9- Polinômios e Equações Polinomiais

Polinômios

DEFINIÇÃO DE POLINÔMIO

Um polinômio é uma função na variável **x** da forma: $P(x) = a_nx^n + a_{n-1}x^{n-1} + \ldots + a_1x + a_0$

Em que:

i) $a_n, a_{n-1}, \ldots, a_1$ e a_0 são os coeficientes do polinômio.

ii) Os expoentes são números naturais.

Exemplos

1°) $P(x) = 3x^4 - 7x^3 + 8x + 2$

2°) $P(x) = -4x^5 + 8x^4 - 9x^3 + 18x^2 + 7x - 1$

Um polinômio é dito **nulo** se todos os seus coeficientes são iguais a zero.
Portanto, $P(x) = a_nx^n + a_{n-1}x^{n-1} + \ldots + a_1x + a_0$ é nulo se, e somente se, $a_n = a_{n-1} = \ldots = a_1 = a_0 = 0$.

GRAU DO POLINÔMIO

Considere o polinômio $P(x) = a_nx^n + a_{n-1}x^{n-1} + \ldots + a_1x + a_0$. Dizemos que o grau de $P(x)$ é igual a **n**, se $a_n \neq 0$.

Exemplos

1°) O grau de $P(x) = 7x^4 - 3x^2 + 8$ é igual a 4.

2°) O grau de $P(x) = 2x^2 + 8$ é igual a 2.

3°) O grau de $P(x) = 13$ é igual a zero.

OBSERVAÇÃO

Não se define o grau de um polinômio nulo.

POLINÔMIOS IDÊNTICOS

Os polinômios $P(x) = a_n x^n + \dots + a_2 x^2 + a_1 x + a_0$ e $Q(x) = b_n x^n + \dots + b_2 x^2 + b_1 x + b_0$ são idênticos se, e somente se, $a_n = b_n$, $a_{n-1} = b_{n-1}$, ..., $a_2 = b_2$, $a_1 = b_1$ e $a_0 = b_0$, e escrevemos $P(x) \equiv Q(x)$.

Exemplo

Determinar os valores de **a**, **b** e **c** para os quais os polinômios $P(x) = ax^2 + 3x + 9$ e $B(x) = (b + 3)x^2 + (c - 1)x + 3b$ são idênticos.

Resolução:

Igualando os coeficientes dos termos correspondentes, obtemos:

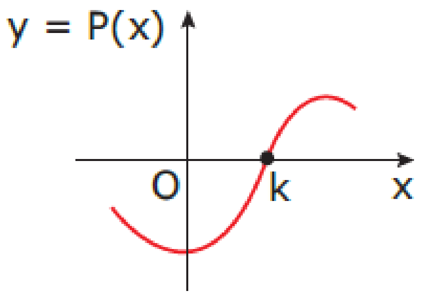
$$\begin{cases} a = b + 3 \\ 3 = c - 1 \\ 9 = 3b \end{cases}$$

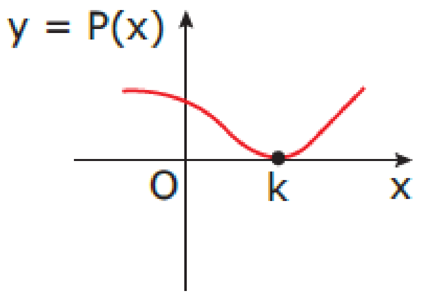
Resolvendo o sistema, obtemos $a = 6$, $b = 3$ e $c = 4$.

RAIZ OU ZERO DE UM POLINÔMIO

Dizemos que um número **k** é raiz de um polinômio $P(x)$ se, e somente se, $P(k) = 0$.

Do ponto de vista geométrico, a raiz representa o ponto no qual a curva, correspondente ao gráfico de $P(x)$, intercepta o eixo das abscissas no plano cartesiano.





OPERAÇÕES COM POLINÔMIOS

Adição e subtração

Dados os polinômios:

$A(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \ldots + a_2x^2 + a_1x + a_0$ e

$B(x) = b_n x^n + b_{n-1}x^{n-1} + \ldots + b_2x^2 + b_1x + b_0$

i) A **adição** $A(x) + B(x)$ é dada por:

$$A(x) + B(x) = (a_n + b_n)x^n + (a_{n-1} + b_{n-1})x^{n-1} + \ldots + (a_2 + b_2)x^2 + (a_1 + b_1)x + (a_0 + b_0)$$

ii) A **subtração** $A(x) - B(x)$ é dada por:

$$A(x) - B(x) = (a_n - b_n)x^n + \ldots + (a_{n-1} - b_{n-1})x^{n-1} + \ldots + (a_2 - b_2)x^2 + (a_1 - b_1)x + (a_0 - b_0)$$

Portanto, nessas operações, basta adicionarmos ou subtrairmos os termos semelhantes.

Exemplo

Considerar os polinômios $A(x) = 5x^4 - 3x^3 + 18x^2 - 9x + 12$ e $B(x) = x^4 + 23x^3 - 7x^2 + x + 3$. Assim, temos:

$A(x) + B(x) = 6x^4 + 20x^3 + 11x^2 - 8x + 15$

$A(x) - B(x) = 4x^4 - 26x^3 + 25x^2 - 10x + 9$

Multiplicação

O produto dos polinômios $A(x)$ e $B(x)$ é obtido através da multiplicação de cada termo de $A(x)$ por todos os termos de $B(x)$, reduzindo os termos semelhantes.

