Módulo ou valor absoluto de um número real

Definimos o **módulo** ou **valor absoluto** de um número real x como sendo:

$$|x| = \begin{cases} x, \text{se } x \geq 0 \\ -x, \text{se } x < 0 \end{cases}.$$

Exemplo:

- $|5| = 5$
- $|-7| = -(-7) = 7$
- $|0| = 0$
- $|\sqrt{3}| = \sqrt{3}$
- $|\sqrt{3} - 2| = -(\sqrt{3} - 2) = 2 - \sqrt{3}$

Geometricamente, na reta real, $|x|$ representa a distância entre x e 0.

Observação (Distância entre dois números reais)

A **distância entre os números reais x e y**, denotada por $d(x,y)$ é o valor absoluto da diferença entre eles, isto é,

$$d(x,y) = |x - y|.$$

Exemplo:

- $d(5,3) = |5 - 3| = |2| = 2$
- $d(-4,2) = |-4 - 2| = |-6| = 6$
- $d(x,0) = |x - 0| = |x|$

Propriedades do Módulo

Sejam $a, b \in \mathbb{R}$ e $k > 0$. Temos:

(1) $|a| \geq 0$ e $|a| = |-a|$

(2) $a \leq |a|$

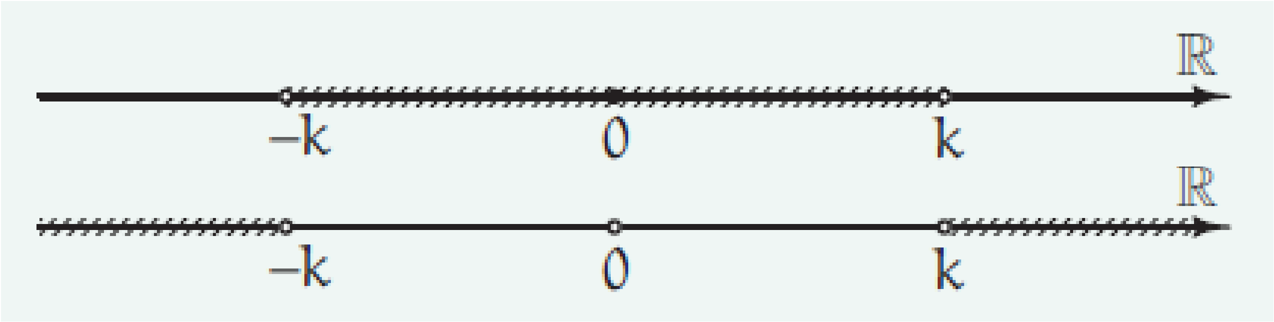
(3) $|a|^2 = a^2$

(4) $\sqrt{a^2} = |a|$

(5) $|a| = k \Leftrightarrow a = k$ ou $a = -k$

(6) $|a| < k \Leftrightarrow -k < a < k$

(7) $|a| > k \Leftrightarrow a > k$ ou $a < -k$



(8) $|ab| = |a|\,.\,|b|$ e $\left|\frac{a}{b}\right| = \frac{|a|}{|b|}$

(9) $|a+b| \leq |a| + |b|$ (Desigualdade Triangular)

(10) $\big||a| - |b|\big| \leq |a - b|$

Exercícios

(1) Obtenha o conjunto solução das equações modulares:

(a) $|5x - 3| = 7$ (b) $|-2x - 4| = 4$ (c) $\left|\frac{3x+8}{2x-3}\right| = 4$

(2) Resolva as inequações modulares em $\mathbb{R}$.

(a) $|x + 12| < 7$ (b) $|3x - 4| \leq 2$ (c) $|5 - 6x| \geq 9$

(d) $|3 - 2x| + 2 > 5$ (e) $|x + 4| \geq |x - 6|$

(3) Elimine o módulo das expressões:

(a) $|x - 2| - |x + 1|$ (b) $|x| + |x - 1| + |2x - 4|$

(4) Dado a um número real fixo, represente geometricamente o conjunto formado pelos números reais x tais que $|x - a| < 3$.

