4. ESPAÇOS VETORIAIS

Relembre: dados os vetores $\vec{u}$, $\vec{v}$ e $\vec{w}$ e os escalares a e b, temos quatro propriedades referentes à soma de vetores e quatro propriedades referentes à multiplicação por escalar.

a) $\vec{u} + (\vec{v} + \vec{w}) = (\vec{u} + \vec{v}) + \vec{w}$ (associativa para a soma);

b) $\vec{u} + \vec{v} = \vec{v} + \vec{u}$ (comutativa para a soma);

c) Existe o vetor $\vec{0}$, tal que $\vec{u} + \vec{0} = \vec{0} + \vec{u} = \vec{u}$ (existência do elemento neutro);

d) Existe o vetor $-\vec{u}$, tal que $-\vec{u} + \vec{u} = \vec{u} + (-\vec{u}) = \vec{0}$ (existência do elemento oposto);

e) $a \cdot (\vec{u} + \vec{v}) = a \cdot \vec{u} + a \cdot \vec{v}$ (distributiva para soma de vetores);

f) $(a + b) \cdot \vec{u} = a \cdot \vec{u} + b \cdot \vec{u}$ (distributiva para soma de escalares);

g) $a \cdot (b \cdot \vec{u}) = (a \cdot b) \cdot \vec{u}$;

h) $1 \cdot \vec{u} = \vec{u}$.

– Espaço vetorial

Um espaço vetorial real V é um conjunto, não vazio, no qual são definidas duas operações:

- **Soma** (+): $V \times V \to V$
- **Multiplicação por escalar** (·): $R \times V \to V$

tais que para quaisquer u, v e $w \in V$ e a e $b \in \mathbb{R}$, as seguintes propriedades são satisfeitas:

A_1) $u + (v + w) = (u + v) + w$

A_2) $u + v = v + u$

A_3) Existe $0 \in V$, tal que $u + 0 = 0 + u = u$

A_4) Existe $-u \in V$, tal que $-u + u = u + (-u) = 0$

M_1) $a \cdot (u + v) = a \cdot u + a \cdot v$

M_2) $(a + b) \cdot u = a \cdot u + b \cdot u$

M_3) $a \cdot (b \cdot u) = (a \cdot b) \cdot u$

M_4) $1 \cdot u = u$

---

1) A operação soma (+): $V \times V \to V$ indica que dados $u \in V$ e $v \in V$, então $u + v \in V$ e a operação multiplicação por escalar (·): $R \times V \to V$ indica que dados $a \in R$ e $u \in V$, então $a \cdot u \in V$.

2) Se os escalares a e b forem números complexos, temos um espaço vetorial complexo.

3) A partir de agora, todo elemento pertencente a um espaço vetorial será chamado de **vetor**. Por exemplo, se o espaço vetorial for $V = M(2,2)$, então os vetores desse espaço serão matrizes.

1) $\mathbb{R}^2$ é um espaço vetorial

Definido como:

$\mathbb{R}^2 = \{(x,y) \mid x \in \mathbb{R} \text{ e } y \in \mathbb{R}\}$

Vamos usar

$\vec{u} = (x_1, y_1)$ $\vec{v} = (x_2, y_2)$ e $\vec{w} = (x_3, y_3)$

com $a, b \in \mathbb{R}$. $\vec{0} = (0,0)$

Definimos:

i) SOMA (+)

$\vec{u} + \vec{v} = (x_1 + x_2, y_1 + y_2)$

ii) Multiplicação por escalar

$a \cdot \vec{u} = (ax_1, ay_1)$

E verificamos se são satisfeitas as oito propriedades.

A1) $u + (v + w) = (u + v) + w$

$$\boxed{u + (v + w)} = (x_1, y_1) + [(x_2, y_2) + (x_3, y_3)]$$
$$= (x_1, y_1) + (x_2 + x_3, y_2 + y_3)$$
$$= (x_1 + x_2 + x_3, y_1 + y_2 + y_3)$$
$$= (x_1 + x_2, y_1 + y_2) + (x_3, y_3)$$
$$= [(x_1, y_1) + (x_2, y_2)] + (x_3, y_3)$$
$$= \boxed{(u + v) + w}$$

