27. $\lim\limits_{x \to 1} \left[\dfrac{1}{2(1 - \sqrt{x})} - \dfrac{1}{3(1 - \sqrt[3]{x})} \right]$

28. $\lim\limits_{x \to 0^+} x^{\frac{3}{x^4 + \ln x}}$

29. $\lim\limits_{x \to 0^+} x^{\operatorname{sen} x}$

30. $\lim\limits_{x \to 1} x^{\frac{1}{1 - x}}$

31. $\lim\limits_{x \to 1^-} (1 - x)^{\cos \frac{\pi x}{2}}$

32. $\lim\limits_{x \to +\infty} x \operatorname{sen} \pi/x$

33. $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{x^{2/3}}{(x^2 + 2)^{1/3}}$

34. $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{\operatorname{senh} x}{x}$

35. $\lim\limits_{x \to +\infty} (2x - 1)^{2/x}$

36. $\lim\limits_{x \to 0} (\cos 2x)^{3/x^2}$

37. $\lim\limits_{x \to 0^+} \dfrac{\ln (\operatorname{sen} ax)}{\ln (\operatorname{sen} x)}$

38. $\lim\limits_{x \to 3} \left(\dfrac{1}{x - 3} - \dfrac{5}{x^2 - x - 6} \right)$

39. $\lim\limits_{x \to 0^+} x^{\frac{1}{\operatorname{tg} x}}$

40. $\lim\limits_{x \to 0^+} x^{\frac{2}{2 + \ln x}}$

41. $\lim\limits_{x \to \pi/4} (1 - \operatorname{tg} x) \sec 2x$

42. $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{x \ln x}{x + \ln x}$

43. $\lim\limits_{x \to 0} (e^x + x)^{1/x}$.

5.15 Fórmula de Taylor

A Fórmula de Taylor consiste num método de aproximação de uma função por um polinômio, com um erro possível de ser estimado.

5.15.1 Definição Seja $f: I \to \mathbb{R}$ uma função que admite derivadas até ordem n num ponto c do intervalo I. O *polinômio de Taylor* de ordem n de f no ponto c, que denotamos por $P_n(x)$, é dado por:

$$P_n(x) = f(c) + f'(c)(x - c) + \frac{f''(c)}{2!}(x - c)^2 + \ldots + \frac{f^{(n)}(c)}{n!}(x - c)^n.$$

Observamos que no ponto $x = c$, $P_n(c) = f(c)$.

5.15.2 Exemplo Determinar o polinômio de Taylor de ordem 4 da função $f(x) = e^x$ no ponto $c = 0$.

Temos, $f(x) = f'(x) = \ldots = f^{(iv)}(x) = e^x$ e assim

$f(0) = f'(0) = \ldots = f^{(iv)}(0) = e^0 = 1.$

Portanto,

$$\begin{aligned} P_4(x) &= 1 + 1(x - 0) + \frac{1}{2!}(x - 0)^2 + \frac{1}{3!}(x - 0)^3 + \frac{1}{4!}(x - 0)^4 \\ &= 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^4}{4!}, \end{aligned}$$

é o polinômio de Taylor de grau 4 da função $f(x) = e^x$ no ponto $c = 0$.

Dado o polinômio de Taylor de grau n de uma função $f(x)$, denotamos por $R_n(x)$ a diferença entre $f(x)$ e $P_n(x)$, isto é, $R_n(x) = f(x) - P_n(x)$ (ver Figura 5.40).

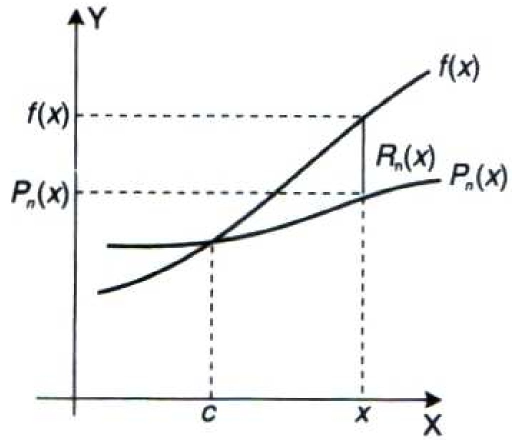

Figura 5.40

Temos, então, $f(x) = P_n(x) + R_n(x)$, ou mais explicitamente,

$$f(x) = f(c) + f'(c)(x - c) + \frac{f''(c)}{2!}(x - c)^2 + \dots + \frac{f^{(n)}(c)}{n!}(x - c)^n + R_n(x). \tag{1}$$

