x) \frac{v(x+h)-v(x)}{h}$$

$$= v(x) \cdot u'(x) + u(x) \cdot v'(x).$$

Portanto,

$$(uv)' = u'v + uv'.$$

d) Para a função $f(x) = \dfrac{u(x)}{v(x)}$, o quociente de Newton é

$$\frac{f(x+h)-f(x)}{h} = \frac{1}{h}\left(\frac{u(x+h)}{v(x+h)} - \frac{u(x)}{v(x)}\right)$$

$$= \frac{1}{h} \frac{u(x+h)\cdot v(x) - u(x)\cdot v(x+h)}{v(x+h)\cdot v(x)}$$

$$= \frac{1}{h} \frac{u(x+h)\cdot v(x) - u(x)\cdot v(x) + u(x)\cdot v(x) - u(x)\cdot v(x+h)}{v(x+h)\cdot v(x)}$$

$$= \frac{1}{v(x+h)\cdot v(x)} \frac{v(x)[u(x+h)-u(x)] - u(x)[v(x+h)-v(x)]}{h}$$

$$= \frac{1}{v(x+h)\cdot v(x)} \left[v(x)\frac{u(x+h)-u(x)}{h} - u(x)\frac{v(x+h)-v(x)}{h} \right].$$

Logo,

$$\lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h} = \lim_{h\to 0}\frac{1}{v(x+h)\cdot v(x)}\left[v(x)\frac{u(x+h)-u(x)}{h} - u(x)\frac{v(x+h)-v(x)}{h}\right]$$
$$= \frac{1}{[v(x)]^2}\cdot[v(x)\cdot u'(x) - u(x)\cdot v'(x)]$$
$$= \frac{v(x)\cdot u'(x) - u(x)\cdot v'(x)}{[v(x)]^2}.$$

Portanto,

$$\left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{v\cdot u' - u\cdot v'}{v^2}.$$

A partir do teorema 4 e do item (d) do teorema 5, obtemos a derivada de x^n para qualquer n inteiro e negativo.

Corolário - Se $f(x) = x^{-n}$, $n \in \mathbb{N}$, então $f'(x) = -nx^{-n-1}$.

Demonstração - Temos

$$x^{-n} = \frac{1}{x^n}.$$

Pelo item (d) do teorema 5 obtemos

$$(x^{-n})' = \left(\frac{1}{x^n}\right)'$$
$$= \frac{x^n\cdot 0 - 1\cdot nx^{n-1}}{(x^n)^2}$$
$$= \frac{-nx^{n-1}}{x^{2n}}$$
$$= -nx^{-n-1}.$$

Exemplo 5 - Calcular a derivada de $f(x) = x^3 - 4x - 3$.

Pelos teoremas deste parágrafo obtemos

$$f'(x) = (x^3 - 4x - 3)'$$
$$= (x^3)' - (4x)' - 3'$$
$$= 3x^2 - 4 - 0$$
$$= 3x^2 - 4.$$

Observação 2 - Os teoremas 3, 4 e 5 garantem que todo polinômio $p(x)$ é derivável e que se

$$p(x) = a_nx^n + ... + a_2x^2 + a_1x + a_0,$$

então,

$$p'(x) = na_nx^{n-1} + ... + 2a_2x + a_1.$$

Observação 3 - Da observação 2 e do item (d) do teorema 5 decorre que toda função racional é derivável.

Exemplo 6 - Calcular a derivada de $f(x) = x^2 - 5x + \dfrac{1}{x}$.

Temos

$$f'(x) = \left(x^2 - 5x + \frac{1}{x}\right)'$$
$$= (x^2)' - (5x)' + \left(\frac{1}{x}\right)'$$
$$= 2x - 5 + (x^{-1})'$$
$$= 2x - 5 + (-1.x^{-2})$$
$$= 2x - 5 - \frac{1}{x^2}.$$

Exemplo 7 - Calcular a derivada de $f(x) = \dfrac{x^2+x}{x-1}$.

Aplicando o item (d) do teorema 5 obtemos

$$\begin{aligned} f'(x) &= \frac{(x-1)(x^2+x)'-(x^2+x)(x-1)'}{(x-1)^2} \\ &= \frac{(x-1)(2x+1)-(x^2+x)(1-0)}{(x-1)^2} \\ &= \frac{2x^2+x-2x-1-x^2-x}{(x-1)^2} \\ &= \frac{x^2-2x-1}{(x-1)^2}. \end{aligned}$$

Teorema 6 - (*Derivada da função composta - Regra da cadeia*).

> Se f e u são funções deriváveis tais que a imagem de u está contida no domínio de f, então $f_\circ u$ é derivável e $(f_\circ u)'(x) = f'(u(x)) \cdot u'(x)$.

Freqüentemente omitimos a variável x e escrevemos

$$(f_\circ u)' = f'(u) \cdot u'$$

ou

$$(f(u))' = f'(u) \cdot u'$$

ou

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} f(u) = f'(u) \cdot u'$$

ou, ainda,

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} f(u) = \frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}u} \cdot \frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x}.$$

Demonstração - Demonstraremos o teorema apenas no caso particular em que para $h \neq 0$ com $|h|$ pequeno se tenha

(A demonstração sem esta restrição pode ser encontrada em livros de Análise Matemática.)

Escrevamos

$$g(x) = (f_\circ u)(x).$$

Então temos

$$\frac{g(x+h)-g(x)}{h} = \frac{f(u(x+h))-f(u(x))}{h}.$$

Fazendo

$$k = u(x+h) - u(x)$$

ou

$$u(x+h) = u(x) + k,$$

a continuidade de u garante que

$$h \to 0 \Rightarrow k \to 0.$$

Supondo $k \neq 0$ para todo $h \neq 0$, com $|h|$ pequeno, temos então

$$\begin{aligned} \frac{g(x+h)-g(x)}{h} &= \frac{f(u+k)-f(u)}{h} \\ &= \frac{f(u+k)-f(u)}{h} \cdot \frac{k}{k} \\ &= \frac{f(u+k)-f(u)}{k} \cdot \frac{u(x+h)-u(x)}{h} \end{aligned}$$

e, assim,

$$\begin{aligned} \lim_{h\to 0} \frac{g(x+h)-g(x)}{h} &= \lim_{k\to 0} \frac{f(u+k)-f(u)}{k} \cdot \lim_{h\to 0} \frac{u(x+h)-u(x)}{h} \\ &= f'(u) \cdot u'. \end{aligned}$$

Portanto, $f_\circ u$ é derivável e

$$(f_\circ u)'(x) = f'(u) \cdot u'.$$

Exemplo 8 - Calcular a derivada de $g(x) = (x^2-7x)^{10}$.

Fazendo $u(x) = x^2 - 7x$ e $f(u) = u^{10}$ obtemos $g(x) = (f_\circ u)(x)$. Logo,

$$\begin{aligned} g'(x) &= f'(u) \cdot u' \\ &= 10u^9 \cdot u' \\ &= 10(x^2-7x)^9 \cdot (2x-7). \end{aligned}$$

Exemplo 9 - Calcular a derivada de

$$g(x) = \left(5x^4 - 2x^3 + \frac{1}{x^2}\right)^5$$

Fazendo $u(x) = 5x^4 - 2x^3 + \dfrac{1}{x^2}$ e $f(u) = u^5$, obtemos

$$\begin{aligned} g'(x) &= 5u^4 \cdot u' \\ &= 5\left(5x^4 - 2x^3 + \frac{1}{x^2}\right)^4 \cdot \left(20x^3 - 6x^2 - \frac{2}{x^3}\right). \end{aligned}$$

4.5 Derivadas de funções dadas implicitamente

Uma equação envolvendo duas variáveis, x e y, representa uma curva no plano que pode ser o gráfico de uma função, ou ser composta pelos gráficos de várias funções. Assim, uma equação envolvendo as variáveis x e y define, implicitamente, uma ou mais funções.

A *derivação implícita* consiste em derivar os dois membros de uma equação que envolve duas variáveis, x e y, em relação a uma delas. Como em geral desejamos ter y como função de x, essa derivação é normalmente feita em relação à variável x.

