Capítulo 4

Sistemas de Equações Lineares

4.1 Definições e Terminologia

Definição 4.1: Um sistema linear de *m* equações e *n* incógnitas é um conjunto de equações lineares do tipo:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 & + & a_{12}x_2 & + & \dots & + & a_{1n}x_n & = & b_1 \\ a_{21}x_1 & + & a_{22}x_2 & + & \dots & + & a_{2n}x_n & = & b_2 \\ \vdots & & \vdots & & & & \vdots & & \vdots \\ a_{m1}x_1 & + & a_{m2}x_2 & + & \dots & + & a_{mn}x_n & = & b_m \end{cases}$$

4.1.1 Solução de um sistema linear

Uma solução do sistema linear é uma *n*-upla de números $(x_1, x_2, \dots, x_n)$ que satisfaça as *m* equações simultaneamente. Esses valores são denominados raízes do sistema de equações lineares.

4.1.2 Classificação de sistemas

$$\text{Sistemas}\begin{cases} \text{Compatível (admite solução)}\begin{cases}\text{Determinado (única solução)}\\ \\ \text{Indeterminado (Infinitas soluções)}\end{cases} \\ \\ \\ \text{Incompatível (não admite solução)}\end{cases}$$

4.1.3 Sistema homogêneo

Um sistema linear é dito ser homogêneo se todos os termos independentes forem nulos.

$$\begin{cases} a_{11}x_1 & + & a_{12}x_2 & + & \dots & + & a_{1n}x_n & = & 0 \\ a_{21}x_1 & + & a_{22}x_2 & + & \dots & + & a_{2n}x_n & = & 0 \\ \vdots & & \vdots & & & & \vdots & & \vdots \\ a_{m1}x_1 & + & a_{m2}x_2 & + & \dots & + & a_{mn}x_n & = & 0 \end{cases}$$

Uma solução que satisfaz este tipo de sistema é $x_1 = x_2 = \dots = x_n = 0$, chamada de solução trivial.

4.1.4 Sistemas e Matrizes

Seja o sistema de equação linear com *m* equações e *n* incógnitas:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 & + & a_{12}x_2 & + & \dots & + & a_{1n}x_n & = & b_1 \\ a_{21}x_1 & + & a_{22}x_2 & + & \dots & + & a_{2n}x_n & = & b_2 \\ \vdots & & \vdots & & & & \vdots & & \vdots \\ a_{m1}x_1 & + & a_{m2}x_2 & + & \dots & + & a_{mn}x_n & = & b_m \end{cases}$$

Note que podemos escrever o sistema linear em uma forma matricial:

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{bmatrix}$$

Que nos leva a equação matricial

$$A \cdot X = B$$

Onde *A* é a matriz dos coeficientes, *X* é a matriz solução e *B* é a matriz dos termos independentes.

Outra forma de escrever um sistema é associá-lo a matriz

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} & b_2 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} & b_m \end{bmatrix}$$

Note que neste caso omitimos as incógnitas $x_1, x_2, \ldots, x_n$. Chamamos esta matriz proveniente do sistema linear de ***matriz ampliada do sistema***.

4.1.5 Sistemas equivalentes

Sejam os sistemas lineares abaixo:

$$S1 = \begin{cases} 3x_1 + 6x_2 = 42 \\ 2x_1 - 4x_2 = 12 \end{cases} \qquad S2 = \begin{cases} x_1 + 2x_2 = 14 \\ x_1 - 2x_2 = 6 \end{cases}$$

Note que a solução de ambos é $x_1 = 10$ e $x_2 = 2$, dizemos então que estes sistemas são equivalentes. Assim dizemos:

Dois sistemas de equações lineares são ***equivalentes*** quando admitem a ***mesma solução.***

4.2 Sistemas de *n* equações e *n* incógnitas

Podemos utilizar o método da eliminação gaussiana, o método de Gauss-Jordan ou o método da matriz inversa para resolver um sistema de equações lineares que tenha o número de incógnitas igual ao número de variáveis.

4.2.1 Sistema na forma escalonada

Um Sistema de Equações Lineares está na **forma triangular (forma escalonada)** se o número de equações é igual ao número de incógnitas e se tem a seguinte forma:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n = b_1 \\ \qquad\quad a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \vdots \qquad\qquad\qquad \vdots \\ \qquad\qquad\qquad\qquad a_{mn}x_n = b_m \end{cases}$$

Em que: $a_{ij} \neq 0, \forall\, i = j$

Você pode observar que a matriz dos coeficientes é uma matriz triangular superior.

