Equações Diferenciais Ordinárias (EDO's)

Introdução às Equações Diferenciais

Introdução às Equações Diferenciais

As equações diferenciais são suporte matemático para muitas áreas da ciência e da engenharia. Elas surgem naturalmente na tentativa de formular ou descrever certos sistemas físicos em termos matemáticos.

Nomenclatura e Definições Básicas

Uma **equação diferencial** é uma equação que envolve uma função "incógnita", suas derivadas e suas variáveis independentes.

Exemplos:

(**a**) $y' = 3y^2 sen(t + y)$, sendo $y = y(t)$.

(**b**) $y'' + y' cos\, t + 2t^3 y = 1$, sendo $y = y(t)$.

(**c**) $e^y = y' + x$, sendo $y = y(x)$.

(**d**) $y_x + y_{xx} - 3y_{tx} = 1$, sendo $y = y(t, x)$.

Notação para Derivadas

Vamos utilizar a **notação de Leibniz** ou **notação linha** para representar as derivadas de uma função.

Se $y = y(t)$, então:

- **Notação de Leibniz para derivadas simples:** $\frac{dy}{dt}, \frac{d^2y}{dt^2}, \dots, \frac{d^ny}{dt^n}, \dots$
- **Notação linha para derivadas simples:** $y', y'', y''', \dots, y^{(n)}, \dots$

Se $y = y(t, x)$ (função de duas variáveis), então:

- **Notação de Leibniz para derivadas parciais:** $\frac{\partial y}{\partial t}, \frac{\partial y}{\partial x}, \frac{\partial^2 y}{\partial t^2}, \frac{\partial^2 y}{\partial x \partial t}, \dots$
- **Notação linha para derivadas parciais:** $y_t, y_x, y_{tt}, y_{tx}, \dots$

Observação: Alguns livros utilizam a notação **ponto de Newton** para denotar derivadas. Por exemplo, nesta notação a equação diferencial

$$\frac{d^2s}{dt^2} - 2\frac{ds}{dt} = 64 \text{ ficaria } \ddot{s} - 2\dot{s} = 64.$$

Exemplos Práticos

Equações diferenciais surgem em diversas áreas, incluindo não apenas as ciências físicas, mas também em campos tão diversificados como economia, medicina, psicologia, biologia, química e vários outros. Vejamos alguns exemplos:

(**1**) Na prática bancária, se $P(t)$ é o número de reais em uma conta poupança que paga uma taxa de juros anual de $r\%$ compostos continuamente, então P satisfaz a equação diferencial

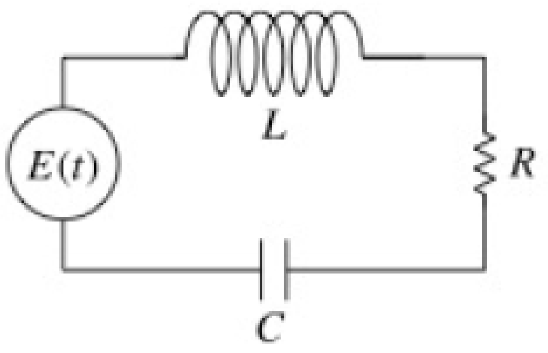
$$\frac{dP}{dt} = \frac{r}{100}P,$$

sendo t em anos.

(**2**) No estudo de um circuito elétrico composto por um resistor, um indutor e um capacitor, alimentados por uma força eletromotriz, uma aplicação das leis de Kirchhoff nos leva à equação

$$L\frac{d^2q}{dt^2} + R\frac{dq}{dt} + \frac{1}{C}q = E(t),$$

onde L, R e C são constantes chamadas de indutância, resistência e capacitância, $E(t)$ é a força eletromotriz, $q(t)$ é a carga do capacitor e t é o tempo.



(**3**) Em psicologia, um modelo do aprendizado de uma tarefa envolve a equação

$$\frac{\frac{dy}{dt}}{y^{\frac{3}{2}}(1-y)^{\frac{3}{2}}} = \frac{2p}{\sqrt{n}},$$

onde y representa o nível de habilidade do aprendiz como uma função do instante t. As constantes p e n dependem do aprendiz e da natureza da tarefa.

(**4**) No estudo das cordas vibrantes e da propagação de ondas, encontramos a equação diferencial parcial

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - c^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0,$$

onde t representa o tempo, x o local ao longo da corda, c a velocidade de onda e u o deslocamento da corda, que é uma função do tempo e do local.

Classificação de Equações Diferenciais

Classificação por Tipo

Temos dois tipos de equações diferenciais:

- **eq. diferencial ordinária** $(\boldsymbol{EDO})$ → a função incógnita depende de uma única variável
- **eq. diferencial parcial** $(\boldsymbol{EDP})$ → a função incógnita depende de mais de uma variável

Classificação pela Ordem

A **ordem de uma equação diferencial** (EDO ou EDP) é a ordem da maior derivada na equação.

Exemplos:

(**a**) $y'''(t) + t^3 y'(t) + sen\, t.y(t) = t^2 \;\rightarrow e.d.o.\ de\ 3^{\underline{a}}\ ordem$

(**b**) $\dfrac{d^4y}{dt^4}(t) = y(t) \rightarrow e.d.o.de\ 4^{\underline{a}}\ ordem$

(**c**) $\dfrac{\partial^3 u}{\partial x^3} - 4\dfrac{\partial^2 u}{\partial t^2} = 0 \;\rightarrow e.d.p.\ de\ 3^{\underline{a}}\ ordem$

Classificação pela Linearidade

Uma EDO de ordem n é **linear** quando pode ser escrita na forma

$$a_n(t)\frac{d^n y}{dt^n} + a_{n-1}(t)\frac{d^{n-1} y}{dt^{n-1}} + \cdots + a_1(t)\frac{dy}{dt} + a_0(t)y = g(t)\,,$$

sendo que:

- a função y e todas as suas derivadas são do primeiro grau, ou seja, a potência de cada termo envolvendo y é 1;
- cada coeficiente depende apenas da variável independente t.

Uma equação que não é linear é chamada de **não linear.**

Exemplos:

(a) $t\dfrac{dy}{dt} + y = 0 \;\rightarrow \text{e.d.o. linear}$

(b) $y'' - 2y' + y = t \;\rightarrow \text{e.d.o. linear}$

(c) $\dfrac{d^3 y}{dt^3} + y^2 = 0 \;\rightarrow \text{e.d.o. não linear}$

(d) $y.y'' - 2y' = t \;\rightarrow \text{e.d.o. não linear}$

Soluções de Equações Diferenciais Ordinárias

Resolver (ou integrar) uma EDO significa encontrar uma função que a satisfaça. Ou seja:

Qualquer função f definida em algum intervalo I, que, quando substituída na EDO reduz a equação a uma identidade, é chamada de **solução** para a equação neste intervalo.

A função solução pode não ser única! Por exemplo, a função $y = y(t) = ksen(t)$, sendo k uma constante real, é solução da equação diferencial $y'' + y = 0$. Observe que para cada valor de k, obtemos uma solução.

As soluções de uma EDO são classificadas do seguinte modo:

- **Solução geral:** é um conjunto de soluções padrão para a EDO considerada.

- **Solução particular:** é uma única solução, obtida da solução geral, satisfazendo algumas condições pré-fixadas, chamadas de *condições iniciais.*

- **Solução singular:** é uma solução da EDO que não provém da solução geral.

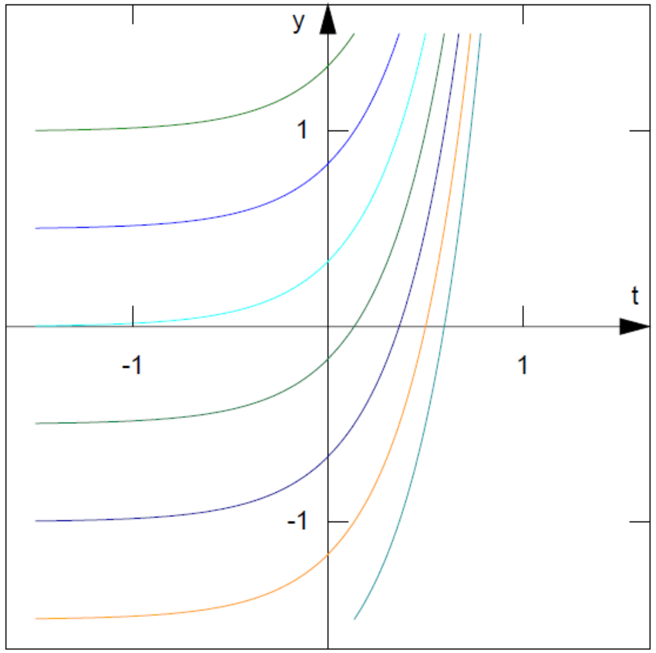
Exemplos:

$(\mathbf{1})$ $y'(t) = sen\, t$

- $y(t) = -\cos t$ é uma solução particular
- $y(t) = -\cos t + C$ é solução geral, para $t \in \mathbb{R}$ (maior intervalo em que a solução e suas derivadas estão definidas)

$(\mathbf{2})$ $\dfrac{dy}{dt} = e^{3t}$

Então, $y(t) = \int e^{3t} dt = \dfrac{e^{3t}}{3} + C$ é solução geral, com $t \in \mathbb{R}$.