$\therefore u + (v + w) = (u + v) + w$

A2) $u + v = v + u$

$u + v = (x_1, y_1) + (x_2, y_2)$

$$\boxed{u + v = (x_1 + x_2, y_1 + y_2)}$$

e

$v + u = (x_2, y_2) + (x_1, y_1)$

$v + u = (x_2 + x_1, y_2 + y_1)$

$$\boxed{v + u = (x_1 + x_2, y_1 + y_2)}$$

$$\boxed{\therefore u + v = v + u}$$

$A_3)$ $\exists\, 0 \in V \,/\, u+0 = 0+u = u$

$\boxed{u+0} = (x_1,y_1)+(0,0)$
$= (x_1+0,\ y_1+0)$
$= (x_1,y_1) \boxed{= u}$

$\boxed{0+u} = (0,0)+(x_1,y_1)$
$= (0+x_1,\ 0+y_1)$
$= (x_1,y_1) = \boxed{u}$

$\boxed{\therefore\ u+0 = 0+u = u}$

$A_4)$ $\exists\, -u \in V \,/\, -u+u = u+(-u) = 0$

$\boxed{-u+u} = -(x_1,y_1)+(x_1,y_1)$
$= (-x_1,-y_1)+(x_1,y_1)$
$= (-x_1+x_1,\ -y_1+y_1)$
$= (0,0) = \boxed{\vec{0}} =$
$= (x_1-x_1,\ y_1-y_2)$
$= (x_1,y_1)+(-x_1,-y_1)$
$= u-(x_1,y_1)$
$= \boxed{u+(-u)}$

$\therefore\ -u+u = u+(-u) = 0$

$M_1)$ $a(\vec{u}+\vec{v}) = au + aV$

$\boxed{a(u+V)} =$
$a((x_1,y_1)+(x_2,y_2))$
$a(x_1+x_2,\ y_1+y_2)$
$(a(x_1+x_2),\ a(y_1+y_2))$
$\boxed{(ax_1+ax_2,\ ay_1+ay_2)}$

$\boxed{au+av} =$
$a(x_1,y_1)+a(x_2,y_2)$
$(ax_1,\ ay_1)+(ax_2,\ ay_2)$
$\boxed{(ax_1+ax_2,\ ay_1+ay_2)}$

$\therefore\ a(\vec{u}+\vec{v}) = a\vec{u}+a\vec{v}$

M2) $(a+b)\cdot u = au + bu$

$\boxed{(a+b)\cdot(x_1,y_1)} =$	$\boxed{au + bu}$
$((a+b)x_1, (a+b)y_1) =$	$a(x_1,y_1) + b(x_1,y_1)$
$\boxed{(ax_1+bx_1, ay_1+by_1)}$	$(ax_1, ay_1) + (bx_1, by_1)$
	$\boxed{(ax_1+bx_1, ay_1+by_1)}$

$\therefore (a+b)u = au + bu$

M3) $a\cdot(b\cdot u) = (ab)u$

$= \boxed{a[b\cdot(x_1,y_1)]} = a(bx_1, by_1) = (abx_1, aby_1) =$

$ab(x_1,y_1) = (ab)\cdot u$

$\therefore a\cdot(b\cdot u) = (ab)u$

M4) $1\cdot u = u$

$\boxed{1u} = 1(x_1,y_1) = (1x_1, 1y_1) = (x_1,y_1) = \boxed{u}$

$\therefore 1u = u$

Como $\mathbb{R}^2 = \{(x,y) / x \in \mathbb{R}$ e $y \in \mathbb{R}\}$ atende as oito propriedades, Então $\mathbb{R}^2$ é um espaço vetorial.

$\mathbb{R}^3$, da mesma forma tb. é E.V., também.

De agora em diante, não precisamos mais mostrar propriedade de operações usuais de $\mathbb{R}^n$ para $+$ e $\cdot$

ficam subtendidos:

$\mathbb{R}^2$ com operações usuais:

$(+): (x_1, y_1) + (x_2, y_2) = (x_1 + x_2, \; y_1 + y_2)$

$(\cdot): a \cdot (x_1, y_1) = (a x_1, a y_1)$

ESPAÇO VETORIAL.

e

$\mathbb{R}^3$ com operações usuais:

$(+): (x_1, y_1, z_1) + (x_2, y_2, z_2) = (x_1 + x_2, \; y_1 + y_2, \; z_1 + z_2)$

$(\cdot): a(x_1, y_1, z_1) = (a x_1, a y_1, a z_1)$

Espaço Vetorial

e subtendemos para $\mathbb{R}^n$ com operações usuais $(+)$ e $(\cdot)$.

Para operações <u>não</u>-usuais, usar outro operador.

em geral:

$\oplus$ para soma

$\otimes$ para produto por escalar.

2.2. Verifique se o conjunto de vetores no espaço $V = R^3 = [(x, y, z); x, y, z \in \mathbb{R}\}$ é um espaço vetorial com as operações de soma e multiplicação por escalar definidas como:

$\oplus: (x_1, y_1, z_1) + (x_2, y_2, z_2) = (x_1 + x_2, y_1 + y_2, z_1 + z_2)$

$\otimes: a \cdot (x, y, z) = (0, 0, 0)$

Definimos:

$u = (x_1, y_1, z_1)$; $v = (x_2, y_2, z_2)$; $w = (x_3, y_3, z_3)$

$a, b \in \mathbb{R}$ e $\vec{0} = (0, 0, 0)$

A_1, A_2, A_3 e A_4, ok; usual de $\mathbb{R}^3$.

