2ª LISTA DE EXERCÍCIOS - GEOMETRIA ANALÍTICA

- **Retas no Espaço:**

  Fazer os exercícios do livro ***"Vetores e Geometria Analítica", Paulo Winterle, 1ª ou 2ª edição - Capítulo 5 (Retas)***

  Problemas Propostos

  1, 3, 4, 5, 7, 8, 9, 10, 15, 17, 19, 21, 23, 24, 25, 28, 31, 32.

- **Estudo do Plano:**

  Fazer os exercícios do livro ***"Vetores e Geometria Analítica", Paulo Winterle, 1ª ou 2ª edição – Capítulo 6 (Planos)***

  Problemas Propostos

  1, 2, 3, 5, 6, 7, 14, 19, 20, 23, 25, 28, 32, 34, 35, 36, 43, 48, 49, 50 e 53.

- **Distâncias:**

  Fazer os exercícios do livro ***"Vetores e Geometria Analítica", Paulo Winterle, 1ª ou 2ª edição - Capítulo 7 (Distâncias)***

  Fazer todos os Problemas Propostos

5 A RETA

EQUAÇÃO VETORIAL DA RETA

Consideremos um ponto $A(x_1, y_1, z_1)$ e um vetor não nulo $\vec{v} = (a, b, c)$. Só existe uma reta r que passa por A e tem a direção de $\vec{v}$. Um ponto P(x, y, z) pertence a r se, e somente se, o vetor $\overrightarrow{AP}$ é paralelo a $\vec{v}$ (Figura 5.1), ou seja,

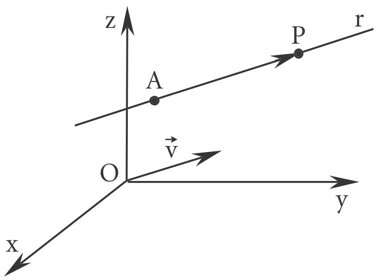

Figura 5.1

$$\overrightarrow{AP} = t\vec{v} \qquad \textbf{(1)}$$

para algum real t.

De **(1)**, vem

$$P - A = t\vec{v}$$

ou

$$P = A + t\vec{v} \qquad \textbf{(2)}$$

ou, em coordenadas,

$$(x, y, z) = (x_1, y_1, z_1) + t(a, b, c) \qquad \textbf{(3)}$$

Qualquer uma das equações **(1)**, **(2)** ou **(3)** é denominada *equação vetorial* de r.

O vetor $\vec{v}$ é chamado *vetor diretor* da reta r e t é denominado *parâmetro*.

Exemplo

A reta r que passa por A(1, −1, 4) e tem a direção de $\vec{v} = (2, 3, 2)$ tem equação vetorial, de acordo com **(3)**:

$$r : (x, y, z) = (1, -1, 4) + t(2, 3, 2) \qquad \textbf{(4)}$$

em que (x, y, z) representa um ponto qualquer de r.

Se desejarmos obter pontos de r, basta atribuir valores para t. Por exemplo, para t = 1, obtém-se (x, y, z) = (1, −1, 4) + 1(2, 3, 2) = (1, −1, 4) + (2, 3, 2) = (3, 2, 6) e, portanto, $P_1(3, 2, 6) \in r$.

De forma análoga, para t = 2, obtém-se (x, y, z) = (1, −1, 4) + 2(2, 3, 2) = (5, 5, 8) e, portanto, $P_2(5, 5, 8) \in r$;

para $t = 3$, obtém-se o ponto $P_3(7,8,10)$;

para $t = 0$, obtém-se o próprio ponto $A(1, -1, 4)$;

para $t = -1$, obtém-se o ponto $P_4(-1,-4,2)$;

e assim por diante. Se t assumir todos os valores reais, teremos todos os infinitos pontos da reta.

A Figura 5.2 mostra os pontos obtidos com seus correspondentes parâmetros.

De acordo com

$$P = A + t\vec{v}$$

tem-se

$$P_1 = A + (1)\vec{v}$$

$$P_2 = A + (2)\vec{v}$$

$$P_3 = A + (3)\vec{v}$$

$$P_4 = A + (-1)\vec{v}$$

$$A = A + (0)\vec{v}$$

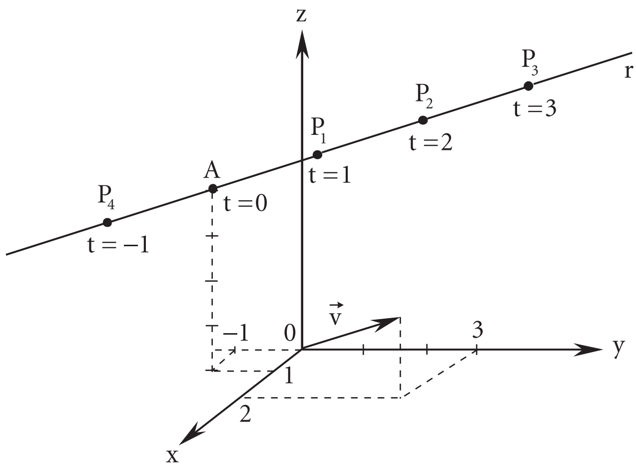

Figura 5.2

Observações

a) Vimos que a cada real t corresponde um ponto $P \in r$. A recíproca também é verdadeira, ou seja, a cada $P \in r$ corresponde um número real t. Por exemplo, sabe-se que o ponto $P(5, 5, 8)$ pertence à reta

$$r : (x, y, z) = (1, -1, 4) + t(2, 3, 2)$$

Logo, o ponto $(5, 5, 8)$ é um particular (x, y, z) na equação (4) e, portanto, é verdadeira a afirmação

$$(5, 5, 8) = (1, -1, 4) + t(2, 3, 2), \text{ para algum real } t.$$

Dessa igualdade, vem

$$(5, 5, 8) - (1, -1, 4) = t(2, 3, 2)$$

ou

$$(4, 6, 4) = t(2, 3, 2)$$

e, portanto, $t = 2$.

b) A equação (4) não é a única equação vetorial de r. Existem, na verdade, infinitas equações vetoriais de r, pois basta tomar outro ponto de r (em vez de A) ou outro vetor qualquer não nulo que seja múltiplo de $\vec{v}$. Por exemplo, a equação

$$(x, y, z) = (1, -1, 4) + t(4, 6, 4)$$

é outra equação vetorial de r na qual se utilizou o vetor $2\vec{v} = (4,6,4)$ como vetor diretor, em vez de $\vec{v} = (2,3,2)$.

EQUAÇÕES PARAMÉTRICAS DA RETA

Da equação vetorial da reta

$$(x,y,z) = (x_1, y_1, z_1) + t(a,b,c)$$

ou, ainda,

$$(x,y,z) = (x_1 + at, y_1 + bt, z_1 + ct),$$

pela condição de igualdade, obtém-se

$$\begin{cases} x = x_1 + at \\ y = y_1 + bt \\ z = z_1 + ct \end{cases} \qquad (5)$$

As equações (5) são chamadas *equações paramétricas* da reta.

Exemplos

1. A reta r que passa pelo ponto A(3, –4, 2) e é paralela ao vetor $\vec{v} = (2,1,-3)$ e, de acordo com (5), tem equações paramétricas

$$r: \begin{cases} x = 3 + 2t \\ y = -4 + t \\ z = 2 - 3t \end{cases}$$

2. Dado o ponto A(2, 3, –4) e o vetor $\vec{v} = (1,-2,3)$, pede-se:

a) Escrever equações paramétricas da reta r que passa por A e tem a direção de $\vec{v}$.

b) Encontrar os pontos B e C de r de parâmetros t = 1 e t = 4, respectivamente.

c) Determinar o ponto de r cuja abscissa é 4.

d) Verificar se os pontos D(4, –1, 2) e E(5, –4, 3) pertencem a r.

e) Determinar para que valores de m e n o ponto F(m, 5, n) pertence a r.

f) Escrever outros dois sistemas de equações paramétricas de r.

g) Escrever equações paramétricas da reta s que passa por G(5, 2, –4) e é paralela a r.

h) Escrever equações paramétricas da reta s que passa por A e é paralela ao eixo dos y.

Soluções

a) De acordo com **(5)**, temos:

$$r: \begin{cases} x = 2 + t \\ y = 3 - 2t \\ z = -4 + 3t \end{cases}$$

b) Das equações anteriores tem-se:

$$\text{para } t = 1, \text{ vem } \begin{cases} x = 2 + (1) = 3 \\ y = 3 - 2(1) = 1 \\ z = -4 + 3(1) = -1 \end{cases} \quad \therefore \ B(3,1,-1) \in r$$

$$\text{para } t = 4, \text{ vem } \begin{cases} x = 2 + (4) = 6 \\ y = 3 - 2(4) = -5 \\ z = -4 + 3(4) = 8 \end{cases} \quad \therefore \ C(6,-5,8) \in r$$

c) Como o ponto tem abscissa 4 (x = 4), temos

$$4 = 2 + t \text{ (1ª equação de r) e, portanto, } t = 2.$$

Como

$$t = 2 \Rightarrow \begin{cases} y = 3 - 2(2) = -1 \\ z = -4 + 3(2) = 2 \end{cases}$$

o ponto procurado é (4, –1, 2).

d) Um ponto pertence à reta r se existe um real t que satisfaz as equações de r. Para D(4, –1, 2), as equações

$$\begin{cases} 4 = 2 + t \\ -1 = 3 - 2t \\ 2 = -4 + 3t \end{cases}$$

se verificam para t = 2 e, portanto, D ∈ r.

Para E(5, –4, –3), as equações

$$\begin{cases} 5 = 2 + t \\ -4 = 3 - 2t \\ -3 = -4 + 3t \end{cases}$$

não são satisfeitas para o mesmo valor de t (t = 3 satisfaz a primeira equação, mas não as duas outras). Logo, E $\notin$ r.

e) Como F $\in$ r, as equações

$$\begin{cases} m = 2 + t \\ 5 = 3 - 2t \\ n = -4 + 3t \end{cases} \quad \text{se verificam para algum real t.}$$

Da equação 5 = 3 – 2t, vem t = –1 e, portanto,

$$m = 2 + (-1) = 1$$
$$n = -4 + 3(-1) = -7$$

f) Tomando o ponto B(3, 1, –1) $\in$ r (item b) e o vetor diretor $2\vec{v} = 2(1,-2,3) = (2,-4,6)$, tem-se

$$r: \begin{cases} x = 3 + 2t \\ y = 1 - 4t \\ z = -1 + 6t \end{cases}$$

Para o ponto C(6, –5, 8) e o vetor diretor $-\vec{v} = (-1,2,-3)$, tem-se

$$r: \begin{cases} x = 6 - t \\ y = -5 + 2t \\ z = 8 - 3t \end{cases}$$

g) Como s // r, os vetores diretores de s são os mesmos de r. Para $\vec{v} = (1,-2,3)$, tem-se

$$s: \begin{cases} x = 5 + t \\ y = 2 - 2t \\ z = -4 + 3t \end{cases}$$

h) Como a reta s é paralela ao eixo y, um de seus vetores diretores é $\vec{j} = (0,1,0)$. Então,

$$s: \begin{cases} x = 2 + 0 \cdot t = 2 \\ y = 3 + 1 \cdot t = 3 + t \\ z = -4 + 0 \cdot t = -4 \end{cases} \quad \text{ou} \quad \begin{cases} x = 2 \\ y = 3 + t \\ z = -4 \end{cases}$$

RETA DEFINIDA POR DOIS PONTOS

A reta definida pelos pontos A e B é a reta que passa por A (ou B) e tem a direção do vetor $\vec{v} = \overrightarrow{AB}$.

Exemplo

Escrever equações paramétricas da reta r que passa por A(3, –1, –2) e B(1, 2, 4).

Solução

Escolhendo o ponto A e o vetor $\vec{v} = \overrightarrow{AB} = B - A = (-2,3,6)$, tem-se

$$r:\begin{cases} x = 3 - 2t \\ y = -1 + 3t \\ z = -2 + 6t \end{cases}$$

EQUAÇÕES PARAMÉTRICAS DE UM SEGMENTO DE RETA

Consideremos a reta r do exemplo anterior e nela o segmento AB (origem A e extremidade B) (Figura 5.3).

Figura 5.3

As equações paramétricas do segmento AB são as mesmas da reta r, porém, com $0 \le t \le 1$, ou seja,

$$AB:\begin{cases} x = 3 - 2t \\ y = -1 + 3t \\ z = -2 + 6t, \quad t \in [0,1] \end{cases}$$

Observemos que

para t = 0, obtém-se o ponto A;

para t = 1, obtém-se o ponto B;

e para t entre 0 e 1, obtém-se os pontos entre A e B.

Se considerássemos o segmento BA, a fim de manter o mesmo intervalo de variação de t, para ponto tomaríamos o B e para vetor diretor $\overrightarrow{BA} = A - B = (2,-3,-6)$. Então,

$$BA:\begin{cases} x = 1 + 2t \\ y = 2 - 3t \\ z = 4 - 6t, \quad t \in [0,1] \end{cases}$$

Notemos que as equações vetoriais dos segmentos AB e BA com $0 \le t \le 1$ são

$$P = A + t(B - A) \quad \text{e} \quad P = B + t(A - B),$$

respectivamente, em que P(x, y, z) representa um ponto qualquer do segmento.

Observação

A equação $P = A + t(B - A)$ pode também ser expressa por

$$P = t\,B + (1 - t)A$$

EQUAÇÕES SIMÉTRICAS DA RETA

Das equações paramétricas

$$x = x_1 + at \qquad y = y_1 + bt \qquad z = z_1 + ct$$

supondo $abc \neq 0$, vem

$$t = \frac{x - x_1}{a} \qquad t = \frac{y - y_1}{b} \qquad t = \frac{z - z_1}{c}$$

Como para cada ponto da reta corresponde um só valor para t, obtemos as igualdades

$$\frac{x - x_1}{a} = \frac{y - y_1}{b} = \frac{z - z_1}{c} \qquad \textbf{(6)}$$

As equações (6) são denominadas *equações simétricas* da reta que passa pelo ponto $A(x_1, y_1, z_1)$ e tem a direção do vetor $\vec{v} = (a, b, c)$.

Exemplo

A reta que passa pelo ponto A(3, 0, –5) e tem a direção do vetor $\vec{v} = (2, 2, -1)$ tem equações simétricas

$$\frac{x - 3}{2} = \frac{y}{2} = \frac{z + 5}{-1}$$

Se desejarmos obter outros pontos da reta, basta atribuirmos um valor qualquer a uma das variáveis. Por exemplo, para x = 5, tem-se

$$\frac{5 - 3}{2} = 1 = \frac{y}{2} = \frac{z + 5}{-1}$$

em que y = 2 e z = –6 e, portanto, o ponto (5, 2, –6) pertence à reta.

EQUAÇÕES REDUZIDAS DA RETA

Em vez de realizar um tratamento genérico, tomaremos um caso particular.

Seja a reta r definida pelo ponto A(2, −4, −3) e pelo vetor diretor $\vec{v}=(1,2,-3)$, ela pode ser expressa pelas equações simétricas

$$r:\frac{x-2}{1}=\frac{y+4}{2}=\frac{z+3}{-3} \qquad \textbf{(7)}$$

A partir dessas equações, pode-se expressar duas variáveis em função da terceira. Isolando-se primeiro as variáveis y e z, e expressando-as em função de x, obtém-se

$$\begin{aligned}\frac{x-2}{1}&=\frac{y+4}{2} & \qquad \frac{x-2}{1}&=\frac{z+3}{-3}\\ 1(y+4)&=2(x-2) & 1(z+3)&=-3(x-2)\\ y+4&=2x-4 & z+3&=-3x+6\end{aligned}$$

$$y=2x-8 \qquad z=-3x+3 \qquad \textbf{(8)}$$

As duas últimas equações são *equações reduzidas* da reta r, na variável x.

Observações

a) É fácil verificar que todo ponto $P\in r$ é do tipo $P(x, 2x-8, -3x+3)$, em que x pode assumir um valor qualquer. Por exemplo, para x = 3, tem-se o ponto $P_1(3,-2,-6)\in r$.

b) Equações reduzidas na variável x serão sempre da forma

$$\begin{cases} y=mx+n\\ z=px+q\end{cases}$$

c) Com procedimento idêntico, a partir das equações **(7)**, podem-se obter as equações

$$\begin{cases} x=\frac{1}{2}y+4\\ z=-\frac{3}{2}y-9\end{cases} \quad \text{(equações reduzidas na variável y)}$$

ou

$$\begin{cases} x=-\frac{1}{3}z+1\\ y=-\frac{2}{3}z-6\end{cases} \quad \text{(equações reduzidas na variável z)}$$

d) A reta r das equações **(7)** pode ser representada pelas equações paramétricas

$$\begin{cases} x = 2 + t \\ y = -4 + 2t \\ z = -3 - 3t \end{cases}$$

Da primeira equação obtém-se t = x – 2 que, substituindo nas outras duas, transforma-as em

$$y = -4 + 2(x - 2) = 2x - 8$$

$$z = -3 - 3(x - 2) = -3x + 3$$

que são as equações reduzidas de (8).

e) Para encontrar um vetor diretor da reta

$$r: \begin{cases} y = 2x - 8 \\ z = -3x + 3 \end{cases}$$

uma das formas é determinar dois pontos A e B de r e, posteriormente, encontrar o vetor $\overrightarrow{AB} = B - A$. Por exemplo,

para x = 0, obtém-se o ponto A(0, –8, 3)

para x = 1, obtém-se o ponto B(1, –6, 0)

Logo, $\overrightarrow{AB} = (1, 2, -3)$ é um vetor diretor de r.

