Exercícios selecionados:
2, 3, 4-b, c, f, g, k, 5-a,d, 6, 7-a, 9, 11, 12, 15, 16, 18 , 21, 23, 24-a,b,g,h, 25-a, 26-c,e,f, 27-a,d

INSTITUTO FEDERAL
Catarinense
Campus Blumenau

Assunto: Equações Diferenciais Ordinárias
Professor: Fabricio Alves Oliveira

Essa lista deverá ser resolvida de forma manuscrita e entregue no dia da terceira prova.

(**1**) Nos itens abaixo uma equação diferencial é dada junto com o campo ou área de problema em que ela aparece. Classifique cada uma como uma equação diferencial ordinária (EDO) ou equação diferencial parcial (EDP) e determine sua ordem. Se a equação for diferencial ordinária, indique também se ela é linear ou não linear.

(a) $\frac{d^2y}{dx^2} - 2x\frac{dy}{dx} + 2y = 0$ (equação de Hermite, oscilador harmônico quântico-mecânico)

(b) $5\frac{d^2x}{dt^2} + 4\frac{dx}{dt} + 9x = 2\cos(3t)$ (vibrações mecânicas, circuitos elétricos, sismologia)

(c) $\frac{\partial^2u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2u}{\partial y^2} = 0$ (equação de Laplace, teoria do potencial, eletricidade, calor, aerodinâmica)

(d) $y' = \frac{y(2-3x)}{x(1-3y)}, y = y(x)$ (competição entre duas espécies, ecologia)

(e) $\frac{dx}{dt} = k(4-x)(1-x)$, onde k é uma constante (taxas de reação química)

(f) $y\left[1 + \left(\frac{dy}{dx}^2\right)\right] = c$, onde c é uma constante (problema da braquistócrona, cálculo de variações)

(g) $\sqrt{1-y}\frac{d^2y}{dx^2} + 2x\frac{dy}{dx} = 0$ (equação de Kidder, fluxo de gases por um meio poroso)

(h) $\frac{dp}{dt} = kp(P-p)$, onde k e P são constantes (curva logística, epidemiologia, economia)

(i) $y^{(4)} = x(1-x), y = y(x)$ (deflexão de feixes)

(j) $\frac{\partial N}{\partial t} = \frac{\partial^2 N}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial N}{\partial r} + kN$, onde k é uma constante (fissão nuclear)

(**2**) Determine quais das funções $y_1(x) = x^2, y_2(x) = x^3$ e $y_3(x) = e^{-x}$ são soluções da equação

$$(x+3)y'' + (x+2)y' - y = 0.$$

(**3**) Resolva os seguinte problemas:

(a) Determine a curva $y = f(x)$ no plano xy que passa pelo ponto $(9, 4)$ e cujo coeficiente angular da reta tangente em cada ponto é $3\sqrt{x}$.

(b) Determine a curva $y = f(x)$ no plano xy com as seguintes propriedades:

(i) $y'' = f''(x) = 6x$;

(ii) Seu gráfico passa pelo ponto $(0, 1)$ e possui nesse ponto uma reta tangente horizontal.

(c) Um foguete decola verticalmente da superfície da Terra com uma aceleração constante de $20\ m/s^2$. Qual será sua velocidade e altura atingida após $1, 10$ e 100 segundos?

(**4**) Resolva a equação diferencial utilizando o método de separação de variáveis:

(a) $\dfrac{dy}{dx} = \operatorname{sen} 5x$ (b) $\dfrac{dy}{dx} = (x+1)^2$ (c) $dx + e^{3x}dy = 0$

(d) $dx - x^2dy = 0$ (e) $(x+1)\dfrac{dy}{dx} = x + 6$ (f) $e^x\dfrac{dy}{dx} = 2x$

(g) $xy' = 4y$ (h) $\dfrac{dy}{dx} + 2xy = 0$ (i) $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{y^3}{x^2}$