O grau do polinômio $A(x).B(x)$ é igual à soma dos graus de $A(x)$ e $B(x)$.

Exemplo

Sejam os polinômios $A(x) = x^2 - 3x + 2$ e $B(x) = 2x - 1$. Assim, temos:

$A(x).B(x) = (x^2 - 3x + 2)(2x - 1) \Rightarrow$

$A(x).B(x) = 2x^3 - x^2 - 6x^2 + 3x + 4x - 2 \Rightarrow$

$A(x).B(x) = 2x^3 - 7x^2 + 7x - 2$

Exercícios

(1) Qual deve ser o valor de k para que o grau de $f(x) = (k^2 - 9)x^3 + 7x^2 - 5x + 1$ seja igual a 2?
R: $k = -3$ ou $k = 3$
(2) Sabendo que $x = -3$ é raiz do polinômio $p(x) = 2x^3 + mx^2 - 5x + 3$, determine o valor de m.
R: $m = 4$
(3) Determine a e b em $p(x) = -3x^4 + ax^3 - 5x^2 + bx - 2$, sabendo que 1 é raiz de $p(x)$ e que $p(2) = -80$. R: $a = -5$ e $b = 15$

(4) Determine, em cada caso, os valores de a e b de modo que:

a) $3x + 4 \equiv (a + 1)x + 2b$

b) $ax^2 + (a - b) \cdot x + (b + 6) \equiv 3x^2 + 5x + 4$

c) $\dfrac{a}{x} + \dfrac{b}{x - 1} \equiv \dfrac{3x + 7}{x^2 - x}$

R: a) $a = 2$ e $b = 2$
b) $a = 3$ e $b = -2$
c) $a = -7$ e $b = 10$

(5) Sendo os polinômios $f(x) = 2x - 1$, $g(x) = -4x^2 + 6x + 3$ e $h(x) = 5x^2 - 3x$, determine:

a) $f(x) + g(x)$ b) $g(x) - h(x)$ c) $f(x) \cdot g(x) + h(x)$

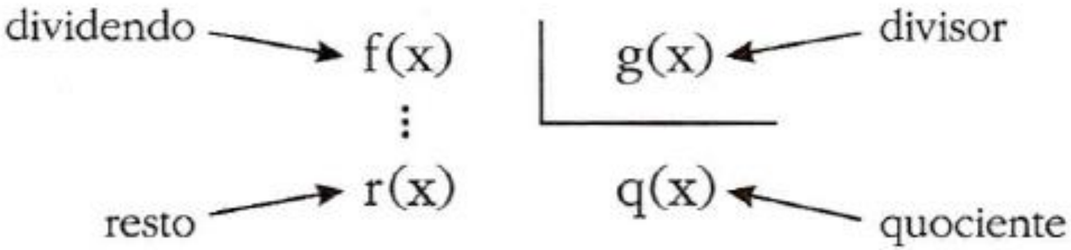
R: a) $-4x^2 + 8x + 2$
b) $-9x^2 + 9x + 3$
c) $-8x^3 + 21x^2 - 3x - 3$

Divisão (método da chave)

Sejam dois polinômios, f(x) como dividendo e g(x) como divisor, com $g(x) \neq 0$. Dividir f(x) por g(x) é determinar outros dois polinômios: o quociente q(x) e o resto r(x), tais que:

1º) $f(x) = g(x) \cdot q(x) + r(x)$ 2º) grau r < grau g ou $r(x) \equiv 0$

Um possível esquema de divisão é apresentado a seguir:



De modo geral, a divisão de dois polinômios quaisquer é feita por meio do *método da chave*, que apresentaremos a seguir.

Exemplo: Efetuar a divisão de $f(x)$ por $g(x)$ pelo método da chave.

a) $f(x) = -6x^4 + 5x^3 - 4x^2 + 7x - 11,\ g(x) = 2x^2 - x + 3$ R: $q(x) = -3x^2 + x + 3, r(x) = 7x - 20$

b) $f(x) = x^3 - 7x + 6,\ g(x) = x + 3$ R: $q(x) = x^2 - 3x + 2, r(x) = 0$

Exercícios

(1) Em cada caso, determine o quociente $q(x)$ e o resto $r(x)$ da divisão de $f(x)$ por $g(x)$, sendo:

a) $f(x) = -14x^2 + 3x - 5$ e $g(x) = 7x + 2$

b) $f(x) = x^3 - x^2 - 5x + 1$ e $g(x) = x^2 - 3x$

c) $f(x) = x^4 + x^3 - x^2 + 1$ e $g(x) = x^2 - 2$

d) $f(x) = 6x^5 - 2x^4 + 3x^3 - 5x^2 + x - 3$ e $g(x) = 3x^3 - 4x^2 + x - 1$

R: a) $q(x) = -2x + 1$; $r = -7$

b) $q(x) = x + 2$; $r(x) = x + 1$

c) $q(x) = x^2 + x + 1$; $r(x) = 2x + 3$

d) $q(x) = 2x^2 + 2x + 3$; $r(x) = 7x^2$

(2) Dividindo um polinômio $p(x)$ por $x^2 + x - 3$ obtemos como quociente $q(x) = 3x + 5$ e resto $r(x) = -2x + 3$. Qual é o valor de $p(2)$? R: 32

(3) Sabendo que $f(x) = 4x^2 - 2x + a$ é divisível por $g(x) = 2x - 3$, determine o valor de a. R: -6

Divisão por Binômios

Teorema do Resto: Seja $p(x)$ um polinômio tal que grau $p \geq 1$. O resto da divisão de $p(x)$ por $x - a$ é igual a $p(a)$, ou seja, $r = p(a)$.

