Agora é a sua vez!

Seção 1 (Retas tangentes e taxas de variação)

1) Determine a inclinação da reta tangente à curva $y=x^2+2x+1$ no ponto (1,4).

Devemos encontrar m(1), usando o limite:

$$m(1) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(1+\Delta x) - f(1)}{\Delta x}$$

$$m(1) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{(1+\Delta x)^2 + 2(1+\Delta x) + 1 - 4}{\Delta x}$$

$$m(1) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{1 + 2\Delta x + (\Delta x)^2 + 2 + 2\Delta x + 1 - 4}{\Delta x}$$

$$m(1) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta x(\Delta x + 4)}{\Delta x}$$

$$m(1) = \lim_{\Delta x \to 0} (\Delta x + 4) = 4$$

Assim, a inclinação da reta tangente à curva $y=x^2+2x+1$ no ponto (1,4) é igual a 4.

2) Qual a equação da reta tangente à esta mesma curva $y=x^2+2x+1$ no ponto (-1,0)?

Devemos determinar m(-1)

$$m(-1) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(-1+\Delta x) - f(-1)}{\Delta x}$$

$$m(-1) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{(-1+\Delta x)^2 + 2(-1+\Delta x) + 1 - 0}{\Delta x}$$

$$m(-1) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{1 - 2\Delta x + (\Delta x)^2 - 2 + 2\Delta x + 1 - 0}{\Delta x}$$

$$m(-1) = \lim_{\Delta x \to 0} \Delta x = 0$$

Assim, a inclinação da reta tangente à curva $y=x^2+2x+1$ no ponto (-1,0) é igual a 0.

A reta tangente tem como equação:

y-f(-1)=m(x-(-1))

y-0=0(x+1)

y=0.

Agora é a sua vez!

Seção 2 (Derivada de uma função)

Determine a derivada das seguintes funções, usando a definição:

a) $g(x) = \sqrt{x}$

$$g'(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{g(x+\Delta x) - g(x)}{\Delta x}$$

$$= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\sqrt{x+\Delta x} - \sqrt{x}}{\Delta x} \cdot \frac{(\sqrt{x+\Delta x} + \sqrt{x})}{(\sqrt{x+\Delta x} + \sqrt{x})}$$

$$= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{x + \Delta x - x}{\Delta x(\sqrt{x+\Delta x} + \sqrt{x})}$$

$$= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{1}{\sqrt{x+\Delta x} + \sqrt{x}} = \frac{1}{2\sqrt{x}}$$

b) $v(t) = 4 - t^2$

$$v'(t) = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{v(t+\Delta t) - v(t)}{\Delta t}$$

$$= \lim_{\Delta t \to 0} \frac{4 - (t+\Delta t)^2 - (4 - t^2)}{\Delta t}$$

$$= \lim_{\Delta t \to 0} \frac{4 - t^2 - 2t\Delta t - (\Delta t)^2 - 4 + t^2}{\Delta t}$$

$$= \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta t(-2t - \Delta t)}{\Delta t}$$

$$= \lim_{\Delta t \to 0} (-2t - \Delta t) = -2t - 0 = -2t$$

c) $r(\theta) = \dfrac{2}{\theta + 1}$

$$r'(\theta) = \lim_{\Delta\theta \to 0} \frac{r(\theta + \Delta\theta) - r(\theta)}{\Delta\theta}$$

$$= \lim_{\Delta\theta \to 0} \frac{\dfrac{2}{\theta + \Delta\theta + 1} - \dfrac{2}{\theta + 1}}{\Delta\theta}$$

$$= \lim_{\Delta\theta \to 0} \frac{\dfrac{2(\theta+1) - 2(\theta + \Delta\theta + 1)}{(\theta + \Delta\theta + 1)(\theta + 1)}}{\Delta\theta}$$

$$= \lim_{\Delta\theta \to 0} \frac{-2\Delta\theta}{(\theta + \Delta\theta + 1)(\theta + 1)} \cdot \frac{1}{\Delta\theta}$$

$$= \lim_{\Delta\theta \to 0} \frac{-2}{(\theta + \Delta\theta + 1)(\theta + 1)} = -\frac{2}{(\theta + 1)^2}$$

Agora é a sua vez!