M1) $a(u+v) = au + av$

$a \otimes (u+v) = a \otimes [(x_1, y_1, z_1) \oplus (x_2, y_2, z_2)]$

$= a \otimes (x_1 + x_2, y_1 + y_2, z_1 + z_2)$

$= (0, 0, 0)$

e

$au + av = a \otimes (x_1, y_1, z_1) \oplus a \otimes (x_2, y_2, z_2)$

$= (0, 0, 0) \oplus (0, 0, 0)$

$= (0, 0, 0)$

$\therefore a(u+v) = au + av.$

M2) $\cancel{u+v = v+u}$ $(a+b) \cdot u = au + bu$

$(a \oplus b) \otimes u = (a+b) \otimes (x_1, y_1, z_1) = (0, 0, 0)$

e

$au + bu = a \otimes (x_1, y_1, z_1) \oplus b \cdot (x_1, y_1, z_1)$

$= (0, 0, 0) \oplus (0, 0, 0) = (0, 0, 0)$

$\therefore (a+b) \otimes u = a \otimes u \oplus b \otimes u.$

M3) $a \cdot (b \cdot u) = (a \cdot b) \cdot u$

$a \cdot (b \cdot u) = a \cdot [b \otimes (x_1, y_1, z_1)] = a \otimes (0, 0,$

e

$(ab) \cdot u = ab \otimes (x_1, y_1, z_1) = (0, 0, 0)$

$\therefore \quad a \cdot (b \cdot u) = (ab)u$.

M4) $1 \cdot u = u$

$1 \otimes u = 1 \otimes (x_1, y_1, z_1) = (0, 0, 0) \neq u$

$\therefore$ Não atende a propriedade M4, logo V não é um espaço vetorial.

1) Seja o conjunto

$$W = \left\{ \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} ; a, b, c, d \in \mathbb{R} \right\},$$

isto é, o conjunto das matrizes de ordem 2×2. Mostre que W é um espaço vetorial com as operações de soma e multiplicação por escalar definida abaixo:

$$+ : \begin{bmatrix} a_1 & b_1 \\ c_1 & d_1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} a_2 & b_2 \\ c_2 & d_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_1 + a_2 & b_1 + b_2 \\ c_1 + c_2 & d_1 + d_2 \end{bmatrix}$$

$$\cdot : \alpha \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \alpha \cdot a & \alpha \cdot b \\ \alpha \cdot c & \alpha \cdot d \end{bmatrix}$$

Vamos definir

$u = \begin{pmatrix} a_1 & b_1 \\ c_1 & d_1 \end{pmatrix}$ $V = \begin{pmatrix} a_2 & b_2 \\ c_2 & d_2 \end{pmatrix}$ $w = \begin{pmatrix} a_3 & b_3 \\ c_3 & d_3 \end{pmatrix}$

$a, b \in \mathbb{R}$ e $\vec{0} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ $a_i, b_i, c_i \in \mathbb{R}$

A1) $u + (V + w) = (u + V) + w$

$$\boxed{u + (V + w)} = \begin{pmatrix} a_1 & b_1 \\ c_1 & d_1 \end{pmatrix} + \left[\begin{pmatrix} a_2 & b_2 \\ c_2 & d_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} a_3 & b_3 \\ c_3 & d_3 \end{pmatrix} \right] =$$

$$= \begin{pmatrix} a_1 & b_1 \\ c_1 & d_1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} a_2 + a_3 & b_2 + b_3 \\ c_2 + c_3 & d_2 + d_3 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} a_1 + a_2 + a_3 & b_1 + b_2 + b_3 \\ c_1 + c_2 + c_3 & d_1 + d_2 + d_3 \end{pmatrix} =$$

$$= \left[\begin{pmatrix} a_1 + a_2 & b_1 + b_2 \\ c_1 + c_2 & d_1 + d_2 \end{pmatrix} \right] + \begin{pmatrix} a_3 & b_3 \\ c_3 & d_3 \end{pmatrix}$$

$$= \left[\begin{pmatrix} a_1 & b_1 \\ c_1 & d_1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} a_2 & b_2 \\ c_2 & d_2 \end{pmatrix} \right] + \begin{pmatrix} a_3 & b_3 \\ c_3 & d_3 \end{pmatrix}$$

$$= \boxed{(u + V) + w}$$

A1 CONFERE.

$A_2)$ $u+v = v+u$

$$\boxed{u+v}\ \begin{pmatrix} a_1 & b_1 \\ c_1 & d_1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} a_2 & b_2 \\ c_2 & d_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_1+a_2 & b_1+b_2 \\ c_1+c_2 & d_1+d_2 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} a_2+a_1 & b_2+b_1 \\ c_2+c_1 & d_2+d_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_2 & b_2 \\ c_2 & d_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} a_1 & b_1 \\ c_1 & d_1 \end{pmatrix} = \boxed{v+u}$$

A_2 ok!