4.2.2 Eliminação Gaussiana

O método utiliza operações elementares com as linhas da ***matriz ampliada***, a fim de transformar a matriz dos coeficientes em uma matriz triangular superior(inferior), transformando assim o sistema original em um sistema na forma escalonada. Encontramos a solução do sistema através de ***retro substituição*** das variáveis.

Exercício 4.1: Resolva os seguintes sistemas lineares por eliminação Gaussiana:

(a) $\begin{cases} 3x + 2y - 5z = 8 \\ 2x - 4y - 2z = -4 \\ x - 2y - 3z = -4 \end{cases}$

(b) $\begin{cases} 2x - 3y = 4 \\ 6x - 9y = 15 \end{cases}$

(c) $\begin{cases} x - z = 0 \\ 3x + y + 2z = 0 \\ 4x + 2y + 2z = 0 \end{cases}$

(d) $\begin{cases} 2x + 4y + 6z = -6 \\ 3x - 2y - 4z = -38 \\ x + 2y + 3z = -3 \end{cases}$

4.2.3 Método de Gauss-Jordan

O método de Gauss-Jordan se utiliza de operações elementares a fim de transformar a matriz dos coeficientes do sistema na matriz identidade. Neste caso obtemos a solução diretamente e ela aparecerá na coluna dos termos independentes.

Exercício 4.2: Resolva o seguinte sistema por Gauss-jordan

$$\begin{cases} 2x + 3z = -8 \\ 2x - 4y = -4 \\ 3x - 2y - 5z = 26 \end{cases}$$

4.2.3 Método de Matriz Inversa

Lembre-se que todo sistema linear, pode ser escrito na forma:

$$A \cdot X = B$$

Agora suponha que a matriz A dos coeficientes do sistema linear possui uma inversa A^{-1}, então:

$$A^{-1} \cdot A \cdot X = A^{-1} \cdot B$$

$$I \cdot X = A^{-1} \cdot B$$

$$\boxed{X = A^{-1} \cdot B}$$

Assim um sistema linear pode ser resolvido através da matriz inversa da matriz dos coeficientes. Portanto se a matriz dos coeficientes tem uma inversa, ou seja, $\det A \neq 0$, implica que o sistema é compatível e determinado.

Exercício 4.3: Resolva os seguintes sistemas lineares utilizando o método da matriz inversa.

(a) $\begin{cases} 2x + y + 3z = 13 \\ 4x + 2y + 2z = 14 \\ 2x + 5y + 3z = 21 \end{cases}$ (b) $\begin{cases} -2x + 3y - z = 7 \\ x - 3y + z = -1 \\ -x + 2y - z = 2 \end{cases}$

4.2.4 Observações Finais:

1- É conveniente utilizar o método da eliminação Gaussiana ou o método de Gauss-Jordan para resolver sistemas de n equações e n incógnitas nos dois seguintes casos:

- Quando se tem para resolver um único sistema;
- Quando se tem para resolver um conjunto de sistemas de n equações com n incógnitas, tais que as matrizes dos coeficientes de cada sistema sejam diferentes umas das outras.

2- Já o método da matriz inversa é conveniente usar que se tem para resolver um conjunto de sistemas lineares todos com n equações e n incógnitas, tais que as matrizes dos coeficientes de cada sistema sejam todas iguais, variando apenas os termos independentes. Neste caso calculamos a inversa de uma única matriz.

4.3 Sistemas de *n* equações e *m* incógnitas

O método para resolver um sistema de equações lineares com n equações e m incógnitas é semelhante ao método de Gauss-Jordan, com a diferença de que a matriz dos coeficientes não pode ser transformada em uma matriz identidade, pois ela é retangular. Entretanto, o procedimento inicial é o mesmo: Transforma-se em 1, por meio de operações elementares adequadas, cada elemento a_{ij} , no qual $i = j$, em em zeros os demais elementos das colunas em que se situam esses a_{ij}. Depois de algumas considerações sobre a característica da matriz, se encontrará a solução do sistema.