Seção 3 (Regras de derivação)

Encontre a derivada das seguintes funções:

a) $y = 7 - \frac{3}{4}x^4$

$y' = 0 - 4 \cdot \frac{3}{4}x^3 = -3x^3$

b) $f(t) = 4t^3 - 6t + 3$

$f'(t) = 3 \cdot 4t^2 - 6 + 0 = 12t^2 - 6$

c) $g(s) = (s^3 + 1)(s^2 + 3s)$

Usamos a regra do produto, então:

$$g'(s) = (s^3+1)(s^2+3s)' + (s^3+1)'(s^2+3s)$$
$$= (s^3+1)(2s+3) + 3s^2(s^2+3s)$$
$$= 2s^4 + 3s^3 + 2s + 3 + 3s^4 + 9s^3$$
$$= 5s^4 + 12s^3 + 2s + 3$$

d) $h(x) = \frac{4}{3} \cdot \frac{x-1}{x+1}$

Usamos a regra do quociente.

$$h'(x) = \frac{4}{3} \cdot \frac{(x+1)(x-1)' - (x-1)(x+1)'}{(x+1)^2}$$
$$= \frac{4}{3} \cdot \frac{(x+1) - (x-1)}{(x+1)^2}$$
$$= \frac{4}{3} \cdot \frac{2}{(x+1)^2}$$
$$= \frac{8}{3(x+1)^2}$$

e) $f(x)=\left(4-x^3\right)^{-1}\cdot(x+4)$

Podemos reescrever a função como um quociente da seguinte forma:

$$f(x)=\frac{(x+4)}{\left(4-x^3\right)}$$

Assim, a derivada passa a ser:

$$f'(x)=\frac{(4-x^3)(x+4)'-(x+4)(4-x^3)'}{\left(4-x^3\right)^2}$$

$$=\frac{\left(4-x^3\right)(1+0)-(x+4)\left(0-3x^2\right)}{\left(4-x^3\right)^2}$$

$$=\frac{\left(4-x^3\right)-(x+4)\left(-3x^2\right)}{\left(4-x^3\right)^2}$$

$$=\frac{\left(4-x^3\right)-\left(-3x^3-12x^2\right)}{\left(4-x^3\right)^2}$$

$$=\frac{4-x^3+3x^3+12x^2}{\left(4-x^3\right)^2}$$

f) $y=\dfrac{2}{x^5}-\dfrac{5}{2x^6}$

Podemos reescrevê-la da seguinte maneira:

$y=2x^{-5}-\dfrac{5}{2}x^{-6}$, logo

$y'=-10x^{-6}+15x^{-7}$

g) $f(x)=\dfrac{x^2+6x}{x}=\dfrac{x(x+6)}{x}=x+6$

Logo $f'(x)=1+0=1$

h) $r(t)=\dfrac{t^3-3t^2+1}{2}$

Que é o mesmo que $r(t)=\dfrac{1}{2}(t^3-3t^2+1)$

Logo, $r'(t)=\dfrac{1}{2}(3t^2-6t)$

i) $y=\dfrac{-3}{4}(4-x)(x^3-x)$

$$y=\frac{-3}{4}\left[(4-x)(x^3-x)'+(4-x)'(x^3-x)\right]$$
$$=\frac{-3}{4}\left[(4-x)(3x^2-1)+(-1)(x^3-x)\right]$$
$$=\frac{-3}{4}\left[12x^2-4-3x^3+x-x^3+x\right]$$
$$=\frac{-3}{4}\left[-4x^3+12x^2+2x-4\right]$$
$$=3x^3-9x^2-\frac{3}{2}x+3$$

j) $g(x)=(x-1)(x^2-2)(x^3-3)$

$$g'(x)=(x-1)\left[(x^2-2)(x^3-3)\right]'+(x-1)'\left[(x^2-2)(x^3-3)\right]$$
$$=(x-1)\left[(x^2-2)(x^3-3)'+(x^2-2)'(x^3-3)\right]+(1-0)(x^2-2)(x^3-3)$$
$$=(x-1)\left[(x^2-2)(3x^2)+(2x)(x^3-3)\right]+(1)(x^2-2)(x^3-3)$$
$$=(x-1)\left[3x^4-6x^2+2x^4-6x\right]+(x^5-3x^2-2x^3+6)$$
$$=3x^5-6x^3+2x^5-6x^2-3x^4+6x^2-2x^4+6x+x^5-3x^2-2x^3+6$$
$$=6x^5-5x^4-8x^3-3x^2+6x+6$$

Seção 4 (Regra da Cadeia)