$A_3)$ $\exists\ \vec{0}\ /\ u+0 = 0+u = u$

$$u+0 = \begin{pmatrix} a_1 & b_1 \\ c_1 & d_1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_1+0 & b_1+0 \\ c_1+0 & d_1+0 \end{pmatrix} =$$

$$= \underbrace{\begin{pmatrix} a_1 & b_1 \\ c_1 & d_1 \end{pmatrix}}_{u} = \begin{pmatrix} 0+a_1 & 0+b_1 \\ 0+c_1 & 0+c_1 \end{pmatrix} = 0+u$$

$\therefore$ $u+0 = 0 = 0+u$, A_3 ok.

$A_4)$ $-u+u = u+(-u) = 0$

$$-u+u = -\begin{pmatrix} a_1 & b_1 \\ c_1 & d_1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} a_1 & b_1 \\ c_1 & d_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -a_1 & -b_1 \\ -c_1 & -d_1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} a_1 & b_1 \\ c_1 & d_1 \end{pmatrix}$$

$$= \underbrace{\begin{pmatrix} -a_1+a_1 & -b_1+b_1 \\ -c_1+c_1 & -d_1+d_1 \end{pmatrix}}_{} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = 0$$

$$= \begin{pmatrix} a_1-a_1 & b_1-b_1 \\ c_1-c_1 & d_1-d_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_1 & b_1 \\ c_1 & d_1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -a_1 & -b_1 \\ -c_1 & -d_1 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} a_1 & b_1 \\ c_1 & d_1 \end{pmatrix} + \left[-\begin{pmatrix} a_1 & b_1 \\ c_1 & d_1 \end{pmatrix}\right] = u+(-u)$$

$\therefore$ $-u+u = 0 = u+(-u)$

A_4 ok.

M1) $a(u+v) = au + av$

$$\boxed{a(u+v)} = a\left[\begin{pmatrix} a_1 & b_1 \\ c_1 & d_1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} a_2 & b_2 \\ c_2 & d_2 \end{pmatrix}\right]$$

$$= a\begin{pmatrix} a_1+a_2 & b_1+b_2 \\ c_1+c_2 & d_1+d_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a(a_1+a_2) & a(b_1+b_2) \\ a(c_1+c_2) & a(d_1+d_2) \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} aa_1+aa_2 & ab_1+ab_2 \\ ac_1+ac_2 & ad_1+ad_2 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} aa_1 & ab_1 \\ ac_1 & ab_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} aa_2 & ab_2 \\ ac_2 & ad_2 \end{pmatrix} =$$

$$a\begin{pmatrix} a_1 & b_1 \\ c_1 & d_1 \end{pmatrix} + a\begin{pmatrix} a_2 & b_2 \\ c_2 & d_2 \end{pmatrix} = \boxed{au + av.}$$

M1) ok.

M2) $(a+b)\cdot u = au + bu$

$$\boxed{(a+b)u} = (a+b)\cdot\begin{pmatrix} a_1 & b_1 \\ c_1 & d_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (a+b)a_1 & (a+b)b_1 \\ (a+b)c_1 & (a+b)d_1 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} aa_1+ba_1 & ab_1+bb_1 \\ ac_1+bc_1 & ad_1+bd_1 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} aa_1 & ab_1 \\ ac_1 & ad_1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} ba_1 & bb_1 \\ bc_1 & bd_1 \end{pmatrix} =$$

$$= a\begin{pmatrix} a_1 & b_1 \\ c_1 & d_1 \end{pmatrix} + b\begin{pmatrix} a_1 & b_1 \\ c_1 & d_1 \end{pmatrix} = \boxed{au + bu}$$

M2 ok!

M3) $a(bu) = (ab)u$

$$\boxed{a(bu)} = a\left[b\begin{pmatrix} a_1 & b_1 \\ c_1 & d_1 \end{pmatrix}\right] = a\begin{pmatrix} ba_1 & bb_1 \\ bc_1 & bd_1 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} aba_1 & abb_1 \\ abc_1 & abd_1 \end{pmatrix} = ab\begin{pmatrix} a_1 & b_1 \\ c_1 & d_1 \end{pmatrix} = \boxed{(ab)\cdot u}$$

M3 ok!

M4) $1 \cdot u = u$

$$\boxed{1 \cdot u} = 1 \cdot \begin{pmatrix} a_1 & b_1 \\ c_1 & d_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1a_1 & 1b_1 \\ 1c_1 & 1d_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_1 & b_1 \\ c_1 & d_1 \end{pmatrix} = \boxed{u}$$

M4 ok.

$\therefore$ M_{2x2} é um V (espaço vetorial) para as operações usuais

Vamos considerar o espaço matricial M_{mxn} com um V para as operações usuais. + e ·

↳ mult. por escalar

↳ soma.

a) $V = R^2$

$\otimes : k(x, y) = (x, ky)$

Subtendemos $+$: usual do $\mathbb{R}^2$

Portanto, A_1, A_2, A_3, A_4 ok.