Exercício 4.4: Resolva os seguinte sistema lineares

(a) $\begin{cases} 2x + 4y = 16 \\ 5x - 2y = 4 \\ 3x + y = 9 \\ 4x - 5y = -7 \end{cases}$

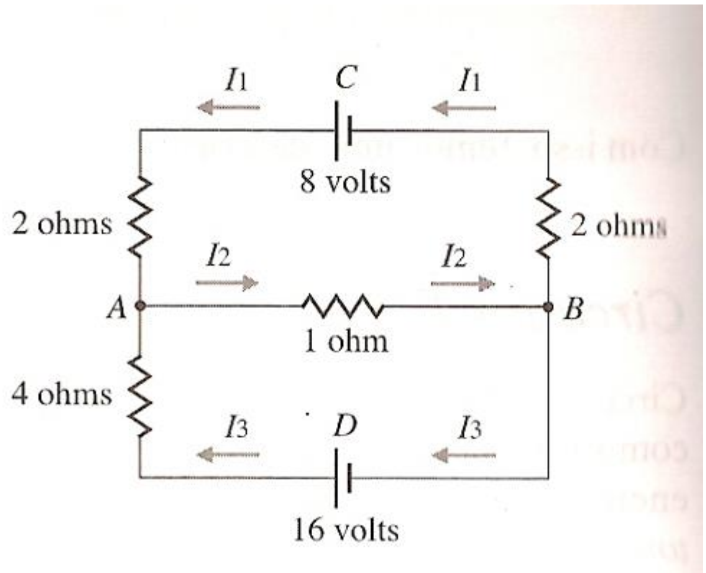
(b) $\begin{cases} 2x + 4y = 16 \\ 5x - 2y = 4 \\ 10x - 4y = 3 \end{cases}$

(c) $\begin{cases} 2x - 8y + 24z + 18w = 84 \\ 4x - 14y + 52z + 42w = 190 \end{cases}$

4.4 Aplicações

PROBLEMA 1: **CIRCUITOS ELÉTRICOS**

Considere o seguinte circuito elétrico



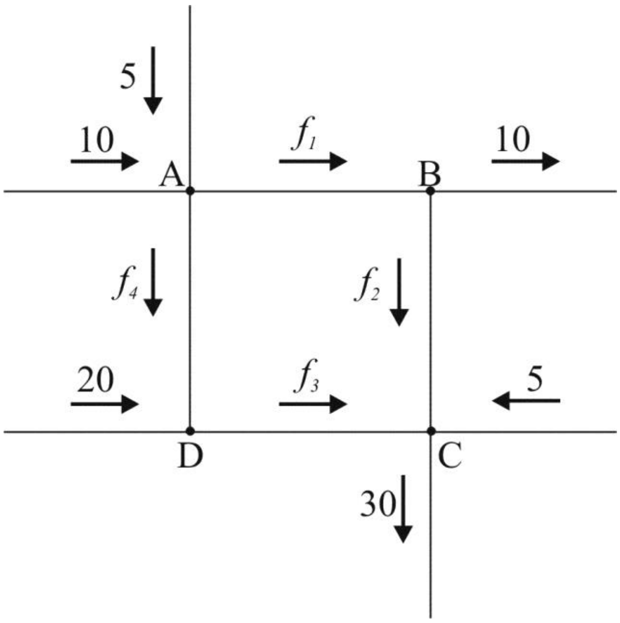
Utilize as leis de Kirchhoff para obter as correntes I_1, I_2 e I_3.

Solução: Aplicando as Leis de KIrchhoff obtemos o seguinte sistema de equações lineares:

$$\begin{cases} I_1 - I_2 + I_3 = 0 \\ 4I_1 + I_2 = 8 \\ I_2 + 4I_3 = 16 \end{cases}$$

PROBLEMA 2: **REDE DE ÁGUA E ESGOTO**

Uma rede de encanamento de água é mostrada na figura abaixo:



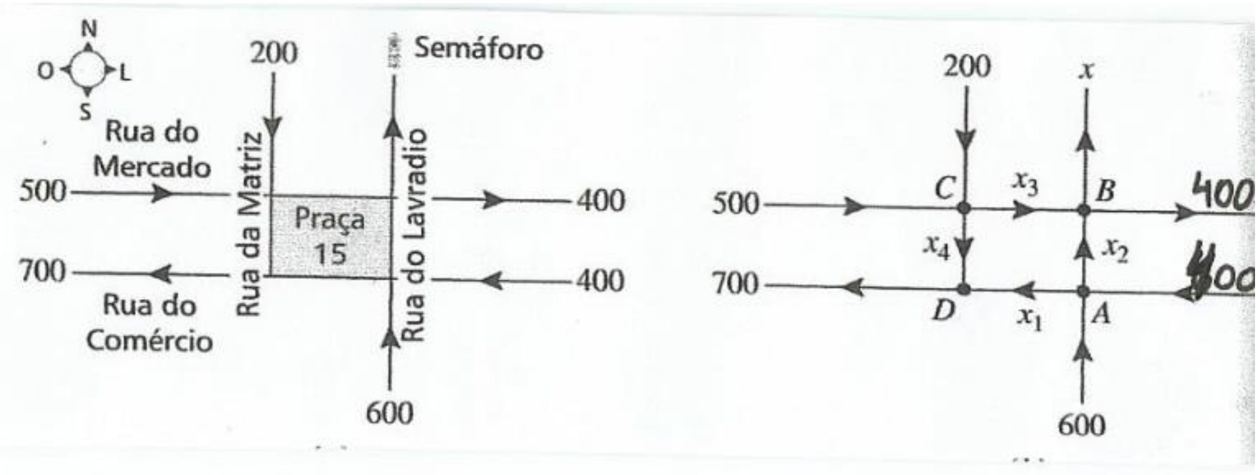
Onde o fluxo é medido em litros por minuto. No estudo de hidráulica sabe-se que o fluxo de entrada é igual ao fluxo de saída.

Solução: Para equacionar estes fluxos de acordo com as leis da hidráulica, chegamos ao sistema de equações lineares:

$$\begin{cases} f_1 + f_4 = 15 \\ f_1 - f_2 = 10 \\ f_2 + f_3 = 25 \\ f_3 - f_4 = 20 \end{cases}$$

PROBLEMA 3: PROJETANDO PADRÕES DE TRÁFEGO

A rede da figura abaixo, mostra uma proposta de fluxo de tráfego de uma certa cidade em torno de uma de suas praças. O plano prevê a instalação de um semáforo computadorizado na saída norte da Rua do Lavradio e o diagrama indica o número médio de veículos por hora que se espera ter nas ruas que circundam o complexo da praça. Todas as ruas são de mão única.



(a) Quantos Veículos por hora deveria o semáforo deixar passar para garantir que o número médio de veículos por hora que entra no complexo seja igual ao número de veículos que sai do complexo?

(b) Se o semáforo for ajustado para equilibrar o fluxo total para dentro e para fora do complexo da praça, o que pode ser dito sobre o número médio de veículos por hora que circulará pelas ruas que circundam o complexo?

Solução (a): Sendo x o número de veículos por hora que o semáforo deve deixar passar, então o número total de veículos por hora que entra e sai do complexo da praça é:

Para dentro: 500 + 400 + 600 + 200 = 1700
Para fora: 700 + 400 + x

Igualando os fluxos para dentro e para fora, temos: 1700 = 700 + 400 + x, o que nos dá $x = 600$

Solução (b): Para evitar congestionamento de trânsito, o fluxo para dentro de cada cruzamento deve ser igual ao fluxo para fora do cruzamento. Para isto acontecer, devem ser satisfeitos as seguintes condições:

Cruzamento	**Fluxo para dentro**	**Fluxo para fora**
A	400 + 600	$x_1 + x_2$
B	$x_2 + x_3$	$400 + x$
C	500+200	$x_3 + x_4$
D	$x_1 + x_4$	700

Como $x = 600$, obtemos o seguinte sistema linear:

$$\begin{cases} x_1 + x_2 = 1000 \\ x_2 + x_3 = 1000 \\ x_3 + x_4 = 700 \\ x_1 + x_4 = 700 \end{cases}$$

Fazendo o escalonamento, obtemos x_4 como variável livre e obtemos então uma infinidade de soluções. Assim, se $x_4 = t$, obtemos $x_1 = 700 - t$, $x_2 = 300 + t$ e $x_3 = 700 - t$.