Exemplo 10 - Calcular y', sendo dado que x e y satisfazem a equação $x^2 + y^2 = 4$.

Para resolver este problema derivamos os dois membros da equação em relação a x, lembrando que, por ser y função de x, devemos usar a regra da cadeia para obter a derivada de y^2. Assim, temos

$$\begin{aligned} (x^2)' + (y^2)' &= 4' \\ 2x + 2y \cdot y' &= 0 \\ y' &= -\frac{x}{y}. \end{aligned}$$

Exemplo 11 - Determinar as equações das retas tangentes à curva dada pela equação $x^2 + 2xy = x^3$, nos pontos $(1,0)$ e $(-1,1)$.

Observe que os pontos $(1,0)$ e $(-1,1)$ estão sobre a curva, isto é, satisfazem a equação dada. A partir da equação dada obtemos

$$\begin{aligned} (x^2)' + (2xy)' &= (x^3)' \\ 2x + 2xy' + 2y &= 3x^2 \\ 2xy' &= 3x^2 - 2x - 2y \\ y' &= \frac{3x^2 - 2x - 2y}{2x}. \end{aligned}$$

Para indicar a derivada y' num ponto (a,b), escrevemos

$$y'_{|(a,b)} \text{ ou } \frac{dy}{dx}_{|(a,b)}.$$

Então,

$$y'_{|(1,0)} = \frac{3-2-0}{2} = \frac{1}{2} \quad \text{e} \quad y'_{|(-1,1)} = \frac{3+2-2}{-2} = -\frac{3}{2}.$$

Assim, se $y = ax + b$ é a equação da reta tangente no ponto $(1,0)$, temos $a = \dfrac{1}{2}$ e como $(1,0)$ pertence à reta, suas coordenadas satisfazem a equação

$$y = \frac{1}{2}x + b,$$

o que fornece

$$0 = \frac{1}{2} + b$$

$$b = -\frac{1}{2}.$$

A equação da reta tangente no ponto (1, 0) é, portanto,

$$y = \frac{x}{2} - \frac{1}{2}\,.$$

Analogamente obtemos a equação da reta tangente no ponto $(-1, 1)$, que é

$$y = -\frac{3x}{2} - \frac{1}{2}\,.$$

4.6 Derivada da função inversa

Antes do teorema que fornece a derivada da inversa de uma função, vejamos dois outros fatos relativos à inversa de uma função.

Teorema 7 - Se f é uma função contínua e crescente definida num intervalo $[a, b]$, então $f : [a, b] \to [\,f(a), f(b)]$ é inversível e sua inversa f^{-1} é contínua.

Demonstração - A injetividade de f é imediata, pois dados $x \neq y$ em $[a, b]$ temos: ou $x < y$, caso em que $f(x) < f(y)$; ou $x > y$, o que fornece $f(x) > f(y)$. Em qualquer caso, portanto, $f(x) \neq f(y)$, o que garante a injetividade de f.

Por outro lado, dado $z \in [\,f(a), f(b)]$, se $z = f(a)$ ou $z = f(b)$, é claro que z está na imagem de f. Caso contrário, temos $z \in (\,f(a), f(b))$ e, pelo Teorema do Valor Intermediário, existe $x \in (a, b)$ tal que $f(x) = z$. Assim, também neste caso, z está na imagem de f. Isto prova que f é sobrejetiva.

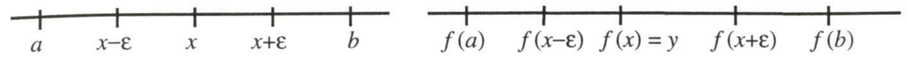
Portanto f é bijetiva e assim inversível.

Para provar a continuidade de f^{-1}, tomemos um ponto $y = f(x) \in (\,f(a), f(b)\,)$, o que nos fornece $x \in (a, b)$. [Se for $y = f(a)$ ou $y = f(b)$, o procedimento será análogo.]

Dado $\varepsilon > 0$, podemos supor ε tão pequeno que se tenha $x-\varepsilon$ e $x+\varepsilon$ em (a, b).

De f crescente temos

$$f(a) < f(x-\varepsilon) < f(x) = y < f(x+\varepsilon) < f(b).$$



Tomando

$$\delta = \min\{y - f(x-\varepsilon),\ f(x+\varepsilon) - y\}$$

teremos

$$(y-\delta,\ y+\delta) \subset (f(x-\varepsilon), f(x+\varepsilon)),$$

o que fornece

$$f^{-1}((y-\delta,\ y+\delta)) \subset (x-\varepsilon,\ x+\varepsilon)$$

ou seja

$$|z - y| < \delta \Rightarrow |f^{-1}(z) - f^{-1}(y)| = |f^{-1}(z) - x| < \varepsilon,$$

e, assim, f^{-1} é contínua no ponto y.

Observação 4 - O intervalo $[a, b]$ no teorema 7 pode ser substituído por (a, b), $[a, b)$ ou $(a, b]$, e a hipótese "f crescente", pode ser substituída por "f decrescente".

Teorema 8 - Se f é uma função derivável em (a, b) com $f'(x) > 0$ para todo $x \in (a, b)$, então f é crescente em (a, b).

[Se for $f'(x) < 0$, obteremos f decrescente.]

Este teorema é uma conseqüência do chamado Teorema do Valor Médio que veremos no capítulo 5, para onde transferimos sua demonstração. [Veja o teorema 5 do capítulo 5.]

Teorema 9 - (*Teorema da derivada da função inversa*) Seja f uma função derivável num intervalo aberto $I = (a, b)$ com $f'(x) > 0$ para todo $x \in (a, b)$. Então f

$$g'(y) = \frac{1}{f'(x)}$$

onde $x = g(y)$ (ou $y = f(x)$).

[Se tivermos $f'(x) < 0$ para todo $x \in (a,b)$, o teorema também vale.]

Demonstração - A existência e a continuidade de g decorrem dos teoremas 8 e 7. Para mostrar que g é derivável e determinar sua derivada devemos calcular o limite do quociente de Newton

$$\frac{g(y+k)-g(y)}{k}$$

quando $k \to 0$.

Escrevendo

$$h = g(y+k) - g(y),$$

a continuidade de g garante que

$$k \to 0 \Rightarrow h \to 0.$$

Sendo $x = g(y)$ e g a inversa de f, temos

$$g(y+k) = x + h$$

e

$$f(x+h) = y + k.$$

A continuidade de f assegura que

$$h \to 0 \Rightarrow k \to 0.$$

Portanto, temos que

$$h \to 0 \Leftrightarrow k \to 0,$$

e, assim,

$$\begin{aligned} \lim_{k\to 0} \frac{g(y+k)-g(y)}{k} &= \lim_{h\to 0} \frac{x+h-x}{f(x+h)-y} \\ &= \lim_{h\to 0} \frac{h}{f(x+h)-f(x)} \\ &= \lim_{h\to 0} \frac{1}{\dfrac{f(x+h)-f(x)}{h}} \\ &= \frac{1}{f'(x)} \end{aligned}$$

Portanto, g é derivável no ponto $y = f(x)$ e

$$g'(y) = \frac{1}{f'(x)}.$$

Observação 5 - Supondo f derivável com inversa g derivável, pode-se obter facilmente a fórmula da derivada de g, derivando em relação a x os dois membros da igualdade $(g \circ f)(x) = x$.

De fato

$$(g \circ f)'(x) = x'$$

$$g'(f(x)) \cdot f'(x) = 1$$

$$g'(f(x)) = \frac{1}{f'(x)}.$$

Em particular,

$$g \text{ derivável no ponto } y = f(x) \Rightarrow f'(x) \neq 0.$$

Observação 6 - Se soubermos que f possui inversa g, o teorema 9 pode ser enunciado assim:

"Se f é derivável e possui inversa g, então g é derivável num ponto $y = f(x)$ se, e somente se, $f'(x) \neq 0$.

No caso afirmativo tem-se $g'(y) = \dfrac{1}{f'(x)}$."

