24 (Furg-RS) Os valores reais de x que satisfazem a equação $\begin{vmatrix} 2^x & 4^x & 8^x \\ 1 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & 2 \end{vmatrix} = 0$ são números:

a) racionais não inteiros.
b) irracionais.
c) pares.
d) inteiros negativos.
e) inteiros consecutivos.

25 (Fuvest-SP) Se A é uma matriz 2×2 inversível que satisfaz $A^2 = 2A$, então o determinante de A será:

a) 0 b) 1 c) 2 d) 3 e) 4

26 (UPE-PE) Se A é uma matriz quadrada de ordem n, de elementos reais, λ é um número real e I, a matriz identidade de ordem n, chama-se "valor próprio" de A a uma raiz da equação $\det(A - \lambda \cdot I) = 0$, em que "det" significa determinante. Dessa forma, a soma dos valores próprios da matriz A, abaixo, é:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

a) 4 b) 2 c) 0 d) 6 e) -4

27 (UA-AM) Resolvendo a equação

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ x & a & 0 & 0 \\ x & 0 & b & 0 \\ x & 0 & 0 & c \end{vmatrix} = 0,$$ com a, b e c sendo números reais positivos, obtemos:

a) $x = abc$

b) $x = \dfrac{abc}{ab + ac + bc}$

c) $x = \dfrac{a + b + c}{abc}$

d) $x = \dfrac{abc}{a + b + c}$

e) $x = 0$

28 (Mackenzie-SP) A matriz $A = \begin{bmatrix} 2 & 2 \\ k & 3 \end{bmatrix}$ é igual à sua transposta. Então o $\det(k^2 \cdot A)$ é igual a:

a) 64 b) 32 c) 16 d) 8 e) 4

29 (U. F. Viçosa-MG) Seja a matriz $A_{2 \times 2}$ cujo determinante, det A, é igual a 3. O valor de det A + det 2A + det 3A + det 4A é:

a) 90 b) 168 c) 162 d) 30 e) 12

DESAFIOS

1 (U. F. Uberlândia-MG) Quais são as raízes da equação dada abaixo, sendo $x > 0$?

$$\begin{vmatrix} \log_3(x) & \log_3(x^3) & \log_3(x^9) \\ 3^x & 9^x & 27^x \\ 0 & 0 & 3 \end{vmatrix} = 0$$

2 Sem desenvolver, prove que: $\begin{vmatrix} bc & a & a^2 \\ ac & b & b^2 \\ ab & c & c^2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & a^2 & a^3 \\ 1 & b^2 & b^3 \\ 1 & c^2 & c^3 \end{vmatrix}$.

(Suponha a, b e c não nulos.)

8 SISTEMAS LINEARES

1 Introdução

Os alunos do Ensino Médio de uma escola do interior organizaram uma festa junina no pátio da escola. Três barracas, B_1, B_2 e B_3, distribuídas no pátio, ofereciam exatamente as mesmas opções de alimentação: churrasco, quentão e pastel; cada uma dessas três opções tinha o mesmo preço nas três barracas. Ao final da noite, encerrada a festa, fez-se um balanço sobre o consumo nas barracas e verificou-se que:

- na barraca B_1 foram consumidos 28 churrascos, 42 quentões e 48 pastéis, arrecadando um total de R$ 102,00;
- na barraca B_2 foram consumidos 23 churrascos, 50 quentões e 45 pastéis, arrecadando um total de R$ 95,00;
- na barraca B_3 foram consumidos 30 churrascos, 45 quentões e 60 pastéis, arrecadando um total de R$ 117,00.

Qual é o preço de um churrasco? E de um quentão? E de um pastel?

Vamos usar a seguinte denominação:

- x é o preço unitário do churrasco;
- y é o preço unitário do quentão;
- z é o preço unitário do pastel.

Com essa notação, vemos que:

a) O total arrecadado em B_1 é dado por:
$28 \cdot x + 42 \cdot y + 48 \cdot z$
Assim, $28x + 42y + 48z = 102$ (I)

b) O total arrecadado em B_2 é dado por:
$23 \cdot x + 50 \cdot y + 45 \cdot z$
Assim, $23x + 50y + 45z = 95$ (II)

c) Analogamente, em B_3, segue que:
$30x + 45y + 60z = 117$ (III)

Considerando, simultaneamente, (I), (II) e (III), obtemos o sistema:

$$\begin{cases} 28x + 42y + 48z = 102 \\ 23x + 50y + 45z = 95 \\ 30x + 45y + 60z = 117 \end{cases},$$

que é um *sistema linear*, objeto de nosso estudo seguinte.

Ao final deste capítulo, você será capaz de descobrir os preços do churrasco, do quentão e do pastel.

2 Equação linear

Definição

Equação linear nas incógnitas (ou variáveis) $x_1, x_2, ..., x_n$ é toda equação do tipo $a_1x_1 + a_2x_2 + ... + a_nx_n = b$, em que $a_1, a_2, ..., a_n$ são *coeficientes* reais, e b, também real, é o *termo independente* da equação.

São lineares, por exemplo, as equações:

$2x_1 - x_2 + x_3 = 5$ $\qquad$ $-x_1 - \frac{1}{4}x_2 + \sqrt{3}\,x_3 = 0$

$x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = -1$ $\qquad$ $2x + y - 3z = 0$

Observações

1ª) Nos exemplos à direita, o termo independente é nulo. Dizemos, em cada caso, que se trata de uma equação linear *homogênea*.

2ª) Note que, numa equação linear, os expoentes de todas as incógnitas são sempre unitários. Dessa forma, *não* representam equações lineares:

$2x_1^2 - x_2 = 5$ $\qquad$ $\frac{1}{x} - y + z = \sqrt{3}$

3ª) Uma equação linear não apresenta termo misto (aquele que contém produto de duas ou mais incógnitas). Dessa forma, *não* representam equações lineares:

$2x_1 + x_2x_3 = 5$ $\qquad$ $x + y + zw = 0$

Solução de uma equação linear

Dizemos que a seqüência ordenada de números reais $(\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_n)$ é solução da equação $a_1x_1 + a_2x_2 + ... + a_nx_n = b$ quando a expressão $a_1\alpha_1 + a_2\alpha_2 + ... + a_n\alpha_n = b$ for verdadeira.

Exemplo

- O par ordenado (5, 2) é solução da equação $2x - 3y = 4$, pois substituindo *x* por 5 e *y* por 2 obtemos:

$$2 \cdot 5 - 3 \cdot 2 = 10 - 6 = 4$$

- A tripla ordenada (2, 1, −3) é solução da equação $2x - y + z = 0$, pois $2 \cdot 2 - 1 + (-3) = 0$. Já a tripla (3, 2, 0) *não* é solução dessa equação, pois $2 \cdot 3 - 2 + 0 = 4 \neq 0$.

Para encontrarmos outra solução de $2x - y + z = 0$, basta escolher, arbitrariamente, valores para *x* e *y* e o valor de *z* fica determinado. Por exemplo, se $x = 1$ e $y = 1$ temos: $2 \cdot 1 - 1 + z = 0 \rightarrow z = -1$. Obtemos, assim, a solução (1, 1, −1).

Observação

Toda equação homogênea $a_1x_1 + a_2x_2 + ... + a_nx_n = 0$ admite a seqüência (0, 0, ..., 0) como solução, pois, quaisquer que sejam os coeficientes $a_1, a_2, ..., a_n$, tem-se: $a_1 \cdot 0 + a_2 \cdot 0 + ... + a_n \cdot 0 = 0$.

EXERCÍCIOS

1 Verifique se $\left(2, \frac{3}{2}\right)$ é solução da equação $-x_1 + 2x_2 = 1$.

2 Dada a equação linear $2x - 3y = 6$, verifique se os pares abaixo são soluções:

a) (0, −2) $\qquad$ b) (0, 0) $\qquad$ c) $\left(\frac{3}{2}, -2\right)$

3 Verifique se as triplas ordenadas abaixo são soluções da equação: $-x_1 - x_2 + 3x_3 = 1$.

a) (−1, 3, −1) $\qquad$ b) (0, −4, −1) $\qquad$ c) (1, 1, 1)

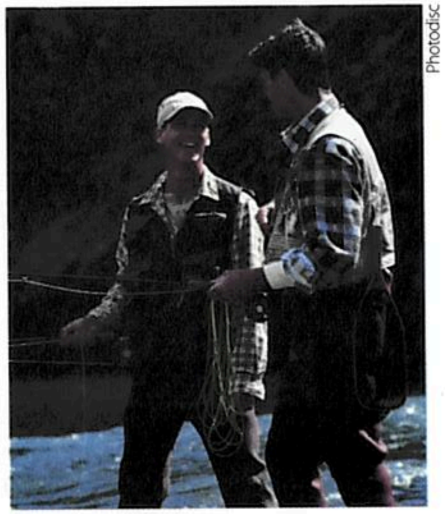
4 Determine m de modo que o par $(m, -2)$ seja solução da equação $2x + 3y = 8$.

5 Dada a equação linear $m \cdot x_1 - 2 \cdot x_2 + 4 \cdot x_3 = 3$, determine m de modo que a tripla $\left(2, 1, \frac{1}{4}\right)$ seja uma de suas soluções.

6 Determine duas soluções da equação $2x + 3y = 5$.

7 Dê duas soluções da equação $3a - b + 2c = 0$.

8 Dois irmãos, João e José, pescaram em uma manhã x e y peixes, respectivamente. Sabendo que $3x + 4y = 61$, determine as possíveis quantidades de peixes que eles conseguiram juntos.



Photodisc

3 Sistema linear

Um conjunto de m equações lineares nas variáveis $x_1, x_2, ..., x_n$ é dito *sistema linear* de m equações e n variáveis.

Dessa maneira, temos:

a) $\begin{cases} 2x - 3y = 5 \\ x + y = 4 \end{cases}$ é um sistema linear com duas equações e duas variáveis.

b) $\begin{cases} x - y + z = 2 \\ -3x + 4y = 1 \end{cases}$ é um sistema linear com duas equações e três variáveis.

c) $\{x - y + 2z - w = 0$ é um sistema linear com uma equação e quatro variáveis.

Matrizes associadas a um sistema

Podemos associar a um sistema linear duas matrizes cujos elementos são os coeficientes das equações que formam o sistema.

a) No sistema $\begin{cases} 4x + 3y = 1 \\ 2x - 5y = -2 \end{cases}$, temos que $A = \begin{pmatrix} 4 & 3 \\ 2 & -5 \end{pmatrix}$ é a *matriz incompleta* e

$B = \begin{pmatrix} 4 & 3 & 1 \\ 2 & -5 & -2 \end{pmatrix}$ é a *matriz completa*.

b) As matrizes associadas ao sistema $\begin{cases} x - y + z = 5 \\ 2x \quad - z = 3 \\ \quad y + 3z = -1 \end{cases}$ são:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 2 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 3 \end{pmatrix} \quad \text{e} \quad B = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & 5 \\ 2 & 0 & -1 & 3 \\ 0 & 1 & 3 & -1 \end{pmatrix}$$

Notemos que *B* é obtida de *A* acrescentando-se a coluna relativa aos termos independentes das equações do sistema.

Representação matricial de um sistema

Lembrando a definição de produto de matrizes e utilizando a matriz incompleta de um sistema, é possível representá-lo na forma matricial. Vejamos:

a) O sistema $\begin{cases} 2x - y = 3 \\ x + 3y = 5 \end{cases}$ pode ser escrito na forma matricial: $\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 5 \end{pmatrix}$.

b) O sistema $\begin{cases} 2x - y + z - w = 2 \\ x + y \quad + 3w = -1 \end{cases}$ pode ser representado pelo produto:

$$\begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & 0 & 3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ w \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix}$$

Solução de um sistema

Dizemos que a seqüência ordenada $(\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_n)$ é solução de um sistema linear de n variáveis quando é solução de cada uma das equações do sistema.

Exemplo 1

Seja o sistema $\begin{cases} x + y = 3 \\ x - y = 1 \end{cases}$. É correto afirmarmos que ele admite como solução o par (2, 1), pois este satisfaz as duas equações do sistema.

De fato, $2 + 1 = 3$ e $2 - 1 = 1$.