Calcule a derivada $\frac{dy}{dx}$ das funções dadas:

a) $y = \left(4 - x^3\right)^8$

Fazemos $y=u^8$, sendo $u=4-x^3$. Usando a regra da cadeia, temos:

$$\begin{aligned}\frac{dy}{dx} &= \frac{dy}{du}\cdot\frac{du}{dx}\\ &= 8u^7\cdot\left(-3x^2\right)\\ &= 8\left(4-x\right)^7\cdot\left(-3x^2\right)\\ &= -24x^2\left(4-x\right)^7\end{aligned}$$

b) $y = \dfrac{4}{\left(3x^2 - x + 1\right)^3}$

Podemos reescrever a função da seguinte forma: $y = 4\cdot\left(3x^2 - x + 1\right)^{-3}$.
Pela regra da cadeia, temos:

$$\begin{aligned}\frac{dy}{dx} &= \frac{dy}{du}\cdot\frac{du}{dx}\\ &= -12u^{-4}\cdot\left(6x-1\right)\\ &= -12\left(3x^2-x+1\right)^{-4}\cdot\left(6x-1\right)\\ &= -12\cdot\frac{\left(6x-1\right)}{\left(3x^2-x+1\right)^{-4}}\\ &= \frac{12-72x}{\left(3x^2-x+1\right)^{-4}}\end{aligned}$$

c) $y = \left(x^2+3x-1\right)^4\left(x^2-x\right)$

$$\begin{aligned}y' &= \left(x^2+3x-1\right)^4\left(x^2-x\right)' + \left[\left(x^2+3x-1\right)^4\right]'\left(x^2-x\right)\\ &= \left(x^2+3x-1\right)^4\left(2x-1\right) + \left[\left(x^2+3x-1\right)^4\right]'\left(x^2-x\right)\end{aligned}$$

Calculando a derivada de $y=\left(x^2+3x-1\right)^4$ separadamente temos $\frac{dy}{dx}=\frac{dy}{du}\cdot\frac{du}{dx}$, sendo $y=u^4$, $u=x^2+3x-1$ logo:

$$\frac{dy}{dx}=4u^3\cdot(2x+3)$$
$$=4\left(x^2+3x-1\right)^3\cdot(2x+3)$$

Assim,

$$y'=\left(x^2+3x-1\right)^4(2x-1)+\left[4\left(x^2+3x-1\right)^3(2x+3)\right]\left(x^2-x\right)$$
$$=\left(x^2+3x-1\right)^3\left[\left(x^2+3x-1\right)(2x-1)+4(2x+3)\left(x^2-x\right)\right]$$

d) $y=\left(x^2-\frac{4}{x^3}\right)^4$

Podemos reescrever a função da seguinte forma $y=\left(x^2-4x^{-3}\right)^4$. Temos $u=x^2-4x^{-3}$, sendo . Pela regra da cadeia, temos:

$$\frac{dy}{dx}=\frac{dy}{du}\cdot\frac{du}{dx}$$
$$=4u^3\cdot\left(2x+12x^{-4}\right)$$
$$=4\left(x^2-4x^{-3}\right)^3\cdot\left(2x+12x^{-4}\right)$$
$$=4\left(x^2-\frac{4}{x^3}\right)^3\cdot\left(2x+\frac{12}{x^4}\right)$$

Encontre a derivada das funções:

a) $f(x)=\sqrt[3]{x}+\frac{4}{x^3}$

Reescrevendo a função, temos $f(x)=x^{\frac{1}{3}}+4x^{-3}$. Então,

$$f'(x)=\frac{1}{3}x^{\frac{-2}{3}}-12x^{-4}$$
$$=\frac{1}{3}x^{\frac{-2}{3}}-\frac{12}{x^4}$$

b) $y=\left(x^4+x^3-2x\right)^4$

$$\begin{aligned} y' &= 4\left(x^4+x^3-2x\right)^3\left(x^4+x^3-2x\right)' \\ &= 4\left(x^4+x^3-2x\right)^3\left(4x^3+3x^2-2\right) \end{aligned}$$

c) $f(x)=\left(x^{-3}+2\right)\left(x^2-x\right)$

$$\begin{aligned} f'(x) &= \left(x^{-3}+2\right)\left(x^2-x\right)'+\left(x^{-3}+2\right)'\left(x^2-x\right) \\ &= \left(x^{-3}+2\right)(2x-1)+\left(-3x^{-4}\right)\left(x^2-x\right) \\ &= \left(\frac{1}{x^3}+2\right)(2x-1)-\frac{3}{x^4}\left(x^2-x\right) \end{aligned}$$

d) $y=\dfrac{5-x^3}{(x+2)^2}$

$$\begin{aligned} y' &= \frac{(x+2)^2\left(5-x^3\right)'-\left(5-x^3\right)\left[(x+2)^2\right]'}{\left[(x+2)^2\right]^2} \\ &= \frac{(x+2)^2\left(-3x^2\right)-\left(5-x^3\right)\cdot 2\cdot(x+2)(x+2)'}{\left[(x+2)^2\right]^2} \\ &= \frac{-3x^2(x+2)^2-2\left(5-x^3\right)(x+2)\cdot 1}{(x+2)^4} \\ &= \frac{(x+2)\left[-3x^2(x+2)-2\left(5-x^3\right)\right]}{(x+2)^4} \\ &= \frac{-x^3-6x^2-10}{(x+2)^3} \end{aligned}$$

e) $g(x)=\dfrac{x^2-x}{\sqrt{4-x^4}}$

Reescrevendo a função temos $g(x)=\dfrac{x^2-x}{\left(4-x^4\right)^{\frac{1}{2}}}$.