Vamos definir

$u=(x_1,y_1) \quad v=(x_2,y_2) \quad a,b \in \mathbb{R} \quad \vec{0}=(0,0) \quad k, k_1, k_2 \in \mathbb{R}$

Tentar procurar uma propriedade que não feche.

$M1)$ $k(u+v) = ku + kv$

$$\boxed{k(u+v)} = k\otimes[(x_1,y_1)+(x_2,y_2)] = k\otimes(x_1+x_2,\ y_1+y_2)$$

$$= (x_1+x_2,\ k(y_1+y_2)) = \boxed{(x_1+x_2,\ ky_1+ky_2)}$$

e

$$\boxed{ku+kv} = k(x_1,y_1) + k(x_2,y_2) = (x_1,\ ky_1)+(x_2,\ ky_2)$$

$$= \boxed{(x_1+x_2,\ ky_1+ky_2)}$$

$\therefore\ k(u+v) = ku+kv.$

$M2)$ $(k_1+k_2)u = k_1u + k_2u$

$$(k_1+k_2)u = (k_1+k_2)\otimes(x_1,\ y_1) = (x_1,\ (k_1+k_2)y_1)$$

$$= (x_1,\ k_1y_1+k_2y_1)$$

e

$$k_1u+k_2u = k_1\otimes(x_1,y_1)+k_2\otimes(x_1,y_1)$$

$$= (x_1,\ k_1y_1)+(x_1,\ k_2y_1)$$

$$= (x_1+x_1,\ k_1y_1+k_2y_1)$$

$$= (2x_1,\ k_1y_1+k_2y_1)$$

$\therefore\ (k_1+k_2)u \neq k_1u+k_2u$

Logo, V não é espaço vetorial e encerra aqui!

b) $V = R^3$

$\oplus : (a, b, c) + (d, e, f) = (a, b, c)$

$\cdot : k(a, b, c) = (ka, kb, kc)$

• é usual de $\mathbb{R}^3$, M_1, M_2, M_3 e M_4 ok.
Verificar A_1, A_2, A_3 e A_4.

A_2, $u \oplus v = v \oplus u$

$u = (a, b, c) \qquad v = (d, e, f)$

$u \oplus v = (a, b, c) \oplus (d, e, f) = (a, b, c)$

e

$v \oplus u = (d, e, f) \oplus (a, b, c) = (d, e, f)$

$\therefore \; u \oplus v \neq v \oplus u$

$\therefore$ V NÃO é E.V.

c) $V = \{(x, y);\, y = x^2\} = \{(x, x^2);\, x \in \mathbb{R}\}$

$\oplus : (a, a^2) \oplus (b, b^2) = (a + b, (a + b)^2)$

$\otimes : k \otimes (a, b) = (ka, k^2a^2)$

Definimos:

$u=(a,a^2)$ $v=(b,b^2)$ $w=(c,c^2)$

$k, l \in \mathbb{R}$ $a,b,c \in \mathbb{R}$ $\vec{0}=(0,0)=(0,0^2)$

Procurar uma P. que pareça não fechar.

$M_2)$ $(a+b).u = au + bu$

USAR

$(k \oplus l) \otimes u = k \otimes u \oplus l \otimes u$

$(k+l) \otimes u = (k+l) \otimes (a, a^2)$

$= ((k+l)a, (k+l)^2 a^2)$

$= (ka+la, \boxed{k^2a^2+2kla^2+l^2a^2})$

$k \otimes u \oplus l \otimes u =$

$k \otimes (a,a^2) \oplus l \otimes (a,a^2) =$

$= (ka, k^2a^2) + (la, l^2a^2)$

$= (ka+la, (k^2a^2+l^2a^2)^2)$

$= (ka+la, \boxed{k^4a^4+2k^2l^2a^4+l^4a^4})$

$\therefore$ V não é Esp. Vetor.

pois não respeita a P. M_2.

Seção 2 – Subespaço vetorial

Nesta seção, você estudará espaços vetoriais dentro de espaços vetoriais, ou seja, os chamados **subespaços vetoriais**.

Será que, para mostrar que um subconjunto W de um espaço vetorial V é um subespaço vetorial, é necessário verificar os oito axiomas da definição?

Felizmente, não! Basta analisar com cuidado o que acontece.

Teorema 2.1: seja V um espaço vetorial. Um subconjunto W, não vazio, é um subespaço vetorial de V se forem satisfeitas as seguintes condições:

a) Para todo $u, v \in W$, tem-se: $u + v \in W$.

b) Para todo $u \in W$ e $a \in \mathbb{R}$, tem-se: $a \cdot u \in W$.

Com isto, garantimos as oito propriedades de espaço vetorial. De fato, pela condição (b), $a \cdot u \in W$ para todo $a \in \mathbb{R}$. Em particular se $a = 0$, então $0 \cdot u = 0 \in W$, ou seja, isto garante a existência do elemento neutro, portanto a propriedade A_3 é satisfeita. Particularmente também, se tomarmos $a = -1$, então

2.5. Prove que o conjunto $W = \{(x, y) \in R^2; y = 3x\}$ é um subespaço vetorial.

Vamos definir:

$a \in \mathbb{R}$

$u = (x_1, 3x_1)$ e $v = (x_2, 3x_2)$; $u \in W$ e $v \in W$.

