IFC Blumenau - álgebra linear - 2024.1 - PROVA 2
Bacharelado em Engenharia Elétrica - 09/05/2024 - Prof. Cechetto Jr.

NOME: Estevão Goerll Nascimento **Nº** 4

As questões devem ser feitas da forma completa, com seus raciocínios, não colocar somente resposta final.
Simplificar frações e racionalizar raízes, evitar ao máximo o uso de aproximações.
Pode ser usada calculadora científica que não são calculadoras gráficas e/ou programáveis.

Entregar as questões em ordem numérica nas folhas brancas que você recebeu.
Incluir a folha de anotações no final.

---

1. Resolva o sistema linear possível e determinado usando a forma que julgar mais conveniente. Escreva a solução no final.

$$\begin{cases} -3c = -12 \\ e - 5d - a = -7 \\ 7c = 16 + 2d \rightarrow 7c - 2d = 16 \\ a + 5c - b - 7d - e = -31 \\ 2 + 4e = 5c + d \rightarrow 4e - 5c - d = -2 \end{cases}$$

$$\begin{array}{ccccc|c} a & b & c & d & e & \\ 0 & 0 & -3 & 0 & 0 & -12 \\ -1 & 0 & 0 & -5 & 1 & -7 \\ 0 & 0 & 7 & -2 & 0 & 16 \\ 1 & -1 & 5 & -7 & -1 & -31 \\ 0 & 0 & -5 & -1 & 4 & -2 \end{array}
\xrightarrow[L1 = L1 \cdot -1]{L1 \leftrightarrow L2,\ L2 \leftrightarrow L4}
\begin{array}{ccccc|c} 1 & 0 & 0 & 5 & -1 & 7 \\ 1 & -1 & 5 & -7 & -1 & -31 \\ 0 & 0 & 7 & -2 & 0 & 16 \\ 0 & 0 & -3 & 0 & 0 & -12 \\ 0 & 0 & -5 & -1 & 4 & -2 \end{array}$$

L2 = L2 − L1
L4 = L4 ÷ −3
L5 = L5 + 5L4
L3 = L3 − 7L4

$$\begin{array}{ccccc|c} 1 & 0 & 0 & 5 & -1 & 7 \\ 0 & -1 & 5 & -12 & 0 & -38 \\ 0 & 0 & 0 & -2 & 0 & -12 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 4 & 18 \end{array}$$

L3 = L3 ÷ −2
L2 = L2 − 5L4
L2 = L2 + 12L3
L1 = L1 − 5L3
L5 = L5 + L3

$$\begin{array}{ccccc|c} 1 & 0 & 0 & 0 & -1 & -23 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 14 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 6 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 4 & 24 \end{array}$$

L5 = L5 ÷ 4
L1 = L1 − L5
L2 = L2 · −1

$$\begin{array}{ccccc|c} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & -17 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & -14 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 6 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 6 \end{array}$$

a = −17
b = −14
c = 4
d = 6
e = 6

10

a = −17 b = −14 c = 4 d = 6 e = 6

95

2. Use o método de Gauss-Jordan (escalonamento completo) ou o método de Gauss (escalonamento parcial) para mostrar que o sistema linear abaixo é um sistema Impossível. Justifique porque a solução é um conjunto vazio.

$$\begin{cases} 10x - 4y + 3z = 7 \\ -4x + 25y - 2z = 27 \\ -\dfrac{94}{3}x + \dfrac{61}{3}y - \dfrac{29}{3}z = 12 \\ 94x - 61y + 29z = -36 \end{cases}$$

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 10 & -4 & 3 & 7 \\ -4 & 25 & -2 & 27 \\ -\frac{94}{3} & \frac{61}{3} & -\frac{29}{3} & 12 \\ 94 & -61 & 29 & -36 \end{array}\right] \xrightarrow[L1 = L1 \div 10]{L3 = L3 + \frac{1}{3} \cdot L4} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -\frac{4}{10} & \frac{3}{10} & \frac{7}{10} \\ -4 & 25 & -2 & 27 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 94 & -61 & 29 & -36 \end{array}\right]$$

