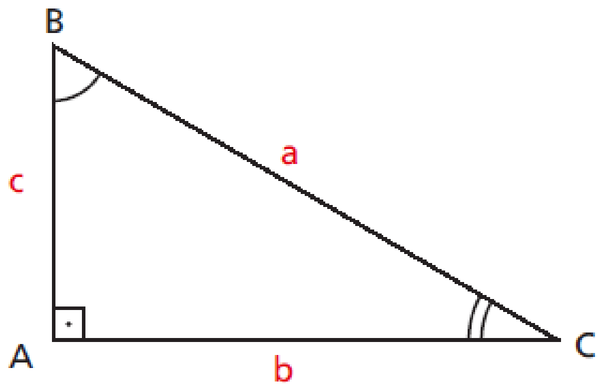
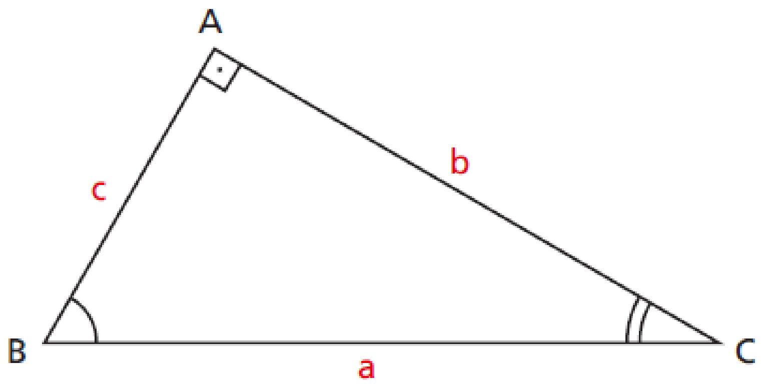
8- Trigonometria e Funções Trigonométricas

Trigonometria no Triângulo Retângulo

Triângulo Retângulo

Um triângulo é **retângulo** quando um de seus ângulos internos é reto.





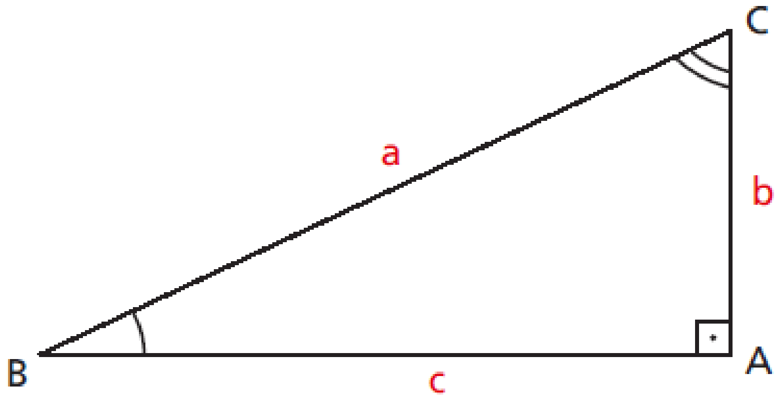
Nomenclatura:
- a = hipotenusa
- b e c = catetos

Teorema de Pitágoras:
O quadrado da hipotenusa é igual a soma dos quadrados dos catetos, ou seja,

$$\boxed{a^2 = b^2 + c^2.}$$

Razões trigonométricas no triângulo retângulo

Considere o triângulo retângulo a seguir.



Fixado um ângulo agudo $\hat{B}$, temos as relações a seguir:

$$sen\ \hat{B} = \frac{cateto\ oposto\ a\ \hat{B}}{hipotenusa} = \frac{\mathrm{b}}{\mathrm{a}}$$

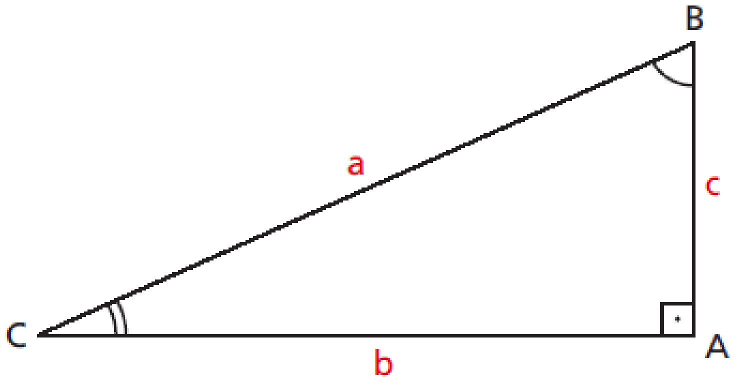
$$\cos \hat{B} = \frac{cateto\ adjacente\ a\ \hat{B}}{hipotenusa} = \frac{\mathrm{c}}{\mathrm{a}}$$

$$\mathrm{tg}\, \hat{B} = \frac{cateto\ oposto\ a\ \hat{B}}{cateto\ adjacente\ a\ \hat{B}} = \frac{\mathrm{b}}{c}$$

Observações:

(1) Seno, Cosseno e Tangente de ângulos complementares

Consideremos os ângulos $\hat{A}, \hat{B}$ e $\hat{C}$ de um triângulo retângulo.



$$\begin{cases} \hat{A} + \hat{B} + \hat{C} = 180° \\ \hat{A} = 90° \end{cases} \Rightarrow \begin{array}{l} \hat{B} + \hat{C} = 90° \\ (\hat{B} \text{ e } \hat{C} \text{ são complementares}) \end{array}$$

Temos que:

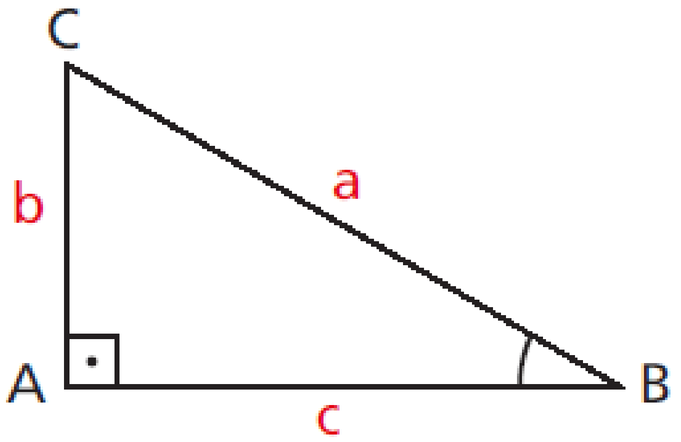
(i) $sen\ \hat{B} = \frac{b}{a}$ e $cos\ \hat{C} = \frac{b}{a} \Rightarrow \boxed{sen\ \hat{B} = cos\ \hat{C}}$

(ii) $sen\ \hat{C} = \frac{c}{a}$ e $cos\ \hat{B} = \frac{c}{a} \Rightarrow \boxed{sen\ \hat{C} = cos\ \hat{B}}$

(iii) $tg\ \hat{B} = \frac{b}{c}$ e $tg\ \hat{C} = \frac{c}{b} \Rightarrow \boxed{tg\ \hat{B} = \frac{1}{tg\ \hat{C}}}$ e $\boxed{tg\ \hat{C} = \frac{1}{tg\ \hat{B}}}$

(2) Relação entre seno, cosseno e tangente

Considere o triângulo retângulo a seguir.



Vimos que:

- $sen\ \hat{B} = \frac{b}{a}$
- $cos\ \hat{B} = \frac{c}{a}$
- $tg\ \hat{B} = \frac{b}{c}$

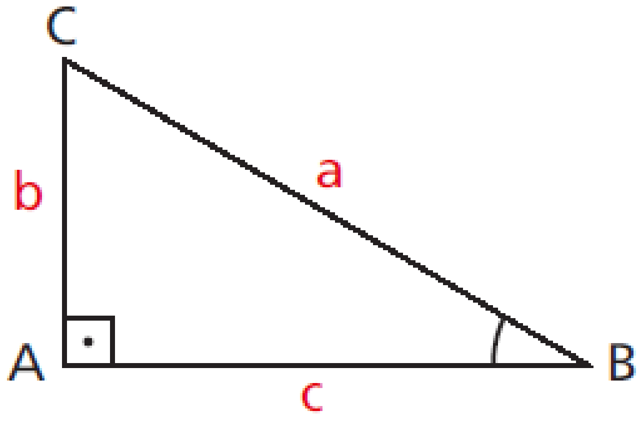
Logo,

$$\frac{sen\ \hat{B}}{\cos\ \hat{B}} = \frac{\frac{b}{a}}{\frac{c}{a}} = \frac{b}{a} \cdot \frac{a}{c} = \frac{b}{c} = \text{tg}\ \hat{B}.$$

Desse modo, obtemos a relação: $\boxed{\text{tg}\ \hat{B} = \frac{sen\hat{B}}{\cos\ \hat{B}}.}$

Relação Fundamental da Trigonometria

Considere o triângulo retângulo ABC da figura a seguir.