Exemplo 2

Uma das soluções do sistema $\begin{cases} x - y + z = 2 \\ 2y - z = 0 \end{cases}$ é a tripla ordenada (0, 2, 4), pois, substituindo tais valores em *x*, *y* e *z*, respectivamente, temos:

- 1ª equação: $0 - 2 + 4 = 2$ (V)
- 2ª equação: $2 \cdot 2 - 4 = 0$ (V)

Classificação

Um sistema linear é classificado de acordo com seu número de soluções. Podemos ter:

SISTEMA POSSÍVEL (tem solução)
- DETERMINADO (a solução é única) (I)
- INDETERMINADO (tem infinitas soluções) (II)

SISTEMA IMPOSSÍVEL — não apresenta nenhuma solução (III)

Exemplifiquemos:

(I) O par ordenado (1, 6) é a *única* solução do sistema $\begin{cases} -x + y = 5 \\ 3x - y = -3 \end{cases}$. Nesse caso, o sistema é dito *sistema possível e determinado* (SPD).

(II) O sistema $\begin{cases} 5x - 5y + 5z = 10 \\ x - y + z = 2 \end{cases}$ apresenta *infinitas* soluções, como por exemplo (1, 1, 2), (0, 2, 4), (1, 0, 1). O sistema, nesse caso, é dito *sistema possível e indeterminado* (SPI).

(III) O sistema $\begin{cases} x - y = -3 \\ x - y = 5 \end{cases}$ *não* apresenta solução alguma, pois não existe (α_1, α_2) tal que $\alpha_1 - \alpha_2 = -3$ e $\alpha_1 - \alpha_2 = 5$. Assim, o sistema é dito *impossível* (SI).

Estudaremos mais adiante algumas técnicas que nos permitirão resolver (e classificar) um sistema linear.

EXERCÍCIOS

9 Verifique se (2, −1) é solução do sistema $\begin{cases} 2x - y = 5 \\ x + y = 1 \end{cases}$.

10 Verifique se (1, 1, 1) é solução do sistema $\begin{cases} -x + y = 0 \\ 2x - z = 1 \\ \frac{1}{2}x + \frac{1}{2}y - 3z = -2 \end{cases}$.

11 Verifique se (0, −2, 5) é solução do sistema $\begin{cases} 3x - y + z = 7 \\ x + y + z = 4 \\ y - z = 7 \end{cases}$.

12 Considere o sistema $\{x - y = 1$.

a) Apresente algumas de suas soluções.

b) Como se classifica esse sistema?

13 Classifique o sistema $\begin{cases} x + y = -2 \\ 2x - 3y + z = 0 \\ 2x - 3y + z = 5 \end{cases}$.

14 Construa a matriz incompleta *A* e completa *B* de cada um dos sistemas:

a) $\begin{cases} \sqrt{3}\,x_1 + 4x_2 = 2 \\ -\frac{1}{3}x_1 + x_2 = 1 \end{cases}$ b) $\begin{cases} 4x - y + z = 0 \\ x + 2y - z = 1 \\ x - z = 0 \end{cases}$ c) $\begin{cases} 3x + 2y = 5 \\ x - y = 1 \\ 4x + y = 6 \end{cases}$

15 Construa a matriz incompleta *A* e completa *B* de cada um dos sistemas:

a) $\{-3x_1 + 4x_2 - 5x_3 + x_4 = 1$ b) $\begin{cases} 2x - y + 3z = 1 \\ -x - y + 10z = 0 \end{cases}$

16 Escreva o sistema associado à representação matricial em cada caso:

a) $\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 3 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \end{pmatrix}$

b) $\begin{pmatrix} 4 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 8 \\ -3 \end{pmatrix}$

c) $\begin{pmatrix} -1 & 3 & 5 \\ 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 3 \end{pmatrix}$

17 Classifique, em cada caso, o sistema dado por:

a) $\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 4 & 3 \\ 11 & -7 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 8 \\ 11 \\ 76 \end{pmatrix}$ b) $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & -4 & 3 \\ -3 & -3 & -3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 11 \\ 10 \end{pmatrix}$

4 Sistemas escalonados

Consideremos um sistema linear S no qual, em cada equação, existe pelo menos um coeficiente não nulo.

Dizemos que S está na *forma escalonada* (ou, simplesmente, *é escalonado*) se o número de coeficientes nulos, antes do 1º coeficiente não nulo, aumenta de equação para equação.

São exemplos de sistemas escalonados:

$$\begin{cases} 3x - y + z = 2 \\ \quad 2y - 3z = -1 \\ \qquad - z = 5 \end{cases} \qquad \begin{cases} 4x - y + 5z = 3 \\ \quad 3y - 2z = 1 \end{cases} \qquad \begin{cases} 4x + y - z - t - w = 1 \\ \qquad z + t + 2w = 0 \\ \qquad\qquad 2w = -3 \end{cases}$$

Resolução de um sistema na forma escalonada

Vamos considerar dois tipos de sistemas escalonados:

▶ **1º** *Número de equações igual ao número de variáveis*

Seja o sistema escalonado $\begin{cases} x - 2y + z = -5 \\ \quad y + 2z = -3 \\ \qquad 3z = -6 \end{cases}$.

Partindo da última equação, obtemos z. Substituindo esse valor na equação anterior, obtemos y. Por fim, substituindo y e z na 1ª equação, obtemos x.

Dessa forma:

(III) $3z = -6 \Rightarrow z = -2$

(II) $y + 2 \cdot (-2) = -3 \Rightarrow y - 4 = -3 \Rightarrow y = 1$

(I) $x - 2 \cdot 1 + (-2) = -5 \Rightarrow x - 4 = -5 \Rightarrow x = -1$

Assim, a solução do sistema é $(-1, 1, -2)$.

Esse tipo de sistema apresenta sempre uma *única* solução. Temos, então, um *sistema possível e determinado* (SPD).

▶ **2º** *Número de equações menor que o número de variáveis*

Seja o sistema escalonado $\begin{cases} x - y + 3z = 5 \\ \quad y - z = 1 \end{cases}$.

a) Devemos identificar a variável que não aparece no início de nenhuma das equações, chamada *variável livre*. A única variável livre desse sistema é z.

b) Transpomos a variável livre z para o 2º membro em cada equação e obtemos

$$\begin{cases} x - y = 5 - 3z \\ \quad y = 1 + z \end{cases} \quad (*)$$

c) Se atribuirmos um valor para z, obteremos um sistema do 1º tipo, portanto, determinado. Resolvendo-o, encontraremos uma solução do sistema.
Se atribuirmos outro valor para z, obteremos outro sistema, também determinado, que, resolvido, fornecerá outra solução do sistema. E assim por diante.
Como podemos atribuir qualquer valor real a z, concluímos que o sistema dado tem *infinitas soluções*.
Façamos, então, $z = \alpha$ (α é um número real qualquer) e em (*) teremos

$$\begin{cases} x - y = 5 - 3\alpha \ \text{(I)} \\ \quad y = 1 + \alpha \ \text{(II)} \end{cases}$$

d) Substituímos (II) em (I):
$x - (1 + \alpha) = 5 - 3\alpha \Rightarrow x - 1 - \alpha = 5 - 3\alpha \Rightarrow x = -2\alpha + 6$

e) Por fim, as soluções do sistema podem ser representadas pelas triplas ordenadas do tipo $(-2\alpha + 6, 1 + \alpha, \alpha)$, em que $\alpha \in \mathbb{R}$.
Esse tipo de sistema apresenta sempre *infinitas* soluções, sendo, então, um *sistema possível e indeterminado* (SPI).

Observação

Atribuindo valores arbitrários para α, teremos algumas das soluções do sistema; por exemplo:

$\alpha = 0 \Rightarrow (6, 1, 0)$ $\qquad \alpha = -\frac{1}{2} \Rightarrow \left(7, \frac{1}{2}, -\frac{1}{2}\right)$

$\alpha = 1 \Rightarrow (4, 2, 1)$ $\qquad \alpha = \sqrt{3} \Rightarrow \left(-2\sqrt{3} + 6, 1 + \sqrt{3}, \sqrt{3}\right)$

Exemplo

Vamos resolver o sistema $\begin{cases} x - y + z + t = 1 \\ \quad 2z - t = 0 \end{cases}$.

As variáveis livres do sistema são y e t. Transpondo-as para o 2º membro, vem:

$$\begin{cases} x + z = 1 + y - t \\ \quad 2z = t \end{cases}$$

Fazendo $y = \alpha$ e $t = \beta$ ($\alpha \in \mathbb{R}$ e $\beta \in \mathbb{R}$), temos um sistema do 1º tipo:

$$\begin{cases} x + z = 1 + \alpha - \beta \ \text{(I)} \\ \quad 2z = \beta \ \text{(II)} \end{cases}$$

De (II), vem: $z = \frac{\beta}{2}$.

Em (I), temos: $x + \frac{\beta}{2} = 1 + \alpha - \beta \Rightarrow x = 1 + \alpha - \frac{3}{2}\beta$.

Assim:

$$S = \left\{\left(1 + \alpha - \frac{3}{2}\beta, \alpha, \frac{\beta}{2}, \beta\right), \alpha \in \mathbb{R} \text{ e } \beta \in \mathbb{R}\right\}$$

EXERCÍCIOS

18 Verifique se cada um dos sistemas abaixo está escalonado.

a) $\begin{cases} x + y = 3 \\ 3y = 1 \end{cases}$ b) $\begin{cases} -2x + y = 1 \\ x - 3y = 5 \end{cases}$ c) $\begin{cases} x + y - z = 0 \\ y + 2z = 1 \\ -z = 3 \end{cases}$

19 Indique quais sistemas estão escalonados.

a) $\begin{cases} x - y + z + t = 0 \\ t = -1 \end{cases}$ c) $\begin{cases} 2x - y + z + t = 0 \\ y - z - t = 0 \\ z + 2t = 1 \end{cases}$

b) $\begin{cases} 4x + 5y - 3z = 9 \\ 4y + 5z = 1 \\ -y + z = 0 \end{cases}$ d) $\begin{cases} 4x + 5y + 3z = 1 \\ -x - y + z = 5 \end{cases}$

20 Resolva e classifique os seguintes sistemas escalonados:

a) $\begin{cases} 2x - y = 5 \\ -y = 3 \end{cases}$ b) $\begin{cases} x - y + z = 2 \\ y + z = 0 \\ -z = -1 \end{cases}$ c) $\begin{cases} 2x - y + z = 3 \\ y - z = 0 \end{cases}$

21 Resolva e classifique os seguintes sistemas escalonados:

a) $\begin{cases} x + y + z + t = -1 \\ y - 2z - t = 0 \\ z + t = 3 \\ t = 2 \end{cases}$ b) $\begin{cases} 4x - 6y + z = 1 \\ 2y - z = 1 \end{cases}$

22 Resolva os seguintes sistemas:

a) $\{x + y - z = 0$ b) $\begin{cases} 2x + y + z + t = 3 \\ z - t = 0 \end{cases}$

23 Uma das soluções de $\begin{cases} x - y + z = 2 \\ mx + y - 3z = 0 \end{cases}$ é (2, 2, 2). Determine o conjunto solução desse sistema.

6 Sistemas equivalentes e escalonamento

Definição

Dois sistemas lineares, S_1 e S_2, são *equivalentes* quando toda solução de S_1 é solução de S_2 e vice-versa.

Os sistemas $S_1 \begin{cases} x - y = 3 \\ 2x + 2y = 5 \end{cases}$ e $S_2 \begin{cases} x - y = 3 \\ 5x - y = 14 \end{cases}$, por exemplo, são equivalentes, pois ambos admitem apenas o par $\left(\frac{11}{4}, \frac{-1}{4}\right)$ como solução.

Dado um sistema linear qualquer, nosso objetivo é transformá-lo em outro equivalente, porém na forma escalonada. Procederemos dessa maneira, pois, como vimos, é fácil resolver um sistema na forma escalonada. Para isso, vamos utilizar dois teoremas (omitiremos as demonstrações) que nos permitirão construir sistemas equivalentes.

Teorema 1

Quando multiplicamos por k, $k \in \mathbb{R}^*$, os membros de uma equação qualquer de um sistema linear S, obtemos um novo sistema S' equivalente a S.

Exemplo 1

Seja $S \begin{cases} x - y = 4 \\ 2x + 3y = 3 \end{cases}$, cuja solução é (3, –1).

Multiplicando-se a 1ª equação de S por 5, por exemplo, obtemos:

$$S' \begin{cases} 5x - 5y = 20 \\ 2x + 3y = 3 \end{cases},$$

cuja solução também é (3, –1).