Outra maneira seria isolar a variável x nas duas equações, obtendo-se, desse modo, equações simétricas de r:

$$\frac{x}{1} = \frac{y + 8}{2} = \frac{z - 3}{-3}$$

na qual a leitura do vetor diretor (1, 2, –3) é imediata.

RETAS PARALELAS AOS PLANOS COORDENADOS

Uma reta é paralela a um dos planos xOy, xOz ou yOz se seus vetores diretores forem paralelos ao correspondente plano. Nesse caso, *uma das componentes do vetor é nula.*

A Figura 5.4 mostra a reta r (r // xOy) que passa pelo ponto A(–1, 2, 4) e tem vetor diretor $\vec{v} = (2, 3, 0)$ (a 3ª componente é nula porque $\vec{v} \parallel xOy$).

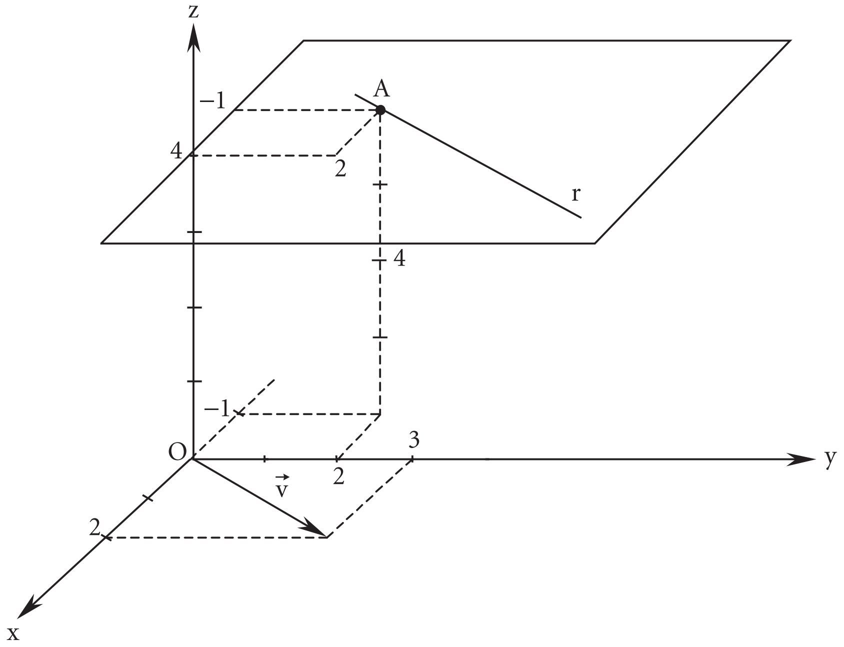

Figura 5.4

Um sistema de equações paramétricas de r é

$$\begin{cases} x = -1 + 2t \\ y = 2 + 3t \\ z = 4 \end{cases}$$

Observação

Como todos os pontos de r são do tipo (x, y, 4), ou seja, são pontos de cota 4, todos eles *distam 4 unidades do plano* xOy e, por isso, r // xOy. Por outro lado, sendo $P_1(x_1, y_1, 4)$ e $P_2(x_2, y_2, 4)$ pontos distintos de r, o vetor diretor $\overrightarrow{P_1P_2} = (x_2 - x_1, y_2 - y_1, 0)$ sempre terá a 3ª componente nula.

Comentário idêntico faríamos para os casos de uma reta ser paralela aos outros dois planos.

A Figura 5.5 mostra a reta r que passa por A(1, 5, 3) e é paralela ao vetor $\vec{v} = (-1, 0, 2)$ e, portanto,

$$r: \begin{cases} x = 1 - t \\ y = 5 \\ z = 3 + 2t \end{cases}$$

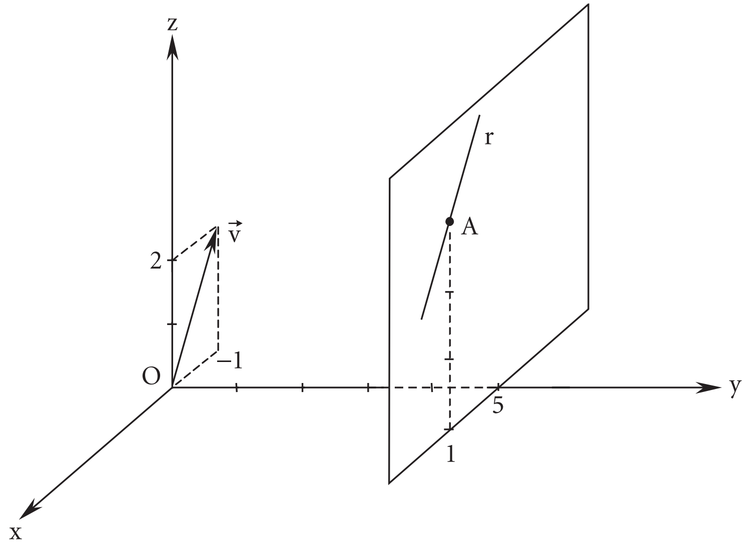

Figura 5.5

RETAS PARALELAS AOS EIXOS COORDENADOS

Uma reta é paralela a um dos eixos Ox, Oy ou Oz se seus vetores diretores forem paralelos a $\vec{i}=(1,0,0)$ ou a $\vec{j}=(0,1,0)$ ou, ainda, a $\vec{k}=(0,0,1)$. Nesse caso, *duas das componentes do vetor são nulas.*

Exemplo

Seja a reta r que passa por A(2, 3, 4) e tem a direção do vetor $\vec{v}=(0,0,3)$. Como a direção de $\vec{v}$ é a mesma de $\vec{k}$, pois $\vec{v}=3\vec{k}$, a reta r é paralela ao eixo Oz (Figura 5.6).

A reta r pode ser representada pelas equações

$$\begin{cases} x=2 \\ y=3 \\ z=4+3t \end{cases}$$

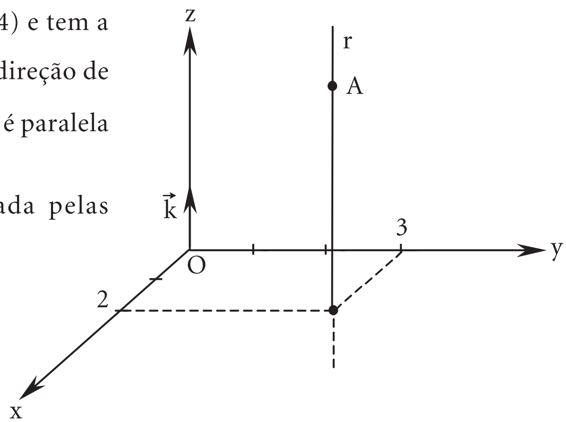

Figura 5.6

Para o caso particular da reta ser paralela a um eixo coordenado, costuma-se simplificar, e expressar as equações somente pelas constantes. Para o caso particular anterior, diz-se que as equações de r são

$$\begin{cases} x = 2 \\ y = 3 \end{cases}$$

subentendendo-se z uma variável livre que assume todos os valores reais. Ou seja, todos os pontos de r são do tipo $(2, 3, z)$ e as coordenadas constantes identificam perfeitamente a reta.

As Figuras 5.7 e 5.8 apresentam retas que passam por $A(x_1, y_1, z_1)$ e são paralelas aos eixos Oy e Ox, respectivamente. Logo, suas equações, já na forma simplificada, são

$$\begin{cases} x = x_1 \\ z = z_1 \end{cases} \quad \text{e} \quad \begin{cases} y = y_1 \\ z = z_1 \end{cases}, \text{ respectivamente.}$$

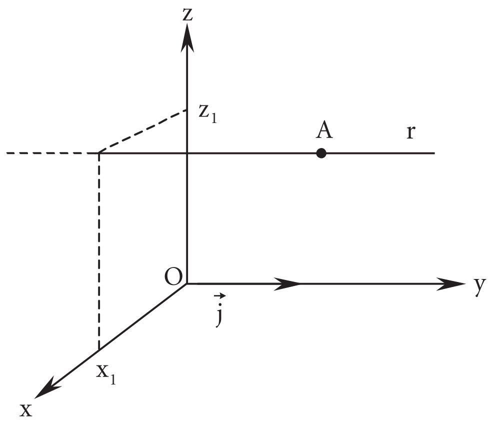

Figura 5.7

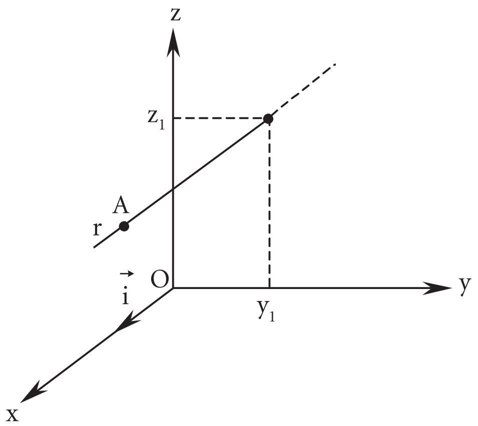

Figura 5.8

Observação

Os eixos Ox, Oy e Oz são retas particulares. Todas passam pela origem $O(0, 0, 0)$ e têm a direção de $\vec{i}, \vec{j}$ ou $\vec{k}$, respectivamente. Logo suas equações são:

$$\begin{cases} y = 0 \\ z = 0 \end{cases}, \quad \begin{cases} x = 0 \\ z = 0 \end{cases} \quad \text{e} \quad \begin{cases} x = 0 \\ y = 0 \end{cases}, \text{ nesta ordem.}$$

ÂNGULO DE DUAS RETAS

Sejam as retas r_1 e r_2 com as direções de $\vec{v}_1$ e $\vec{v}_2$, respectivamente (Figura 5.9).

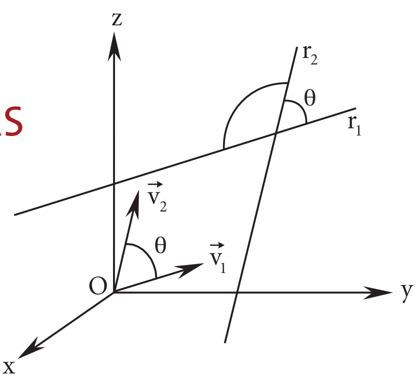

Figura 5.9

Chama-se *ângulo de duas retas* r_1 e r_2 o menor ângulo de um vetor diretor de r_1 e de um vetor diretor de r_2. Logo, sendo θ este ângulo, tem-se

$$\cos\theta = \frac{|\vec{v}_1 \cdot \vec{v}_2|}{|\vec{v}_1||\vec{v}_2|}, \text{ com } 0 \le \theta \le \frac{\pi}{2} \qquad \textbf{(9)}$$

Exemplo

Calcular o ângulo entre as retas

$$r_1: \begin{cases} x = 3 + t \\ y = t \\ z = -1 - 2t \end{cases} \quad \text{e} \quad r_2: \frac{x+2}{-2} = \frac{y-3}{1} = \frac{z}{1}$$

Solução

Os vetores que definem as direções das retas r_1 e r_2 são, respectivamente,

$$\vec{v}_1 = (1,1,-2) \text{ e } \vec{v}_2 = (-2,1,1)$$

Pela fórmula **(9)**:

$$\cos\theta = \frac{|\vec{v}_1 . \vec{v}_2|}{|\vec{v}_1||\vec{v}_2|} = \frac{|(1,1,-2)\cdot(-2,1,1)|}{\sqrt{1^2+1^2+(-2)^2}\sqrt{(-2)^2+1^2+1^2}}$$

$$\cos\theta = \frac{|-2+1-2|}{\sqrt{1+1+4}\sqrt{4+1+1}} = \frac{|-3|}{\sqrt{6}\sqrt{6}} = \frac{3}{6} = \frac{1}{2}$$

Logo,

$$\theta = \arccos\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{\pi}{3}\text{rad} = 60°$$

RETAS ORTOGONAIS

Sejam as retas r_1 e r_2 com as direções de $\vec{v}_1$ e $\vec{v}_2$, respectivamente.

Então,

$$r_1 \perp r_2 \iff \vec{v}_1 \cdot \vec{v}_2 = 0$$

Observação

Duas retas ortogonais podem ser concorrentes ou não. Na Figura 5.10, as retas r_1 e r_2 são ortogonais a r. Porém, r_2 e r são concorrentes. Nesse caso, diz-se que são *perpendiculares*.

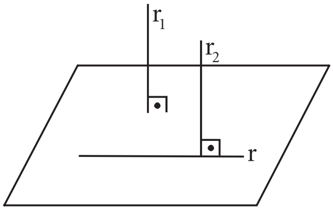

Figura 5.10

Exemplo

As retas

$$r_1 : \begin{cases} y = -2x + 1 \\ z = 4x \end{cases} \quad \text{e} \quad r_2 : \begin{cases} x = 3 - 2t \\ y = 4 + t \\ z = t \end{cases} \quad \text{são ortogonais.}$$

Sendo $\vec{v}_1 = (1, -2, 4)$ e $\vec{v}_2 = (-2, 1, 1)$ vetores diretores de r_1 e r_2 e

$$\vec{v}_1 \cdot \vec{v}_2 = 1(-2) - 2(1) + 4(1) = 0$$

as retas r_1 e r_2 são ortogonais.

RETA ORTOGONAL A DUAS RETAS

Sejam as retas r_1 e r_2 não paralelas, com as direções de $\vec{v}_1$ e $\vec{v}_2$, respectivamente. Toda reta r ortogonal a r_1 e r_2 terá a direção de um vetor $\vec{v}$ tal que

$$\begin{cases} \vec{v} \cdot \vec{v}_1 = 0 \\ \vec{v} \cdot \vec{v}_2 = 0 \end{cases} \qquad \textbf{(10)}$$

Em vez de tomarmos um vetor $\vec{v} \neq \vec{0}$ como uma solução particular do sistema **(10)**, poderíamos utilizar o produto vetorial (Capítulo 3), ou seja,

$$\vec{v} = \vec{v}_1 \times \vec{v}_2$$

Definido um vetor diretor, a reta r estará determinada quando um de seus pontos for conhecido.

Exemplo

Determinar equações paramétricas da reta r que passa pelo ponto A(3, 4, –1) e é ortogonal às retas

$$r_1 : (x, y, z) = (0, 0, 1) + t(2, 3, -4) \quad \text{e} \quad r_2 : \begin{cases} x = 5 \\ y = t \\ z = 1 - t \end{cases}$$

Solução

As direções de r_1 e r_2 são definidas pelos vetores $\vec{v}_1=(2,3,-4)$ e $\vec{v}_2=(0,1,-1)$. Então, a reta r tem a direção do vetor

$$\vec{v}_1\times\vec{v}_2=\begin{vmatrix}\vec{i} & \vec{j} & \vec{k}\\ 2 & 3 & -4\\ 0 & 1 & -1\end{vmatrix}=(1,2,2)$$

Logo,

$$r:\begin{cases}x=3+t\\ y=4+2t\\ z=-1+2t\end{cases}$$

INTERSEÇÃO DE DUAS RETAS

Exemplos

Determinar, caso exista, o ponto de interseção das retas r_1 e r_2:

1. $r_1:\begin{cases}x=3+h\\ y=1+2h\\ z=2-h\end{cases}$ e $r_2:\begin{cases}x=5+3t\\ y=-3-2t\\ z=4+t\end{cases}$

2. $r_1:\begin{cases}y=2x-3\\ z=-x\end{cases}$ e $r_2:\begin{cases}x=-t\\ y=4-t\\ z=2+2t\end{cases}$

3. $r_1:\begin{cases}y=-3x+2\\ z=2x-5\end{cases}$ e $r_2:\dfrac{x+2}{2}=\dfrac{y-1}{-6}=\dfrac{z}{4}$

Solução

Se existe um ponto I(x, y, z) comum às duas retas, suas coordenadas verificam todas as equações de r_1 e r_2, ou seja, o ponto I é solução única do sistema formado pelas equações das duas retas.

