Integrais Impróprias

Integrais Impróprias

Em muitas situações é importante calcular integrais cujo integrando está definido em intervalos não limitados do tipo $[a,+\infty)$, $(-\infty,b]$ ou mesmo $(-\infty,+\infty)$.

Em outras situações temos um integrando que não está definido em um ponto e queremos calcular a integral a partir desse ponto, ou até esse ponto. Geralmente os domínios do integrando são intervalos da forma $(a,b],[a,b)$ ou $[a,c)\cup(c,b]$.

Integrais Impróprias do tipo I

Definição 1: Quando $f\colon[a,+\infty)\to\mathbb{R}$ é integrável em $[a,t]$ para qualquer $t\geq a$, definimos

$$\int_a^{+\infty} f(x)\,dx = \lim_{t\to+\infty}\int_a^t f(x)\,dx\,.$$

Definição 2: Quando $f\colon(-\infty,b]\to\mathbb{R}$ é integrável em $[t,b]$ para qualquer $t\leq b$, definimos

$$\int_{-\infty}^{b} f(x)\,dx = \lim_{t\to-\infty}\int_t^b f(x)\,dx\,.$$

Quando o limite é finito, dizemos que as integrais das definições acima **convergem.** Quando o limite não existir ou for $\pm\infty$, dizemos que as integrais **divergem.**

Exemplos

(1) $$\int_1^{+\infty} \frac{\ln x}{x}\,dx = \lim_{t\to+\infty} \int_1^{t} \frac{\ln x}{x}\,dx$$

Temos que

$$\int_1^{t} \frac{\ln x}{x}\,dx = \int_0^{\ln t} u\,du = \left.\frac{u^2}{2}\right|_0^{\ln t} = \frac{(\ln t)^2}{2}$$

$$\boxed{\begin{array}{ll} u = \ln x & x = 1 \Rightarrow u = 0 \\ du = \dfrac{1}{x}dx & x = t \Rightarrow u = \ln t \end{array}}$$

Então

$$\int_1^{+\infty} \frac{\ln x}{x}\,dx = \lim_{t\to+\infty} \int_1^{t} \frac{\ln x}{x}\,dx = \lim_{t\to+\infty} \frac{(\ln t)^2}{2} = +\infty$$

Logo, a integral dada diverge.

(2) $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{1}{a^2+x^2}\,dx, \qquad a>0$

Temos que

$$\int_0^{+\infty} \frac{1}{a^2+x^2}\,dx = \lim_{t\to+\infty} \int_0^t \frac{1}{a^2+x^2}\,dx$$

Veja que

$$\int_0^t \frac{1}{a^2+x^2}\,dx = \frac{1}{a}\,arctg\left(\frac{x}{a}\right)\Bigg|_0^t = \frac{1}{a}\,arctg\left(\frac{t}{a}\right)$$

Logo,

$$\int_0^{+\infty} \frac{1}{a^2+x^2}\,dx = \lim_{t\to+\infty} \int_0^t \frac{1}{a^2+x^2}\,dx = \lim_{t\to+\infty} \frac{1}{a}\,arctg\left(\frac{t}{a}\right) = \frac{1}{a}\lim_{t\to+\infty} arctg\left(\frac{t}{a}\right) = \frac{1}{a}\cdot\frac{\pi}{2} = \frac{\pi}{2a}$$

Portanto, a integral é convergente.

(3) $\displaystyle\int_{-\infty}^{2} \frac{1}{5-2x}\,dx = \lim_{t\to-\infty}\int_{t}^{2} \frac{1}{5-2x}\,dx$

Temos que

$$\int_{t}^{2} \frac{1}{5-2x}\,dx = -\frac{1}{2}\int_{5-2t}^{1} \frac{1}{u}\,du = -\frac{1}{2}\ln|u|\Big|_{5-2t}^{1} = \frac{1}{2}\ln|5-2t|$$

$u = 5-2x$	$x = t \Rightarrow u = 5-2t$
$du = -2\,dx$	$x = 2 \Rightarrow u = 1$

Logo,

$$\int_{-\infty}^{2} \frac{1}{5-2x}\,dx = \lim_{t\to-\infty}\int_{t}^{2} \frac{1}{5-2x}\,dx = \lim_{t\to-\infty}\frac{1}{2}\ln|5-2t| = +\infty$$

Portanto, a integral é divergente.

Exercício: Mostre que a integral

$$\int_{1}^{+\infty} \frac{1}{x^p}\, dx = \begin{cases} \text{diverge}, se\ p \leq 1 \\ \dfrac{1}{p-1}, se\ p > 1 \end{cases}$$

Definição 3: Quando as integrais

$$\int_{-\infty}^{c} f(x)\,dx \quad e \quad \int_{c}^{+\infty} f(x)\,dx$$

convergem, para algum $c \in \mathbb{R}$, então definimos

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\,dx = \int_{-\infty}^{c} f(x)\,dx + \int_{c}^{+\infty} f(x)\,dx\,.$$

As integrais das definições 1, 2 e 3 são chamadas de **integrais impróprias do tipo I.**

Observações:

(**1**) O valor da integral $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\,dx$ independe da escolha de c.