Produtos Notáveis

Os produtos notáveis são identidades que podem ser obtidas de maneira prática e que são muito úteis no cálculo algébrico e simplificação de expressões.

i) Quadrado da soma de dois termos

$$(a+b)^2 = a^2 + 2.a.b + b^2$$

ii) Quadrado da diferença de dois termos

$$(a-b)^2 = a^2 - 2.a.b + b^2$$

iii) Produto da soma pela diferença de dois termos

$$(a+b)(a-b) = a^2 - b^2$$

iv) Cubo da soma de dois termos

$$(a+b)^3 = a^3 + 3.a^2.b + 3.a.b^2 + b^3$$

v) Cubo da diferença de dois termos

$$(a-b)^3 = a^3 - 3.a^2.b + 3.a.b^2 - b^3$$

vi) Soma de dois cubos

$$a^3 + b^3 = (a+b)(a^2 - a.b + b^2)$$

vii) Diferença de dois cubos

$$a^3 - b^3 = (a-b)(a^2 + a.b + b^2)$$

Exemplo: Desenvolva as expressões a seguir.

a) $(3x+8)(3x-8)$

b) $(x+3)^2$

c) $(5y-4)^2$

d) $(2x-3y)^3$

e) x^3-1

Fatoração

Considere uma expressão algébrica escrita como uma soma de termos.
Fatorar essa expressão significa escrevê-la na forma de um produto.

Fator comum

Inicialmente, identificamos um termo comum a todas as parcelas da expressão. Em seguida, colocamos esse termo em evidência.

Exemplos

1º) $ab + ac = a(b + c)$

2º) $24x^3y^2 - 6x^4y + 12x^2y^5 = 6x^2y(4xy - x^2 + 2y^4)$

Agrupamento

Às vezes, não é possível identificar, de início, um fator comum a todas as parcelas da expressão. Nesse caso, formamos dois ou mais grupos com um termo comum. Em seguida, colocamos em evidência um fator comum a todos os grupos.

Exemplos

1º) $ax + ay + bx + by = a(x + y) + b(x + y) = (x + y)(a + b)$

2º) $8x^2 - 4xz - 6xy + 3yz = 4x(2x - z) - 3y(2x - z) = (2x - z)(4x - 3y)$

Soma e diferença de cubos

Trata-se de identidades muito úteis em cálculo algébrico.

São elas:

i) Soma de cubos

$a^3 + b^3 = (a + b)(a^2 - ab + b^2)$

ii) Diferença de cubos

$a^3 - b^3 = (a - b)(a^2 + ab + b^2)$

Exemplo

Fatorar a expressão $x^3 - 27$.

Resolução:

$x^3 - 27 = x^3 - 3^3 = (x - 3)(x^2 + 3x + 9)$

Fatoração do trinômio da forma $ax^2 + bx + c$

Sejam x_1 e x_2 as raízes reais do trinômio $ax^2 + bx + c$, com $a \neq 0$. Esse trinômio pode ser escrito na forma:

$$\boxed{a(x - x_1)(x - x_2)}$$

OBSERVAÇÃO

As raízes podem ser obtidas pela Fórmula de Bháskara:

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a}, \text{ sendo } \Delta = b^2 - 4ac.$$

Exemplo

Fatorar a expressão $x^2 - 5x + 6$.

Cálculo das raízes:

$\Delta = (-5)^2 - 4.1.6 = 25 - 24 = 1$

$x = \frac{5 \pm \sqrt{1}}{2} \Rightarrow x_1 = 2 \text{ e } x_2 = 3$

Substituindo na forma fatorada, temos $1(x - 2)(x - 3)$.

Observação:

Fatorar o trinômio $ax^2 + bx + c$ como um produto de binômios com coeficientes inteiros requer fatorar os inteiros a e c, isto é, transformá-los em produtos de 2 números. Vejamos:

Fatores de a

$$ax^2 + bx + c = (\square x + \square)(\square x + \square)$$

Fatores de c

A quantidade de pares formados fatorando-se a e c é finito. Então, podemos listar todos os possíveis fatores binomiais, isto é, os possíveis fatores formados pela soma de dois monômios. Para isso, iniciamos checando cada par encontrado até descobrir um que funcione (se nenhum par funcionar, então o trinômio é irredutível).

