2ª Prova - Cálculo 2

Nome: Giovani Zanella da Maia 4,6
Data: 18/11/2024 **Valor:** 10 pontos
Curso: Ciência da Computação/Engenharia Elétrica
Professor: Fabricio Alves Oliveira

INSTITUTO FEDERAL Catarinense
Campus Blumenau

ORIENTAÇÕES:
(i) A prova é individual, sem consulta e pode ser feita a lápis.
(ii) Faça letra legível e apresente o desenvolvimento e o raciocínio de forma clara em cada uma das questões. Questões sem justificativas não serão aceitas.

Questões

2,8 **1ª Questão:** (3 pontos) Calcule as integrais trigonométricas (sem utilizar fórmulas de recorrência):

(a) $\int \cos 2x \cos x \, dx$ ✓ (b) $\int \operatorname{sen}^5 x \, dx$ ✓ (c) $\int \operatorname{tg}^3 x \sec^3 x \, dx$ ✓ (d) $\int \operatorname{cossec}^4 x \operatorname{cotg}^6 x \, dx$ ✓

0,8 **2ª Questão:** (2 pontos)

(i) Determine se as integrais impróprias abaixo são convergentes ou divergentes e calcule o valor daquelas que forem convergentes:

(a) $\displaystyle\int_0^{\infty} \frac{x}{(x^2+2)^2}\, dx$ (b) $\displaystyle\int_{-1}^{1} \frac{e^x}{e^x - 1}\, dx$

(ii) Use o Teste da Comparação para determinar se a integral $\displaystyle\int_0^{\infty} \frac{\operatorname{arctg} x}{2+e^x}\, dx$ é convergente ou divergente.

0 **3ª Questão:** (2 pontos)

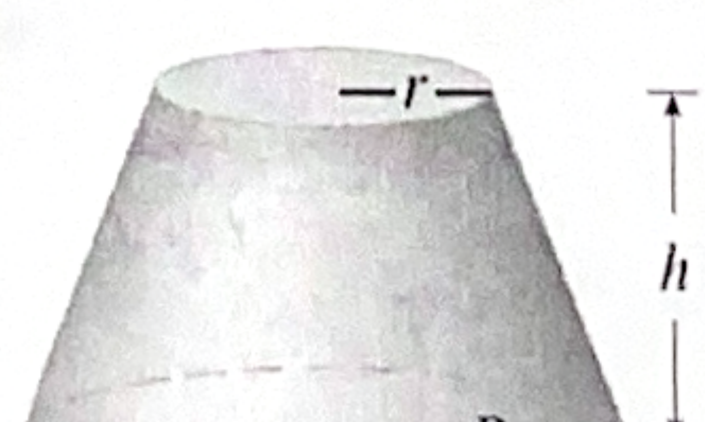
✓ (a) Utilize o **método das secções transversais** para encontrar o volume do sólido obtido pela rotação da região limitada pelas curvas $y = \frac{1}{x}, y = 0, x = 1, x = 3$ em torno da reta $y = -1$. Faça um esboço da região e do sólido.

✓ (b) Use o **método das cascas cilíndricas** para calcular o volume do sólido gerado pela rotação da região limitada pelas curvas $x = \sqrt{y}, x = 0, y = 1$ em torno do eixo x. Faça um esboço da região e do sólido.

1,0 **4ª Questão:** (2 pontos)

✓ (a) Determine o volume do sólido S, cuja base é a região limitada por $y = x^2$ e $y = 1$ e cujas secções transversais perpendiculares ao eixo y são quadrados.

(b) Calcule o volume de um tronco de cone circular reto com altura h, raio da base inferior R e raio da base superior r, como mostra a figura a seguir.



0 **5ª Questão:** (1 ponto) Determine o comprimento da curva $y = \frac{1}{3}\left(2+x^2\right)^{\frac{3}{2}}$, com $0 \le x \le 3$.