$$g'(x)=\frac{\left(4-x^4\right)^{\frac{1}{2}}\left(x^2-x\right)'-\left(x^2-x\right)\left[\left(4-x^4\right)^{\frac{1}{2}}\right]'}{\left[\left(4-x^4\right)^{\frac{1}{2}}\right]^2}$$

$$=\frac{\sqrt{4-x^4}\,(2x-1)-\left(x^2-x\right)\frac{1}{2}\left(4-x^4\right)^{\frac{-1}{2}}\left(4-x^4\right)'}{\left(4-x^4\right)}$$

$$=\frac{\sqrt{4-x^4}\,(2x-1)-\frac{1}{2}\frac{\left(x^2-x\right)}{\sqrt{4-x^4}}\left(-4x^3\right)}{\left(4-x^4\right)}$$

$$=\frac{\left(4-x^4\right)(2x-1)+2x^3\left(x^2-x\right)}{\left(4-x^4\right)^{\frac{3}{2}}}$$

f) $h(x)=\sqrt{\dfrac{x^4-4}{16}}$

Reescrevendo a função temos $h(x)=\sqrt{\dfrac{x^4-4}{16}}=\dfrac{\sqrt{x^4-4}}{\sqrt{16}}=\dfrac{1}{4}\left(x^4-4\right)^{\frac{1}{2}}$.

$$h'(x)=\frac{1}{4}\cdot\frac{1}{2}\left(x^4-4\right)^{\frac{-1}{2}}\left(x^4-4\right)'$$

$$=\frac{1}{8}\left(x^4-4\right)^{\frac{-1}{2}}\cdot 4x^3$$

$$=\frac{1}{2}\frac{x^3}{\sqrt{x^4-4}}$$

Agora é a sua vez!

Seção 5 (Derivadas das funções exponenciais e logarítmica)

Determine a derivada das funções, usando as regras de derivação.

a) $y = e^{\frac{x^2}{4}}$

$$y' = e^{\frac{x^2}{4}} \cdot \left(\frac{x^2}{4}\right)' = e^{\frac{x^2}{4}} \cdot \left(\frac{2x}{4}\right) = \frac{x}{2} e^{\frac{x^2}{4}}$$

b) $y = \log_3\left(x^2 + 4\right)$

$$y' = \frac{\left(x^2+4\right)'}{\left(x^2+4\right)} \log_3 e$$

$$= \frac{\left(2x+0\right)}{\left(x^2+4\right)} \log_3 e$$

$$= \frac{\left(2x\right)}{\left(x^2+4\right)} \log_3 e$$

c) $y = \left(x+1\right)^{2x+1}$

$$y' = \left(2x+1\right)\left(x+1\right)^{2x+1-1}\left(x+1\right)' + \left(x+1\right)^{2x+1} \ln\left(x+1\right)\left(2x+1\right)'$$

$$= \left(2x+1\right)\left(x+1\right)^{2x}\left(1+0\right) + \left(x+1\right)^{2x+1} \ln\left(x+1\right)\left(2+0\right)$$

$$= \left(2x+1\right)\left(x+1\right)^{2x} + 2\left(x+1\right)^{2x+1} \ln\left(x+1\right)$$

d) $y = 4^{\frac{x+1}{x}}$

$$y' = 4^{\frac{x+1}{x}} \ln 4\left(\frac{x+1}{x}\right)'$$

$$= 4^{\frac{x+1}{x}} \ln 4\left(\frac{\left(x\right)\left(x+1\right)' - \left(x+1\right)x'}{x^2}\right)$$

$$= 4^{\frac{x+1}{x}} \ln 4\left(\frac{\left(x\right)\left(1+0\right) - \left(x+1\right)\cdot 1}{x^2}\right)$$

$$= 4^{\frac{x+1}{x}} \ln 4\left(\frac{x-x-1}{x^2}\right)$$

$$= \frac{-1}{x^2} 4^{\frac{x+1}{x}} \ln 4$$

Agora é a sua vez!