(j) $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{y+1}{x}$ (k) $\dfrac{dx}{dy} = \dfrac{x^2y^2}{1+x}$ (l) $\dfrac{dx}{dy} = \dfrac{1+2y^2}{y\operatorname{sen} x}$

(**5**) Resolva os problemas de valor inicial:

(a) $\begin{cases} (e^{-y}+1)\operatorname{sen} x dx = (1+\cos x)dy \\ y(0)=0 \end{cases}$ (b) $\begin{cases} (1+x^4)dy + x(1+4y^2)dx = 0 \\ y(1)=0 \end{cases}$

(c) $\begin{cases} y dy = 4x(y^2+1)^{\frac{1}{2}} dx \\ y(0)=1 \end{cases}$ (d) $\begin{cases} \dfrac{dy}{dt} + ty = y \\ y(1)=3 \end{cases}$

(**6**) Resolva as seguintes equações lineares utilizando o método do fator integrante:

(a) $y' - \frac{4}{x}y = -\frac{2}{x^3}$ (b) $y' - \frac{1}{x}y = -x$ (c) $y' - \frac{4}{x}y = x^5e^x$

(d) $\frac{dy}{dx} + \operatorname{tg}(x)y = \cos^2(x), -\frac{\pi}{2} < x < \frac{\pi}{2}$ (e) $x\frac{dy}{dx} - y = 2x\ln(x), x > 0$ (f) $x\frac{dy}{dx} = \frac{\cos(x)}{x} - 2y, x > 0$

(**7**) Resolva os problemas de valor inicial:

(a) $\begin{cases} y' + (1-2x)y = xe^{-x} \\ y(0)=2 \end{cases}$ (b) $\begin{cases} y' + +3t^2y = e^{-t^3+t} \\ y(0)=2 \end{cases}$

(c) $\begin{cases} y' - (\cos t)y = te^{t^2+\operatorname{sen} t} \\ y(0)=2 \end{cases}$ (d) $\begin{cases} y' + x^4y = x^4e^{\frac{4}{5}x^5} \\ y(0)=1 \end{cases}$

(**8**) Considere a equação

$$\frac{dy}{dt} + p(t)y = 0.$$

(a) Mostre que se $y_1(t)$ e $y_2(t)$ são soluções da equação, então $y(t) = y_1(t) + y_2(t)$ também é solução.

(b) Mostre que se $y_1(t)$ é solução da equação, então para qualquer constante c, $y(t) = cy_1(t)$ também é solução.

(**9**) Resolva o PVI

$$\begin{cases} t\dfrac{dy}{dt} + 2y = t^2 \\ y(2)=3 \end{cases}$$

e faça um esboço da solução.

(**10**) Sabe-se que a população de uma certa comunidade cresce a uma taxa proporcional ao número de pessoas presentes em qualquer instante. Se a população duplicou em 5 anos, quando ela triplicará? Quando quadruplicará?

(**11**) A população de bactérias em uma cultura cresce a uma taxa proporcional ao número de bactérias presentes em qualquer tempo. Após 3 horas, observa-se que há 400 bactérias presentes. Após 10 horas existem 2000 bactérias presentes. Qual era o número inicial de bactérias?

(**12**) O isótopo radioativo de chumbo, $Pb - 209$, decresce a uma taxa proporcional à quantidade presente em qualquer tempo. Sua meia-vida é $3,3$ horas. Se 1 grama de chumbo está presente inicialmente, quanto tempo levará para 90% de chumbo desaparecer?

(**13**) Quando a capitalização é feita de maneira contínua, a quantidade de dinheiro S aumenta a uma taxa proporcional à quantidade presente em qualquer tempo, ou seja, $\frac{dS}{dt} = rS$, em que r é a taxa anual de juros.

(a) Determine a quantidade de dinheiro acumulado no final de 5 anos, quando R\$5000 reais são depositados em uma poupança com taxa anual de juros de $5,75\%$ e capitalização contínua.
(b) Em quantos anos a soma inicial depositada duplicará?