1. Igualando as expressões em x, y e z nas equações de r_1 e r_2, tem-se

$$\begin{cases}3+h=5+3t\\ 1+2h=-3-2t\\ 2-h=4+t\end{cases}\quad\text{ou}\quad\begin{cases}h-3t=2\\ 2h+2t=-4\\ -h-t=2\end{cases}$$

sistema cuja solução é $h=t=-1$. Substituindo $h=-1$ nas equações de r_1, obtém-se

$$x=3+(-1)=2\qquad y=1+2(-1)=-1\qquad z=2-(-1)=3$$

Portanto, o ponto de interseção é I(2, −1, 3).
O mesmo ponto seria obtido substituindo-se t = −1 nas equações de r_2.

2. Substituindo x, y e z das equações de r_2 nas equações de r_1, resulta o sistema

$$\begin{cases} 4-t=-2t-3 \\ 2+2t=t \end{cases}$$

Da primeira equação obtemos t = −7, e da segunda, t = −2. Como o sistema não tem solução, não existe ponto de interseção, ou seja , as retas r_1 e r_2 não são concorrentes.

3. Observando que $\vec{v}_1=(1,-3,2)$ e $\vec{v}_2=(2,-6,4)$ são vetores diretores de r_1 e r_2, respectivamente, e que $\vec{v}_2=2\vec{v}_1$, conclui-se que as retas são paralelas e não coincidentes (basta verificar que o ponto $A_1(0,2,-5)\in r_1$ e $A_1 \notin r_2$). Fica a cargo do leitor buscar a solução do sistema constituído pelas equações de r_1 e r_2 para concluir a não existência do ponto de interseção.

Observações

a) Se duas retas, como no exemplo (1), se interceptam, elas são *coplanares*, ou seja, estão situadas no mesmo plano (Figura 5.11). Também são coplanares as retas paralelas do exemplo (3) (Figura 5.12).

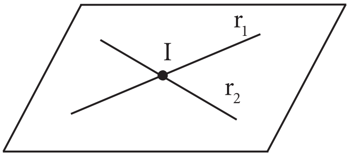

Figura 5.11

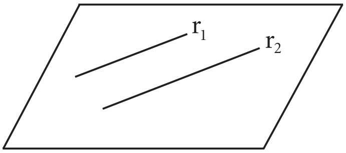

Figura 5.12

b) Se duas retas não são coplanares, elas são consideradas *reversas*. É o caso do exemplo (2) (Figura 5.13), pois as retas, além de não concorrentes, são não paralelas, e, portanto, não coplanares.

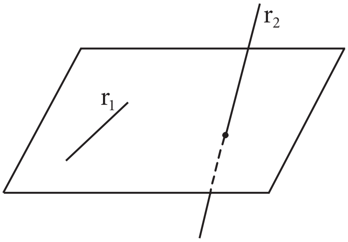

Figura 5.13

Problemas propostos

1. Determinar uma equação vetorial da reta r definida pelos pontos A(2, –3, 4) e B(1, –1, 2) e verificar se os pontos $C(\frac{5}{2}, -4, 5)$ e D(–1, 3, 4) pertencem a r.

2. Dada a reta r:(x, y, z) = (–1, 2, 3) + t(2, –3, 0), escrever equações paramétricas de r.

3. Escrever equações paramétricas da reta que passa por A(1, 2, 3) e é paralela à reta

$$r : (x, y, z) = (1, 4, 3) + t(0, 0, 1)$$

4. Dada a reta

$$r: \begin{cases} x = 2 + t \\ y = 3 - t \\ z = -4 + 2t \end{cases}$$, determinar o ponto de r tal que

a) a ordenada seja 6;

b) a abscissa seja igual à ordenada;

c) a cota seja o quádruplo da abscissa.

5. A reta r passa pelo ponto A(4,–3,–2) e é paralela à reta

$$s: \begin{cases} x = 1 + 3t \\ y = 2 - 4t \\ z = 3 - t \end{cases}$$

Se P(m, n, –5) ∈ r, determinar m e n.

6. Determinar as equações paramétricas da reta que passa pelos pontos A e B nos seguintes casos:

a) A(1, –1, 2) e B(2, 1, 0)

b) A(3, 1, 4) e B(3, –2, 2)

c) A(1, 2, 3) e B(1, 3, 2)

d) A(0, 0, 0) e B(0, 1, 0)

7. Com base na Figura 5.14, escrever equações paramétricas da reta por

a) A e B

b) C e D

c) A e D

d) B e C

e) D e E

f) B e D

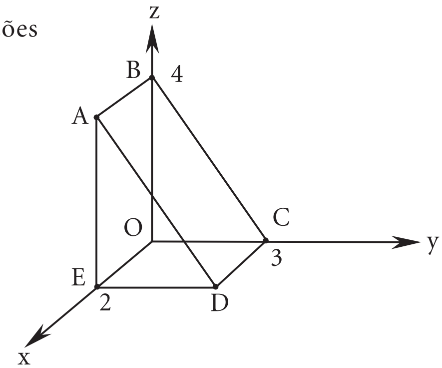

Figura 5.14

8. O ponto $P(m, 1, n)$ pertence à reta que passa por $A(3, -1, 4)$ e $B(4, -3, -1)$. Determinar P.

9. Seja o triângulo de vértices $A(-1, 4, -2)$, $B(3, -3, 6)$ e $C(2, -1, 4)$. Escrever equações paramétricas da reta que passa pelo ponto médio de lado AB e pelo vértice oposto C.

10. Os pontos $M_1(2,-1,3)$, $M_2(1,-3,0)$ e $M_3(2,1,-5)$ são pontos médios dos lados de um triângulo ABC. Obter equações paramétricas da reta que contém o lado cujo ponto médio é M_1.

11. Os vértices de um triângulo são os pontos $A(-1, 1, 3)$, $B(2, 1, 4)$ e $C(3, -1, -1)$. Obter equações paramétricas dos lados AB, AC e BC, e da reta r que contém a mediana relativa ao vértice B.

12. Verificar se os pontos $P_1(5,-5,6)$ e $P_2(4,-1,12)$ pertencem à reta

$$r: \frac{x-3}{-1} = \frac{y+1}{2} = \frac{z-2}{-2}$$

13. Determinar o ponto da reta $r: \frac{x-1}{2} = \frac{y+3}{-1} = \frac{z}{4}$ que possui

a) abscissa 5;

b) ordenada 2.

14. Obter o ponto de abscissa 1 da reta $r: \frac{2x+1}{3} = \frac{3y-2}{2} = z+4$ e encontrar um vetor diretor de r que tenha ordenada 2.

15. Obter equações reduzidas na variável x, da reta

a) que passa por $A(4, 0, -3)$ e tem a direção de $\vec{v} = (2,4,5)$;

b) pelos pontos $A(1, -2, 3)$ e $B(3, -1, -1)$;

c) pelos pontos $A(-1, 2, 3)$ e $B(2, -1, 3)$;

d) dada por $\begin{cases} x = 2-t \\ y = 3t \\ z = 4t-5. \end{cases}$

16. Escrever equações reduzidas na variável z da reta que passa por $A(-1, 6, 3)$ e $B(2, 2, 1)$.

17. Na reta $r: \begin{cases} y = 2x+3 \\ z = x-1 \end{cases}$, determinar o ponto de

a) ordenada igual a 9;

b) abscissa igual ao dobro da cota;

c) ordenada igual ao triplo da cota.

18. Representar graficamente as retas de equações

a) $\begin{cases} x = 1 - t \\ y = -1 + 2t \\ z = 2 + t \end{cases}$ **c)** $x = y = z$ **e)** $\begin{cases} y = 4 \\ z = 2x \end{cases}$ **g)** $\begin{cases} x = 3 \\ y = -4 \end{cases}$

b) $\begin{cases} y = -x \\ z = 3 + x \end{cases}$ **d)** $\begin{cases} y = 2x \\ z = 3 \end{cases}$ **f)** $\begin{cases} y = 3 \\ z = -1 \end{cases}$ **h)** $\begin{cases} x = -3 \\ z = 3 \end{cases}$

19. Determinar as equações paramétricas e representar graficamente a reta que passa por

a) A(3, −2, 4) e é paralela ao eixo x;

b) A(2, 2, 4) e é perpendicular ao plano xOz;

c) A(−2, 3, 4) e é ortogonal ao mesmo tempo aos eixos x e y;

d) A(4, −1, 3) e tem a direção de $3\vec{i} - 2\vec{j}$;

e) A(3, −1, 3) e B(3, 3, 4).

20. Escrever as equações paramétricas das retas que passam pelo ponto A(4, −5, 3) e são, respectivamente, paralelas aos eixos Ox, Oy e Oz.

21. Determinar o ângulo entre as seguintes retas:

a) $r_1: \begin{cases} x = -2 - t \\ y = t \\ z = 3 - 2t \end{cases}$ e $r_2: \dfrac{x}{2} = \dfrac{y+6}{1} = \dfrac{z-1}{1}$

b) $r_1: \begin{cases} y = -2x + 3 \\ z = x - 2 \end{cases}$ e $r_2: y = \dfrac{z+1}{-1};\ x = 4$

c) $r_1: \begin{cases} x = 1 + \sqrt{2}t \\ y = t \\ z = 5 - 3t \end{cases}$ e $r_2: \begin{cases} x = 3 \\ y = 2 \end{cases}$

d) $r_1: \dfrac{x-4}{2} = \dfrac{y}{-1} = \dfrac{z+1}{-2}$ e $r_2: \begin{cases} x = 1 \\ \dfrac{y}{4} = \dfrac{z-2}{3} \end{cases}$

22. Determinar o valor de n para que seja de 30° o ângulo entre as retas

a) $r_1: \dfrac{x-2}{4} = \dfrac{y}{5} = \dfrac{z}{3}$ e $r_2: \begin{cases} y = nx + 5 \\ z = 2x - 2 \end{cases}$

b) $r_1: \begin{cases} y = nx - 1 \\ z = 2x \end{cases}$ e r_2: eixo Oy

23. Sabendo que as retas r_1 e r_2 são ortogonais, determinar o valor de m para os casos:

a) $r_1: \begin{cases} x = 2mt - 3 \\ y = 1 + 3t \\ z = -4t \end{cases}$ e $r_2: \begin{cases} x = 2y - 1 \\ z = -y + 4 \end{cases}$

b) $r_1: \begin{cases} y = mx + 3 \\ z = x - 1 \end{cases}$ $r_2:$ reta por $A(1, 0, m)$ e $B(-2, 2m, 2m)$

24. Encontrar equações paramétricas da reta que passa por A e é, simultaneamente, ortogonal às retas r_1 e r_2, nos casos:

a) $A(3, 2, -1)$, $r_1: \begin{cases} x = 3 \\ y = -1 \end{cases}$ e $r_2: \begin{cases} y = x - 3 \\ z = -2x + 3 \end{cases}$

b) $A(0, 0, 0)$, $r_1: \dfrac{x}{2} = \dfrac{y}{1} = \dfrac{z-3}{2}$ e $r_2: \begin{cases} x = 3t \\ y = -t + 1 \\ z = 2 \end{cases}$

c) A é a interseção de r_1 e r_2

$$r_1: x - 2 = \frac{y+1}{2} = \frac{z}{3} \quad \text{e} \quad r_2: \begin{cases} x = 1 - y \\ z = 2 + 2y \end{cases}$$

25. Determinar, caso exista, o ponto de interseção das retas r_1 e r_2:

a) $r_1: \begin{cases} y = 2x - 3 \\ z = -x + 5 \end{cases}$ e $r_2 \begin{cases} y = -3x + 7 \\ z = x + 1 \end{cases}$

b) $r_1: \dfrac{x-3}{2} = \dfrac{y+1}{-3} = \dfrac{z-2}{4}$ e $r_2: \begin{cases} x = -1 + t \\ y = 4 - t \\ z = -8 + 3t \end{cases}$

c) $r_1: \begin{cases} y = 2x - 3 \\ z = -x - 10 \end{cases}$ e $r_2:\ x = \dfrac{y-4}{3} = \dfrac{z+1}{-2}$

d) $r_1: \begin{cases} x = 2 - t \\ y = 3 - 5t \\ z = 6 - 6t \end{cases}$ e $r_2: \begin{cases} x = -3 + 6h \\ y = 1 + 7h \\ z = -1 + 13h \end{cases}$

e) $r_1: (x, y, z) = (2, 4, 1) + t(1, -2, 3)$ e $r_2: (x, y, z) = (-1, 2, 5) + t(4, 3, -2)$

f) $r_1: \begin{cases} x = 2 + t \\ y = 4 - t \\ z = -t \end{cases}$ e $r_2: \begin{cases} y = 6 - x \\ z = 2 - x \end{cases}$

26. Calcular o valor de m para que sejam concorrentes as seguintes retas:

a) $r_1: \begin{cases} y = 2x - 5 \\ z = -x + 2 \end{cases}$ e $r_2: x - 5 = \dfrac{y}{m} = z + 1$

b) $r_1: \begin{cases} x = m - t \\ y = 1 + t \\ z = 2t \end{cases}$ e $r_2: \dfrac{x-1}{3} = \dfrac{y+2}{1} = \dfrac{z}{-2}$

27. Dadas as retas

$$r_1: \frac{x-1}{2} = -y;\ z = 3 \quad \text{e} \quad r_2: \begin{cases} x = t \\ y = -1 + t \\ z = 2 + t \end{cases}$$

encontrar equações reduzidas na variável x da reta que passa por A(0, 1, 0) e pelo ponto de interseção de r_1 com r_2.

28. Determinar na reta $r: \begin{cases} x = 2 + t \\ y = t \\ z = -1 + 2t \end{cases}$ um ponto equidistante dos pontos A(2, –1, –2) e B(1,0,–1).

29. Determinar os pontos da reta

$$r: x = 2 + t, \quad y = 1 + 2t, \quad z = 3 + 2t \qquad \text{que}$$

a) distam 6 unidades do ponto A(2, 1, 3);

b) distam 2 unidades do ponto B(1, –1, 3).

30. Escrever equações reduzidas da reta que passa por A(1, 3, 5) e intercepta o eixo z perpendicularmente.

31. Escrever equações reduzidas na variável z de cada uma das retas que satisfazem às condições dadas:

a) passa por A(4, –2, 2) e é paralela à reta r: x = 2y = –2z;

b) passa pela origem e é ortogonal a cada uma das retas

$$r: \frac{2x-1}{3} = \frac{y+2}{-2} = 2z - 2 \qquad \text{e} \qquad s: x = -y = -z$$

32. Determinar o ângulo que a reta que passa por A(3, –1, 4) e B(1, 3, 2) forma com a sua projeção sobre o plano xy.

33. Apresentar equações paramétricas da projeção da reta $r: \begin{cases} y = 5x - 7 \\ z = -2x + 6 \end{cases}$ sobre o plano xy.

34. Dados o ponto A(3, 4, −2) e a reta

$$r: \begin{cases} x = 1 + t \\ y = 2 - t \\ z = 4 + 2t \end{cases}$$

a) determinar equações paramétricas da reta que passa por A e é perpendicular a r.

b) calcular a distância de A a r.

c) determinar o ponto simétrico de A em relação a r.

Respostas de problemas propostos

1. $(x, y, z) = (2, -3, 4) + t(-1, 2, -2)$, $C \in r$ e $D \notin r$.