Seção 6 (Derivadas sucessivas)

1) Encontrar a derivada de 4ª ordem da função $y = x^5 - x^4 + 3x^2 - \frac{x}{3}$.

$$y' = 5x^4 - 4x^3 + 6x - \frac{1}{3}$$
$$y'' = 20x^3 - 12x^2 + 6$$
$$y''' = 60x^2 - 24x$$
$$y^{(4)} = 120x - 24$$

2) Determine a derivada de 2ª ordem da função:

$$f(x) = \frac{x+1}{x}$$

A função f(x) pode ser reescrita como $f(x) = \frac{x}{x} + \frac{1}{x} = 1 + \frac{1}{x} = 1 + x^{-1}$.

$$f'(x) = 0 - x^{-1-1} = -x^{-2} = -\frac{1}{x^2}$$
$$f''(x) = 2x^{-3} = \frac{2}{x^3}$$

3) Determine a derivada de 3ª ordem da função y= -ln x.

$$y' = \frac{-1}{x} = -x^{-1}$$
$$y'' = x^{-2} = \frac{1}{x^2}$$
$$y''' = -2x^{-3} = \frac{-2}{x^3}$$

Agora é a sua vez!

Seção 7 (Derivação implícita)

Encontre y' das funções definidas implicitamente pelas equações:

a) $xy - 3x^2y^3 = 4$

$$\left(xy - 3x^2y^3\right)' = (4)'$$

$$(xy)' - \left(3x^2y^3\right)' = (4)'$$

$$xy' + x'y - \left(3x^2\left(y^3\right)' + \left(3x^2\right)' y^3\right) = 0$$

$$xy' + 1y - \left(3x^2 3y^2 y' + 6xy^3\right) = 0$$

$$xy' + y - 9x^2y^2y' - 6xy^3 = 0$$

$$y'\left(x - 9x^2y^2\right) = 6xy^3 - y$$

$$y' = \frac{6xy^3 - y}{x - 9x^2y^2}$$

b) $3x - x^2 + y^2 = 9y - 4$

$$\left(3x - x^2 + y^2\right)' = (9y - 4)'$$

$$(3x)' - \left(x^2\right)' + \left(y^2\right)' = (9y)' - (4)'$$

$$3 - 2x + 2yy' = 9y' - 0$$

$$2yy' - 9y' = 2x - 3$$

$$y'(2y - 9) = 2x - 3$$

$$y' = \frac{2x - 3}{2y - 9}$$

Agora é a sua vez!

Seção 8 (Diferencial)

1) Encontre Δy e dy para as funções indicadas:

a) $y=\dfrac{1}{3x^3}$, $\Delta x=0,001$, $x=1$

$$\begin{aligned}\Delta y &= f(x_2)-f(x_1)\\ &= f(x_1+\Delta x)-f(x_1)\\ &= f(1+0,001)-f(1)\\ &= \frac{1}{3(1,001)^3}-\frac{1}{3(1)^3}\\ &= 0,33233533-0,3333\\ &-0,00099800333\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}f'(x) &= \left(\frac{1}{3}\cdot(-3)x^{-3-1}\right)\\ &= -x^{-4}\\ &= -\frac{1}{x^4}dx\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}dy &= f'(x)dx\\ &= -\frac{1}{x^4}dx\\ &= -\frac{1}{1^4}0,001\\ &= -0,001\end{aligned}$$

b) $y=(x+2)^2$, $\Delta x=0,03$, $x=\dfrac{1}{2}$

$$\begin{aligned}\Delta y &= f(x_2)-f(x_1)\\ &= f(x_1+\Delta x)-f(x_1)\\ &= f\left(\frac{1}{2}+0,03\right)-f\left(\frac{1}{2}\right)\\ &= \left(\frac{1}{2}+0,03+2\right)^2-\left(\frac{1}{2}+2\right)^2\\ &= (2,53)^2-(2,5)^2\\ &= 6,4009-6,25\\ &= 0,1509\end{aligned}$$

$$f'(x) = 2(x+2)$$

$$\begin{aligned} dy &= f'(x)dx \\ &= 2(x+2)dx \\ &= 2(0,5+2)\cdot 0,03 \\ &= 2(2,5)\cdot 0,03 \\ &= 0,15 \end{aligned}$$

2) Use diferenciais para estimar o volume de cobre na cobertura de um cubo de aço com 20cm de lado e coberto com 0,01cm de cobre.

O volume do cubo de aço é dado por $V=l^3$, sendo $l=20$ e a variação $\Delta l=dl=0,01$. Assim, é possível calcular dV:

$$\begin{aligned} dV &= 3l^2dl \\ &= 3(20)^2\ 0,01 \\ &12 \end{aligned}$$

O volume de cobre necessário para cobrir o cubo com um aumento de 0,01cm no lado é de 12cm³.