Teorema 2

Quando substituímos uma equação de um sistema linear S pela soma, membro a membro, dela com outra, obtemos um novo sistema S', equivalente a S.

Exemplo 2

Seja S $\begin{cases} 2x - y = 3 \\ x + 3y = 5 \end{cases}$, cuja solução é (2, 1).

Vamos substituir a 2ª equação pela soma dela com a 1ª:

Rascunho:

$$S' \begin{cases} 2x - y = 3 \\ \boxed{3x + 2y = 8} \end{cases} \xleftarrow{(2^a\ eq) + (1^a\ eq)} \qquad \begin{array}{r} 2x - y = 3 \\ x + 3y = 5 \\ \hline 3x + 2y = 8 \end{array}\ (+)$$

É fácil notar que (2, 1) é solução de S', pois a segunda equação também é verificada:

$$3 \cdot 2 + 2 \cdot 1 = 6 + 2 = 8$$

Exemplo 3

Vamos utilizar os teoremas 1 e 2, simultaneamente.

Seja S $\begin{cases} x + y = -15 \\ 2x - 3y = 10 \end{cases}$, cuja solução é (−7, −8).

Vamos substituir a 2ª equação de *S* pela soma dela com a 1ª, multiplicada por (−2):

Rascunho:

$$S' \begin{cases} x + y = -15 \\ \boxed{-5y = 40} \end{cases} \xleftarrow{(-2) \times (1^a\ eq) + (2^a\ eq)} \qquad \begin{array}{r} -2x - 2y = 30 \\ 2x - 3y = 10 \\ \hline -5y = 40 \end{array}\ (+)$$

O par (−7, −8) é também solução de S'.

Observe, nesse exemplo, que a utilização dos teoremas possibilitou transformar o sistema original em um sistema escalonado.

Escalonamento de um sistema

Para escalonar um sistema linear qualquer, vamos seguir o roteiro abaixo, baseado nos teoremas anteriores:

- 1º passo: Escolhemos para 1ª equação aquela em que o coeficiente da 1ª incógnita seja *não* nulo.
  Se possível, fazemos a escolha a fim de que esse coeficiente seja igual a −1 ou 1, pois os cálculos ficam, em geral, mais simples.

- 2º passo: Anulamos o coeficiente da 1ª incógnita das demais equações, usando os teoremas 1 e 2.
- 3º passo: Desprezamos a 1ª equação e aplicamos os dois primeiros passos com as equações restantes.
- 4º passo: Desprezamos a 1ª e a 2ª equações e aplicamos os dois primeiros passos nas equações restantes, até o sistema ficar escalonado.

Exemplo 4

Vamos escalonar e depois resolver o sistema: $\begin{cases} -x + y - 2z = -9 \\ 2x + y + z = 6 \\ -2x - 2y + z = 1 \end{cases}$

Em primeiro lugar, precisamos anular os coeficientes de *x* na 2ª e 3ª equações.

$$\begin{cases} -x + y - 2z = -9 \\ \boxed{3y - 3z = -12} \\ \boxed{-4y + 5z = 19} \end{cases}$$

Substituímos a 2ª equação pela soma dela com a 1ª, multiplicada por 2:

$$\begin{array}{r} -2\cancel{x} + 2y - 4z = -18 \\ \cancel{2x} + y + z = 6 \\ \hline 3y - 3z = -12 \end{array}$$

Substituímos a 3ª equação pela soma dela com a 1ª, multiplicada por (−2):

$$\begin{array}{r} 2\cancel{x} - 2y + 4z = 18 \\ -\cancel{2x} - 2y + z = 1 \\ \hline -4y + 5z = 19 \end{array}$$

Deixando de lado a 1ª equação, vamos repetir o processo para a 2ª e 3ª equações. Convém, entretanto, dividir os coeficientes da 2ª equação por 3, a fim de facilitar o escalonamento:

$$\begin{cases} -x + y - 2z = -9 \\ y - z = -4 \\ -4y + 5z = 19 \end{cases}$$

que é equivalente a:

$$\begin{cases} -x + y - 2z = -9 \\ y - z = -4 \\ \boxed{z = 3} \end{cases}$$

Substituímos a 3ª equação pela soma dela com a 2ª, multiplicada por 4:

$$\begin{array}{r} 4\cancel{y} - 4z = -16 \\ -\cancel{4y} + 5z = 19 \\ \hline z = 3 \end{array}$$

O sistema obtido está escalonado e é do 1º tipo (SPD).
Resolvendo-o, obtemos como solução: (2, −1, 3).

Exemplo 5

Vamos escalonar e resolver o sistema $\begin{cases} 3x - y + z = 2 \\ x - 2y - z = 0. \\ 2x + y + 2z = 2 \end{cases}$

Convém trocar as posições das duas primeiras equações, a fim de que o 1º coeficiente de x seja igual a 1:

$$\begin{cases} x - 2y - z = 0 \\ 3x - y + z = 2 \\ 2x + y + 2z = 2 \end{cases}$$

Precisamos anular os coeficientes de x na 2ª e 3ª equações:

$(-3) \times$ (1ª eq.) + (2ª eq.):

$$\begin{array}{r} -3\cancel{x} + 6y + 3z = 0 \\ \cancel{3x} - y + z = 2 \\ \hline 5y + 4z = 2 \end{array}$$

$(-2) \times$ (1ª eq.) + (3ª eq.):

$$\begin{array}{r} -2\cancel{x} + 4y + 2z = 0 \\ \cancel{2x} + y + 2z = 2 \\ \hline 5y + 4z = 2 \end{array}$$

$$\begin{cases} x - 2y - z = 0 \\ \boxed{5y + 4z = 2} \\ \boxed{5y + 4z = 2} \end{cases}$$

Deixando a 1ª equação de lado, repetimos o processo para a 2ª e 3ª equações:

$(-1) \times$ (2ª eq.) $-$ (3ª eq.):

$$\begin{array}{r} -5\cancel{y} - 4\cancel{z} = -\cancel{2} \\ \cancel{5y} + \cancel{4z} = \cancel{2} \\ \hline 0 = 0 \end{array}$$

Obtemos: $\begin{cases} x - 2y - z = 0 \\ 5y + 4z = 2 \\ \boxed{0 = 0} \end{cases}$

A 3ª equação pode ser suprimida do sistema, pois, apesar de ser sempre verdadeira, ela não traz informação sobre os valores das variáveis. Assim, obtemos o sistema escalonado:

$\begin{cases} x - 2y - z = 0 & \text{(I)} \\ 5y + 4z = 2 & \text{(II)} \end{cases}$, que é do 2º tipo (SPI)

(número de equações < número de incógnitas)

A variável livre do sistema é z. Fazendo $z = \alpha$, vem:

- em (II): $y = \dfrac{2 - 4\alpha}{5}$
- em (I): $x = 2y + z \Rightarrow x = 2\left(\dfrac{2 - 4\alpha}{5}\right) + \alpha \Rightarrow x = \dfrac{-3\alpha + 4}{5}$

Assim: $S = \left\{\left(\dfrac{-3\alpha + 4}{5}, \dfrac{2 - 4\alpha}{5}, \alpha\right), \alpha \in \mathbb{R}\right\}$.

Observação

Quando, durante o escalonamento, encontramos duas equações com coeficientes ordenadamente iguais ou proporcionais, podemos retirar uma delas do sistema.

Exemplo 6

Vamos escalonar e resolver o sistema $\begin{cases} 2x - y + z = -1 \\ -5x - 20y - 15z = 11. \\ 3x + 3y + 4z = 3 \end{cases}$

Nenhum dos coeficientes de x nas equações dadas vale 1, mas precisamos anular os coeficientes de x na 2ª e 3ª equações:

$5 \times$ (1ª eq.) + $2 \times$ (2ª eq.):

$$\begin{array}{r} 1\cancel{0x} - 5y + 5z = -5 \\ -\cancel{10x} - 40y - 30z = 22 \\ \hline -45y - 25z = 17 \end{array}$$

$(-3) \times$ (1ª eq.) + $2 \times$ (3ª eq.):

$$\begin{array}{r} -6\cancel{x} + 3y - 3z = 3 \\ \cancel{6x} + 6y + 8z = 6 \\ \hline 9y + 5z = 9 \end{array}$$

$$\begin{cases} 2x - y + z = -1 \\ \boxed{-45y - 25z = 17} \\ \boxed{9y + 5z = 9} \end{cases}$$

Repetimos o processo para a 2ª e 3ª equações, deixando a 1ª de lado; é interessante, entretanto, dividir os coeficientes da 2ª equação por 5:

$\begin{cases} 2x - y + z = -1 \\ -9y - 5z = \dfrac{17}{5} \\ 9y + 5z = 9 \end{cases}$, que equivale a:

(2ª eq.) + (3ª eq.):

$$\begin{array}{r} -9\cancel{y} - 5\cancel{z} = \dfrac{17}{5} \\ \cancel{9y} + \cancel{5z} = 9 \\ \hline 0 = \dfrac{62}{5} \end{array}$$

$$\begin{cases} 2x - y + z = -1 \\ -9y - 5z = \dfrac{17}{5} \\ \boxed{0 = \dfrac{62}{5}} \end{cases}$$

A 3ª equação do sistema acima obtido é sempre falsa, pois, para quaisquer x, y e z, $0 \neq \dfrac{62}{5}$. Logo, o sistema é *impossível*, isto é, não admite nenhuma solução.

Observação

Quando, durante o escalonamento, encontramos duas equações incompatíveis entre si ou uma sentença falsa, já podemos concluir que se trata de um sistema impossível.

EXERCÍCIOS

24 Escalone e resolva os seguintes sistemas:

a) $\begin{cases} x + y = 0 \\ 2x - 3y = 4 \end{cases}$ b) $\begin{cases} 5x + 3y = 8 \\ x - 2y = -1 \end{cases}$

25 Escalone e resolva os seguintes sistemas:

a) $\begin{cases} -2x + 3y = 1 \\ 10x - 15y = 4 \end{cases}$ b) $\begin{cases} x - y = 3 \\ 2x - 2y = 6 \end{cases}$

26 Em um estacionamento há motos e carros, num total de 79 veículos e 248 rodas. Qual é o número de motos no estacionamento? E o número de carros?

27 Numa danceteria, o convite para homens custava R$ 15,00 e para mulheres, R$ 10,00. Sabendo que o número de mulheres que foram à danceteria excede de 5 o número de homens e que, ao todo, foram arrecadados R$ 550,00, pergunta-se: qual é o número de homens que foram dançar lá?

Delfim Martins/Pulsar

28 (UE-RJ) Em um restaurante há 12 mesas, todas ocupadas. Algumas, por 4 pessoas; outras por apenas 2, num total de 38 fregueses. Qual o número de mesas ocupadas por apenas 2 pessoas?

29 Rapazes e moças dançavam animadamente em uma festa. Com a saída de 8 rapazes, percebeu-se que as moças estavam para o rapazes numa proporção de 3 para 2. Mais tarde, porém, 10 moças deixaram a festa e a proporção passou a ser de 5 moças para cada 4 rapazes. Quantos rapazes e moças havia na festa?

30 Escalone e resolva os seguintes sistemas:

a) $\begin{cases} x - y - z = 2 \\ 2x - 4y + z = 16 \\ -x + 5y + 3z = -10 \end{cases}$ b) $\begin{cases} x + y = 1 \\ x + z = 3 \\ y + z = 2 \end{cases}$ c) $\begin{cases} 5x + 8y + 12z = 10 \\ x + 2y + 3z = 4 \\ -2x - 2y - 3z = 3 \end{cases}$

31 Escalone e resolva os seguintes sistemas:

a) $\begin{cases} x + y + z = 2 \\ 2x - z = -1 \\ 3x + y = 1 \end{cases}$ b) $\begin{cases} 2x - 3y + z = 1 \\ 3x - 3y - 6z = 0 \\ 7x - 2y - 9z = 2 \end{cases}$ c) $\begin{cases} 4x - y + 7z = 9 \\ 5x + 3y - z = 0 \\ -7x - 11y + 17z = 19 \end{cases}$

32 Ao ser perguntado sobre o valor do pedágio, um caixa respondeu: "Quando passaram 2 carros de passeio e 3 ônibus, arrecadou-se a quantia de R$ 26,00; quando passaram 2 ônibus e 5 caminhões a quantia arrecadada foi de R$ 47,00, e quando passaram 6 carros de passeio e 4 caminhões arrecadou-se a quantia de R$ 52,00".
Qual foi o valor do pedágio para cada veículo citado?

