IFC Blumenau - álgebra linear - 2024.1 - PROVA 3 de 3 – 27/06/24

NOME: Giovani Zanella **Nº** 7

As questões devem ser feitas da forma completa, com seus raciocínios, não colocar somente resposta final.

Simplificar frações e racionalizar raízes, evitar ao máximo o uso de aproximações.

Pode ser usada calculadora cientifica que não são calculadoras gráficas e/ou programáveis.

Cada QUESTÃO vale 1,25.

1. Verifique se a relação, $T: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ definida por $T(x, y, z) = (x + 2y - z\,,\ x + 4y - z)$ é uma transformação linear.

$U = (x_1, y_1, z_1)$

$V = (x_2, y_2, z_2)$

$T(a \cdot U + V) = T(a(x_1, y_1, z_1) + (x_2, y_2, z_2))$

$= T((ax_1, ay_1, az_1) + (x_2, y_2, z_2))$

$= T(ax_1 + x_2, ay_1 + y_2, az_1 + z_2)$

$= (ax_1 + x_2 + 2(ay_1 + y_2) - (az_1 + z_2), ax_1 + x_2 + 4(ay_1 + y_2) - (az_1 + z_2))$

$= (ax_1 + x_2 + 2ay_1 + 2y_2 - az_1 - z_2, ax_1 + x_2 + 4ay_1 + 4y_2 - az_1 - z_2)$

$a \cdot T(U) + T(V) = a\, T(x_1, y_1, z_1) + T(x_2, y_2, z_2)$

$= a\, (x_1 + 2y_1 - z_1, x_1 + 4y_1 - z_1) + (x_2 + 2y_2 - z_2, x_2 + 4y_2 - z_2)$

$= (ax_1 + 2ay_1 - az_1, ax_1 + 4ay_1 - az_1) + (x_2 + 2y_2 - z_2, x_2 + 4y_2 - z_2)$

$= (ax_1 + 2ay_1 - az_1 + x_2 + 2y_2 - z_2, ax_1 + 4ay_1 - az_1 + x_2 + 4y_2 - z_2)$

$= (ax_1 + x_2 + 2ay_1 + 2y_2 - az_1 - z_2, ax_1 + x_2 + 4ay_1 + 4y_2 - az_1 - z_2)$

$\therefore$ É uma TL.

2. Seja a transformação linear $T: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ tal que: $T(1,0,0) = (4,2,1)$, $T(0,1,0) = (1,1,1)$ e $T(0,0,1) = (-1,1,2)$. Calcule $T(4,2,-2)$

$T(1,0,0) = (4,2,1)$

$T(0,1,0) = (1,1,1)$

$T(0,0,1) = (-1,1,2)$

$$
\begin{aligned}
T(4,2,-2) &= 4T(1,0,0) + 2T(0,1,0) - 2(0,0,1) \\
&= 4(4,2,1) + 2(1,1,1) - 2(-1,1,2) \\
&= (16,8,4) + (2,2,2) + (2,-2,-4) \\
&= (16+2+2,\ 8+\cancel{2-2},\ \cancel{4}+2-\cancel{4}) \\
&= (20,8,2)
\end{aligned}
$$

100

3. Dado o operador limear: $T(x,y,z) = (x - y - z\ , x + 2y + 3z\ , 2x + 2y + z)$

a) Calcule o Núcleo

b) Calcule a imagem

c) determine as dimensões do nucleo e da imagem

$$\left[\begin{array}{ccc|c|c} 1 & -1 & -1 & 0 & a \\ 1 & 2 & 3 & 0 & b \\ 2 & 2 & 1 & 0 & c \end{array}\right] \quad \begin{array}{l} L2 = L2 - L1 \\ L3 = L3 - (L1 \cdot 2) \end{array} \quad \left[\begin{array}{ccc|c|c} 1 & -1 & -1 & 0 & a \\ 0 & 3 & 4 & 0 & b-a \\ 0 & 4 & 3 & 0 & c-2a \end{array}\right] \quad L2 = \frac{L2}{3}$$

$$\left[\begin{array}{ccc|c|c} 1 & -1 & -1 & 0 & a \\ 0 & 1 & \frac{4}{3} & 0 & \frac{b-a}{3} \\ 0 & 4 & 3 & 0 & c-2a \end{array}\right] \quad \begin{array}{l} L1 = L1 + L2 \\ L3 = L3 - (L2 \cdot 4) \end{array} \quad \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & \frac{1}{3} & \frac{2a+b}{3} \\ 0 & 1 & \frac{4}{3} & \frac{b-a}{3} \\ 0 & 0 & -\frac{7}{3} & \frac{-2a-4b+3c}{3} \end{array}\right] \quad L3 = \frac{L3}{-\frac{7}{3}}$$

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & \frac{1}{3} & \frac{2a+b}{3} \\ 0 & 1 & \frac{4}{3} & \frac{b-a}{3} \\ 0 & 0 & 1 & \frac{-6a-12b+9c}{-21} \end{array}\right] \quad \begin{array}{l} L1 = L1 - (L3 \cdot \frac{1}{3}) \\ L2 = L2 - (L3 \cdot \frac{4}{3}) \end{array} \quad \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & \frac{35a+33b-9c}{63} \\ 0 & 1 & 0 & \frac{23b-a-12c}{21} \\ 0 & 0 & 1 & \frac{-6a-12b+9c}{-21} \end{array}\right]$$

