Capítulo 1

Matrizes

1.1 História

O termo matriz foi utilizado pela primeira vez pelo matemático e advogado inglês James Sylvester, que o definiu em 1850 como um "arranjo oblongo de termos". Sylvester comunicou seu trabalho sobre matrizes para seu colega Arthur Caley, que então introduziu algumas operações básicas em um livro intitulado *Memoir on the Theory of Matrices* que foi publicado em 1858. Para Sylverster matriz era apenas um ingrediente dos determinantes, foi somente Caley quem deu vida própria as matrizes.

A referência mais antiga de matrizes ocorreu na china em 2500 AC onde se opera com tabelas do mesmo modo que fazemos com matrizes hoje em dia. O conceito de matrizes hoje aparece em muitas áreas, como matemática, física, engenharia e computação.

1.2 Exemplos e Conceitos

Exemplo 1.1: Uma indústria tem quatro fábricas A, B, C, D, cada uma das quais produz três produtos 1, 2, 3. A tabela mostra a produção da indústria durante uma semana.

	Fábrica A	**Fábrica B**	**Fábrica C**	**Fábrica D**
Produto 1	560	360	380	0
Produto 2	340	450	420	80
Produto 3	280	270	210	380

Exemplo 1.2: Uma empresa de engenharia dispõe seus serviços: Venda de apartamentos de 2 quartos, venda de Apartamentos de 3 quartos, venda de lotes no Loteamento x, venda de lotes no Loteamento y e projetos nos três primeiros meses do ano na seguinte tabela:

	Janeiro	**Fevereiro**	**Março**
2 Quartos	30	6	26
3 Quartos	15	10	10
Loteamento X	12	10	20
Loteamento Y	24	8	12
Projetos	60	23	35

Ao abstrairmos os significados de linhas e colunas nos exemplos acima temos as matrizes abaixo:

$$\begin{pmatrix} 560 & 360 & 380 & 0 \\ 340 & 450 & 420 & 80 \\ 280 & 270 & 210 & 380 \end{pmatrix} \quad \text{e} \quad \begin{pmatrix} 30 & 6 & 26 \\ 15 & 10 & 10 \\ 12 & 10 & 20 \\ 24 & 8 & 12 \\ 60 & 23 & 35 \end{pmatrix}$$

Definição 1.1: Chama-se matriz de ordem *m* por *n* a um quadro ou tabela de $m \times n$ elementos dispostos em *m* linhas(horizontais) e *n* colunas(verticais).

Notação: Seja $A_{m\times n}$ e seja $i, j \in IR$ tal que $1 \le i \le m$ e $1 \le j \le n$. Indicaremos uma matriz usando uma letra maiúscula, por exemplo, *A* e indicaremos com a_{ij} o elemento da matriz *A* que ocupa a linha *i* e a coluna *j*. Denotaremos então a matriz *A* por:

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{bmatrix}$$

A matriz A pode ser representada abreviadamente por:

$$A = [a_{ij}]_{m\times n}$$

O índice i representa a posição da linha ao qual o elemento se encontra e o índice j representa a posição da coluna ao qual o elemento se encontra, portanto i: 1 à m e j: 1 à n. Podemos representar uma matriz apenas pelo símbolo $A_{m\times n}$.

Podemos denotar uma matriz também usando parênteses ou barra dupla, como por exemplo:

$$\begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 1 & 5 \end{pmatrix} \text{ e } \begin{Vmatrix} -1 & 2 \\ 1 & 5 \end{Vmatrix}$$

Definição 1.2: Duas matrizes $A = [a_{ij}]_{m\times n}$ e $B = [b_{ij}]_{m\times n}$ são iguais, $A = B$,se todos os seus elementos correspondentes são iguais, isto é, $a_{ij} = b_{ij}$.

Exemplo 1.3:

(a) $\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -2 & 3 \\ 6 & -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -2 & 3 \\ 6 & -1 \end{bmatrix}$

(b) $\begin{pmatrix} 3^2 & 1 & sen 90^o \\ 2 & 2^3 & 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 9 & 1 & 1 \\ 2 & 8 & 5 \end{pmatrix}$

Exercício 1.1: Calcule o valor de x para que as matrizes $A = \begin{bmatrix} 7 & 8 \\ 4 & x^2 \end{bmatrix}$ e $B = \begin{bmatrix} 7 & 8 \\ 4 & 10x - 25 \end{bmatrix}$ sejam iguais.