33 Escalone e resolva os seguintes sistemas:

a) $\begin{cases} x + 8y - 3z = 7 \\ -x + 3y - 2z = 1 \\ 3x + 2y + z = 5 \end{cases}$ b) $\begin{cases} 2x - y + z = 3 \\ x + y - 3z = 1 \\ 3x - 2z = 3 \end{cases}$ c) $\begin{cases} 2x - y - 4z = 12 \\ 5x - 2y - 3z = 3 \\ -3x + 3y + z = 5 \end{cases}$

34 (UFR-RJ) Uma loja de departamentos, para vender um televisor, um videocassete e um aparelho de som, propôs a seguinte oferta: o televisor e o videocassete custam juntos R$ 1 200,00; o videocassete e o aparelho de som custam juntos R$ 1 100,00; o televisor e o aparelho de som custam juntos R$ 1 500,00.
Quanto pagará um cliente que comprar os três produtos anunciados?

35 Uma loja vende certo componente eletrônico, que é fabricado por três marcas diferentes: *A*, *B* e *C*.
Um levantamento sobre as vendas desse componente, realizado durante três dias consecutivos, revelou que:

- no 1º dia, foram vendidos dois componentes da marca *A*, um da marca *B* e um da marca *C*, resultando um total de vendas igual a R$ 150,00;
- no 2º dia, foram vendidos quatro componentes da marca *A*, três da marca *B* e nenhum da marca *C*, num total de R$ 240,00;
- no último dia, não houve vendas da marca *A*, mas foram vendidos cinco da marca *B* e três da marca *C*, totalizando R$ 350,00.

Qual é o preço do componente fabricado por *A*? E por *B*? E por *C*?

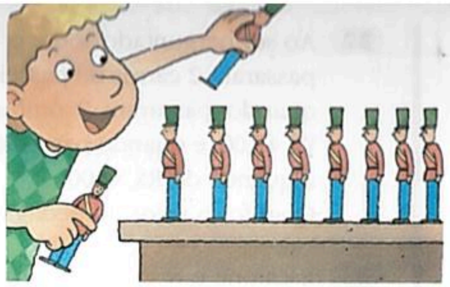
36 (UnB-DF) Na França, três turistas trocaram por francos franceses (F), no mesmo dia, as quantias que lhes restavam em dólares, libras e marcos, da seguinte forma:

1º turista: 50 dólares, 20 libras e 10 marcos por 502,90 F;
2º turista: 40 dólares, 30 libras e 10 marcos por 533,40 F;
3º turista: 30 dólares, 20 libras e 30 marcos por 450,70 F.

Calcule o valor de 1 libra, em francos franceses, no dia em que os turistas efetuaram a transação.

Stock

37 (UF-MS) Um menino possui vários soldadinhos de chumbo e quer colocá-los em fileiras, todas com o mesmo número de soldadinhos. Se ele formar x fileiras de x soldadinhos, sobram-lhe 12 soldadinhos. Para que ele pudesse colocar mais 2 soldadinhos por fileira e ainda formar uma nova fileira, o menino precisaria de 11 soldadinhos a mais do que ele tem. Determinar o número de soldadinhos de chumbo que o menino possui.



Comentário final

O escalonamento também se aplica a sistemas cujo número de equações é diferente do número de incógnitas. Acompanhe os exemplos.

Exemplo 7

Vamos resolver o sistema $\begin{cases} x + y = 3 \\ 2x - y = 5 \\ 5x - 2y = 14 \end{cases}$.

Escalonando-o, obtemos:

$$\begin{cases} x + y = 3 \\ -3y = -1 \longleftarrow (-2) \times (1^a \text{ eq.}) + (2^a \text{ eq.}) \\ -7y = -1 \longleftarrow (-5) \times (1^a \text{ eq.}) + (3^a \text{ eq.}) \end{cases}$$

Esse sistema é impossível, pois a 2ª e 3ª equações não ocorrem simultaneamente: não pode acontecer $y = \frac{1}{7}$ e $y = \frac{1}{3}$.

Exemplo 8

Resolvamos o sistema $\begin{cases} x - 2y = 5 \\ 4x + 3y = -2 \\ 3x + 5y = -7 \end{cases}$.

Escalonando-o, temos: $\begin{cases} x - 2y = 5 \\ 11y = -22 \longleftarrow (-4) \times (1^a \text{ eq.}) + (2^a \text{ eq.}) \\ 11y = -22 \longleftarrow (-3) \times (1^a \text{ eq.}) + (3^a \text{ eq.}) \end{cases}$

Como as duas últimas equações são iguais, resulta o sistema $\begin{cases} x - 2y = 5 \\ 11y = -22 \end{cases}$, que é escalonado e do 1º tipo (SPD).

Resolvendo-o, vem $y = -2$ e $x = 1$.

Daí: $S = \{(1, -2)\}$.

Exemplo 9

Vamos resolver o sistema $\begin{cases} 2x + 3y - z = 1 \\ 4x - y + 5z = 2 \end{cases}$.

Escalonando-o, obtemos:

$$\begin{cases} 2x + 3y - z = 1 \\ -7y + 7z = 0 \longleftarrow (-2) \times (1^a \text{ eq.}) + (2^a \text{ eq.}) \end{cases}$$

O sistema obtido está escalonado e é do 2º tipo (SPI). Resolvendo-o, segue que a solução é $\left\{\left(-\alpha + \frac{1}{2}, \alpha, \alpha\right), \alpha \in \mathbb{R}\right\}$.

EXERCÍCIOS

38 Resolva, através do escalonamento, os seguintes sistemas:

a) $\begin{cases} x - y = 3 \\ x + y = 5 \\ -2x + 5y = -3 \end{cases}$ b) $\begin{cases} x - y = 0 \\ -2x + 3y = 4 \\ -x + 2y = 3 \end{cases}$ c) $\begin{cases} x + y = 6 \\ x - y = 2 \\ 5x + y = 22 \\ x + 2y = 8 \end{cases}$

39 Escalone e resolva os seguintes sistemas:

a) $\begin{cases} -x + 3y - z = 1 \\ 2x - y + z = 1 \end{cases}$ b) $\begin{cases} 2x - y + 3z = -1 \\ x + y - z = 2 \\ 3x + 2z = 1 \\ 5x + 2y = 5 \end{cases}$ c) $\begin{cases} x + y = 3 \\ x - y = 1 \\ 2x + 3y = -7 \end{cases}$

6 Sistemas homogêneos

Dizemos que um sistema linear é *homogêneo* quando o termo independente de cada uma de suas equações é igual a zero, isto é, quando todas as suas equações são homogêneas. Assim, são exemplos de sistemas homogêneos:

$$\begin{cases} x - 3y = 0 \\ 4x + 5y = 0 \end{cases}, \quad \begin{cases} 4x - y - 3z = 0 \\ x - 2y + 2z = 0 \end{cases} \quad \text{e} \quad \begin{cases} 4x + y = 0 \\ x - y = 0 \\ 2x + 5y = 0 \end{cases}$$

Notemos que todo sistema homogêneo de n incógnitas admite $(\underbrace{0, 0, ..., 0}_{n \text{ zeros}})$ como solução, pois essa seqüência ordenada satisfaz a todas as equações do sistema. Essa solução é chamada solução *nula, trivial* ou *imprópria*.

Um sistema homogêneo é *sempre possível*, pois possui, ao menos, a solução nula.

Se o sistema só possui a solução nula, ele é *possível* e *determinado*.

Havendo outras soluções, além da solução nula, ele é *possível e indeterminado*. Essas soluções recebem o nome de soluções *próprias* ou *não triviais*.

Exemplo 1

Vamos resolver o sistema $\begin{cases} 3x - y = 0 \\ -x + 3y = 0 \end{cases}$.

Trocando a posição das equações e escalonando o sistema, vem:

$$\begin{cases} -x + 3y = 0 \\ 3x - y = 0 \end{cases} \Longleftrightarrow \begin{cases} -x + 3y = 0 \\ 8y = 0 \end{cases} \longleftarrow 3 \times (1^{\underline{a}} \text{ eq.}) + (2^{\underline{a}} \text{ eq.})$$

O sistema obtido está escalonado e é do 1º tipo (SPD).

Assim, ele só admite a solução nula: $S = \{(0, 0)\}$.

Exemplo 2

Resolvamos o sistema $\begin{cases} x + y - z = 0 \\ -x - 4y + 2z = 0 \\ 3x + 6y - 4z = 0 \end{cases}$.

Escalonando-o, obtemos:

$$\begin{cases} x + y - z = 0 \\ -3y + z = 0 \quad \longleftarrow (1^{\underline{a}} \text{ eq.}) + (2^{\underline{a}} \text{ eq.}) \\ 3y - z = 0 \quad \longleftarrow (-3) \times (1^{\underline{a}} \text{ eq.}) + (3^{\underline{a}} \text{ eq.}) \end{cases}$$

Multiplicando por -1 os membros da 3ª equação, notamos que ela ficará igual à 2ª equação e, portanto, poderá ser retirada do sistema.

Assim, o sistema se reduz à forma escalonada $\begin{cases} x + y - z = 0 \\ -3y + z = 0 \end{cases}$ e é do 2º tipo (SPI).

Resolvendo-o, com $z = \alpha$, vem: $y = \frac{1}{3}\alpha$. Daí, $x = \frac{2}{3}\alpha$.

Assim: $S = \left\{\left(\frac{2}{3}\alpha, \frac{1}{3}\alpha, \alpha\right), \alpha \in \mathbb{R}\right\}$.

Atribuindo valores arbitrários para α, obtemos algumas de suas soluções:

- $\alpha = 0 \longrightarrow (0, 0, 0)$: solução nula ou trivial
- $\alpha = 1 \longrightarrow \left(\frac{2}{3}, \frac{1}{3}, 1\right)$ soluções próprias (diferentes da trivial)
- $\alpha = -3 \longrightarrow (-2, -1, -3)$

EXERCÍCIOS

40 Classifique e resolva os seguintes sistemas:

a) $\begin{cases} x - y = 0 \\ 2x - 2y = 0 \end{cases}$ b) $\begin{cases} x - 5y = 0 \\ 4x + 3y = 0 \end{cases}$

41 Classifique e resolva os seguintes sistemas homogêneos:

a) $\begin{cases} x - y + 2z = 0 \\ 6x - 5y + 5z = 0 \\ -4x - 3y + z = 0 \end{cases}$ b) $\begin{cases} 3x - 2y - 3z = 0 \\ 3x - 9y - 10z = 0 \\ 3x + 2y + z = 0 \end{cases}$

42 Dado o sistema $\begin{cases} x - y + 4z = m - 2 \\ mx + 3y - z = 0 \\ 6x + (m - 3)y + 15z = 0 \end{cases}$.

a) Determine m para que o sistema seja homogêneo.

b) Utilizando o item a, resolva o sistema.

43 Resolva e classifique os seguintes sistemas homogêneos:

a) $\begin{cases} 2x - 4y - 3z = 0 \\ x - y + z = 0 \end{cases}$ b) $\begin{cases} x - y = 0 \\ -2x + 3y = 0 \\ -x + 2y = 0 \\ 8x - 7y = 0 \end{cases}$

44 (Unicamp-SP) Seja A a matriz formada pelos coeficientes do sistema linear abaixo:

$$\begin{cases} \lambda x + y + z = \lambda + 2 \\ x + \lambda y + z = \lambda + 2 \\ x + y + \lambda z = \lambda + 2 \end{cases}$$

a) Ache as raízes da equação $\det A = 0$.

(Sugestão: $x^3 - 3x + 2 = x^3 - x - 2x + 2$ e fatore.)

b) Ache a solução geral desse sistema para $\lambda = -2$.

45 O sistema abaixo é escalonado:

$$\begin{cases} x - 3y = 0 \\ (m + 1)y = 0 \end{cases}$$

Determine m para que o sistema admita somente a solução nula ou trivial.

Observação

Mais adiante, estudaremos condições sobre os elementos da matriz incompleta dos coeficientes do sistema, as quais nos permitirão classificar um sistema de modo mais direto.

46 Seja o sistema $\begin{cases} x - 2y = 0 \\ 2x + my = 0 \end{cases}$.

a) Escalone-o.

b) Determine m para que o sistema admita soluções próprias (diferentes da trivial).