2. $x = -1 + 2t$ $\quad y = 2 - 3t$ $\quad z = 3$

3. $x = 1$ $\quad y = 2$ $\quad z = 3 + t$

4. **a)** $(-1, 6, -10)$ **b)** $(\frac{5}{2}, \frac{5}{2}, -3)$ **c)** $(-4, 9, -16)$

5. $m = 13$, $n = -15$

6. **a)** $x = 1 + t$ $\quad y = -1 + 2t$ $\quad z = 2 - 2t$

b) $x = 3$ $\quad y = 1 - 3t$ $\quad z = 4 - 2t$

c) $x = 1$ $\quad y = 2 + t$ $\quad z = 3 - t$

d) $x = 0$ $\quad y = t$ $\quad z = 0$ (eixo Oy)

7. **a)** $x = 2 + 2t$ $\quad y = 0$ $\quad z = 4$

b) $x = 2t$ $\quad y = 3$ $\quad z = 0$

c) $x = 2$ $\quad y = 3t$ $\quad z = 4 - 4t$

d) $x = 0$ $\quad y = 3t$ $\quad z = 4 - 4t$

e) $x = 2$ $\quad y = 3 + 3t$ $\quad z = 0$

f) $x = 2t$ $\quad y = 3t$ $\quad z = 4 - 4t$

8. P(2, 1, 9)

9. $x = 2 + t$ $\quad y = -1 - \frac{3}{2}t$ $\quad z = 4 + 2t$

10. $x = 2 + t$ $\quad y = -1 + 4t$ $\quad z = 3 - 5t$

11. AB: $x = -1 + 3t$ $\quad y = 1$ $\quad z = 3 + t$ $\quad$ com $t \in [0,1]$

AC: $x = -1 + 4t$ $\quad y = 1 - 2t$ $\quad z = 3 - 4t$ $\quad$ com $t \in [0,1]$

BC: $x = 2 + t \qquad y = 1 - 2t \qquad z = 4 - 5t \qquad \text{com } t \in [0,1]$

r: $x = 2 + t \qquad y = 1 + t \qquad z = 4 + 3t$

12. Apenas P_1

13. **a)** $(5, -5, 8)$ **b)** $(-9, 2, -20)$

14. $(1, \frac{4}{3}, -3)$ e $\vec{v} = (\frac{9}{2}, 2, 3)$

15. **a)** $y = 2x - 8$ e $z = \frac{5}{2}x - 13$

b) $y = \frac{x}{2} - \frac{5}{2}$ e $z = -2x + 5$

c) $y = -x + 1$ e $z = 3$

d) $y = -3x + 6$ e $z = -4x + 3$

16. $x = -\frac{3}{2}z + \frac{7}{2}$ e $y = 2z$

17. **a)** $(3, 9, 2)$ **b)** $(2, 7, 1)$ **c)** $(6, 15, 5)$

19. **a)** $\begin{cases} y = -2 \\ z = 4 \end{cases}$ **b)** $\begin{cases} x = 2 \\ z = 4 \end{cases}$ **c)** $\begin{cases} x = -2 \\ y = 3 \end{cases}$

d) $\begin{cases} x = 4 + 3t \\ y = -1 - 2t \\ z = 3 \end{cases}$ **e)** $\begin{cases} x = 3 \\ y = -1 + 4t \\ z = 3 + t \end{cases}$

20. $\begin{cases} y = -5 \\ z = 3 \end{cases}$ $\begin{cases} x = 4 \\ z = 3 \end{cases}$ $\begin{cases} x = 4 \\ y = -5 \end{cases}$

21. **a)** $60°$ **b)** $30°$ **c)** $30°$

d) $\theta = \arccos(\frac{2}{3}) \cong 48°11'$

22. **a)** 7 ou 1 **b)** $\pm\sqrt{15}$

23. **a)** $m = -\frac{7}{4}$ **b)** $m = 1$ ou $m = -\frac{3}{2}$

24. **a)** $x = 3 + t \qquad y = 2 - t \qquad z = -1$

b) $x = 2t \qquad y = 6t \qquad z = -5t$

c) $x = 2 + t \qquad y = -1 - 5t \qquad z = 3t$

25. **a)** $(2, 1, 3)$ **d)** $(3, 8, 12)$

b) $(1, 2, -2)$ **e)** reversas

c) reversas **f)** coincidentes

26. **a)** $m = -3$ **b)** $m = 4$

27. $\begin{cases} y = -x + 1 \\ z = 3x \end{cases}$

28. $(\frac{7}{4}, -\frac{1}{4}, -\frac{3}{2})$

29. **a)** $(4, 5, 7)$ e $(0, -3, -1)$ **b)** $(\frac{17}{9}, \frac{7}{9}, \frac{25}{9})$ e $(1, -1, 1)$

30. $y = 3x$, $z = 5$

31. **a)** $\begin{cases} x = -2z + 8 \\ y = -z \end{cases}$ **b)** $\begin{cases} x = 5z \\ y = 4z \end{cases}$

32. $\theta = \arccos(\frac{\sqrt{30}}{6})$

33. $x = 1 + t$ $y = -2 + 5t$ $z = 0$

34. **a)** $\begin{cases} x = 3 - 2h \\ y = 4 \\ z = -2 + h \end{cases}$ **b)** $\sqrt{20}$ **c)** $(-5, 4, 2)$

O PLANO

6

EQUAÇÃO GERAL DO PLANO

Seja $A(x_1, y_1, z_1)$ um ponto pertencente ao plano π e $\vec{n} = (a, b, c)$, $\vec{n} \neq \vec{0}$, um vetor normal (ortogonal) ao plano (Figura 6.1).

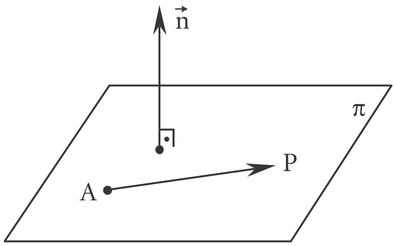

Figura 6.1

Como $\vec{n} \perp \pi$, $\vec{n}$ é ortogonal a todo vetor representado em π. Então, um ponto $P(x, y, z)$ pertence a π se, e somente se, o vetor $\overrightarrow{AP}$ é ortogonal a $\vec{n}$, ou seja,

$$\vec{n} \cdot (P - A) = 0$$

ou

$$(a, b, c) \cdot (x - x_1, y - y_1, z - z_1) = 0$$

ou

$$a(x - x_1) + b(y - y_1) + c(z - z_1) = 0$$

ou, ainda,

$$ax + by + cz - ax_1 - by_1 - cz_1 = 0$$

Fazendo $-ax_1 - by_1 - cz_1 = d$, obtemos

$$ax + by + cz + d = 0 \qquad \textbf{(1)}$$

Esta é a equação *geral* do plano π.

Observações

a) Assim como $\vec{n} = (a, b, c)$ é um vetor normal a π, qualquer vetor $k\vec{n}$, $k \neq 0$, é também vetor normal ao plano.

b) É importante notar que os três coeficientes a, b e c da equação **(1)** representam as componentes de um vetor normal ao plano.

Por exemplo, se um plano π é dado por

$$\pi : 3x + 2y - z + 1 = 0$$

um de seus vetores normais é $\vec{n} = (3,2,-1)$.

c) Para obter pontos de um plano dado por uma equação geral, basta atribuir valores arbitrários a duas das variáveis e calcular o valor da outra na equação dada.

Assim, por exemplo, se na equação anterior fizermos $x = 4$ e $y = -2$, teremos:

$$\begin{aligned} 3(4)+2(-2)-z+1&=0 \\ 12-4-z+1&=0 \\ z&=9 \end{aligned}$$

e, portanto, o ponto $A(4,-2,9)$ pertence a este plano.

Exemplos

1. Obter uma equação geral do plano π que passa pelo ponto $A(2, -1, 3)$ e tem $\vec{n} = (3,2,-4)$ como um vetor normal.

Solução

Como $\vec{n}$ é normal a π, sua equação é do tipo

$$3x + 2y - 4z + d = 0$$

e sendo A um ponto do plano, suas coordenadas devem verificar a equação, ou seja,

$$\begin{aligned} 3(2)+2(-1)-4(3)+d&=0 \\ 6-2-12+d&=0 \\ d&=8 \end{aligned}$$

Logo, uma equação geral do plano π é

$$3x + 2y - 4z + 8 = 0$$

Observação

Esse exemplo, como outro qualquer que envolva determinação de equação do plano, pode ser resolvido de modo análogo à dedução da equação, pois um vetor normal ao plano é suficiente para caracterizar sua direção. Em nosso estudo utilizaremos sempre a equação geral em vez de apelar para a sua dedução. O leitor poderá optar entre uma ou outra maneira.

2. Escrever uma equação geral do plano π que passa pelo ponto A(2, 1, 3) e é paralelo ao plano

$$\pi_1: 3x - 4y - 2z + 5 = 0.$$

Solução

É imediato que "um vetor normal a um plano é também normal a qualquer plano paralelo a este".

Então, como π // π_1, o vetor $\vec{n_1} = (3,-4,-2)$ normal a π_1 é também normal a π. Logo, uma equação de π é da forma

$$3x - 4y - 2z + d = 0$$

Tendo em vista que A $\in \pi$, suas coordenadas devem verificar a equação:

$$3(2) - 4(1) - 2(3) + d = 0$$

e d = 4; portanto, uma equação de π é

$$3x - 4y - 2z + 4 = 0$$

3. A reta

$$r: \begin{cases} x = 5 + 3t \\ y = -4 + 2t \\ z = 1 + t \end{cases}$$

é ortogonal ao plano π que passa pelo ponto A(2, 1, −2). Determinar uma equação geral de π e representá-la graficamente.

Solução

Como r $\perp$ π, qualquer vetor diretor de r é um vetor normal ao plano. Sendo $\vec{n} = (3,2,1)$ um desses vetores, uma equação de π é da forma

$$3x + 2y + z + d = 0$$

Como A $\in \pi$, deve-se ter

$$3(2) + 2(1) + (-2) + d = 0$$

e d = −6; portanto, uma equação de π é

$$3x + 2y + z - 6 = 0$$

Para a representação gráfica do plano, obteremos três de seus pontos. Se nessa equação fizermos

$y = 0$ e $z = 0$, vem $x = 2$

$x = 0$ e $z = 0$, vem $y = 3$

$x = 0$ e $y = 0$, vem $z = 6$

Obtemos, assim, os pontos $A_1(2,0,0)$, $A_2(0,3,0)$ e $A_3(0,0,6)$ nos quais o plano intercepta os eixos coordenados. A Figura 6.2 mostra o referido plano.

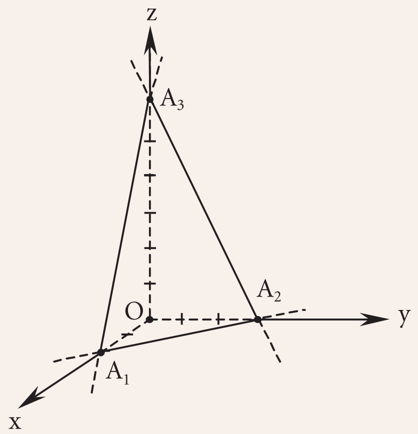

Figura 6.2

Observação

Se um plano π intercepta os eixos coordenados nos pontos (p, 0, 0), (0, q, 0) e (0, 0, r) com $p \cdot q \cdot r \neq 0$, então, π admite a equação

$$\frac{x}{p} + \frac{y}{q} + \frac{z}{r} = 1$$

denominada *equação segmentária* do plano π.

Para o caso do problema anterior, em que os pontos são $A_1(2,0,0)$, $A_2(0,3,0)$ e $A_3(0,0,6)$, a equação segmentária do plano é

$$\frac{x}{2} + \frac{y}{3} + \frac{z}{6} = 1 \qquad \textbf{(2)}$$

que é equivalente à equação $3x + 2y + z - 6 = 0$, ao eliminarmos os denominadores e ordenarmos os termos.

Reciprocamente, se escrevermos esta última equação como $3x + 2y + z = 6$ e dividirmos ambos os membros por 6, voltaremos a ter a equação segmentária **(2)**.

EQUAÇÃO VETORIAL E EQUAÇÕES PARAMÉTRICAS DO PLANO

Seja $A(x_0, y_0, z_0)$ um ponto pertencente a um plano π e $\vec{u} = (a_1, b_1, c_1)$ e $\vec{v} = (a_2, b_2, c_2)$ dois vetores paralelos a π (Figura 6.3), e $\vec{u}$ e $\vec{v}$ não paralelos.

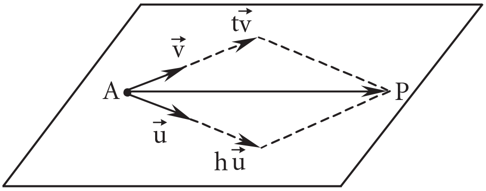

Figura 6.3

Para todo ponto P do plano, os vetores $\overrightarrow{AP}$, $\vec{u}$ e $\vec{v}$ são coplanares. Um ponto P(x, y, z) pertence a π se, e somente se, existirem números reais h e t tais que

$$P - A = h\vec{u} + t\vec{v}$$

ou

$$P = A + h\vec{u} + t\vec{v}$$

ou, em coordenadas:

$$(x,y,z) = (x_0, y_0, z_0) + h(a_1, b_1, c_1) + t(a_2, b_2, c_2), \quad h, t \in \mathbb{R} \qquad \textbf{(3)}$$

Essa equação é denominada *equação vetorial* do plano π. Os vetores $\vec{u}$ e $\vec{v}$ são *vetores diretores* de π.

Da equação **(3)** obtém-se

$$(x,y,z) = (x_0 + a_1h + a_2t,\ \ y_0 + b_1h + b_2t,\ \ z_0 + c_1h + c_2t)$$

que, pela condição de igualdade, vem

$$\begin{cases} x = x_0 + a_1h + a_2t \\ y = y_0 + b_1h + b_2t \\ z = z_0 + c_1h + c_2t, \quad h, t \in \mathbb{R} \end{cases}$$

Essas equações são chamadas *equações paramétricas* de π, e h e t são variáveis auxiliares denominadas *parâmetros*.

Exemplos

1. Seja o plano π que passa pelo ponto A(2, 2, −1) e é paralelo aos vetores $\vec{u} = (2,-3,1)$ e $\vec{v} = (-1,5,-3)$. Obter uma equação vetorial, um sistema de equações paramétricas e uma equação geral de π.

Solução

a) *Equação vetorial*: (x, y, z) = (2, 2, −1) + h(2, −3, 1) + t(−1, 5, −3)

b) *Equações paramétricas:*

$$\begin{cases} x = 2 + 2h - t \\ y = 2 - 3h + 5t \\ z = -1 + h - 3t \end{cases}$$

Observação

Se quisermos algum ponto desse plano, basta arbitrar valores reais para h e t. Por exemplo, para h = 0 e t = 1, vem

$$x = 1, \quad y = 7 \quad e \quad z = -4$$

e, portanto, B(1, 7, −4) é um ponto do plano π.

c) *Equação geral*

Como o vetor

$$\vec{u} \times \vec{v} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 2 & -3 & 1 \\ -1 & 5 & -3 \end{vmatrix} = (4, 5, 7)$$

é simultaneamente ortogonal a $\vec{u}$ e $\vec{v}$, ele é um vetor $\vec{n}$ normal ao plano π (Figura 6.4). Então, uma equação geral de π é da forma

$$4x + 5y + 7z + d = 0$$

e, como A ∈ π, tem-se

$$4(2) + 5(2) + 7(-1) + d = 0$$

e d = −11; portanto,

$$4x + 5y + 7z - 11 = 0$$

é uma equação geral de π.

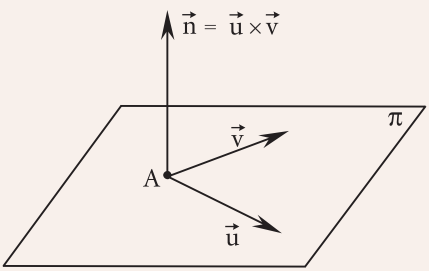

Figura 6.4

Observação

Existe outra maneira de obter uma equação geral de π: como P(x, y, z) representa um ponto qualquer do plano, os vetores $\overrightarrow{AP}$, $\vec{u}$ e $\vec{v}$ são coplanares (Figura 6.5) e, portanto, o produto misto deles é nulo, ou seja,

$$(\overrightarrow{AP}, \vec{u}, \vec{v}) = 0$$

Assim, obtém-se uma equação geral do plano desenvolvendo o 1º membro da igualdade

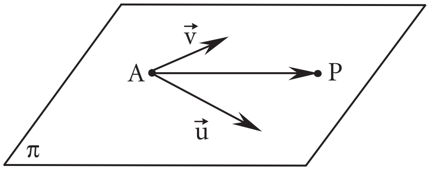

Figura 6.5

$$\begin{vmatrix} x-2 & y-2 & z+1 \\ 2 & -3 & 1 \\ -1 & 5 & -3 \end{vmatrix} = 0$$

que é equivalente à equação $4x + 5y + 7z - 11 = 0$

2. Dado o plano π determinado pelos pontos $A(1, -1, 2)$, $B(2, 1, -3)$ e $C(-1, -2, 6)$, obter um sistema de equações paramétricas e uma equação geral de π.

Solução

a) *Equações paramétricas*

Sabe-se que existe apenas um plano que contém três pontos não em linha reta. Os vetores não paralelos

$$\vec{u} = \overrightarrow{AB} = (1,2,-5) \;\text{ e }\; \vec{v} = \overrightarrow{AC} = (-2,-1,4)$$

são vetores diretores de π (Figura 6.6) e, portanto, as equações (utilizando o ponto A)

$$\begin{cases} x = 1 + h - 2t \\ y = -1 + 2h - t \\ z = 2 - 5h + 4t \end{cases}$$

são equações paramétricas do plano.

b) *Equação geral:*

Como no problema anterior, sendo $\vec{u}$ e $\vec{v}$ vetores diretores de π, o vetor

$$\vec{n} = \vec{u} \times \vec{v} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 1 & 2 & -5 \\ -2 & -1 & 4 \end{vmatrix} = (3,6,3)$$

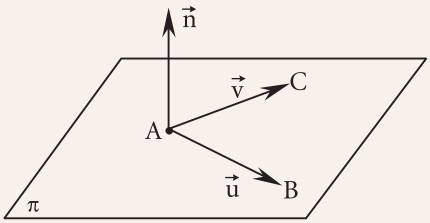

Figura 6.6

é um vetor normal a π (Figura 6.6).