(**2**) Se pelo menos uma das integrais $\int_{-\infty}^{c} f(x)\,dx, \int_{c}^{+\infty} f(x)\,dx$ diverge, então $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\,dx$ diverge.

(**3**) A integral $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\,dx$ **não é necessariamente igual** a $\lim\limits_{t\to+\infty}\int_{-t}^{t} f(x)\,dx$.

Por exemplo, a integral

$$\int_{-\infty}^{+\infty} x\ dx$$

é **divergente**, pois

$$\int_{-\infty}^{+\infty} x\ dx = \int_{-\infty}^{0} x\ dx + \int_{0}^{+\infty} x\ dx \qquad \text{e} \qquad \int_{-\infty}^{0} x\ dx = \lim_{t\to-\infty}\int_{t}^{0} x\ dx = \lim_{t\to-\infty} -\frac{t^2}{2} = -\infty\,.$$

Por outro lado,

$$\int_{-\infty}^{+\infty} x\ dx = \lim_{t\to+\infty}\int_{-t}^{t} x\ dx = \lim_{t\to+\infty} \left.\frac{x^2}{2}\right|_{-t}^{t} = \lim_{t\to+\infty}\left(\frac{t^2}{2} - \frac{t^2}{2}\right) = 0\,.$$

Logo,

$$\int_{-\infty}^{+\infty} x\ dx \neq \lim_{t\to+\infty}\int_{-t}^{t} x\,dx\,.$$

Integrais Impróprias do tipo II

Definição 4: Quando $f\colon [a,b) \to \mathbb{R}$ não está definida em b e é integrável $[a,t]$ para qualquer $a \leq t < b$, definimos

$$\int_a^b f(x)\,dx = \lim_{t \to b^-} \int_a^t f(x)\,dx\,.$$

Definição 5: Quando $f\colon (a,b] \to \mathbb{R}$ não está definida em a e é integrável em $[t,b]$ para qualquer $a < t \leq b$, definimos

$$\int_a^b f(x)\,dx = \lim_{t \to a^+} \int_t^b f(x)\,dx\,.$$

Quando o limite é finito, dizemos que as integrais das definições acima **convergem.** Quando o limite não existir ou for $\pm\infty$, dizemos que as integrais **divergem.**

Definição 6: Quando $f\colon [a,c) \cup (c,b] \to \mathbb{R}$ é contínua em $[a,c) \cup (c,b]$ e as integrais $\int_a^c f(x)\,dx$ e $\int_c^b f(x)\,dx$ forem convergentes, então $\int_a^b f(x)\,dx$ é convergente e

$$\int_a^b f(x)\,dx = \int_a^c f(x)\,dx + \int_c^b f(x)\,dx\,.$$

As integrais das definições 4, 5 e 6 são chamadas de **integrais impróprias do tipo II.**

Exemplos:

(1) $$\int_0^3 \frac{1}{\sqrt{3-x}}\,dx = \lim_{t\to 3^-}\int_0^t \frac{1}{\sqrt{3-x}}\,dx$$

Temos que

$$\int_0^t \frac{1}{\sqrt{3-x}}\,dx = -\int_3^{3-t} \frac{1}{\sqrt{u}}\,du = -\int_3^{3-t} u^{-1/2}\,du = -2\sqrt{u}\Big|_3^{3-t} = -2\sqrt{3-t} + 2\sqrt{3}$$

$$\boxed{\begin{array}{ll} u = 3-x & x = 0 \Rightarrow u = 3 \\ du = -\,dx & x = t \Rightarrow u = 3-t \end{array}}$$

Então

$$\int_0^3 \frac{1}{\sqrt{3-x}}\,dx = \lim_{t\to 3^-}\int_0^t \frac{1}{\sqrt{3-x}}\,dx = \lim_{t\to 3^-}\left(-2\sqrt{3-t} + 2\sqrt{3}\right) = 2\sqrt{3}$$

Portanto, a integral converge.