Em outras palavras, para encontrarmos o resto da divisão de um polinômio $p(x)$ por um binômio do 1º grau, basta calcularmos a raiz do binômio do 1º grau e, em seguida, substituirmos no polinômio $p(x)$.

Exemplo: Calcular o resto da divisão de $f(x) = 3x^3 + 4x^2 - x + 5$ por $g(x) = x - 1$.

Observação

Embora tenhamos enunciado o teorema do resto para divisões de um polinômio *f* por outro do tipo $x \pm a$ ($a \in \mathbb{C}$), ele permanece válido quando o divisor for do 1º grau do tipo $ax + b$, com $a \in \mathbb{C}$ e $b \in \mathbb{C}$ e, então, temos: $r = f\left(-\dfrac{b}{a}\right)$.

Uma consequência importante do Teorema do Resto é o Teorema de D'Alembert.

Teorema de D'Alembert: Um polinômio $f(x)$ é divisível por $x - a$ quando a é raiz de f.

Exemplo: Qual deve ser o valor de m para que $f(x) = x^4 - 2x^3 + x^2 + mx - 3$ seja divisível por $x - 3$?

Exercícios

(1) Em cada caso, determine o resto $r(x)$ da divisão de $f(x)$ por $g(x)$, sendo:

a) $f(x) = (x-4)^2$ e $g(x) = x-3$
b) $f(x) = x^4 - 3x^2 + 5x - 1$ e $g(x) = x + 1$

R: a) 1 b) -8

(2) Em cada caso, $f(x)$ é divisível por $g(x)$. Determine o valor de m.

a) $f(x) = 4x^2 - 3x + m$ e $g(x) = x + 4$
b) $f(x) = -x^3 + mx^2 - 5x + 2$ e $g(x) = x + 2$

R: a) -76, b) -5

(3) Ao dividirmos $2x^3 + x^2 + mx - 3$ por $x + 5$ obtemos resto igual a -53. Qual é o valor de m?
R: -35

(4) Um polinômio $p(x)$ dividido por $x - 3$, deixa resto 5 e, dividido por $x + 1$, deixa resto 2. Qual é o resto da divisão de $p(x)$ por $(x-3)(x+1)$?
R: $r(x) = \frac{3}{4}x + \frac{11}{4}$

Dispositivo Prático de Briot-Ruffini

É um dispositivo que permite determinar o quociente e o resto da divisão de um polinômio $p(x)$ por um binômio da forma $x - a$.

Exemplo: Obter o quociente e o resto da divisão de $f(x) = -2x^3 + x^2 - 5x + 7$ por $g(x) = x - 2$, usando o dispositivo de Briot-Ruffini.

- *1º passo:* calcular a raiz do divisor g(x) e, ao seu lado, colocar os coeficientes ordenados do dividendo f(x).
  raiz de g(x): $x - 2 = 0 \Rightarrow x = 2$

$$\begin{array}{c|cccc} 2 & -2 & 1 & -5 & 7 \\ \hline & & & & \end{array}$$

- *2º passo:* abaixar o 1º coeficiente do dividendo (–2) e multiplicá-lo pela raiz do divisor.

  $(-2) \cdot 2 = -4$

$$\begin{array}{c|cccc} 2 & -2 & 1 & -5 & 7 \\ \hline & -2 & & & \end{array}$$

- *3º passo:* somar o produto obtido com o coeficiente seguinte $(-4 + 1 = -3)$. O resultado é colocado abaixo desse coeficiente.

$$\begin{array}{c|cccc} 2 & -2 & 1 & -5 & 7 \\ \hline & -2 & -3 & & \end{array}$$

▶ *4º passo:* com esse resultado, repetir as operações (multiplicar pela raiz e somar com o coeficiente seguinte), e assim por diante.

$$\begin{array}{c|cccc} 2 & -2 & 1 & -5 & 7 \\ \hline & -2 & -3 & -11 & \boxed{-15} \end{array}$$

O último dos resultados obtidos no algoritmo acima é o *resto de divisão*. Assim, $r = -15$.

Os demais resultados obtidos no algoritmo correspondem aos coeficientes ordenados do *quociente* da divisão.

Assim, $q(x) = -2x^2 - 3x - 11$.

Exercício: Determine o quociente e o resto da divisão de $f(x)$ por $g(x)$ em cada caso, utilizando o dispositivo de Briot-Ruffini.

a) $f(x) = 2x^3 - x^2 + x - 3$ e $g(x) = x + 4$

b) $f(x) = -x^4 + 5x^3 - 2x + 1$ e $g(x) = x - 1$

c) $f(x) = 12x^3 - 8x^2 + 5x + 2$ e $g(x) = x - \dfrac{1}{2}$

R: a) $q(x) = 2x^2 - 9x + 37$; $r = -151$

b) $q(x) = -x^3 + 4x^2 + 4x + 2$; $r = 3$

c) $q(x) = 12x^2 - 2x + 4$; $r = 4$

Divisões Sucessivas

Proposição: Se $p(x)$ é divisível por $x - a$ e o quociente dessa divisão é divisível por $x - b$, então $p(x)$ é divisível por $(x - a) \cdot (x - b)$.

Exemplo:

Uma maneira de descobrir se $p(x) = x^3 + 2x^2 - 5x - 6$ é divisível por $(x - 2) \cdot (x + 1) = x^2 - x - 2$ é usar o resultado anterior.