Exercício 1.2: Calcule o valor de x e y de modo que as matrizes $A = \begin{bmatrix} y+4 & 2 \\ 9 & x^2+4 \end{bmatrix}$ e $B = \begin{bmatrix} 12 & 2 \\ 9 & 53 \end{bmatrix}$ sejam iguais.

Os exemplos 1.1 e 1.2 geraram matrizes que foram obtidas a partir de dados reais de um problema. Também podemos obter matrizes a partir de uma lei de formação.

Exemplo 1.4: Represente explicitamente a matriz $A=[a_{ij}]$, com $1\leq i\leq 3$ e $1\leq j\leq 2$, tal que $a_{ij}=3i-2j+4$.

Resolução: A matriz a ser encontrada tem forma genérica dada por:

$$A=\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{bmatrix}$$

- Para $i=1$ e $j=1 \Rightarrow a_{11}=3.1-2.1+4=5$
- Para $i=1$ e $j=2 \Rightarrow a_{12}=3.1-2.2+4=3$
- Para $i=2$ e $j=1 \Rightarrow a_{21}=3.2-2.1+4=8$
- Para $i=2$ e $j=2 \Rightarrow a_{22}=3.2-2.2+4=6$
- Para $i=3$ e $j=1 \Rightarrow a_{31}=3.3-2.1+4=11$
- Para $i=3$ e $j=2 \Rightarrow a_{32}=3.3-2.2+4=9$

Logo:

$$A=\begin{bmatrix} 5 & 3 \\ 8 & 6 \\ 11 & 9 \end{bmatrix}$$

Exercício 1.3: Represente explicitamente uma matriz quadrada de ordem 2, de modo que $a_{ij}=i-3j-2$

Exercício 1.4: Represente explicitamente uma matriz quadrada de ordem 3, de modo que $a_{ij}=1$, se $i=j$ e $a_{ij}=2i-j^2$, se $i\neq j$.

1.3 Tipos Especiais

Consideraremos agora alguns casos particulares de matrizes $m \times n$

1.3.1 **Matriz Retangular:** É a matriz no qual o número de linhas é diferente do número de colunas, isto é, $m \neq n$.

Exemplo 1.5

$$A = \begin{bmatrix} 5 & 3 \\ 8 & 6 \\ 11 & 9 \end{bmatrix}_{3\times 2} \qquad B = \begin{pmatrix} 560 & 360 & 380 & 0 \\ 340 & 450 & 420 & 80 \\ 280 & 270 & 210 & 380 \end{pmatrix}_{3\times 4}$$

Dentre as matrizes retangulares destacamos duas:

1.3.1(a) Matriz – Coluna: A matriz de ordem *n* por 1 é uma matriz coluna.

$$A = \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \\ \vdots \\ a_n \end{bmatrix}$$

1.3.1(b) Matriz-Linha: A matriz de ordem 1 por *n* é uma matriz linha.

$$A = \begin{bmatrix} a_1 & a_2 & a_3 & \cdots & a_n \end{bmatrix}$$

1.3.2 **Matriz Quadrada:** É a matriz no qual o número de linhas é igual ao número de colunas, isto é, $m = n$.

Exemplo 1.6

$$A = \begin{bmatrix} 7 & 8 \\ 4 & 3 \end{bmatrix} \qquad B = \begin{bmatrix} -1 & 7 & 5 \\ 2 & 0 & 9 \\ -3 & 2 & 1 \end{bmatrix}$$

Observação 1: As matrizes quadradas podem ser representadas apenas por A_n, que é o mesmo que dizer a que a matriz é de ordem *n* por *n*.

Observação 2: Dada uma matriz quadrada $A=[a_{ij}]_{n\times n}$ os elementos a_{ij} tal que $i=j$, constituem a **diagonal principal**, e os elementos a_{ij} tal que $i+j=n+1$, constituem a **diagonal secundária**.

Destaquemos agora alguns casos especiais de matrizes quadradas:

1.3.2(a) Matriz Diagonal: É uma matriz quadrada $A=[a_{ij}]_{m\times n}$ onde $a_{ij}=0$ se $i\neq j$, isto é , fora da diagonal principal todos os elementos são nulos. É claro que isto não implica que diagonal também contenha elementos nulos.