$Im(T)$

$N(T) = \{(0,0,0)\}$

50

$\dim(V) = \dim(N(T)) + \dim(Im(T))$

$3 = 0 + 3$

$\boxed{\dim V = 3}$

4. Dados os operadores lineares:

$T_1(x, y, z) = (3x + 4z\ ,\ -3x + 2y - 7z\ ,\ 2x + 2y - z)$ e

$T_2(x, y, z) = (-x - 5y + z\ ,\ -3x + 2y - z\ ,\ x + 2y - z)$

Calcule a transformação composta:

$T_1 o T_2$

$T_1(T_2(x,y,z)) = T_1(-x-5y+z\ ,\ -3x+2y-z\ ,\ x+2y-z)$

$= ((-(3x+4z) - 5(-3x+2y-7z) + (2x+2y-z)), (-3(3x+4z) + 2(-3x+2y-7z) - (2x+2y-z))$

$, ((3x+4z) + 2(-3x+2y-7z) - (2x+2y-z)))$

$= ((-3x-4z) + (15x - 10y + 35z) + (2x+2y-z)), ((-9x-12z) + (-6x+4y-14z) - 2x - 2y + z)$

$(3x+4z) - 6x + 4y - 14z - 2x - 2y + z)$

$= (14x - 8y + 30z\ ,\ -17x + 2y - 25z\ ,\ -5x - 2y - 9z)$

60°

5. Use transformação linear para rotacionar por um ângulo de $\frac{\pi}{3}$ o vetor $(4, 5, 10)$ no sentido anti-horário em torno do eixo x.

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos 60 & -\operatorname{sen} 60 \\ 0 & \operatorname{sen} 60 & \cos 60 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 4 \\ 5 \\ 10 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & -\frac{\sqrt{3}}{2} \\ 0 & \frac{\sqrt{3}}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 4 \\ 5 \\ 6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ \left(5 \cdot \frac{1}{2}\right) - \left(\frac{\sqrt{3}}{\cancel{2}} \cdot \cancel{6}\right) \\ \frac{5\sqrt{3}}{2} + 6 \cdot \frac{1}{2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ \frac{5}{2} - \frac{3\sqrt{3}}{1} \\ \frac{5\sqrt{3}}{2} + \frac{3}{1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ \frac{5 - 6\sqrt{3}}{2} \\ \frac{5\sqrt{3} + 6}{2} \end{pmatrix}$$

90

6. Verifique se o operador linear
$T(x\,,y\,,z\,,t)=\left(\frac{1}{4}x+\frac{3}{4}y-\frac{1}{2}z\,,\,-\frac{1}{4}x+\frac{1}{4}y+\frac{1}{6}z+\frac{1}{3}t\,,\frac{1}{2}x-\frac{1}{2}y+\frac{2}{3}z-\frac{2}{3}t\,,-\frac{1}{3}z+\frac{1}{3}t\right)$
é um isomorfismo, se for, calcule o operador inverso T^{-1}

7. Determine os autovalores e autovetores associados a:
$T(x, y, z) = (3x + y + 8z, 2y + z, 3z)$, se existirem.

$$\begin{vmatrix} 3-\lambda & 1 & 8 \\ 0 & 2-\lambda & 1 \\ 0 & 0 & 3-\lambda \end{vmatrix}\begin{matrix} 3-\lambda & 1 \\ 0 & 2-\lambda \\ 0 & 0 \end{matrix}$$

$(3-\lambda)(2-\lambda)(3-\lambda)$

$\lambda_1 = 3$ $\quad \lambda_2 = 2$

Para $\lambda_1 = 3$

$$\begin{vmatrix} 0 & 1 & 8 \\ 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} x \\ y \\ z \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{vmatrix}$$

$$\begin{cases} y + 8z = 0 \\ -y + z = 0 \end{cases}$$

$-y + z = 0$

$z = +y$

$y + 8z = 0$

$y = -8z$

$$\begin{vmatrix} x \\ -8z \\ -8z \end{vmatrix} \quad z \cdot \begin{vmatrix} 1 \\ -8 \\ -8 \end{vmatrix}$$

Para $\lambda_2 = 2$

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 8 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} x \\ y \\ z \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{vmatrix}$$

$$\begin{cases} x + y + 8z = 0 \\ z = 0 \\ z = 0 \end{cases}$$

$x + y + 8z = 0$

$z = 0$

$x + y = 0$

$y = -x$

$$\begin{vmatrix} x \\ -x \\ 0 \end{vmatrix} = x \begin{vmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{vmatrix}$$

75

8. Verifique se em $T(x,y,z) = (x - y\,, x + 2y + z\,, x - 7y + 4z)$ o vetor $u = (1\,,2\,,8)$ é autovetor associado a transformação T. Em caso afirmativo, calcule o autovalor associado.

$T(1,2,8) = (1,13,19)$

$\lambda_1 \cdot 1 = 1 \Rightarrow \lambda_1 = \frac{1}{1} = 1$ ✓

$\lambda_2 \cdot 2 = 13 \Rightarrow \lambda_2 = \frac{13}{2}$ ✗

$\lambda_3 \cdot 8 = 19 \Rightarrow \lambda_3 = \frac{19}{8}$ ✗

O vetor u não é ~~associado~~ associado a transformação

10