Primeiro, dividimos $p(x)$ por $x - 2$:

$$\begin{array}{c|cccc} 2 & 1 & 2 & -5 & -6 \\ \hline & \underbrace{1 \quad 4 \quad 3}_{\text{coeficientes de } q(x)} & & & \!\!\!|\; 0 \end{array}$$

Em seguida, dividimos o quociente obtido por $x + 1$:

$$\begin{array}{c|ccc} -1 & 1 & 4 & 3 \\ \hline & 1 & 3 & |\; 0 \end{array}$$

Como o resto dessa última divisão também é igual a zero, pode-se concluir que $p(x)$ é divisível por $x^2 - x - 2$.

Observação: Segue do teorema anterior que se $p(x)$ é divisível por $x - a$ e o quociente dessa divisão é também divisível por $x - a$, então $p(x)$ é divisível por $(x - a)^2$.

Conceitos Básicos do Conjunto dos Números Complexos

Chama-se **conjunto dos números complexos**, o conjunto dado por

$$\mathbb{C} = \{z = a + bi \mid a, b \in \mathbb{R} \text{ e } i = \sqrt{-1}\}$$

Nomenclatura: Em $z = a + bi$, chamada de **forma algébrica**, temos que:

- $i = \sqrt{-1}$ é chamado de **unidade imaginária**
- o número real a é chamado de **parte real de z** e indicado por $Re(z) = a$
- o número real b é chamado de **parte imaginária de z** e indicado por $Im(z) = b$.

Exemplos:

$z = 2 + 3i \rightarrow Re(z) = 2$ e $Im(z) = 3$

$z = -5 + i \rightarrow Re(z) = -5$ e $Im(z) = 1$

$z = \frac{1}{2} - \frac{3}{4}i \rightarrow Re(z) = \frac{1}{2}$ e $Im(z) = -\frac{3}{4}$

$z = 2 \rightarrow Re(z) = 2$ e $Im(z) = 0$

$z = -3i \rightarrow Re(z) = 0$ e $Im(z) = -3$

Conjugado de um número complexo

Dado um número complexo $z = a + bi$, definimos o seu **conjugado** por $\bar{z} = a - bi$.

Exemplos:

- $z = 2 + 4i \Rightarrow \bar{z} = 2 - 4i$
- $z = -5 - 7i \Rightarrow \bar{z} = -5 + 7i$
- $z = 4i \Rightarrow \bar{z} = -4i$
- $z = 5 \Rightarrow \bar{z} = 5$

Exercício: Resolva, em $\mathbb{C}$, as seguintes equações:

a) $x^2 + 4 = 0$

b) $x^2 - 4x + 29 = 0$

c) $x^2 - 6x + 10 = 0$

R: a) $S = \{-2i, 2i\}$
b) $S = \{2 - 5i, 2 + 5i\}$
c) $S = \{3 - i, 3 + i\}$

EQUAÇÕES ALGÉBRICAS

Chamamos de equação algébrica ou equação polinomial a toda equação na variável **x** que pode ser escrita na forma

$$a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_2 x^2 + a_1 x + a_0 = 0,$$

em que os coeficientes a_n, a_{n-1}, ..., a_1, a_0 são números complexos e $n \in \mathbb{N}$.

Exemplos

1º) $x^2 - 4x + 8 = 0$

2º) $5x^3 + 6x^2 - 3x + 1 = 0$

RAÍZES OU ZEROS DE UMA EQUAÇÃO POLINOMIAL

Dizemos que um número complexo **a** é raiz de uma equação polinomial do tipo $P(x) = 0$ se, e somente se, $P(a) = 0$. Por exemplo, a equação $2x^3 - x^2 + 4x - 5 = 0$ admite 1 como raiz, pois $2.1^3 - 1^2 + 4.1 - 5 = 2 - 1 + 4 - 5 = 0$.

Portanto, para verificarmos se um determinado número complexo é raiz de uma equação, devemos substituir a variável por esse número e verificar se a igualdade é satisfeita.

CONJUNTO SOLUÇÃO OU VERDADE

Chamamos de conjunto solução de uma equação $P(x) = 0$, em um determinado conjunto universo **U**, ao conjunto formado por todas as raízes dessa equação. Resolver uma equação significa determinar o seu conjunto solução.

Exemplos

1º) Resolver, em $\mathbb{R}$, a equação $x^2 + x + 2 = 0$.

Resolução:

$\Delta = 1^2 - 4.1.2 = 1 - 8 = -7$

No conjunto $\mathbb{R}$, a equação não apresenta soluções, ou seja, $S = \varnothing$.

2º) Resolver, em $\mathbb{C}$, a equação $x^2 + x + 2 = 0$.

Resolução:

$\Delta = 1^2 - 4.1.2 = 1 - 8 = -7$

$$x = \frac{-1 \pm \sqrt{-7}}{2.1} \Rightarrow x = \frac{-1 \pm \sqrt{7}\,i}{2}$$

Portanto, no conjunto dos números complexos, o conjunto solução é dado por $S = \left\{\frac{-1 - \sqrt{7}\,i}{2}, \frac{-1 + \sqrt{7}\,i}{2}\right\}$.

Exemplo:

Na equação $x^3 - 3x^2 + x - 3 = 0$, o número complexo *i* é uma das raízes, pois:

$$i^3 - 3 \cdot i^2 + i - 3 = -i + 3 + i - 3 = 0$$

O número real 3 também é raiz: $3^3 - 3 \cdot 3^2 + 3 - 3 = 0$.