Lei de Formação: $a_{ij}=0$ se $i\neq j$

Exemplo 1.7

$$A=\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

1.3.2(b) Matriz Identidade: É uma matriz diagonal onde os elementos da diagonal principal são todos iguais à 1, isto é, $a_{ij}=1$ se $i=j$ e $a_{ij}=0$ se $i\neq j$.

Exemplo 1.8

$$I=\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Lei de Formação: $a_{ij}=1$ se $i=j$ e $a_{ij}=0$ se $i\neq j$

1.3.2(c) Matriz Triangular Superior: É uma matriz quadrada $A = [a_{ij}]_{m \times n}$, onde os elementos abaixo da diagonal são nulos, isto é, $a_{ij} = 0$ se $i > j$.

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ 0 & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & a_{nn} \end{bmatrix}$$

Lei de Formação: $a_{ij} = 0$ se $i > j$

1.3.2(d) Matriz Triangular Inferior: É uma matriz quadrada, onde os elementos acima da diagonal são nulos, isto é, $a_{ij} = 0$ se $i < j$.

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & 0 & \dots & 0 \\ a_{21} & a_{22} & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{bmatrix}$$

Lei de Formação: $a_{ij} = 0$ se $i < j$

1.3.3 Matriz Nula: É uma matriz quadrada ou retangular tal que $a_{ij} = 0$, $\forall i$ e $\forall j$, isto é todos os elementos da matriz são nulos.

Exemplo 1.9

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

1.3.3 **Matriz Transposta:** Seja A uma matriz de ordem $m \times n$, se permurtarmos as linhas pelas colunas de mesmo índice, obtemos uma nova matriz denotada por A^T ou A' chamada de matriz transposta. De modo geral, tudo que é linha se transforma em coluna e vice versa, portanto se uma matriz é de ordem $m \times n$, então sua transposta é de ordem $n \times m$.

Exemplo 1.10

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \end{bmatrix} \text{ e } A^T = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{21} \\ a_{12} & a_{22} \\ a_{13} & a_{23} \end{bmatrix}$$

1.3.4(a) Simétrica: É uma matriz quadrada $A = [a_{ij}]$ onde $A = A^T$. Em outras palavras uma matriz é simétrica se $a_{ij} = a_{ji}$.

Exercício 1.5: Represente explicitamente uma matriz quadrada de ordem 4, de modo que $a_{ij} = i \cdot j^2 + i^2 \cdot j$.

1.3.4(b) Matriz Antissimétrica: É uma matriz quadrada $A = [a_{ij}]$ onde $A^T = -A$. Em outras palavras uma matriz é simétrica se $a_{ij} = -a_{ji}$. Para que isto ocorra todos os elementos da diagonal principal devem ser zeros.

Exemplo 1.11

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 3 & -1 \\ -3 & 0 & 9 \\ 1 & -9 & 0 \end{bmatrix}$$

Propriedades: Sejam A e B matrizes de mesma ordem $m \times n$, e k um número real, então:

(a) $(A^T)^T = A$

(b) $(A+B)^T = A^T + B^T$

(c) $(kA)^T = kA^T$

(d) $(A \cdot B)^T = B^T \cdot A^T$

Para revisar todos os conteúdos com exercícios acessem os links:

https://www.youtube.com/watch?v=gE_1LTPwhV0

https://www.youtube.com/watch?v=QhpIVfVCbKg

1.4 Operações com Matrizes (Leitura Particular)

Para complementar esta leitura assista as vídeo aulas abaixo:

Conteúdo: https://www.youtube.com/watch?v=pNWx2LE9meQ&t=984s

Exercícios: https://www.youtube.com/watch?v=SnhBzGHWRvg

1.4.1 Soma de matrizes

Definição: A soma de duas matrizes de mesma ordem $A=[a_{ij}]_{m\times n}$ e $B=[b_{ij}]_{m\times n}$ é uma matriz $m\times n$ que denotaremos por $A+B$, cujos elementos são a soma dos elementos correspondentes de A e B, isto é,

$$A+B=[a_{ij}+b_{ij}]_{m\times n}$$

Exemplo 1.12

$$\begin{bmatrix} 5 & -3 \\ -4 & -1 \\ 7 & 2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 2 & -2 \\ 4 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5+(-1) & -3+0 \\ -4+2 & -1+(-2) \\ 7+4 & 2+1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 & -3 \\ -2 & -3 \\ 11 & 3 \end{bmatrix}$$

Propriedades: Sejam *A*, *B*, e *C* matrizes de mesma ordem $m\times n$, então:

(a) $A+B=B+A$ (Comutatividade)

(b) $A+(B+C)=(A+B)+C$ (Associatividade)

(c) $A+0_{m\times n}=0_{m\times n}+A=A$

(d) $A-A=-A+A=0$

Exercício 1.6: Sejam as matrizes $A=\begin{bmatrix} 1 & 4 & 0 \\ -2 & 6 & 5 \end{bmatrix}$, $B=\begin{bmatrix} -3 & 1 & -1 \\ 3 & 0 & 2 \end{bmatrix}$, $C=\begin{bmatrix} 4 & 3 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}$ e $D=\begin{bmatrix} 1 & -2 & 3 \\ 5 & 2 & -1 \end{bmatrix}$. Calcule se possível $A+B$, $A+C$ e $(B+A)+D$.

1.4.2 Multiplicação por Escalar

Definição: Seja $A=[a_{ij}]_{m\times n}$ uma matriz e k um número real, então definimos a matriz

$$k\cdot A=[k\cdot a_{ij}]_{m\times n}$$

Exemplo 1.13

$$\frac{1}{2}\cdot\begin{bmatrix}2 & 1 & -6\\ 3 & 2 & 10\\ 4 & -5 & 1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1 & \frac{1}{2} & -3\\ \frac{3}{2} & 1 & 5\\ 2 & -\frac{5}{2} & \frac{1}{2}\end{bmatrix}$$

Propriedades: Seja A e B matrizes de ordem $m\times n$, k, k_1 e k_2 números reais.

(a) $k\cdot(A+B)=k\cdot A+k\cdot B$

(b) $(k_1+k_2)\cdot A=k_1\cdot A+k_2\cdot A$

(c) $1\cdot A=A$

(d) $k_1\cdot(k_2\cdot A)=(k_1\cdot k_2)\cdot A$

Observação: A matriz diferença $A - B$ de duas matrizes de mesma ordem $m\times n$, é definida por:

$$A-B=A+(-B)[a_{ij}-b_{ij}]_{m\times n}$$

Exercício 1.7: Sejam

$$A=\begin{bmatrix}2 & 3 & 8\\ -5 & 9 & -6\\ 7 & 4 & 1\end{bmatrix},\qquad B=\begin{bmatrix}-3 & 7 & 1\\ -4 & 2 & 5\\ 0 & 9 & 4\end{bmatrix},\qquad C=\begin{bmatrix}7 & -8 & 3\\ 4 & -3 & 2\\ 9 & -5 & 1\end{bmatrix}$$

Calcule $2A-B+3C$

1.4.3 Multiplicação de Matrizes

Para melhor ilustrar o conceito de multiplicação de matrizes, vejamos um exemplo.

Exemplo 1.14: Suponhamos que a tabela abaixo nos forneça as quantidades de vitaminas *A*, *B* e *C* obtidas em cada unidade dos alimentos I e II

	Vitamina A	**Vitamina B**	**Vitamina C**
Alimento I	4	3	0
Alimento II	5	0	1

Se ingerirmos 5 unidades do alimento I e 2 unidades do alimento II, quanto consumiremos de cada tipo de vitamina?

Resolução: Vamos representar o consumo dos alimentos I e II pela matriz consumo B:

$$B = [5 \quad 2]$$

A operação que vai nos fornecer a quantidade ingerida de cada vitamina é o produto:

$$[5 \quad 2] \cdot \begin{bmatrix} 4 & 3 & 0 \\ 5 & 0 & 1 \end{bmatrix} = [5 \cdot 4 + 2 \cdot 5 \quad 5 \cdot 3 + 2 \cdot 0 \quad 5 \cdot 0 + 2 \cdot 1] = [30 \quad 15 \quad 2]$$

Isto é, são ingeridas 30 unidades de vitamina A, 15 de vitamina B e 2 de vitamina C.

Definição: Sejam $A = [a_{ij}]_{m \times n}$ e $B = [b_{rs}]_{n \times p}$. Definimos o produto $A \cdot B = [c_{uv}]_{m \times p}$ onde

$$c_{uv} = a_{u1} \cdot b_{1v} + a_{u2} \cdot b_{2v} + \ldots + a_{un} \cdot b_{nv}$$

Observação 1: O produto só é possível se o número de colunas da primeira matriz for igual ao número de linhas da segunda matriz.

Observação 2: A ordem da matriz produto *C* é dada pelo número de linhas da matriz *A* e pelo número de colunas da matriz *B*.