Para demonstrar esta versão do teorema 9, observe que, por possuir inversa, f é injetiva, sendo portanto crescente (ou decrescente) em cada intervalo de seu domínio. Assim, o teorema 7 fornece a continuidade de g e a demonstração segue igual à que apresentamos para a versão provada.

Exemplo 12 - Determinar a derivada da inversa da função $f(x) = 3x - 7$.

Como $f'(x) = 3$ para todo $x \in \mathbb{R}$, pelo teorema 9 a inversa de f é derivável e sua derivada é

$$(f^{-1})'(y) = \frac{1}{3}$$

para todo $y \in \mathbb{R}$.

Exemplo 13 - Dada $f(x) = x^3$, determinar a derivada de sua inversa no ponto $y = 8$.

Como para termos

$$f(x) = 8 \text{ ou } x^3 = 8$$

devemos ter

$$x = 2,$$

precisamos calcular a derivada de f no ponto x=2. Como

$$f'(x) = 3x^2$$

temos

$$f'(2) = 3 \cdot 2^2 = 12.$$

Logo,

$$(f^{-1})'(8) = \frac{1}{f'(2)} = \frac{1}{12}.$$

4.7 Derivadas de algumas funções

a) *Derivada de* $f(x) = a^x$

Devemos calcular o limite da razão incremental

$$\frac{f(x+h) - f(x)}{h}$$

quando $h \to 0$.

Temos

$$\begin{aligned}\lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} &= \lim_{h \to 0} \frac{a^{x+h} - a^x}{h} \\ &= \lim_{h \to 0} \frac{a^x(a^h - 1)}{h} \\ &= a^x \lim_{h \to 0} \frac{a^h - 1}{h} \\ &= a^x \ln a.\end{aligned}$$

Logo,

$$(a^x)' = a^x \ln a.$$

Em particular, como $\ln e = 1$, temos

$$\begin{aligned}(e^x)' &= e^x \cdot \ln e \\ &= e^x.\end{aligned}$$

b) *Derivada de* $g(x) = \log_a x$

Como g é a inversa da função $y = f(x) = a^x$, usaremos a letra y para representar a variável da função g. Desta forma,

$$\begin{aligned}g'(y) &= \frac{1}{f'(x)} \\ &= \frac{1}{a^x \ln a}\end{aligned}$$

$$= \frac{1}{y \cdot \ln a}.$$

Usando novamente a letra x para indicar a variável de g, temos

$$g'(x) = \frac{1}{x \cdot \ln a},$$

ou seja,

$$(\log_a x)' = \frac{1}{x \cdot \ln a}.$$

Em particular, como $\ln e = 1$, temos

$$(\ln x)' = \frac{1}{x \cdot \ln e} = \frac{1}{x}.$$

c) *Derivada de* $y = x^r$, $(r \in \mathbb{R})$.

Para calcular a derivada de

$$y = x^r$$

aplicamos o logaritmo natural a ambos os membros desta igualdade e depois calculamos as derivadas dos membros resultantes. Temos

$$\ln y = \ln x^r$$

ou

$$\ln y = r \cdot \ln x.$$

Logo,

$$\begin{aligned} \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}(\ln y) &= \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}(r \cdot \ln x) \\ \frac{1}{y} \cdot y' &= r \cdot \frac{1}{x} \\ y' &= \frac{r \cdot y}{x} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &= \frac{r \cdot x^r}{x} \\ &= r \cdot x^{r-1}. \end{aligned}$$

Portanto,

$$(x^r)' = r \cdot x^{r-1}.$$

d) *Derivada de* $y = u^v$, $(u = u(x)$ e $v = v(x))$

O procedimento adotado aqui é análogo ao usado no item anterior.

Temos

$$\ln y = \ln u^v$$

ou

$$\ln y = v \cdot \ln u.$$

Logo, observando que y, u e v são funções de x temos

$$\begin{aligned} \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}(\ln y) &= \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}(v \cdot \ln u) \\ \frac{1}{y} \cdot y' &= v' \cdot \ln u + v \cdot \frac{1}{u} \cdot u' \\ y' &= v' \cdot \ln u \cdot y + v \cdot u' \cdot \frac{1}{u} \cdot y \\ &= v' \cdot \ln u \cdot u^v + v \cdot u' \cdot \frac{u^v}{u} \\ &= u^v \cdot \ln u \cdot v' + v \cdot u^{v-1} \cdot u'. \end{aligned}$$

Portanto,

$$(u^v)' = u^v \cdot \ln u \cdot v' + v \cdot u^{v-1} \cdot u'.$$

Observação 7 - Se $u = u(x)$ é uma função de x, pela regra da cadeia obtemos

$$(a^u)' = a^u \cdot \ln a \cdot u',$$

$$(e^u)' = e^u \cdot u',$$

$$(\log_a u)' = \frac{1}{u.\ln a}\cdot u',$$

$$(\ln u)' = \frac{1}{u}\cdot u',$$

e $$(u^r)' = r\cdot u^{r-1}\cdot u'.$$

Exemplo 14 - Calcular a derivada de

$$f(x) = 3^{x^2-5x}.$$

Pela regra da cadeia temos

$$f'(x) = 3^{x^2-5x}\cdot \ln 3\cdot (x^2-5x)'$$
$$= 3^{x^2-5x}\cdot \ln 3\cdot (2x-5).$$

Exemplo 15 - Calcular a derivada de $f(x) = \ln(x^4+x^2)$.
A regra da cadeia fornece

$$f'(x) = \frac{1}{x^4+x^2}\cdot(x^4+x^2)'$$
$$= \frac{4x^3+2x}{x^4+x^2}$$
$$= \frac{4x^2+2}{x^3+x}.$$

4.8 Derivadas das funções trigonométricas

Antes de calcular as derivadas das funções trigonométricas, observemos que

$$\lim_{x\to 0}\frac{\cos x-1}{x} = \lim_{x\to 0}\frac{\cos^2 x-1}{x(\cos x+1)}$$

$$= \lim_{x\to 0}\frac{-\operatorname{sen}^2 x}{x(\cos x+1)}$$
$$= \lim_{x\to 0} -\frac{\operatorname{sen} x}{x}\cdot\frac{\operatorname{sen} x}{\cos x+1}$$
$$= -1\cdot\frac{0}{1+1}$$
$$= 0.$$

a) *Derivada de* sen x

O quociente de Newton da função sen x é

$$\frac{\operatorname{sen}(x+h)-\operatorname{sen} x}{h}.$$

Para calcular seu limite, desenvolvemos sen $(x+h)$ usando a fórmula do seno da soma de dois arcos. Então temos

$$\lim_{h\to 0}\frac{\operatorname{sen}(x+h)-\operatorname{sen} x}{h} = \lim_{h\to 0}\frac{\operatorname{sen} x\cdot\cos h+\operatorname{sen} h\cdot\cos x-\operatorname{sen} x}{h}$$
$$= \lim_{h\to 0}\frac{\operatorname{sen} x\cdot(\cos h-1)+\operatorname{sen} h\cdot\cos x}{h}$$
$$= \lim_{h\to 0}\left[\operatorname{sen} x\frac{\cos h-1}{h}+\frac{\operatorname{sen} h}{h}\cdot\cos x\right]$$
$$= \operatorname{sen} x\cdot 0+1\cdot\cos x$$
$$= \cos x.$$