Exemplo 1:

Fatore $x^2 + 5x - 14$.

SOLUÇÃO

O inteiro que representa a nesse trinômio é o 1. Fatorando o 1, o único par de fatores que pode existir é 1 e 1, pois não existe nenhum outro par de números cujo produto resulte em 1.
O inteiro que representa c nesse trinômio é o 14. Os únicos pares de fatores são 1 e 14, e também 2 e 7. Então, substituindo os números encontrados, as quatro possíveis fatorações do trinômio são:

$$(x + 1)(x - 14) \qquad (x - 1)(x + 14)$$
$$(x + 2)(x - 7) \qquad (x - 2)(x + 7)$$

Ao comparar a soma dos produtos dos termos externos e internos da forma fatorada com o termo central do trinômio, vemos que o correto é:

$$x^2 + 5x - 14 = (x - 2)(x + 7)$$

Exemplo 2 (Fatoração de trinômios em x e y):

Fatore $3x^2 - 7xy + 2y^2$.

SOLUÇÃO

A única maneira de obter $-7xy$ como termo central é com $3x^2 - 7xy + 2y^2 = (3x - ?y)(x - ?y)$. Os sinais nos binômios precisam ser negativos, porque o coeficiente de y^2 é positivo e o coeficiente do termo central é negativo. Conferindo as duas possibilidades, $(3x - y)(x - 2y)$ e $(3x - 2y)(x - y)$, temos que:

$$3x^2 - 7xy + 2y^2 = (3x - y)(x - 2y).$$

Exercícios

Nos exercícios de 41 a 44, fatore colocando o fator comum em evidência.

41. $5x - 15$

42. $5x^3 - 20x$

43. $yz^3 - 3yz^2 + 2yz$

44. $2x(x + 3) - 5(x + 3)$

Nos exercícios de 45 a 48, fatore as diferenças de dois quadrados.

45. $z^2 - 49$

46. $9y^2 - 16$

47. $64 - 25y^2$

48. $16 - (x + 2)^2$

Nos exercícios de 49 a 52, fatore o trinômio quadrado perfeito.

49. $y^2 + 8y + 16$

50. $36y^2 + 12y + 1$

51. $4z^2 - 4z + 1$

52. $9z^2 - 24z + 16$

Nos exercícios de 53 a 58, fatore a soma ou a diferença de dois cubos.

53. $y^3 - 8$

54. $z^3 + 64$

55. $27y^3 - 8$

56. $64z^3 + 27$

57. $1 - x^3$

58. $27 - y^3$

Nos exercícios de 59 a 68, fatore o trinômio.

59. $x^2 + 9x + 14$

60. $y^2 - 11y + 30$

61. $z^2 - 5z - 24$

62. $6t^2 + 5t + 1$

63. $14u^2 - 33u - 5$

64. $10v^2 + 23v + 12$

65. $12x^2 + 11x - 15$

66. $2x^2 - 3xy + y^2$

67. $6x^2 + 11xy - 10y^2$

68. $15x^2 + 29xy - 14y^2$

Nos exercícios de 69 a 74, fatore por agrupamento.

69. $x^3 - 4x^2 + 5x - 20$

70. $2x^3 - 3x^2 + 2x - 3$

71. $x^6 - 3x^4 + x^2 - 3$

72. $x^6 + 2x^4 + x^2 + 2$

73. $2ac + 6ad - bc - 3bd$

74. $3uw + 12uz - 2vw - 8vz$

Nos exercícios de 75 a 90, fatore completamente.