1) a) $\int \cos(2x)\cdot\cos x\, dx = \frac{1}{2}[\cos(2x+x)+\cos(2x-x)]$

$= \frac{1}{2}[\cos(3x)+\cos(x)]$

$\frac{1}{2}\int \cos(3x)+\cos(x)\, dx = \frac{1}{2}[\underbrace{\int\cos(3x)\,dx}_{I} + \underbrace{\int\cos(x)\,dx}_{II}] = \frac{1}{2}[\frac{1}{3}\operatorname{sen}(3x)+\operatorname{sen}(x)]$

$= \frac{1}{6}\operatorname{sen}(3x)+\operatorname{sen}(x) + K$ C

b) $\int \operatorname{sen}^5 x\, dx = \int \operatorname{sen}^2 x\cdot\operatorname{sen}^2 x\cdot\operatorname{sen} x\, dx = \int (1-\cos^2 x)(1-\cos^2 x)\cdot\operatorname{sen} x\, dx$

$u=\cos x \qquad du = -\operatorname{sen} x\, dx \qquad = \int (1-u^2)(1-u^2) - du =$

$= -[\int u^4 - 2u^2 + 1\, du] = -\int u^4 du + 2\int u^2 du - \int 1\, du = -\frac{u^5}{5} + \frac{2u^3}{3} - u$

$= -\frac{\cos^5 x}{5} + \frac{2\cos^3 x}{3} - \cos x + K$ C

c) $\int tg^3 x\cdot\sec^3 x\, dx = \int tg^2 x\cdot tg x\cdot\sec^2 x\cdot\sec x\, dx$

$u = \sec x$
$du = \sec x\cdot tg x\, dx$

$= \int (\sec^2 x - 1)\cdot\sec^2 x\cdot\underline{\sec x\cdot tg x\, dx}$

$= \int (u^2-1)u^2\, du = \int u^4 - u^2\, du = \frac{u^5}{5} - \frac{u^3}{3} = \frac{\sec^5 x}{5} - \frac{\sec^3 x}{3} + K$ C

d) $\int \operatorname{cossec}^4 x\cdot\operatorname{cotg}^6 x\, dx = \int \operatorname{cotg}^6 x\cdot\csc^4 x\, dx = \int \operatorname{cotg}^6 x\cdot\csc^2 x\cdot\csc^2 x\, dx$

$= \int \operatorname{cotg}^6 x\cdot(1+\operatorname{cotg}^2 x)\cdot\csc^2 x\, dx = \int u^6\cdot(1+u^2) - du$

$u = \operatorname{cotg} x$
$du = -\csc^2 x\, dt$

$= -[\int u^6 + u^8\, du] = -\int u^6 du - \int u^8 du = -\frac{u^7}{7} - \frac{u^9}{9}$

$= -\frac{\operatorname{cotg}^7 x}{7} - \frac{ctg^9 x}{9} + K$ C

2) i) a) $\int_0^\infty \frac{x}{(x^2+2)^2}\, dx = \lim_{T\to\infty}\left(\int_0^T \frac{x}{(x^2+2)^2}\, dx\right) =$

$\int \frac{1}{(x^2+2)^2}\, x\,dx =$

$u = x^2+2$
$du = 2x\,dx$
$x\,dx = \frac{du}{2}$

$\frac{1}{2}\int \frac{1}{u^2}\, du = \frac{1}{2}\left(-\frac{1}{u}\right) = \frac{1}{2}\left(-\frac{1}{x^2+2}\right) + K$

$\lim_{T\to\infty}\left(\frac{1}{2}\left(-\frac{1}{x^2+2}\right)\Big|_0^T\right) = \frac{1}{2}\left(\lim_{T\to\infty}\left(\cancel{\frac{-1}{\infty+2}}^{\,0} - \left(-\frac{1}{0+2}\right)\right)\right) = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{1}{4}$ C 0,4

Converge

$2)$ i) b) $\int_{-1}^{1} \frac{e^x}{e^x-1}\,dx$ $\quad u = e^x - 1$, $du = e^x dx$ $\quad \int \frac{1}{e^x-1} \cdot e^x\,dx$