Logo,

$$(\operatorname{sen} x)' = \cos x.$$

b) *Derivada de* $\cos x$

A derivada de $\cos x$ pode ser obtida através de cálculos análogos aos que fizemos para obter a derivada de $\operatorname{sen} x$. O leitor interessado poderá usar este caminho. Aqui usamos a relação $\cos x = \operatorname{sen}\left(\dfrac{\pi}{2} - x\right)$ e obtemos

$$\begin{aligned}(\cos x)' &= \left[\operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{2} - x\right)\right]' \\ &= \cos\left(\frac{\pi}{2} - x\right) \cdot (-1) \\ &= -\cos\left(\frac{\pi}{2} - x\right) \\ &= -\operatorname{sen} x.\end{aligned}$$

c) *Derivada de* $\operatorname{tg} x$

Usando a relação

$$\operatorname{tg} x = \frac{\operatorname{sen} x}{\cos x}.$$

obtemos

$$\begin{aligned}(\operatorname{tg} x)' &= \left(\frac{\operatorname{sen} x}{\cos x}\right)' \\ &= \frac{\cos x \cdot \cos x - \operatorname{sen} x \cdot (-\operatorname{sen} x)}{\cos^2 x} \\ &= \frac{\cos^2 x + \operatorname{sen}^2 x}{\cos^2 x} \\ &= \frac{1}{\cos^2 x} \\ &= \sec^2 x.\end{aligned}$$

Logo,

$$(\operatorname{tg} x)' = \sec^2 x.$$

d) *Derivada de* $\operatorname{ctg} x$

Usando a relação

$$\operatorname{ctg} x = \frac{\cos x}{\operatorname{sen} x}$$

obtemos

$$\begin{aligned}(\operatorname{ctg} x)' &= \frac{\operatorname{sen} x \cdot (-\operatorname{sen} x) - \cos x \cdot \cos x}{\operatorname{sen}^2 x} \\ &= \frac{-\operatorname{sen}^2 x - \cos^2 x}{\operatorname{sen}^2 x} \\ &= \frac{-1}{\operatorname{sen}^2 x} \\ &= -\operatorname{cosec}^2 x.\end{aligned}$$

Logo,

$$(\operatorname{cotg} x)' = -\operatorname{cosec}^2 x.$$

e) *Derivada de* $\sec x$

A partir de

$$\sec x = \frac{1}{\cos x}$$

obtemos

$$\begin{aligned}(\sec x)' &= \frac{\cos x \cdot 0 - 1 \cdot (-\operatorname{sen} x)}{\cos^2 x} \\ &= \frac{\operatorname{sen} x}{\cos^2 x} \\ &= \frac{\operatorname{sen} x}{\cos x} \cdot \frac{1}{\cos x} \\ &= \operatorname{tg} x \cdot \sec x.\end{aligned}$$

Logo,

$$(\sec x)' = \operatorname{tg} x \cdot \sec x.$$

f) *Derivada de* cosec x

De

$$\operatorname{cosec} x = \frac{1}{\operatorname{sen} x}$$

vem

$$(\operatorname{cosec} x)' = \frac{\operatorname{sen} x \cdot 0 - 1 \cdot \cos x}{\operatorname{sen}^2 x}$$
$$= -\frac{\cos x}{\operatorname{sen}^2 x}$$
$$= -\frac{\cos x}{\operatorname{sen} x} \cdot \frac{1}{\operatorname{sen} x}$$
$$= -\operatorname{ctg} x \cdot \operatorname{cosec} x.$$

Logo,

$$(\operatorname{cosec} x)' = -\operatorname{ctg} x \cdot \operatorname{cosec} x.$$

Observação 8 - Para obter a derivada de uma função trigonométrica de um arco $u = u(x)$, usamos a regra da cadeia. Assim temos

$$(\operatorname{sen} u)' = \cos u \cdot u',$$
$$(\cos u)' = -\operatorname{sen} u \cdot u',$$
$$(\operatorname{tg} u)' = \sec^2 u \cdot u',$$
$$(\operatorname{ctg} u)' = -\operatorname{cosec}^2 u \cdot u',$$
$$(\sec u)' = \operatorname{tg} u \cdot \sec u \cdot u'$$

e

$$(\operatorname{cosec} u)' = -\operatorname{ctg} u \cdot \operatorname{cosec} u \cdot u'.$$

Exemplo 16 - Calcular a derivada de $f(x) = \operatorname{tg}\left(3x^5 - 9x^2 + \dfrac{1}{x}\right)$.

Pela regra da cadeia obtemos

$$f'(x) = \sec^2\left(3x^5 - 9x^2 + \frac{1}{x}\right) \cdot \left(3x^5 - 9x^2 + \frac{1}{x}\right)'$$

$$= \sec^2\left(3x^5 - 9x^2 + \frac{1}{x}\right) \cdot \left(15x^4 - 18x - \frac{1}{x^2}\right)$$
$$= \left(15x^4 - 18x - \frac{1}{x^2}\right) \cdot \sec^2\left(3x^5 - 9x^2 + \frac{1}{x}\right).$$

4.9 Derivadas das funções trigonométricas inversas

a) *Derivada de* arc sen x

A função arc sen é, como definimos, a inversa da função seno. Para que a função seno se tornasse inversível, tomamos o intervalo $\left[-\dfrac{\pi}{2}, \dfrac{\pi}{2}\right]$ para seu domínio e $[-1,1]$ para contradomínio. Assim a função arc sen x é a inversa da função

$$f : \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right] \to [-1,1]$$

dada por

$$y = f(x) = \operatorname{sen} x.$$

Usemos então a letra y para indicar a variável da inversa de f que é a função $g(y) = \operatorname{arc\,sen} y$.

Assim, temos

$$g'(y) = \frac{1}{f'(x)}$$
$$= \frac{1}{\cos x}.$$

Como

$$y = \operatorname{sen} x,$$

temos

$$\cos x = \pm\sqrt{1 - y^2}.$$

Sabendo que

$$x \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right],$$

devemos ter $\cos x \geq 0$, o que exige

$$\cos x = \sqrt{1-y^2}.$$

Conseqüentemente

$$g'(y) = \frac{1}{\sqrt{1-y^2}}$$

ou

$$(\text{arc sen } y)' = \frac{1}{\sqrt{1-y^2}}.$$

Usando novamente a letra x para representar a variável da função arc sen, temos

$$(\text{arc sen } x)' = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}.$$

b) *Derivada de* arc cos x

Relembrando: a função

$$f: [0,\pi] \to [-1,1]$$

dada por

$$y = f(x) = \cos x$$

é a inversa da função

$$g(y) = \text{arc cos } y.$$

Logo,

$$g'(y) = \frac{1}{f'(x)}$$
$$= \frac{1}{-\text{sen } x}.$$

Como

$$y = \cos x,$$

temos

$$\text{sen } x = \pm\sqrt{1-y^2},$$

e sabendo que

$$x \in [0,\pi],$$

temos $\text{sen } x \geq 0$, o que fornece

$$\text{sen } x = \sqrt{1-y^2}.$$

Assim,

$$g'(y) = \frac{1}{-\sqrt{1-y^2}},$$

ou

$$(\text{arc cos } y)' = -\frac{1}{\sqrt{1-y^2}}.$$

E usando novamente a letra x para indicar a variável da função arc cos, temos

$$(\text{arc cos } x)' = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}.$$

c) *Derivada de* arc tg x

Como a função

$$f: \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right) \to \mathbb{R}$$

dada por

$$y = f(x) = \text{tg } x$$

é a inversa de

$$g(y) = \text{arc tg } y,$$

temos

$$g'(y) = \frac{1}{f'(x)}$$

$$= \frac{1}{\sec^2 x}.$$

Como

$$y = \operatorname{tg} x,$$

temos

$$\sec^2 x = 1 + \operatorname{tg}^2 x$$
$$= 1 + y^2.$$

Logo,

$$g'(y) = \frac{1}{1+y^2},$$

ou

$$(\text{arc tg } y)' = \frac{1}{1+y^2},$$

ou, ainda,

$$(\text{arc tg } x)' = \frac{1}{1+x^2}.$$

d) *Derivada de* arc ctg x

A função

$$f : (0,\pi) \to \mathbb{R}$$

dada por

$$y = f(x) = \operatorname{ctg} x$$

é a inversa de

$$g(y) = \text{arc ctg } y.$$

Logo,

$$g'(y) = \frac{1}{f'(x)}$$

$$= \frac{1}{-\operatorname{cosec}^2 x}.$$

De

$$y = \operatorname{ctg} x,$$

vem

$$\operatorname{cosec}^2 x = 1 + y^2.$$

Portanto,

$$g'(y) = -\frac{1}{1+y^2}$$

ou

$$(\text{arc ctg } y)' = -\frac{1}{1+y^2}.$$

ou, ainda,

$$(\text{arc ctg } x)' = -\frac{1}{1+x^2}.$$

e) *Derivada de* arc sec x

Como $\sec y = \dfrac{1}{\cos y}$,

temos

$$\text{arc sec } x = \text{arc cos } \frac{1}{x}.$$

Logo,

$$(\text{arc sec } x)' = \left(\text{arc cos} \frac{1}{x}\right)'$$

$$= -\frac{1}{\sqrt{1-\left(\frac{1}{x}\right)^2}} \cdot \left(\frac{1}{x}\right)'$$