Observe, por fim, que o número real 2 *não* é raiz:

$$2^3 - 3 \cdot 2^2 + 2 - 3 = 8 - 12 + 2 - 3 = -5 \neq 0.$$

TEOREMA FUNDAMENTAL DA ÁLGEBRA

Toda equação de grau **n**, n ≥ 1, possui pelo menos uma raiz complexa.

Esse teorema foi enunciado no final do século XVIII pelo matemático Carl Friedrich Gauss. Uma das consequências mais importantes desse teorema é a seguinte:

Um polinômio de grau **n**, n ≥ 1, possui **n** raízes complexas.

De acordo com o Teorema Fundamental da Álgebra, podemos afirmar que existe pelo menos uma raiz complexa. Sendo k_1 essa raiz, temos $P(k_1) = 0$.

Logo, o polinômio P(x) é divisível pelo polinômio $x - k_1$ (Teorema de D'Alembert).

Portanto, podemos escrever o seguinte:

$$\begin{array}{r|l} P(x) & x - k_1 \\ \cline{2-2} 0 & Q_1(x) \end{array} \Rightarrow P(x) = (x - k_1).Q_1(x)$$

Observe que, para $P(x) = 0$, temos que $x - k_1 = 0$ ou $Q_1(x) = 0$. Portanto, podemos concluir que as raízes de $Q_1(x)$ também são raízes de P(x).

Podemos proceder de maneira análoga ao analisarmos o polinômio $Q_1(x)$.

Sendo k_2 uma raiz de $Q_1(x)$, podemos escrever:

$$Q_1(x) = (x - k_2).Q_2(x)$$

Substituindo na expressão para P(x), obtemos:

$$P(x) = (x - k_1).(x - k_2).Q_2(x)$$

Aplicando sucessivamente esse raciocínio, obtemos:

$$P(x) = (x - k_1).(x - k_2).(x - k_3). \ldots .(x - k_n).Q_n(x)$$

Em que $Q_n(x)$ é um polinômio de grau zero. Observe que o coeficiente de x_n em P(x) é a_n. Logo, temos $Q_n(x) = a_n$.

Portanto:

$$P(x) = (x - k_1).(x - k_2).(x - k_3).\ \dots\ .(x - k_n).a_n$$

Essa é a chamada forma fatorada do polinômio P(x).

TEOREMA DA DECOMPOSIÇÃO

Como consequência do exposto, enunciamos a seguir o chamado Teorema da Decomposição.

Um polinômio P(x) de grau **n**, n ≥ 1, pode ser decomposto em **n** fatores do 1º grau, ou seja, pode ser escrito na forma:

$$P(x) = (x - k_1).(x - k_2).(x - k_3).\ \dots\ .(x - k_n).a_n$$

Observe que uma consequência imediata desse teorema é que toda equação de grau **n**, n ≥ 1, possui **n** raízes complexas, distintas ou não.

Observações:

(i) Pode-se mostrar que, com exceção da ordem dos fatores do produto, a decomposição de $p(x)$ em termos de suas raízes é única;

(ii) Dizemos que cada um dos polinômios do 1º grau na decomposição de $p(x)$ é um fator de $p(x)$;

(iii) O polinômio $p(x)$ é divisível por, individualmente, cada um de seus fatores.

Exemplos:

(1) Sabendo que as raízes do polinômio $p(x) = x^3 - 3x^2 - 6x + 8$ são 1, –2 e 4, podemos fatorá-lo como:

$$p(x) = 1 \cdot (x - 1) \cdot (x + 2) \cdot (x - 4)$$

(2) Sabendo que uma das raízes da equação $x^3 - 5x^2 - 34x + 80 = 0$ é igual a 2, como podemos obter as outras duas?

Seja $p(x)$ o polinômio dado.

- Usamos o teorema da decomposição:

$$p(x) = 1 \cdot (x - 2) \cdot \underbrace{(x - r_2) \cdot (x - r_3)}_{q(x)}$$

- Fazemos a divisão de $p(x)$ por $x - 2$ a fim de obter $q(x)$:

$$\begin{array}{c|ccc|c} 2 & 1 & -5 & -34 & 80 \\ \hline & \underbrace{1 \quad -3 \quad -40}_{\text{coeficientes de } q(x)} & & & 0 \end{array}$$

- Resolvemos a equação $q(x) = 0$:

$$x^2 - 3x - 40 = 0 \Rightarrow x = -5 \text{ ou } x = 8$$

(3) Duas raízes da equação $x^4 - 2x^3 - 11x^2 - 8x - 60 = 0$ são 5 e -3. Vamos encontrar as outras duas raízes. Sendo $p(x)$ o polinômio dado, podemos fatorá-lo como $p(x) = (x - 5) \cdot (x + 3) \cdot q(x)$.

Como $p(x)$ é divisível por $(x - 5) \cdot (x + 3)$, podemos dividir $p(x)$ por $x - 5$ e, em seguida, dividir o quociente obtido por $x + 3$, conforme aprendemos em divisões sucessivas:

5	1	−2	−11	−8	−60
−3	1	3	4	12	0
	1	0	4	0	

coeficientes de q(x)

Daí, $q(x) = 0 \Rightarrow x^2 + 4 = 0 \Rightarrow x = \pm 2i$.

Multiplicidade de uma raiz

- Quando resolvemos a equação do 2º grau $x^2 - 10x + 25 = 0$, encontramos duas raízes *iguais* a 5. Usando o teorema da decomposição, fatoramos o polinômio dado:

$$x^2 - 10x + 25 = (x - 5) \cdot (x - 5) = (x - 5)^2$$

Dizemos, então, que 5 é raiz de *multiplicidade 2* ou *raiz dupla* da equação proposta.