Temos que:

$$sen\,\hat{B} = \frac{b}{a} \Rightarrow b = a \cdot sen\,\hat{B}$$

$$\cos\hat{B} = \frac{c}{a} \Rightarrow c = a \cdot \cos\hat{B}$$

Pelo Teorema de Pitágoras, segue que:

$$a^2 = b^2 + c^2 \Rightarrow a^2 = \left(a \cdot sen\,\hat{B}\right)^2 + \left(a \cdot \cos\hat{B}\right)^2$$

$$\Rightarrow a^2 = a^2 \cdot sen^2\,\hat{B} + a^2 \cdot \cos^2\hat{B}$$

$$\Rightarrow 1 = sen^2\,\hat{B} + \cos^2\hat{B}$$

Portanto, obtemos a relação fundamental

$$\boxed{sen^2\,\hat{B} + \cos^2\hat{B} = 1.}$$

Exemplos

(1) Considere o triângulo retângulo ao lado.
Calcule:

(a) $sen\ \hat{B}$

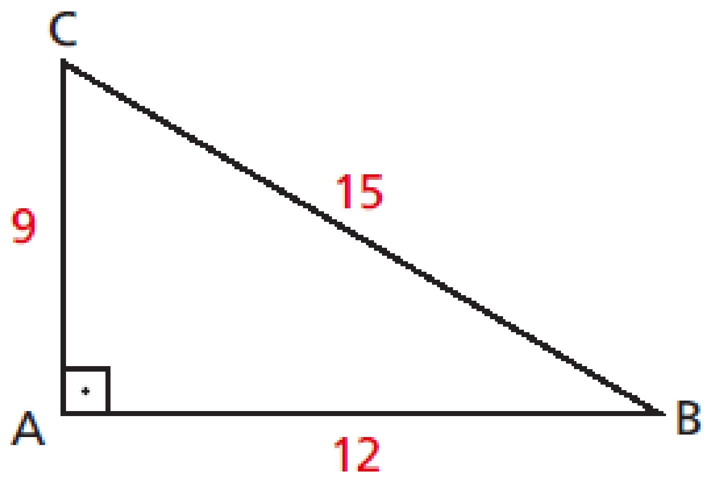
(b) $cos\ \hat{B}$

(c) $tg\ \hat{B}$

(d) $sen\ \hat{C}$

(e) $cos\ \hat{C}$

(f) $tg\ \hat{C}$



(2) Num triângulo ABC reto em A, determine as medidas dos catetos, sabendo que a hipotenusa vale 50 e $sen\ \hat{B} = \frac{4}{5}$.

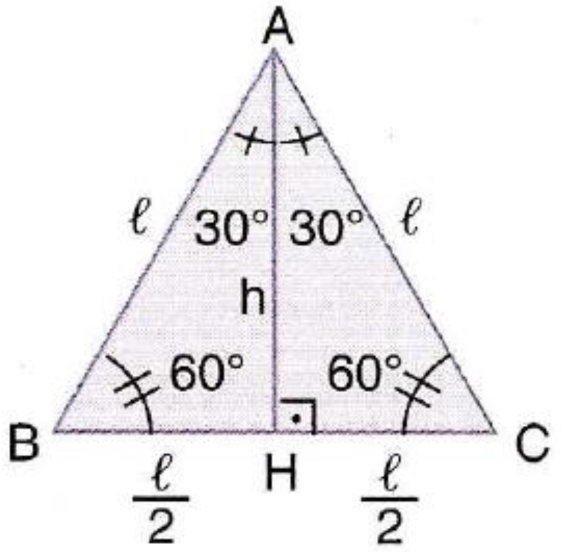
(3) Sendo x um ângulo agudo tal que $sen\ x = \frac{4}{5}$, determine $\mathrm{tg}\, x$.

Razões trigonométricas dos Ângulos Notáveis

Vamos obter as razões trigonométricas dos ângulos de $30°, 45°$ e $60°$.

(1) Ângulos de 30° e 60°

Considere o triângulo equilátero ABC de lado l e altura $AH = h$.



Temos que:

- $BH = HC = \frac{l}{2}$ e $B\hat{A}H = C\hat{A}H = 30°$
- Pelo Teorema de Pitágoras no triângulo AHC, obtemos:

$$h^2 + \left(\frac{l}{2}\right)^2 = l^2 \Rightarrow h^2 = l^2 - \frac{l^2}{4} \Rightarrow h^2 = \frac{3l^2}{4} \Rightarrow h = \frac{l\sqrt{3}}{2}.$$

Desse modo:

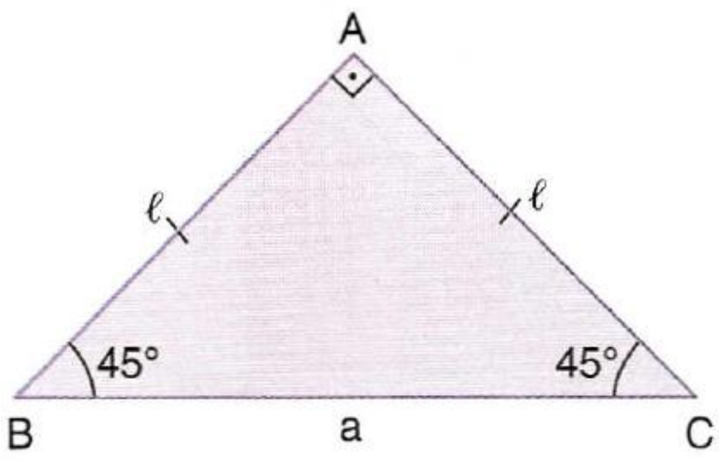
- $sen\ 30° = \frac{\frac{l}{2}}{l} = \frac{1}{2}$
- $\cos 30° = \frac{h}{l} = \frac{\frac{l\sqrt{3}}{2}}{l} = \frac{\sqrt{3}}{2}$
- $\text{tg}\ 30° = \frac{\frac{l}{2}}{h} = \frac{\frac{l}{2}}{\frac{l\sqrt{3}}{2}} = \frac{l}{2} \cdot \frac{2}{l\sqrt{3}} = \frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}}{3}$

$\Rightarrow$

- $sen\ 60° = \frac{\sqrt{3}}{2}$
- $\cos 60° = \frac{1}{2}$
- $\text{tg}\ 60° = \sqrt{3}$

(2) Ângulo de 45°

Considere o triângulo retângulo isósceles ABC de catetos l e hipotenusa a.



Pelo Teorema de Pitágoras:

$$a^2 = l^2 + l^2 \Rightarrow a^2 = 2l^2 \Rightarrow a = l\sqrt{2}.$$

Assim:

- $sen\ 45° = \frac{l}{l\sqrt{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}$
- $\cos 45° = \frac{l}{l\sqrt{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}$
- $\text{tg}\, 45° = \frac{l}{l} = 1$

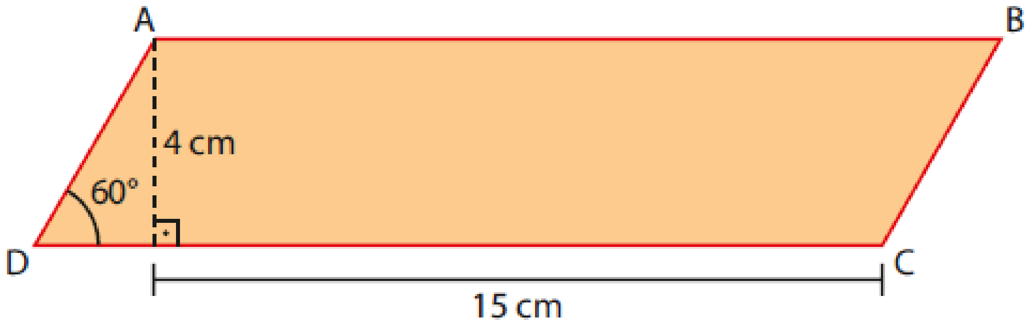
Em resumo:

Ângulo / Razão	30°	45°	60°
sen	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$
cos	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$
tg	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	1	$\sqrt{3}$

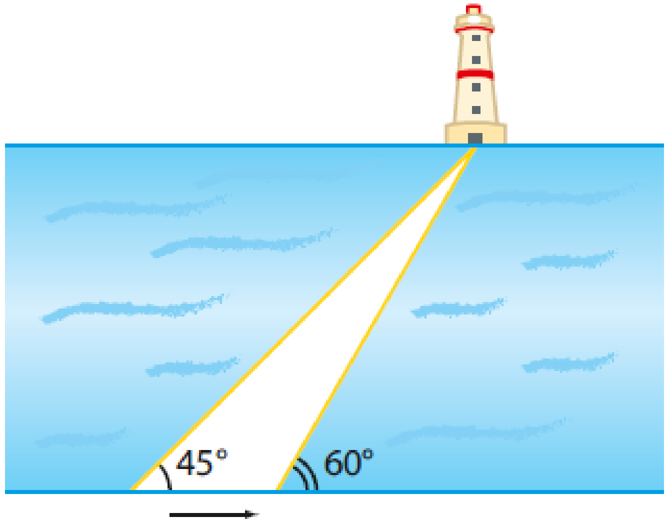
Exercícios

(1) Uma escada de 6 m está apoiada em uma parede e forma com o solo um ângulo de 60°. Qual é a altura atingida pelo ponto mais alto da escada? Qual é a distância do pé da escada à parede?

(2) Determine o perímetro do paralelogramo $ABCD$.



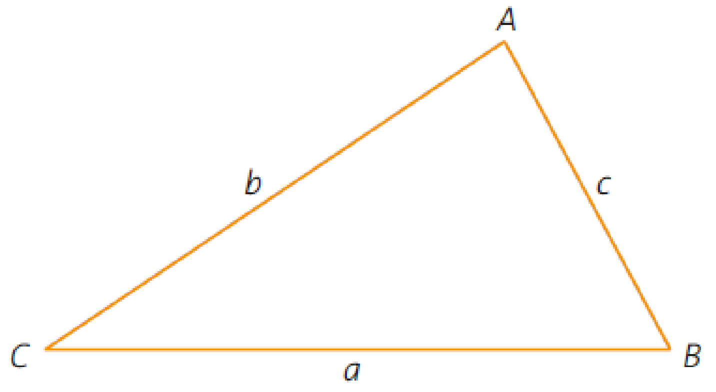
(3) Em um trecho de rio em que as margens são paralelas, um morador, à beira de uma das margens, avista um farol, situado à beira da outra margem, sob um ângulo de 45°. Caminhando 1400 m no sentido indicado pela seta na figura, ele passa a mirar o farol sob um ângulo de 60°. Obtenha a largura do rio nesse trecho.



