IFC Blumenau - EEA0908 - álgebra linear - 2022.2 - PROVA 2 de 3
Bacharelado em Engenharia Elétrica - 24/10/2022
Prof. Me. Luiz G. Cechetto Jr.

NOME: GABARITO!

Número da chamada: ______

As questões devem ser feitas da forma completa, com seus raciocínios, não colocar somente resposta final.

Simplificar frações e racionalizar raízes, evitar ao máximo o uso de aproximações.

Pode ser usada calculadora científica que não são calculadoras gráficas e/ou programáveis.

Entregar as questões em ordem numérica nas folhas brancas que você recebeu.

Incluir a folha de anotações no final.

---

1. Resolva o sistema linear possível e determinado usando a forma que julgar mais conveniente. Escreva a solução no final.

$$\begin{cases} 5c + b + 7a = -25 \\ b + a + d - c - 5e = -29 \\ 3a = -12 \\ a - b + c + 2d = 5 \\ 5b + 2a = -18 \end{cases}$$

---

2. Use o método de Gauss-Jordan (escalonamento completo) ou o método de Gauss (escalonamento parcial) para mostrar que o sistema linear abaixo é um sistema Impossível. Justifique porque a solução é um conjunto vazio.

$$\begin{cases} 2x - y + z = -1 \\ -5x - 20y - 15z = 11 \\ 3x + 3y + 4z = 3 \\ 2x + 17y + 11z = -14 \end{cases}$$

---

3. Use o método de Gauss-Jordan (escalonamento completo com a identidade ao lado) para calcular a matriz inversa da matriz abaixo.
Dica: Os resultados na inversa são todos inteiros.

$$\begin{pmatrix} \frac{1}{14} & \frac{-3}{14} & \frac{5}{14} \\ \frac{-5}{14} & \frac{1}{14} & \frac{3}{14} \\ \frac{3}{14} & \frac{5}{14} & \frac{1}{14} \end{pmatrix}$$

---

4. Foi visto em aulas que:
Um sistema linear pode ser escrito através de usas matrizes associadas: $AX = B$
Foi visto também que:

$$\begin{aligned} AX &= B \\ A^{-1}AX &= A^{-1}B \\ IX &= A^{-1}B \\ X &= A^{-1}B \end{aligned}$$

Portando, use o resultado da questão anterior e o método da matriz inversa $X = A^{-1}B$ para resolver o sistema linear possível e determinado abaixo:

$$\begin{cases} \frac{1}{14}x - \frac{3}{14}y + \frac{5}{14}z = 1 \\ -\frac{5}{14}x + \frac{1}{14}y + \frac{3}{14}z = 2 \\ \frac{3}{14}x + \frac{5}{14}y + \frac{1}{14}z = 4 \end{cases}$$

---

5. Mostre que o conjunto V abaixo não é um espaço vetorial:
Dê um contra-exemplo.

$V = \mathbb{R}^3$
$\oplus$: $(a, b, c) + (d, e, f) = (a, b, c)$
$\cdot$: $k(a, b, c) = (ka, kb, kc)$

---

6. Justifique porque o conjunto W abaixo não é um subespaço vetorial em relação a soma e multiplicação por escalar usuais.

$$W = \left\{ \begin{bmatrix} a & b & c \\ d & e & f \end{bmatrix} \in M_{2\times 3} : \ a = 1 \ e \ b = c \ e \ e = 2f \right\}$$

---

7. Escreva o vetor $(-6, -11, 12, 9) \in \mathbb{R}^4$ como combinação dos vetores $u = (1, 2, 3, 4)$, $v = (0, -1, 2, 3)$ e $w = (2, 3, 0, 2)$

---

8. Encontre o subespaço gerado pelo conjunto $A = \{(1, 5, 1), (2, 1, -1)\}$

---

9. Verifique se o conjunto D é LD ou LI

$$D = \left\{ \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \right\}$$

---

10. Determine uma base e a dimensão do subespaço vetorial W
$W = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 ; x = y \ e \ z = 2y\}$

1) $3a = -12$

$a = -4$

$5b + 2a = -18$

$5b - 8 = -18$

$b = -\frac{10}{5}$

$b = -2$

$5c + b + 7a = -25$

$5c - 2 - 28 = -25$

$c = \frac{5}{5}$

$c = 1$

$a - b + c + 2d = 5$

$-4 + 2 + 1 + 2d = 5$

$d = 6/2$

$d = 3$

$b + a + d - c - 5e = -29$

$-2 - 4 + 3 - 1 - 5e = -29$

$e = \frac{-25}{-5}$

$e = +5$

$(a, b, c, d, e) = (-4, -2, +1, +3, +5)$

---

2)
$$\left[\begin{array}{ccc|c} 2 & -1 & 1 & -1 \\ -5 & -20 & -15 & 11 \\ 3 & 3 & 4 & 3 \\ 2 & 17 & 11 & 14 \end{array}\right] \xrightarrow[\substack{L_3 = L_3 - \frac{3}{2}L_1 \\ L_4 = L_4 - L_1}]{L_2 = L_2 + \frac{5}{2}L_1} \left[\begin{array}{cccc|c} 2 & -1 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & -45/2 & -25/2 & 0 & 17/2 \\ 0 & 9/2 & 5/2 & 0 & 9/2 \\ 0 & 18 & 10 & -14 & 1 \end{array}\right]$$

$L_2 = -\frac{2}{45}L_2$

$L_1 = \frac{1}{2}L_1$

$L_4 = \frac{1}{18}L_4$

$L_3 = \frac{2}{9}L_3$

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -1/2 & 1/2 & -1/2 \\ 0 & 1 & 5/9 & -17/45 \\ 0 & 1 & 5/9 & 1 \\ 0 & 1 & 5/9 & 1/18 \end{array}\right] \xrightarrow[L_4 = L_4 - L_3]{L_3 = L_3 - L_2}$$

$$\left[\begin{array}{ccccc} 1 & -1/2 & 1/2 & 0 & -1/2 \\ 0 & 1 & 5/9 & 0 & -17/45 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 62/45 \\ 0 & 0 & 0 & 7/9 & -17/18 \end{array}\right] \Rightarrow 0 = \frac{62}{45}$$

$\Downarrow$

$S = \emptyset$

$\Downarrow$

S.I.