Observação 3: Para encontrar a matriz produto *C*, multiplicamos cada linha da matriz, por cada coluna de *B*.

Observação 4: Para encontra os elementos c_{ij}, basta multiplicar os elementos da i-ésima linha da 1ª matriz com os elementos da j-ésima coluna da 2ª matriz e somá-los.

Vejamos um exemplo:

Exemplo 1.14: Seja as matrizes $A = \begin{bmatrix} 4 & 2 & 6 \\ 2 & 5 & 3 \end{bmatrix}_{2\times 3}$ e $B = \begin{bmatrix} 5 & 2 & 4 & 1 \\ 2 & 3 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 7 & 6 \end{bmatrix}_{3\times 4}$ Encontre o produto de *A* por *B*.

Solução: De acordo com a observação 1, esta multiplicação é possível pois o numero de colunas da matriz *A* (três colunas) é igual o número de linhas da matriz *B* (Três linhas).

De acordo com a observação 2, a matriz produto *C*, terá ordem 2 x 4, pois 2 é o número de linhas da matriz *A*, e 4 é o número de colunas da matriz *B*.

A matriz *C*, é disposta então da seguinte maneira: $C = \begin{bmatrix} c_{11} & c_{12} & c_{13} & c_{14} \\ c_{21} & c_{22} & c_{23} & c_{24} \end{bmatrix}$. Agora vamos a multiplicação efetiva:

$c_{11} =$ 1ª linha de *A* x 1ª coluna de *B* = 4 x 5 + 2 x 2 + 6 x 1 = 20 + 4 + 6 = 30

$c_{12} =$ 1ª linha de *A* x 2ª coluna de *B* = 4 x 2 + 2 x 3 + 6 x 2 = 8 + 6 + 12 = 26

$c_{13} =$ 1ª linha de *A* x 3ª coluna de *B* = 4 x 4 + 2 x 1 + 6 x 7 = 16 + 2 + 42 = 60

$c_{14} =$ 1ª linha de *A* x 4ª coluna de *B* = 4 x 1 + 2 x 0 + 6 x 6 = 4 + 0 + 36 = 40

$c_{21} =$ 2ª linha de *A* x 1ª coluna de *B* = 2 x 5 + 5 x 2 + 3 x 1 = 10 + 10 + 3 = 23

$c_{22} =$ 2ª linha de *A* x 2ª coluna de *B* = 2 x 2 + 5 x 3 + 3 x 2 = 4 + 15 + 6 = 25

$c_{23} =$ 2ª linha de *A* x 3ª coluna de *B* = 2 x 4 + 5 x 1 + 3 x 7 = 8 + 5 + 21 = 34

$c_{24} =$ 2ª linha de *A* x 4ª coluna de *B* = 2 x 1 + 5 x 0 + 3 x 6 = 2 + 0 + 18 = 20

Portanto a matriz produto $C = A \times B$ é dada por $C = \begin{bmatrix} 30 & 26 & 60 & 40 \\ 23 & 25 & 34 & 20 \end{bmatrix}$

Exercício 1.8: Se uma matriz *A* tem ordem 3 x 5 e uma matriz *B* tem ordem 5 x 6. Qual a ordem da matriz $C = A \times B$.

Exercício 1.9: Seja $A = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 4 & 2 \\ 5 & 3 \end{bmatrix}$ e $B = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 4 \end{bmatrix}$. Encontre o elemento c_{32} da matriz produto de *A* por *B*.

Exercício 1.10: Calcule $\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -2 & 3 \\ 5 & 4 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 0 & 6 & 1 \\ 3 & 8 & -2 \end{bmatrix}$

Exercício 1.11: Calcule o produto das matrizes $A = \begin{bmatrix} 2 & 3 & 4 \\ 3 & 5 & -4 \\ 4 & 7 & -2 \end{bmatrix}$ e $X = \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}$.

1.4.4 Comutatividade na Multiplicação de duas Matrizes

Em geral, a existência do produto $A \cdot B$ não implica a existência do produto $B \cdot A$.

Por exemplo, $A_{2\times4} \times B_{4\times3} = C_{2\times3}$

Já o produto, $B_{4\times3} \times A_{2\times4}$, não é possível pois o número de colunas de *B* é diferente do número de linhas de *A*.