Atividades de auto-avaliação

1) Determine a derivada das funções, usando a definição:

a) $g(x) = \sqrt[3]{x}$

$$\begin{aligned} g'(x) &= \lim_{\Delta x\to 0}\frac{g(x+\Delta x)-g(x)}{\Delta x} \\ &= \lim_{\Delta x\to 0}\frac{\sqrt[3]{x+\Delta x}-\sqrt[3]{x}}{\Delta x} \end{aligned}$$

Para resolver este limite, é possível fazer uma substituição de variáveis chamando $u^3 = x+\Delta x$. Reescrevendo o limite temos:

$$\begin{aligned} g'(x) &= \lim_{u\to\sqrt[3]{x}}\frac{\sqrt[3]{u^3}-\sqrt[3]{x}}{u^3-x} \\ &= \lim_{u\to\sqrt[3]{x}}\frac{u-\sqrt[3]{x}}{u^3-x} \end{aligned}$$

Ao substituirmos u no limite chegamos a uma indeterminação do tipo $\frac{0}{0}$. Para resolve-la, vamos fatorar o polinômio do denominador, cuja raiz é igual a $\sqrt[3]{x}$. Veja como fica o Briot-Ruffini:

	1	0	0	$-x$
$\sqrt[3]{x}$		$\sqrt[3]{x}$	$\left(\sqrt[3]{x}\right)^2$	x
	1	$\sqrt[3]{x}$	$\left(\sqrt[3]{x}\right)^2$	0

$$
\begin{aligned}
g'(x) &= \lim_{u\to\sqrt[3]{x}} \frac{u-\sqrt[3]{x}}{\left(u-\sqrt[3]{x}\right)\left(u^2+\sqrt[3]{x}\cdot u+\left(\sqrt[3]{x}\right)^2\right)} \\
&= \lim_{u\to\sqrt[3]{x}} \frac{1}{\left(u^2+\sqrt[3]{x}\cdot u+\left(\sqrt[3]{x}\right)^2\right)} \\
&= \frac{1}{\left(\left(\sqrt[3]{x}\right)^2+\sqrt[3]{x}\cdot\sqrt[3]{x}+\left(\sqrt[3]{x}\right)^2\right)} \\
&= \frac{1}{\left(\left(\sqrt[3]{x}\right)^2+\left(\sqrt[3]{x}\right)^2+\left(\sqrt[3]{x}\right)^2\right)} \\
&= \frac{1}{3\left(\sqrt[3]{x}\right)^2} = \frac{1}{3\sqrt[3]{x}^2}
\end{aligned}
$$

b) $h(x)=\dfrac{\sqrt{x+1}}{3}$

$$
\begin{aligned}
h'(x) &= \lim_{\Delta x\to 0} \frac{\frac{\sqrt{x+\Delta x+1}}{3}-\frac{\sqrt{x+1}}{3}}{\Delta x} \\
&= \lim_{\Delta x\to 0} \frac{1}{3}\cdot\frac{\sqrt{x+\Delta x+1}-\sqrt{x+1}}{\Delta x} \\
&= \lim_{\Delta x\to 0} \frac{1}{3}\cdot\frac{\left(\sqrt{x+\Delta x+1}-\sqrt{x+1}\right)}{\Delta x}\frac{\left(\sqrt{x+\Delta x+1}+\sqrt{x+1}\right)}{\left(\sqrt{x+\Delta x+1}+\sqrt{x+1}\right)}
\end{aligned}
$$

$$= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{1}{3} \cdot \frac{\left(\sqrt{x+\Delta x+1}\right)^2 - \left(\sqrt{x+1}\right)^2}{\Delta x\left(\sqrt{x+\Delta x+1}+\sqrt{x+1}\right)}$$

$$= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{1}{3} \cdot \frac{x+\Delta x+1-(x+1)}{\Delta x\left(\sqrt{x+\Delta x+1}+\sqrt{x+1}\right)}$$

$$= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{1}{3} \cdot \frac{x+\Delta x+1-x-1}{\Delta x\left(\sqrt{x+\Delta x+1}+\sqrt{x+1}\right)}$$

$$= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{1}{3} \cdot \frac{\Delta x}{\Delta x\left(\sqrt{x+\Delta x+1}+\sqrt{x+1}\right)}$$

$$= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{1}{3\left(\sqrt{x+\Delta x+1}+\sqrt{x+1}\right)}$$

$$= \frac{1}{3\left(\sqrt{x+0+1}+\sqrt{x+1}\right)} = \frac{1}{3\left(2\sqrt{x+1}\right)} = \frac{1}{6\sqrt{x+1}}$$

2) Determine a equação da reta tangente ao gráfico da função $y=x^2-3x$ no ponto x=3.