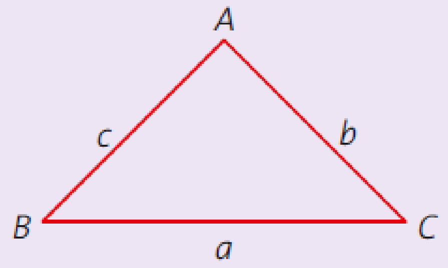
Trigonometria em triângulos quaisquer

Lei dos Senos: Em qualquer triângulo ABC, as medidas dos lados são proporcionais aos senos dos ângulos opostos, ou seja,

$$\frac{a}{sen\ \hat{A}} = \frac{b}{sen\ \hat{B}} = \frac{c}{sen\ \hat{C}}.$$



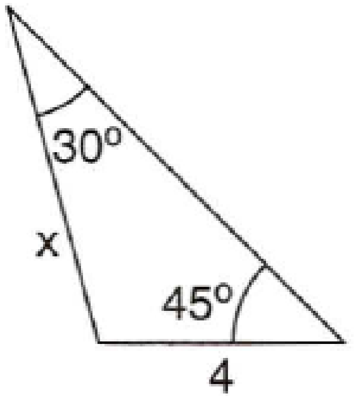
Lei dos Cossenos: Em qualquer triângulo ABC, o quadrado da medida de um lado é igual à soma dos quadrados das medidas dos outros dois lados menos duas vezes o produto das medidas desses lados pelo cosseno do ângulo que eles formam.



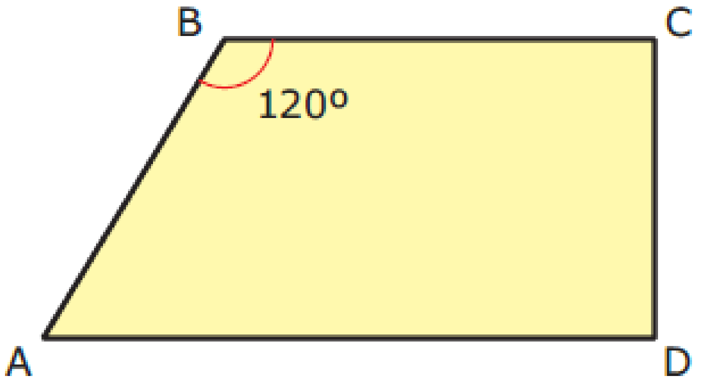
- $a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cdot \cos \hat{A}$
- $b^2 = a^2 + c^2 - 2ac \cdot \cos \hat{B}$
- $c^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cdot \cos \hat{C}$

Exemplos

(1) Calcule o valor de x na figura a seguir.



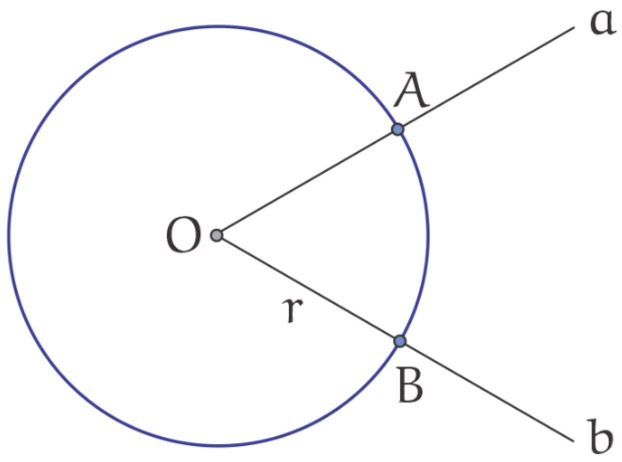
(2) No quadrilátero $ABCD$ a seguir sabe-se que $AB = 1$ cm, $AD = 2$ cm, o ângulo $A\hat{B}C$ mede $120°$ e que o segmento $\overline{CD}$ é perpendicular aos segmentos $\overline{AD}$ e $\overline{BC}$. Determine o comprimento do segmento $\overline{BD}$.



Arcos e Ângulos

Medida de Ângulos

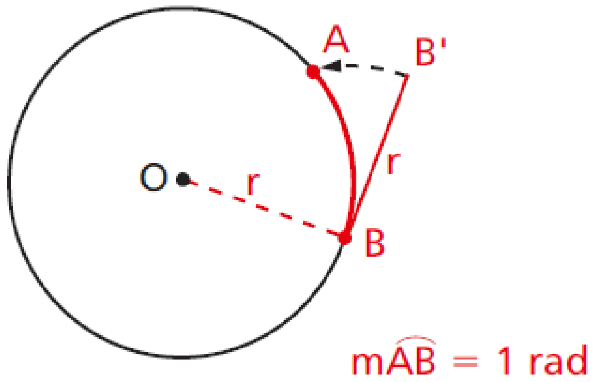
Dado um ângulo $a\hat{O}b$, consideremos uma circunferência de centro O e raio r. Sejam A e B os pontos onde os lados do ângulo $a\hat{O}b$ intersectam a circunferência.



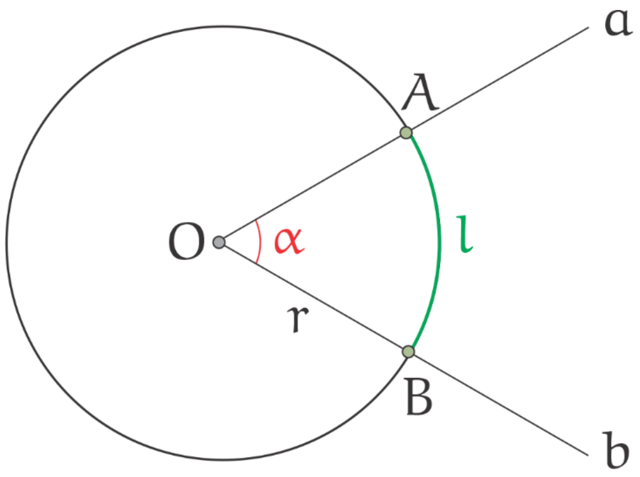
Deste modo a cada ângulo $a\hat{O}b$ corresponde um arco de circunferência $\overset{\frown}{AB}$ e vice-versa.
Convencionando que a um ângulo central unitário corresponde um arco unitário, segue que as medidas do ângulo $a\hat{O}b$ e do arco correspondente $\overset{\frown}{AB}$ são iguais. Assim, definimos a medida de um ângulo como sendo a medida do seu arco correspondente.

As unidades de medida de um arco (ou de um ângulo) mais utilizadas são o grau e o radiano:

- O **grau** (°) é um arco unitário igual a $\frac{1}{360}$ da circunferência que contém o arco a ser medido.
- O **radiano** (*rad*) é um arco unitário cujo comprimento é igual ao raio da circunferência que contém o arco a ser medido.



Quando queremos medir em radianos um ângulo $a\hat{O}b$, devemos construir uma circunferência de centro O e raio r e verificar quantos radianos mede o arco correspondente $\widehat{AB}$, isto é, calcular o quociente entre o comprimento l do arco $\widehat{AB}$ pelo raio r da circunferência.



$$\boxed{\alpha = \frac{l}{r} \text{ (em radianos)}}$$

Por exemplo, se um ângulo central $a\hat{O}b$ determina numa circunferência de raio $r = 5$ cm e um arco $\widehat{AB}$ de comprimento $l = 8$ cm, então a medida de $a\hat{O}b$ é

$$\alpha = \frac{l}{r} = \frac{8}{5} = 1{,}6 \text{ rad.}$$

Como o comprimento de uma circunferência de raio r é $2\pi r$, então, há na volta completa 2π radianos. Assim, podemos estabelecer a correspondência entre graus e radianos:

$$\boxed{2\pi \text{ rad} = 360° \quad \text{ou} \quad \pi \text{ rad} = 180°.}$$

Exercícios

(1) Calcule o comprimento de um arco $\widehat{AB}$ definido em uma circunferência de raio 6 cm por um ângulo central $A\hat{O}B$ de medida 1,5 rad.

(2) Um atleta *A* desenvolve, numa pista circular de raio 500 m, a velocidade constante de 8 km/h. Determine, em radianos, a medida do arco descrito, bem como seu comprimento, após 15 minutos de percurso.

(3) Exprima em graus:

a) $\frac{\pi}{6}$ rad b) $\frac{2\pi}{3}$ rad c) $\frac{5\pi}{6}$ rad d) $\frac{11\pi}{3}$ rad e) $\frac{3\pi}{5}$ rad

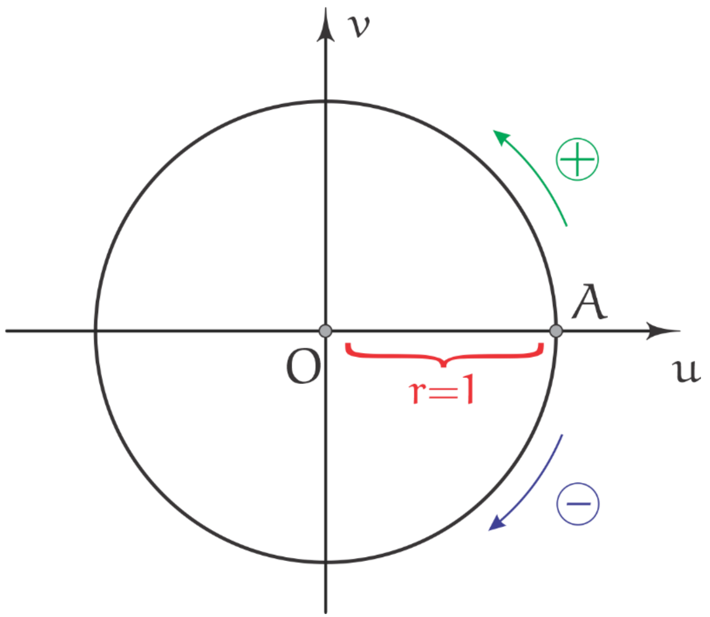
(4) Exprima em radianos:

a) 60° b) 36° c) 135° d) 240° e) 270°

Circunferência Trigonométrica

Tomemos sobre um plano um sistema cartesiano ortogonal uOv. Consideremos a circunferência λ de centro O e raio $r = 1$.

Vamos associar a cada número real x um único ponto P da circunferência λ do seguinte modo:



(**i**) Se $x = 0$, então P coincide com o ponto $A = (1,0)$.