- Se a forma fatorada de um polinômio *p* é:

$$p(x) = (x + 4)^3 \cdot (x - 2) \cdot (x + 1)^2,$$

concluímos que:

- $x = -4$ é raiz com multiplicidade 3 ou raiz *tripla* da equação $p(x) = 0$
- $x = 2$ é raiz com multiplicidade 1 ou raiz *simples* da equação $p(x) = 0$
- $x = -1$ é raiz com multiplicidade 2 ou raiz *dupla* da equação $p(x) = 0$

De modo um pouco mais formal, dizemos que r é uma raiz de *multiplicidade m* $(m \geq 1)$ da equação $p(x) = 0$ se:

$$p(x) = (x - r)^m \cdot q(x); \text{ com } q(r) \neq 0$$

Notemos que:

1º) $p(x)$ é divisível por $(x - r)^m$.

2º) A condição $q(r) \neq 0$ significa que r não é raiz de $q(x)$ e garante, então, que a multiplicidade da raiz r não é maior que m.

Exemplo:

Vamos resolver a equação $x^4 - 9x^3 + 23x^2 - 3x - 36 = 0$, sabendo que 3 é raiz dupla.
Seja p(x) o polinômio dado, temos:

$$p(x) = (x - 3) \cdot (x - 3) \cdot \underbrace{(x - r_3) \cdot (x - r_4)}_{q(x)}, \text{ isto é, } p(x) = (x - 3)^2 \cdot q(x).$$

- Fazendo a divisão de p(x) por $(x - 3)^2$ obtemos q(x):

$$\begin{array}{c|ccccc}
3 & 1 & -9 & 23 & -3 & -36 \\
\hline
3 & 1 & -6 & 5 & 12 & 0 \\
\hline
 & \underbrace{1 \quad -3 \quad -4}_{\text{coeficientes de } q(x)} & & & 0 &
\end{array}$$

$\leftarrow$ p(x) é divisível por $x - 3$

$\leftarrow$ p(x) é divisível por $(x - 3)^2$

- Resolvendo a equação $q(x) = 0$, vem:

$$x^2 - 3x - 4 = 0 \Rightarrow x = -1 \text{ ou } x = 4$$

$S = \{-1, 3, 4\}$

Raízes Complexas

Teorema: Se um número complexo $z = a + bi$, com $b \neq 0$, é raiz de uma equação com coeficientes reais, então seu conjugado $\bar{z} = a - bi$ também é raiz dessa equação.

Observe algumas consequências imediatas desse teorema:

i) As raízes complexas sempre aparecem aos pares.

ii) Se o grau de um polinômio é ímpar, então esse polinômio possui pelo menos uma raiz real.

Exemplos:

(1) Se uma equação com coeficientes reais tem como raízes simples 3, $-2i$ e $1 + i$, então, necessariamente, duas outras raízes são $2i$ e $1 - i$, pelo teorema das raízes complexas. Assim, o menor grau que essa equação pode ter é 5.

(2) Vamos resolver a equação $x^3 - 3x^2 - 5x + 39 = 0$, sabendo que $3 - 2i$ é uma de suas raízes.

Observemos, de início, que se trata de uma equação com coeficientes reais. Como $3 - 2i$ é raiz, podemos afirmar que $3 + 2i$ também é raiz e o polinômio dado é divisível por
$(x - 3 + 2i) \cdot (x - 3 - 2i) = (x - 3)^2 - (2i)^2 = x^2 - 6x + 13$:

$$
\begin{array}{rrrr|l}
\cancel{x^3} & -\,3x^2 & -\,5x & +\,39 & \;x^2 - 6x + 13 \\
\cline{5-5}
-\cancel{x^3} & +\,6x^2 & -\,13x & & \;x + 3 \\
\cline{1-3}
 & 3x^2 & -\,18x & +\,39 & \\
 & -\cancel{3x^2} & +\,\cancel{18x} & -\,\cancel{39} & \\
\cline{2-4}
 & & 0 & &
\end{array}
$$

A outra raiz vem de $x + 3 = 0$, ou seja, $x = -3 \Rightarrow S = \{3 - 2i,\ 3 + 2i,\ -3\}$

Exercícios:

(1) Resolva, em $\mathbb{C}$, cada equação seguinte e, em seguida, fatore o polinômio dado.

a) $x^2 - 8x + 25 = 0$

b) $x^3 + x^2 - 2x = 0$

R: a) $S = \{4 - 3i, 4 + 3i\}$; $(x - 4 - 3i) \cdot (x - 4 + 3i)$
b) $S = \{0, 1, -2\}$; $x \cdot (x - 1) \cdot (x + 2)$

(2) Duas das raízes da equação $x^4 + x^3 - 7x^2 - x + 6 = 0$ são 1 e 2. Encontre o conjunto solução dessa equação. R: $S = \{1, 2, -1, -3\}$

(3) Sabendo que a equação $3x^3 + 5x^2 + x + m = 0$ apresenta -1 como raiz dupla:

a) Determine m.

b) Encontre a outra raiz dessa equação.

R: a) -1, b) $\frac{1}{3}$

Relações de Girard

São relações entre os coeficientes de uma equação e suas raízes e constituem uma ferramenta importante na resolução de equações quando conhecemos alguma informação sobre suas raízes.