(2) $$\int_0^4 \frac{1}{(x-1)^2}\,dx = \int_0^1 \frac{1}{(x-1)^2}\,dx + \int_1^4 \frac{1}{(x-1)^2}\,dx$$

Temos que

$$\int_0^1 \frac{1}{(x-1)^2}\,dx = \lim_{t\to 1^-} \int_0^t \frac{1}{(x-1)^2}\,dx.$$

Agora,

$$\int_0^t \frac{1}{(x-1)^2}\,dx = \int_{-1}^{t-1} \frac{1}{u^2}\,du = \int_{-1}^{t-1} u^{-2}\,du = -\frac{1}{u}\Big|_{-1}^{t-1} = -\frac{1}{t-1} - 1$$

$$\boxed{\begin{array}{ll} u = x-1 & x = 0 \Rightarrow u = -1 \\ du = dx & x = t \Rightarrow u = t-1 \end{array}}$$

Logo,

$$\int_0^1 \frac{1}{(x-1)^2}\,dx = \lim_{t\to 1^-} \int_0^t \frac{1}{(x-1)^2}\,dx = \lim_{t\to 1^-} \left(-\frac{1}{t-1} - 1\right) = +\infty$$

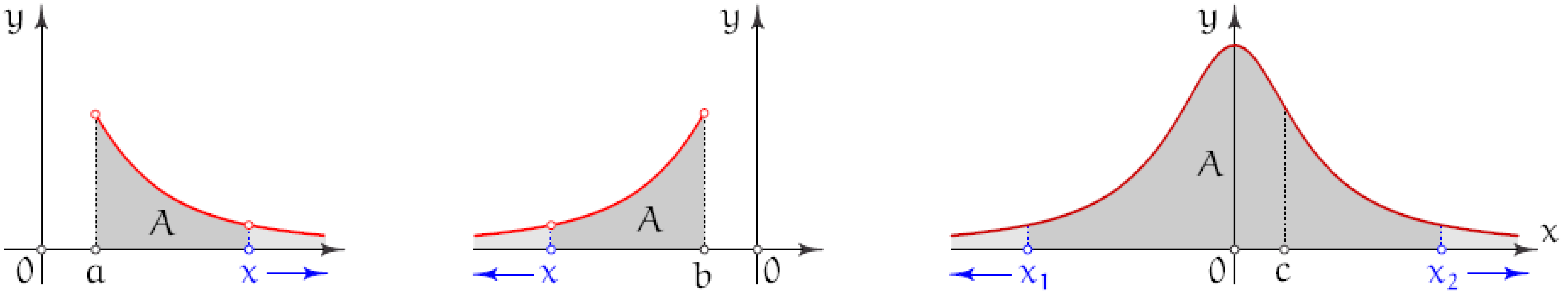
Portanto, a integral

$$\int_0^4 \frac{1}{(x-1)^2}\,dx$$

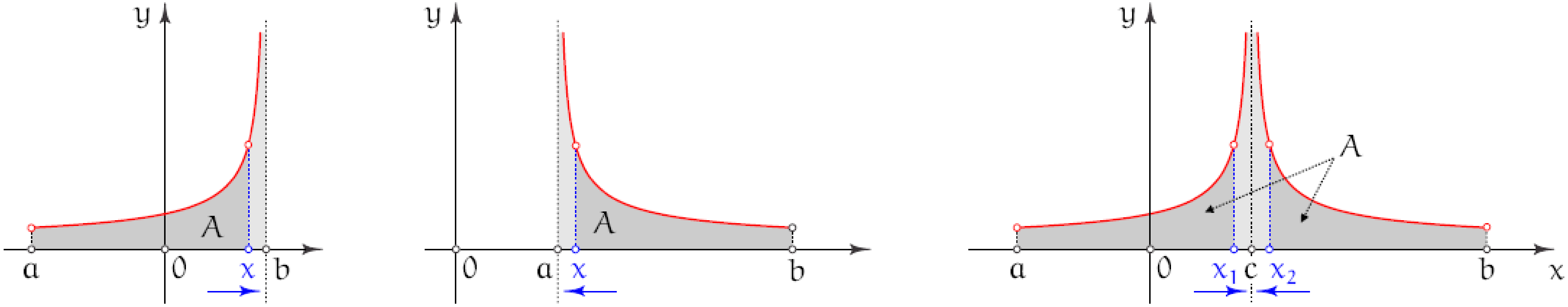
é divergente.

Observação: Naturalmente, quando f é não negativa, a área A da região abaixo do gráfico de f e acima do eixo x pode ser definida em termos das integrais impróprias. É comum termos **regiões não limitadas** cuja **área é finita!**

As situações mais comuns são ilustradas nas figuras abaixo.



$$A = \int_a^{+\infty} f(x)dx \qquad A = \int_{-\infty}^{b} f(x)dx \qquad A = \int_{-\infty}^{c} f(x)dx + \int_c^{+\infty} f(x)dx$$



$$A = \int_a^{b} f(x)dx \qquad A = \int_a^{b} f(x)dx \qquad A = \int_a^{c} f(x)dx + \int_c^{b} f(x)dx$$

Exercício: Calcule as integrais impróprias abaixo.