(**14**) Em um pedaço de madeira queimada, verificou-se que $85,5\%$ do carbono 14 tinha se desintegrado. Sabendo que a meia-vida do carbono 14 é de 5600 anos, determine a idade aproximada dessa madeira.

(**15**) Um termômetro é retirado de dentro de uma sala e colocado do lado de fora, em que a temperatura é de 5^oC. Após 1 minuto, o termômetro marcava 20^oC; após 5 minutos, 10^oC. Qual a temperatura da sala?

(**16**) Uma força eletromotriz de 30 volts é aplicada a um circuito em série $L - R$ no qual a indutância é de $0,5$ henry e a resistência de 50 ohms.

(a) Determine a corrente $i(t)$, sabendo que $i(0) = 0$.
(b) Determine a corrente quando $t \to \infty$.

(**17**) Uma força eletromotriz de 100 volts é aplicada a um circuito $R - C$ em série no qual a resistência é de 200 ohms e a capacitância, 10^{-4} farad. Encontre a carga $q(t)$ no capacitor se $q(0) = 0$. Determine também a corrente $i(t)$.

(**18**) Um tanque contém 200 litros de fluido no qual são dissolvidos 30 g de sal. Uma solução salina contendo 1 g de sal por litro é então bombeada para dentro do tanque a uma taxa de 4 litros por minuto; a mistura é drenada à mesma taxa. Determine a quantidade de gramas de sal $A(t)$ no tanque em qualquer instante.

(**19**) Uma panela de água morna a 46°C foi colocada no refrigerador. Dez minutos mais tarde, a temperatura da água era de 39°C. Em outros dez minutos já atingia 33°C. Use a *Lei do Resfriamento de Newton* para estimar a temperatura do refrigerador.

(**20**) A mais antiga múmia humana congelada conhecida, chamada *Otzi*, descoberta na geleira Schnalstal, nos Alpes italianos, em 1991, foi encontrada usando sapatos de palha e vestindo um casaco de couro com pele de cabra, e também segurando um machado de cobre e um punhal de pedra. Estima-se que Otzi tenha morrido 5000 anos antes de ser descoberto na geleira em processo de derretimento. Quanto de carbono 14 original restava em Otzi no momento em que ele foi encontrado?

(**21**) Um tanque contém 500 litros de água doce. Uma solução que contém $0,5$ kg/l de fertilizante solúvel escoa para o tanque a uma taxa de 1 l/min, e a mistura é bombeada para fora do tanque a uma taxa de 3 l/min. Depois de quanto tempo a quantidade de fertilizante será máxima no tanque?

(**22**) Uma sala contém 216 m^3 de ar inicialmente isento de monóxido de carbono. A partir do tempo $t = 0$, uma fumaça contendo 4% de monóxido de carbono é expelida para a sala a uma taxa de 8 l/min. Um ventilador mantém a poluição bem distribuída na sala e a mistura também sai à mesma taxa de 8 l/min. Determine o momento em que a concentração de monóxido de carbono na sala atinge $0,01\%$.

(**23**) Considere dois tanques, 1 e 2, em cascata, com o tanque 1 em um nível superior ao do tanque 2. Inicialmente, o tanque 1 contém 100 litros de álcool etílico puro e o tanque 2 contém 100 litros de água pura. A partir de um determinado instante, água pura passa a fluir para o tanque 1, à razão de 10 litros por minuto. Ao mesmo tempo, o líquido do tanque 1 passa a ser despejado no tanque 2 e o líquido do tanque 2 passa a ser expelido do sistema, com a mesma taxa de fluxo (10 litros por minuto). Considerando que as misturas sejam mantidas homogêneas o tempo todo, determine:
(a) a quantidade de álcool $x(t)$ no tanque 1, no tempo t.
(b) a quantidade de álcool $y(t)$ no tanque 2, no tempo t.
(c) a quantidade máxima de álcool que o tanque 2 irá conter em algum instante.