47 (FGV-SP) Dada a matriz $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 3 \end{bmatrix}$ e a matriz incógnita $X = \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$, chama-se autovalor de A qualquer valor real de λ que faz com que a equação matricial $AX = \lambda X$ tenha soluções não nulas para X.

a) Determine os autovalores de A.

b) Para cada um dos valores encontrados no item anterior, obtenha a expressão da matriz X.

7 Regra de Cramer

Consideremos o sistema $\begin{cases} ax + by = e \\ cx + dy = f \end{cases}$. Suponhamos que $a \neq 0$. Observemos que a matriz incompleta desse sistema é $M = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$, cujo determinante é indicado por $D = ad - bc$.

Escalonando-o, obtemos: $\begin{cases} ax + by = e \\ (ad - bc) \cdot y = (af - ce) \end{cases}$ (*)

Se substituirmos em M a 2ª coluna (dos coeficientes de y) pela coluna dos coeficientes independentes, obteremos $\begin{pmatrix} a & e \\ c & f \end{pmatrix}$, cujo determinante é indicado por D_y e vale $af - ce$.

Assim, em (*), na 2ª equação, obtemos: $D \cdot y = D_y$. Se $D \neq 0$, segue que $y = \dfrac{D_y}{D}$.

Substituindo esse valor de y na 1ª equação de (*) e considerando a matriz $\begin{pmatrix} e & b \\ f & d \end{pmatrix}$, cujo determinante é indicado por D_x e vale $ed - bf$, obtemos que $x = \dfrac{D_x}{D}$, $D \neq 0$.

Em resumo, o sistema $\begin{cases} ax + by = e \\ cx + dy = f \end{cases}$ é *possível e determinado* quando $D = \begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} \neq 0$. A solução desse sistema é dada por:

$$x = \frac{D_x}{D} \quad \text{e} \quad y = \frac{D_y}{D}$$

Os resultados acima são conhecidos como *Regra de Cramer* e podem ser generalizados para um sistema $n \times n$ (n equações e n incógnitas). A Regra de Cramer é um importante recurso na resolução de sistemas lineares possíveis e determinados, especialmente quando o escalonamento se torna muito trabalhoso (por causa dos coeficientes das equações do sistema), ou ainda quando o sistema é literal.

Exemplo 1

Vamos resolver, usando a Regra de Cramer, o sistema $\begin{cases} 2x - 3y = 5 \\ x + 2y = 3 \end{cases}$.

Observemos que $D = \begin{vmatrix} 2 & -3 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = 4 + 3 = 7 \neq 0$. Assim, o sistema é possível e determinado.

$$D_x = \begin{vmatrix} 5 & -3 \\ 3 & 2 \end{vmatrix} = 10 + 9 = 19 \Rightarrow x = \frac{D_x}{D} = \frac{19}{7}$$

$$D_y = \begin{vmatrix} 2 & 5 \\ 1 & 3 \end{vmatrix} = 6 - 5 = 1 \Rightarrow y = \frac{D_y}{D} = \frac{1}{7}$$

Assim, $S = \left\{\left(\dfrac{19}{7}, \dfrac{1}{7}\right)\right\}$.

Exemplo 2

Vamos determinar x, y e z no sistema $\begin{cases} x + 2y - z = -5 \\ -x - 2y - 3z = -3 \\ 4x - y - z = 4 \end{cases}$.

Como $D = \begin{vmatrix} 1 & 2 & -1 \\ -1 & -2 & -3 \\ 4 & -1 & -1 \end{vmatrix} = -36 \neq 0$, o sistema é SPD.

$$D_x = \begin{vmatrix} -5 & 2 & -1 \\ -3 & -2 & -3 \\ 4 & -1 & -1 \end{vmatrix} = -10 - 24 - 3 - 8 + 15 - 6 = -36; \quad x = \frac{D_x}{D} = \frac{-36}{-36} = 1$$

$$D_y = \begin{vmatrix} 1 & -5 & -1 \\ -1 & -3 & -3 \\ 4 & 4 & -1 \end{vmatrix} = 3 + 60 + 4 - 12 + 12 + 5 = 72; \quad y = \frac{D_y}{D} = \frac{72}{-36} = -2$$

$$D_z = \begin{vmatrix} 1 & 2 & -5 \\ -1 & -2 & -3 \\ 4 & -1 & 4 \end{vmatrix} = 8 - 24 - 5 - 40 - 3 - 8 = -72; \quad z = \frac{D_z}{D} = \frac{-72}{-36} = 2$$

Assim, $S = \{(1, -2, 2)\}$.

EXERCÍCIOS

48 Resolva, usando a Regra de Cramer:

a) $\begin{cases} x + y = 6 \\ x - y = 2 \end{cases}$ b) $\begin{cases} 2x + 4y = 3 \\ 3x - 2y = 1 \end{cases}$

49 Resolva, usando a Regra de Cramer:

a) $\begin{cases} x - y + z = 0 \\ x + 2y - 2z = 3 \\ 2x - y - z = -3 \end{cases}$ b) $\begin{cases} x - y + z = 0 \\ 2x - 4y + 6z = 1 \\ x + y + z = 3 \end{cases}$

50 Resolva, através da Regra de Cramer, os sistemas:

a) $\begin{cases} x - 2y = 1 \\ y + z = 3 \\ -x + 2z = 1 \end{cases}$ b) $\begin{cases} x + 2y + 3z = 0 \\ -x + y = 0 \\ y - z = 0 \end{cases}$

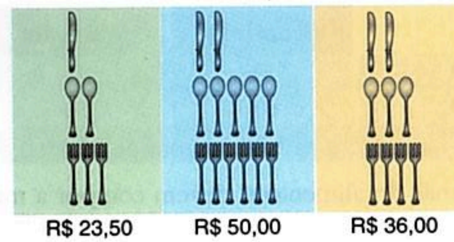
51 Qual o valor de y no sistema abaixo?

$$\begin{cases} 2x - y + z = 12 \\ 2y - z = -13 \\ x + y + z = 0 \end{cases}$$

52 Prove que o sistema $\begin{cases} x + y + z = 4 \\ 2x - z + w = -4 \\ y - z - w = -2 \\ -x + z - 2w = 2 \end{cases}$ é possível e determinado e encontre seu conjunto solução.

53 Resolva o problema proposto na introdução deste capítulo.

54 (UF-ES) Examinando os anúncios abaixo, conclua o preço de cada faca, garfo e colher.



55 Resolva o sistema, pela Regra de Cramer:

$$\begin{cases} \dfrac{2}{x} - \dfrac{1}{y} - \dfrac{1}{z} = -1 \\ \dfrac{1}{x} + \dfrac{1}{y} + \dfrac{1}{z} = 0 \\ \dfrac{3}{x} - \dfrac{2}{y} + \dfrac{1}{z} = 4 \end{cases}$$

Sugestão: Faça $\frac{1}{x} = x'$, $\frac{1}{y} = y'$ e $\frac{1}{z} = z'$.

56 Resolva o seguinte sistema literal:

$$\begin{cases} (a+b) \cdot x + 2b \cdot y = 1 \\ a \cdot x + (a+b) \cdot y = 1 \end{cases}$$

57 Considere o sistema $\begin{cases} x \cdot \operatorname{sen}\theta - y \cdot \cos\theta = \operatorname{sen}\beta \\ x \cdot \cos\theta + y \cdot \operatorname{sen}\theta = \cos\beta \end{cases}$.

a) Mostre que, qualquer que seja $\theta \in \mathbb{R}$, o sistema é possível e determinado.

b) Resolva-o pela Regra de Cramer.

58 (U. F. Juiz de Fora-MG) O curso de Álgebra, no semestre passado, teve três provas. As questões valiam um ponto cada uma, mas os pesos das provas eram diferentes. Rafael, que acertou 4 questões na primeira prova, 5 na segunda e 3 na terceira, obteve no final um total de 15 pontos. Joana acertou 3 na primeira, 4 na segunda e 4 na terceira prova, totalizando também 15 pontos. Por sua vez, Leandro acertou 5 na primeira, 5 na segunda e 2 na terceira prova, atingindo a soma de 14 pontos no final. Já Fernando fez 4 questões certas na primeira prova, 6 na segunda e 3 na terceira. Qual foi o total de pontos de Fernando?

59 Resolva o seguinte sistema literal: $\begin{cases} ax + by = a^2 \\ bx + ay = b^2 \end{cases}$.

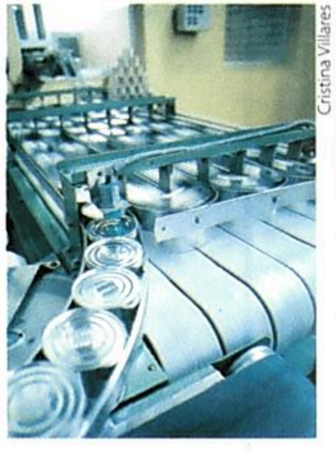
(Suponha $a \neq \pm b$.)

60 (Covest-PE) Um nutricionista pretende misturar três tipos de alimentos (A, B e C) de forma que a mistura resultante contenha 3 600 unidades de vitaminas, 2 500 unidades de minerais e 2 700 unidades de gorduras. As unidades por gramas de vitaminas, minerais e gorduras dos alimentos constam da tabela abaixo:

	Vitaminas	Minerais	Gordura
A	40	100	120
B	80	50	30
C	120	50	60

Quantos gramas do alimento C devem compor a mistura?

61 (Unicamp-SP) Uma empresa deve enlatar uma mistura de amendoim, castanha de caju e castanha-do-pará. Sabe-se que o quilo de amendoim custa R$ 5,00, o quilo da castanha de caju, R$ 20,00, e o quilo de castanha-do-pará, R$ 16,00. Cada lata deve conter meio quilo da mistura e o custo total dos ingredientes de cada lata deve ser de R$ 5,75. Além disso, a quantidade de castanha de caju em cada lata deve ser igual a um terço da soma das outras duas.


Cristina Villares

a) Escreva o sistema linear que representa a situação descrita acima.

b) Resolva o referido sistema, determinando as quantidades, em gramas, de cada ingrediente por lata.

62 (UF-MG) Determine todos os valores de x, y e z que satisfazem o sistema:

$$\begin{cases} 3^x \cdot 3^y \cdot 3^z = 1 \\ \dfrac{2^x}{2^y \cdot 2^z} = 4 \\ 4^{-x} \cdot 16^y \cdot 4^z = \dfrac{1}{4} \end{cases}$$

8 Discussão de um sistema

Consideremos novamente o sistema $\begin{cases} ax + by = e \\ cx + dy = f \end{cases}$, cuja forma escalonada é:

$$\begin{cases} ax + by = e \\ \underbrace{(ad - bc)}_{D} \cdot y = (af - ce) \quad (*) \end{cases}$$

em que $D = \begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix}$ é o determinante da matriz incompleta do sistema.

Já vimos que, se $D \neq 0$, o sistema é possível e determinado e a solução pode ser obtida através da Regra de Cramer.

Se $D = 0$, o 1º membro de (*) se anula. Dependendo do anulamento, ou não, do 2º membro de (*), temos SPI ou SI.

Em geral, sendo D o determinante da matriz incompleta dos coeficientes de um sistema linear, temos:

$D \neq 0 \longrightarrow$ SPD
$D = 0 \longrightarrow$ (SPI ou SI)

Esse resultado é válido para qualquer sistema linear de n equações e n incógnitas, $n \geq 2$.

De modo geral, discutir um sistema linear em função de um ou mais parâmetros significa dizer para quais valores do(s) parâmetro(s) temos SPD, SPI ou SI. Discutiremos aqui apenas sistemas com número de equações igual ao número de incógnitas.

Exemplo 1

Vamos discutir, em função de m, o sistema $\begin{cases} x + y = 3 \\ 2x + my = 2 \end{cases}$.

Temos: $D = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 2 & m \end{vmatrix} = m - 2$

- Se $m - 2 \neq 0$, isto é, $m \neq 2$, ou $D \neq 0$, temos SPD.
- Se $m - 2 = 0$, isto é, $m = 2$, ou $D = 0$, temos SPI ou SI.

Para decidirmos entre as duas possibilidades, "levamos" $m = 2$ ao sistema e o escalonamos.