$L3 \leftrightarrow L4$
$L2 = L2 + 4L1$
$L3 = L3 - 94L1$

$$\xrightarrow{} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -\frac{4}{10} & \frac{3}{10} & \frac{7}{10} \\ 0 & \frac{117}{5} & -\frac{4}{5} & \frac{119}{5} \\ 0 & -\frac{117}{5} & \frac{4}{5} & -\frac{509}{5} \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right] \xrightarrow{L3 = L3 + L2} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -\frac{4}{10} & \frac{3}{10} & \frac{7}{10} \\ 0 & \frac{117}{5} & -\frac{4}{5} & \frac{119}{5} \\ 0 & 0 & 0 & -48 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right]$$

100

escalonando o sistema chegamos em $0 \cdot x + 0 \cdot y + 0 \cdot z = -48$, uma equação degenerada. Portanto o sistema é impossível.

3. Use o método de Gauss-Jordan (escalonamento completo com a identidade ao lado) para calcular a matriz inversa da matriz abaixo.
Dica: Os resultados na inversa são todos inteiros.

$$\begin{pmatrix} \frac{1}{4} & \frac{1}{4} & \frac{-1}{2} \\ \frac{-1}{2} & \frac{1}{2} & 0 \\ \frac{1}{4} & \frac{1}{4} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} \frac{1}{4} & \frac{1}{4} & -\frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 \\ \frac{1}{4} & \frac{1}{4} & \frac{1}{2} \end{pmatrix} \xrightarrow[L3 = L3 \cdot 4]{L1 = L1 \cdot 4,\ L2 = L2 \cdot 2} \begin{pmatrix} 1 & 1 & -2 \\ -1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & -2 & 4 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & 0 & 2 & 0 \\ 1 & 1 & 2 & 0 & 0 & 4 \end{array}\right) \xrightarrow[L3 = L3 - L1]{L2 = L2 + L1} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & -2 & 4 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & -2 & 4 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 4 & -4 & 0 & 4 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow[L1 = L1 + 2L3]{L3 = L3 \div 4,\ L2 = L2 + 2L3} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 0 & 2 & 0 & 2 \\ 0 & 2 & 0 & 2 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow[L1 = L1 - L2]{L2 = L2 \div 2} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

10

4. Foi visto em aulas que:
Um sistema linear pode ser escrito através de usas matrizes associadas: $AX = B$
Foi visto também que:

$$AX = B$$
$$A^{-1}AX = A^{-1}B$$
$$IX = A^{-1}B$$
$$X = A^{-1}B$$

Portando, use o resultado da questão anterior e o método da matriz inversa $X = A^{-1}B$ para resolver o sistema linear possível e determinado abaixo:

$$\begin{cases} \frac{1}{4}x + \frac{1}{4}y - \frac{1}{2}z = \frac{1}{9} \\ -\frac{1}{2}x + \frac{1}{2}y = -\sqrt{2} \\ \frac{1}{4}x + \frac{1}{4}y + \frac{1}{2}z = \frac{e}{7} \end{cases}$$

$$X = A^{-1} \cdot B$$

$$\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \frac{1}{9} \\ -\sqrt{2} \\ \frac{e}{7} \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} X \\ Y \\ Z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{9} + \sqrt{2} + \frac{e}{7} \\ \frac{1}{9} - \sqrt{2} + \frac{e}{7} \\ -\frac{1}{9} + \frac{e}{7} \end{bmatrix}$$