$$= -\frac{1}{\sqrt{1-\frac{1}{x^2}}} \cdot \left(-\frac{1}{x^2}\right)$$

$$= \frac{1}{x^2\sqrt{\frac{x^2-1}{x^2}}}$$

$$= \frac{1}{x^2\,\frac{\sqrt{x^2-1}}{|x|}}$$

$$= \frac{1}{|x| \cdot \sqrt{x^2-1}}.$$

f) *Derivada do* arc cosec x

Como $\operatorname{cosec} y = \frac{1}{\operatorname{sen} y}$,

temos

$$\operatorname{arc\,cosec} x = \operatorname{arc\,sen} \frac{1}{x}.$$

Assim,

$$(\operatorname{arc\,cosec} x)' = \left(\operatorname{arc\,sen}\frac{1}{x}\right)'$$

$$= \frac{1}{\sqrt{1-\left(\frac{1}{x}\right)^2}} \cdot \left(-\frac{1}{x^2}\right)$$

$$= -\frac{1}{x^2\sqrt{\frac{x^2-1}{x^2}}}$$

$$= -\frac{1}{x^2\,\frac{\sqrt{x^2-1}}{|x|}}$$

$$= -\frac{1}{|x| \cdot \sqrt{x^2-1}}.$$

Observação 9 - Para obter a derivada de uma função trigonométrica inversa de uma função $u = u(x)$, usamos a regra da cadeia e obtemos

$$(\operatorname{arc\,sen} u)' = \frac{1}{\sqrt{1-u^2}} \cdot u' \,,$$

$$(\operatorname{arc\,cos} u)' = -\frac{1}{\sqrt{1-u^2}} \cdot u' \,,$$

$$(\operatorname{arc\,tg} u)' = \frac{1}{1+u^2} \cdot u' \,,$$

$$(\operatorname{arc\,ctg} u)' = -\frac{1}{1+u^2} \cdot u' \,,$$

$$(\operatorname{arc\,sec} u)' = \frac{1}{|u|\sqrt{u^2-1}} \cdot u' \,,$$

e

$$(\operatorname{arc\,cosec} u)' = -\frac{1}{|u|\sqrt{u^2-1}} \cdot u' \,.$$

Exemplo 17 - Calcular a derivada de $f(x) = \operatorname{arc\,sen} e^x$, $(x \leq 0)$.

Pela regra da cadeia temos

$$f'(x) = \frac{1}{\sqrt{1-(e^x)^2}} \cdot (e^x)'$$

$$= \frac{e^x}{\sqrt{1-e^{2x}}}.$$

4.10 Derivadas das funções hiperbólicas

a) *Derivada de* senh x

Como

$$\text{senh } x = \frac{e^x - e^{-x}}{2},$$

para calcular sua derivada, basta derivar esta expressão e verificar que função hiperbólica se obtém. Assim,

$$\begin{aligned}(\text{senh } x)' &= \left(\frac{e^x - e^{-x}}{2}\right)' \\ &= \frac{e^x - e^{-x}\cdot(-1)}{2} \\ &= \frac{e^x + e^{-x}}{2} \\ &= \cosh x,\end{aligned}$$

e temos

$$(\text{senh } x)' = \cosh x.$$

b) *Derivada de* $\cosh x$

Sendo

$$\cosh x = \left(\frac{e^x + e^{-x}}{2}\right),$$

para calcular sua derivada, derivamos esta expressão e obtemos

$$\begin{aligned}(\cosh x)' &= \left(\frac{e^x + e^{-x}}{2}\right)' \\ &= \frac{e^x + e^{-x}\cdot(-1)}{2} \\ &= \frac{e^x - e^{-x}}{2} \\ &= \text{senh } x.\end{aligned}$$

Logo,

$$(\cosh x)' = \text{senh } x.$$

c) *Derivada de* tgh x, cotgh x, sech x e cosech x.

Como todas estas funções podem ser expressas em função de senh x e $\cosh x$, sùas derivadas são obtidas derivando as expressões correspondentes. Assim temos

$$\begin{aligned}(\text{tgh } x)' &= \left(\frac{\text{senh } x}{\cosh x}\right)' \\ &= \frac{\cosh x\cdot\cosh x - \text{senh } x\cdot\text{senh } x}{\cosh^2 x} \\ &= \frac{\cosh^2 x - \text{senh}^2 x}{\cosh^2 x} \\ &= \frac{1}{\cosh^2 x} \\ &= \text{sech}^2 x;\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}(\text{ctgh } x)' &= \left(\frac{\cosh x}{\text{senh } x}\right)' \\ &= \frac{\text{senh } x\cdot\text{senh } x - \cosh x\cdot\cosh x}{\text{senh}^2 x} \\ &= \frac{\text{senh}^2 x - \cosh^2 x}{\text{senh}^2 x}\end{aligned}$$

$$= \frac{-1}{\text{senh}^2 x}$$
$$= -\text{cosech}^2 x;$$

$$(\text{sech } x)' = \left(\frac{1}{\cosh x}\right)'$$
$$= [(\cosh x)^{-1}]'$$
$$= -1 \cdot (\cosh x)^{-2} \cdot \text{senh } x$$
$$= -\frac{\text{senh } x}{\cosh^2 x}$$
$$= -\frac{\text{senh } x}{\cosh x} \cdot \frac{1}{\cosh x}$$
$$= -\text{tgh } x \cdot \text{sech } x$$

$$(\text{cosech } x)' = \left(\frac{1}{\text{senh } x}\right)'$$
$$= [(\text{senh } x)^{-1}]'$$
$$= -1 \cdot (\text{senh } x)^{-2} \cdot \cosh x$$
$$= -\frac{\cosh x}{\text{senh}^2 x}$$
$$= -\frac{\cosh x}{\text{senh } x} \cdot \frac{1}{\text{senh } x}$$
$$= -\text{ctgh } x \cdot \text{cosech } x.$$

Observação 10 - Para obter a derivada de uma função hiperbólica de uma função $u = u(x)$, usamos a regra da cadeia e obtemos

$$(\text{senh } u)' = \cosh u \cdot u',$$
$$(\cosh u)' = \text{senh } u \cdot u',$$
$$(\text{tgh } u)' = \text{sech}^2 u \cdot u',$$
$$(\text{ctgh } u)' = -\text{cosech}^2 u \cdot u',$$

$$(\text{sech } u)' = -\text{tgh } u \cdot \text{sech } u \cdot u',$$
$$(\text{cosech } u)' = -\text{ctgh } u \cdot \text{cosech } u \cdot u'.$$

4.11 Derivadas das funções hiperbólicas inversas

As derivadas das funções hiperbólicas inversas são obtidas através do teorema da derivada da função inversa.

a) *Derivada de* arg senh x

Consideremos a função
$$g(x) = \text{arg senh } x.$$

Como g é a inversa da função $f(x) = \text{senh } x$, usemos y para indicar a variável de g. Assim, pelo teorema da derivada da função inversa temos
$$g'(y) = \frac{\cosh x}{\text{senh } x} = \frac{1}{\cosh x}.$$

Da relação
$$\cosh^2 x - \text{senh}^2 x = 1$$
obtemos
$$\cosh x = \pm\sqrt{1 + \text{senh}^2 x}.$$

Como, porém,
$$\cosh x > 0 \text{ para todo } x,$$
temos
$$\cosh x = \sqrt{1 + \text{senh}^2 x}$$
$$= \sqrt{1 + y^2}.$$