Temos:

$$\begin{cases} x + y = 3 \\ 2x + 2y = 2 \end{cases} \iff \begin{cases} x + y = 3 \\ 0 = -4 \end{cases} \longleftarrow (-2) \times (1^a \text{ eq.}) + (2^a \text{ eq.})$$

Como a 2ª equação nunca é satisfeita, temos SI.

Assim, $\begin{cases} m \neq 2 \rightarrow \text{SPD.} \\ m = 2 \rightarrow \text{SI} \end{cases}$

Exemplo 2

Discutamos, em função de *m*, o sistema $\begin{cases} x - y - z = 1 \\ 2x + y + 3z = 6 \\ mx + y + 5z = 9 \end{cases}$.

Temos: $D = \begin{vmatrix} 1 & -1 & -1 \\ 2 & 1 & 3 \\ m & 1 & 5 \end{vmatrix} = -2m + 10.$

- $m \neq 5 \Rightarrow -2m + 10 \neq 0$, ou seja, $D \neq 0 \Rightarrow$ SPD.
- $m = 5 \Rightarrow D = 0$, podemos ter SPI ou SI.

Levando m = 5 ao sistema e escalonando-o, vem:

$$\begin{cases} x - y - z = 1 \\ 2x + y + 3z = 6 \\ 5x + y + 5z = 13 \end{cases} \iff \begin{cases} x - y - z = 1 \\ 3y + 5z = 4 \longleftarrow (-2) \times (1^{a}\ \text{eq.}) + (2^{a}\ \text{eq.}) \\ 6y + 10z = 8 \longleftarrow (-5) \times (1^{a}\ \text{eq.}) + (3^{a}\ \text{eq.}) \end{cases}$$

Como os coeficientes da 2ª e 3ª equações são proporcionais, podemos retirar a 3ª equação, obtendo o sistema $\begin{cases} x - y - z = 1 \\ 3y + 5z = 4 \end{cases}$, que é possível e indeterminado.

Assim, $\begin{cases} m \neq 5 \longrightarrow \text{SPD.} \\ m = 5 \longrightarrow \text{SPI} \end{cases}$

Exemplo 3

Vamos discutir, em função de *a* e *b*, o sistema $\begin{cases} ax + 2y = 1 \\ 3x + 2y = b \end{cases}$.

Temos: $D = \begin{vmatrix} a & 2 \\ 3 & 2 \end{vmatrix} = 2a - 6.$

- Se $2a - 6 \neq 0$, isto é, $a \neq 3$, ou seja, $D \neq 0$, temos SPD.
- Se $a = 3$, isto é, $D = 0$, temos SPI ou SI.

Substituindo a por 3 e escalonando, temos:

$$\begin{cases} 3x + 2y = 1 \\ 3x + 2y = b \end{cases} \iff \begin{cases} 3x + 2y = 1 \\ 0 = -1 + b \quad (*) \end{cases}$$

Há duas possibilidades:

- Se o 2º membro de (*) se anula, temos 0 = 0, e o sistema se reduz à 1ª equação, sendo possível e indeterminado. Assim, se $-1 + b = 0$, ou seja, $b = 1$, temos SPI.
- Se o 2º membro de (*) não se anular, a equação nunca será satisfeita, não havendo, portanto, solução. Desse modo, se $-1 + b \neq 0$, ou seja, $b \neq 1$, temos SI.

Assim, $\begin{cases} a \neq 3 \longrightarrow \text{SPD} \\ (a = 3 \text{ e } b = 1) \longrightarrow \text{SPI} \\ (a = 3 \text{ e } b \neq 1) \longrightarrow \text{SI} \end{cases}$

Exemplo 4

Determinemos o valor de *m* em $\begin{cases} mx + y - 3z = 0 \\ my + 2z = 0 \\ -mx + z = 0 \end{cases}$, a fim de que o sistema admita soluções diferentes da trivial (ou soluções próprias):

Lembrando que um *sistema homogêneo é sempre possível*, valem as relações:

- $D \neq 0 \Rightarrow$ SPD (O sistema só tem a solução nula, imprópria ou trivial.)
- $D = 0 \Rightarrow$ SPI (O sistema tem soluções próprias, isto é, diferentes da trivial.)

Assim, devemos ter D = 0, isto é:

$$\begin{vmatrix} m & 1 & -3 \\ 0 & m & 2 \\ -m & 0 & 1 \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow -2m^2 - 2m = 0 \Rightarrow 2m(-m - 1) = 0,$$

isto é, m = 0 ou m = −1.

EXERCÍCIOS

63 Discuta, em função de *m*, os seguintes sistemas:

a) $\begin{cases} x - y = 3 \\ mx - 2y = 5 \end{cases}$ b) $\begin{cases} x + 4y = 5 \\ 3x + my = 15 \end{cases}$ c) $\begin{cases} x - y = 0 \\ mx + 2y = 0 \end{cases}$

64 Discuta, em função de *m*, os seguintes sistemas:

a) $\begin{cases} x + 2y = 3 \\ (m - 1)x + (m + 1)y = 2 \end{cases}$ b) $\begin{cases} mx + 8y = 10 \\ 2x + my = 5 \end{cases}$ c) $\begin{cases} 2x - y = 5 \\ 4x + my = 10 \end{cases}$

65 Discuta, em função de m, os seguintes sistemas:

a) $\begin{cases} 2mx - y = 3 \\ -2x + my = -3 \end{cases}$ b) $\begin{cases} (m+1)x + 3y = 6 \\ x + (m-1)y = 2 \end{cases}$

66 Discuta, em função de m, os seguintes sistemas:

a) $\begin{cases} x - 3y + 2z = 1 \\ 2y + z = 3 \\ -x + 3my + z = -2 \end{cases}$ b) $\begin{cases} x - 2y + mz = 3 \\ (m-1)x + 3y + 2z = -27 \\ x + z = 9 \end{cases}$

67 Discuta, em função de m, os seguintes sistemas:

a) $\begin{cases} x + z = 3 \\ x - y + z = 2 \\ m^2x + y + mz = 1 \end{cases}$ b) $\begin{cases} x - y + z = 0 \\ mx + my + z = 0 \\ 3x + y + mz = 0 \end{cases}$

68 (Unesp-SP) Dado o sistema de equações lineares S:

$$\begin{cases} x + 2y + cz = 1 \\ y + z = 2 \\ 3x + 2y + 2z = -1 \end{cases}$$

no qual $c \in \mathbb{R}$, determine:

a) a matriz A dos coeficientes de S e o determinante de A;
b) o coeficiente c, para que o sistema admita uma única solução.

69 (UF-SC) Determine o valor de a para que o sistema $\begin{cases} x + 3y + 4z = 1 \\ x + y + az = 2 \\ x + y + 2z = 3 \end{cases}$ seja impossível.

70 (UC-GO) Determine a e b para que o sistema $\begin{cases} x + 2y + 2z = a \\ 3x + 6y - 4z = 4 \\ 2x + by - 6z = 1 \end{cases}$ seja indeterminado.

71 Determine m para que o sistema $\begin{cases} -2x + my + z = 3 \\ x + y = -1 \\ y - 2z = 0 \end{cases}$ admita uma única solução.

72 O sistema $\begin{cases} x + y - z = 0 \\ mx + 2y - 3z = 0 \\ 4x + y = 0 \end{cases}$ admite uma infinidade de soluções. Determine m.

73 Sabe-se que o sistema $\begin{cases} px + qy = 0 \\ (p-1)x + (q+1)y = 0 \end{cases}$ só admite a solução nula. Determine uma relação entre p e q.

74 Determine m para que o sistema homogêneo $\begin{cases} (m-1)x + y = 0 \\ 2x - 3y = 0 \end{cases}$ admita soluções próprias.

75 Determine m para que o sistema $\begin{cases} x - my + 2z = 0 \\ my + z = 0 \\ -mx + y - 2z = 0 \end{cases}$ admita apenas a solução trivial (ou nula).

76 (FGV-SP) Considere o seguinte sistema de equações lineares nas incógnitas x, y e z:

$$\begin{cases} x + 2y - z = 7 \\ y + 3z = n \\ 3y - mz = 1 \end{cases}$$

a) Resolva o sistema para $m = 1$ e $n = 2$.
b) Para que valores de m e n o sistema é indeterminado?

77 Discuta, em função de a e b, o sistema $\begin{cases} 2x - y = 3 \\ 4x + ay = b \end{cases}$.

78 Discuta, em função de a e b, o sistema $\begin{cases} (a+1)x + 2y = 1 \\ ax + 4y = b \end{cases}$.

79 (Covest-PE) Para qual valor de a o sistema $\begin{cases} 4x + ay = -1 + a \\ (6-a)x + 2y = 3 - a \end{cases}$ possui infinitas soluções racionais (x, y)?

80 Discuta em função de a e b: $\begin{cases} -x + y - z = 4 \\ 4x + ay + z = -19. \\ x - y + 3z = b \end{cases}$

81 (Fuvest-SP) Seja o sistema $\begin{cases} x + 2y - z = 0 \\ x - my - 3z = 0 \\ x + 3y + mz = m \end{cases}$.

a) Determine todos os valores de m para os quais o sistema admite solução.
b) Resolva o sistema, supondo $m = 0$.

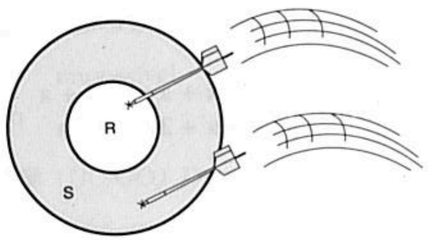
TESTES de VESTIBULARES

1 (UFF-RJ) Um jogador de basquete fez o seguinte acordo com o seu clube: cada vez que ele convertesse um arremesso, receberia R$ 10,00 do clube e cada vez que ele errasse, pagaria R$ 5,00 ao clube. Ao final de uma partida em que arremessou 20 vezes, ele recebeu R$ 50,00. Pode-se afirmar que o número de arremessos convertidos pelo jogador nesta partida foi:

a) 0 b) 5 c) 10 d) 15 e) 20

2 (UF-RN) No alvo representado pela figura abaixo, uma certa pontuação é dada para a flecha que cai na região sombreada *S* e outra para a flecha que cai no círculo central *R*.
Diana obteve 17 pontos, lançando três flechas, das quais uma caiu em *R* e duas em *S*. Guilherme obteve 22 pontos, lançando o mesmo número de flechas, das quais uma caiu em *S* e duas em *R*. Considerando-se o desempenho dos dois arremessadores, pode-se afirmar que o número de pontos atribuídos a cada flecha que cai na região *S* é:

a) 2 b) 3 c) 4 d) 5



3 (UF-SE) Dois grupos de turistas, um de argentinos e outro de paulistas, fizeram passeios de trem turístico, ao preço de R$ 12,00 cada pessoa, e de catamarã, ao preço de R$ 10,00 cada pessoa. No sábado, os argentinos passearam de trem e os paulistas de catamarã, gastando um total de R$ 156,00. No domingo, os argentinos passearam de catamarã e os paulistas de trem, com gasto total de R$ 152,00. Nessas condições, o número de pessoas do grupo de turistas

a) argentinos era 9.
b) argentinos era 8.
c) argentinos era 7.
d) paulistas era 7.
e) paulistas era 5.