Mesmo quando o produto $A \times B$ e $B \times A$ são possíveis, os dois produtos são, em geral, diferentes:

Por exemplo: $A_{4\times3} \times B_{3\times4} = C_{4\times4}$ e $A_{3\times4} \times B_{4\times3} = C_{3\times3}$, ou seja, os produtos são possíveis, mas os resultados dos produtos são matrizes de ordens diferentes.

Assim, podemos afirmar que o produto de matrizes **não é comutativo**. Mas existem matrizes onde $A \times B = B \times A$, porém esta não é a regra. Acompanhe os dois casos:

Mas, existem alguns casos particulares onde a comutatividade é possível

1° Caso: Elemento Neutro

A matriz identidade *I* de ordem *n* comuta com qualquer matriz *A* de ordem *n*, isto é,

$$A \cdot I = I \cdot A = A$$

I é o elemento neutro da multiplicação de matrizes.

2° Caso: Inversa de Matriz

Definição: Seja *A* uma matriz de ordem *n*. A matriz *B* de ordem *n* que satisfaz,

$$A \cdot B = B \cdot A = I$$

é chamada de matriz inversa de *A* e é denotada por A^{-1}. A inversa é única.

Exercício 1.12: Seja $A = \begin{bmatrix} 9 & 5 \\ 7 & 4 \end{bmatrix}$ e $B = \begin{bmatrix} 4 & n \\ m & 9 \end{bmatrix}$. Encontre o valor de *m* e *n* para que *B* seja inversa de *A*. Aqui devemos multiplicar *A* por *B* e igualar a identidade, ou seja, usamos a definição de inversa.

Exercício 1.13: Verifique se a matriz $A = \begin{bmatrix} 2 & 5 \\ 1 & 3 \end{bmatrix}$ é inversa da matriz $B = \begin{bmatrix} 3 & -5 \\ -1 & 2 \end{bmatrix}$.

O Método para obtenção de matriz inversa será visto mais tarde.

Propriedades

(a) Dadas as matrizes *A*, *B* e *C* de ordem $m \times n$, $n \times p$ e $p \times r$ respectivamente, então

$$(A \times B) \times C = A \times (B \times C)$$

(b) Dadas as matrizes *A*, *B* e *C* de ordem $m \times n$, $m \times n$ e $n \times p$ respectivamente, então

$$(A + B) \times C = A \times C + B \times C$$

(c) Dadas as matrizes *A*, *B* e *C* de ordem $n \times p$, $n \times p$ e $m \times n$ respectivamente, então

$$C \times (A + B) = C \times A + C \times B$$

(d) Se *A* de ordem $m \times n$, então

$$I_m \times A = A \times I_n = A$$

(e) Dadas as matrizes A e B de ordem $m \times n$ e $n \times p$ respectivamente e k um número real, então

$$(kA) \times B = A \times (kB) = k(A \times B)$$

ATIVIDADE FORMATIVA I – AVALIAÇÃO COM NOTA

1) A atividade deve ser entregue na data: ____/____/_____
2) A atividade pode ser feito em grupo de 3 alunos.
3) A atividade deve ser entregue no arquivo que será enviado por e-mail.

Não serão aceitas atividades em folha de caderno, o padrão para trabalhos acadêmicos é folha branca A4

ATENÇÃO: Atividades não entregues na data indicada terão um desconto de 20% por dia de atraso.

ATIVIDADE: De posse do livro abaixo, resolva os exercícios citados no final desta página.

BOLDRINI,J.L.; COSTA, S.I.R.; RIBEIRO, V.L.F.F; WETZLER,H.G. *Álgebra Linear*. São Paulo: Editora Harper & Row do Brasil Ltda, 1978.

<u>Pg 11 a 15</u>: 1, 2, 3, 4, 5, 7, 8, 9, 10, 12, 14, 15 e 16(a),(b),(c) e (e)

1.5 Operações Elementares sobre Linhas de uma Matriz

Definição: Define-se *operações elementares sobre linhas de uma matriz* as seguintes:

(I) Permutação de Linhas

$$L_i \leftrightarrow L_j$$

Isto significa que trocamos a linha i pela linha j.

(II) Multiplicação de uma linha por um número real diferente de zero.

$$kL_i \to L_i$$

Isto significa que multiplicamos a linha i pelo número k e obtivemos uma nova linha i.

(III) Substituir uma linha, pela soma desta linha com outra linha previamente multiplicada por um número real.

$$kL_i + L_j \to L_j$$

Isto significa que substituímos a linha j pela soma dela com a linha i multiplicada por k.