Soluções de $y' = e^{3t}$

Soluções Explícitas e Implícitas

- **Solução explícita:** é uma solução da EDO que pode ser escrita na forma $y = f(t)$.

- **Solução implícita:** é uma solução da EDO dada por uma equação que envolve a função e suas derivadas e que define uma ou mais soluções explícitas.

Exemplos:

(**1**) A função $y = e^{t^2}$ é uma solução explícita de $\frac{dy}{dt} = 2ty$.

(**2**) Uma solução para $y' = \frac{y}{ye^y - 2x}$ é dada implicitamente por $xy^2 - (y^2 - 2y + 2)e^y = 0$. Observe que não dá pra isolar a função y nesta equação.

(**3**) Para $-5 < x < 5$, a relação $x^2 + y^2 - 25 = 0$ é uma solução implícita para a equação diferencial $y' = -\frac{x}{y}$.

De fato, derivando implicitamente a relação $x^2 + y^2 - 25 = 0$, obtemos:

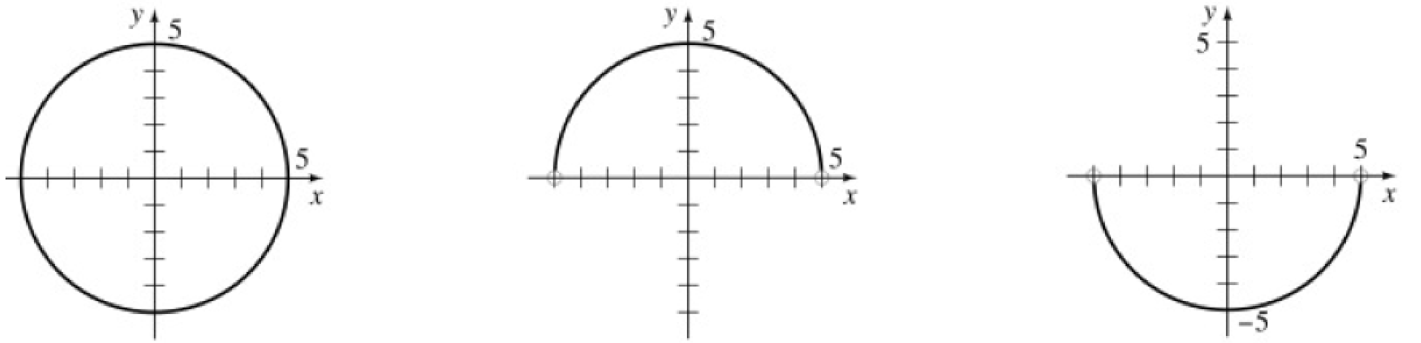
$$\frac{d}{dx}(x^2 + y^2 - 25) = \frac{d}{dx}(0) \Rightarrow$$

$$2x + 2yy' - 0 = 0 \Rightarrow$$

$$2yy' = -2x \Rightarrow$$

$$y' = -\frac{x}{y}$$

Observe que a relação $x^2 + y^2 - 25 = 0$ define duas soluções explícitas para a equação diferencial no intervalo $(-5,5)$, a saber: $y_1 = \sqrt{25 - x^2}$ e $y_2 = -\sqrt{25 - x^2}$.



(a) solução implícita $x^2 + y^2 = 25$ **(b)** solução explícita $y_1 = \sqrt{25 - x^2}$, $-5 < x < 5$ **(c)** solução explícita $y_2 = -\sqrt{25 - x^2}$, $-5 < x < 5$

Exercícios

(1) Classifique as EDO's quanto a ordem e a linearidade:

(a) $(1-t)y'' - 4ty' + 5y = \cos t$

(b) $x\frac{d^3y}{dx^3} - 2\left(\frac{dy}{dx}\right)^4 + y = 0$

(c) $yy' + 2y = 1 + t^2$

(d) $\frac{d^2y}{dx^2} + 9y = sen\, y$

(2) Verifique se a função dada é uma solução para a equação diferencial:

(a) $2y' + y = 0$; $y = e^{-x/2}$

(b) $y' + 4y = 32$; $y = 8$

(c) $\frac{dy}{dx} - 2y = e^{3x}$; $y = e^{3x} + 10e^{2x}$

(d) $y'' + y' - 12y = 0$; $y = c_1 e^{3x} + c_2 e^{-4x}$, c_1, c_2 são constantes

Equações Diferenciais Ordinárias de 1ª Ordem

Equações Diferenciais Ordinárias de 1ª Ordem

Uma **Equação Diferencial Ordinária (EDO) de 1ª ordem** é uma equação $E(x, y, y') = 0$ envolvendo:

- uma função derivável $y = y(x)$ de uma variável real;
- a derivada primeira $y' = y'(x)$ da função y;
- a variável independente x da função y;

sendo que a derivada y' deve estar presente na equação.

Exemplos.

(1) $2\sqrt{xy}y' = 1$, sendo $y = y(x)$. Neste caso, $E(x, y, y') = 2\sqrt{xy}y' - 1$.

(2) $\frac{y'}{x} = ye^{x^2} + 2\sqrt{y}e^{x^2}$, sendo $y = y(x)$. Neste caso, $E(x, y, y') = \frac{y'}{x} - ye^{x^2} - 2\sqrt{y}e^{x^2}$.

(3) $y' = ky$, sendo $y = y(x)$ e k constante real. Neste caso, $E(x, y, y') = y' - ky$.

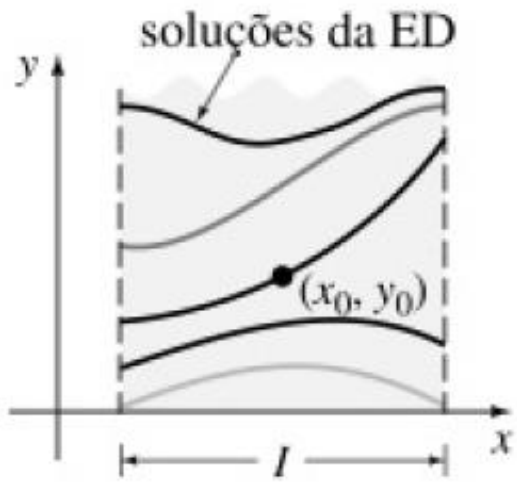
(4) $y' = y^{\frac{2}{3}} \cos(t^2 + y)$, sendo $y = y(t)$. Neste caso, $E(t, y, y') = y' - y^{\frac{2}{3}} \cos(t^2 + y)$.

(5) $y' + P(x)y = Q(x)$, sendo $P = P(x)$ e $Q = Q(x)$ funções dadas e $y = y(x)$. Neste caso, $E(x, y, y') = y' + P(x)y - Q(x)$.

(6) $e^{y'} + 2y' + x^2y = 0$, sendo $y = y(x)$. Neste caso, $E(x, y, y') = e^{y'} + 2y' + x^2y$.

Uma EDO de $1^{\underline{a}}$ ordem $E(x, y, y') = 0$, sendo $y = y(x)$, sujeita à condição $y(x_0) = y_0$, com x_0 e y_0 dados, é chamada de **Problema de Valor Inicial (PVI).** A condição $y(x_0) = y_0$ é chamada de **condição inicial.**

Geometricamente, resolver um PVI significa procurar uma solução para a equação diferencial $y' = f(x, y)$ em um intervalo I contendo x_0 de tal forma que o seu gráfico passe pelo ponto (x_0, y_0), determinado *a priori*.



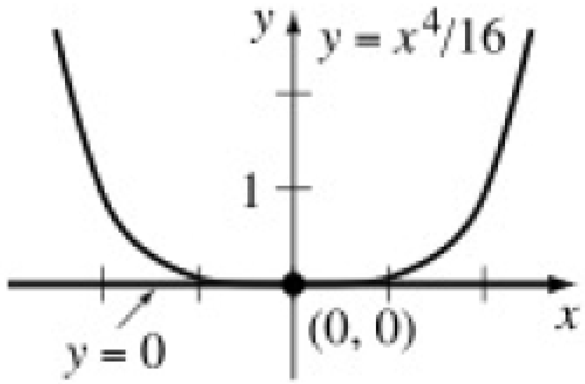
Duas questões fundamentais surgem quando consideramos um PVI:

- Existe uma solução para o problema?
- Se existe uma solução, ela é única?

O próximo exemplo nos mostra que, se a solução de um PVI existe, nem sempre ela é única.

Exemplo: É fácil verificar que as funções $y = 0$ e $y = \frac{x^4}{16}$ são soluções do problema de valor inicial

$$\begin{cases} \dfrac{dy}{dx} = xy^{1/2} \\ y(0) = 0 \end{cases}$$

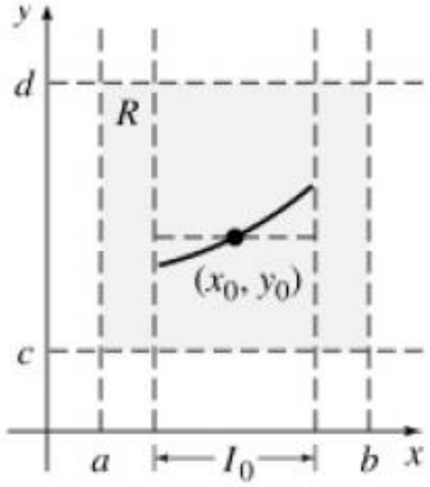


logo, esse problema tem pelo menos duas soluções.