Portanto,

$$g'(y) = \frac{1}{\sqrt{1+y^2}}$$

ou, usando novamente a letra x para indicar a variável de g, temos

$$g'(x) = \frac{1}{\sqrt{x^2+1}}$$

e

$$(\text{arg senh } x)' = \frac{1}{\sqrt{x^2+1}}.$$

b) *Derivada de* arg cosh x

Como a função cosh se torna bijetiva quando restringimos seu domínio para $[0, +\infty)$ e seu contradomínio a $[1, +\infty)$, a função

$$\text{arg cosh} : [1, +\infty) \to [0, +\infty)$$

é a inversa de

$$\cosh : [0, +\infty) \to [1, +\infty).$$

Consideremos

$$g(y) = \text{arg cosh } y$$

e

$$y = f(x) = \cosh x.$$

Pelo teorema da derivada da função inversa temos então

$$g'(y) = \frac{1}{\sqrt{1+y^2}} = \sqrt{1+y^2}.$$

Da relação

$$\cosh^2 x - \text{senh}^2 x = 1$$

obtemos

$$\text{senh } x = \sqrt{1 + \text{senh}^2 x}$$

Como $x \in [0, +\infty)$, temos $\text{senh } x \geq 0$, o que permite concluir que

$$\begin{aligned}\text{senh } x &= \sqrt{\cosh^2 x - 1}. \\ &= \sqrt{y^2 - 1}\end{aligned}$$

e

$$g'(y) = \frac{1}{\sqrt{y^2-1}}.$$

Usando a letra x para indicar a variável de g,

$$g'(x) = \frac{1}{\sqrt{x^2-1}},$$

ou seja,

$$(\text{arg cosh } x)' = \frac{1}{\sqrt{x^2-1}}, \quad (x > 1).$$

c) *Derivada de* arg tgh x, arg ctgh x, arg sech x e arg cosech x.

Não é difícil obter

$$(\text{arg tgh } x)' = \frac{1}{1-x^2}, \qquad (|x| < 1)$$

$$(\text{arg ctgh } x)' = \frac{1}{x^2-1}, \qquad (|x| > 1)$$

$$(\text{arg sech } x)' = -\frac{1}{x\sqrt{1-x^2}}, \qquad (0 < x < 1)$$

$$(\text{arg cosech } x)' = -\frac{1}{|x|\sqrt{x^2+1}}, \qquad (x \neq 0).$$

Observação 11 - Para obter a derivada de uma função hiperbólica inversa, aplicada a uma função $u = u(x)$, usamos a regra da cadeia e obtemos

$$(\text{arg senh } u)' = \frac{1}{\sqrt{1+u^2}} \cdot u'$$

$$(\text{arg cosh } u)' = \frac{1}{\sqrt{u^2-1}} \cdot u', \qquad (u > 1)$$

$$(\text{arg tgh } u)' = \frac{1}{1-u^2} \cdot u', \qquad (|u| < 1)$$

$$(\text{arg ctgh } u)' = \frac{1}{u^2-1} \cdot u', \qquad (|u| > 1)$$

$$(\text{arg sech } u)' = -\frac{1}{u\sqrt{1-u^2}} \cdot u', (0 < u < 1)$$

$$(\text{arg cosech } u)' = -\frac{1}{|u|\sqrt{u^2+1}} \cdot u', \qquad (u \neq 0).$$

Para facilitar a consulta e o uso, reunimos aqui as fórmulas de derivação obtidas.

$(a^u)' = a^u \cdot \ln a \cdot u'$	$(\text{ctg } u)' = -\text{cosec}^2\, u \cdot u'$,
$(e^u)' = e^u \cdot u'$	$(\sec u)' = \text{tg } u \cdot \sec u \cdot u'$
$(\log_a u)' = \dfrac{1}{u \cdot \ln a} \cdot u'$	$(\text{cosec } u)' = -\text{ctg } u \cdot \text{cosec } u \cdot u'$.
$(\ln u)' = \dfrac{1}{u} \cdot u'$	$(\text{arc sen } u)' = \dfrac{1}{\sqrt{1-u^2}} \cdot u'$,
$(u^r)' = r \cdot u^{r-1} \cdot u' \quad (r \in \mathbb{R}-\{0\})$	$(\text{arc cos } u)' = -\dfrac{1}{\sqrt{1-u^2}} \cdot u'$,
$(u^v)' = u^v \cdot \ln u \cdot v' + v \cdot u^{v-1} \cdot u'$	$(\text{arc tg } u)' = \dfrac{1}{1+u^2} \cdot u'$,

$(\text{sen } u)' = \cos u \cdot u'$	$(\text{arc ctg } u)' = -\dfrac{1}{1+u^2} \cdot u'$,
$(\cos u)' = -\text{sen } u \cdot u'$	$(\text{arc sec } u)' = \dfrac{1}{\lvert u\rvert\sqrt{u^2-1}} \cdot u'$,
$(\text{tg } u)' = \sec^2 u \cdot u'$	$(\text{arc cosec } u)' = -\dfrac{1}{\lvert u\rvert\sqrt{u^2-1}} \cdot u'$.

$(\text{senh } u)' = \cosh u \cdot u'$	$(\text{arg senh } u)' = \dfrac{1}{\sqrt{1+u^2}} \cdot u'$
$(\cosh u)' = \text{senh } u \cdot u'$	$(\text{arg cosh } u)' = \dfrac{1}{\sqrt{u^2-1}} \cdot u', \quad (u > 1)$
$(\text{tgh } u)' = \text{sech}^2\, u \cdot u'$	$(\text{arg tgh } u)' = \dfrac{1}{1-u^2} \cdot u', \quad (\lvert u\rvert < 1)$
$(\text{ctgh } u)' = -\text{cosech}^2\, u \cdot u'$	$(\text{arg ctgh } u)' = \dfrac{1}{u^2-1} \cdot u', \quad (\lvert u\rvert > 1)$
$(\text{sech } u)' = -\text{tgh } u \cdot \text{sech } u \cdot u'$	$(\text{arg sech } u)' = -\dfrac{1}{u\sqrt{1-u^2}} \cdot u'$, $(0<u<1)$
$(\text{cosech } u)' = -\text{ctgh } u \cdot \text{cosech } u \cdot u'$	$(\text{arg cosech } u)' = -\dfrac{1}{\lvert u\rvert\sqrt{u^2+1}} \cdot u', \quad (u \neq 0)$.
$(c \cdot u)' = c \cdot u'$	$\left(\dfrac{u}{v}\right)' = \dfrac{v \cdot u' - u \cdot v'}{v^2}$
$(u+v)' = u' + v'$	$(f \circ u)'(x) = f'(u(x)) \cdot u'(x)$
$(u \cdot v)' = u' \cdot v + u \cdot v'$	ou $\dfrac{df(u)}{dx} = \dfrac{df}{du} \cdot \dfrac{du}{dx}$

4.12 Derivadas sucessivas

Quando uma função f é derivável em todo ponto $x \in X$, onde X é um intervalo ou uma reunião de intervalos, fica definida em X, conforme já vimos, a função $f': X \to \mathbb{R}$, denominada *função derivada primeira* de f que a cada $x \in X$ associa o número real $f'(x)$.

Se, por sua vez, a função f' for derivável, define-se uma função $f'': X \to \mathbb{R}$ por

$$f''(x) = (f')'(x),$$

que é chamada *função derivada segunda* de f, também representada por $f^{(2)}$.

Assim, sucessivamente, para cada $n \in \mathbb{N}$, supondo definida a função $f^{(n-1)}$, se esta for derivável, temos definida a *função derivada n-ésima* de f, que é a função

$$f^{(n)}: X \to \mathbb{R}$$

dada por

$$f^{(n)}(x) = (f^{(n-1)})'(x).$$

Exemplo 18 - Calcular a derivada terceira de $f(x) = 4x^5 - x^3 + 7x^2$.