Equação de 2º grau

Sejam r_1 e r_2 as raízes da equação $ax^2 + bx + c = 0$, com $a \neq 0$. Sabemos, pelo teorema da decomposição, que:

$$ax^2 + bx + c \equiv a \cdot (x - r_1) \cdot (x - r_2)$$

E daí, vem:

$$x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{c}{a} \equiv (x^2 - xr_2 - xr_1 + r_1r_2) \qquad x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{c}{a} \equiv x^2 - (r_1 + r_2)x + r_1r_2$$

Da identidade de polinômios segue que:

$$\begin{cases} r_1 + r_2 = -\dfrac{b}{a} \\ r_1r_2 = \dfrac{c}{a} \end{cases}$$

Equação de 3º grau

Sejam r_1, r_2 e r_3 as raízes de equação $ax^3 + bx^2 + cx + d = 0$, com $a \neq 0$. Temos:

$$ax^3 + bx^2 + cx + d \equiv a\,(x - r_1) \cdot (x - r_2) \cdot (x - r_3)$$

$$x^3 + \frac{b}{a}x^2 + \frac{c}{a}x + \frac{d}{a} \equiv x^3 - (r_1 + r_2 + r_3)\,x^2 + (r_1r_2 + r_2r_3 + r_1r_3)\,x - r_1r_2r_3, \text{ donde:}$$

$$\begin{cases} r_1 + r_2 + r_3 = -\dfrac{b}{a} \\ r_1r_2 + r_2r_3 + r_1r_3 = \dfrac{c}{a} \\ r_1r_2r_3 = -\dfrac{d}{a} \end{cases}$$

Assim, se r, s e t são as raízes da equação $x^3 - 4x^2 - 5x + 8 = 0$, então:

- $r + s + t = \dfrac{-b}{a} = \dfrac{-(-4)}{1} = 4$
- $r \cdot s + r \cdot t + s \cdot t = \dfrac{c}{a} = \dfrac{-5}{1} = -5$
- $r \cdot s \cdot t = \dfrac{-d}{a} = \dfrac{-8}{1} = -8$

Equação de grau *n*

Seja a equação $a_nx^n + a_{n-1}x^{n-1} + \ldots + a_1x + a_0 = 0$, com $a_n \neq 0$ e $r_1, r_2, \ldots, r_n$ suas raízes. Através de raciocínio análogo aos anteriores, vem:

$$\begin{cases} r_1 + r_2 + \ldots + r_n = -\dfrac{a_{n-1}}{a_n} & \text{(soma das } n \text{ raízes)} \\ r_1 \cdot r_2 + r_1 \cdot r_3 + \ldots + r_nr_{n-1} = \dfrac{a_{n-2}}{a_n} & \text{(soma dos produtos das raízes tomadas duas a duas)} \\ r_1 \cdot r_2 \cdot r_3 + r_1 \cdot r_2 \cdot r_4 + \ldots + r_{n-2}r_{n-1}r_n = -\dfrac{a_{n-3}}{a_n} & \left(\begin{array}{l}\text{soma dos produtos das raízes} \\ \text{tomadas três a três}\end{array}\right) \\ \vdots \qquad\qquad \vdots \qquad\qquad \vdots \qquad\qquad \vdots & \\ r_1 \cdot r_2 \cdot \ldots \cdot r_n = (-1)^n \cdot \dfrac{a_0}{a_1} & \text{(produto das } n \text{ raízes)} \end{cases}$$

Exemplos

1°) Sejam x_1 e x_2 as raízes da equação $x^2 - x + 4 = 0$.
Calcular

A) $x_1 + x_2$

Resolução:

$$x_1 + x_2 = -\frac{b}{a} = -\frac{(-1)}{1} = 1$$

B) $x_1.x_2$

Resolução:

$$x_1.x_2 = \frac{c}{a} = \frac{4}{1} = 4$$

C) $\frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2}$

Resolução:

$$\frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} = \frac{x_2 + x_1}{x_1.x_2} = \frac{1}{4}$$

D) $x_1^2 + x_2^2$

Resolução:

$x_1 + x_2 = 1$

Elevando ao quadrado os dois membros, temos:

$$(x_1 + x_2)^2 = 1^2 \Rightarrow x_1^2 + 2x_1.x_2 + x_2^2 = 1 \Rightarrow$$

$$x_1^2 + 2.4 + x_2^2 = 1 \Rightarrow x_1^2 + x_2^2 = -7$$

2º) Sejam x_1, x_2 e x_3 as raízes da equação:

$2x^3 - 6x^2 + 2x - 1 = 0$

Calcular

A) $x_1 + x_2 + x_3$

Resolução:

$$x_1 + x_2 + x_3 = -\frac{b}{a} = -\frac{(-6)}{2} = \frac{6}{2} = 3$$

B) $x_1.x_2 + x_1.x_3 + x_2.x_3$

Resolução:

$$x_1.x_2 + x_1.x_3 + x_2.x_3 = \frac{c}{a} = \frac{2}{2} = 1$$

C) $x_1.x_2.x_3$

Resolução:

$$x_1.x_2.x_3 = -\frac{d}{a} = -\frac{(-1)}{2} = \frac{1}{2}$$

D) $\frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} + \frac{1}{x_3}$

Resolução:

$$\frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} + \frac{1}{x_3} = \frac{x_2.x_3 + x_1.x_3 + x_1.x_2}{x_1.x_2.x_3} = \frac{1}{\frac{1}{2}} = 2$$

E) $x_1^2 + x_2^2 + x_3^2$

Resolução:

$x_1 + x_2 + x_3 = 3$

Elevando os dois membros ao quadrado, temos:

$$(x_1 + x_2 + x_3)^2 = 3^2 \Rightarrow$$

$$x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + 2\underbrace{(x_1.x_2 + x_1.x_3 + x_2.x_3)}_{1} = 9 \Rightarrow$$

$$x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + 2.1 = 9 \Rightarrow x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = 7$$

3º) Duas das raízes da equação $x^4 - 11x^3 + 42x^2 - 14x + p = 0$, em que *p* é um coeficiente real, são 2 e $5 + 3i$. Vamos encontrar seu conjunto solução, bem como o valor de *p*.