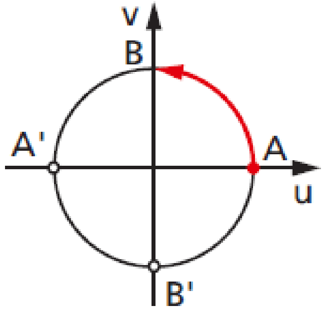
(**ii**) Se $x > 0$, então realizamos a partir de A um percurso de comprimento x, no sentido anti-horário, e marcamos P como ponto final do percurso.

(**iii**) Se $x < 0$, então realizamos a partir de A um percurso de comprimento $|x|$, no sentido horário, e marcamos P como ponto final do percurso.

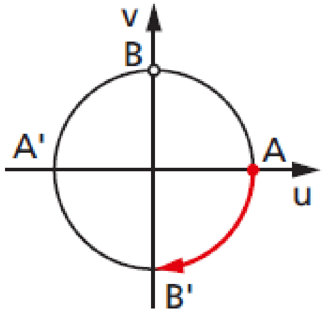
A circunferência λ definida acima, com origem em A, é chamada de **ciclo** ou **circunferência trigonométrica.**

Observe que o comprimento do ciclo trigonométrico é igual a 2π, pois o seu raio é $r = 1$.

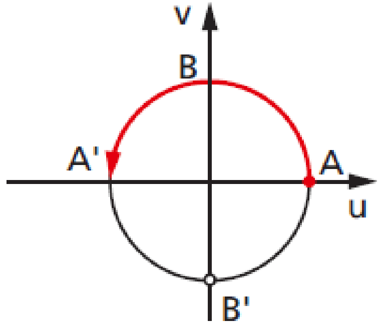
Se o ponto P está associado ao número x, dizemos que P é a imagem de x no ciclo.
Assim, por exemplo, temos:



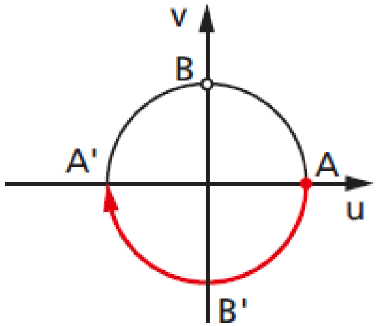
a imagem de $\frac{\pi}{2}$ é B



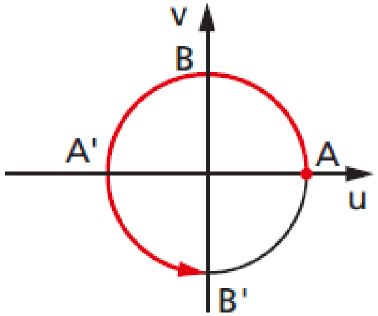
a imagem de $-\frac{\pi}{2}$ é B'



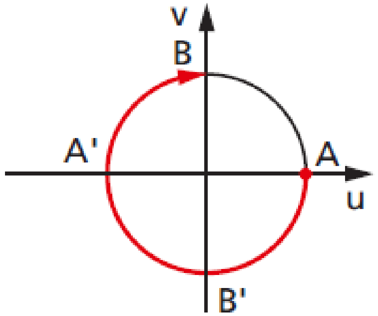
a imagem de π é A'



a imagem de $-\pi$ é A'



a imagem de $\frac{3\pi}{2}$ é B'



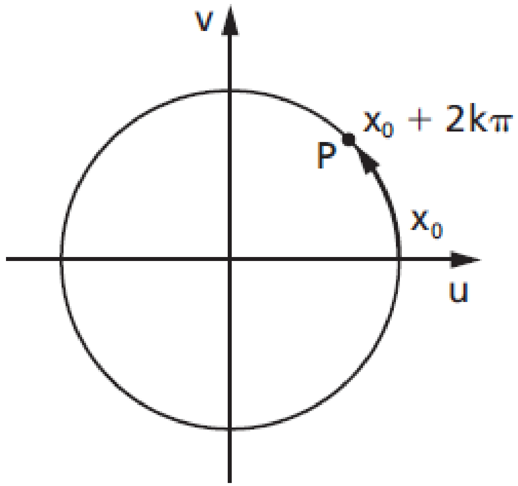
a imagem de $-\frac{3\pi}{2}$ é B

Note que, se P é a imagem do número x_0, então P também é a imagem dos números:

$$x_0,\ x_0 + 2\pi,\ x_0 + 4\pi,\ x_0 + 6\pi,\ \ldots$$

e também de:

$$x_0 - 2\pi,\ x_0 - 4\pi,\ x_0 - 6\pi,\ \ldots\ .$$

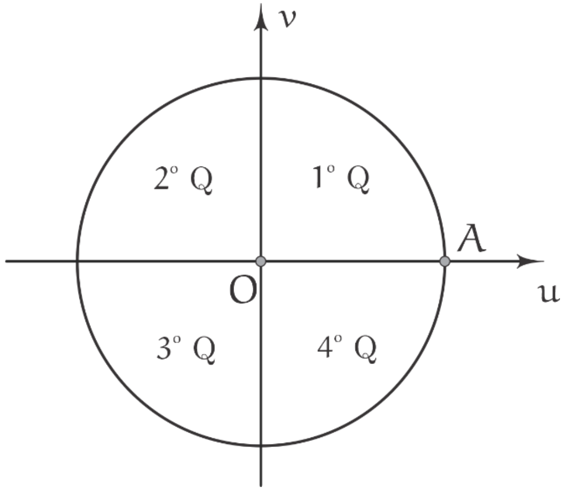


Em resumo, P é imagem dos elementos do conjunto

$$\{x \in \mathbb{R}\colon x = x_0 + 2k\pi, k \in \mathbb{Z}\}.$$

Dois números reais x_1 e x_2 que possuem a mesma imagem no ciclo trigonométrico são chamados de **côngruos**.

Observe também que os eixos coordenados u e v dividem o ciclo trigonométrico em quatro partes, denominadas **quadrantes.** Assim, dado $x \in \mathbb{R}$, dizemos que:



$$x \text{ está no } 1^{\text{o}} \text{ quadrante} \Leftrightarrow 0 + 2k\pi \leq x \leq \tfrac{\pi}{2} + 2k\pi, \text{ com } k \in \mathbb{Z};$$

$$x \text{ está no } 2^{\text{o}} \text{ quadrante} \Leftrightarrow \tfrac{\pi}{2} + 2k\pi \leq x \leq \pi + 2k\pi, \text{ com } k \in \mathbb{Z};$$

$$x \text{ está no } 3^{\text{o}} \text{ quadrante} \Leftrightarrow \pi + 2k\pi \leq x \leq \tfrac{3\pi}{2} + 2k\pi, \text{ com } k \in \mathbb{Z};$$

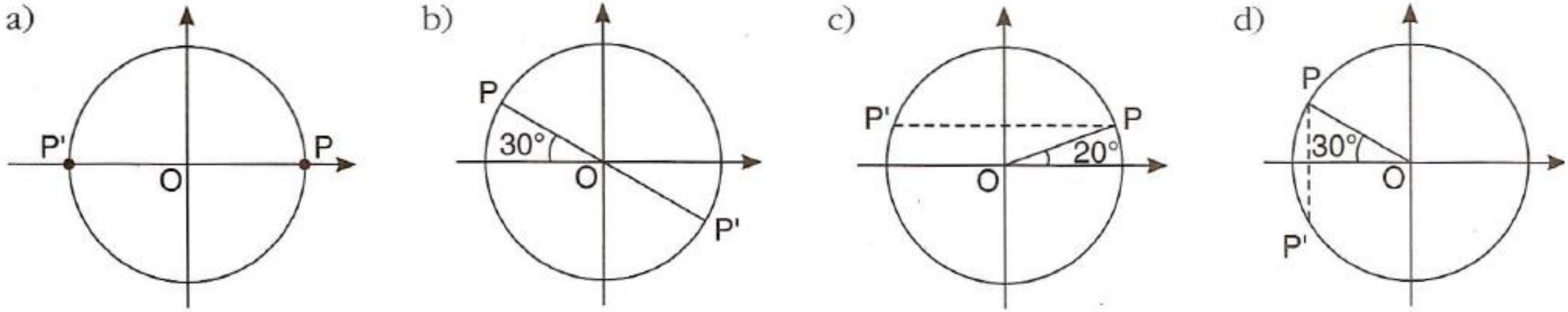
$$x \text{ está no } 4^{\text{o}} \text{ quadrante} \Leftrightarrow \tfrac{3\pi}{2} + 2k\pi \leq x \leq 2\pi + 2k\pi, \text{ com } k \in \mathbb{Z}.$$

Exercícios

(1) Construa um ciclo trigonométrico e marque os pontos correspondentes aos números reais 0, $\frac{\pi}{3}$, $\frac{2\pi}{3}$, $\frac{3\pi}{4}$, $\frac{5\pi}{4}$, $\frac{7\pi}{6}$ e $\frac{11\pi}{6}$.

(2) A que quadrante pertence o ponto associado a cada número real a seguir: $\frac{\pi}{6}$, $\frac{5\pi}{6}$, $\frac{5\pi}{3}$, $\frac{4\pi}{3}$, $\frac{3\pi}{5}$, $\frac{6\pi}{7}$, $\frac{13\pi}{6}$, $\frac{15\pi}{4}$, $\frac{2\pi}{5}$, $\frac{5\pi}{4}$ e 5?

(3) Nas figuras abaixo aparecem os pontos P e P' como extremidades dos arcos α. Apresente a expressão geral de α para cada um desses casos.