Temos

$$f'(x) = 20x^4 - 3x^2 + 14x\,,$$

$$f''(x) = (20x^4 - 3x^2 + 14x)'$$

$$= 80x^3 - 6x + 14$$

e

$$f^{(3)}(x) = (80x^3 - 6x + 14)'$$

$$= 240x^2 - 6.$$

4.13 Exercícios

1 - Determine o coeficiente angular e o coeficiente linear das retas dadas pelas equações.

a) $x + y = 3$ b) $2x - y = 0$

c) $10x + 5y + 20 = 0$ d) $3x - 10y + 8 = 0$

2 - Determine a equação da reta perpendicular a cada uma das retas seguintes, que passa pelo ponto (p, q) indicado.

a) $y = x - 5$ $(p, q) = (0, 0)$

b) $3x + y =$ $(p, q) = (1, 2)$

c) $x + 2y - 4 = 0$ $(p, q) = (0, 5)$

3 - Verifique se cada função a seguir é derivável no ponto a indicado.

a) $f(x) = \begin{cases} 3x - 2 & \text{se } x \le 1 \\ x^2 & \text{se } x > 1 \end{cases}, \quad a = 1$

b) $g(x) = \begin{cases} x^3 + 6 & \text{se } x < 2 \\ 12x - 10 & \text{se } x > 2 \\ 10 & \text{se } x = 2 \end{cases}, \quad a = 2$

c) $h(x) = \begin{cases} x^2 + x + 5 & \text{se } x \le 0 \\ x + 5 & \text{se } x > 0 \end{cases}, \quad a = 0$

d) $u(x) = \begin{cases} x^3 + 2x & \text{se } x \le -1 \\ 5x - 4 & \text{se } x > -1 \end{cases}, \quad a = -1$

4- Calcule a derivada de cada uma das funções, no ponto indicado.

a) $f(x) = x^2 + 3x - 5$, $a = -2$

b) $f(x) = 4x^5 - x^4 - 3x^2 - 2$, $a = 1$

c) $f(x) = (x + x^3)(x^5 - 3x^2 + x)$, $a = 0$

d) $f(x) = \dfrac{x^4 - 5}{x - 1}$, $a = 3$

e) $f(x) = \dfrac{1}{x^2 - 3x}$, $a = 2$

5 - Calcule a taxa de variação média de cada função a seguir, no intervalo indicado.

a) $f(x) = 2x^3 - 4x + 120$ $[2,4]$

b) $f(x) = \dfrac{x^2 + 2x}{x + 2}$, $[1,5]$

6 - Suponha que um projétil, arremessado horizontalmente, caia no solo 9 segundos após seu lançamento. Se $f(t) = 200t - \dfrac{10t^2}{2} - \dfrac{t^3}{3}$ é a distância (em metros) percorrida horizontalmente pelo projétil em t segundos, onde $t \in [0,9]$ e $t = 0$ corresponde ao instante do lançamento, determine (em relação ao deslocamento horizontal) :

a) a velocidade média do projétil, desde o lançamento até atingir o solo;

b) a velocidade no instante do lançamento;

c) a velocidade nos instantes $t = 1$, $t = 4$ e $t = 8$;

d) a velocidade do projétil no instante em que atinge o solo.

7 - Admita que $m(t) = 35 + \dfrac{5t^2}{.2} - \dfrac{t^3}{18}$ forneça, aproximadamente, a massa de um animal, (em kg) no dia em que completa t meses de vida, para $t \in [0,30]$.

a) Calcule a taxa de variação média (mensal) da massa do animal de 0 a 30 meses.

b) Calcule a taxa de variação da massa do animal no instante que completa: 1, 10, 18 e 24 meses.

8 - Determine a equação da reta tangente ao gráfico de cada função a seguir, no ponto a indicado.

a) $f(x) = 3x - x^2$, $a = 2$

b) $f(x) = x^3 - 4x^2 + 5$, $a = 0$

c) $f(x) = 2x^3 - x^2 - 4x$, $a = -1$

d) $f(x) = x^4 - x^2 - 3$, $a = -2$

e) $f(x) = x^5 - 4x^3 - 2$, $a = 1$

9 - Determine a equação da reta normal ao gráfico de cada uma das funções do exercício 8, no mesmo ponto a indicado.

10 - Determine a(s) reta(s) tangente(s) ao gráfico da função $f(x)$ paralela(s) à reta r dada.

a) $f(x) = 4x^2 - 5$ $r: y = 4x + 3$.

b) $f(x) = x^4 - 6x^2 + x$ $r: 7x + y - 4 = 0$

11- Determine a(s) reta(s) tangente(s) ao gráfico da função $f(x)$ perpendicular(es) à reta r.

a) $f(x) = x^2 + 2x - 1$ $r: x + 2y - 5 = 0$.

b) $f(x) = x^3 + 6x - 3$ $r: x + 18y + 3 = 0$.

12 - Para cada equação a seguir determine y'.

a) $(x - 1)^2 + y^2 = 3$

b) $x^3 - (y + 3)^2 = xy$

c) $(5 - x)^2 + xy = x$

13 - Determine a equação da reta tangente a cada curva no ponto p indicado.

a) $xy + y^2 = 2$, $p = (1,1)$

b) $3x^2 - (1 - y)^2 = x + 1$, $p = (2,-2)$

c) $(x - 3)^2 + (y - 1)^2 = 17$, $p = (-1,2)$

d) $4x - 3xy^2 + x^2y = 0$, $p = (1, -1)$

14 - Determine os pontos da circunferência $(x - 1)^2 + (y - 2)^2 = 4$ nos quais a reta tangente é paralela à reta $y = x$.

15 - Dadas $f(x) = x^5 + 4$ e $g(x) = x^3 + 2x$, determine (se existir):

a) $(f^{-1})'(5)$ b) $(f^{-1})'(3)$ c) $(f^{-1})'(4)$ d) $(f^{-1})'(247)$

e) $(g^{-1})'(0)$ f) $(g^{-1})'(3)$ g) $(g^{-1})'(-12)$ h) $(g^{-1})'(33)$

16 - Calcule a derivada de cada uma das funções.

a) $y = e^{2x}$
b) $y = \ln(x^2 + 3)$
c) $y = 2^{x + \cos x}$
d) $y = (3 + 2x)^8$
e) $y = 5^{x^2 + x}$
f) $y = e^{x^2 + \cos x}$
g) $y = \text{arc sen}\,(x^2 - 3$
h) $y = \text{arc tg}\,(2x^3 + x)$
i) $y = \ln \sec^2 x$
j) $y = e^{e^x}$
k) $y = e^{\text{tg}\,x}$
l) $y = \text{tg}\, e^x$
m) $y = \log_a (1 + \text{sen}^2 x)$
n) $y = (3x^2 + 4)^{\text{sen}\,x + \cos x}$
o) $y = \text{arc cos}\,(x + e^x)$
p) $y = \ln(x + \cos 3x)$
q) $y = \ln(x^2 + e^{\text{sen}\,4x})$
r) $y = (2 + \text{sen} x)^{\cos x}$
s) $y = \sqrt{x^2 + \cos x}$
t) $y = \sqrt[3]{x^4 + 3x\,\text{sen}\,x}$
u) $y = \arg\cosh(x^3 + 2x)$
v) $y = (x^2 + x)e^{x^3}$
w) $y = \dfrac{1 + e^{2x}}{\text{sen}\,x}$
x) $y = \dfrac{x^3 + x^2}{\text{senh}\,x}$

17 - Calcular a derivada de ordem 100 da função $f(x) = e^{2x}$.

18 - Suponha que 2 anos após a germinação de uma semente de determinada árvore, esta atingiu 1 metro de altura; após 4 anos atingiu 8 metros; em 6 anos, 16 metros e, em 8 anos, 18 metros de altura. Usando o fato de que em $t = 0$ a altura é 0, encontre (conforme apêndice do capítulo 2) o polinômio

$$h(t) = -\frac{t^4}{192} - \frac{t^3}{24} + \frac{55t^2}{48} - \frac{19t}{12},$$

que fornece a altura aproximada da árvore em qualquer momento, entre 0 e 8 anos.
Calcule a taxa de variação da altura da árvore para

a) $t = 1$; b) $t = 3$; c) $t = 5$; d) $t = 6$.