(**24**) Determine a solução geral para a EDO de 2ª ordem linear com coeficientes constantes dada:

(a) $4y'' + y' = 0$
(b) $2y'' - 5y' = 0$
(c) $y'' - 36y = 0$
(d) $y'' - 8y = 0$
(e) $y'' + 9y = 0$
(f) $3y'' + y = 0$
(g) $y'' - y' - 6y = 0$
(h) $y'' - 3y' + 2y = 0$
(i) $y'' + 8y' + 16y = 0$
(j) $y'' - 10y' + 25y = 0$

(**25**) Resolver os problemas de valores iniciais (PVI) envolvendo EDO's de 2ª ordem lineares homogêneas com coeficientes constantes:

(a) $\begin{cases} y'' - 4y = 0 \\ y(0) = 2; y'(0) = 4 \end{cases}$ (b) $\begin{cases} y'' - 2y' + 10y = 0 \\ y(0) = 4; y'(0) = 1 \end{cases}$

(**26**) Resolva a equação diferencial dada pelo método dos coeficientes indeterminados:

(a) $y'' + 3y' + 2y = 6$ (b) $4y'' + 9y = 15$

(c) $y'' - 10y' + 25y = 30x + 3$ (d) $y'' + y' - 6y = 2x$

(e) $y'' - 8y' + 20y = 100x^2 - 26xe^x$ (f) $4y'' - 4y' - 3y = \cos 2x$

(**27**) Resolva a equação diferencial pelo método da variação dos parâmetros:

(a) $y'' + y = \sec x$ (b) $y'' + y = \operatorname{tg} x$

(c) $y'' + y = \operatorname{sen} x$ (d) $y'' + y = \sec x \operatorname{tg} x$

(e) $y'' + y = \cos^2 x$ (f) $y'' + y = \sec^2 x$

(1)

(a) EDO, 2^a ordem, linear
(b) EDO, 2^a ordem, linear
(c) EDP, 2^a ordem
(d) EDO, 1^a ordem, não linear
(e) EDO, 1^a ordem, não linear
(f) EDO, 1^a ordem, não linear
(g) EDO, 2^a ordem, não linear
(h) EDO, 1^a ordem, não linear
(i) EDO, 4^a ordem, linear
(j) EDP, 2^a ordem

(2) Apenas $y_3(x) = e^{-x}$ é solução da equação.

(4)
(a) $y = -\frac{1}{5}\cos(5x) + c$ (b) $y = \frac{1}{3}(x+1)^3 + c$ (c) $y = \frac{1}{3}e^{-3x} + c$
(d) $y = -\frac{1}{x} + c$ (e) $y = x + 5\ln|x+1| + c$ (f) $y = -2xe^{-x} + 2e^{-x} + c$
(g) $y = cx^4$ (h) $y = ce^{-x^2}$ (i) $y^{-2} = \frac{2}{x} + c$
(j) $y = cx - 1$ (k) $xy^3 = -3 + 3x\ln|x| + cx$ (l) $\ln|y| + y^2 = -\cos x + c$

(5)
(a) $(1+e^y)(1+\cos x) = 4$ (b) $\operatorname{arctg}(2y) + \operatorname{arctg}(x^2) = \frac{\pi}{4}$
(c) $\sqrt{y^2+1} = 2x^2 + \sqrt{2}$ (d) $y = e^{-\frac{(t-1)^2}{2}}$

(6) (a) $y(x) = \frac{1}{3x^2} + cx^4$ (b) $y(x) = -x^2 + cx$ (c) $y(x) = x^5e^x - x^4e^x + cx^4$

(7)
(a) $y(x) = -\frac{1}{2}e^{-x} + \frac{5}{2}e^{x^2-x}$

(b) $y(t) = e^{t-t^3} + e^{-t^3}$

(c) $y(t) = \frac{1}{2}e^{t^2+\operatorname{sen} t} + \frac{3}{2}e^{\operatorname{sen} t}$

(d) $y(x) = \frac{1}{5}e^{\frac{4}{5}x^5} + \frac{4}{5}e^{-\frac{x^5}{5}}$

(9) $y(t) = \frac{t^2}{4} + \frac{8}{t^2}$

(10) Triplicará em aproximadamente $7,9$ anos. Quadruplicará em 10 anos.