75. $x^3 + x$

76. $4y^3 - 20y^2 + 25y$

77. $18y^3 + 48y^2 + 32y$

78. $2x^3 - 16x^2 + 14x$

79. $16y - y^3$

80. $3x^4 + 24x$

81. $5y + 3y^2 - 2y^3$

82. $z - 8z^4$

Respostas dos exercícios

41. $5(x-3)$

42. $5x(x^2-4)$

43. $yz(z^2-3z+2)$

44. $(x+3)(2x-5)$

45. $z^2-7^2=(z+7)(z-7)$

46. $(3y)^2-4^2=(3y+4)(3y-4)$

47. $8^2-(5y)^2=(8+5y)(8-5y)$

48. $4^2-(x+2)^2=[4+(x+2)][(4-(x+2)]=(6+x)(2-x)$

49. $y^2+2(y)(4)+4^2=(y+4)^2$

50. $(6y)^2+2(6y)(1)+1^2=(6y+1)^2$

51. $(2z)^2-2(2z)(1)+1^2=(2z-1)^2$

52. $(3z)^2-2(3z)(4)+4^2=(3z-4)^2$

53. $y^3-2^3=(y-2)[y^2+(y)(2)+2^2]=(y-2)(y^2+2y+4)$

54. $z^3+4^3=(z+4)[z^2-(z)(4)+4^2]=(z+4)(z^2-4z+16)$

55. $(3y)^3-2^3=(3y-2)[(3y)^2+(3y)(2)+2^2]=(3y-2)(9y^2+6y+4)$

56. $(4z)^3+3^3=(4z+3)[(4z)^2-(4z)(3)+3^2]=(4z+3)(16z^2-12z+9)$

57. $1^3-x^3=(1-x)[1^2+(1)(x)+x^2]=(1-x)(1+x+x^2)=(1-x)(1+x+x^2)$

58. $3^3-y^3=(3-y)[3^2+(3)(y)+y^2]=(3-y)(9+3y+y^2)=(3-y)(9+3y+y^2)$

59. $(x+2)(x+7)$

60. $(y-5)(y-6)$

61. $(z-8)(z+3)$

62. $(2t+1)(3t+1)$

63. $(2u-5)(7u+1)$

64. $(2v+3)(5v+4)$

65. $(3x+5)(4x-3)$

66. $(x-y)(2x-y)$

67. $(2x+5y)(3x-2y)$

68. $(3x+7y)(5x-2y)$

69. $(x^3-4x^2)+(5x-20)=x^2(x-4)+5(x-4)=(x-4)(x^2+5)$

70. $(2x^3-3x^2)+(2x-3)=x^2(2x-3)+1(2x-3)=(2x-3)(x^2+1)$

71. $(x^6-3x^4)+(x^2-3)=x^4(x^2-3)+1(x^2-3)=(x^2-3)(x^4+1)$

72. $(x^6+2x^4)+(x^2+2)=x^4(x^2+2)+1(x^2+2)=(x^2+2)(x^4+1)$

73. $(2ac+6ad)-(bc+3bd)=2a(c+3d)-b(c+3d)=(c+3d)(2a-b)$

74. $(3uw+12uz)-(2vw+8vz)=3u(w+12z)-2v(w+4z)=(w+4z)(3u-2v)$

75. $x(x^2+1)$

76. $y(4y^2-20y+25)=y[(2y)^2-2(2y)(5)+5^2]=y(2y-5)^2$

77. $2y(9y^2+24y+16)=2y[(3y)^2+2(3y)(4)+4^2]=2y(3y+4)^2$

78. $2x(x^2-8x+7)=2x(x-1)(x-7)$

79. $y(16-y^2)=y(4^2-y^2)=y(4+y)(4-y)$

80. $3x(x^3+8)=3x(x^3+2^3)=3x(x+2)[x^2-(x)(2)+22]=3x(x+2)(x^2-2x+4)$

81. $y(5+3y-2y^2)=y(1+y)(5-2y)$

82. $z(1-8z^3)=z[1^3-(2z)^3]=z(1-2z)[1^2+(1)(2z)+(2z)^2]=z(1-2z)(1+2z+4z^2)$

Método de Completar Quadrados

Um método muito útil em muitos cálculos algébricos é o **método de completar quadrados.**

Considere a expressão

$$x^2 + 2kx + r\,.$$

Essa expressão só é trinômio quadrado perfeito se $r = k^2$.