Para os valores de x nos quais $R_n(x)$ é "pequeno", o polinômio $P_n(x)$ dá uma boa aproximação de $f(x)$. Por isso, $R_n(x)$ chama-se *resto*. O problema, agora, consiste em determinar uma fórmula para $R_n(x)$ de tal modo que ele possa ser avaliado. Temos a seguinte proposição.

5.15.3 Proposição (Fórmula de Taylor) Seja $f:[a, b] \to \mathbb{R}$ uma função definida num intervalo $[a, b]$. Suponhamos que as derivadas $f', f'', \dots, f^{(n)}$ existam e sejam contínuas em $[a, b]$ e que $f^{(n+1)}$ exista em (a, b). Seja c um ponto qualquer fixado em $[a, b]$. Então, para cada $x \in [a, b]$, $x \neq c$, existe um ponto z entre c e x tal que:

$$f(x) = f(c) + f'(c)(x - c) + \dots + \frac{f^{(n)}(c)}{n!}(x - c)^n + \frac{f^{(n+1)}(z)}{(n+1)!}(x - c)^{n+1}. \tag{2}$$

Quando $c = 0$, a Fórmula de Taylor fica

$$f(x) = f(0) + f'(0)x + \dots + \frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n + \frac{f^{(n+1)}(z)}{(n+1)!}x^{n+1}$$

e recebe o nome de Fórmula de Mac-Laurin.

Prova: Faremos a demonstração supondo $x > c$. Para $x < c$, o procedimento é análogo.

Sejam $P_n(t)$ o polinômio de Taylor de grau n de f no ponto c e $R_n(t)$ o resto correspondente. Então, $f(t) = P_n(t) + R_n(t)$, para qualquer $t \in [a, b]$.

Portanto, no ponto x, temos:

$$f(x) = f(c) + f'(c)(x - c) + \frac{f''(c)}{2!}(x - c)^2 + \dots + \frac{f^{(n)}(c)}{n!}(x - c)^n + R_n(x)\cdot$$

Para provar (2), devemos mostrar que

$$R_n(x) = \frac{f^{(n+1)}(z)}{(n+1)!}(x - c)^{n+1}, \text{ onde } z \text{ é um número entre } c \text{ e } x.$$

Para isso, vamos considerar a seguinte função auxiliar:

$g:[c, x] \to \mathbb{R}$

$$g(t) = f(x) - f(t) - f'(t)(x - t) - \frac{f''(t)}{2!}(x - t)^2 - \ldots$$
$$\ldots - \frac{f^{(n)}(t)}{n!}(x - t)^n - R_n(x) \cdot \frac{(x - t)^{n+1}}{(x - c)^{n+1}}.$$

Pelas propriedades das funções contínuas, segue que g é contínua em $[c, x]$. Pelas propriedades das funções deriváveis, segue que g é derivável em (c, x). Além disso, podemos verificar que $g(c) = g(x) = 0$.

Logo, g satisfaz as hipóteses do Teorema de Rolle em $[c, x]$ e, portanto, existe um ponto z, entre c e x, tal que $g'(z) = 0$.

Derivando a função g com o auxílio das regras de derivação e simplificando, obtemos:

$$R_n(x) = \frac{f^{(n+1)}(z)}{(n+1)!}(x - c)^{(n+1)},$$

e, conseqüentemente, a fórmula (2) fica provada.

Observando as fórmulas (1) e (2), vemos que, na Fórmula de Taylor apresentada, o resto $R_n(x)$ é dado por

$$R_n(x) = \frac{f^{(n+1)}(z)}{(n+1)!}(x - c)^{n+1}.$$

Essa forma para o *resto* é chamada *Forma de Lagrange do Resto* e a fórmula (2) é dita *Fórmula de Taylor com Resto de Lagrange*. Existem outras formas para o resto, como a forma integral, que não abordaremos aqui.