O teorema a seguir nos dá **condições suficientes** para garantir a existência e a unicidade de uma solução para um problema de valor inicial de primeira ordem.

Teorema (Existência e Unicidade): Seja R uma região retangular no plano xy definida por $a < x < b,\ \ c < y < d$ que contém o ponto (x_0, y_0). Se $f(x,y)$ e $\frac{\partial f}{\partial y}$ são contínuas em R, então existe algum intervalo I_0: $x_0 - h < x < x_0 + h,\ h > 0$, contido em $a \leq x \leq b$, e uma única função $y = y(x)$, definida em I_0, que é uma solução do problema de valor inicial

$$\begin{cases} \dfrac{dy}{dx} = f(x,y) \\ y(x_0) = y_0 \end{cases}.$$



Equações Separáveis

Uma EDO de primeira ordem é chamada **separável** ou de **variáveis separáveis** quando pode ser escrita na forma

$$\frac{dy}{dx} = \frac{g(x)}{h(y)}.$$

Método de Solução - Equações Separáveis:

Observe que

$$\frac{dy}{dx} = \frac{g(x)}{h(y)} \Rightarrow h(y)dy = g(x)dx \Rightarrow \int h(y)\,dy = \int g(x)dx\,.$$

Se $H(y)$ e $G(x)$ são primitivas de h e g, respectivamente, então as integrais acima ficam

$$H(y) = G(x) + C.$$

Essa equação nos dá a solução da EDO na forma implícita. Se for possível isolar y na equação acima, obtemos uma solução explícita da EDO.

Observação: No procedimento descrito anteriormente, se tivermos uma condição inicial $y(x_0) = y_0$, ela pode ser incorporada nas integrais.
Temos que

$$\int h(y)\,dy = \int g(x)\,dx \Leftrightarrow H(y) = G(x) + C\text{, sendo } H'(y) = h(y) \text{ e } G'(x) = g(x).$$

Como $y(x_0) = y_0$ deve satisfazer a equação acima, temos

$$H(y_0) = G(x_0) + C\text{, ou seja, } C = H(y_0) - G(x_0).$$

Logo,

$$H(y) = G(x) + H(y_0) - G(x_0) \Leftrightarrow H(y) - H(y_0) = G(x) - G(x_0)$$
$$\Leftrightarrow \int_{y_0}^{y} h(y)\,dy = \int_{x_0}^{x} g(x)\,dx$$

Exemplos:

(1) Resolva as EDO's separáveis abaixo:

(a) $\frac{dy}{dx} = x^2 + 3$

(b) $(1 + x)dy - ydx = 0$

(c) $2y\frac{dy}{dx} = -4x$

(d) $y' = (1 + y)e^x$

(2) Resolva os seguintes PVI's:

(a) $\begin{cases} y' = 6x^5e^{-y} \\ y(1) = 1 \end{cases}$

(b) $\begin{cases} (4y - \cos(y))y' - 3x^2 = 0 \\ y(0) = 0 \end{cases}$

Equações Homogêneas

Inicialmente, vejamos o conceito de função homogênea, apresentado a seguir.

Definição: Dizemos que f é uma **função homogênea de grau n** quando f satisfaz

$$f(tx,ty) = t^n f(x,y),$$

para algum número real n.

Exemplos

(**a**) $f(x,y) = x^2 - 3xy + 5y^2$ é uma função homogênea de grau 2.

(**b**) $f(x,y) = \sqrt[3]{x^2 + y^2}$ é uma função homogênea de grau $2/3$.

(**c**) $f(x,y) = x^3 + y^3 + 1$ não é uma função homogênea.

Note que toda EDO de 1ª ordem $y' = F(y,x)$, sendo $y = y(x)$, pode ser escrita como

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{M(x,y)}{N(x,y)} \Rightarrow \boxed{M(x,y)\,dx + N(x,y)\,dy = 0.}$$

Definição: Uma equação diferencial da forma $M(x,y)dx + N(x,y)dy = 0$ é chamada de **homogênea** quando os coeficientes M e N são funções homogêneas de mesmo grau.

Por meio de uma mudança de variáveis, podemos transformar uma equação homogênea em uma equação separável.

Método de Solução – Equações Homogêneas

Uma equação diferencial homogênea $M(x,y)dx + N(x,y)dy = 0$ pode ser resolvida fazendo a substituição

$$y = ux \quad \text{ou} \quad x = vy,$$

em que u e v são as novas variáveis.

Observação:

$y = ux \rightarrow$ quando N for mais simples

$x = vy \rightarrow$ quando M for mais simples

Exemplo: Resolva as equações homogêneas de 1ª ordem a seguir:

(a) $(x^2 + y^2)dx + (x^2 - xy)dy = 0$

(b) $\left(2\sqrt{xy} - y\right)dx + xdy = 0$

Equações Lineares de 1ª Ordem

As **equações diferenciais ordinárias lineares de 1ª ordem** são equações que podem ser escritas como

$$a(x)\frac{dy}{dx} + b(x)y = c(x) \quad (a(x) \neq 0).$$

Dividindo ambos os lados da equação acima por $a(x)$, obtemos a **forma padrão:**

$$\boxed{\frac{dy}{dx} + p(x)y = q(x)\,.}$$

- Aqui $p(x)$ e $q(x)$ são funções contínuas em um determinado intervalo.
- Quando $q(x) = 0$, a equação é chamada de **equação linear de 1ª ordem homogênea.**
- Quando $q(x) \neq 0$, a equação é chamada de **equação linear de 1ª ordem não homogênea.**

Equações Lineares de 1ª Ordem Homogêneas

Consideremos a equação linear de 1ª ordem homogênea

$$\frac{dy}{dx} + p(x)y = 0.$$

Essa equação é separável, pois podemos escrevê-la na forma:

$$\frac{dy}{dx} = -p(x)y \Rightarrow \frac{dy}{dx} = -\frac{p(x)}{\frac{1}{y}}.$$

Assim, temos que a solução geral para a equação é dada por:

$$\frac{1}{y}\,dy = -p(x)\,dx \Rightarrow \int \frac{1}{y}\,dy = -\int p(x)\,dx$$

$$\Rightarrow \ln|y| = -\int p(x)\,dx$$

$$\Rightarrow |y| = e^{-\int p(x)\,dx}$$

$$\Rightarrow \boxed{y = Ce^{-\int p(x)\,dx}}$$

Exemplo: Resolva os problemas de valor inicial:

(a) $\begin{cases} y' = 3y \\ y(1) = e \end{cases}$

(b) $\begin{cases} y' + sen\,(x)y = 0 \\ y(0) = \frac{3}{2} \end{cases}$

Equações Lineares de 1ª Ordem Não Homogêneas

Seja a equação linear de 1ª ordem não homogênea:

$$\frac{dy}{dx} + p(x)y = q(x).$$

Suponha que $p(x)$ e $q(x)$ sejam contínuas.

Se conseguirmos escrever $\frac{dy}{dx} + p(x)y(x)$ na forma $\frac{d}{dx}(algo)$, então o problema de obter uma solução estaria resolvido, pois bastaria integrar $\frac{d}{dx}(algo)$ e assim encontraríamos "algo".

Logo, a ideia é escrever o lado esquerdo da equação como derivada de alguma função conveniente.

Assim, queremos encontrar uma função $\mu(x)$ tal que

$$\mu(x)y'(x) + \mu(x)p(x)y(x)$$

seja a derivada de $\frac{d}{dx}\big(\mu(x)y(x)\big)$.

Para que $\mu(x)y'(x) + \mu(x)p(x)y(x)$ seja igual a $\frac{d}{dx}\big(\mu(x)y(x)\big) = \mu'(x)y(x) + \mu(x)y'(x)$ devemos ter:

$$\mu'(x) = \mu(x)p(x) \xrightarrow{\mu(x)>0} \frac{1}{\mu(x)}\frac{d\mu}{dx} = p(x).$$

Pela regra da cadeia, temos que $\frac{1}{\mu(x)}\frac{d\mu}{dx} = \frac{d}{dx}(\ln \mu(x))$.

Logo,

$$\frac{d}{dx}(\ln \mu(x)) = p(x)\,.$$

Integrando ambos os membros, obtemos:

$$\ln \mu(x) = \int p(x)\,dx \Rightarrow$$

$$e^{\ln \mu(x)} = e^{\int p(x)\,dx} \Rightarrow$$

$$\mu(x) = e^{\int p(x)\,dx}\,.$$

A função

$$\boxed{\mu(x) = e^{\int p(x)\,dx}}$$

é chamada de **fator integrante** da EDO $y' + p(x)y = q(x)$.

Portanto, multiplicando a EDO $y'(x) + p(x)y(x) = q(x)$ por $\mu(x) = e^{\int p(x)\,dx}$, obtemos:

$$\mu(x)y'(x) + \mu(x)p(x)y(x) = \mu(x)q(x) \Rightarrow$$

$$\frac{d}{dx}\big(\mu(x)y(x)\big) = \mu(x)q(x) \Rightarrow$$

$$\mu(x)y(x) = \int \mu(x)q(x)\;dx + C \Rightarrow$$

$$y(x) = \frac{1}{\mu(x)}\left[\int \mu(x)q(x)\;dx + C\right] \Rightarrow$$

$$\boxed{y(x) = ce^{-\int p(x)\,dx} + e^{-\int p(x)\,dx}.\int e^{\int p(x)\,dx} q(x)\,dx\,,}$$

que é a solução geral da EDO linear de 1ª ordem.