Uma vez que falta apenas o termo k^2 no primeiro membro da equação para que exista a possibilidade de escrevê-la como produto notável, vamos somá-lo nos dois membros dessa equação e "passar" o termo "r" para o segundo membro. Como estamos somando um número elevado ao quadrado que falta na equação original, esse procedimento recebe o nome de *completar quadrados*. Observe:

$$x^2 + 2k \cdot x + r + k^2 = 0 + k^2$$

$$x^2 + 2k \cdot x + k^2 = 0 + k^2 - r$$

$$x^2 + 2k \cdot x + k^2 = k^2 - r$$

Logo,

$$(x + k)^2 = k^2 - r.$$

Exemplos:

a) $x^2 + 18x - 19 = 0$

b) $2x^2 + 16x - 18 = 0$

c) $x^2 + y^2 - 6x - 4y - 23 = 0$

Simplificação de expressões fracionárias

Para simplificar uma expressão fracionária, eliminamos todos os fatores comuns do numerador e denominador até que a expressão fique em uma forma mais simples, isto é, em sua forma reduzida.

Exemplos:

1) Considere a seguinte expressão fracionária $\dfrac{x^2-3x}{x^2-9}$.

a) Determine o domínio dessa expressão.
b) Escreva a expressão na forma reduzida.

2) Simplifique as seguintes expressões:

a) $\dfrac{2x^2+11x-21}{x^3+2x^2+4x} \cdot \dfrac{x^3-8}{x^2+5x-14}$

b) $\dfrac{x^3+1}{x^2-x-2} \div \dfrac{x^2-x+1}{x^2-4x+4}$

Observação (mmc de expressões algébricas)

O mínimo múltiplo comum (mmc) de expressões algébricas é dado pela multiplicação dos fatores **sem repetir os comuns**, levando em consideração os de **maior expoente.**

Exemplos:

(i) mmc entre $x^2 + 1$ e $x^2 - 2x + 1$

Fatoramos separadamente cada expressão:

$$x^2 - 1 = (x + 1)(x - 1)$$

$$x^2 - 2x + 1 = (x - 1)^2$$

Os fatores comum são $(x - 1)^2$ e $(x - 1)$, seguindo a regra iremos considerar o de maior expoente $(x - 1)^2$. Dessa forma, temos que o mmc entre $x^2 + 1$ e $x^2 - 2x + 1$ é igual a $(x + 1)(x - 1)^2$.

(ii) mmc entre $10x$ e $5x^2 - 15x$

$10x = 2 \cdot 5 \cdot x$

$5x^2 - 15x = 5x \cdot (x - 3)$

$\text{mmc} = 2 \cdot 5 \cdot x \cdot (x - 3) = 10x \cdot (x - 3) = 10x^2 - 30x$

(iii) mmc entre $x^3 + 8$ e $x^2 + 4x + 4$

$x^3 + 8 = (x + 2) \cdot (x^2 - 2x + 4)$

$x^2 + 4x + 4 = (x + 2)^2$

$\text{mmc} = (x + 2)^2 \cdot (x^2 - 2x + 4)$

(iv) mmc entre $x^2 - 3x + xy - 3y$ e $x^2 - y^2$

$x^2 - 3x + xy - 3y = x(x - 3) + y(x - 3) = (x + y) \cdot (x - 3)$

$x^2 - y^2 = (x + y) \cdot (x - y)$

$\text{mmc} = (x - 3) \cdot (x + y) \cdot (x - y)$

Exercício: Simplifique as seguintes expressões:

a) $\dfrac{2}{x^2-2x}+\dfrac{1}{x}-\dfrac{3}{x^2-4}$

b) $\dfrac{3-\dfrac{7}{x+2}}{1-\dfrac{1}{x-3}}$

c) $\dfrac{\dfrac{1}{a^2}-\dfrac{1}{b^2}}{\dfrac{1}{a}-\dfrac{1}{b}}$