5.15.4 Exemplos

(i) Determinar os polinômios de Taylor de grau 2 e de grau 4 da função $f(x) = \cos x$, no ponto $c = 0$. Esboçar o gráfico de f e dos polinômios encontrados.

Usando o polinômio $P_4(x)$ para determinar um valor aproximado para $\cos\frac{\pi}{6}$, o que se pode afirmar sobre o erro cometido?

Solução: Para determinar os polinômios pedidos, necessitamos do valor de f e de suas derivadas até ordem 4, no ponto $c = 0$.

Temos:

$$\begin{aligned}
f(x) &= \cos x, & f(0) &= \cos 0 = 1\\
f'(x) &= -\operatorname{sen} x, & f'(0) &= -\operatorname{sen} 0 = 0\\
f''(x) &= -\cos x, & f''(0) &= -\cos 0 = 1\\
f'''(x) &= \operatorname{sen} x, & f'''(0) &= \operatorname{sen} 0 = 0\\
f^{iv}(x) &= \cos x, & f^{iv}(0) &= \cos 0 = 1.
\end{aligned}$$

O polinômio de Taylor de grau 2, no ponto c, é dado por

$$P_2(x) = f(c) + f'(c)(x - c) + \frac{f''(c)}{2!}(x - c)^2.$$

Como no nosso caso $c = 0$, vem:

$$P_2(x) = f(0) + f'(0)x + \frac{f''(0)}{2!}x^2$$
$$= 1 + 0 \cdot x + \frac{(-1)}{2!}x^2$$
$$= 1 - \frac{x^2}{2}.$$

O polinômio de Taylor de grau 4, no ponto c, é dado por

$$P_4(x) = f(0) + f'(0)(x) + \frac{f''(0)}{2!}x^2 + \frac{f'''(0)}{3!}x^3 + \frac{f^{iv}(x)}{4!}x^4$$
$$= 1 + 0 \cdot x + \frac{(-1)}{2!}x^2 + \frac{0}{3!}x^3 + \frac{1}{4!}x^4$$
$$= 1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24}.$$

A Figura 5.41 mostra o gráfico de $f(x)$, $P_2(x)$ e $P_4(x)$. Comparando esses gráficos, podemos observar que o gráfico de $P_4(x)$ está mais próximo do gráfico de $f(x)$. Se aumentarmos n, o gráfico de $P_n(x)$ se aproxima cada vez mais do gráfico de $f(x)$.

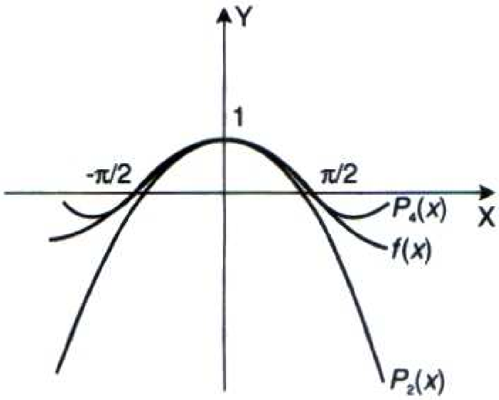

Figura 5.41

Usando o polinômio $P_4(x)$ para determinar um valor aproximado de $\cos\frac{\pi}{6}$, pela Fórmula de Taylor, temos:

$$\cos\frac{\pi}{6} = P_4(\pi/6) + R_4(\pi/6)$$
$$= 1 - \frac{1}{2!}\left(\frac{\pi}{6}\right)^2 + \frac{1}{4!}\left(\frac{\pi}{6}\right)^4 + \frac{f^{(5)}(z)}{5!}\left(\frac{\pi}{6}\right)^5,$$

onde z é um número entre 0 e $\pi/6$.

