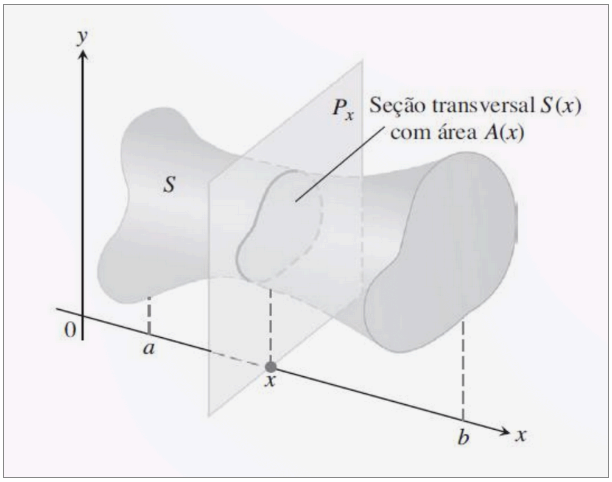
Aplicações da Integral Definida

Método das Seções Transversais

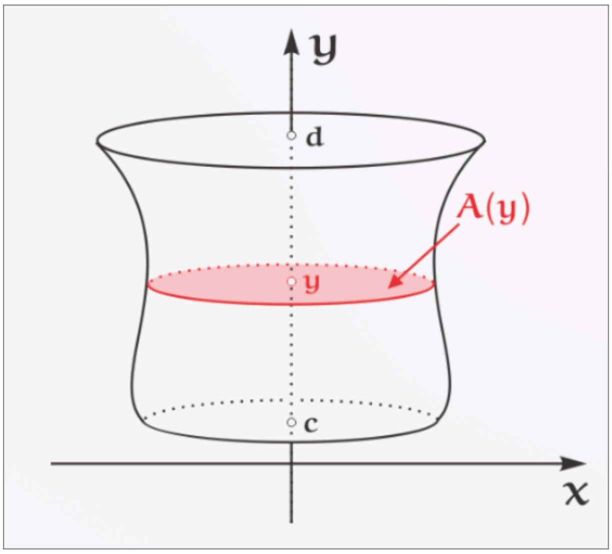
Se temos um sólido S, com comprimento de a até b e com seções transversais perpendiculares ao eixo x, como o da seguinte imagem:



Sendo $A(x)$ a função que nos dá a área da seção transversal no ponto x, o volume do sólido S pode ser definido como

$$V = \int_a^b A(x)\,\mathrm{d}x.$$

Já se temos um sólido de altura c até d com seções transversais perpendiculares ao eixo y, como o da seguinte imagem:

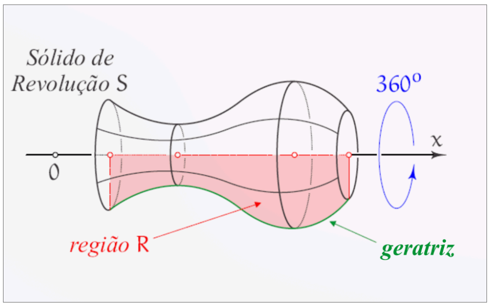


Então seu volume, é dado por

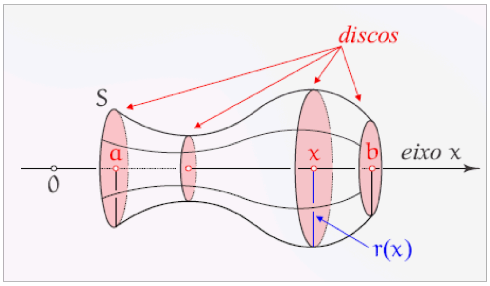
$$V = \int_c^d A(y)\,\mathrm{d}y$$

Volume de Sólidos de Revolução (Método dos Discos)

Quando o sólido S foi obtido pela rotação de uma região R ao redor de algum dos eixos, o chamamos de sólido de revolução.



Nesse caso as seções transversais perpendiculares ao eixo x são discos:



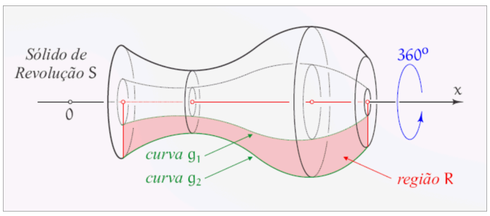
Suponha que podemos encontrar uma função $r(x)$ que nos diga o raio de cada disco de acordo com a posição x do mesmo.