Então, uma equação geral é da forma

$$3x + 6y + 3z + d = 0$$

Como $A \in \pi$ (poderíamos tomar B ou C):

$$3(1) + 6(-1) + 3(2) + d = 0$$

e d = −3; portanto, uma equação geral de π é

$$3x + 6y + 3z - 3 = 0$$

ou, multiplicando ambos os membros da equação por $\frac{1}{3}$:

$$x + 2y + z - 1 = 0$$

3. Dado o plano π de equação $2x - y - z + 4 = 0$, determinar um sistema de equações paramétricas de π.

Solução

Basta tomar três pontos A, B e C não alinhados de π e proceder como no problema anterior.

Fazendo

$$x = y = 0, \text{ vem } z = 4 \;\therefore\; A(0, 0, 4) \in \pi$$

$$x = 1 \text{ e } y = 0, \text{ vem } z = 6 \;\therefore\; B(1, 0, 6) \in \pi$$

$$x = 0 \text{ e } y = 1, \text{ vem } z = 3 \;\therefore\; C(0, 1, 3) \in \pi$$

Como $\overrightarrow{AB} = (1,0,2)$ e $\overrightarrow{AC} = (0,1,-1)$ são vetores diretores de π, as equações

$$\begin{cases} x = 0 + 1 \cdot h + 0 \cdot t \\ y = 0 + 0 \cdot h + 1 \cdot t \\ z = 4 + 2 \cdot h - 1 \cdot t \end{cases} \quad \text{ou} \quad \begin{cases} x = h \\ y = t \\ z = 4 + 2h - t \end{cases}$$

são equações paramétricas de π.

Observações

a) Como é possível encontrar infinitos ternos A, B e C de pontos não alinhados em π, existem infinitos sistemas de equações paramétricas que representam o *mesmo* plano.

b) É importante que os vetores diretores sejam não paralelos. Se ocorrer $\overrightarrow{AB} \parallel \overrightarrow{AC}$, basta trocar um dos pontos de modo a garantir $\overrightarrow{AB}$ e $\overrightarrow{AC}$ não paralelos.

c) Outra maneira de obter equações paramétricas, a partir da equação geral, é substituir duas das variáveis pelos parâmetros h e t e, posteriormente, isolar a terceira variável em função destes. Por exemplo, se na equação geral $2x - y - z + 4 = 0$, fizermos $y = h$ e $z = t$, teremos $2x - h - t + 4 = 0$. Isolando x, resulta $x = -2 + \frac{1}{2}h + \frac{1}{2}t$.

Então,

$$\begin{cases} x = -2 + \frac{1}{2}h + \frac{1}{2}t \\ y = h \\ z = t \end{cases}$$

são equações paramétricas do plano.

De modo análogo obteríamos outros sistemas:

$$\begin{cases} x = h \\ y = t \\ z = 4 + 2h - t \end{cases} \quad \text{e} \quad \begin{cases} x = h \\ y = 4 + 2h - t \\ z = t \end{cases}$$

4. Determinar uma equação geral do plano π que contém as retas

$$r_1: \begin{cases} y = x + 1 \\ z = -3x - 2 \end{cases} \quad \text{e} \quad r_2: \begin{cases} x = 2t \\ y = 2t + 3 \\ z = -6t + 1 \end{cases}$$

Solução

Observemos que as direções das retas são dadas pelos vetores $\vec{v}_1 = (1,1,-3)$ e $\vec{v}_2 = (2,2,-6)$. Como $\vec{v}_2 = 2\vec{v}_1$, as retas r_1 e r_2 são paralelas e os vetores $\vec{v}_1$ e $\vec{v}_2$ *não* são vetores diretores do plano procurado. Tendo em vista que os pontos $A_1(0,1,-2) \in r_1$ e $A_2(0,3,1) \in r_2$ também pertencem a π, o vetor $\overrightarrow{A_1A_2} = (0,2,3)$ está representado neste plano. Então, $\vec{v}_1$ e $\overrightarrow{A_1A_2}$ (ou $\vec{v}_2$ e $\overrightarrow{A_1A_2}$) são vetores diretores de π e um de seus vetores normais (Figura 6.7) será

$$\vec{n} = \vec{v}_1 \times \overrightarrow{A_1A_2} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 1 & 1 & -3 \\ 0 & 2 & 3 \end{vmatrix} = (9,-3,2)$$

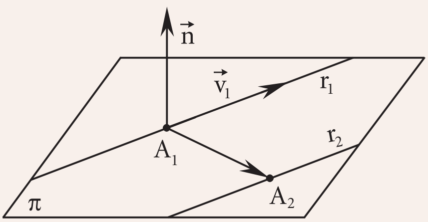

Figura 6.7

Portanto, uma equação geral de π é da forma

$$9x - 3y + 2z + d = 0$$

e, como $A_1 \in \pi$, tem-se

$$9(0) - 3(1) + 2(-2) + d = 0$$

e $d = 7$; logo,

$$\pi: 9x - 3y + 2z + 7 = 0$$

EQUAÇÃO VETORIAL DE UM PARALELOGRAMO

Dados os pontos A, B e C não em linha reta, os vetores $\overrightarrow{AB}$ e $\overrightarrow{AC}$ determinam o paralelogramo (Figura 6.8) cuja equação vetorial é

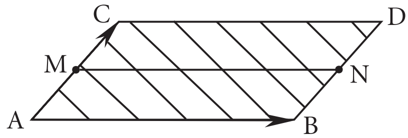

Figura 6.8

$$P = A + h(\overrightarrow{AB}) + t(\overrightarrow{AC})$$

ou

$$P = A + h(B - A) + t(C - A) \text{ com } h, t \in [0, 1]$$

em que P representa um ponto qualquer deste paralelogramo.

Observemos que

para $h = t = 0$, obtém-se o ponto A $(P = A)$

para $h = 1$ e $t = 0$, obtém-se o ponto B $(P = B)$

para $h = 0$ e $t = 1$, obtém-se o ponto C $(P = C)$

para $h = t = 1$, obtém-se o ponto D $(P = D)$

para $t = \frac{1}{2}$ e $h \in [0,1]$, obtém-se o segmento MN, onde M e N são pontos médios de AC e BD, respectivamente, e assim por diante

para h e t entre 0 e 1, obtêm-se todos os pontos do paralelogramo.

CASOS PARTICULARES DA EQUAÇÃO GERAL DO PLANO

Caso um ou mais coeficientes da equação geral do plano $ax + by + cz + d = 0$ seja nulo, o plano ocupará uma posição particular em relação aos eixos ou planos coordenados.

Analisaremos os diversos casos a partir de uma equação completa $ax + by + cz + d = 0$. Por exemplo

$$3x + 4y + 2z - 12 = 0 \qquad \textbf{(4)}$$

em que $a = 3$, $b = 4$, $c = 2$ e $d = -12$. O plano que essa equação representa intercepta os três eixos coordenados em $(4, 0, 0)$, $(0, 3, 0)$ e $(0, 0, 6)$ (Figura 6.9).

1º) Se $d = 0$, a equação **(4)** seria

$$3x + 4y + 2z = 0$$

e representaria um plano paralelo ao da Figura 6.9, porém, passando pela origem O(0, 0, 0), pois as coordenadas deste ponto verificam a equação:

$$3(0) + 4(0) + 2(0) = 0$$

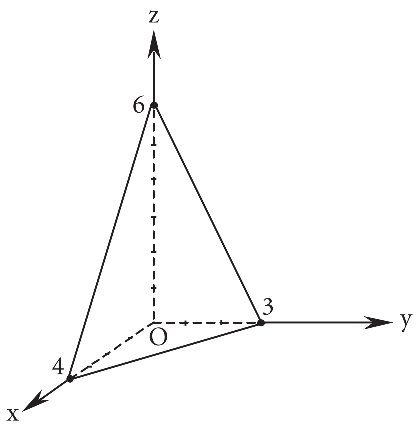

Figura 6.9

2º) Se a = 0, a equação **(4)** seria

$$4y + 2z - 12 = 0 \text{ (ou: } 0x + 4y + 2z - 12 = 0) \qquad \textbf{(5)}$$

e representaria um plano paralelo ao eixo x, interceptando os outros dois eixos ainda em (0, 3, 0) e (0, 0, 6) (Figura 6.10).

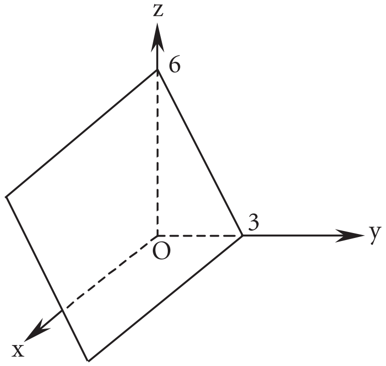

Figura 6.10

Observemos, ainda, que nenhum ponto do tipo (x, 0, 0) satisfaz a equação **(5)**, pois

$$0(x) + 4(0) + 2(0) - 12 = 0 \text{ é falso.}$$

Ora, se nenhum ponto do eixo dos x verifica a equação **(5)**, significa que o plano não tem ponto em comum com esse eixo e, portanto, só pode ser paralelo a ele.

Dessa análise ainda se conclui que o plano é paralelo ao eixo da variável ausente na equação.

Se em **(5)** d = 0, a equação resultante

$$4y + 2z = 0$$

representa um plano pela origem, e, portanto, contém o eixo Ox (Figura 6.11).

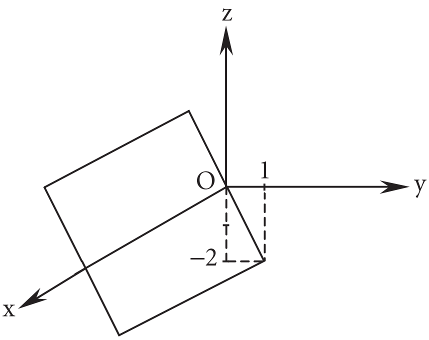

Figura 6.11

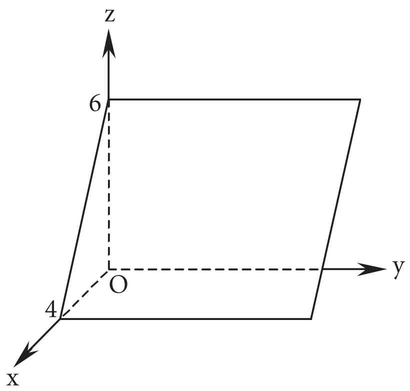

Figura 6.12

Comentários idênticos faríamos para os casos b = 0 ou c = 0, quando a equação **(4)** seria

$$3x + 2z - 12 = 0 \text{ (Figura 6.12)}$$

ou

$$3x + 4y - 12 = 0 \text{ (Figura 6.13)}$$

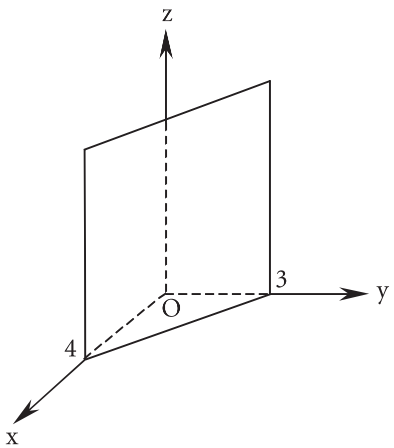

Figura 6.13

3º) Se a = b = 0, a equação **(4)** seria

$$2z - 12 = 0 \text{ (ou: } 0x + 0y + 2z - 12 = 0) \qquad \textbf{(6)}$$

ou, simplesmente,

$$z = 6$$

Observemos que todos os pontos do tipo (x, y, 6) verificam a equação **(6)**. Ora, se todos os pontos deste plano têm cota 6, significa que todos estão 6 unidades afastados do plano xOy. Portanto, trata-se de um plano paralelo a xOy e que intercepta o eixo Oz perpendicularmente em (0, 0, 6).

Assim, concluímos que toda equação de forma

$$z = k$$

representa plano paralelo ao plano xOy e intercepta o eixo Oz em (0, 0, k).

Na Figura 6.14 estão representados os planos de equação z = 6 e z = 0 (plano xOy).

Raciocínio análogo leva-nos a concluir que

y = k representa plano paralelo a xOz e

x = k representa plano paralelo a yOz.

Na Figura 6.15 estão representados os planos de equação y = 3 e y = 0 (plano xOz), e na Figura 6.16 os planos de equação x = 4 e x = 0 (plano yOz).

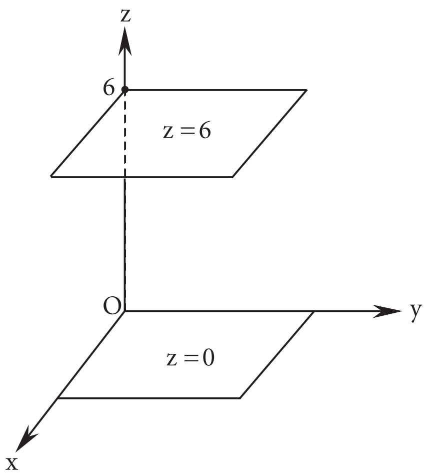

Figura 6.14

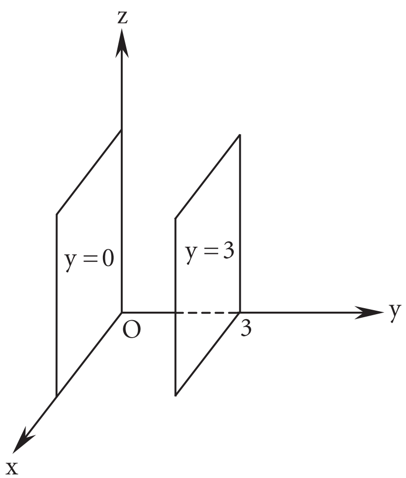

Figura 6.15

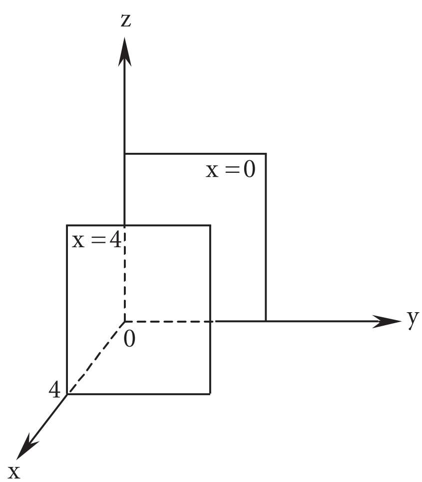

Figura 6.16

ÂNGULO DE DOIS PLANOS

Sejam os planos π_1 e π_2 com vetores normais $\vec{n}_1$ e $\vec{n}_2$, respectivamente (Figura 6.17).

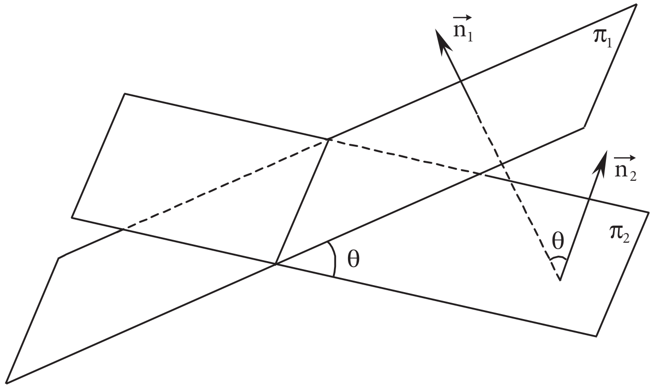

Figura 6.17

Chama-se ângulo de dois planos π_1 e π_2 o menor ângulo que um vetor normal a π_1 forma com um vetor normal a π_2. Sendo θ esse ângulo, tem-se

$$\cos\theta = \frac{|\vec{n}_1 \cdot \vec{n}_2|}{|\vec{n}_1||\vec{n}_2|}, \text{ com } 0 \le \theta \le \frac{\pi}{2} \qquad \textbf{(7)}$$

Como $\cos\theta \ge 0$ quando $0 \le \theta \le \frac{\pi}{2}$, o numerador de **(7)** deve ser positivo, razão pela qual tomou-se o produto escalar em módulo, pois este poderá ser negativo quando o ângulo entre os vetores for o suplementar de θ.