Como $f^{(v)}(x) = -\text{sen}\, x$ e $|-\text{sen}\, x| \le 1$ para qualquer valor de x, podemos afirmar que o resto $R_4\left(\frac{\pi}{6}\right)$ satisfaz

$$|R_4(\pi/6)| = \frac{|-\text{sen}\, z|}{5!}\left(\frac{\pi}{6}\right)^5 \le \frac{1}{5!}\left(\frac{\pi}{6}\right)^5$$
$$\cong 0{,}000327.$$

Logo, quando calculamos o valor de $\cos\frac{\pi}{6}$ pelo polinômio $P_4(x)$, temos:

$$\cos\frac{\pi}{6} = 1 - \frac{(\pi/6)^2}{2!} + \frac{(\pi/6)^4}{24}$$
$$\cong 0{,}86606$$

e podemos afirmar que o erro cometido, em módulo, é menor ou igual a 0,000327.

(iii) Determinar o polinômio de Taylor de grau 6 da função $f(x) = \text{sen } 2x$ no ponto $c = \dfrac{\pi}{4}$. Usar este polinômio para determinar um valor aproximado para $\text{sen } \dfrac{\pi}{3}$. Fazer uma estimativa para o erro.

Solução: Devemos calcular o valor da função e suas derivadas até ordem 6, no ponto $c = \dfrac{\pi}{4}$.

Temos:

$f(x) = \text{sen } 2x,$ $\quad f(\pi/4) = \text{sen } \pi/2 = 1$

$f'(x) = 2 \cos 2x,$ $\quad f'(\pi/4) = 2 \cos \pi/2 = 0$

$f''(x) = -4 \text{ sen } 2x,$ $\quad f''(\pi/4) = 24$

$f''(x) = -8 \cos 2x,$ $\quad f'''(\pi/4) = 0$

$f^{iv}(x) = 16 \text{ sen } 2x,$ $\quad f^{iv}(\pi/4) = 16$

$f^{v}(x) = 32 \cos 2x,$ $\quad f^{v}(\pi/4) = 0$

$f^{vi}(x) = -64 \text{ sen } 2x,$ $\quad f^{vi}(\pi/4) = 264$

O polinômio de Taylor de grau 6, no ponto $c = \pi/4$, é dado por:

$$P_6(x) = f\left(\frac{\pi}{4}\right) + \frac{f'(\pi/4)}{1!}\left(x - \frac{\pi}{4}\right) + \frac{f''(\pi/4)}{2!}\left(x - \frac{\pi}{4}\right)^2 + \dots + \frac{f^{(vi)}(\pi/4)}{6!}\left(x - \frac{\pi}{4}\right)^6$$
$$= 1 + 0 + \frac{(-4)}{2!}\left(x - \frac{\pi}{4}\right)^2 + 0 + \frac{16}{4!}\left(x - \frac{\pi}{4}\right)^4 + 0 + \frac{(-64)}{6!}\left(x - \frac{\pi}{4}\right)^6$$
$$= 1 - \frac{2^2}{2!}\left(x - \frac{\pi}{4}\right)^2 + \frac{2^4}{4!}\left(x - \frac{\pi}{4}\right)^4 - \frac{2^6}{6!}\left(x - \frac{\pi}{4}\right)^6.$$

Usando o polinômio $P_6(x)$ para determinar $\text{sen } \dfrac{\pi}{3}$, obtemos pela Fórmula de Taylor:

$$\text{sen } \frac{\pi}{3} = \text{sen } (2 \cdot \pi/6) = f(\pi/6) = P_6(\pi/6) + R_6(\pi/6)$$
$$= 1 - \frac{2^2}{2!}\left(\frac{\pi}{6} - \frac{\pi}{4}\right)^2 + \frac{2^4}{4!}\left(\frac{\pi}{6} - \frac{\pi}{4}\right)^4 - \frac{2^6}{6!}\left(\frac{\pi}{6} - \frac{\pi}{4}\right)^6 + \frac{f^{(vii)}(z)}{7!}\left(\frac{\pi}{6} - \frac{\pi}{4}\right)^7.$$
$$= 0{,}86602526 + \frac{f^{(vii)}(z)}{7!}\left(\frac{\pi}{6} - \frac{\pi}{4}\right)^7.$$

Como $f^{(vii)}(x) = -128 \cos 2x$ e $|\cos 2x| \le 1$ para todo x, o resto $R_6\left(\dfrac{\pi}{6}\right)$ satisfaz

$$|R_6(\pi/6)| \le \left|\frac{128}{7!}\left(\frac{\pi}{6} - \frac{\pi}{4}\right)^7\right| \cong 2{,}1407 \cdot 10^{-6}.$$

Logo, usando o polinômio $P_6(x)$ obtemos sen $\frac{\pi}{3} = 0{,}86602526$ e o erro cometido, em módulo, será inferior a $2{,}1407 \cdot 10^{-6}$.