Assim, a área de cada seção transversal é dada por $A(x) = \pi r^2(x)$, substituindo $A(x)$ na fórmula de volume que já conhecemos obtemos

$$V = \int_a^b A(x)\,\mathrm{d}x = \int_a^b \pi r^2(x)\,\mathrm{d}x.$$

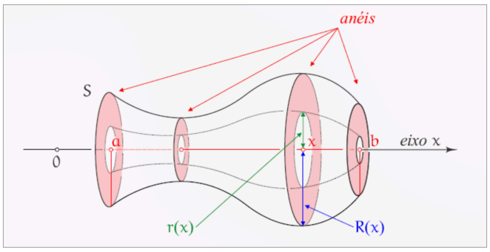
Volume de Sólidos de Revolução (Método dos Anéis Circulares)

Quando temos um sólido de revolução, semelhante ao anterior, mas que foi concebido pela rotação de uma região R que foi delimitada por duas curvas g_1 e g_2, como o que se segue:



Podemos obter um sólido"furado" ao longo do eixo de rotação. As curvas g_1 e g_2 são as geratrizes da superfície de revolução.

Nesse caso as seções transversais serão anéis circulares, suponha agora que podemos encontrar além da função $r(x)$ (que nos dá o raio interno dos anéis), uma função $R(x)$ que nos dará o raio externo.

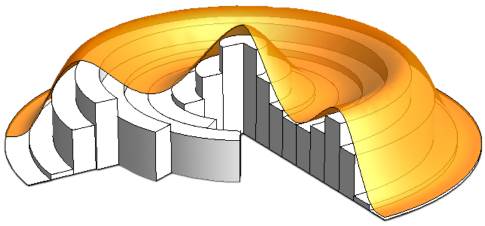


Portanto a área de cada seção é a área da circunferência maior subtraída pela área da circunferência menor: $A(x) = \pi R^2(x) - \pi r^2(x) = \pi\left(R^2(x) - r^2(x)\right)$ e o volume do sólido de revolução é

$$V = \int_a^b \pi\left(R^2(x) - r^2(x)\right) \mathrm{d}x$$

Método das Cascas Cilíndricas

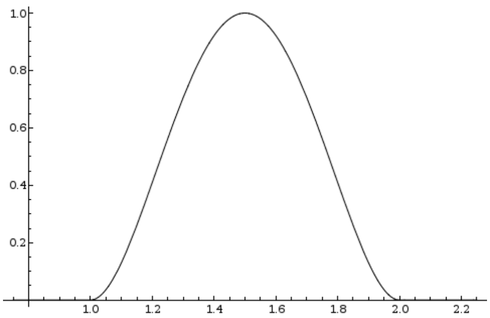
Para formas que não podem ser representadas com seções em formas de discos ou anéis, pode ser mais fácil compreender o volume como uma série de cascas cilíndricas:

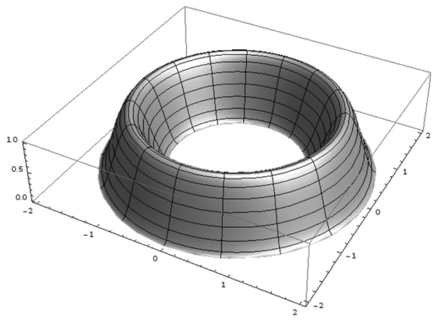


Isso nos dá a seguinte fórmula de volume:

$$V = \int_a^b 2\pi(\text{raio da casca})(\text{altura da casca})\, \mathrm{d}x$$

Vamos levar a função $y = (x-1)^2(x-2)^2$ e o sólido de rotação que ela gera em conta:





O raio da casca será $x - L$, sendo L a distância entre a região do gráfico e o eixo de rotação. A altura é expressa pela função que gerou o sólido:

$$V = \int_a^b 2\pi(x - L)f(x)\, \mathrm{d}x$$

No caso do sólido acima, o eixo de rotação é $x = 0$ (ou seja, o eixo y) e a região do gráfico começa em $x = 1$, portanto $L = 1$. a e b são os valores de x onde a região está compreendida. Portanto temos

$$V = \int_1^2 2\pi(x-1)(x-1)^2(x-2)^2 = 2\pi \int_1^2 (x-1)^3(x-2)^2$$

Resumo do método

1. Desenhe a região e esboce um segmento de reta que atravesse paralelamente ao eixo de revolução, nomeie a função que define a altura do segmento (altura da casca) e a distância do eixo de revolução (raio da casca).
2. Determine os limites de integração (de que ponto até que ponto a região vai).
3. Calcule a integral do produto $2\pi(\text{raio da casca})(\text{altura da casca})$ em relação a variável (x ou y) para determinar o volume.