A equação da reta tangente é dada por $y - y_0 = m\left(x - x_0\right)$. O valor de m é dado pela derivada da função no ponto x=3. Assim, temos:

$$y' = 2x - 3$$
$$y'(3) = 2 \cdot 3 - 3$$
$$y'(3) = 6 - 3 = 3$$

Para determinar o valor de y_0, é necessário calcular a imagem da função no ponto x=3:

$$f(x) = x^2 - 3x$$
$$f(3) = 3^2 - 3 \cdot 3 = 9 - 9 = 0$$

Substituindo os dados calculados na equação da reta tangente:

$$y - y_0 = m\left(x - x_0\right)$$
$$y - 0 = 3(x - 3)$$
$$y = 3x - 9$$

3) Seja a função $y=3x^3+x^2-3$:

a) Ache a taxa de variação média de y em relação a x no intervalo [1,4].

$$\frac{\Delta y}{\Delta x}=\frac{y(4)-y(1)}{4-1}=\frac{\left(3\cdot 4^3+4^2-3\right)-\left(3\cdot 1^3+1^2-3\right)}{4-1}=$$
$$=\frac{(192+16-3)-(3+1-3)}{3}=\frac{205-1}{3}=\frac{204}{3}$$

b) Ache a taxa de variação instantânea de y em relação a x.

$$\frac{dy}{dx}=9x^2+2x$$

c) Ache a taxa de variação instantânea de y em relação a x no ponto $x=\frac{1}{2}$.

Para encontrar a taxa de variação instantânea no ponto $x=\frac{1}{2}$, vamos substituir este ponto no resultado encontrado no item (b):

$$9\left(\frac{1}{2}\right)^2+2\left(\frac{1}{2}\right)=9\cdot\frac{1}{4}+2\cdot\frac{1}{2}=\frac{9}{4}+1=\frac{13}{4}$$

4) Determine a derivada das funções dadas:

a) $y=\frac{4}{x^3}-\frac{2}{x^4}$

Reescrevendo a função temos $y=4x^{-3}-2x^{-4}$.

$$\begin{aligned} y' &= 4\cdot -3x^{-4}x' - 2\cdot -4x^{-5}x' \\ &= -12x^{-4}\cdot 1+8x^{-5}\cdot 1 \\ &= \frac{-12}{x^4}+\frac{8}{x^5} \end{aligned}$$

b) $y = \dfrac{2x+3}{4-x^3}$

$$y' = \frac{(4-x^3)(2x+3)' - (2x+3)(4-x^3)'}{(4-x^3)^2}$$

$$= \frac{(4-x^3)(2+0)-(2x+3)(0-3x^2)}{(4-x^3)^2}$$

$$= \frac{(4-x^3)(2)-(2x+3)(-3x^2)}{(4-x^3)^2}$$

$$= \frac{8-2x^3+6x^3+9x^2}{(4-x^3)^2} = \frac{8+4x^3+9x^2}{(4-x^3)^2}$$

c) $y = \sqrt{(2x^4-1)(5x^3+6x)}$

Reescrevendo a função temos $y = \left[(2x^4-1)(5x^3+6x)\right]^{\frac{1}{2}}$.

$$y' = \frac{1}{2}\left[(2x^4-1)(5x^3+6x)\right]^{\frac{-1}{2}} \cdot \left[(2x^4-1)(5x^3+6x)\right]'$$

$$= \frac{1}{2}\left[(2x^4-1)(5x^3+6x)\right]^{\frac{-1}{2}} \cdot \left[(2x^4-1)(5x^3+6x)' + (5x^3+6x)(2x^4-1)'\right]$$

$$= \frac{1}{2\sqrt{(2x^4-1)(5x^3+6x)}} \cdot \left[(2x^4-1)(15x^2+6)+(5x^3+6x)(8x^3-0)\right]$$

$$= \frac{1}{2\sqrt{(2x^4-1)(5x^3+6x)}} \cdot \left(30x^6+12x^4-15x^2-6+40x^6+48x^4\right)$$

$$= \frac{\left(70x^6+60x^4-15x^2-6\right)}{2\sqrt{(2x^4-1)(5x^3+6x)}}$$

d) $y = \sqrt[4]{x^2+2x+1}$

Reescrevendo a função temos $y = (x^2+2x+1)^{\frac{1}{4}}$.

$$y' = \frac{1}{4}\left(x^2+2x+1\right)^{\frac{1}{4}-1}\left(x^2+2x+1\right)'$$
$$= \frac{1}{4}\left(x^2+2x+1\right)^{\frac{-3}{4}}\left(2x+2\right)$$
$$= \frac{2\left(x+1\right)}{4\left(x^2+2x+1\right)^{\frac{3}{4}}}$$
$$= \frac{\left(x+1\right)}{2\sqrt[4]{\left(x^2+2x+1\right)^3}}$$

e) $f\left(t\right) = \sqrt{3t} + \sqrt{\frac{4}{t}}$

Reescrevendo a função temos $f\left(t\right) = \left(3t\right)^{\frac{1}{2}} + \left(\frac{4}{t}\right)^{\frac{1}{2}}$.