Usando a Fórmula de Taylor, pode-se demonstrar a seguinte proposição que nos dá mais um critério para determinação de máximos e mínimos de uma função.

5.15.5 Proposição

Seja $f:(a, b) \to \mathbb{R}$ uma função derivável n vezes e cujas derivadas $f', f'', \ldots, f^{(n)}$ são contínuas em (a, b). Seja $c \in (a, b)$ um ponto crítico de f tal que $f'(c) = \ldots = f^{(n-1)}(c) = 0$ e $f^{(n)}(c) \neq 0$. Então,

(i) se n é par e $f^{(n)}(c) \leq 0$, f tem um máximo relativo em c;

(ii) se n é par e $f^{(n)}(c) \geq 0$, f tem um mínimo relativo em c;

(iii) se n é ímpar, c é um ponto de inflexão.

5.15.6 Exemplos

(i) Determinar os extremos da função $f(x) = (x-2)^6$.

Temos $f'(x) = 6(x-2)^5$. Fazendo $f'(x) = 0$, obtemos $x = 2$, que é o único ponto crítico de f.

Calculando as derivadas seguintes no ponto $x = 2$, temos:

$$\begin{aligned}
f''(x) &= 30(x-2)^4, & f''(2) &= 0\\
f'''(x) &= 120(x-2)^3, & f'''(2) &= 0\\
f^{iv}(x) &= 360(x-2)^2, & f^{iv}(2) &= 0\\
f^{(v)}(x) &= 720(x-2), & f^{(v)}(2) &= 0\\
f^{(vi)}(x) &= 720, & f^{(vi)}(2) &= 720 \neq 0.
\end{aligned}$$

Logo, $x = 2$ é um ponto de mínimo relativo.

(ii) Pesquisar máximos e mínimos da função $f(x) = x^5 - x^3$.

Fazendo $f'(x) = 5x^4 - 3x^2 = 0$, obtemos os pontos críticos que são $x_1 = 0$, $x_2 = \sqrt{3/5}$ e $x_3 = -\sqrt{3/5}$. Calculando o valor das derivadas seguintes no ponto $x_1 = 0$, temos:

$$f''(x) = 20x^3 - 6x, f''(0) = 0$$

$$f'''(x) = 60x^2 - 6, f'''(0) = -6 \neq 0$$

Como $f'''(0) \neq 0$, concluímos que 0 é um ponto de inflexão.

No ponto $x_2 = \sqrt{3/5}$, temos:

$$\begin{aligned}
f''(x) = 20x^3 - 6x, f''(\sqrt{3/5}) &= 20(3/5)^{3/2} - 6\sqrt{3/5}\\
&= \sqrt{3/5}\left(20 \cdot \frac{3}{5} - 6\right)\\
&= 6\sqrt{3/5} > 0.
\end{aligned}$$

Logo, concluímos que $x_1 = \sqrt{3/5}$ é um ponto de mínimo relativo.

No ponto $x_3 = -\sqrt{3/5}$, temos:

$$f''(x) = 20x^3 - 6x, f''(-\sqrt{3/5}) = -20\left(\frac{3}{5}\right)^{3/2} - 6(-\sqrt{3/5})$$

$$= -6\sqrt{3/5} < 0.$$

Logo, o ponto $x_3 = -\sqrt{3/5}$ é um ponto de máximo relativo.

5.16 Exercícios

1. Determinar o polinômio de Taylor de ordem n, no ponto c dado, das seguintes funções:

   (a) $f(x) = e^{x/2}$; $c = 0$ e 1; $n = 5$.

   (b) $f(x) = e^{-x}$; $c = -1$ e 2; $n = 4$.

   (c) $f(x) = \ln(1 - x)$; $c = 0$ e $1/2$; $n = 4$.