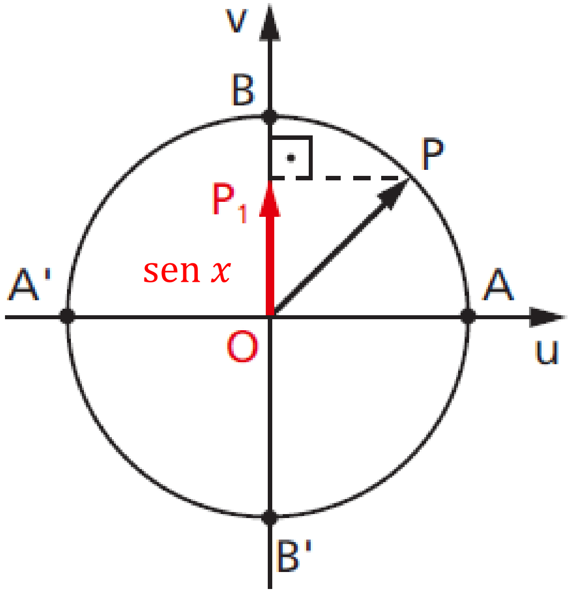
Funções Trigonométricas

Função Periódica

Um função $f\colon X \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ é **periódica** quando existe um número positivo p tal que $f(x+p) = f(x)$, para qualquer $x \in X$. O menor valor de p é chamada de **período** de f.

Função Seno

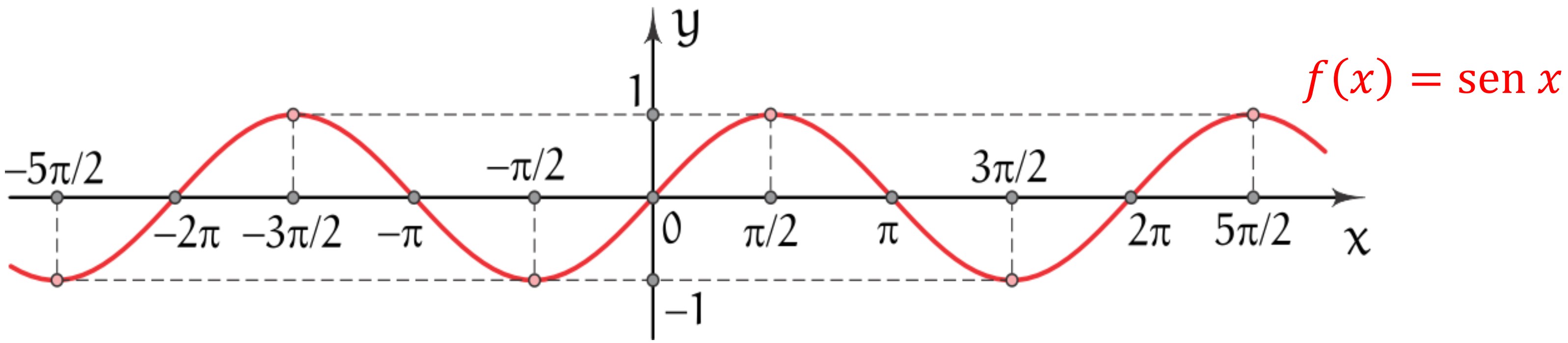
Dado um número real x, seja P sua imagem no ciclo trigonométrico. Denominamos **seno** de x a ordenada $\overline{OP_1}$ do ponto P em relação ao sistema uOv, e indicamos por $\operatorname{sen} x$.



Definimos a **função seno** como a função f que associa a cada número real x o número real $y = \operatorname{sen} x$ e indicamos por:

$$f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R} \text{ definida por } f(x) = \operatorname{sen} x.$$

Gráfico da função seno



Propriedades:

(1) $D_f = \mathbb{R}$

(2) $Im(f) = [-1{,}1]$

(3) Positiva: 1º e 2º quadrantes
Negativa: 3º e 4º quadrantes

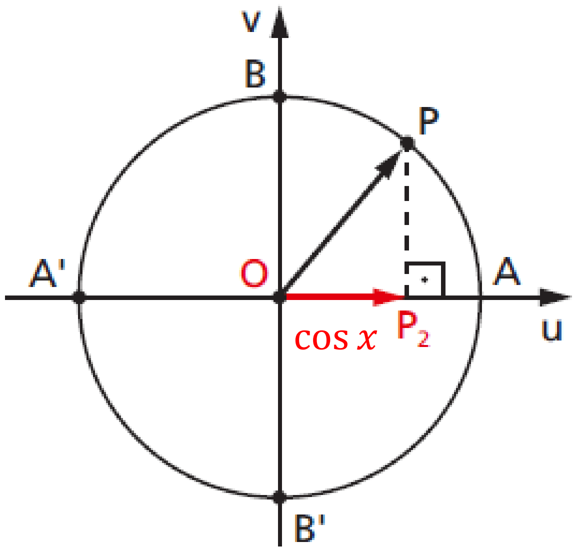
(4) Crescente: 1º e 4º quadrantes
Decrescente: 2º e 3º quadrantes

(5) $f(x) = \text{sen}\, x$ é periódica de período 2π, ou seja, $\text{sen}(x + 2\pi) = \text{sen}(x), \forall\, x \in \mathbb{R}$

(6) $f(x) = \text{sen}\, x$ é ímpar, isto é, $\text{sen}(-x) = -\text{sen}(x), \forall\, x \in \mathbb{R}$

Função Cosseno

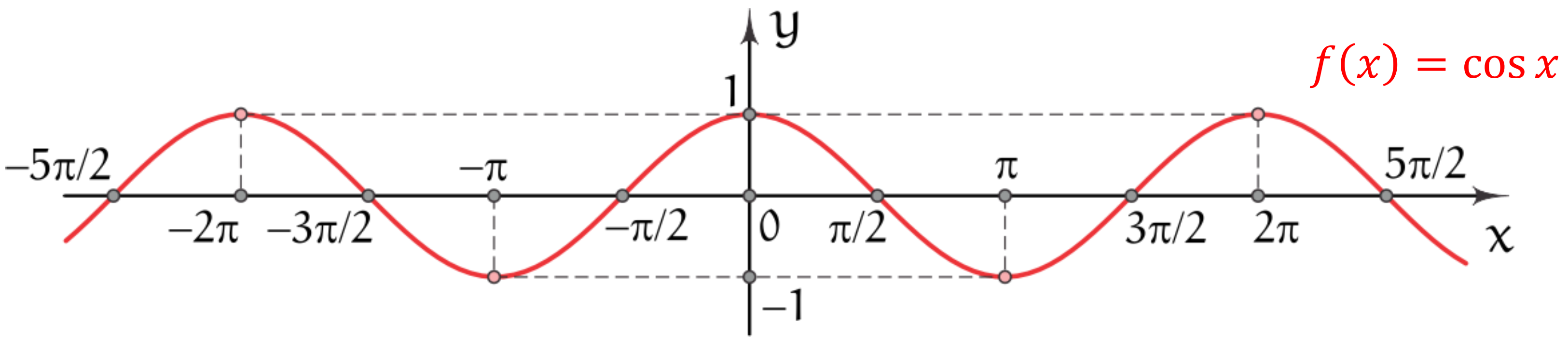
Dado um número real x, seja P sua imagem no ciclo trigonométrico.
Denominamos **cosseno** de x a abscissa $\overline{OP_2}$ do ponto P em relação ao sistema uOv, e indicamos por $\cos x$.



Definimos a **função cosseno** como a função f que associa a cada número real x o número real $y = \cos x$ e indicamos por:

$$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R} \text{ definida por } f(x) = \cos x.$$

Gráfico da função cosseno



Propriedades:

(1) $D_f = \mathbb{R}$

(2) $Im(f) = [-1{,}1]$

(3) Positiva: 1º e 4º quadrantes
Negativa: 2º e 3º quadrantes

(4) Crescente: 3º e 4º quadrantes
Decrescente: 1º e 2º quadrantes

(5) $f(x) = \cos x$ é periódica de período 2π, ou seja, $\cos(x + 2\pi) = \cos(x)$, $\forall\, x \in \mathbb{R}$

(6) $f(x) = \cos x$ é par, isto é, $\cos(-x) = \cos(x)\,, \forall\, x \in \mathbb{R}$

Função Tangente

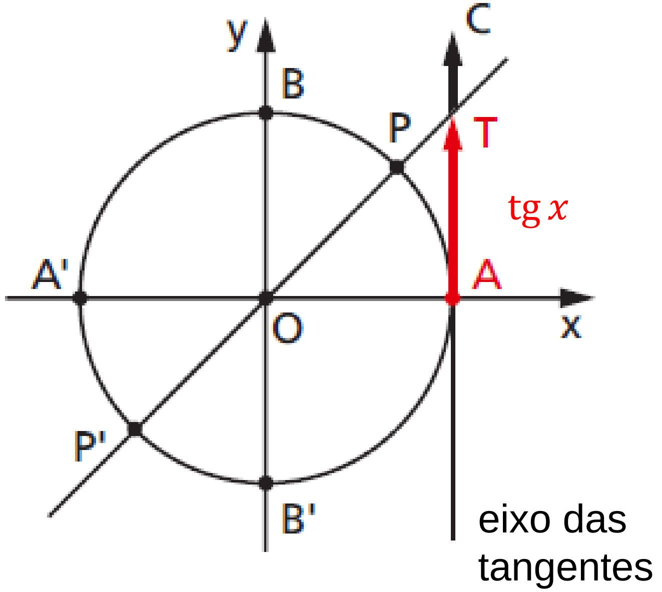
Dado um número real x, em que $x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z}$.

Seja P sua imagem no ciclo trigonométrico. Considere a reta $\overleftrightarrow{OP}$ e seja T sua intersecção com o eixo das tangentes. Denominamos **tangente** de x a medida do segmento $\overline{AT}$, e indicamos por $\operatorname{tg} x$.