Exemplo

Determinar o ângulo entre os planos

$$\pi_1\colon 2x + y - z + 3 = 0 \qquad \text{e} \qquad \pi_2\colon x + y - 4 = 0$$

Solução

Sendo $\vec{n}_1 = (2,1,-1)$ e $\vec{n}_2 = (1,1,0)$ vetores normais a π_1 e π_2, de acordo com **(7)** tem-se

$$\cos\theta = \frac{|(2,1,-1)\cdot(1,1,0)|}{\sqrt{2^2+1^2+(-1)^2}\ \sqrt{1^2+1^2}} = \frac{|2+1+0|}{\sqrt{6}\sqrt{2}} = \frac{3}{\sqrt{12}} = \frac{3}{2\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

Logo,

$$\theta = \arccos\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = \frac{\pi}{6}$$

PLANOS PERPENDICULARES

Consideremos dois planos π_1 e π_2, e sejam $\vec{n}_1$ e $\vec{n}_2$ vetores normais a π_1 e π_2, respectivamente. Pela Figura 6.18 conclui-se que:

$$\pi_1 \perp \pi_2 \Leftrightarrow \vec{n}_1 \perp \vec{n}_2 \Leftrightarrow \vec{n}_1 \cdot \vec{n}_2 = 0$$

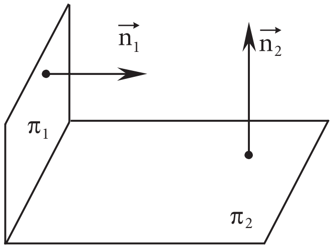

Figura 6.18

Exemplo

Verificar se π_1 e π_2 são planos perpendiculares:

a) π_1: $3x + y - 4z + 2 = 0$ e π_2: $2x + 6y + 3z = 0$

b) π_1: $x + y - 4 = 0$ e $\pi_2 : \begin{cases} x = 2 - h + 2t \\ y = h + t \\ z = t \end{cases}$

Solução

a) Sendo $\vec{n}_1 = (3,1,-4)$ e $\vec{n}_2 = (2,6,3)$ vetores normais a π_1 e π_2, respectivamente, e como $\vec{n}_1 \cdot \vec{n}_2 = 3(2) + 1(6) - 4(3) = 0$, conclui-se que π_1 e π_2 são perpendiculares.

b) O vetor $\vec{n}_1 = (1,1,0)$ é um vetor normal a π_1. Teremos de encontrar um vetor $\vec{n}_2$ normal a π_2. Como $\vec{u} = (-1,1,0)$ e $\vec{v} = (2,1,1)$ são vetores diretores de π_2, podemos considerar

$$\vec{n}_2 = \vec{u} \times \vec{v} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ -1 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 1 \end{vmatrix} = (1,1,-3)$$

Tendo em vista que

$$\vec{n}_1 \cdot \vec{n}_2 = (1,1,0) \cdot (1,1,-3) = 1(1) + 1(1) + 0(-3) = 2 \neq 0$$

os planos π_1 e π_2 não são perpendiculares.

PARALELISMO E PERPENDICULARISMO ENTRE RETA E PLANO

Seja uma reta r com a direção do vetor $\vec{v}$ e um plano π, sendo $\vec{n}$ um vetor normal a π. Pelas figuras conclui-se que:

$r \parallel \pi \Leftrightarrow \vec{v} \perp \vec{n} \Leftrightarrow \vec{v} \cdot \vec{n} = 0$ **Figura 6.19** (a)

$r \perp \pi \Leftrightarrow \vec{v} \parallel \vec{n} \Leftrightarrow \vec{v} = \alpha\vec{n}$ **Figura 6.19** (b)

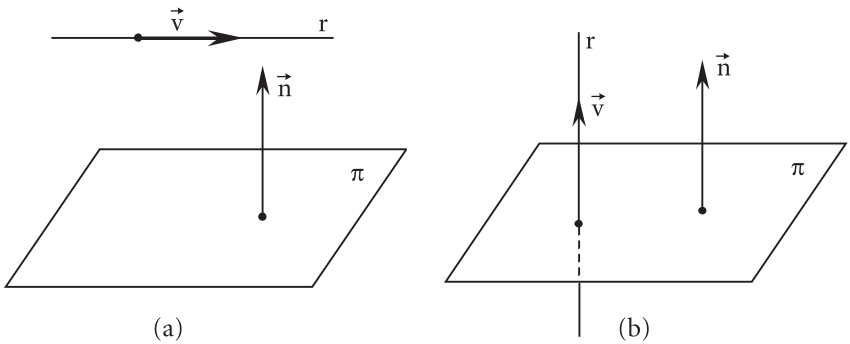

Figura 6.19

Exemplo

A reta $r: \begin{cases} x = 1 + 2t \\ y = -3t \\ z = t \end{cases}$ é paralela ao plano π: $5x + 2y - 4z - 1 = 0$, pois o vetor diretor $\vec{v} = (2,-3,1)$ de r é ortogonal ao vetor normal $\vec{n} = (5,2,-4)$ de π, ou seja,

$$\vec{v} \cdot \vec{n} = (2,-3,1) \cdot (5,2,-4) = 2(5) - 3(2) + 1(-4) = 0$$

Essa mesma reta, por sua vez, é perpendicular ao plano π_1: $4x - 6y + 2z - 5 = 0$, pois o vetor diretor $\vec{v} = (2,-3,1)$ de r é paralelo ao vetor normal $\vec{n}_1 = (4,-6,2)$ de π_1, ou seja,

$$\vec{v} = \frac{1}{2}\vec{n_1}$$

ou, de modo equivalente,

$$\frac{2}{4} = \frac{-3}{-6} = \frac{1}{2}$$

RETA CONTIDA EM UM PLANO

Uma reta r está contida no plano π (Figura 6.20) se

I) dois pontos A e B de r forem também de π ou

II) $\vec{v}\cdot\vec{n}=0$, em que $\vec{v}$ é um vetor diretor de r e $\vec{n}$ um vetor normal a π e $A \in \pi$, sendo $A \in r$.

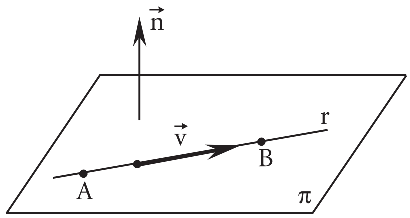

Figura 6.20

Exemplo

Determinar os valores de m e n para que a reta

$$r: \begin{cases} x = 3 + t \\ y = -1 - t \\ z = -2 - t \end{cases}$$

esteja contida no plano π: $2x + my + nz - 5 = 0$.

Solução

Utilizando o primeiro critério exposto anteriormente, sejam A(3, −1, −2) e B(4, −2, −3) os pontos de r. Como $r \subset \pi$, as coordenadas de A e B devem satisfazer a equação de π, ou seja,

$$\begin{cases} 2(3) + m(-1) + n(-2) - 5 = 0 \\ 2(4) + m(-2) + n(-3) - 5 = 0 \end{cases} \quad \text{ou} \quad \begin{cases} -m - 2n + 1 = 0 \\ -2m - 3n + 3 = 0 \end{cases}$$

de onde m = 3 e n = −1.

INTERSEÇÃO DE DOIS PLANOS

Sejam os planos não paralelos

$$\pi_1: 5x - y + z - 5 = 0 \qquad \text{e} \qquad \pi_2: x + y + 2z - 7 = 0$$

A interseção de dois planos não paralelos é uma reta r cujas equações se deseja determinar. Para tanto, entre os vários procedimentos, apresentaremos dois.

1) Como r está contida nos dois planos, as coordenadas de qualquer ponto $(x,y,z) \in r$ devem satisfazer, simultaneamente, as equações dos dois planos. Logo, os pontos de r constituem a solução do sistema:

$$r:\begin{cases} 5x-y+z-5=0 \\ x+y+2z-7=0 \end{cases} \qquad \textbf{(8)}$$

O sistema tem infinitas soluções (são os infinitos pontos de r) e, em termos de x, sua solução é

$$r:\begin{cases} y=3x-1 \\ z=-2x+4 \end{cases}$$

que são equações reduzidas de r.

2) Outra maneira de obter equações de r é determinar um de seus pontos e um vetor diretor.

Por exemplo, determinar o ponto $A \in r$ que tem abscissa zero. Então, fazendo $x = 0$ nas equações do sistema **(8)**, resulta o sistema

$$\begin{cases} -y+z-5=0 \\ y+2z-7=0 \end{cases}$$

cuja solução é $y = -1$ e $z = 4$. Logo, $A(0,-1,4)$.

Como um vetor diretor $\vec{v}$ de r é simultaneamente ortogonal a $\vec{n}_1=(5,-1,1)$ e $\vec{n}_2=(1,1,2)$, normais aos planos π_1 e π_2, respectivamente (Figura 6.21), o vetor $\vec{v}$ pode ser dado por

$$\vec{v}=\vec{n}_1\times\vec{n}_2=\begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 5 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{vmatrix}=(-3,-9,6)$$

ou também $-\dfrac{1}{3}(-3,-9,6)=(1,3,-2)$

Escrevendo equações paramétricas de r, temos

$$r:\begin{cases} x=t \\ y=-1+3t \\ z=4-2t \end{cases}$$

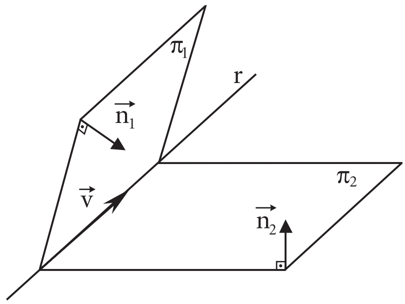

Figura 6.21

INTERSEÇÃO DE RETA COM PLANO

Exemplos

1. Determinar o ponto de interseção da reta r com o plano π, em que

$$r:\begin{cases} x=-1+2t \\ y=5+3t \\ z=3-t \end{cases} \quad \text{e} \quad \pi: 2x-y+3z-4=0$$

Solução

Qualquer ponto de r é da forma $(x, y, z) = (-1 + 2t, 5 + 3t, 3 - t)$. Se um deles é comum com o plano π, suas coordenadas verificam a equação de π

$$2(-1 + 2t) - (5 + 3t) + 3(3 - t) - 4 = 0$$

e daí resulta $t = -1$.

Substituindo esse valor nas equações de r obtém-se

$$x = -1 + 2(-1) = -3 \qquad y = 5 + 3(-1) = 2 \qquad z = 3 - (-1) = 4$$

Logo, a interseção de r e π é o ponto $(-3, 2, 4)$.

2. Determinar a interseção da reta

$$r:\begin{cases} x-2y-2z+2=0 \\ 2x+y-z=0 \end{cases} \qquad \text{com o plano } \pi: x + 3y + z - 2 = 0$$

Solução

Se existir um ponto $I(x, y, z) \in r$ que também pertence a π, suas coordenadas devem verificar as equações dos três planos dados. Logo, I será a solução do sistema

$$\begin{cases} x-2y-2z+2=0 \\ 2x+y-z=0 \\ x+3y+z-2=0 \end{cases}$$

Resolvendo o sistema, obtém-se $x = 2$, $y = -1$ e $z = 3$. Logo, $I(2, -1, 3)$ é a interseção de r e π, ou seja, é a interseção dos três planos.

Problemas propostos

Os Problemas 1 a 48 estão de acordo com a ordem do texto, e os demais se constituem ótimo reforço.

1. Seja o plano

$$\pi: 3x + y - z - 4 = 0$$

Calcular:

a) o ponto de π que tem abscissa 1 e ordenada 3;

b) o ponto de π que tem abscissa 0 e cota 2;

c) o valor de k para que o ponto P(k, 2, k – 1) pertença a π;

d) o ponto de abscissa 2 e cuja ordenada é o dobro da cota;

e) o valor de k para que o plano π_1: $kx - 4y + 4z - 7 = 0$ seja paralelo a π.

Nos Problemas 2 a 4, determinar uma equação geral do plano

2. Paralelo ao plano π: $2x-3y-z+5=0$ e que contenha o ponto A(4,–2,1).

3. Perpendicular à reta

$$r: \begin{cases} x = 2 + 2t \\ y = 1 - 3t \\ z = 4t \end{cases}$$

e que contenha o ponto A(–1, 2, 3).

4. Que passa pelo ponto médio do segmento de extremos A(5,–1,4) e B(–1,–7,1) e é perpendicular a ele.

5. Dada a equação geral do plano π: $3x - 2y - z - 6 = 0$, determinar um sistema de equações paramétricas de π.

6. Sendo

$$\begin{cases} x = 1 + h - 2t \\ y = 1 - t \\ z = 4 + 2h - 2t \end{cases}$$

equações paramétricas de um plano π, obter uma equação geral.

Nos Problemas 7 a 11, escrever uma equação geral e um sistema de equações paramétricas do plano determinado pelos pontos:

7. A(1, 0, 2), B(–1, 2, –1) e C(1, 1, –1).

8. A(0, 0, 0), B(1, 1, 5) e C(–1, 1, 1).

9. A(2, 0, –1), B(–2, 6, 3) e C(0, 3, 4).

10. $A(2, 1, 0)$, $B(-4, -2, -1)$ e $C(0, 0, 1)$.

11. $A(2, 1, 3)$, $B(-3, -1, 3)$ e $C(4, 2, 3)$.

12. Determinar o valor de α para que os pontos $A(\alpha, 1, 9)$, $B(2, 3, 4)$, $C(-4, -1, 6)$ e $D(0, 2, 4)$ sejam coplanares.

Nos Problemas 13 a 18, determinar uma equação geral do plano nos seguintes casos:

13. O plano passa por $A(2, 0, -2)$ e é paralelo aos vetores $\vec{u}=\vec{i}-\vec{j}+\vec{k}$ e $\vec{v}=2\vec{i}+3\vec{j}$.

14. O plano passa pelos pontos $A(-3, 1, -2)$ e $B(-1, 2, 1)$ e é paralelo à reta

$$r: \frac{x}{2}=\frac{z}{-3};\ y=4$$

15. O plano contém os pontos $A(1, -2, 2)$ e $B(-3, 1, -2)$ e é perpendicular ao plano

$$\pi_1: 2x + y - z + 8 = 0$$

16. O plano contém os pontos $A(2, 1, 2)$ e $B(1, -1, 4)$ e é perpendicular ao plano xOy.

17. O plano contém a reta

$$r: \begin{cases} x=2+t \\ y=1-t \\ z=3+2t \end{cases}$$

e é perpendicular ao plano $\pi_1: 2x + 2y - 3z = 0$.

18. O plano contém o ponto $A(4, 1, 1)$ e é perpendicular aos planos $\pi_1: 2x + y - 3z = 0$ e $\pi_2: x + y - 2z - 3 = 0$.

Nos Problemas 19 a 22, os pares de retas r_1 e r_2 são paralelas ou concorrentes. Encontrar uma equação geral do plano que as contém.

19. $r_1: \begin{cases} y=2x-3 \\ z=-x+2 \end{cases}$ e $r_2: \begin{cases} \dfrac{x-1}{3}=\dfrac{z-1}{-1} \\ y=-1 \end{cases}$

20. $r_1: \begin{cases} x=1+2t \\ y=-2+3t \\ z=3-t \end{cases}$ e $r_2: \begin{cases} x=1-2t \\ y=-2-t \\ z=3+2t \end{cases}$

21. $r_1: \begin{cases} x=-2+t \\ y=-t \\ z=-3 \end{cases}$ e $r_2: \begin{cases} y=-x-1 \\ z=3 \end{cases}$

22. $r_1: \begin{cases} x = z \\ y = -3 \end{cases}$ e $r_2: \begin{cases} x = -t \\ y = 1 \\ z = 2 - t \end{cases}$

Nos Problemas 23 e 24, determinar uma equação geral do plano que contenha o ponto e a reta dados:

23. A(4, 3, 2) e $r: \begin{cases} x = t \\ y = 2 - t \\ z = 3 + 2t \end{cases}$

24. A(1, –1, 2) e o eixo dos z

Nos Problemas 25 a 30, obter uma equação geral do plano:

25. paralelo ao eixo z e que contenha os pontos A(0, 3, 4) e B(2, 0, –2).

26. paralelo ao eixo x e que contenha os pontos A(–2, 0, 2) e B(0, –2, 1).

27. paralelo ao eixo y e que contenha os pontos A(2, 3, 0) e B(0, 4, 1).

28. paralelo ao plano xOy e que contenha o ponto A(5, –2, 3).

29. perpendicular ao eixo y e que contenha o ponto A(3, 4, –1).

30. que contenha o ponto A(1, –2, 1) e o eixo x.