   (d) $f(x) = \operatorname{sen} x$; $c = \pi/2$; $n = 8$.

   (e) $f(x) = \cos 2x$; $c = 0$ e $\pi/2$; $n = 6$.

   (f) $f(x) = \dfrac{1}{1 + x}$; $c = 0$ e 1; $n = 4$.

2. Encontrar o polinômio de Taylor de grau n no ponto c e escrever a função que define o resto na forma de Lagrange, das seguinte funções:

   (a) $y = \cosh x$; $n = 4$; $c = 0$.

   (b) $y = \operatorname{tg} x$; $n = 3$; $c = \pi$.

   (c) $y = \sqrt{x}$; $n = 3$; $c = 1$.

   (d) $y = e^{-x^2}$; $n = 4$; $c = 0$.

3. Usando o resultado encontrado no exercício 1, item (c), com $c = 0$, determinar um valor aproximado para ln 0,5. Fazer uma estimativa para o erro.

4. Determinar o polinômio de Taylor de grau 6 da função $f(x) = 1 + \cos x$ no ponto $c = \pi$. Usar este polinômio para determinar um valor aproximado para cos $(5\pi/6$. Fazer uma estimativa para o erro.

5. Demonstrar que a diferença entre sen $(a + h)$ e sen $a + h \cos a$ é menor ou igual a $\dfrac{1}{2}h^2$.

6. Um fio delgado, pela ação da gravidade, assume a forma da catenária $y = a \cosh \dfrac{x}{a}$. Demonstrar que para valores pequenos de $|x|$, a forma que o fio toma pode ser representada, aproximadamente, pela parábola $y = a + \dfrac{x^2}{2a}$.

7. Pesquisar máximos e mínimos das seguintes funções:

   (a) $f(x) = 2x - 4$.

   (b) $f(x) = 4 - 5x + 6x^2$.

   (c) $f(x) = (x - 4)^{10}$.

   (d) $f(x) = 4(x + 2)^7$.

   (e) $f(x) = x^6 - 2x^4$.

   (f) $f(x) = x^5 - \dfrac{125}{3}x^3$.

19. -1 **20.** 1 **21.** 1

22. 0 **23.** $1/2$ **24.** 1

25. 0 **26.** 0 **27.** $1/12$

28. e^3 **29.** 1 **30.** $1/e$

31. 1 **32.** π **33.** 1

34. ∞ **35.** 1 **36.** $1/e^6$

37. 1 **38.** $1/5$ **39.** 1

40. e^2 **41.** 1 **42.** ∞

43. e^2

Seção 5.16

2. a) $1 + \dfrac{x^2}{2} + \dfrac{x^4}{24}$; $\dfrac{\operatorname{senh} z}{5!} x^5$

b) $x - \pi + \dfrac{(x-\pi)^3}{3}$; $\dfrac{[16 \sec^4 z \cdot \operatorname{tg} z + 8 \sec^2 z \operatorname{tg}^3 z]\,(x-\pi)^4}{4!}$

c) $1 + \dfrac{1}{2}(x-1) - \dfrac{1}{8}(x-1)^2 + \dfrac{1}{16}(x-1)^3$; $\dfrac{-15}{16z^3\sqrt{z}} \cdot \dfrac{1}{24}(x-1)^4$

d) $1 - x^2 + \dfrac{x^4}{2}$; $\dfrac{e^{-z^2}}{120}(160z^3 - 120z - 32z^5)\,x^5$

3. $-0{,}6822$; $|R_4(0{,}5)| < 0{,}2$

4. $\dfrac{1}{2}(x-\pi)^2 - \dfrac{1}{24}(x-\pi)^4 + \dfrac{1}{720}(x-\pi)^6$; $\cos\left(\dfrac{5\pi}{6}\right) \cong -0{,}8660331$; $\left|R_6\left(\dfrac{5\pi}{6}\right)\right| \leq 0{,}00002$

7. a) $\nexists$ b) 5/12 é ponto de mínimo

c) 4 é o ponto de mínimo d) $\nexists$

e) 0 é ponto de máximo; $\pm 2/\sqrt{3}$ são pontos de mínimo

f) -5 é ponto de máximo; 5 é ponto de mínimo