Definimos a **função tangente** como a função f que associa a cada número real x, com $x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z}$, o número real $y = \operatorname{tg} x$ e indicamos por:

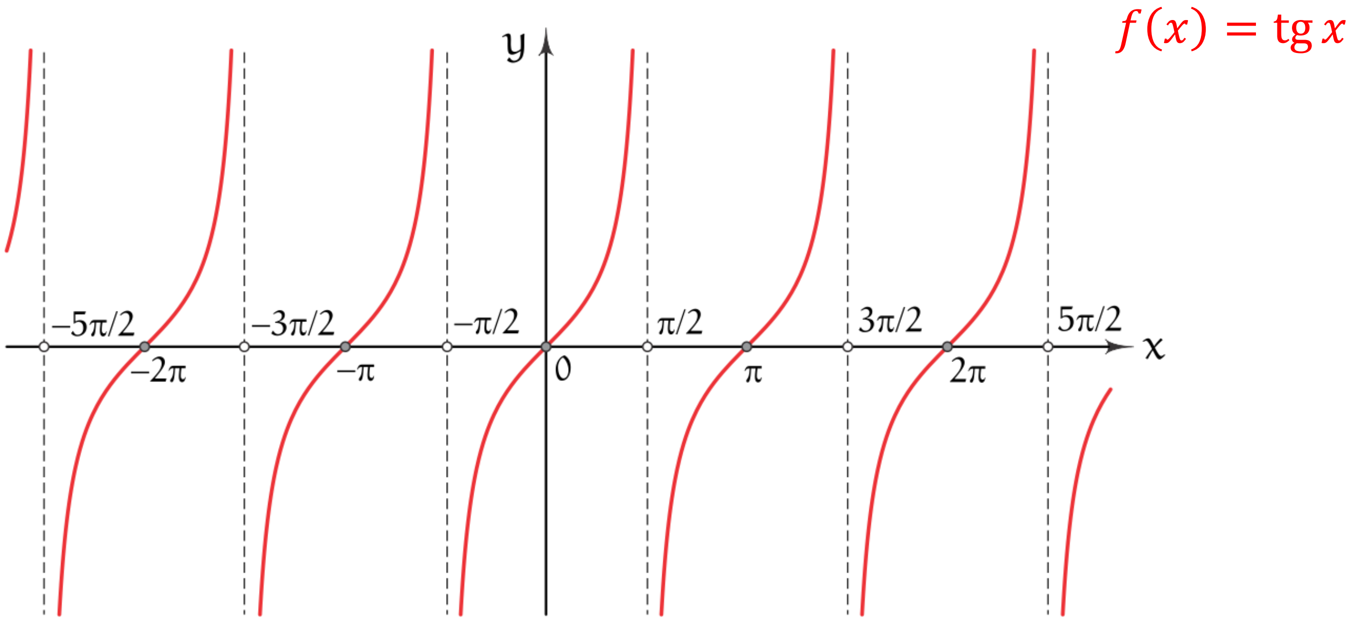
$$f: X \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R} \text{ definida por } f(x) = \operatorname{tg} x,$$

$$X = \left\{x \in \mathbb{R}: x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z}\right\}.$$



Observação: Se $x = \frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z}$, então a reta $\overleftrightarrow{OP}$ é paralela ao eixo das tangentes. Neste caso, não existe intersecção entre as duas retas e, logo, a tangente não está definida.

Gráfico da função tangente



Propriedades:

(**1**) $D_f = \left\{x \in \mathbb{R}\colon x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z}\right\}$

(**2**) $Im(f) = \mathbb{R}$

(**3**) Positiva: 1º e 3º quadrantes
Negativa: 2º e 4º quadrantes

(**4**) Sempre crescente

(**5**) $tg(x)$ é periódica de período π, ou seja, $tg(x+\pi) = tg(x), \forall\, x \in D_f$

(**6**) $tg(x)$ é ímpar, isto é, $tg(-x) = -tg(x)$, $\forall\, x \in D_f$

Exercícios

(**1**) Determine o período, a imagem e faça o gráfico das funções dadas a seguir.

(**a**) $f(x) = 2sen(x)$

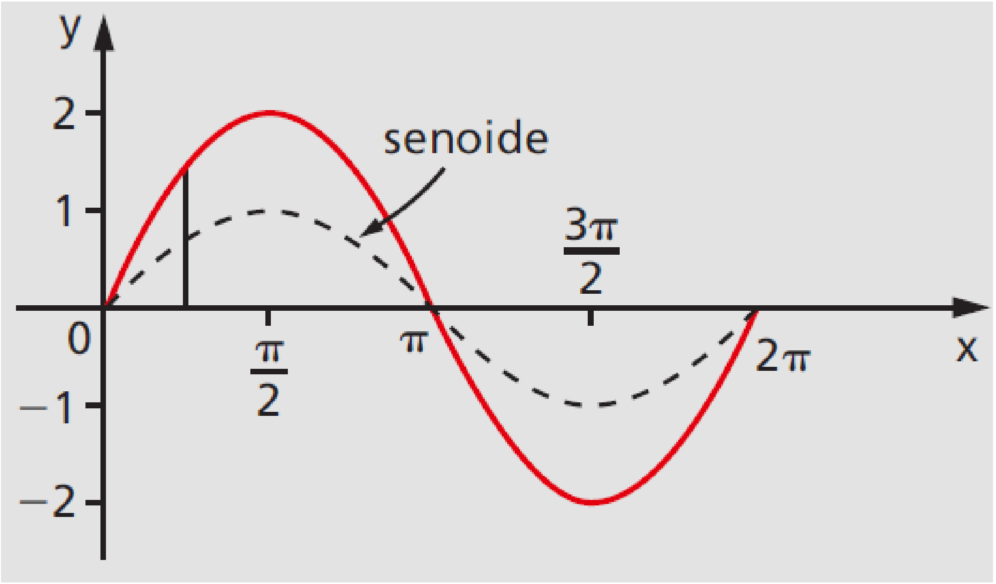
Solução: Vamos construir uma tabela em três etapas:
1º) atribuímos valores a x;
2º) associamos a cada x o valor de $\operatorname{sen} x$;
3º) multiplicamos $\operatorname{sen} x$ por 2.

x	sen x	y
0		
$\frac{\pi}{2}$		
π		
$\frac{3\pi}{2}$		
2π		

x	sen x	y
0	0	
$\frac{\pi}{2}$	1	
π	0	
$\frac{3\pi}{2}$	-1	
2π	0	

x	sen x	y
0	0	0
$\frac{\pi}{2}$	1	2
π	0	0
$\frac{3\pi}{2}$	-1	-2
2π	0	0

Assim, obtemos cinco pontos do gráfico de f, representado a seguir.



A imagem e o período de f são dados por:

$Im(f) = [-2, 2]$

$p(f) = 2\pi - 0 = 2\pi.$

(**b**) $f(x) = sen(2x)$

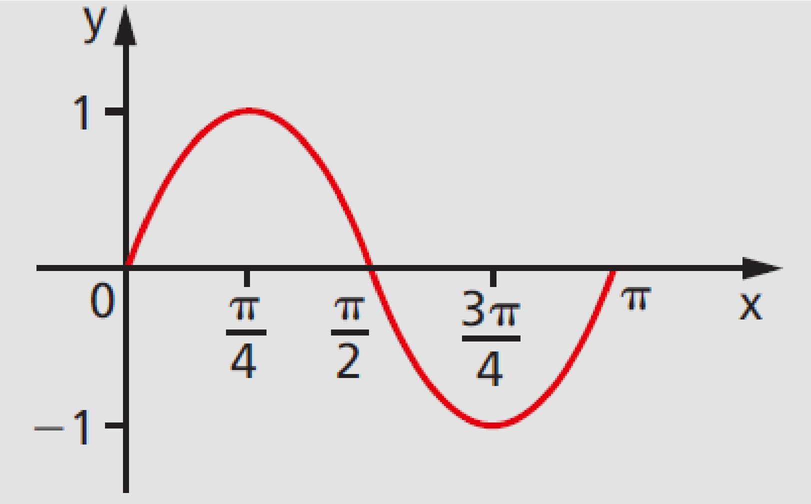
Solução: Vamos construir uma tabela em três etapas:
1º) atribuímos valores a $t = 2x$;
2º) calculamos o valor de $y = \text{sen}\, t$;
3º) calculamos o valor de x.

x	t = 2x	y
	0	
	$\frac{\pi}{2}$	
	π	
	$\frac{3\pi}{2}$	
	2π	

x	t = 2x	y
	0	0
	$\frac{\pi}{2}$	1
	π	0
	$\frac{3\pi}{2}$	-1
	2π	0

x	t = 2x	y
0	0	0
$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{2}$	1
$\frac{\pi}{2}$	π	0
$\frac{3\pi}{4}$	$\frac{3\pi}{2}$	-1
π	2π	0

Assim, obtemos cinco pontos do gráfico de f, representado a seguir.



A imagem e o período de f são dados por:

$Im(f) = [-1, 1]$

$p(f) = \pi - 0 = \pi.$

(**c**) $f(x) = 1 + sen(x)$

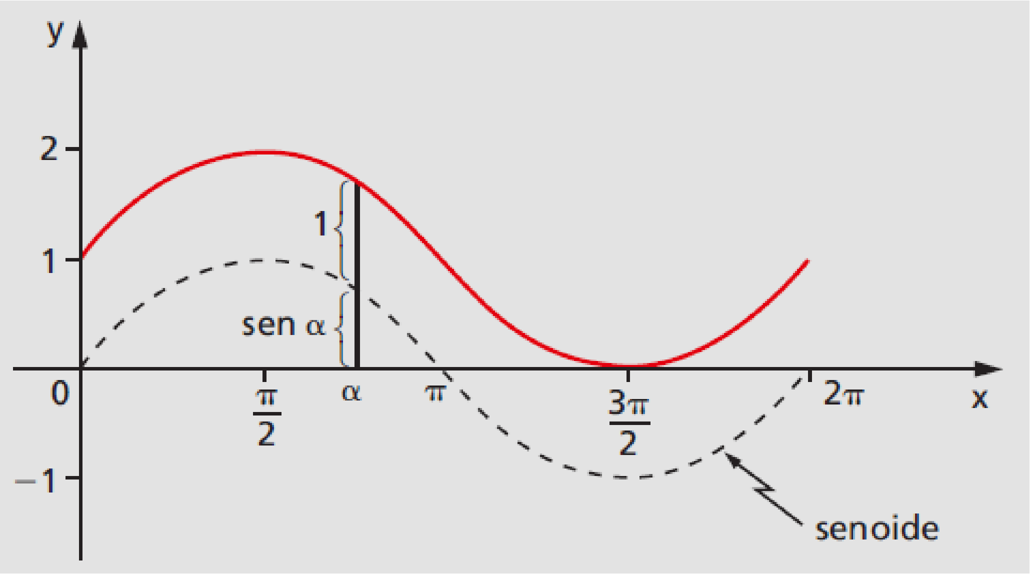
Solução: Vamos construir uma tabela em três etapas:
1º) atribuímos valores a x;
2º) calculamos o valor de $sen\, x$;
3º) calculamos o valor de $y = 1 + sen\, x$.

x	sen x	y
0		
$\frac{\pi}{2}$		
π		
$\frac{3\pi}{2}$		
2π		

x	sen x	y
0	0	
$\frac{\pi}{2}$	1	
π	0	
$\frac{3\pi}{2}$	-1	
2π	0	

x	sen x	y
0	0	1
$\frac{\pi}{2}$	1	2
π	0	1
$\frac{3\pi}{2}$	-1	0
2π	0	1

Assim, obtemos cinco pontos do gráfico de f, representado a seguir.