31. Representar graficamente os planos de equações:

a) $3x + 4y + 2z - 12 = 0$

b) $6x + 4y - 3z - 12 = 0$

c) $x + y - 3 = 0$

d) $2x + 3y - 6 = 0$

e) $3y + 4z + 12 = 0$

f) $2z - 5 = 0$

g) $y + 4 = 0$

h) $2x - y = 0$

32. Determinar o ângulo entre os seguintes planos:

a) $\pi_1: x - 2y + z - 6 = 0$ e $\pi_2: 2x - y - z + 3 = 0$

b) $\pi_1: x - y + 4 = 0$ e $\pi_2: 2x - y - z = 0$

c) $\pi_1: x + 2y - 6 = 0$ e $\pi_2: y = 0$

d) $\pi_1: \begin{cases} x = 1 + h - t \\ y = h + 2t \\ z = h \end{cases}$ e $\pi_2: \begin{cases} x = 2 + t \\ y = -2h \\ z = h + t \end{cases}$

33. Determinar o valor de m para que seja de 30° o ângulo entre os planos

$$\pi_1: x + my + 2z - 7 = 0 \quad \text{e} \quad \pi_2: 4x + 5y + 3z + 2 = 0$$

34. Determinar m de modo que os planos π_1 e π_2 sejam perpendiculares:

a) $\pi_1: mx + y - 3z - 1 = 0$ e $\pi_2: 2x - 3my + 4z + 1 = 0$

b) $\pi_1: \begin{cases} x = 2 - h + 2t \\ y = 2h + 3 \\ z = t - 2h + 1 \end{cases}$ e π_2: $2mx + 4y - z - 1 = 0$

35. Dados a reta r e o plano π, determinar o valor de m para que se tenha $r // \pi$ e $r \perp \pi$, nos casos:

a) r: $x = -3 + t$ $y = -1 + 2t$ $z = 4t$ e π: $mx - y - 2z - 3 = 0$

b) r: $(x, y, z) = (1, 2, 0) + t(2, m, -1)$ e π: $3x + 2y + mz = 0$

36. Verificar se a reta r está contida no plano π:

a) $r: \begin{cases} y = 4x + 1 \\ z = 2x - 1 \end{cases}$ e π: $2x + y - 3z - 4 = 0$

b) $r: x - 2 = \dfrac{y+2}{2} = z + 3$ e $\pi: \begin{cases} x = h + t \\ y = -1 + 2h - 3t \\ z = -3 + h - t \end{cases}$

Nos Problemas 37 a 39, calcular os valores de m e n para que a reta r esteja contida no plano π:

37. $r: \begin{cases} x = -2 + t \\ y = 3 - 2t \\ z = 2t \end{cases}$ e π: $mx + 2y - 3z + n = 0$

38. $r: \begin{cases} y = 2x - 1 \\ z = -x + m \end{cases}$ e π: $5x - ny + z + 2 = 0$

39. $r: \begin{cases} x = 1 + 3t \\ y = -2 + mt \\ z = n - 4t \end{cases}$ e π: $3x - 3y + z - 7 = 0$

Nos Problemas 40 a 42,estabelecer equações reduzidas na variável x da reta de interseção dos planos:

40. π_1: $3x - y + 2z - 1 = 0$ e π_2: $x + 2y - 3z - 4 = 0$

41. π_1: $3x - 2y - z - 1 = 0$ e π_2: $x + 2y - z - 7 = 0$

42. π_1: $x + y - z + 2 = 0$ e π_2: $x + y + 2z - 1 = 0$

Nos Problemas 43 e 44,encontrar equações paramétricas da reta de interseção dos planos:

43. π_1: $3x + y - 3z - 5 = 0$ e π_2: $x - y - z - 3 = 0$

44. π_1: $2x + y - 4 = 0$ e π_2: $z = 5$

Nos Problemas 45 a 47, determinar o ponto de interseção da reta r com o plano π.

45. r: $x = 3t$, $y = 1 - 2t$, $z = -t$ e π: $2x + 3y - 2z - 7 = 0$

46. $r: \begin{cases} y = x - 10 \\ z = -x + 1 \end{cases}$ e $\pi: 2x - y + 3z - 9 = 0$

47. $r: \begin{cases} x = 4 + k \\ y = 3 + 2k \\ z = -2 - 3k \end{cases}$ e $\pi: \begin{cases} x = 2 + h + 2t \\ y = -3 - h - t \\ z = 1 + 3h - 3t \end{cases}$

48. Sejam a reta r e o plano π dado por

$$r: \begin{cases} y = 2x - 3 \\ z = -x + 2 \end{cases} \quad \text{e} \quad \pi: 2x + 4y - z - 4 = 0$$

Determinar:

a) o ponto de interseção de r com o plano xOz;

b) o ponto de interseção de r com π;

c) equações da reta interseção de π com o plano xOy.

49. Dado o ponto P(5, 2, 3) e o plano π: 2x + y + z − 3 = 0, determinar:

a) equações paramétricas da reta que passa por P e é perpendicular a π;

b) a projeção ortogonal de P sobre o plano π;

c) o ponto P′ simétrico de P em relação a π;

d) a distância de P ao plano π.

50. Determinar equações reduzidas na variável x da reta que passa pelo ponto A(3, −2, 4) e é perpendicular ao plano π: x − 3y + 2z − 5 = 0.

51. Obter equações paramétricas das retas nos casos em que

a) a reta passa por A(−1, 0, 2) e é paralela a cada um dos planos π_1: 2x + y + z + 1 = 0 e π_2: x − 3y − z −5 = 0;

b) a reta passa pela origem, é ortogonal à reta r: 2x = y = 3z e paralela ao plano π: x − y − z + 2 = 0.

52. Escrever uma equação geral do plano que passa por A(−1, 2, −1) e é paralelo a cada uma das retas r_1: y = x, z = 1 − 3x e r_2: 2x = y = 3z.

53. Encontrar equações paramétricas da reta r que passa por A, é paralela ao plano π e concorrente com a reta s, nos casos:

a) A(2, 1, −4), π: x − y + 3z − 5 = 0, s: x = 1 + 3t, y = 3 − t, z = −2 − 2t

b) A(3, −2, −4), π: 3x − 2y − 3z + 5 = 0, s: x = 2 + t, y = −4 − 2t, z = 1 + 3t

Determinar ainda o ponto de interseção entre r e s.

54. Dada a reta r: x = 3 + t, y = 1 − 2t e z = −1 + 2t, determinar equações reduzidas das projeções de r sobre os planos xOy e xOz.

55. Encontrar equações paramétricas da reta que passa por $A(3, 6, 4)$, intercepta o eixo Oz e é paralela ao plano $\pi: x - 3y + 5z - 6 = 0$.

Nos problemas 56 a 62 apresentar uma equação geral dos planos em que

56. O plano passa por $A(-1, 2, -4)$ e é perpendicular aos planos $\pi_1 : x + z = 2$ e $\pi_2 : y - z = 0$.

57. O plano que intercepta os eixos coordenados nos pontos de abscissa, ordenada e cota iguais a -3, 6 e -5, respectivamente.

58. O plano passa por $A(1,-3,4)$ e intercepta os três semi-eixos de mesmo sinal a igual distância à origem do sistema.

59. O plano paralelo ao eixo z que intercepta o eixo x em -3 e o y em 4.

60. O plano paralelo ao plano xOz e que intercepta o eixo y em -7.

61. O plano passa pela origem e é paralelo às retas r_1: $y = -x$, $z = 2$ e r_2: $(x, y, z) = (2, -1, 4) + t(1, 3, -3)$.

62. O plano passa por $A(-1, 2, 5)$ e é perpendicular à interseção dos planos π_1: $2x - y + 3z - 4 = 0$ e π_2: $x + 2y - 4z + 1 = 0$.

63. Estabelecer equações dos planos bissetores dos ângulos formados pelos planos xOz e yOz.

64. Calcular os valores de m e n para que a reta r esteja contida no plano π:

a) $r: x = 2 - 2t,\ y = -1 - t,\ z = 3$ e $\pi : 2mx - ny - z + 4 = 0$

b) $r: (x, y, z) = t(2, m, n) + (n, 2, 0)$ e $\pi : x - 3y + z = 1$

65. Calcular k de modo que a reta determinada por $A(1, -1, 0)$ e $B(k, 1, 2)$ seja paralela ao plano $\pi: x = 1 + 3h,\ y = 1 + 2h + t,\ z = 3 + 3t$.

Nos Problemas 66 e 67, obter uma equação geral do plano que contenha o ponto e a reta dados:

66. $A(3, -2, -1)$ e $r: \begin{cases} x + 2y + z - 1 = 0 \\ 2x + y - z + 7 = 0 \end{cases}$

67. $A(1, 2, 1)$ e a reta interseção do plano $x - 2y + z - 3 = 0$ com o plano yOz.

68. Mostrar que as retas

$$r_1: \begin{cases} 3x - y - z = 0 \\ 8x - 2y - 3z + 1 = 0 \end{cases} \quad \text{e} \quad r_2: \begin{cases} x - 3y + z + 3 = 0 \\ 3x - y - z + 5 = 0 \end{cases}$$

são paralelas e encontrar uma equação geral do plano determinado por essas retas.

69. Determinar o ponto P de interseção dos planos $2x - y + z - 8 = 0$, $x + 2y - 2z + 6 = 0$ e $3x - z - 3 = 0$ e uma equação geral do plano determinado por P e pela reta $r: x = y,\ z = 2y$.

70. Dadas as retas r_1: $y = -2x$, $z = x$ e r_2: $x = 2 - t$, $y = -1 + t$, $z = 4 - 2t$, determinar:

a) o ponto P′ simétrico de P(1, 0, 5) em relação à reta r_1;

b) o ponto O′ simétrico de O(0, 0, 0) em relação à reta r_2.

71. Encontrar o ponto N, projeção ortogonal do ponto P(3, −1, −4) no plano determinado pelos pontos A(2, −2, 3), B(4, −3, −2) e C(0, −4, 5). Qual é o ponto simétrico de P em relação a esse plano?

72. O plano π: $3x + 2y + 4z - 12 = 0$ intercepta os eixos cartesianos nos pontos A, B e C. Calcular:

a) a área do triângulo ABC;

b) a altura desse triângulo relativa à base que está no plano xOz;

c) o volume do tetraedro limitado pelo plano π e pelos planos coordenados.

Respostas de problemas propostos

1. **a)** (1, 3, 2)

b) (0, 6, 2)

c) $k = \frac{1}{2}$

d) (2, −4, −2)

e) $k = -12$

2. $2x - 3y - z - 13 = 0$

3. $2x - 3y + 4z - 4 = 0$

4. $4x + 4y + 2z + 3 = 0$

5. Um deles é: $x = t$, $y = h$, $z = -6 + 3h - 2t$. Existem infinitos.

6. $2x - 2y - z + 4 = 0$

7. $3x + 6y + 2z - 7 = 0$ e $\begin{cases} x = 1 - 2h \\ y = 2h + t \\ z = 2 - 3h - 3t \end{cases}$

8. $2x + 3y - z = 0$ e $\begin{cases} x = h - t \\ y = h + t \\ z = 5h + t \end{cases}$

9. $3x + 2y - 6 = 0$ e $\begin{cases} x = 2 - 4h - 2t \\ y = 6h + 3t \\ z = -1 + 4h + 5t \end{cases}$

10. $x - 2y = 0$ e $\begin{cases} x = 2 - 6h - 2t \\ y = 1 - 3h - t \\ z = -h + t \end{cases}$

11. $z - 3 = 0$ e $\begin{cases} x = 2 - 5h + 2t \\ y = 1 - 2h + t \\ z = 3 \end{cases}$

12. $\alpha = 3$

13. $3x - 2y - 5z - 16 = 0$

14. $3x - 12y + 2z + 25 = 0$

15. $x - 12y - 10z - 5 = 0$

16. $2x - y - 3 = 0$

17. $x - 7y - 4z + 17 = 0$

18. $x + y + z - 6 = 0$

19. $x + y + 3z - 3 = 0$

20. $5x - 2y + 4z - 21 = 0$

21. $6x + 6y - z + 9 = 0$

22. $2x + y - 2z + 3 = 0$

23. $x - 9y - 5z + 33 = 0$

24. $x + y = 0$

25. $3x + 2y - 6 = 0$

26. $y - 2z + 4 = 0$

27. $x + 2z - 2 = 0$

28. $z = 3$

29. $y = 4$

30. $y + 2z = 0$

32. **a)** $\dfrac{\pi}{3}$ **c)** $\text{arc cos } \dfrac{2}{\sqrt{5}}$

b) $\dfrac{\pi}{6}$ **d)** $\text{arc cos } \dfrac{3}{\sqrt{14}}$

33. $m = 1$ ou 7

34. **a)** $m = -12$

b) $m = 2$

35. **a)** $m = 10$ e $m = -\frac{1}{2}$ **b)** $m = -6$ e não existe valor para m

36. **a)** sim **b)** sim

37. $m = 10$ e $n = 14$

38. $m = -4$ e $n = 2$

39. $m = \frac{5}{3}$ e $n = -2$

40. $\begin{cases} y = -11x + 11 \\ z = -7x + 6 \end{cases}$

41. $\begin{cases} y = \frac{1}{2}x + \frac{3}{2} \\ z = 2x - 4 \end{cases}$

42. $\begin{cases} y = -x - 1 \\ z = 1 \end{cases}$

43. $\begin{cases} x = t \\ y = -1 \\ z = t - 2 \end{cases}$

44. $\begin{cases} x = t \\ y = 4 - 2t \\ z = 5 \end{cases}$

45. $(6, -3, -2)$

46. $(2, -8, -1)$

47. $(1, -3, 7)$

48. **a)** $(\frac{3}{2}, 0, \frac{1}{2})$ **b)** $(\frac{18}{11}, \frac{3}{11}, \frac{4}{11})$ **c)** $\begin{cases} y = -\frac{1}{2}x + 1 \\ z = 0 \end{cases}$

49. **a)** $x = 5 + 2t, y = 2 + t, \quad z = 3 + t$ **c)** $(-3, -2, -1)$

b) $(1, 0, 1)$ **d)** $2\sqrt{6}$

50. $y = -3x + 7, z = 2x - 2$

51. **a)** $x = 2t - 1, y = 3t, z = -7t + 2$ **b)** $x = 4t, y = -5t, z = 9t$

52. $20x - 11y + 3z + 45 = 0$

53. **a)** $x = 2 + 7t,\ y = 1 + t,\ z = -4 - 2t$ e $(\frac{11}{2}, \frac{3}{2}, -5)$

b) $x = 3 - 2t,\ y = -2 + 3t,\ z = -4 - 4t$ e $(-5, 10, -20)$

54. **a)** $y = -2x + 7, z = 0$ e $z = 2x - 7, y = 0$

55. $x = 3 + t,\ y = 6 + 2t,\ z = 4 + t$

56. $x - y - z - 1 = 0$

57. $10x - 5y + 6z + 30 = 0$

58. $x + y + z - 2 = 0$

59. $4x - 3y + 12 = 0$

60. $y = -7$

61. $3x + 3y + 4z = 0$

62. $2x - 11y - 5z + 49 = 0$

63. $x + y = 0$ e $x - y = 0$

64. **a)** $m = -\frac{1}{8},\ n = -\frac{1}{2}$ **b)** $m = 3,\ n = 7$

65. $k = 3$

66. $2x + 3y + z + 1 = 0$

67. $6x - 2y + z - 3 = 0$

68. $4x + 2y - 3z + 5 = 0$

69. $P(2, -1, 3)$ e $5x + y - 3z = 0$

70. **a)** $P'(1, -4, -3)$ **b)** $O'(\frac{1}{3}, \frac{5}{3}, \frac{2}{3})$

71. $N(5, -2, -3)$ e $(7, -3, -2)$

72. **a)** $3\sqrt{29}$ u.a. **b)** $\frac{6\sqrt{29}}{5}$ u.c. **c)** 12 u.v.

7 DISTÂNCIAS

DISTÂNCIA ENTRE DOIS PONTOS

Dados os pontos $P_1(x_1, y_1, z_1)$ e $P_2(x_2, y_2, z_2)$, a distância *d* entre eles é $|\overrightarrow{P_1P_2}|$.

Como

$$\overrightarrow{P_1P_2} = P_2 - P_1 = (x_2 - x_1, y_2 - y_1, z_2 - z_1)$$

tem-se

$$d(P_1, P_2) = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2} \qquad \textbf{(1)}$$

Exemplo

Calcular a distância entre $P_1(2, -1, 3)$ e $P_2(1, 1, 5)$.

Solução

Como $\overrightarrow{P_1P_2} = P_2 - P_1 = (1,1,5) - (2,-1,3) = (-1,2,2)$, de acordo com **(1)**, tem-se

$$d(P_1, P_2) = \sqrt{(-1)^2 + 2^2 + 2^2} = \sqrt{9} = 3 \text{ u.c. (unidades de comprimento)}$$

DISTÂNCIA DE UM PONTO A UMA RETA

Dado um ponto P do espaço e uma reta r, quer-se calcular a distância d(P, r) de P a r. Consideremos na reta r um ponto A e um vetor diretor $\vec{v}$. Os vetores $\vec{v}$ e $\overrightarrow{AP}$ determinam um paralelogramo cuja altura corresponde à distância d(P, r) (Figura 7.1).