$$X = \frac{1}{9} + \sqrt{2} + \frac{e}{7} = \frac{7 + 63\sqrt{2} + 9e}{63}$$

$$y = \frac{1}{9} - \sqrt{2} + \frac{e}{7} = \frac{7 - 63\sqrt{2} + 9e}{63}$$

$$z = -\frac{1}{9} + \frac{e}{7} = \frac{-7 + 9e}{63}$$

1,0

5. Mostre que o conjunto V abaixo não é um espaço vetorial:
Dê um contra-exemplo.
$V = \mathbb{R}^3$
$+: (a, b, c) + (d, e, f) = (a + d, b + e, c + f)$
$\otimes : k(a, b, c) = (ka, kb, (kc)^2)$

obs: a e b constantes,
v = vetor

M2 $(v \cdot (a+b) = v \cdot a + v \cdot b)$

$(x, y, z) \cdot (a+b) = (x, y, z) \cdot a + (x, y, z) \cdot b$

$((a+b) \cdot x, (a+b) \cdot y, ((a+b) \cdot z)^2) = (ax, ay, (az)^2) + (bx, by, (bz)^2)$

$(ax + bx, ay + by, \underbrace{(az + bz)^2}) = (ax + bx, ay + by, \underbrace{(az)^2 + (bz)^2})$

$(az + bz)^2 = (az)^2 + (bz)^2$

essa igualdade claramente não é verdadeira

exemplo:

$(1, 2, 3) \cdot (3+2) = (1, 2, 3) \cdot 3 + (1, 2, 3) \cdot 2$

$(5, 10, 225) = (3, 6, 81) + (2, 4, 36)$

$(5, 10, 225) = (5, 10, 117)$

portanto não é espaço vetorial pois falha na propriedade M2 (distributiva da multiplicação de um vetor pela soma de constantes).

6. Justifique porque o conjunto W abaixo não é um subespaço vetorial em relação a soma e multiplicação por escalar usuais.

$$W = \left\{ \begin{bmatrix} a & b & c \\ d & e & d \\ g & h & i \end{bmatrix} \in M_3 \ ; a = 0 \ , \quad b = -15c + 4d - 7i \ , e = 2f \ , \quad g + h = 3 \ , \quad g - h = -1 \right\}$$

$g + h = 3$

$g = 3 - h$

$g - h = -1$

$3 - h - h = -1$

$h = 2$

$g = 1$

$$\begin{bmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ 1 & 2 & i \end{bmatrix} \cdot k = \begin{bmatrix} ak & bk & ck \\ dk & ek & fk \\ k & 2k & i \end{bmatrix}$$

a multiplicação por qualquer escalar que não seja 1 fará o vetor resultante não atender $g + h = 3$ e $g - h = -1$, portanto tendo $V \in W$ e $\{k \in \mathbb{R} \mid k \neq 1\}$, $V \cdot k$ resulta em um vetor fora do subespaço.

$$\begin{bmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ 1 & 2 & i \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ 1 & 2 & i \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2a & 2b & 2c \\ 2d & 2e & 2f \\ 2 & 4 & i \end{bmatrix}$$

$g + h = 3$

$2 + 4 = 3$

$6 = 3$

$g - h = 1$

$2 - 4 = 1$

$-2 = 1$

a soma entre dois vetores deste candidato a subespaço também resulta em um vetor fora do subespaço. Como ele não atende estas duas propriedades, não é subespaço.

7. Escreva o vetor $(17, 23, 10, 43) \in \mathbb{R}^4$ como combinação dos vetores $u = (6, 4, 0, 60)$, $v = (-2, -3, 0, 1)$ e $w = (0, 0, 1, 2)$

$a \cdot (6, 4, 0, 60) + b \cdot (-2, -3, 0, 1) + c \cdot (0, 0, 1, 2) = (17, 23, 10, 43)$

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 6 & -2 & 0 & 17 \\ 4 & -3 & 0 & 23 \\ 0 & 0 & 1 & 10 \\ 60 & 1 & 2 & 43 \end{array}\right] \xrightarrow{L4 = L4 - 10L1} \left[\begin{array}{ccc|c} 6 & -2 & 0 & 17 \\ 4 & -3 & 0 & 23 \\ 0 & 0 & 1 & 10 \\ 0 & 21 & 2 & -127 \end{array}\right]$$