Método de Solução - Equações Lineares de 1ª ordem não homogêneas

(**1**) Coloque a EDO na forma padrão

$$y' + p(x)y = q(x),$$

isto é, deixe o coeficiente de $\frac{dy}{dx}$ igual a 1.

(**2**) Identifique $p(x)$ e calcule o fator integrante $\mu(x) = e^{\int p(x)\,dx}$.

(**3**) Multiplique a equação obtida em (**1**) por $\mu(x)$.

(**4**) O lado esquerdo da equação em (**3**) é a derivada do produto do fator integrante e a função $y(x)$.

(**5**) Integre ambos os lados da equação encontrada em (**4**).

Exemplos

(1) Resolva as equações lineares de 1ª ordem:

(a) $x\dfrac{dy}{dx} + 4y = 5x$ $\quad R: y(x) = x + kx^{-4}$

(b) $t\dfrac{dy}{dt} - 4y = t^6e^t$ $\quad R: y(t) = t^5e^t - t^4e^t + kt^4$

(2) Em cada caso, determine a solução do PVI:

(a) $\begin{cases} y' - 2xy = x \\ y(0) = 1 \end{cases}$ $\quad R: y(x) = -\dfrac{1}{2} + \dfrac{3}{2}e^{x^2}$

(b) $\begin{cases} y' + y = \frac{e^{-x}}{1+x^2} \\ y(1) = 3 \end{cases}$ $\quad R: y(x) = e^{-x}arctg(x) + \left(3e - \dfrac{\pi}{4}\right)e^{-x}$

(c) $\begin{cases} ty' + y = t \\ y(10) = 20 \end{cases}$ $\quad R: y(t) = \dfrac{t}{2} + \dfrac{150}{t}$

Aplicações de Equações Diferenciais Ordinárias de 1ª ordem

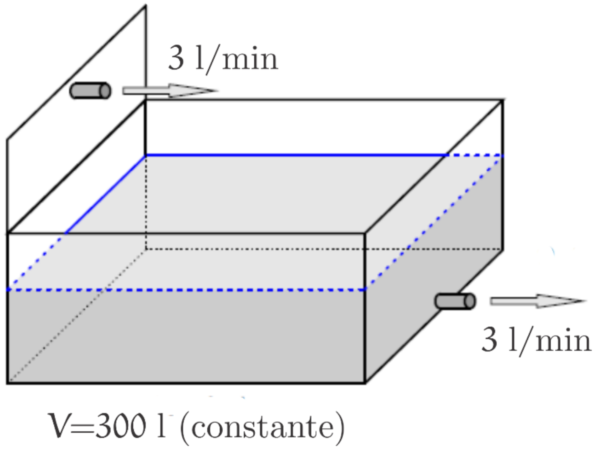
Problemas de mistura

Na mistura de dois fluidos, muitas vezes temos que trabalhar com equações diferenciais lineares de primeira ordem.

(1) Suponha que inicialmente, 50 gramas de sal são dissolvidos em um tanque contendo 300 litros de água. Uma solução salina é bombeada para dentro do tanque a uma taxa de 3 l/min, e a solução bem misturada é então drenada na mesma taxa. Se a concentração da solução que entra é 2 g/l, determine:

(**a**) A quantidade de sal no tanque em qualquer instante.
(**b**) Quantos gramas de sal estão presentes no tanque após 50 minutos.
(**c**) O que acontece com a quantidade de sal no tanque quando $t \to \infty$?

Solução: (**a**) Considere a figura abaixc



Seja $y = y(t)$ a quantidade de sal no tanque no instante t. Logo, $y(0) = 50$.
Seja $y' = y'(t)$ a taxa de variação instantânea da quantidade de sal em relação ao tempo.

Temos que a quantidade de sal no tanque em um determinado instante é igual a quantidade de sal que entra menos a quantidade de sal que sai. Logo, a taxa de variação do sal no tanque em um instante t (medido em g/min) é dada por

$$\frac{dy}{dt} = \begin{pmatrix} taxa\ de \\ entrada\ do\ sal \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} taxa\ de \\ saída\ do\ sal \end{pmatrix}$$

$$= R_1 - R_2,$$

sendo

$$R_1 = \underbrace{3\frac{l}{min}}_{\substack{taxa\ de \\ escoamento}} \cdot \underbrace{2\frac{g}{l}}_{\substack{concentração \\ de\ sal}} = 6\frac{g}{min}$$

e

$$R_2 = \underbrace{3\frac{l}{min}}_{\substack{taxa\ de \\ escoamento}} \cdot \underbrace{\frac{y}{300}\frac{g}{l}}_{\substack{concentração \\ de\ sal}} = \frac{y}{100}\frac{g}{min}$$

Substituindo os valores de R_1 e R_2, obtemos

$$\frac{dy}{dt} = 6 - \frac{y}{100} \Rightarrow \boxed{\frac{dy}{dt} + \frac{y}{100} = 6}$$

que é uma EDO de 1ª ordem linear.

Assim, para determinar a função y, precisamos resolver a EDO

$\frac{dy}{dt} + \frac{y}{100} = 6$, sujeita à condição inicial $y(0) = 50$.

O fator integrante dessa equação é

$$\mu(t) = e^{\int p(t)\,dt} = e^{\int 1/100\,dt} = e^{t/100}.$$

Multiplicando ambos os membros da equação pelo fator integrante, obtemos

$$e^{t/100}\frac{dy}{dt} + e^{t/100}\frac{y}{100} = 6e^{t/100}$$

$$\Rightarrow \frac{d}{dt}\left(e^{t/100}y\right) = 6e^{t/100}$$

$$\Rightarrow e^{t/100}y = 600e^{t/100} + k$$

$$\Rightarrow y = 600 + ke^{-t/100}$$

Como $y(0) = 50$, segue que

$$50 = 600 + k \Rightarrow k = -550.$$

Portanto, a quantidade de sal no tanque, em gramas, em um instante t é dada por

$$y(t) = 600 - 550e^{-t/100}.$$

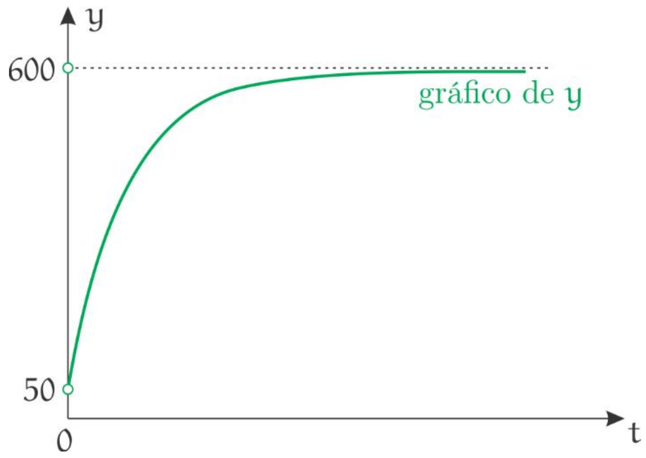
(**b**) Para determinar a quantidade de sal presente no tanque após 50 minutos, basta calcular $y(50)$, que é dado por

$$y(50) = 600 - 550e^{-50/100} \cong 266{,}41\ g.$$

(**c**) Quando $t \to \infty$, temos que

$$\lim_{t\to\infty} y(t) = \lim_{t\to\infty}\left(600 - 550e^{-t/100}\right) = 600\,,$$

ou seja, a quantidade de sal no tanque tende a se estabilizar próximo de 600 g.



(2) No exemplo anterior, determine a quantidade de sal no tanque num instante t, se a solução for drenada a uma taxa de 2 l/min.

Solução: Como a solução é bombeada para dentro do tanque a uma taxa de 3 l/min e é drenada a uma taxa de 2 l/min, então a solução se acumula a uma taxa de

$$(3-2) = 1\ l/\text{min}.$$

Assim, após t minutos o volume do tanque, em litros, é dado por

$$v(t) = 300 + t.$$

Logo, a taxa na qual o sal é drenado é

$$R_2 = 2\ l/min \cdot \frac{y}{300+t} g/l$$
$$= \frac{2y}{300+t}\ g/min$$

Neste caso, a equação diferencial fica

$$\frac{dy}{dt} = 6 - \frac{2y}{300+t} \Rightarrow \frac{dy}{dt} + \frac{2y}{300+t} = 6,$$

sujeita à condição inicial $y(0) = 50$.