1.5.1 Matriz em Forma escada (Escalonada)

Definição: Uma matriz $m \times n$ é forma escada reduzida por linhas se:

(a) O primeiro elemento não nulo de uma linha não nula é um.

(b) Cada coluna que contém o primeiro elemento não nulo de alguma linha tem todos os seus outros elementos iguais a zero.

(c) Toda linha nula ocorre abaixo de todas as linhas não nulas.

(d) O número de zeros precedendo o primeiro elemento não nulo de uma linha aumenta a cada linha, até que sobrem somente linhas nulas se houver.

Exemplo 1.15: Aplique operações elementares na matriz

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 4 & 6 \\ 3 & 5 & 6 \\ 4 & 2 & 1 \end{bmatrix}$$

De modo a transformá-la na matriz identidade.

$$\begin{bmatrix} 2 & 4 & 6 \\ 3 & 5 & 6 \\ 4 & 2 & 1 \end{bmatrix} \frac{1}{2}L_1 \to L_1 \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 5 & 6 \\ 4 & 2 & 1 \end{bmatrix} \begin{matrix} (-3)L_1 + L_2 \to L_2 \\ (-4)L_1 + L_3 \to L_3 \end{matrix} \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & -1 & -3 \\ 0 & -6 & -11 \end{bmatrix} (-1)L_2 \to L_2$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 3 \\ 0 & -6 & -11 \end{bmatrix} \begin{matrix} (-2)L_2 + L_1 \to L_1 \\ (+6)L_2 + L_3 \to L_3 \end{matrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & -3 \\ 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 7 \end{bmatrix} \frac{1}{7}L_3 \to L_3$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & -3 \\ 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{matrix} (+3)L_3 + L_1 \to L_1 \\ (-3)L_3 + L_2 \to L_2 \end{matrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Exercício 1.14: Faça o mesmo para a matriz:

$$B = \begin{bmatrix} 0 & -1 & -1 & 1 \\ 2 & 2 & 2 & 2 \\ 2 & 4 & 1 & -2 \\ 3 & 1 & -2 & 2 \end{bmatrix}$$

Exercício 1.15: Quais matrizes abaixo estão na forma escalonada?

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \qquad B = \begin{bmatrix} 0 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & -3 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \qquad C = \begin{bmatrix} 0 & 1 & -3 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 2 \end{bmatrix}$$

$$D = \begin{bmatrix} 0 & 1 & -3 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

1.5.2 Posto de uma matriz

Definição: Dada uma matriz $A_{m\times n}$, seja $B_{m\times n}$ a matriz em forma escada da matriz *A*. O posto de *A*, denotado por $p(A)$ é o número de linhas não nulas de *B*.

Exemplo 1.16: A matriz *A* do exemplo 1.15 tem posto 3, ou seja, $p(A)=3$. Já a matriz *B* do exercício 1.12 tem posto 4, isto é, $p(B)=4$

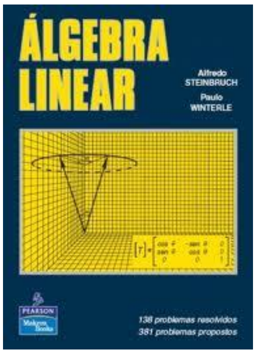
Exercício 1.16 Encontre o posto da matriz

$$A=\begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 3 & 5 \\ 1 & -2 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

Exercício 1.17 Aplique operações elementares para transformar as matrizes abaixo na matriz identidade.

$$A=\begin{bmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 4 & 2 & 2 \\ 2 & 5 & 3 \end{bmatrix} \qquad B=\begin{bmatrix} 12 & 7 \\ 5 & 3 \end{bmatrix} \qquad C=\begin{bmatrix} -2 & -1 & 0 & 2 \\ 3 & 1 & -2 & -2 \\ -4 & -1 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & -1 & -2 \end{bmatrix}$$

LISTA DE EXERCÍCIOS - CAPÍTULO 1



STEINBRUCH, A.; WINTERLE, P. *Álgebra Linear*. 2 ed. São Paulo: McGraw-Hill, 1987.

Pg 393 a 398: 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12, 13, 14, 15, 16, 17, 18, 19, 20, 21, 22, 23, 24, 25, 26, 27, 28.

Pg 414 a 420: 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12.

Pg 498 e 499: 1, 2 e 3.