(11) Aproximadamente 201 bactérias.

(12) Aproximadamente $10,96$ horas.

(13) (a) R\$6665,45 (b) 12 anos

(14) Aproximadamente 15600 anos.

(15) $64,46^oC$

(16) (a) $i(t) = \frac{3}{5} - \frac{3}{5}e^{-500t}$ (b) $\frac{3}{5}$

(17) $q(t) = \frac{1}{100} - \frac{1}{100}e^{-50t}$, $i(t) = \frac{1}{2}e^{-50t}$

(18) $A(t) = 200 - 170e^{-\frac{t}{50}}$

(23) (a) $x(t) = 100e^{-\frac{1}{10}t}$ (b) $y(t) = 10te^{-\frac{1}{10}t}$ (c) $\frac{100}{e}$

(24)

(a) $y = c_1 + c_2 e^{-\frac{x}{4}}$

(b) $y = c_1 + c_2 e^{\frac{5x}{2}}$

(c) $y = c_1 e^{6x} + c_2 e^{-6x}$

(d) $y = c_1 e^{2\sqrt{2}x} + c_2 e^{-2\sqrt{2}x}$

(e) $y = c_1 \cos(3x) + c_2 \text{sen}\,(3x)$

(f) $y = c_1 \cos\left(\frac{x}{\sqrt{3}}\right) + c_2 \text{sen}\,\left(\frac{x}{\sqrt{3}}\right)$

(g) $y = c_1 e^{3x} + c_2 e{-}2x$

(h) $y = c_1 e^{x} + c_2 e^{2x}$

(i) $y = c_1 e^{-4x} + c_2 x e^{-4x}$

(j) $y = c_1 e^{5x} + c_2 x e^{5x}$

(25) (a) $y(x) = 2e^{2x}$ (b) $y(x) = 4e^{x}\cos(3x)$

(26)

(a) $y = c_1 e^{-x} + c_2 e^{-2x} + 3$

(b) $y = c_1 \cos\left(\frac{3}{2}x\right) + c_2 \text{sen}\,\left(\frac{3}{2}x\right) + \frac{5}{3}$

(c) $y = c_1 e^{5x} + c_2 x e^{5x} + \frac{6}{5}x + \frac{3}{5}$

(d) $y = c_1 e^{-3x} + c_2 e^{2x} + \frac{1}{3}x - \frac{1}{18}$

(e) $y = e^{4x}\left(c_1 \cos 2x + c_2 \text{sen}\, 2x\right) + 5x^2 + 4x + \frac{11}{10} + \left(-2x - \frac{12}{13}\right)e^{x}$

(f) $y = c_1 e^{\frac{3}{2}x} + c_2 e^{-\frac{x}{2}} - \frac{19}{425}\cos 2x - \frac{8}{425}\text{sen}\, 2x$

(27)

(a) $y = c_1 \cos x + c_2 \text{sen}\, x + \cos x \ln|\cos x| + x\,\text{sen}\, x$

(b) $y = c_1 \cos x + c_2 \text{sen}\, x + \cos x\,(\text{sen}\, x - \ln|\sec x + \text{tg}\, x|) - \cos x\,\text{sen}\, x$

(c) $y = c_1 \cos x + c_2 \text{sen}\, x - \frac{1}{2}x\cos x$

(d) $y = c_1 \cos x + c_2 \text{sen}\, x + x\cos x - \text{sen}\, x \ln|\cos x|$

(e) $y = c_1 \cos x + c_2 \text{sen}\, x + \frac{1}{3} + \frac{1}{3}\text{sen}^{\,2} x$

(f) $y = c_1 \cos x + c_2 \text{sen}\, x - 1 + \text{sen}\, x \ln|\sec x + \text{tg}\, x|$