4 (Fuvest-SP)

$$\begin{cases} x + 4z = -7 \\ x - 3y = -8 \\ y + z = 1 \end{cases}$$

Então $x + y + z$ é igual a:

a) −2 b) −1 c) 0 d) 1 e) 2

5 (U. E. Londrina-PR) Se os sistemas

$$\begin{cases} x + y = 1 \\ x - 2y = -5 \end{cases} \quad \text{e} \quad \begin{cases} ax - by = 5 \\ ay - bx = -1 \end{cases}$$

são equivalentes, então $a^2 + b^2$ é igual a:

a) 1 b) 4 c) 5 d) 9 e) 10

6 (Unifor-CE) Sabe-se que o sistema

$$\begin{cases} 3x - 2y = -2 \\ x + y = 6 \\ (m-1)x + 2my = 105 \end{cases}, \text{ nas incógnitas}$$

x e *y*, admite uma única solução. Nessas condições, o número real *m* satisfaz a sentença:

a) $-5 \leq m < 0$
b) $0 \leq m < 5$
c) $5 \leq m < 10$
d) $10 \leq m < 15$
e) $15 \leq m < 20$

7 (Fafi-MG) Se a solução do sistema

$$\begin{cases} x + 2y + z = 3 \\ 2x - 3y + 2z = -15 \\ 3x + 6y - 7z = 59 \end{cases} \text{ é } \{(x, y, z)\},$$

então o valor de $x^y + z$ é:

a) primo b) par c) negativo d) irracional

8 (UF-MA) Em um restaurante são servidos três tipos de salada: *A*, *B* e *C*. Num dia de movimento, observaram-se os clientes *X*, *Y*, *Z*. O cliente *X* seviu-se de 200 g da salada *A*, 300 g da *B* e 100 g da *C* e pagou R$ 5,50 pelo seu prato. O cliente *Y* fez seu prato com 150 g da salada *A*, 250 g da *B* e 200 g da *C* e pagou R$ 5,85. Já o cliente *Z* serviu-se de 120 g da salada *A*, 200 g da *B* e 250 g da *C* e pagou R$ 5,76. Qual o preço do quilo das saladas *A*, *B* e *C*, respectivamente?

a) R$ 7,00; R$ 8,00 e R$ 10,00
b) R$ 9,00; R$ 8,00 e R$ 12,00
c) R$ 8,00; R$ 9,00 e R$ 12,00
d) R$ 12,00; R$ 9,00 e R$ 8,00
e) R$ 6,00; R$ 10,00 e R$ 12,00

9 (Vunesp-SP) Um orfanato recebeu uma certa quantidade *x* de brinquedos para ser distribuída entre as crianças. Se cada criança receber três brinquedos, sobrarão 70 brinquedos para serem distribuídos; mas, para que cada criança possa receber cinco brinquedos, serão necessários mais 40 brinquedos. O número de crianças do orfanato e a quantidade *x* de brinquedos que o orfanato recebeu são, respectivamente:

a) 50 e 290
b) 55 e 235
c) 55 e 220
d) 60 e 250
e) 65 e 265

10 (U. F. Santa Maria-RS) Dado o sistema de equações lineares

$$\begin{cases} x + y + z = \beta \\ x - y + \alpha z = 1 \\ x - y - z = -1 \end{cases},$$

com $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, então:

a) se $\alpha \neq -1$, o sistema é possível e determinado.
b) se $\alpha = -1$ e $\beta \neq 1$, o sistema é possível e determinado.
c) se $\alpha \neq -1$, o sistema é impossível.
d) se $\alpha \neq -1$ e $\beta = 1$, o sistema é possível e indeterminado.
e) se $\alpha = -1$ e $\beta = 1$, o sistema é possível e determinado.

11 (UF-AM) O(s) valor(es) de *k*, para que o sistema

$$\begin{cases} ky + 3z = 0 \\ kx + 2y + z = 0 \\ x - 2z = 0 \end{cases}$$

tenha solução não trivial, é (são):

a) $k \neq 0$
b) $k = -2$ ou $k = \frac{3}{2}$
c) $k \neq 0$ ou $k \neq \frac{3}{4}$
d) $k = \frac{3}{4}$
e) $k \neq -2$ ou $k \neq \frac{3}{2}$

12 (UCDB-MT) O sistema

$$\begin{cases} -x + y + z - 2 = 0 \\ x + 2y - 2z = 0 \\ x - 4y + 10z - 6 = 0 \\ 2x + 7y - 5z - 2 = 0 \end{cases} \text{ é:}$$

a) impossível.
b) homogêneo.
c) determinado.
d) indeterminado com uma variável arbitrária.
e) indeterminado com duas variáveis arbitrárias.

13 (Unificado-RJ) Para que valores de *k* existe uma única matriz $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$, tal que

$$\begin{pmatrix} k-1 & -2 \\ -1 & k \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}?$$

a) $k \neq -1$
b) $k = -2$
c) $k = -2$ ou $k = 1$
d) $k \neq -2$ e $k \neq 1$
e) $k \neq 2$ e $k \neq -1$

14 (F. Objetivo-AM)
O sistema $\begin{cases} x + ay = 3 \\ 2x + 4y = b \end{cases}$ nas incógnitas *x* e *y* tem infinitas soluções. O valor de $a \cdot b$ é:

a) 6 b) 2 c) 8 d) 16 e) 12

15 (UF-AL) O sistema $\begin{cases} ax + 2y = 3 \\ bx - y = 1 \end{cases}$, nas variáveis reais x e y, é:

a) possível e determinado, $\forall a, b \in \mathbb{R}$.
b) possível e indeterminado se $a = 2b$.
c) possível e determinado se $a \neq 2b$.
d) possível e indeterminado se $a = -2b$.
e) impossível se $a = -2b$.

16 (UF-MG) Num cinema, ingressos são vendidos a R$ 10,00 para adultos e a R$ 5,00 para crianças.
Num domingo, na sessão da tarde, o número de ingressos vendidos para crianças foi o dobro do número vendido para crianças na sessão da noite. A renda da sessão da tarde foi R$ 300,00 a menos que a da noite e, em ambas as sessões, foi vendido o mesmo número de ingressos. Nesse domingo, o número de ingressos vendidos para crianças, na sessão da noite, foi:

a) 50
b) 55
c) 60
d) 65

17 (Fuvest-SP) Um casal tem filhos e filhas. Cada filho tem o número de irmãos igual ao número de irmãs. Cada filha tem o número de irmãos igual ao dobro do número de irmãs. Qual é o total de filhos e filhas do casal?

a) 3
b) 4
c) 5
d) 6
e) 7

18 (UF-RS) O sistema $\begin{cases} ax + 5y + az = 0 \\ x + ay = 0 \\ y + az = 0 \end{cases}$ tem coeficientes reais e mais de uma solução. O conjunto de todos os valores que o coeficiente a pode assumir é:

a) {−2}
b) {0}
c) {2}
d) {−2, 2}
e) {−2, 0, 2}

19 (UF-GO) Classifique em V ou F:
Seja k um número real. Considerando-se o sistema linear nas variáveis x e y, dado por $\begin{cases} 4kx + (k-1)y = 1 \\ k^3x + (k-1)y = 2 \end{cases}$,

a) uma solução para o sistema é $x = 0$ e $y = 3$.
b) se $k = -2$, o sistema não tem solução.
c) se $k = 2$, o sistema tem infinitas soluções.
d) existem infinitos valores de k, para os quais o sistema possui solução única.

20 (Mackenzie-SP) A equação

$$(x + ky - 3)^2 + (4y - x + 2p)^2 = 0,$$

nas incógnitas x e y, com k e p números reais, admite inúmeras soluções. Então, $k \cdot p$ vale:

a) −6
b) −8
c) −10
d) −12
e) −14

21 (Cesgranrio-RJ) O sistema, com as incógnitas x, y e z, $\begin{cases} x + z = p \\ y + z = 100 \\ z - mx = 80 \end{cases}$ tem uma infinidade de soluções. Sobre os valores dos parâmetros m e p, concluímos:

a) $m = -1$ e p é arbitrário
b) $m = 1$ e p é arbitrário
c) $m = 80$ e $p = 100$
d) $m = -1$ e $p = 80$
e) $m = 1$ e $p \neq 80$

22 (PUC-Pelotas-RS) O sistema linear

$$\begin{cases} x - y + 3z = 0 \\ 4x + 2y - 6z = 0 \\ x - 5y + 15z = 0 \end{cases}$$

a) admite infinitas soluções.
b) admite apenas duas soluções.
c) não admite solução.
d) admite solução única.
e) admite apenas a solução trivial.

23 (U. F. Juiz de Fora-MG) Dado o sistema linear $\begin{cases} x - ay + z = 0 \\ 2x - y + az = 1 \\ 2x - 2y + az = 2 \end{cases}$, no qual a é um número real, assinale a afirmativa correta:

a) se $a = 2$, o sistema é determinado.
b) se $a \neq 2$, o sistema é indeterminado.
c) se $a = 2$, o sistema é impossível.
d) se $a = 0$, o sistema admite apenas a solução trivial.
e) o sistema é indeterminado para todo a.

24 (Unifor-CE) Se a terna (x, y, z) de números reais é solução do sistema $\begin{cases} 2x + y - z = 6 \\ x + 2y - z = 7 \\ x - y + z = 0 \end{cases}$, então é verdade que:

a) $x = 3$
b) $y = 3$
c) $z = 2$
d) $y = 2$
e) $x = 1$

25 (F. M. Triângulo Mineiro-MG) Em três mesas de uma lanchonete o consumo ocorreu da seguinte forma:

Mesa	Hambúrguer	Refrigerante	Porção de fritas
1ª	4	2	2
2ª	6	8	3
3ª	2	3	1

A conta da 1ª mesa foi R$ 18,00 e da 2ª mesa R$ 30,00. Com esses dados:

a) é possível calcular a conta da 3ª mesa e apenas o preço unitário do refrigerante.
b) é possível calcular a conta da 3ª mesa, mas nenhum dos preços unitários dos três componentes do lanche.
c) é possível calcular a conta da 3ª mesa e, além disso, saber exatamente os preços unitários de todos os componentes do lanche.
d) não é possível calcular a conta da 3ª mesa, pois deveriam ser fornecidos os preços unitários dos componentes do lanche.
e) é impossível calcular a conta da 3ª mesa e os preços unitários dos componentes do lanche, pois deve ter havido um erro na conta da 1ª ou da 2ª mesa.

26 (Fuvest-SP) Sendo (x_1, y_1) e (x_2, y_2) as soluções do sistema $\begin{cases} x^2 + 3xy = 0 \\ x - y = 2 \end{cases}$, então $y_1 + y_2$ é igual a:

a) $-\frac{5}{2}$
b) $-\frac{3}{2}$
c) $\frac{3}{2}$
d) $\frac{5}{2}$
e) 3

27 (U. F. Uberlândia-MG) Determine $a + b + c + d$, sabendo que o sistema abaixo tem infinitas soluções e que (1, 1, −1) é uma dessas soluções.

$$\begin{cases} ax + y + z = d \\ x + y + cz = -1 \\ x + by - z = 1 \end{cases}$$

a) −2
b) −1
c) 0
d) 1
e) 2

28 (Fuvest−SP) Sabendo que x, y e z são números reais e $(2x + y - z)^2 + (x - y)^2 + (z - 3)^2 = 0$, então $x + y + z$ é igual a:

a) 3
b) 4
c) 5
d) 6
e) 7

29 (UE-RJ) Observe a tabela de compras realizadas por Mariana:

Loja	Produtos	Preço unitário (R$)	Despesa (R$)
A	Caneta	3,00	50,00
	Lapiseira	5,00	
B	Caderno	4,00	44,00
	Corretor	2,00	

Sabendo que ela adquiriu a mesma quantidade de canetas e cadernos, além do maior número possível de lapiseiras, o número de corretores comprados foi igual a:

a) 11
b) 12
c) 13
d) 14

30 (ITA-SP) Sejam a, b $\in \mathbb{R}$. Considere os sistemas lineares em *x*, *y* e *z*:

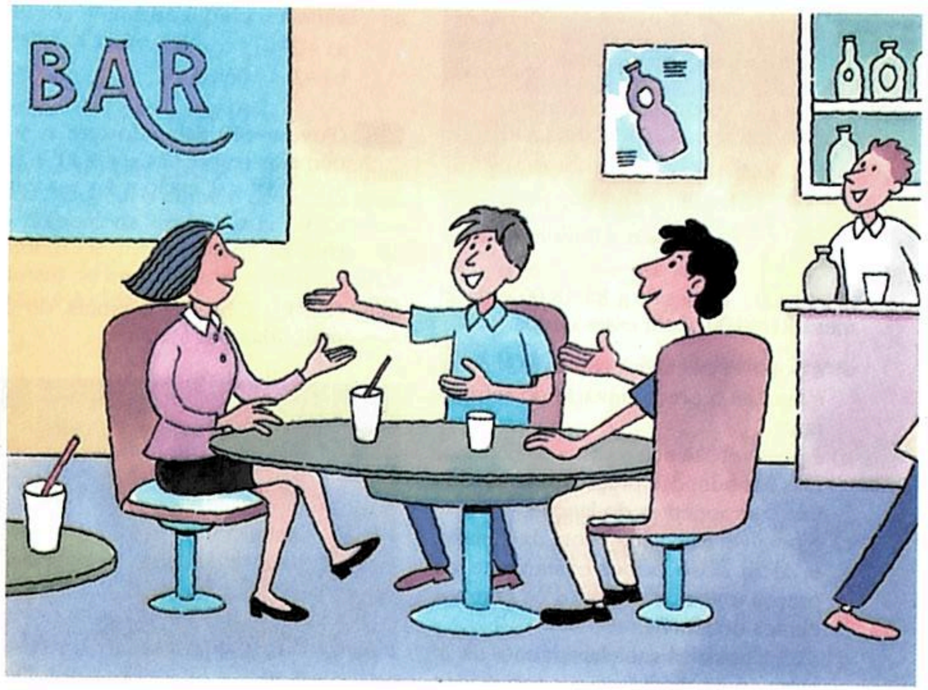
$$\begin{cases} x + y - z = 0 \\ x - 3y + z = 1 \\ \quad -2y + z = a \end{cases} \quad \text{e} \quad \begin{cases} x - y \quad\quad = 0 \\ x + 2y - z = 0 \\ 2x - by + 3z = 0 \end{cases}$$

Se ambos admitem infinitas soluções reais, então:

a) $\frac{a}{b} = 11$
b) $\frac{b}{a} = 22$
c) $ab = \frac{1}{4}$
d) $ab = 22$
e) $ab = 0$

DESAFIOS

1 (UF-RJ) João, Pedro e Maria se encontraram para bater papo em um bar. João e Pedro trouxeram R$ 50,00 cada um, enquanto Maria chegou com menos dinheiro.