Agora perceba que *t* não pode ser um número qualquer, veja pela primeira e terceira solução acima que o valor de *t* deve ser no máximo 700 para que os fluxos sejam sempre positivos, logo então temos que $0 \le t \le 700$ e assim teremos:

$$0 \le x_1 \le 700, \qquad 300 \le x_2 \le 1000, \qquad 0 \le x_3 \le 700, \qquad 0 \le x_4 \le 700$$

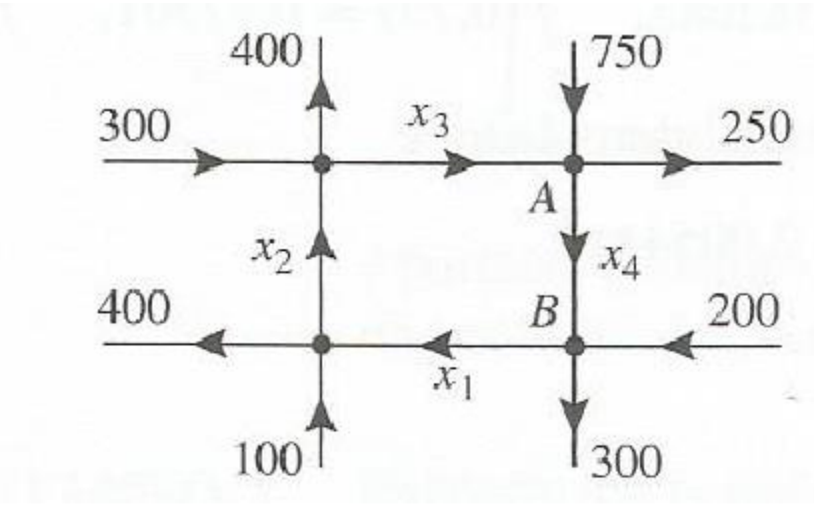
ATIVIDADE FORMATIVA III – AVALIAÇÃO COM NOTA

1) A atividade deve ser entregue na data: ____/____/_____
2) A atividade pode ser feito em grupo de 3 alunos.
3) A atividade deve ser entregue no arquivo enviado no e-mail.

Não serão aceitas atividades em folha de caderno, o padrão para trabalhos acadêmicos é folha branca A4.

ATENÇÃO: Atividades não entregues na data indicada terão um desconto de 20% por dia de atraso.

Descrição da Atividade: Com base no Problema 3 do Capitulo 4, resolva a atividade abaixo:
A figura abaixo mostra uma rede viária de ruas de mão única com fluxo de tráfego nos sentidos indicados. As taxas de fluxo ao longo das ruas são medidas pelo número médio de veículos por hora.

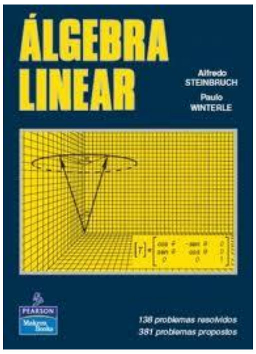


(a) Monte um sistema linear cuja solução forneça as taxas de fluxo desconhecidas.

(b) Resolva o sistema para as taxas de fluxos desconhecidas.

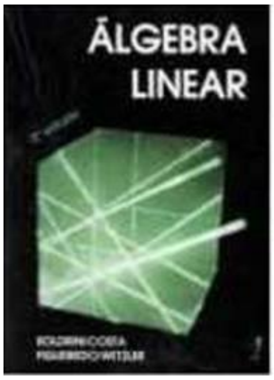
(c) Se o fluxo ao longo da rua de A para B, precisar ser reduzido(não interrompido) em virtude de uma obra, qual será o fluxo mínimo necessário para manter o tráfego fluindo em todas as ruas? Dica: Basta deduzir de acordo com o item (b) qual o valor de t que mantem todos os fluxos positivos ao mesmo tempo, pode haver fluxo zero sem problemas.

LISTA DE EXERCÍCIOS - CAPÍTULO 4



STEINBRUCH, A.; WINTERLE, P. *Álgebra Linear*. 2 ed. São Paulo: McGraw-Hill, 1987.

Pg 576 a 583: 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12, 13, 14, 15, 16, 17, 18, 19, 20, 21, 22, 23, 24, 25, 26, 27, 28, 29, 30, 31, 32, 33, 34, 35, 36 e 37.



BOLDRINI,J.L.; COSTA, S.I.R.; RIBEIRO, V.L.F.F; WETZLER,H.G. *Álgebra Linear*. São Paulo: Editora Harper & Row do Brasil Ltda, 1978.

Pg 91 a 95: 7(b), 17(c) e 23.

Lista de Aplicações no Xerox: 4, 5, 6, 7, 9, 10, 11, 12