$L4 = L4 - 2L3$

$$\longrightarrow \left[\begin{array}{ccc|c} 6 & -2 & 0 & 17 \\ 4 & -3 & 0 & 23 \\ 0 & 0 & 1 & 10 \\ 0 & 21 & 0 & -147 \end{array}\right] \xrightarrow{\substack{L4 = L4 \div 21 \\ L1 = L1 + 2L4 \\ L1 = L1 \div 6}} \begin{array}{cccc} 1 & 0 & 0 & \frac{1}{2} \\ 4 & -3 & 0 & 23 \\ 0 & 0 & 1 & 10 \\ 0 & 1 & 0 & -7 \end{array}$$

$a = \frac{1}{2} \quad b = -7 \quad c = 10$

$\frac{1}{2} \cdot (6, 4, 0, 60) + (-7) \cdot (-2, -3, 0, 1) + 10 \cdot (0, 0, 1, 2)$

$=$

$(17, 23, 10, 43)$

8. Encontre o subespaço gerado pelo conjunto $A = \{(1,2,4),(0,1,2)\}$

$$a.(1,2,4) + b.(0,1,2) = (x,y,z)$$

$$\begin{cases} a = x \\ 2a + b = y \\ 4a + 2b = z \end{cases}$$

$$\left[\begin{array}{cc|c} 1 & 0 & x \\ 2 & 1 & y \\ 4 & 2 & z \end{array}\right] \xrightarrow[L_3 = L_3 - 4L_1]{L_2 = L_2 - 2L_1} \left[\begin{array}{cc|c} 1 & 0 & x \\ 0 & 1 & y-2x \\ 0 & 2 & z-4x \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow{L_3 = L_3 - 2L_2} \left[\begin{array}{ccc} 1 & 0 & x \\ 0 & 1 & y-2x \\ 0 & 0 & z-4x-2y+4x \end{array}\right]$$

$$z - 4x - 2y + 4x = z - 2y = 0$$

$a = x \quad b = y - 2x$

10

O subespaço gerado é o plano $z - 2y = 0$

9. Verifique se o conjunto D é LD ou LI

$$D = \left\{ \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 5 & 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -1 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 20 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -2 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \right\}$$

$$a \cdot \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 5 & 1 \end{pmatrix} + b \cdot \begin{pmatrix} -1 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} + c \cdot \begin{pmatrix} 20 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} + d \cdot \begin{pmatrix} -2 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\left[\begin{array}{cccc|c} 3 & -1 & 20 & -2 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 5 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 0 \end{array}\right] \xrightarrow[\substack{L2 = L2 - L4 \\ L1 = L1 - 3L4}]{L3 = L3 - 5L4} \left[\begin{array}{cccc|c} 0 & -1 & 17 & -5 & 0 \\ 0 & -1 & -1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 0 \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow[L2 = L2 + L3]{L1 = L1 + L3} \left[\begin{array}{cccc|c} 0 & 0 & 17 & -5 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 0 \end{array}\right] \xrightarrow[L1 = L1 - 5L2]{L4 = L4 + L2} \left[\begin{array}{cccc|c} 0 & 0 & 22 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow[\substack{L2 = L2 + L1 \\ L2 = L2 \cdot -1}]{L1 = L1 \div 22} \left[\begin{array}{cccc|c} 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right]$$

$a = 0 \quad b = 0 \quad c = 0 \quad d = 0$

10

L.I, pois a única forma de chegar no vetor nulo combinando linearmente os vetores do conjunto é com todos os coeficientes sendo nulos.

10. Determine uma base e a dimensão do subespaço vetorial W

$$W = \left\{(x\,,y\,,z\,,t) \in \mathbb{R}^3\;;2x = 3z\;\;e\;\;-7y = \frac{1}{2}t\right\}$$

Dimensão 2 pois possui duas variáveis livres, já que x depende de z e y depende de t.

SD