A imagem e o período de f são dados por:

$Im(f) = [0, 2]$

$p(f) = 2\pi - 0 = 2\pi.$

(**d**) $f(x) = sen\left(x - \frac{\pi}{4}\right)$

Solução: Vamos construir uma tabela em três etapas:

1º) atribuímos valores a $t = x - \frac{\pi}{4}$;

2º) calculamos os valores de $y = sen\left(x - \frac{\pi}{4}\right)$;

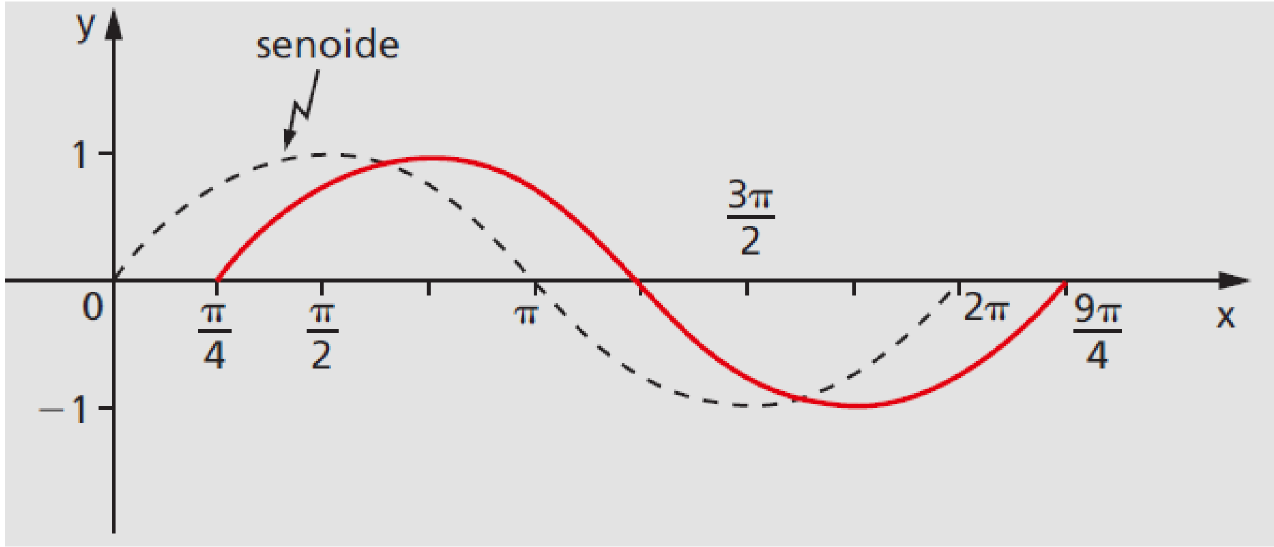
3º) calculamos os valores de x.

x	$t = x - \frac{\pi}{4}$	y
	0	
	$\frac{\pi}{2}$	
	π	
	$\frac{3\pi}{2}$	
	2π	

x	$t = x - \frac{\pi}{4}$	y
	0	0
	$\frac{\pi}{2}$	1
	π	0
	$\frac{3\pi}{2}$	-1
	2π	0

x	$t = x - \frac{\pi}{4}$	y
$\frac{\pi}{4}$	0	0
$\frac{3\pi}{4}$	$\frac{\pi}{2}$	1
$\frac{5\pi}{4}$	π	0
$\frac{7\pi}{4}$	$\frac{3\pi}{2}$	-1
$\frac{9\pi}{4}$	2π	0

Assim, obtemos cinco pontos do gráfico de f, representado a seguir.



A imagem e o período de f são dados por:

$Im(f) = [-1, 1]$

$p(f) = \frac{9\pi}{4} - \frac{\pi}{4} = 2\pi.$

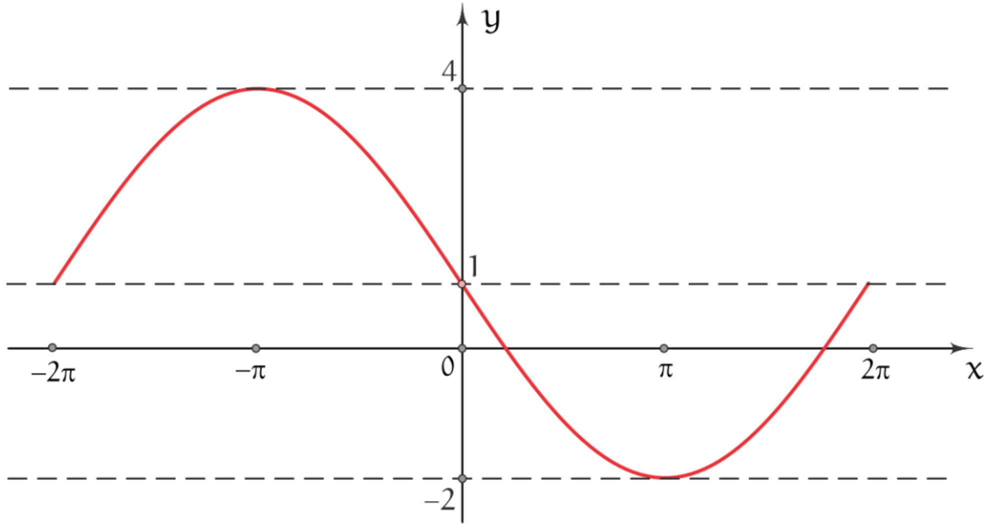
(e) $f(x) = 1 + 3sen\left(\frac{x}{2} + \pi\right)$

Solução:

De modo análogo aos itens anteriores, construímos a tabela ao lado.

x	$t = \frac{x}{2} + \pi$	$sen\ t$	$3sen\ t$	y
-2π	0	0	0	1
$-\pi$	$\frac{\pi}{2}$	1	3	4
0	π	0	0	1
π	$\frac{3\pi}{2}$	-1	-3	-2
2π	2π	0	0	1

Com os cinco pontos obtidos, traçamos o gráfico de f, representado a seguir.



A imagem e o período de f são dados por:

$Im(f) = [-2, 4]$

$p(f) = 2\pi - (-2\pi) = 4\pi.$

(2) Sendo a, b, c e d números reais positivos, determinar a imagem e o período da função $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dada por $f(x) = a + bsen(cx + d)$.

Solução: Fazendo $t = cx + d$, quando x percorre $\mathbb{R}$, t percorre $\mathbb{R}$ (pois a função afim $t = cx + d$ é sobrejetora) e, em consequência, $sen\, t$ percorre o intervalo $[-1, 1]$. Logo, $b \cdot sen\, t$ percorre o intervalo $[-b, b]$ e, então, $y = a + bsen\, t$ percorre o intervalo $[a - b,\ a + b]$. Portanto, a imagem de f é dada por

$$Im(f) = [a - b,\ a + b].$$

Para que t complete um período é necessário que t varie de 0 a 2π, então:

$$t = 0 \Rightarrow cx + d = 0 \Rightarrow x = -\frac{d}{c}\ ,$$

$$t = 2\pi \Rightarrow cx + d = 2\pi \Rightarrow x = \frac{2\pi}{c} - \frac{d}{c}\ ,$$

portanto, o período de f é dado por $p(f) = \left(\frac{2\pi}{c} - \frac{d}{c}\right) - \left(-\frac{d}{c}\right) = \frac{2\pi}{c}$.

Resumo de cada parâmetro em $y = a + bsen(cx + d)$

$a \to$ deslocamento vertical (altera a imagem)
$b \to$ amplitude (altera a imagem)
$c \to$ altera o período
$d \to$ deslocamento horizontal

(3) Utilize **redução ao primeiro quadrante** para obter os valores de:

(a) $sen\frac{3\pi}{4}$

(b) $sen\frac{7\pi}{6}$

(c) $sen\frac{5\pi}{3}$

(d) $cos\frac{2\pi}{3}$

(e) $cos\frac{4\pi}{3}$

(f) $cos\frac{11\pi}{6}$

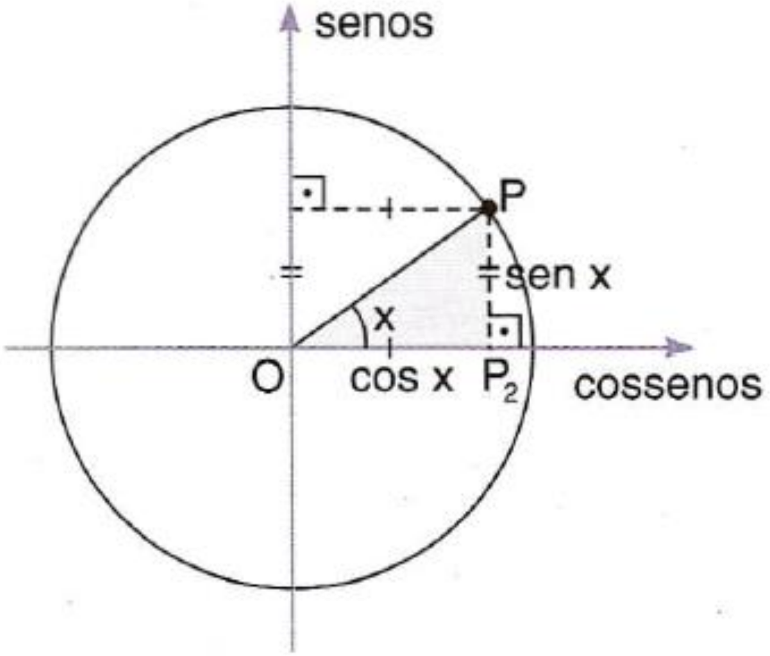
Observações:

(i) *Relação fundamental I*

Seja x um arco do 1º quadrante. Aplicando o teorema de Pitágoras no triângulo OPP_2, temos:

$$(\text{sen } x)^2 + (\cos x)^2 = (OP)^2, \text{ ou seja,}$$

$$\text{sen}^2 x + \cos^2 x = 1 \text{ , válida para } \forall\, x \in \mathbb{R}$$



Mesmo que x não seja arco do 1º quadrante, vale a relação fundamental I.
Assim, dado o seno de um arco qualquer, é possível, por meio da relação fundamental I, obter o cosseno desse mesmo arco, e vice-versa.