Definir o $\vec{0}$, se $\nexists \vec{0}$, W não é subespaço vetorial, se $\exists \vec{0}$, pode ser subesp. vetd.

$\vec{0} = (0, 3 \cdot 0) = (0,0)$; $\exists \vec{0}$.

i) $u + v \in W$?

$$\begin{aligned} u + v &= (x_1, 3x_1) + (x_2, 3x_2) \\ &= (x_1 + x_2, 3x_1 + 3x_2) \\ &= (x_1 + x_2, 3(x_1 + x_2)) \\ &= (x, 3x) \quad \text{se } x_1 + x_2 = x \end{aligned}$$

ok, $u + v \in W$.

ii) $a \cdot u \in W$?

$$\begin{aligned} a \cdot u &= a(x_1, 3x_1) = (ax_1, a3x_1) \\ &= (ax_1, 3ax_1) = (x, 3x) \\ &\qquad \text{p/ } ax_1 = x. \end{aligned}$$

$\therefore a \cdot u \in W$.

$\therefore$ W é subespaço vetorial de $V = \mathbb{R}^2$.

2.6. Seja $W_1 = \{(x, y, z); y = x \text{ e } z = 0\}$. W_1 é um subespaço vetorial?

$u = (x_1, x_1, 0)$

$v = (x_2, x_2, 0)$ $\quad \vec{0} = (0, 0, 0)$ $\quad a \in \mathbb{R}$.

OK!

W_1 é subesp. vet. de $\mathbb{R}^3$?

i) $u + v \in W_1$?

$$u + v = (x_1, x_1, 0) + (x_2, x_2, 0)$$
$$= (x_1 + x_2, x_1 + x_2, 0)$$
$$= (x, x, 0) \quad ; \quad x_1 + x_2 = x$$

$\therefore u + v \in W_1$

ii) $a \cdot u \in W_1$?

$$a \cdot u = a(x_1, x_1, 0) = (ax_1, ax_1, 0a)$$
$$= (ax_1, ax_1, 0)$$
$$= (x, x, 0) \quad \text{se } ax_1 = x.$$

$\therefore a \cdot u \in W_1$

$\therefore W_1$ é subesp. vet. de $\mathbb{R}^3$.

2.7. Seja $W_2 = \{M(m, n); a_{11} \geq 0\}$. Mostre que W_2 não é um subespaço vetorial.

W_2 = Matrizes $(m \times n)$ tais que $a_{11} \geq 0$.

Não fecha p/ (ii) $a \cdot M \in W_2$

Segue um contra exemplo.

se $a = -2$ e $M = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \in W_2$

então $a \cdot M = -2 \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \notin W_2$

pois $-2 < 0$.

$a_{11} < 0$.

Um contra-exemplo já serve

Contra-exemplo pode ser específico.

pois se for S.E.V., então serve $\forall$ elemento de W_2.

2.8. Verifique se $W_3 = \{(x, y, z) \in R^3; 2x - y + 3z = 0\}$ é um subespaço vetorial.

Esta difícil isolar duas variaveis em função de uma, então vamos tomar $(x_1, y_1, z_1) \in \mathbb{R}^3$ e $(x_2, y_2, z_2) \in \mathbb{R}^3$

com $2x_1 - y_1 + 3z_1 = 0 \in W_3 \quad = u$

$2x_2 - y_2 + 3z_2 = 0 \in W_3 \quad = v$

$a \in \mathbb{R}$.

Temos o elemento neutro $\vec{0}$, basta tomar $x = y = z = 0$.

---

i) $u + v \in W_3$?

$(2x_1 - y_1 + 3z_1) + (2x_2 - y_2 + 3z_2) =$

$(2x_1 + 2x_2) - (y_1 + y_2) + (3z_1 + 3z_2) =$

$2(x_1 + x_2) - (y_1 + y_2) + 3(z_1 + z_2) =$

$2x - y + 3z = 0 \in W_3$

p/ $x_1 + x_2 = x$, $y_1 + y_2 = y$, $z_1 + z_2 = z$.

---

ii) $a \cdot u \in W_3$?

$a(2x_1 - y_1 + 3z_1) =$

$2ax_1 - ay_1 + 3az_1 =$

$2x - y + 3z = 0 \in W_3$

p/ $ax_1 = x$, $ay_1 = y$, $az_1 = z$.

$\therefore$ W_3 é um subespaço vetor de $\mathbb{R}^3$.

Exemplos

2.9. Seja $V = R^2$, verifique se o conjunto $S = \{(x, y) \in R^2; y = x + 1\}$ é um subespaço vetorial.

Basta verificar que o vetor nulo $(0,0) \notin S$, portanto, pela observação 2.3, segue que S não é um subespaço vetorial de V.