A área A do paralelogramo é dada por

a) $A = (\text{base})(\text{altura}) = |\vec{v}| \cdot d$ ou também por

b) $A = |\vec{v} \times \overrightarrow{AP}|$ (Capítulo 3)

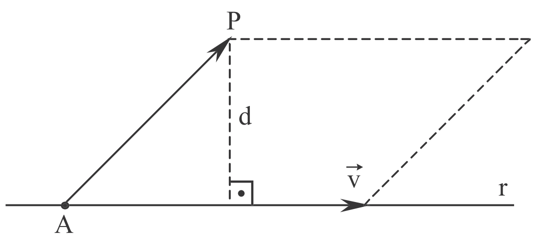

Figura 7.1

Comparando a) e b), vem

$$d = d(P,r) = \frac{|\vec{v} \times \overrightarrow{AP}|}{|\vec{v}|} \qquad \textbf{(2)}$$

Exemplo

Calcular a distância do ponto P(2, 1, 4) à reta

$$r: \begin{cases} x = -1 + 2t \\ y = 2 - t \\ z = 3 - 2t \end{cases}$$

Solução

A reta r passa pelo ponto A(−1, 2, 3) e tem direção do vetor $\vec{v} = (2,-1,-2)$. Seja ainda o vetor $\overrightarrow{AP} = P - A = (3,-1,1)$. Calculemos

$$\vec{v} \times \overrightarrow{AP} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 2 & -1 & -2 \\ 3 & -1 & 1 \end{vmatrix} = (-3,-8,1)$$

De acordo com **(2)**, temos

$$d(P,r) = \frac{|(-3,-8,1)|}{|(2,-1,-2)|} = \frac{\sqrt{(-3)^2 + (-8)^2 + 1^2}}{\sqrt{2^2 + (-1)^2 + (-2)^2}} = \frac{\sqrt{74}}{3} \text{u.c.}$$

Observação

Outra forma de calcular essa distância consiste em:

1) encontrar uma equação geral do plano π que passa por P e é perpendicular à reta r (um vetor normal a π é um vetor diretor de r);
2) determinar o ponto I de interseção de π e r;
3) calcular a distância por $d(P,r) = |\overrightarrow{PI}|$.

A Figura 7.2 ilustra esse procedimento.

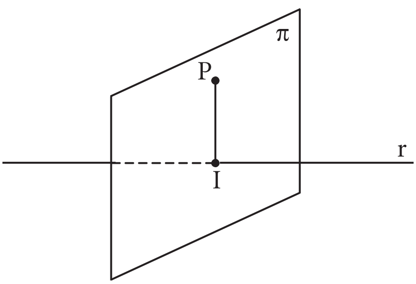

Figura 7.2

DISTÂNCIA DE PONTO A PLANO

Dado um ponto P_0 e um plano π, calcular a distância $d(P_0,\pi)$ de P_0 a π. Seja A um ponto qualquer de π e $\vec{n}$ um vetor normal a π. A Figura 7.3 esclarece que a distância $d(P_0,\pi)$ é o módulo da projeção de $\overrightarrow{AP_0}$ na direção de $\vec{n}$.

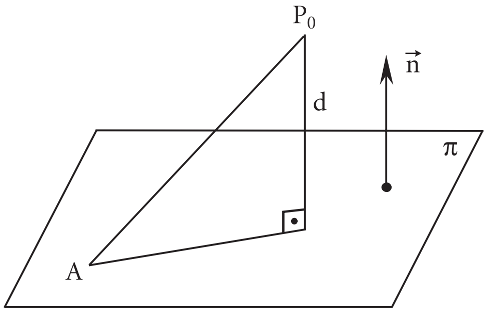

Figura 7.3

De acordo com o Capítulo 2, tem-se

$$d(P_0,\pi) = \left|\text{proj}_{\vec{n}}\,\overrightarrow{AP_0}\right| = \left|\overrightarrow{AP_0}\cdot\frac{\vec{n}}{|\vec{n}|}\right| \qquad \textbf{(3)}$$

Admitindo-se, então, que $P_0(x_0,y_0,z_0)$, $\pi: ax+by+cz+d=0$ e $A(x_1,y_1,z_1)\in\pi$, como

$\overrightarrow{AP_0} = (x_0-x_1, y_0-y_1, z_0-z_1)$ e $\dfrac{\vec{n}}{|\vec{n}|} = \dfrac{(a,b,c)}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}}$ pela fórmula **(3)** vem

$$d(P_0,\pi) = \left|(x_0-x_1,\ y_0-y_1,\ z_0-z_1)\cdot\frac{(a,b,\ c)}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}}\right|$$

$$= \left|\frac{a(x_0-x_1)+b(y_0-y_1)+c(z_0-z_1)}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}}\right|$$

$$= \frac{|ax_0+by_0+cz_0-ax_1-by_1-cz_1|}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}}$$

Como A $\in$ π, suas coordenadas satisfazem a equação de π, ou seja,

$$ax_1+by_1+cz_1+d=0$$

e

$$d=-ax_1-by_1-cz_1$$

Logo,

$$d(P_0,\pi) = \frac{|ax_0+by_0+cz_0+d|}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}} \qquad \textbf{(4)}$$

Observemos que a expressão $ax_0 + by_0 + cz_0 + d$ se obtém substituindo x, y e z no primeiro membro da equação geral de π pelas coordenadas do ponto P_0.

Exemplo

Calcular a distância do ponto $P_0(4,2,-3)$ ao plano $\pi: 2x + 3y - 6z + 3 = 0$.

Solução

$$d(P_0,\pi) = \frac{|2(4)+3(2)-6(-3)+3|}{\sqrt{2^2+3^2+(-6)^2}} = \frac{|8+6+18+3|}{\sqrt{4+9+36}} = \frac{35}{7} = 5$$

Observações

a) Outra forma de calcular essa distância consiste em:

1) encontrar equações da reta r que passa por P_0 e é perpendicular ao plano π (um vetor diretor de r é um vetor normal a π);

2) determinar o ponto I de interseção de r e π;

3) calcular a distância por $d(P_0,\pi) = |\overrightarrow{PI}|$.

A Figura 7.4 ilustra este procedimento.

b) A fórmula **(4)** é também aplicada se tivermos dados:

b_1) *dois planos π_1 e π_2 paralelos.*

Neste caso:

$d(\pi_1,\pi_2) = d(P_0,\pi_2)$, com $P_0 \in \pi_1$

ou

$d(\pi_1,\pi_2) = d(P_0,\pi_1)$, com $P_0 \in \pi_2$

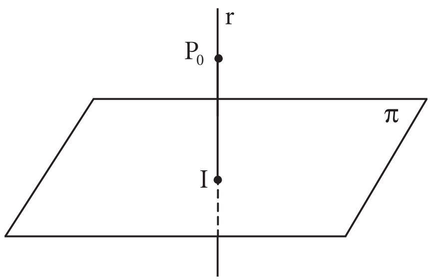

Figura 7.4

b_2) *uma reta r e um plano π paralelos.*

Neste caso: $d(r, \pi) = d(P, \pi)$, com $P \in r$

Exemplo

Calcular a distância da reta

$$r: \begin{cases} y = 2x+3 \\ z = 2x+1 \end{cases} \quad \text{ao plano } \pi: 4x - 4y + 2z - 7 = 0$$

Solução

Observemos primeiro que r // π, pois

$$\vec{v}\cdot\vec{n}=(1,2,2)\cdot(4,-4,2)=4-8+4=0$$

sendo $\vec{v}$ vetor diretor de r e $\vec{n}$ um vetor normal a π. Então, tomando $P(0,3,1)\in r$, por **(4)** tem-se

$$d(r,\pi)=d(P,\pi)=\frac{|4(0)-4(3)+2(1)-7|}{\sqrt{4^2+(-4)^2+2^2}}=\frac{|-12+2-7|}{\sqrt{36}}=\frac{17}{6}$$

DISTÂNCIA ENTRE DUAS RETAS

Dadas as retas r_1 e r_2, quer-se calcular a distância $d(r_1,r_2)$. Podemos ter os seguintes casos:

1) r_1 e r_2 *são concorrentes.*

Neste caso: $d(r_1,r_2)=0$

2) r_1 e r_2 *são paralelas.*

Neste caso:

$$d(r_1,r_2)=d(P,r_2)\text{ , com }P\in r_1$$

ou

$$d(r_1,r_2)=d(P,r_1)\text{ com }P\in r_2$$

A Figura 7.5 ilustra a situação, que se reduz ao cálculo da distância de ponto à reta.

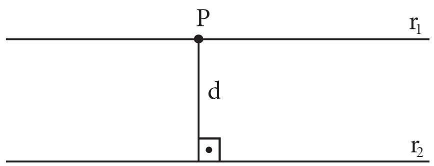

Figura 7.5

3) r_1 e r_2 *são reversas*

Seja r_1 a reta definida pelo ponto A_1 e pelo vetor diretor $\vec{v}_1$ e a reta r_2 pelo ponto A_2 e pelo vetor diretor $\vec{v}_2$.

Os vetores $\vec{v}_1,\vec{v}_2$ e $\overrightarrow{A_1A_2}$, por serem não coplanares, determinam um paralelepípedo (Figura 7.6) cuja altura é a distância $d(r_1,r_2)$ que se quer calcular (a reta r_2 é paralela ao plano da base do paralelepípedo definida por $\vec{v}_1$ e $\vec{v}_2$).

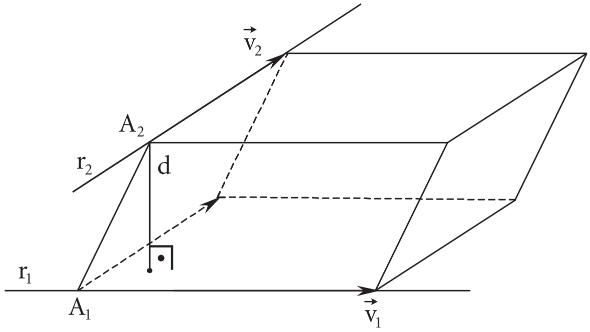

Figura 7.6

O volume V do paralelepípedo é dado por

a) $V = (\text{área da base}) \cdot (\text{altura}) = |\vec{v}_1 \times \vec{v}_2| \cdot d$ ou também por

b) $V = |(\vec{v}_1, \vec{v}_2, \overrightarrow{A_1A_2})|$ (Capítulo 4)

Comparando a) e b) vem

$$d = d(r_1, r_2) = \frac{|(\vec{v}_1, \vec{v}_2, \overrightarrow{A_1A_2})|}{|\vec{v}_1 \times \vec{v}_2|} \quad (5)$$

Exemplo

Calcular a distância entre as retas

$$r_1: \begin{cases} x = -1 + t \\ y = 3 - 2t \\ z = -1 - t \end{cases} \quad \text{e} \quad r_2: \begin{cases} y = x - 3 \\ z = -x + 1 \end{cases}$$

Solução

A reta r_1 passa pelo ponto $A_1(-1,3,-1)$ e tem a direção de $\vec{v}_1 = (1,-2,-1)$ e a reta r_2 pelo ponto $A_2(0,-3,1)$ e tem a direção de $\vec{v}_2 = (1,1,-1)$.

Então, $\overrightarrow{A_1A_2} = A_2 - A_1 = (1,-6,2)$ e

$$\left(\vec{v}_1, \vec{v}_2, \overrightarrow{A_1A_2}\right) = \begin{vmatrix} 1 & -2 & -1 \\ 1 & 1 & -1 \\ 1 & -6 & 2 \end{vmatrix} = 9$$

$$\vec{v}_1 \times \vec{v}_2 = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 1 & -2 & -1 \\ 1 & 1 & -1 \end{vmatrix} = (3,0,3)$$

De acordo com **(5)** temos

$$d(r_1, r_2) = \frac{|9|}{|(3,0,3)|} = \frac{9}{\sqrt{3^2+3^2}} = \frac{9}{\sqrt{18}} = \frac{3}{\sqrt{2}}$$

Observação

Outra forma de calcular esta distância consiste em:

1) encontrar uma equação geral do plano π definido pelo ponto A_1 e pelos vetores diretores $\vec{v}_1$ e $\vec{v}_2$ (o vetor normal a π é dado por $\vec{n} = \vec{v}_1 \times \vec{v}_2$). Como $\vec{v}_2$ é vetor diretor de π, a reta r_2 é paralela a π (Figura 7.7).

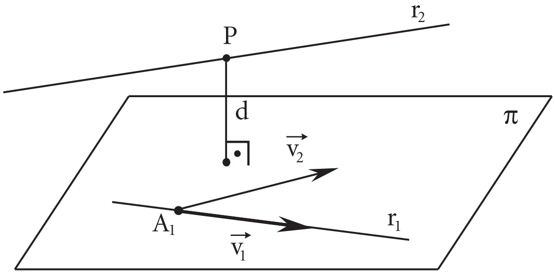

Figura 7.7

2) calcular a distância por

$$d(r_1, r_2) = d(r_2, \pi) = d(P, \pi), P \in r_2$$

aplicando a fórmula **(4)**.

Problemas propostos

Achar a distância de P_1 a P_2 nos casos:

1. $P_1(-2,0,1)$ e $P_2(1,-3,2)$

2. $P_1(1,0,1)$ e $P_2(2,-1,0)$

Achar a distância do ponto P à reta r nos casos:

3. $P(2, 3, -1)$	$r: x = 3 + t$	$y = -2t$	$z = 1 - 2t$
4. $P(1, -1, 0)$	$r: x = 2 - t$	$y = 0$	$z = t$
5. $P(3, 2, 1)$	$r: y = 2x$	$z = x + 3$	

6. $P(0, 0, 0)$ $\quad r: \begin{cases} 2x - y + z - 3 = 0 \\ x + y - 2z + 1 = 0 \end{cases}$

7. $P(3, -1, 1)$ $\quad r: (x, y, z) = (2, 3, -1) + t(1, -4, 2)$

8. $P(1, 2, 3)$ $\quad r$: eixo Ox

9. $P(1, 2, 3)$ $\quad r$: eixo Oz

10. $P(1, 2, 3)$ $\quad r: x = 1 \qquad z = -1$

Achar a distância do ponto P ao plano π nos casos:

11. $P(2, -1, 2)$ $\quad \pi: 2x - 2y - z + 3 = 0$

12. $P(3, -1, 4)$ $\quad \pi: x + y + z = 0$

13. $P(1, 3, -6)$ $\quad \pi: 4x - y + z + 5 = 0$

14. $P(0, 0, 0)$ $\quad \pi: 3x - 4y + 20 = 0$

15. $P(1, 1, 1)$ $\quad \pi: \begin{cases} x = 2 + 2h + 3t \\ y = -1 + h + t \\ z = 2 - h \end{cases}$

16. Calcular a distância entre os planos paralelos

$$\pi_1: x + y + z = 4 \quad \text{e} \quad \pi_2: 2x + 2y + 2z = 5$$

Achar a distância da reta r ao plano π nos casos:

17. $r: x = 4 + 3t \qquad y = -1 + t \qquad z = t$ $\quad$ e $\quad \pi: x - y - 2z + 4 = 0$

18. $r: \begin{cases} x = 3 \\ y = 4 \end{cases}$ $\quad$ e $\quad \pi: x + y - 12 = 0$

19. $r: \begin{cases} x = 3 \\ y = 4 \end{cases}$ $\quad$ e $\quad \pi: y = 0$

Achar a distância entre r_1 e r_2 nos casos:

20. $r_1: x = 2 - t \qquad y = 3 + t \qquad z = 1 - 2t$

$r_2: x = t \qquad y = -1 - 3t \qquad z = 2t$

21. $r_1: x = y = z \qquad r_2: y = x + 1 \qquad z = 2x - 1$

22. $r_1: y = 2x \qquad z = 3 \qquad r_2: (x, y, z) = (2, -1, 2) + t(1, -1, 3)$

23. $r_1: x = t + 1 \qquad y = t + 2 \qquad z = -2t - 2$

$r_2: y = 3x + 1 \qquad z = -4x$

24. $r_1 : x = 3 \quad y = 2 \qquad r_2 : x = 1 \quad y = 4$

25. $r_1 : x = 3 \quad y = 4 \qquad r_2 :$ eixo dos z

Respostas de problemas propostos

1. $\sqrt{19}$

2. $\sqrt{3}$

3. $\dfrac{\sqrt{117}}{3}$

4. $\dfrac{\sqrt{6}}{2}$

5. $\sqrt{\dfrac{77}{6}}$

6. $\sqrt{\dfrac{54}{35}}$

7. 0

8. $\sqrt{13}$

9. $\sqrt{5}$

10. 4

11. $\dfrac{7}{3}$

12. $2\sqrt{3}$

13. 0

14. 4

15. $\dfrac{6}{\sqrt{11}}$

16. $\dfrac{\sqrt{3}}{2}$

17. $\dfrac{9}{\sqrt{6}}$

18. $\dfrac{5}{\sqrt{2}}$

19. 4

20. $\dfrac{3}{\sqrt{5}}$

21. $\dfrac{1}{\sqrt{2}}$

22. $\sqrt{6}$

23. 0

24. $2\sqrt{2}$

25. 5