3)
$$\left[\begin{array}{ccc|ccc} \frac{1}{14} & -\frac{3}{14} & \frac{5}{14} & 1 & 0 & 0 \\ -\frac{5}{14} & \frac{1}{14} & \frac{3}{14} & 0 & 1 & 0 \\ \frac{3}{14} & \frac{5}{14} & \frac{1}{14} & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \xrightarrow{L_1 = \frac{L_1}{14} \quad L_2 = \frac{L_2}{14} \quad L_3 = \frac{L_3}{14}}$$

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & -3 & 5 & 14 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 2 & 5 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & -3 & 0 & 1 \end{array}\right] \xrightarrow{L_2 = -L_2 \quad L_3 = L_3 + L_2}$$

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & -3 & 5 & 14 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & -5 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & 1 & 1 \end{array}\right] \xrightarrow[L_2 = L_2 + 2L_3]{L_1 = L_1 - 5L_3}$$

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & -3 & 0 & 4 & -5 & -5 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & 1 & 1 \end{array}\right] \xrightarrow{L_1 = L_1 + 3L_2}$$

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 1 & -2 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & 1 & 1 \end{array}\right] \Rightarrow \boxed{\text{INVERSA} \begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 \\ -1 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & 1 \end{pmatrix}}$$

4)
$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 \\ -1 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 4 \end{pmatrix} \Rightarrow \boxed{\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 9 \\ 8 \end{pmatrix}}$$

5) $u = (a, b, c) \qquad v = (d, e, f)$

$u + v = (a, b, c) \neq (d, e, f) = v + u$

$$\Downarrow$$

$$\boxed{u + v \neq v + u}$$

6)
$$W = \begin{pmatrix} 1 & b & b \\ d & 2f & f \end{pmatrix}$$

$\boxed{\vec{0} \notin W} \Rightarrow W$ NÃO É S.E.V.

7) $a\begin{pmatrix}1\\2\\3\\4\end{pmatrix}+b\begin{pmatrix}0\\-1\\2\\3\end{pmatrix}+c\begin{pmatrix}2\\3\\0\\2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-6\\-11\\12\\9\end{pmatrix}$

$$\left(\begin{array}{ccc|c}1&0&2&-6\\2&-1&3&-11\\3&2&0&12\\4&3&2&9\end{array}\right)\xrightarrow[L_4=L_4-4L_1]{L_2=L_2-2L_1,\ L_3=L_3-3L_1}\left(\begin{array}{ccc|c}1&0&2&-6\\0&-1&-1&1\\0&2&-6&30\\0&3&-6&33\end{array}\right)\xrightarrow[L_4=L_4+3L]{L_2=-L_2,\ L_3=L_3+2L}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c}1&0&2&-6\\0&1&1&-1\\0&0&-8&32\\0&0&-9&36\end{array}\right)\xrightarrow[L_4=L_4-\frac{9}{8}L_3]{L_3=-\frac{1}{8}L_3}\left(\begin{array}{ccc|c}1&0&2&-6\\0&1&1&-1\\0&0&1&-4\\0&0&0&0\end{array}\right)\longrightarrow$$

$$\xrightarrow[L_2=L_2-L_3]{L_1=L_1-2L_3}\left(\begin{array}{ccc|c}1&0&0&2\\0&1&0&3\\0&0&1&-4\end{array}\right)$$

$\therefore\ \boxed{(-6,-11,12,9)=2u+3v-4w}$

---

8) $a(1,5,1)+b(2,1,-1)=(x,y,z)$

$$\left(\begin{array}{cc|c}1&2&x\\5&1&y\\1&-1&z\end{array}\right)\xrightarrow[L_3=L_3-L_1]{L_2=L_2-5L_1}\left(\begin{array}{cc|c}1&2&x\\0&-9&y-5x\\0&-3&z-x\end{array}\right)\xrightarrow{L_3=L_3-3L_2}$$

$$\left(\begin{array}{cc|c}1&2&x\\0&-9&y-5x\\0&0&14x-3y+z\end{array}\right)$$

$W=\{(x,y,z)\in\mathbb{R}\ /\ 14x-3y+z=0\}$

São planos em $\mathbb{R}^3$ que passam pela origem $(0,0,0)$

9) $a\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} + b\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} + c\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$

$\begin{cases} b+2c=0 \\ a-b=0 \\ b+c=0 \\ a=0 \end{cases}$ $a=0$ $\quad a-b=0$, $a=b$, $b=0$ $\quad b+c=0$, $b=-c$, $c=0$ $\quad b+2c=0$, $0=0.$

D é L.I. (só solução $\vec{0}$)

10) $(x,y,z)=(y,y,2y)=y(1,1,2)$

Base $\beta=\{(1,1,2)\}$

de dim $= \underline{1}$