2.10. Seja $V = M(2,2)$, verifique se o conjunto $S_1 = \left\{ \begin{bmatrix} 1 & a \\ a & a \end{bmatrix}; a \in \mathbb{R} \right\}$ é um subespaço vetorial de V.

Basta verificar novamente que o vetor nulo $\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \notin S_1$.

Portanto, S_1 não é um subespaço vetorial de V.

2.11. Seja V um espaço vetorial, e sejam W_1 e W_2 subespaços vetoriais. Prove que $W = W_1 \cap W_2$ é um subespaço vetorial.

Devemos provar que a intersecção de dois subespaços vetoriais continua sendo um subespaço vetorial.

De fato, a afirmação é verdadeira.

2.12. Mostre que o conjunto das matrizes diagonais de ordem n é um subespaço vetorial.

Seja

W_1 = {Conjunto das matrizes triangulares superiores}

W_2 = {Conjunto das matrizes triangulares inferiores}

W_1 e W_2 são subespaços vetoriais, pois satisfazem as condições (a) e (b), já que a soma de quaisquer duas matrizes triangulares (superiores ou inferiores) continua sendo uma matriz triangular (superior ou inferior) e, se multiplicarmos qualquer matriz triangular (superior ou inferior) por um escalar real, continua sendo uma matriz triangular (superior ou inferior).

Agora $W = W_1 \cap W_2$ = {conjunto das matrizes diagonais} é um subespaço vetorial, de acordo com o exemplo anterior.

Observação 2.5: você já deve ter observado que todo espaço vetorial V admite pelo menos um subespaço vetorial: o conjunto {0} (subespaço zero), em que {0} representa o conjunto cujo elemento é apenas o vetor nulo. Este subespaço é chamado de **subespaço trivial**. Além disso, como todo conjunto está contido nele mesmo, todo espaço vetorial é subespaço dele mesmo, também chamado de subespaço trivial. Os demais subespaços são chamados de subespaços próprios.

Por exemplo: os subespaços triviais do R^3 são {(0, 0, 0)} e o R^3, os subespaços próprios são os planos e as retas que passam pela origem.

a) W = $\{(x, y); y = x^3\}$

$u = (x_1, x_1^3)$ e $v = (x_2, x_2^3)$

$\vec{0} = (0,0) \in W$

i) $u + v \in W$?

$u + v = (x_1, x_1^3) + (x_2, x_2^3)$

$= (x_1+x_2, x_1^3 + x_2^3) \notin W.$

pois se $u+v$ percencesse a W, então teríamos que ter

$(x_1+x_2, (x_1+x_2)^3)$

$= (x_1+x_2, x_1^3 + 3x_1^2x_2 + 3x_1x_2^2 + x_2^3) \neq (x_1+x_2, x_1^3+x_2^3)$

∴ W NÃO é subespaço vetorial de $\mathbb{R}^2$.

ou, podíamos ter feito contra-exemplo.

se $u = (2, 8)$ e $v = (3, 27)$

$u+v = (2+3, 8+27) = (5, 35) \notin W$

pois $35 \neq 5^3$.

∴ W NÃO é s.e.v. de $\mathbb{R}^2$.

b) $S = \{(x, y); y = 2x - 3\}$

$u = (x_1, 2x_1 - 3)$ e $v = (x_2, 2x_2 - 3)$

$2x_1 - 3 = 0$

$2x_1 = 3$

$x_1 = \frac{3}{2}$

~~cox~~ $(x_1, 2x_1 - 3) = 0$

$x_1 = 0$ $\quad$ $2x_1 - 3 = 0$

$x_1 = \frac{3}{2}$

$0 \neq \frac{3}{2}$

Não há $\vec{0}$, Logo S não é S.E.V. de $\mathbb{R}^2$.

4) Verifique se os conjuntos a seguir são subespaços vetoriais em relação à soma e à multiplicação por escalar usuais. Em caso negativo, dê um contraexemplo.

a) $W = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2, y = x + 1\}$

b) $W = \{(x, x, x); x \in \mathbb{R}\}$

c) $W = \left\{ \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \in M(2,2); b \leq 0 \right\}$

d) $W = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3; x + y + z = 0\}$

e) $W = \{(1, x, y); x, y \in \mathbb{R}\}$

f) $W = \{(x, y, z); z = 2x - y\}$

g) $W = \left\{ \begin{bmatrix} x & y \\ z & w \end{bmatrix} \in M(2,2); x = y \text{ e } w = 0 \right\}$

a) W = {$(x, y) \in \mathbb{R}^2$, $y = x + 1$}

$u = (x_1, x_1+1) \qquad v = (x_2, x_2+1)$

$\vec{0} = (0,0) \notin W$; Logo W NÃO É. S.E.V.

Contra exemplo.