Pedro, muito generoso, deu parte do que tinha para Maria, de forma que os dois ficaram com a mesma quantia. A seguir, João resolveu também repartir o que tinha com Maria, de modo que ambos ficassem com a mesma quantia. No final, Pedro acabou com R$ 4,00 a menos do que os outros dois. Determine quanto Maria possuía quando chegou ao encontro.

2 (U. F. Juiz de Fora-MG) Considere as matrizes $A = \begin{bmatrix} \cos a & \text{sen } a \\ -\text{sen } a & \cos a \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} \cos 2a \\ \text{sen } 2a \end{bmatrix}$ e $X = \begin{bmatrix} w \\ y \end{bmatrix}$, tais que AX = B.

a) Calcule *w* e *y* em função de *a*.

b) Calcule *a* sabendo que $w = \frac{1}{2}$.

3 (UF-MG) Em três tipos de alimentos verificou-se que, para cada grama:

a) o alimento I tem 2 unidades de vitamina A, 2 unidades de vitamina B e 8 unidades de vitamina C;
b) o alimento II tem 2 unidades de vitamina A, 1 unidade de vitamina B e 5 unidades de vitamina C;
c) o alimento III tem 3 unidades de vitamina A, não contém vitamina B e tem 3 unidades de vitamina C.

Ache todas as possíveis quantidades dos alimentos I, II e III que forneçam, simultaneamente, 11 unidades de vitamina A, 3 de vitamina B e 20 de vitamina C.

4 (Unicamp-SP) Encontre o valor de *a* para que o sistema

$$\begin{cases} 2x - y + 3z = a \\ x + 2y - z = 3 \\ 7x + 4y + 3z = 13 \end{cases}$$

seja possível. Para o valor encontrado de *a*, ache a solução geral do sistema, isto é, ache expressões que representem todas as soluções do sistema. Explicite duas dessas soluções.

5 (UE-RJ) Observe o sistema $\begin{cases} y = \frac{1}{x} \\ x^2 + y^2 = r^2 \end{cases}$.

Determine o menor valor natural de *r* para que o sistema acima apresente quatro soluções reais.

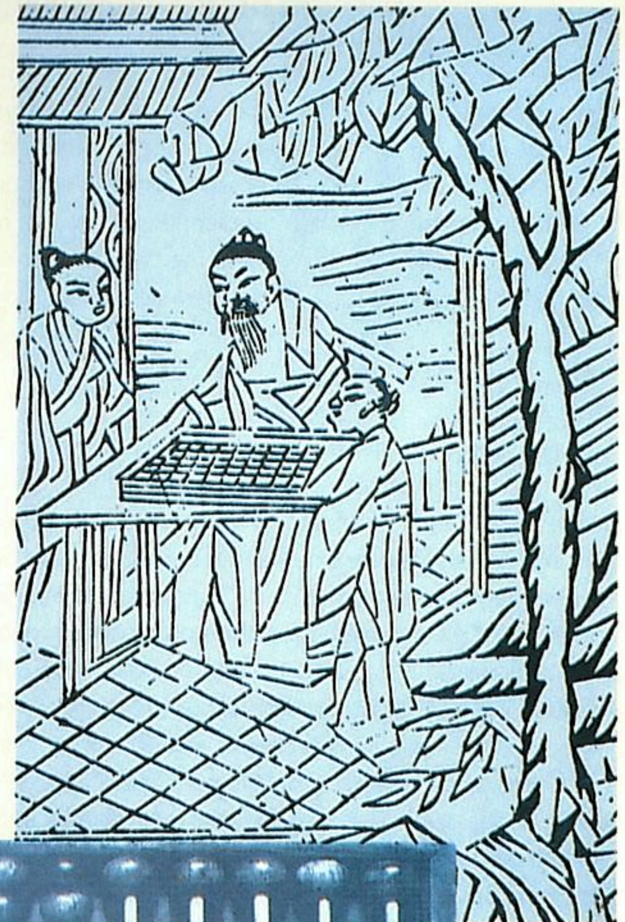
Sistemas lineares e determinantes desenvolvimento histórico:

Até onde se sabe, os chineses foram o primeiro povo a usar um método sistemático para resolver sistemas de equações lineares, o qual, em essência, é idêntico ao moderno método de eliminação de Gauss ou de escalonamento. A importância que os chineses atribuem a esse tópico pode ser medida pelo fato de ele ser o objeto de um dos capítulos da importante obra *A arte da matemática em nove capítulos* (século III a.C.).

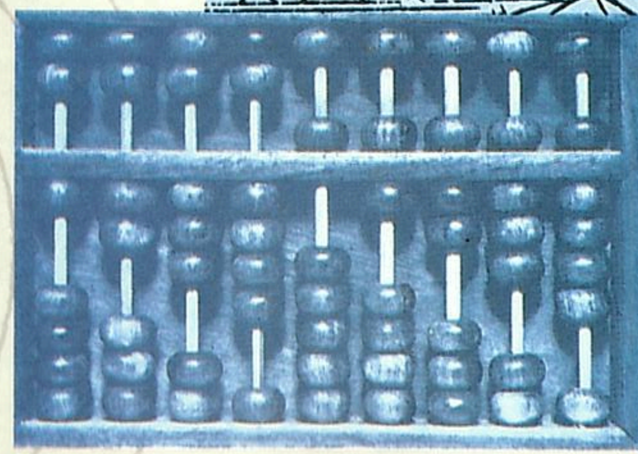
Curiosamente, é bem possível que os chineses tenham descoberto esse método porque sua "calculadora" consistia num tabuleiro quadriculado e num conjunto de barras de marfim ou bambu usados para representar os números. No caso da resolução de um sistema linear, os tabuleiros acabaram assumindo o papel hoje ocupado pelas matrizes; as barras, postas convenientemente nos quadradinhos, representavam os coeficientes ou termos independentes. A convenção adotada para "escrever" o sistema era colocar na primeira coluna os coeficientes e o termo independente da última equação, na segunda os coeficientes e o termo independente da penúltima equação, e assim por diante. No caso de um coeficiente nulo, o quadradinho correspondente ficava em branco. Isso feito, eles efetuavam uma série de operações elementares no tabuleiro até anularem todos os termos do canto superior esquerdo. A resolução do sistema tornava-se então imediata. Quando apareciam números negativos, cujas regras de adição e subtração eram conhecidas, as barras comuns (pretas) eram substituídas por barras vermelhas.

Somente no século XVII, mais de dois milênios depois, o conceito de determinante entraria na cena matemática. O primeiro a mostrar conhecê-lo foi o brilhante matemático japonês Seki Kowa (1642-1708), que, num manuscrito de 1683, discutiu até mesmo a questão do sinal de cada termo. É importante destacar, porém, que Kowa não usou esse conceito para a resolução de um sistema de equações lineares. Dez anos depois, o alemão Gottfried W. Leibniz (1646-1716), um dos maiores matemáticos de todos os tempos, estabeleceu como condição necessária para a compatibilidade de um sistema de três equações em duas incógnitas que o polinômio hoje chamado de determinante completo do sistema seja igual a zero. Para isso, Leibniz criou a notação i_k para o coeficiente modernamente indicado por a_{ij}; contudo, não se alongou nessa matéria.

A conhecida Regra de Cramer para a resolução de sistemas de n equações em n incógnitas por meio de determinantes é, na verdade, uma descoberta do escocês Colin Maclaurin (1698-1746) e data provavelmente de 1729, embora só tenha sido publicada



Mestre ensina o uso do ábaco a dois alunos.



Ábaco chinês de varetas e conchas.

em 1750. Essa inversão de paternidade em matemática ocorre com alguma freqüência, e o próprio Maclaurin se beneficiou dela noutro teorema. Mas o nome do suíço Gabriel Cramer (1704-1752) não aparece nesse episódio sem motivos. Trabalhando independentemente, ele também chegou à regra, mas só em 1750.

O francês Etienne Bezout (1730-1783), autor de textos matemáticos de sucesso em seu tempo, sistematizou em 1764 o processo de determinação dos sinais dos termos de um determinante. E provou também que, se o determinante dos coeficientes de um sistema linear homogêneo $n \times n$ é nulo, então o sistema tem solução. Mas o primeiro estudo sistemático dos determinantes, independentemente da resolução de sistemas lineares, só seria feito em 1772, pelo também francês Alexandre Vandermonde (1735-1796). O importante *teorema de Laplace,* que permite a expansão de um determinante por meio dos complementos algébricos dos termos de uma fila, realmente é do grande matemático e astrônomo francês Pierre Simon de Laplace (1749-1827), que o demonstrou no ano seguinte.

Mas as bases de uma autêntica teoria dos determinantes só começariam a se estabelecer graças a outro francês, Augustin Louis Cauchy (1789-1857), numa confirmação da superioridade matemática francesa na época. Com a Queda da Bastilha (1789), o pai de Augustin, um jurista culto e extremamente religioso, teve de procurar refúgio em Arcueil, aldeia em que nascera, no interior da França, para escapar à morte. Mesmo assim, a família sobreviveu a duras penas, em virtude da desordem que se instaurou no país com a Revolução Francesa. Foi nesse clima de dificuldade que Augustin, o primogênito da família, passou seus primeiros anos de vida. Sua saúde era extremamente frágil, talvez devido a essas dificuldades, e seus primeiros estudos foram feitos com o pai, pois as escolas estavam fechadas. Mas perto de Arcueil ficava a casa de campo do já referido Laplace, que iria estabelecer relações sociais com o pai de Augustin e que logo descobriria que aquele menino fisicamente fraco era dotado de grande talento matemático. Anos depois, alguns critérios de rigor estabelecidos por Cauchy para a matemática iriam levar Laplace a uma preocupada releitura de parte de sua obra.

Augustin Louis Cauchy.

Em produção matemática, Cauchy talvez seja insuperável, com seus vários livros e 789 artigos publicados, alguns bastante longos. Em parte por isso sua obra é irregular. Mas são tantas suas contribuições inovadoras à matemática que merecidamente ele ocupa um lugar muito especial entre os grandes matemáticos de todos os tempos. Quanto à teoria dos determinantes, não seria exagero dizer que sua história moderna começa com uma comunicação de Cauchy à Academia de Ciências, em 1812. Nesse trabalho, ele usou pela primeira vez na história o termo *determinante* com o sentido matemático atual, sumariou e simplificou o que existia sobre o assunto até então e deu a primeira demonstração satisfatória do teorema do produto. Esse teorema garante que, se A e B são matrizes quadradas, então

$$det(AB) = det(A)\, det(B).$$

Cauchy também inovou em relação à notação, ao indicar genericamente por (a_{1n}) o quadro dos termos de um determinante $n \times n$. Mas a notação moderna, com esse quadro entre duas barras verticais, só seria introduzida em 1841 pelo matemático inglês Arthur Cayley.

Algumas atitudes de Cauchy, determinadas pela sobreposição de seus ideais políticos e religiosos aos valores científicos, causaram justificado desgosto a muitos de seus pares. Mas sua coragem e coerência, em outras oportunidades, suscitaram admiração. De todo modo, como ele próprio declarou pouco tempo antes de morrer: "Os homens passam, mas suas obras ficam".