$\int \frac{1}{u}\,du = \ln|u| = \ln|e^x-1| + K$

$\cancel{\ln|e^x-1| \Big|_{-1}^{1} = (\ln|e^1-1| - \ln|e^{-1}-1|) =}$ $\quad e^0 = 1$

$\cancel{= \ln|e-1| - \ln|\tfrac{1}{e}-1|}$

$\underbrace{\lim_{T\to 0^+}\left(\ln|e^x-1|\Big|_{-1}^{T}\right)}_{\mathrm{I}} + \underbrace{\lim_{T\to 0^-}\left(\ln|e^x-1|\Big|_{T}^{1}\right)}_{\mathrm{II}} =$ como em $\mathrm{I} = +\infty$

I $\lim_{T\to 0^+}(\ln|\cancel{e^{0^+}-1}| - \ln|e^{-1}-1|) = +\infty$ $\;-\infty$ $\quad$ C $0{,}4$ $\therefore$ Diverge

II $\lim_{T\to 0^-}(\ln|\cancel{e^{0^-}}-1| - \ln|e^1-1|) =$

ii)

?

⑤ $f'(x) = \sqrt{2+x^2} \cdot x$ $\qquad \int_0^3 \sqrt{1+2x^2+x^3}\,dx$

$(f'(x))^2 = (2+x)\cdot x^2$

$2x^2 + x^3$

$\int (1+2x^2+x^3)^{\frac{1}{2}}\,dx$

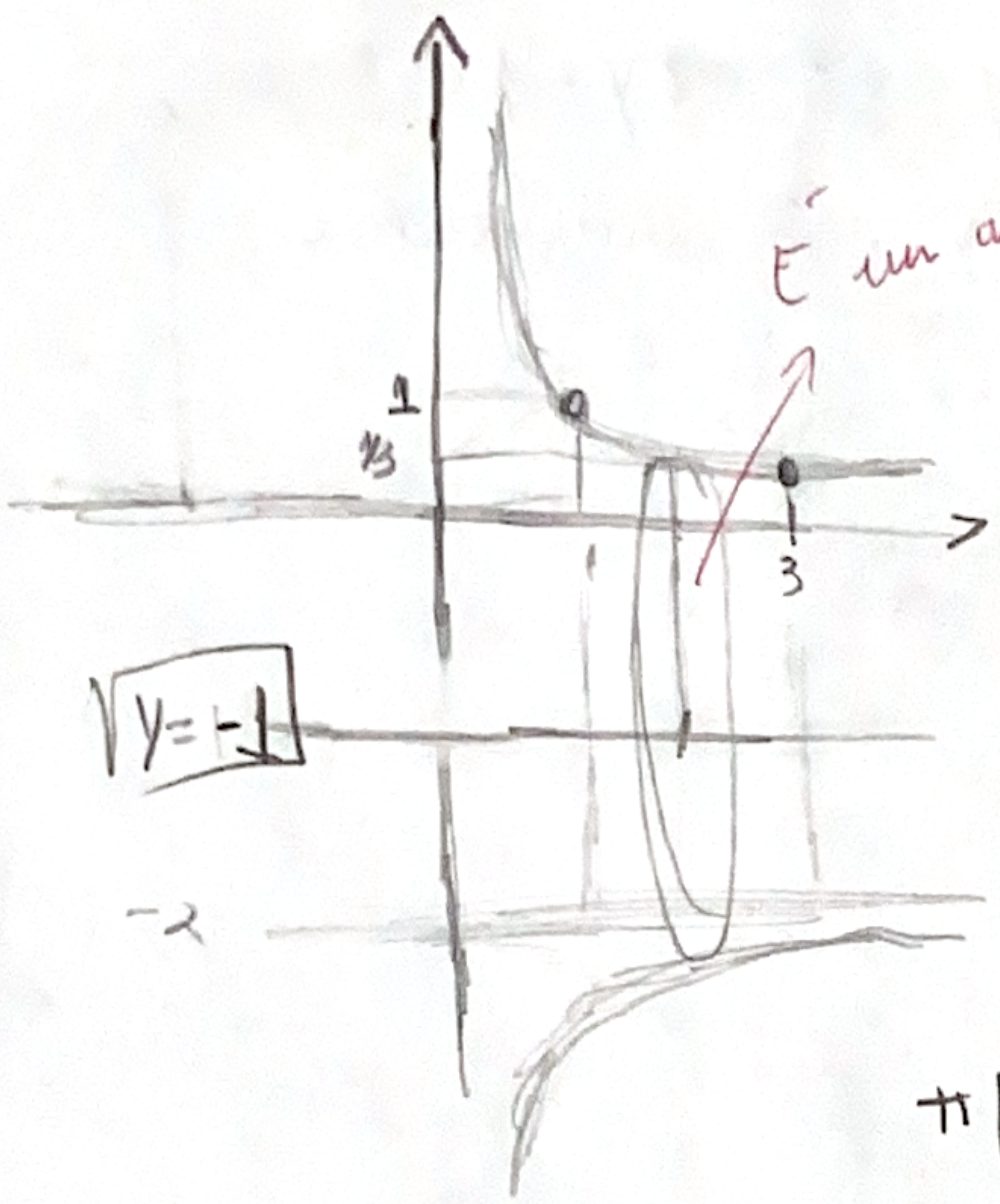
$\int (x^3+2x^2+1)^{\frac{1}{2}}\,dx$

3) a) $y=\frac{1}{x}$, $y=0$, $x=1$, $x=3$ rotacionar $y=-1$

É um anel

Esse é o raio maior

$x=\frac{1}{y}$



$r(x) = 1+\frac{1}{x}$ método disco

$$\pi\int_1^3 \left(1+\frac{1}{x}\right)^2 dx = \pi\int_1^3 1+2\frac{1}{x}+\left(\frac{1}{x}\right)^2 dx$$

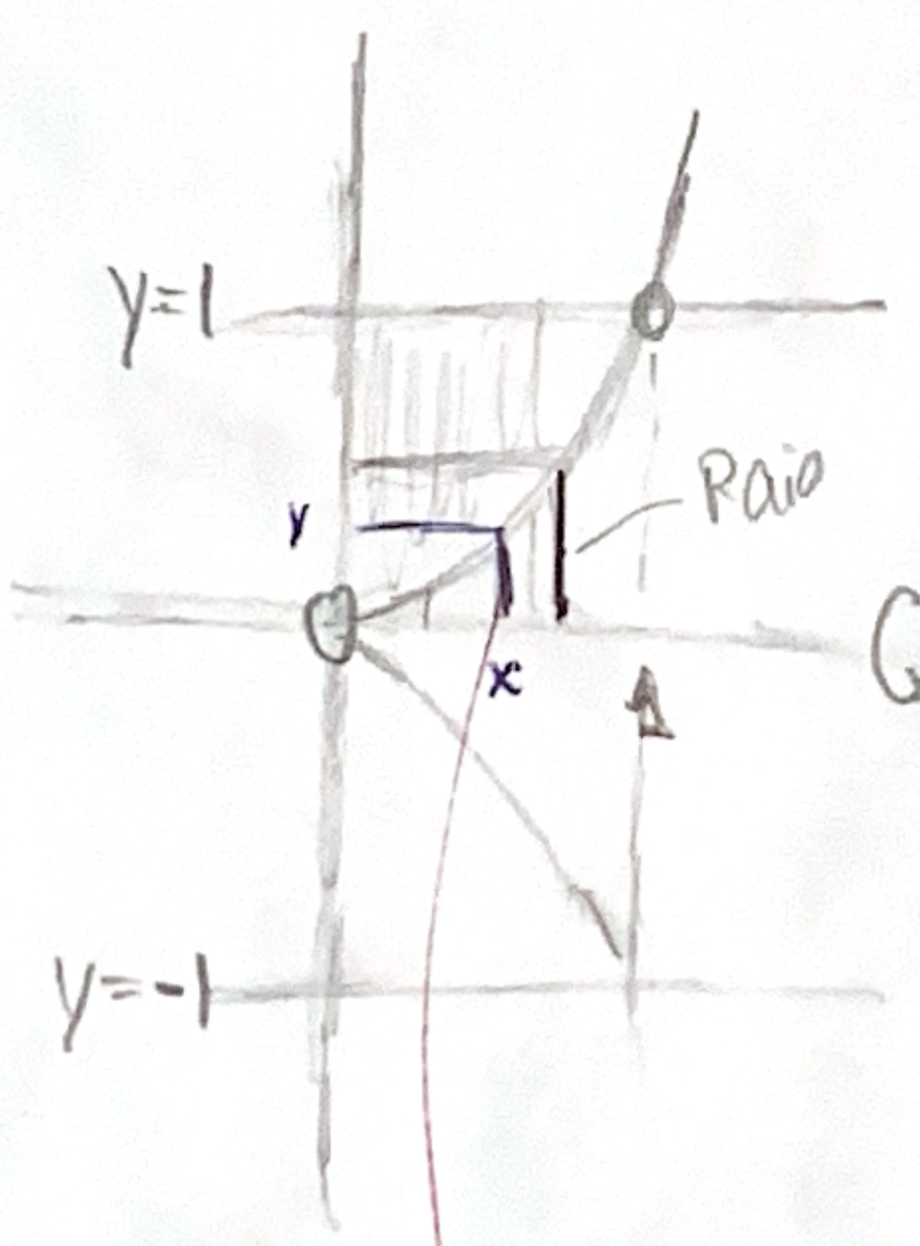
$$\pi\left[\int 1\,dx + 2\int \frac{1}{x}\,dx + \int \frac{1}{x^2}\,dx\right]$$