O fator integrante dessa equação é

$$\mu(t) = e^{\int \frac{2}{300+t} dt} = e^{2\ln(300+t)} = (300+t)^2.$$

Multiplicando ambos os membros da equação pelo fator integrante, obtemos

$$\frac{d}{dt}\left((300+t)^2\, y\right) = (300+t)^2 6$$

$$\Rightarrow (300+t^2)\, y = 6\int (300+t)^2\, dt$$

$$\Rightarrow (300+t)^2\, y = 2(300+t)^3 + k$$

$$\Rightarrow\ y = 2(300+t) + k(300+t)^{-2}$$

Como $y(0) = 50$, temos que $k = -\frac{550}{(300)^{-2}} = -49\,500\,000.$

Portanto,

$$y(t) = 2(300+t) - 49\,500\,000\,(300+t)^{-2}.$$

Problemas de crescimento e decrescimento

Muitos problemas físicos, químicos e biológicos podem ser descritos através do PVI:

$$\begin{cases} \dfrac{dy}{dt} = ky \\ y(0) = y_0 \end{cases}, \qquad \text{onde } k = \text{constante}$$

Note que a equação é linear e pode ser reescrita como

$$\frac{dy}{dt} - ky = 0.$$

Calculando o fator integrante, obtemos

$$\mu(t) = e^{\int -k\,dt} = e^{-kt}.$$

Multiplicando a equação por $\mu(t)$,

$$\frac{d}{dt}\left(e^{-kt}y\right) = 0 \Rightarrow e^{-kt}y = c \Rightarrow y(t) = ce^{kt}.$$

Como $y(0) = y_0$, então

$$y_0 = ce^{k0} = c.$$

Ou seja, a solução do PVI é

$$\boxed{y(t) = y_0 e^{kt}.}$$

Exemplo: Em uma cultura há inicialmente N_0 bactérias. Uma hora depois, o número de bactérias passa a ser $\frac{3}{2}N_0$. Se a taxa de crescimento é proporcional ao número de bactérias presentes, determine o tempo necessário para que o número de bactérias triplique.

Problemas de Meia-Vida

A meia-vida de uma substância é igual ao tempo gasto para metade dos átomos de uma quantidade inicial A_0 se desintegrar ou se transformar em átomos de outro elemento.
Quanto maior a meia-vida de uma substância, mais estável ela é.

Exemplo: Um reator converte urânio 238 em isótopo de plutônio 239. Após 15 anos foi detectado que $0{,}043\%$ da quantidade inicial A_0 de plutônio se desintegrou. Encontre a meia-vida desse isótopo, sabendo que a taxa de desintegração é proporcional à quantidade remanescente.

Cronologia do Carbono

A proporção de carbono 14 (radioativo) em relação ao carbono 12 presente nos seres vivos é constante. Quando um organismo morre a absorção de carbono 14 cessa e a partir de então o carbono 14 vai se transformando em carbono 12 a uma taxa que é proporcional à quantidade presente. Logo, comparando a quantidade proporcional de carbono 14 presente, digamos, em um fóssil com a razão constante encontrada na atmosfera, é possível obter uma estimativa da idade do fóssil.

Exemplo: Em um osso fossilizado é encontrado $\frac{1}{1000}$ da quantidade original de carbono 14. Sabendo que a meia-vida do carbono 14 é de 5600 anos, determine a idade desse fóssil.

Lei de Resfriamento de Newton

A lei de resfriamento de Newton diz que a taxa de variação de temperatura $T(t)$ de um corpo em resfriamento é proporcional à diferença entre a temperatura do corpo e a temperatura constante T_m do meio ambiente, isto é,

$$\frac{dT}{dt} = k(T - T_m),$$

em que k é uma constante de proporcionalidade.

Exemplo: Um café está a $90\,°C$, logo depois de coado e, um minuto depois, passa para $85\,°C$, em uma cozinha a $25\,°C$. Determine:
(**a**) A temperatura do café em função do tempo.
(**b**) O tempo que levará para o café chegar a $60\,°C$.

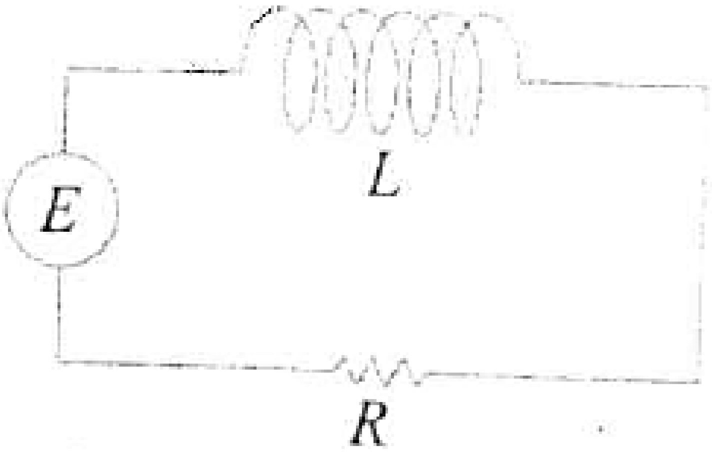
Circuitos em Série

- ## Circuito em série L-R

Em um circuito em série contendo um resistor e um indutor, a segunda lei de Kirchhoff diz que a soma da queda de tensão do indutor e da queda de tensão do resistor é igual à voltagem no circuito, ou seja,

$$L\frac{di}{dt} + Ri = E(t),$$

em que L e R são constantes conhecidas como indutância e resistência, respectivamente.



Circuito em Série L-R

Circuitos em Série

- ## Circuito em série R-C

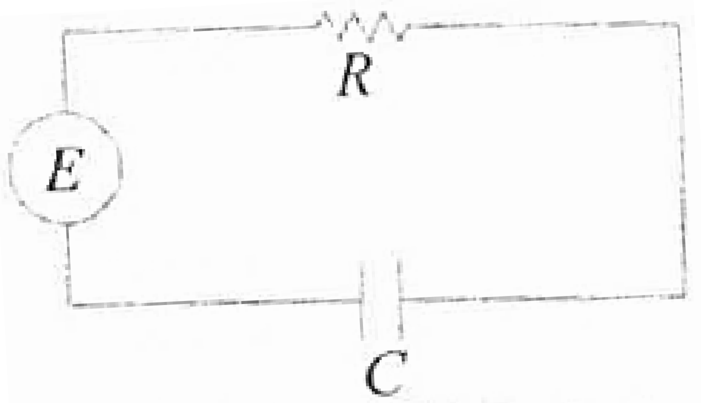
Em um circuito em série contendo um resistor e um capacitor, a segunda lei de Kirchhoff diz que a soma da queda de tensão do resistor e a queda de potencial em um capacitor é igual à voltagem no circuito, ou seja,

$$Ri + \frac{q}{c} = E(t),$$

em que C é a capacitância e q é a carga do capacitor.

Como $i = \frac{dq}{dt}$, então obtemos

$$R\frac{dq}{dt} + \frac{q}{c} = E(t).$$



Circuito em Série R-C

Exemplo: Uma bateria de 12 volts é conectada a um circuito em série na qual a indutância é de $\frac{1}{2}$ $henry$ e a resistência 10 $ohms$. Determine a corrente i, se a corrente inicial é zero.

Equações Diferenciais Ordinárias de 2ª Ordem

Equações Diferenciais Ordinárias de 2ª Ordem

Uma **Equação Diferencial Ordinária (EDO) de 2ª ordem** é uma equação

$$E(x, y, y', y'') = 0$$

envolvendo:

- uma função duas vezes derivável $y = y(x)$ de uma variável real;
- as derivadas primeira $y' = y'(x)$ e segunda $y'' = y''(x)$ da função y;
- a variável independente x da função y;

sendo que a derivada y'' deve estar presente na equação.

Vamos trabalhar apenas com EDO's em que y'' pode ser isolada em $E(x, y, y', y'')$, ou seja, $y'' = F(x, y, y')$.

Para resolver um Problema de Valor Inicial (PVI) envolvendo EDO's de 2ª ordem, precisamos fornecer duas condições iniciais:

$$\begin{cases} y'' = F(x, y, y') \\ y_0 = y(x_0) \text{ e } y_0' = y'(x_0) \end{cases}$$

EDO's de 2ª Ordem Lineares: Preliminares

Uma **Equação Diferencial Ordinária (EDO) de 2ª ordem linear** é uma equação do tipo

$$y'' + p_1(x)y' + p_0(x)y = q(x).$$

Quando $q(x) = 0$ (função nula), temos uma **EDO de 2ª ordem linear homogênea.**
Quando $q(x) \neq 0$, temos uma **EDO de 2ª ordem linear não homogênea.**

Definições: Sejam f_1 e f_2 duas funções reais definidas em um intervalo I.
(a) Dizemos que f_1 e f_2 são **linearmente dependentes (LD)** em I quando existe $k \in \mathbb{C}$ tal que

$$f_1 = kf_2.$$

(b) Dizemos que f_1 e f_2 são **linearmente independentes (LI)** em I quando não existe $k \in \mathbb{C}$ tal que $f_1 = kf_2$.

(c) O determinante $W(f_1, f_2) = \det\begin{bmatrix} f_1 & f_2 \\ f_1{}' & f_2{}' \end{bmatrix}$ é chamado de **wronskiano** de f_1 e f_2.

Teorema: Sejam f_1 e f_2 duas funções reais definidas em um intervalo I. Temos que:

$$f_1 \text{ e } f_2 \text{ são LI} \Leftrightarrow W(f_1, f_2) \neq 0 \text{ em I}.$$

EDO's de 2ª Ordem Lineares Homogêneas

Resultados importantes sobre soluções de EDO's:

Proposição: Se y_1 e y_2 são soluções particulares de uma EDO de $2^{\underline{a}}$ ordem linear homogênea, então qualquer combinação linear $c_1y_1 + c_2y_2$, com $c_1, c_2 \in \mathbb{C}$ também é solução particular dessa EDO.