- Como a equação tem coeficientes reais, uma outra raiz é $5 - 3i$.
- Usando a 1ª relação de Girard (soma das raízes), vem:

$$2 + 5 + \cancel{3i} + 5 - \cancel{3i} + r_4 = \frac{-b}{a} \Rightarrow 12 + r_4 = 11 \Rightarrow r_4 = -1$$

- Escrevendo a última relação (produto de todas as raízes), vem:

$$2 \cdot \underbrace{(5 + 3i) \cdot (5 - 3i)}_{\substack{\parallel \\ 25 - (3i)^2}} \cdot (-1) = \frac{e}{a} \Rightarrow -68 = \frac{p}{1} \Rightarrow p = -68$$

e o conjunto solução é $S = \{2, 5 + 3i, 5 - 3i, -1\}$.

Exercícios:

(1) Sejam r e s as raízes, em $\mathbb{C}$, da equação $2x^2 + 6x + 1 = 0$. Determine:

a) $r + s$

b) $r \cdot s$

c) $\frac{1}{r} + \frac{1}{s}$

d) $r^2 + s^2$

R: a) -3 b) $\frac{1}{2}$ c) -6 d) 8

(2) Sendo r, s e t as raízes, em $\mathbb{C}$, da equação $x^3 - 2x^2 + x + 4 = 0$, calcule:

a) $r + s + t$

b) $r \cdot s + r \cdot t + s \cdot t$

c) $r \cdot s \cdot t$

d) $\frac{1}{r} + \frac{1}{s} + \frac{1}{t}$

R: a) 2 b) 1 c) -4 d) $-\frac{1}{4}$

(3) Resolva a equação $x^3 - 2x^2 - 5x + 6 = 0$, sabendo que o produto de duas de suas raízes vale -6.

R: $S = \{-2, 1, 3\}$

Pesquisa de Raízes Racionais

Teorema: Seja a equação polinomial de coeficientes inteiros $a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0 = 0$, com $a_n \neq 0$. Se o número racional irredutível $\frac{p}{q}$ é raiz dessa equação, então p é divisor de a_0 e q é divisor de a_n.

Observação

O teorema acima *não* nos garante a existência de raízes racionais de uma equação de coeficientes inteiros. Apenas, em caso de existirem raízes racionais, ele nos exibe todas as possibilidades para tais raízes.

Exemplo:

Vamos resolver a equação $3x^3 + 5x^2 + 4x - 2 = 0$.

Como não dispomos de nenhuma informação sobre suas raízes, vamos pesquisar as possíveis raízes racionais.

Os números racionais candidatos a raiz têm a forma $\frac{p}{q}$, sendo p um divisor de -2 e q um divisor de 3, isto é, $p \in \{\pm 1, \pm 2\}$ e $q \in \{\pm 1, \pm 3\}$.

Assim, se a equação tiver raízes racionais, essas raízes estarão no conjunto:

$$\left\{+1, -1, \frac{+1}{3}, \frac{-1}{3}, +2, -2, \frac{+2}{3}, \frac{-2}{3}\right\}$$

Seja f(x) o polinômio dado e façamos as verificações:

$$f(1) = 10 \qquad f(-1) = -4 \qquad f\left(\frac{1}{3}\right) = 0$$

$$f\left(-\frac{1}{3}\right) = -\frac{26}{9} \qquad f(2) = 50 \qquad f(-2) = -14$$

$$f\left(\frac{2}{3}\right) = \frac{34}{9} \qquad f\left(-\frac{2}{3}\right) = -\frac{10}{3}$$

Assim, a única raiz racional dessa equação é $\frac{1}{3}$.

Para encontrar as outras raízes, basta dividir f(x) por $x - \frac{1}{3}$:

$$\begin{array}{c|cccc} \frac{1}{3} & 3 & 5 & 4 & -2 \\ \hline & 3 & 6 & 6 & 0 \end{array} \Rightarrow 3x^2 + 6x + 6 = 0 \Rightarrow x = -1 \pm i$$

$$S = \left\{\frac{1}{3}, -1 + i, -1 - i\right\}$$

Exercício: Resolva as equações:

a) $x^3 - 7x^2 + 7x + 15 = 0$

b) $2x^4 - 9x^3 + 4x^2 + 21x - 18 = 0$

c) $x^3 + 2x^2 - 1 = 0$

d) $x^3 + 2x^2 - 5x + 2 = 0$

R: a) $S = \{-1, 3, 5\}$

b) $S = \left\{-\frac{3}{2}, 1, 2, 3\right\}$

c) $S = \left\{-1, \frac{-1+\sqrt{5}}{2}, \frac{-1-\sqrt{5}}{2}\right\}$

d) $S = \left\{1, \frac{-3+\sqrt{17}}{2}, \frac{-3-\sqrt{17}}{2}\right\}$