19 - Dada a função $f(x) = x^4 + 4x^3 - 8x^2 + 5$, determine as abscissas dos pontos em que a reta tangente ao gráfico de f é horizontal.

20 - Se $l(t) = 50\left(1 - e^{-\frac{t}{10}}\right)$ fornece o comprimento aproximado de um peixe, dado em centímetros, quando ele atinge t meses de idade, determine a taxa de variação aproximada de seu comprimento no instante em que ele completa 10 meses de idade.

21 - Para cada função $f(x)$ dada a seguir, calcule a função derivada primeira, $f'(x)$.

a) $f(x) = x^5 - 4x^2 - \dfrac{1}{x}$
b) $f(x) = (x^2 + 3x)\cos x^2$
c) $f(x) = \left(x^2 + 1\right)^5 \text{sen}\,2x$
d) $f(x) = \ln\left(x^2 + \cos x\right)$
e) $f(x) = \dfrac{3x - x^3}{\text{sen}\,x}$
f) $f(x) = \dfrac{\text{tg}\,x}{2x - 3}$
g) $f(x) = e^{3x + \text{sen}\,3x}$
h) $f(x) = 20\left(1 - e^{-\frac{x}{10}}\right)$

Respostas

1 - a) -1 e b) 2 e 0 c) -2 e -4 d) $\dfrac{3}{10}$ e $\dfrac{4}{5}$

2 - a) $y = -x$ b) $y = \dfrac{x}{3} + \dfrac{5}{3}$ c) $y = 2x + 5$

3 - a) f não é derivável b) g não é derivável c) h é derivável
d) u não é derivável

4 - a) -1 b) 10 c) 0 d) 35 e) $-\dfrac{1}{4}$

5 - a) 52 b) 1

6 - a) $128\dfrac{m}{s}$ b) $200\dfrac{m}{s}$ c) $189\dfrac{m}{s}$, $144\dfrac{m}{s}$ e $56\dfrac{m}{s}$ d) $29\dfrac{m}{s}$

7 - a) 25 kg / mês b) $\frac{29}{6}$ kg / mês , $\frac{100}{3}$ kg / mês, 36 kg / mês e 24 kg / mês

8 - a) $y=-x+4$ b) $y=5$ c) $y=4x+5$ d) $y=-28x-47$ e) $y=-7x+2$

9 - a) $y=x$ b) $x=0$ c) $y=-\frac{x}{4}+\frac{3}{4}$ d) $y=\frac{x}{28}+\frac{127}{14}$

e) $y=\frac{x}{7}-\frac{36}{7}$

10 - a) $y=4x-6$ b) $y=-7x+3$ e $y=-7x-24$

11 - a) $y=2x-1$ b) $y=18x-19$ e $y=18x+13$

12 - a) $y'=\frac{1-x}{y}$ b) $y'=\frac{3x^2-y}{x+2y+6}$ c) $y'=\frac{11-y-2x}{x}$

13 - a) $y=-\frac{x}{3}+\frac{4}{3}$ b) $y=-\frac{11x}{6}+\frac{5}{3}$ c) $y=4x+6$ d) $y=\frac{x}{7}-\frac{8}{7}$

14 - $(1+\sqrt{2}, 2-\sqrt{2})$ e $(1-\sqrt{2}, 2+\sqrt{2})$

15 - a) $\frac{1}{5}$ b) $\frac{1}{5}$ c) não existe d) $\frac{1}{405}$ e) $\frac{1}{2}$

f) $\frac{1}{5}$ g) $\frac{1}{14}$ h) $\frac{1}{29}$

16 - a) $2\cdot e^{2x}$ b) $\frac{2x}{x^2+3}$ c) $(1-\text{sen}x)\ln 2\cdot 2^{x+\cos x}$ d) $16(3+2x)^7$

e) $(2x+1)\ln 5\cdot 5^{x^2+x}$ f) $(2x-\text{sen}x)\,e^{x^2+\cos x}$ g) $\frac{2x}{\sqrt{1-(x^2-3)^2}}$

h) $\frac{6x^2+1}{1+(2x^3+x)^2}$ i) $2\,\text{tg}\,x$ j) $e^{e^x}\cdot e^x$ k) $e^{\text{tg}\,x}\cdot\sec^2 x$

l) $e^x\cdot\sec^2 e^x$ m) $\frac{\text{sen}2x}{(1+\text{sen}^2x)\ln a}$

n) $6x(\text{sen}x+\cos x)(3x^2+4)^{\text{sen}\,x+\cos x-1}+(\cos x-\text{sen}x)(3x^2+4)^{\text{sen}\,x+\cos x}\cdot\ln(3x^2+4)$

o) $-\frac{1+e^x}{\sqrt{1-(x+e^x)^2}}$ p) $\frac{1-3\,\text{sen}3x}{x+\cos 3x}$ q) $\frac{2x+4\cos 4x\cdot e^{\text{sen}\,4x}}{x^2+e^{\text{sen}\,4x}}$

r) $\cos^2x\,(2+\text{sen}x)^{\cos x-1}-\text{sen}x\,(2+\text{sen}x)^{\cos x}\cdot\ln(2+\text{sen}x)$

s) $\frac{2x-\text{sen}\,x}{2\sqrt{x^2+\cos x}}$ t) $\frac{4x+3\,\text{sen}\,x+3x\cos x}{3\sqrt[3]{(x^4+3\,\text{sen}\,x)^2}}$

u) $\frac{3x+2}{\sqrt{(x^3+2x)^2-1}}$ v) $e^{x^3}(3x^4+3x^3+2x+1)$

w) $\frac{2e^{2x}\,\text{sen}\,x-(1+e^{2x})\cos x}{\text{sen}^2\,x}$

x) $\frac{(3x^2+2x)\,\text{senh}\,x-(x^3+x^2)\cosh x}{\text{senh}^2\,x}$

17 - $e^{2x}\cdot 2^{100}$

18 - a) $\frac{27}{48}$ m/ano b) $\frac{173}{48}$ m/ano c) $\frac{199}{48}$ m/ano d) $\frac{152}{48}$ m/ano

19 - $-4, 0, 1$

20 - $\frac{5}{e}$

21- a) $f'(x)=5x^4-8x+\frac{1}{x^2}$ b) $f'(x)=(2x+3)\cos x^2-2x(x^2+3x)\,\text{sen}\,x^2$

c) $f'(x)=10x\left(x^2+1\right)^4\text{sen}\,2x+2\left(x^2+1\right)^5\cos 2x$

d) $f'(x)=\frac{2x-\text{sen}\,x}{x^2+\cos x}$

e) $f'(x) = \dfrac{3(1-x^2)\,\text{sen}\,x - (3x - x^3)\cos x}{\text{sen}^2 x}$

f) $f'(x) = \dfrac{(2x-3)\sec^2 x - 2\text{tg}\,x}{(2x-3)^2}$

g) $f'(x) = 3(1+\cos 3x)\,e^{3x+\text{sen}\,3x}$ h) $f'(x) = 2e^{-\frac{x}{10}}$

CAPÍTULO 5

Aplicações das derivadas

5.1 Taxa de variação

Embora já tenhamos apresentado o conceito de taxa de variação no capítulo 4, retornamos, aqui, a esse assunto devido à sua importância como uma aplicação das derivadas e devido à complexidade de alguns problemas cuja resolução exige certa familiaridade com a derivação de funções compostas.

Relembramos ao leitor que é útil ter sempre em mente que o conceito de taxa de variação é análogo ao de velocidade.

Relembramos também que a taxa de variação instantânea de uma função f é dada pelo limite

$$\lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$$

que é a derivada de f no ponto x.

Exemplo 1 - Calcular a taxa de variação da área de um triângulo eqüilátero, em relação ao seu lado. Qual seu valor quando o lado mede 6 metros?

Primeiramente precisamos obter a expressão da função que fornece a área do triângulo em relação ao seu lado.