Proposição: Sejam y_1 e y_2 soluções particulares LI de uma EDO de $2^{\underline{a}}$ ordem linear homogênea (isto é, y_1 e y_2 formam um **conjunto fundamental de soluções**). Então, a solução geral dessa EDO é da forma

$$y = c_1y_1 + c_2y_2.$$

Exemplo: A equação $y'' - 9y = 0$ possui duas soluções $y_1 = e^{3x}$ e $y_2 = e^{-3x}$.
Como

$$W(e^{3x}, e^{-3x}) = \begin{vmatrix} e^{3x} & e^{-3x} \\ 3e^{3x} & -3e^{-3x} \end{vmatrix} = -6 \neq 0, \text{ para todo } x \in (-\infty, \infty),$$

então y_1 e y_2 são LI em $(-\infty, \infty)$.
Assim, a solução geral para essa equação é dada por

$$y = c_1e^{3x} + c_2e^{-3x}.$$

EDO's de 2ª Ordem Lineares Homogêneas com Coeficientes Constantes

Considere equações homogêneas de segunda ordem da forma

$$ay'' + by' + cy = 0, \qquad \text{com } a, b, c \in \mathbb{R} \text{ e } a \neq 0.$$

Vamos mostrar que para estas equações existem valores constantes de r tais que $y(x) = e^{rx}$ é uma solução dessa ED.

Substituindo $y = e^{rx}$, $y' = re^{rx}$ e $y'' = r^2e^{rx}$ na equação acima, obtemos

$$ar^2e^{rx} + bre^{rx} + ce^{rx} = 0 \Rightarrow e^{rx}(ar^2 + br + c) = 0.$$

Como $e^{rx} \neq 0$, então $y(x) = e^{rx}$ é solução da equação dada, se e somente, se r é raiz da equação

$$\boxed{ar^2 + br + c = 0.}$$

Essa equação é chamada de **equação característica.**

Temos 3 casos a considerar:

- a equação característica tem 2 raízes reais;
- a equação característica tem somente uma raiz real;
- a equação característica tem raízes complexas conjugadas.

1º Caso: A equação característica tem 2 raízes reais

Se $\Delta = b^2 - 4ac > 0$, então a equação característica tem duas raízes reais distintas r_1 e r_2. Neste caso,

$$y_1(x) = e^{r_1 x} \quad \text{e} \quad y_2(x) = e^{r_2 x}$$

são LI, pois

$$W(y_1, y_2) = \begin{vmatrix} e^{r_1 x} & e^{r_2 x} \\ r_1 e^{r_1 x} & r_2 e^{r_2 x} \end{vmatrix} = (r_2 - r_1) e^{(r_1 + r_2)x} \neq 0, \text{ para todo } x \text{ real.}$$

Assim, a solução geral neste caso, é dada por

$$y(x) = c_1 e^{r_1 x} + c_2 e^{r_2 x} .$$

2º Caso: A equação característica tem somente uma raiz real

Se $\Delta = b^2 - 4ac = 0$, então a equação característica apenas uma raiz real $r = -\frac{b}{2a}$.
Neste caso, $y_1(x) = e^{rx}$ é uma solução para a equação.

Uma segunda solução para a equação pode ser obtida a partir de uma solução conhecida, utilizando

$$y_2(x) = y_1(x) \int \frac{e^{-\int p(x)\,dx}}{y_1^2}\,dx.$$

Substituindo y_1, obtemos:

$$y_2(x) = e^{rx} \int \frac{e^{-\int b/a\,dx}}{(e^{rx})^2}\,dx \;= e^{rx} \int \frac{e^{-\frac{b}{a}x}}{e^{2rx}}\,dx$$

$$= e^{rx} \int \frac{e^{2rx}}{e^{2rx}}\,dx = e^{rx} \int 1\,dx = xe^{rx}.$$

Veja que y_1 e y_2 são LI.
Logo, a solução geral neste caso é dada por

$$y(x) = c_1 e^{rx} + c_2 x e^{rx}.$$

3º Caso: A equação característica tem raízes complexas

Se $\Delta = b^2 - 4ac < 0$, então r_1 e r_2 são complexas e podemos escrever

$$r_1 = \alpha + i\beta \quad \text{e} \quad r_2 = \alpha - i\beta,$$

sendo $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, $\beta \neq 0$ e $i^2 = -1$.

Assim, a solução geral, neste caso, pode ser dada por

$$y = c_1 e^{(\alpha+i\beta)x} + c_2 e^{(\alpha-i\beta)x}.$$

Porém, na prática, preferimos trabalhar com funções reais em vez de exponenciais complexas. Para este fim, vamos usar a fórmula de Euler:

$$e^{i\theta} = \cos\theta + i sen\,\theta.$$

Temos que

$$e^{i\beta x} = \cos(\beta x) + i sen(\beta x)$$
$$e^{-i\beta x} = \cos(-\beta x) + i sen(-\beta x) = \cos(\beta x) - i sen(\beta x)$$

Somando e subtraindo essas equações, obtemos

$$e^{i\beta x} + e^{-i\beta x} = 2\cos(\beta x) \quad \text{e} \quad e^{i\beta x} - e^{-i\beta x} = 2i\,\mathrm{sen}(\beta x)$$

Sabemos que $y = c_1 e^{(\alpha+i\beta)x} + c_2 e^{(\alpha-i\beta)x}$ é uma solução para a equação homogênea para qualquer escolha das constantes c_1 e c_2.

Fazendo $c_1 = c_2 = 1$ e $c_1 = 1,\ c_2 = -1$ temos, nesta ordem, duas soluções:

$$\tilde{y}_1 = e^{(\alpha+i\beta)x} + e^{(\alpha-i\beta)x} = e^{\alpha x}\left(e^{i\beta x} + e^{-i\beta x}\right) = e^{\alpha x} 2\cos(\beta x)$$

e

$$\tilde{y}_2 = e^{(\alpha+i\beta)x} - e^{(\alpha-i\beta)x} = e^{\alpha x}\left(e^{i\beta x} - e^{-i\beta x}\right) = e^{\alpha x} 2i\,\mathrm{sen}(\beta x)$$

Como múltiplo de uma solução é também solução para a ED homogênea, temos que as funções reais

$$y_1 = \frac{1}{2}\tilde{y}_1 = e^{\alpha x}\cos(\beta x)$$

e

$$y_2 = \frac{1}{2i}\tilde{y}_2 = e^{\alpha x}\,\mathrm{sen}(\beta x)$$

são soluções para a equação homogênea.

Além disso,

$$W(y_1, y_2) = \beta e^{2\alpha x} \neq 0 \quad (\text{pois } \beta \neq 0 \text{ e } e^{2\alpha x} \neq 0)$$

logo, y_1 e y_2 são LI.

Portanto, a solução geral, neste caso, é dada por

$$y = c_1 e^{\alpha x} \cos(\beta x) \ + c_2 e^{\alpha x} \operatorname{sen}(\beta x)$$

$$y = e^{\alpha x}(c_1 \cos(\beta x) \ + c_2 \operatorname{sen}(\beta x))$$

Exemplos:

(1) Resolva as EDO's de 2ª ordem lineares homogêneas de coeficientes constantes:

(**a**) $2y'' - 5y' - 3y = 0$

(**b**) $y'' - 10y' + 25y = 0$

(**c**) $y'' + y' + y = 0$

(2) Resolva o PVI:

$$y'' - 4y' + 13y = 0, y(0) = -1, y'(0) = 2.$$

EDO's de 2ª Ordem Lineares Não Homogêneas

A proposição a seguir nos diz sobre o formato da solução geral de uma EDO de 2ª linear não homogênea.

Proposição: A solução geral da EDO

$$y'' + p_1(x)y' + p_0(x)y = q(x),$$

de 2ª ordem linear não homogênea, é dada por

$$y = y_c + y_p,$$

Sendo y_c a solução geral da EDO homogênea associada

$$y'' + p_1(x)y' + p_0(x)y = 0,$$

e y_p uma solução particular da EDO não homogênea.

A solução da equação homogênea associada, y_c, é chamada de **função complementar.**

EDO's de 2ª Ordem Lineares Não Homogêneas com Coeficientes Constantes

Método dos Coeficientes Indeterminados

Considere uma equação não homogênea de segunda ordem da forma

$$ay'' + by' + cy = g(x),$$

em que $a, b,$ e c são constantes e g é uma combinação linear de funções do tipo:

$$k \text{ (constante)}, x^n, e^{\alpha x}, sen(\beta x), \cos(\beta x), x^n e^{\alpha x}, x^n e^{\alpha x} sen(\beta x) \text{ e } x^n e^{\alpha x} \cos(\beta x),$$

em que n é um inteiro não negativo e α e β são números reais.

Para estes tipos de equações podemos determinar uma solução particular, usando o **método dos coeficientes indeterminados**, observando que o conjunto de funções que consiste em constantes, polinômios, exponenciais $e^{\alpha x}$, senos e cossenos, tem a notável propriedade de que:

Derivadas de suas somas e produtos são ainda somas e produtos de constantes, polinômios, exponenciais $e^{\alpha x}$, senos e cossenos.