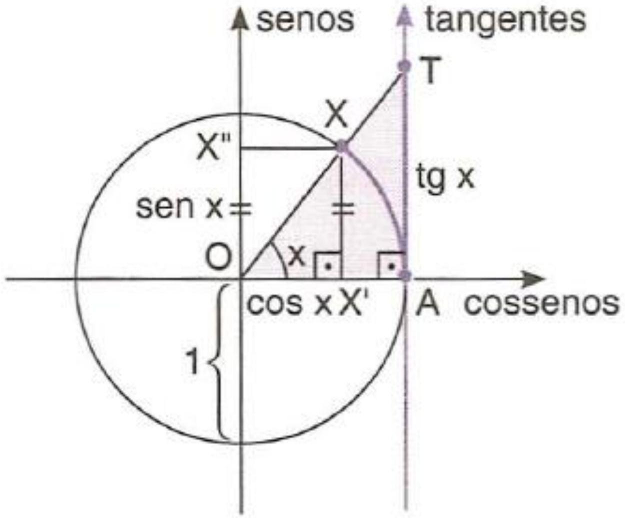
Exemplo:

Dado $\cos x = \frac{5}{13}$, com $\frac{3\pi}{2} < x < 2\pi$, para obter sen x aplicamos a relação fundamental I:

$$\text{sen}^2 x + \left(\frac{5}{13}\right)^2 = 1 \Rightarrow \text{sen}^2 x = 1 - \frac{25}{169} = \frac{144}{169} \Rightarrow \text{sen } x = \pm \frac{12}{13}$$

Como x está no quarto quadrante, temos sen $x < 0$. Assim, podemos escrever sen $x = -\frac{12}{13}$.

(ii) Relação fundamental II



Seja um arco de x rad com extremidade X. Observando a figura, temos:

$$OX' = \cos x$$
$$X'X = \text{sen } x$$
$$AT = \text{tg } x$$
$$OX = 1 (\text{raio})$$

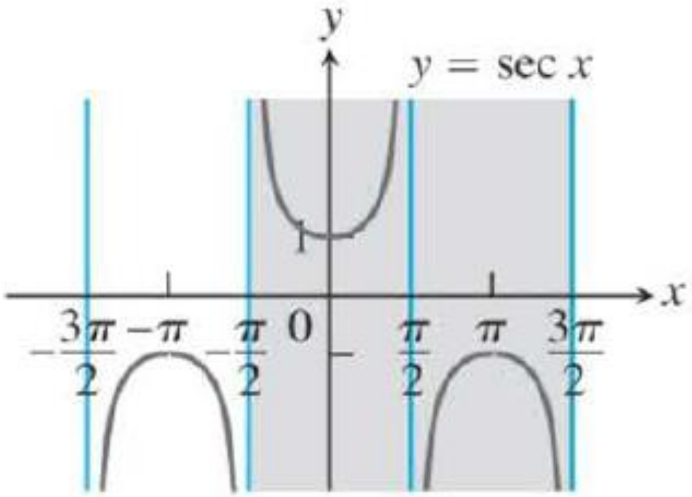
Os triângulos retângulos OX'X e OAT são semelhantes, pois possuem um ângulo agudo comum. Assim, podemos escrever:

$$\frac{OX'}{OA} = \frac{XX'}{AT} \Rightarrow \frac{\cos x}{1} = \frac{\text{sen } x}{\text{tg } x} \Rightarrow \quad \text{tg } x = \frac{\text{sen } x}{\cos x},$$

válida para $\forall\ x \in \mathbb{R} \mid x \neq \dfrac{\pi}{2} + k\pi,\ k \in \mathbb{Z}$.

(iii) Além das funções seno, cosseno e tangente, também são definidas outras três funções trigonométricas básicas:

$$\sec x = \frac{1}{\cos x}$$

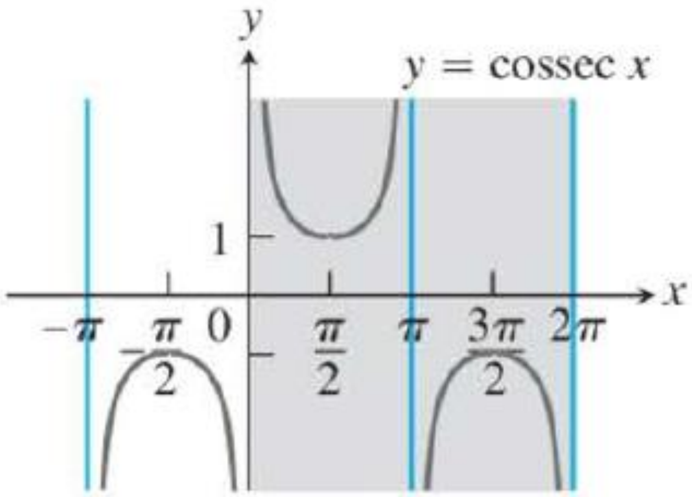


Domínio: $x \neq \pm\frac{\pi}{2}, \pm\frac{3\pi}{2}, \ldots$

Imagem: $y \leq -1$ ou $y \geq 1$

Período: 2π

$$cossec\ x = \frac{1}{\operatorname{sen} x}$$

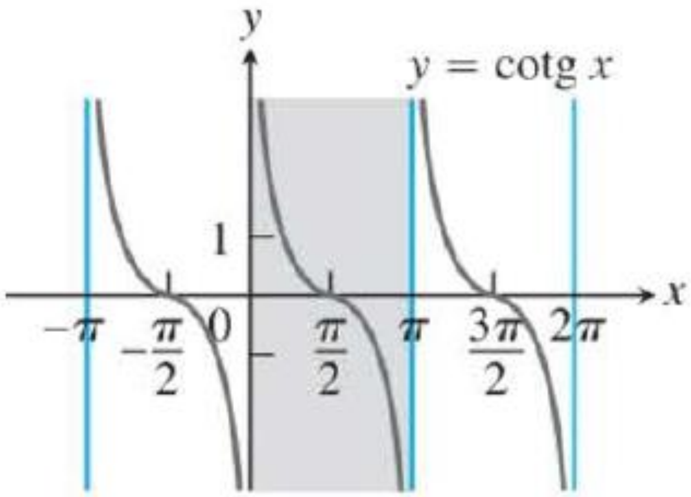


Domínio: $x \neq 0, \pm\pi, \pm2\pi, \ldots$

Imagem: $y \leq -1$ ou $y \geq 1$

Período: 2π

$$cotg\ x = \frac{\cos x}{\operatorname{sen} x}$$



Domínio: $x \neq 0, \pm\pi, \pm2\pi, \ldots$

Imagem: $-\infty < y < \infty$

Período: π

Algumas Identidades Trigonométricas

$$\operatorname{sen}^2(x) + \cos^2(x) = 1 \text{ (Relação Trigonométrica Fundamental)}$$

$$1 + \operatorname{tg}^2(x) = \sec^2(x)$$
$$\operatorname{sen}(x+y) = \operatorname{sen}(x)\cos(y) + \operatorname{sen}(y)\cos(x)$$
$$\cos(x+y) = \cos(x)\cos(y) - \operatorname{sen}(y)\operatorname{sen}(x)$$
$$\operatorname{sen}(2x) = 2\operatorname{sen}(x)\cos(x)$$
$$\operatorname{sen}^2(x) = \frac{1-\cos(2x)}{2}$$
$$\operatorname{sen}(x) + \operatorname{sen}(y) = 2\operatorname{sen}\left(\frac{x+y}{2}\right)\cos\left(\frac{x-y}{2}\right)$$
$$\cos(x) + \cos(y) = 2\cos\left(\frac{x+y}{2}\right)\cos\left(\frac{x-y}{2}\right)$$
$$\operatorname{sen}\left(x + \frac{\pi}{2}\right) = \cos(x)$$

$$1 + \operatorname{cotg}^2(x) = \operatorname{cosec}^2(x)$$
$$\operatorname{sen}(x-y) = \operatorname{sen}(x)\cos(y) - \operatorname{sen}(y)\cos(x)$$
$$\cos(x-y) = \cos(x)\cos(y) + \operatorname{sen}(y)\operatorname{sen}(x)$$
$$\cos(2x) = \cos^2(x) - \operatorname{sen}^2(x)$$
$$\cos^2(x) = \frac{1+\cos(2x)}{2}$$
$$\operatorname{sen}(x) - \operatorname{sen}(y) = 2\operatorname{sen}\left(\frac{x-y}{2}\right)\cos\left(\frac{x+y}{2}\right)$$
$$\cos(x) - \cos(y) = -2\operatorname{sen}\left(\frac{x+y}{2}\right)\operatorname{sen}\left(\frac{x-y}{2}\right)$$
$$\cos\left(x + \frac{\pi}{2}\right) = -\operatorname{sen}(x)$$