$u = (7,8) \in W, \quad v = (8,9) \in W$

i) $u + v = (7,8) + (8,9) = (15,17)$

$= (15, 15+2) \notin W$

pois $17 \neq 15+1$.

b) W = {(x, x, x); $x \in \mathbb{R}$}

$\vec{u} = (a,a,a) \in W \quad \vec{v} = (b,b,b) \in W \quad k \in \mathbb{R}$

$\vec{0} = (0,0,0) \in W$

i) $\left.\begin{aligned} u+v &= (a,a,a) + (b,b,b) \\ &= (a+b, a+b, a+b) \\ &= (x,x,x); \quad p/\ a+b = x \end{aligned}\right\} \therefore u+v \in W.$

ii) $k \cdot u = k(a,a,a) = (ka, ka, ka) = (x,x,x) \in W$ p/ $x = ka$.

$\therefore$ W é S.E.V. de $\mathbb{R}^3$

c) $W = \left\{ \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \in M(2,2);\ b \le 0 \right\}$

Contra exemplo: $a \in \mathbb{R}$

$$u = \begin{pmatrix} 0 & -2 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \in W$$

Mas; $a \cdot u$, com $a = -5$ segue $a \cdot u = -5 \cdot \begin{pmatrix} 0 & -2 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & +10 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \notin W$

$b > 0$.

Logo, W não é S.E.V. de $M(2,2)$

d) $W = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3;\ x + y + z = 0\}$

$u = (x_1 + y_1 + z_1 = 0) \in W$

$v = (x_2 + y_2 + z_2 = 0) \in W$ $\quad a \in \mathbb{R}$

$\vec{0} \in W$ pois $(0,0,0) \in \mathbb{R} \Rightarrow \vec{0} = 0$.

i) $u + v = (x_1 + y_1 + z_1) + (x_2 + y_2 + z_2)$

$= x_1 + y_1 + z_1 + x_2 + y_2 + z_2$

$= (x_1 + x_2) + (y_1 + y_2) + (z_1 + z_2) = 0 \in W$

Basta formar, $\quad x = x_1 + x_2$

$y = y_1 + y_2$

$z = z_1 + z_2$

ii) $a \cdot u = a(x_1 + y_1 + z_1) = a \cdot 0 = 0 \in W$.

$\therefore$ W é SEV. de $\mathbb{R}^3$.

e) $W = \{(1, x, y);\ x, y \in \mathbb{R}\}$

Contra exemplo

$u = (1, 2, 3)$ e $v = (1, -3, 7)$

$u + v = (1, 2, 3) + (1, -3, 7)$

$= (1+1,\ 2-3,\ 3+7)$

$= (2, -1, 10) \notin W$ pois $2 \neq 1$.

Logo, W não é SEV.

f) $W = \{(x, y, z);\ z = 2x - y\}$

$u = (x_1, y_1, 2x_1 - y_1)$ $\quad \vec{0} = (0, 0, 0)$

$v = (x_2, y_2, 2x_2 - y_2)$ $\quad a \in \mathbb{R}$

i) $u + v = (x_1, y_1, 2x_1 - y_1) + (x_2, y_2, 2x_2 - y_2)$

$= (x_1 + x_2,\ y_1 + y_2,\ 2x_1 - y_1 + 2x_2 - y_2)$

$= (x_1 + x_2,\ y_1 + y_2,\ 2(x_1 + x_2) - (y_1 + y_2)) \in W$

p/ $x = x_1 + x_2$ e $y = y_1 + y_2$

ii) $a \cdot u = a(x_1, y_1, 2x_1 - y_1)$

$= (ax_1, ay_1, a(2x_1 - y_1))$

$= (ax_1, ay_1, 2ax_1 - ay_1) \in W$

p/ $x = ax_1$ e $y = ay_1$

$\therefore$ W é S.E.V.

g) W = $\left\{ \begin{bmatrix} x & y \\ z & w \end{bmatrix} \in M(2,2);\ x = y \text{ e } w = 0 \right\}$

$u = \begin{pmatrix} x_1 & x_1 \\ z_1 & 0 \end{pmatrix} \in W$ e $v = \begin{pmatrix} x_2 & x_2 \\ z_2 & 0 \end{pmatrix} \in W$

$\vec{0} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \in W$ $\qquad a \in \mathbb{R}$

i) $\vec{u} + \vec{v} = \begin{pmatrix} x_1 & x_1 \\ z_1 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} x_2 & x_2 \\ z_2 & 0 \end{pmatrix}$

$= \begin{pmatrix} x_1+x_2 & x_1+x_2 \\ z_1+z_2 & 0 \end{pmatrix} \in W$

p/ $x_1+x_2 = x$ e $z_1+z_2 = z$

ii) $a \cdot u = a\begin{pmatrix} x_1 & x_1 \\ z_1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ax_1 & ax_1 \\ az_1 & 0 \end{pmatrix} \in W$

p/ $ax_1 = x$ e $az_1 = z$.

$\therefore$ W é SEV.