Assim, como a combinação linear das derivadas $ay_p'' + by_p' + cy_p$ deve ser identicamente igual a g, é razoável supor que uma solução particular y_p para a ED tem a mesma forma que g.

Observação: O método dos coeficientes indeterminados **não se aplica** quando g tem, por exemplo, os seguintes formatos

$$g(x) = \ln(x),\ g(x) = \frac{1}{x}, g(x) = tg(x), g(x) = arcsen(x).$$

Para resolver equações com esses tipos de funções g vamos utilizar outro método, que veremos adiante, chamado de método da variação dos parâmetros.

Exemplo 1: Resolva a equação $y'' + 4y' - 2y = 2x^2 - 3x + 6$.

Solução:

- Equação Homogênea Associada: $y'' + 4y' - 2y = 0$

As raízes da equação característica $r^2 + 4r - 2 = 0$ são $r_1 = -2 - \sqrt{6}$ e $r_2 = -2 + \sqrt{6}$. Logo, a solução da equação homogênea associada é

$$y_c(x) = c_1 e^{(-2-\sqrt{6})x} + c_2 e^{(-2+\sqrt{6})x}.$$

- Solução Particular da Equação Não Homogênea:

Como a função g é um polinômio do segundo grau, vamos supor que uma solução particular seja da forma:

$$y_p(x) = Ax^2 + Bx + C.$$

Substituindo y_p e as derivadas $y_p'(x) = 2Ax + B$ e $y_p''(x) = 2A$ na ED não homogênea, obtemos:

$$y_p'' + 4y_p' - 2y_p = 2x^2 - 3x + 6$$

$$\Rightarrow 2A + 8Ax + 4B - 2Ax^2 - 2Bx - 2C = 2x^2 - 3x + 6$$

$$\Rightarrow -2Ax^2 + (8A - 2B)x + 2A + 4B - 2C = 2x^2 - 3x + 6$$

Para que a igualdade anterior seja verdadeira, devemos ter:

$$\begin{cases} -2A = 2 \\ 8A - 2B = -3 \\ 2A + 4B - 2C = 6 \end{cases} \Rightarrow A = -1, B = -5/2 \text{ e } C = -9.$$

Logo, uma solução particular para a ED não homogênea é

$$y_p(x) = -x^2 - \frac{5}{2}x - 9.$$

Portanto, a solução geral para a equação dada é:

$$y(x) = y_c(x) + y_p(x) = c_1 e^{(-2-\sqrt{6})x} + c_2 e^{(-2+\sqrt{6})x} - x^2 - \frac{5}{2}x - 9.$$

Exemplo 2: Encontre uma solução particular para $y'' - y' + y = 2sen(3x)$.

Solução: Um palpite natural para uma solução particular seria $Asen(3x)$. Mas, como derivações sucessivas de $sen(3x)$ produzem $sen(3x)$ e $\cos(3x)$, somos levados a procurar uma solução particular que inclua ambos os termos:

$$y_p(x) = Acos(3x) + Bsen(3x).$$

Derivando y_p e substituindo os resultados na ED, obtemos:

$$y_p'' - y_p' + y_p = (-8A - 3B)\,cos(3x) + (3A - 8B)sen(3x) = 2sen(3x).$$

Igualando os coeficientes do cosseno e do seno, temos que

$$\begin{cases} -8A - 3B = 0 \\ 3A - 8B = 2 \end{cases} \Rightarrow A = 6/73 \text{ e } B = -16/73.$$

Assim, uma solução particular para a equação é dada por

$$y_p(x) = \frac{6}{73}cos(3x) - \frac{16}{73}sen(3x).$$

Exemplo 3: Resolva $y'' - 2y' - 3y = 4x - 5 + 6xe^{2x}$.

Solução:

- A solução da equação homogênea associada $y'' - 2y' - 3y = 0$ é $y_c(x) = c_1e^{-x} + c_2e^{3x}$.

- Agora, a presença de $4x - 5$ em g sugere que uma solução particular tenha um polinômio linear. Ainda, como a derivada do produto xe^{2x} produz $2xe^{2x}$ e e^{2x}, supomos também que a solução particular inclua ambas, xe^{2x} e e^{2x}. Em outras palavras, g é a soma de dois tipos de funções básicas:

$$g(x) = g_1(x) + g_2(x) = \textit{polinomial} + \textit{exponenciais}.$$

Assim, pelo princípio da superposição para equações não homogêneas é natural que procuremos uma solução particular da forma

$$y_p(x) = \underbrace{Ax + B}_{y_{p_1}} + \underbrace{Cxe^{2x} + De^{2x}}_{y_{p_2}}.$$

Substituindo na equação dada, obtemos:

$$y_p'' - 2y_p' - 3y_p = -3Ax - 2A - 3B - 3Cxe^{2x} + (2C - 3D)e^{2x} = 4x - 5 + 6xe^{2x}.$$

Desta identidade, obtemos o sistema:

$$\begin{cases} -3A = 4 \\ -2A - 3B = -5 \\ -3C = 6 \\ 2C - 3D = 0 \end{cases} \Rightarrow A = -\frac{4}{3}, B = \frac{23}{9}, C = -2 \text{ e } D = -\frac{4}{3}.$$

Logo, obtemos a solução particular

$$y_p(x) = -\frac{4}{3}x + \frac{23}{9} - 2xe^{2x} - \frac{4}{3}e^{2x}.$$

Portanto, a solução geral para a equação dada é

$$y(x) = y_c(x) + y_p(x) = c_1e^{-x} + c_2e^{3x} - \frac{4}{3}x + \frac{23}{9} - \left(2x + \frac{4}{3}\right)e^{2x}.$$

Observação: A escolha para buscar uma solução particular y_p para uma equação não homogênea deve levar em consideração não somente os tipos de funções que formam g, mas também, como veremos no próximo exemplo, as funções que formam a função complementar y_c.

Exemplo 4: Encontre uma solução particular para $y'' - 5y' + 4y = 8e^x$.

Solução: A derivação de e^x não produz novas funções. Logo, procedendo como antes, podemos simplesmente supor uma solução particular da forma

$$y_p(x) = Ae^x.$$

Mas, neste caso, a substituição dessa expressão na ED nos conduz a $0 = 8e^x$, e, portanto, concluímos que fizemos uma escolha errada para y_p.

Esse fato ocorreu, pois nossa escolha Ae^x já se encontra presente na função complementar:

$$y_c(x) = c_1e^x + c_2e^{4x}.$$

Isso significa que e^x é uma solução para a equação diferencial homogênea associada e um múltiplo Ae^x quando substituído na equação diferencial necessariamente anula esta identicamente.

Qual deve ser então a forma de y_p?
Como nossa escolha inicial Ae^x é também uma solução da equação homogênea associada, devemos multiplicá-la por uma potência de x, de forma a eliminar essa duplicação de solução. Neste caso, consideremos, então, uma solução particular da forma

$$y_p(x) = Axe^x.$$

Assim, temos que

$$y_p'(x) = Axe^x + Ae^x \text{ e } y_p''(x) = Axe^x + 2Ae^x.$$

Substituindo na ED dada, obtemos

$$y_p''(x) - 5y_p'(x) + 4y_p(x) = Axe^x + 2Ae^x - 5Axe^x - 5Ae^x + 4Axe^x = 8e^x,$$

ou seja,

$$-3Ae^x = 8e^x.$$

Desta igualdade, temos que $-3A = 8 \Rightarrow A = -\frac{8}{3}$ e portanto, uma solução particular para a ED é dada por

$$y_p(x) = -\frac{8}{3}xe^x.$$

No **método dos coeficientes indeterminados**, temos dois casos a considerar:

CASO I: Nenhuma função da suposta solução particular é uma solução para a equação diferencial homogênea associada

Tentativas para Soluções Particulares

	$g(x)$	Forma de y_p
1.	1 (qualquer constante)	A
2.	$5x + 7$	$Ax + B$
3.	$3x^2 - 2$	$Ax^2 + Bx + C$
4.	$x^3 - x + 1$	$Ax^3 + Bx^2 + Cx + D$
5.	$\text{sen } 4x$	$A \cos 4x + B \text{ sen } 4x$
6.	$\cos 4x$	$A \cos 4x + B \text{ sen } 4x$
7.	e^{5x}	Ae^{5x}
8.	$(9x - 2)e^{5x}$	$(Ax + B)e^{5x}$
9.	x^2e^{5x}	$(Ax^2 + Bx + C)e^{5x}$
10.	$e^{3x} \text{ sen } 4x$	$Ae^{3x} \cos 4x + Be^{3x} \text{ sen } 4x$
11.	$5x^2 \text{ sen } 4x$	$(Ax^2 + Bx + C) \cos 4x + (Dx^2 + Ex + F) \text{ sen } 4x$
12.	$xe^{3x} \cos 4x$	$(Ax + B)e^{3x} \cos 4x + (Cx + D)e^{3x} \text{ sen } 4x$

CASO II: Uma função na solução particular escolhida é também uma solução para a equação diferencial homogênea associada

Se alguma função na solução particular escolhida é também uma solução para a equação homogênea associada, então esta solução deve ser multiplicada por x^n, em que n é o menor inteiro que elimina essa duplicação.