$$\pi\left[x+2\ln x-\frac{1}{x}\right]\Big|_1^3$$

$$\pi\left[\left(3+2\ln 3-\frac{1}{3}\right)-\left(1+2\cdot\overset{=0}{\ln 1}-\frac{1}{1}\right)\right]$$

$$\pi\left[2\ln 3+\frac{8}{3}-0\right] = \pi\left(2\ln 3+\frac{8}{3}\right) \qquad 2\pi\left(\frac{8}{3}\ln|3|\right)$$

b) $x=\sqrt{y}$, $x=0$ $y=1$, girar em torno do eixo x



$x=\sqrt{y} \Rightarrow (x)^2=(\sqrt{y})^2 \Rightarrow y=x^2$

altura: x

raio: x^2

intervalo: $0\le x\le 1$

$$\int_0^1 2\pi(x^2)(x)\,dx$$

$$2\pi\int_0^1 x^3\,dx$$

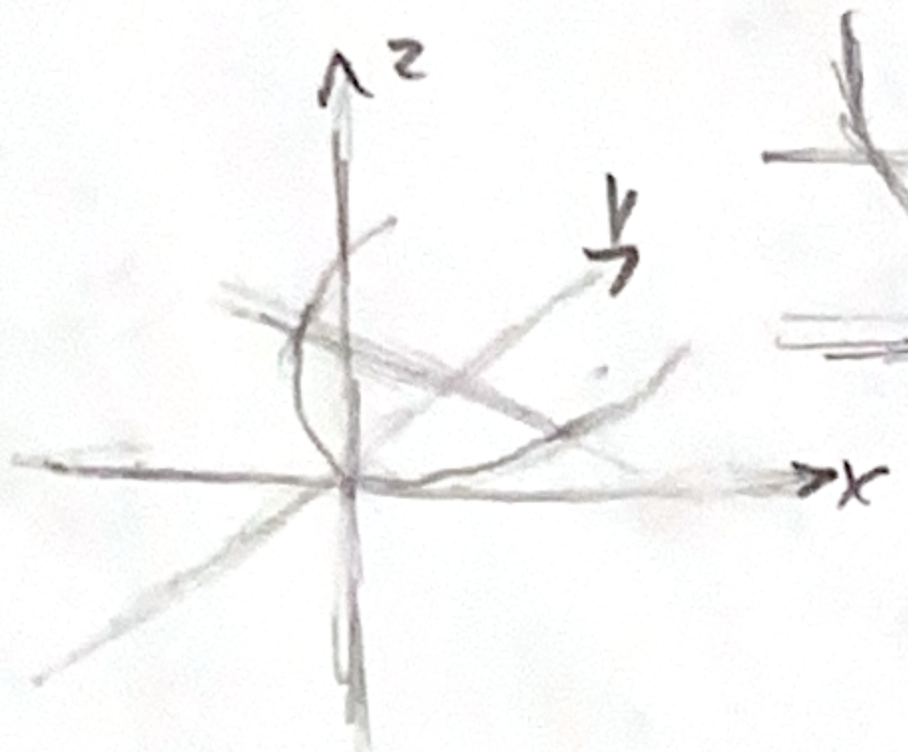
$$2\pi\left(\frac{x^4}{4}\right)\Big|_0^1 = 2\pi\left[\frac{1}{4}-0\right]=\frac{\pi}{2}$$

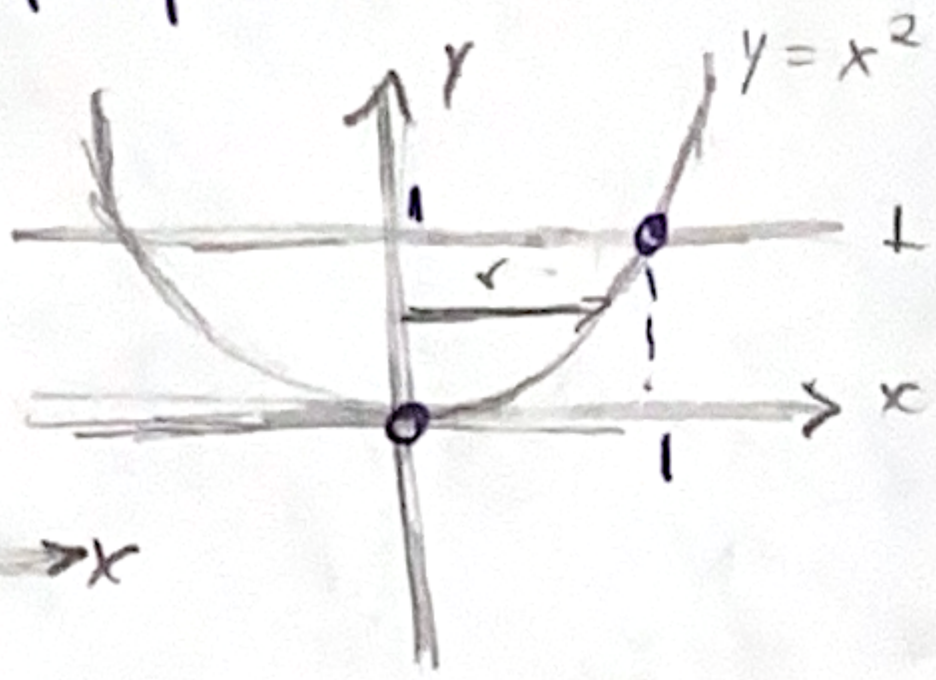
Os segmentos são // ao eixo x e a integral depende de y.

[illegible]

4) a) base é a região limitada por $y = x^2$ e $y = 1$

Secções perpendiculares ao eixo y são quadrados





$y = x^2 \Rightarrow x = \sqrt{y}$

$L_{Total} = 2\sqrt{y}$

$A(x) = L^2 = (2\sqrt{y})^2 = 4y$

e

$\int_0^1 4y \, dy = 4\left(\frac{y^2}{2}\right)\Big|_0^1 = 2(1^2 - 0^2) = 2$

4b)

7