(a) $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{1}{(1+x)^3}\, dx$

(b) $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{1+x^2}\, dx$

(c) $\displaystyle\int_0^{1} \frac{1}{\sqrt{1-x}}\, dx$

(d) $\displaystyle\int_0^{\pi/2} \operatorname{tg} x\, dx$

(e) $\displaystyle\int_0^{2} \frac{\ln x}{\sqrt{x}}\, dx$

Observação: Há situações em que temos uma combinação das integrais impróprias dos tipos I e II.

Exemplo: $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{1}{x(x+2)}\, dx$

Solução: Observe que o domínio do integrando é $\mathbb{R} - \{-2, 0\}$. Seja $c \in (0, +\infty)$, então:

$$
\begin{aligned}
\int_0^{+\infty} \frac{1}{x(x+2)}dx &= \int_0^{c} \frac{1}{x(x+2)}dx + \int_c^{+\infty} \frac{1}{x(x+2)}dx \\
&= \lim_{t\to 0^+} \int_t^{c} \frac{1}{x(x+2)}dx + \lim_{t\to +\infty} \int_c^{t} \frac{1}{x(x+2)}dx \\
&= \lim_{t\to 0^+} \int_t^{c} \left(\frac{\frac{1}{2}}{x} + \frac{-\frac{1}{2}}{x+2}\right) dx + \lim_{t\to +\infty} \int_c^{t} \left(\frac{\frac{1}{2}}{x} + \frac{-\frac{1}{2}}{x+2}\right) dx; \ \textit{(método das frações parciais)} \\
&= \lim_{t\to 0^+} \left(\tfrac{1}{2}\left(\ln(|x|) - \ln(|x+2|)\big|_t^c\right)\right) + \lim_{t\to +\infty} \left(\tfrac{1}{2}\left(\ln(|x|) - \ln(|x+2|)\big|_c^t\right)\right) \\
&= \lim_{t\to 0^+} \left(\tfrac{1}{2}\left(\ln\left(\left|\tfrac{x}{x+2}\right|\right)\Big|_t^c\right)\right) + \lim_{t\to +\infty} \left(\tfrac{1}{2}\left(\ln\left(\left|\tfrac{x}{x+2}\right|\right)\Big|_c^t\right)\right) \\
&= \lim_{t\to 0^+} \left(\tfrac{1}{2}\left(\ln\left(\tfrac{c}{c+2}\right) - \ln\left(\tfrac{t}{t+2}\right)\right)\right) + \lim_{t\to +\infty} \left(\tfrac{1}{2}\left(\ln\left(\tfrac{t}{t+2}\right) - \ln\left(\tfrac{c}{c+2}\right)\right)\right) \\
&= \lim_{t\to 0^+} \left(\frac{1}{2}\ln\left(\frac{\frac{c}{c+2}}{\frac{t}{t+2}}\right)\right) + \lim_{t\to +\infty} \left(\frac{1}{2}\ln\left(\frac{\frac{t}{t+2}}{\frac{c}{c+2}}\right)\right) = \lim_{t\to 0^+} \left(\ln\sqrt{\frac{c(t+2)}{t(c+2)}}\right) + \lim_{t\to +\infty} \left(\ln\left(\sqrt{\frac{t(c+2)}{c(t+2)}}\right)\right) \\
&= \lim_{t\to 0^+} \left(\ln\left(\sqrt{\frac{c(t+2)}{t(c+2)}}\right)\right) + \lim_{t\to +\infty} \left(\ln\left(\sqrt{\frac{c+2}{c\left(1+\frac{2}{t}\right)}}\right)\right) = +\infty + \ln\left(\sqrt{\frac{c+2}{c}}\right) = +\infty.
\end{aligned}
$$

Portanto, $\int_0^{+\infty} \frac{1}{x(x+2)}dx$ *diverge.*

Teste da Comparação

Muitas vezes não é possível calcular o valor exato de uma integral imprópria. No entanto, com o auxílio do critério abaixo, podemos investigar sua convergência.

Teste da Comparação: Sejam f e g funções integráveis em $[a, +\infty)$ tais que $0 < f(x) \leq g(x)$, para todo $x \geq a$.

(1) Se $\displaystyle\int_a^{+\infty} g(x)\,dx$ converge, então $\displaystyle\int_a^{+\infty} f(x)\,dx$ converge.

(2) Se $\displaystyle\int_a^{+\infty} f(x)\,dx$ diverge, então $\displaystyle\int_a^{+\infty} g(x)\,dx$ diverge.

Exemplo: Utilize o Teste da Comparação para analisar a convergência das integrais:

(a) $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{1}{x^5 + 3x + 1}\,dx$

(b) $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{sen\,x + 2}{\sqrt{x}}\,dx$

(c) $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{1 + e^{-x}}{x}\,dx$

(d) $\displaystyle\int_1^{+\infty} e^{-x^2}\,dx$