Método da Variação dos Parâmetros

Considere a equação diferencial linear de 2ª ordem:

$$a_2(x)y'' + a_1(x)y' + a_0(x)y = g(x), \tag{5}$$

Dividindo por $a_2(x)$, obtemos a forma padrão:

$$y'' + P(x)y' + Q(x)y = f(x) \tag{6}$$

Suponha que y_1 e y_2 formem um conjunto fundamental de soluções em I da forma homogênea associada (6); isto é,

$$y_1'' + P(x)y_1' + Q(x)y_1 = 0 \quad \text{e} \quad y_2'' + P(x)y_2' + Q(x)y_2 = 0.$$

Agora, perguntamos: podemos encontrar duas funções u_1 e u_2 tais que

$$y_p = u_1(x)y_1(x) + u_2(x)y_2(x)$$

seja uma solução particular para (6)? Note que nossa suposição para y_p é a mesma que $y_c = c_1y_1 + c_2y_2$, mas substituímos c_1 e c_2 pelos "parâmetros variáveis" u_1 e u_2. Como queremos determinar duas funções desconhecidas, a razão nos diz que precisamos de duas equações. Como na discussão introdutória que resultou na descoberta de (4), uma dessas equações resulta da substituição $y_p = u_1y_1 + u_2y_2$ na equação diferencial dada (6). A outra equação que impomos é

$$y_1u_1' + y_2u_2' = 0. \tag{7}$$

Essa equação é uma suposição que fazemos para simplificar a primeira derivada e, conseqüentemente, a segunda derivada de y_p. Usando a regra do produto para derivar y_p, obtemos

$$y_p' = u_1y_1' + y_1u_1' + u_2y_2' + y_2u_2' = u_1y_1' + u_2y_2' + \overbrace{\boldsymbol{y_1u_1' + y_2u_2'}}^{\text{zero de (7)}} \tag{8}$$

assim

$$y_p' = u_1y_1' + u_2y_2'.$$

$$y_p'' = u_1y_1'' + y_1'u_1' + u_2y_2'' + y_2'u_2'.$$

Substituindo esses resultados em (6), temos

$$\begin{aligned} y_p'' + Py_p' + Qy_p &= u_1y_1'' + y_1'u_1' + u_2y_2'' + y_2'u_2' + Pu_1y_1' + Pu_2y_2' + Qu_1y_1 + Qu_2y_2 \\ &= u_1\underbrace{[y_1'' + Py_1' + Qy_1]}_{\boxed{\textbf{zero}}} + u_2\underbrace{[y_2'' + Py_2' + Qy_2]}_{\boxed{\textbf{zero}}} + y_1'u_1' + y_2'u_2' = f(x). \end{aligned}$$

Em outras palavras, u_1 e u_2 têm de ser funções que também satisfaçam a condição

$$y_1'u_1' + y_2'u_2' = f(x) \tag{9}$$

As equações (7) e (9) constituem um sistema linear de equações para determinar as derivadas u_1' e u_2'. Pela regra de Cramer,* a solução para

$$y_1u_1' + y_2u_2' = 0$$

$$y_1'u_1' + y_2'u_2' = f(x)$$

pode ser expressa em termos de determinantes:

$$u_1' = \frac{W_1}{W} \quad \text{e} \quad u_2' = \frac{W_2}{W}, \tag{10}$$

em que

$$W = \begin{vmatrix} y_1 & y_2 \\ y_1' & y_2' \end{vmatrix}, \quad W_1 = \begin{vmatrix} 0 & y_2 \\ f(x) & y_2' \end{vmatrix}, \quad \text{e} \quad W_2 = \begin{vmatrix} y_1 & 0 \\ y_1' & f(x) \end{vmatrix} \tag{11}$$

O determinante W é o Wronskiano de y_1 e y_2. Pela independência linear de y_1 e y_2 em I, sabemos que $W(x) \neq 0$ para todo x no intervalo.

Resumo do Método

Em geral, não é uma boa idéia memorizar fórmulas em vez de entender o processo. Porém, o procedimento precedente é muito longo e complicado de usar cada vez que queremos resolver uma equação diferencial. Neste caso, é mais eficiente simplesmente usar as fórmulas de (10). Então, para resolver $a_2y'' + a_1y' + a_0y = g(x)$, primeiro encontre a função complementar $y_c = c_1y_1 + c_2y_2$ e então calcule o Wronskiano

$$W = \begin{vmatrix} y_1 & y_2 \\ y_1' & y_2' \end{vmatrix}.$$

Dividindo por a_2, colocamos a equação na forma $y'' + Py' + Qy = f(x)$ para determinar $f(x)$. Encontramos u_1 e u_2 integrando $u_1' = W_1/W$ e $u_2' = W_2/W$, em que W_1 e W_2 estão definidos em (11). Uma solução particular é $y_p = u_1y_1 + u_2y_2$. A solução geral para a equação é portanto $y = y_c + y_p$.

Exemplo 1:

Resolva
$$y'' - 4y' + 4y = (x + 1)e^{2x}.$$

Solução Como a equação auxiliar é $m^2 - 4m + 4 = (m - 2)^2 = 0$, temos
$$y_c = c_1e^{2x} + c_2xe^{2x}.$$

Identificando $y_1 = e^{2x}$ e $y_2 = xe^{2x}$, calculamos o Wronskiano
$$W(e^{2x}, xe^{2x}) = \begin{vmatrix} e^{2x} & xe^{2x} \\ 2e^{2x} & 2xe^{2x} + e^{2x} \end{vmatrix} = e^{4x}.$$

Como a equação diferencial dada já está na forma (6) (isto é, o coeficiente de y'' é 1), identificamos $f(x) = (x + 1)e^{2x}$. Por (11), obtemos
$$W_1 = \begin{vmatrix} 0 & xe^{2x} \\ (x + 1)e^{2x} & 2xe^{2x} + e^{2x} \end{vmatrix} = -(x + 1)xe^{4x}$$
$$W_2 = \begin{vmatrix} e^{2x} & 0 \\ 2e^{2x} & (x + 1)e^{2x} \end{vmatrix} = (x + 1)e^{4x}$$

e então, por (10),
$$u_1' = -\frac{(x + 1)xe^{4x}}{e^{4x}} = -x^2 - x, \quad u_2' = \frac{(x + 1)e^{4x}}{e^{4x}} = x + 1.$$

Integrando $u_1{}'$ e $u_2{}'$, obtemos:

$$u_1 = -\frac{x^3}{3} - \frac{x^2}{2} \quad \text{e} \quad u_2 = \frac{x^2}{2} + x.$$

Portanto,

$$y_p = \left(-\frac{x^3}{3} - \frac{x^2}{2}\right)e^{2x} + \left(\frac{x^2}{2} + x\right)xe^{2x}$$

$$= \left(\frac{x^3}{6} + \frac{x^2}{2}\right)e^{2x}.$$

Logo,

$$y = y_c + y_p = c_1e^{2x} + c_2xe^{2x} + \left(\frac{x^3}{6} + \frac{x^2}{2}\right)e^{2x}. \quad \blacksquare$$

Exemplo 2:

Resolva
$$4y'' + 36y = \text{cosec } 3x.$$

Solução Primeiro, colocamos a equação na forma padrão (6), dividindo por 4:

$$y'' + 9y = \frac{1}{4}\, cossec\ 3x$$

Como as raízes da equação auxiliar $m^2 + 9 = 0$ são $m_1 = 3i$ e $m_2 = -3i$, a função complementar é

$$y_c = c_1 \cos 3x + c_2 \text{ sen } 3x.$$

Usando $y_1 = \cos 3x$, $y_2 = \text{sen } 3x$ e $f(x) = (1/4) \text{ cosec } 3x$, encontramos

$$W(\cos 3x,\ \text{sen } 3x) = \begin{vmatrix} \cos 3x & \text{sen } 3x \\ -3 \text{ sen } 3x & 3 \cos 3x \end{vmatrix} = 3$$

$$W_1 = \begin{vmatrix} 0 & \text{sen } 3x \\ \frac{1}{4}\text{cosec } 3x & 3\cos 3x \end{vmatrix} = -\frac{1}{4}$$

$\text{cosec } 3x = \dfrac{1}{\text{sen } 3x}$

$$W_2 = \begin{vmatrix} \cos 3x & 0 \\ -3\,\text{sen } 3x & \frac{1}{4}\text{cosec } 3x \end{vmatrix} = \frac{1}{4}\frac{\cos 3x}{\text{sen } 3x}.$$

Integrando,

$$u_1' = \frac{W_1}{W} = -\frac{1}{12} \quad \text{e} \quad u_2' = \frac{W_2}{W} = \frac{1}{12}\frac{\cos 3x}{\text{sen } 3x}$$

obtemos

$$u_1 = -\frac{1}{12}x \quad \text{e} \quad u_2 = \frac{1}{36}\ln|\text{sen } 3x|.$$

Então, uma solução particular é

$$y_p = -\frac{1}{12}x\cos 3x + \frac{1}{36}(\text{sen } 3x)\ln|\text{sen } 3x|.$$

A solução geral para a equação é

$$y = y_c + y_p = c_1\cos 3x + c_2\,\text{sen } 3x - \frac{1}{12}x\cos 3x + \frac{1}{36}(\text{sen } 3x)\ln|\text{sen } 3x|. \qquad \textbf{(12)}$$

■