$$f'\left(t\right) = \frac{1}{2}\left(3t\right)^{\frac{1}{2}-1}\left(3t\right)' + \frac{1}{2}\left(\frac{4}{t}\right)^{\frac{1}{2}-1}\left(\frac{4}{t}\right)'$$
$$= \frac{1}{2}\left(3t\right)^{\frac{-1}{2}}\left(3\right) + \frac{1}{2}\left(\frac{4}{t}\right)^{\frac{-1}{2}} \cdot 4 \cdot \frac{-1}{t^2}$$
$$= \frac{3}{2\sqrt{3t}} - \frac{2}{t^2\sqrt{\frac{4}{t}}} = \frac{3}{2\sqrt{3t}} - \frac{2}{t^2}\sqrt{\frac{t}{4}} = \frac{3}{2\sqrt{3t}} - \frac{2}{t^2}\frac{\sqrt{t}}{2} = \frac{3}{2\sqrt{3t}} - \frac{\sqrt{t}}{t^2}$$

f) $r\left(\theta\right) = \left(\frac{4}{5\theta}\right)^{\sqrt{\theta}}$

$$r'\left(\theta\right) = \sqrt{\theta} \cdot \left(\frac{4}{5\theta}\right)^{\sqrt{\theta}-1}\left(\frac{4}{5\theta}\right)' + \left(\frac{4}{5\theta}\right)^{\sqrt{\theta}} \ln\left(\frac{4}{5\theta}\right)\left(\sqrt{\theta}\right)'$$
$$= \sqrt{\theta} \cdot \left(\frac{4}{5\theta}\right)^{\sqrt{\theta}-1}\left(\frac{4}{5} \cdot \frac{-1}{\theta^2}\right) + \left(\frac{4}{5\theta}\right)^{\sqrt{\theta}} \ln\left(\frac{4}{5\theta}\right)\left(\frac{1}{2\sqrt{\theta}}\right)$$

g) $f(x) = x^3 \ln\left(\frac{3x+1}{x^3}\right)$

$$f'(x) = x^3\left[\ln\left(\frac{3x+1}{x^3}\right)\right]' + \ln\left(\frac{3x+1}{x^3}\right)\cdot\left(x^3\right)'$$

$$= x^3 \frac{\left(\frac{3x+1}{x^3}\right)'}{\frac{3x+1}{x^3}} + \ln\left(\frac{3x+1}{x^3}\right)\cdot 3x^2$$

$$= x^3\left(\frac{3x+1}{x^3}\right)' \frac{x^3}{3x+1} + \ln\left(\frac{3x+1}{x^3}\right)\cdot 3x^2$$

$$= x^3 \frac{x^3}{3x+1}\left(\frac{x^3(3x+1)' - (3x+1)\left(x^3\right)'}{\left(x^3\right)^2}\right) + \ln\left(\frac{3x+1}{x^3}\right)\cdot 3x^2$$

$$= \frac{x^6}{3x+1}\left(\frac{x^3(3) - (3x+1)\left(3x^2\right)}{\left(x^3\right)^2}\right) + \ln\left(\frac{3x+1}{x^3}\right)\cdot 3x^2$$

$$= \frac{x^6}{3x+1}\left(\frac{3x^3 - 9x^3 - 3x^2}{x^6}\right) + \ln\left(\frac{3x+1}{x^3}\right)\cdot 3x^2$$

$$= \frac{x^6}{3x+1}\left(\frac{-6x^3 - 3x^2}{x^6}\right) + \ln\left(\frac{3x+1}{x^3}\right)\cdot 3x^2$$

$$= \left(\frac{-6x^3 - 3x^2}{3x+1}\right) + \ln\left(\frac{3x+1}{x^3}\right)\cdot 3x^2$$

h) $y = e^{\frac{x^2}{4}}$

$$y' = e^{\frac{x^2}{4}} \cdot \left(\frac{x^2}{4}\right)' = e^{\frac{x^2}{4}} \cdot \left(\frac{2x}{4}\right) = \frac{x}{2} e^{\frac{x^2}{4}}$$

i) $y = \log_3\left(x^2+4\right)$

$$y' = \frac{\left(x^2+4\right)'}{\left(x^2+4\right)} \log_3 e$$

$$= \frac{(2x+0)}{\left(x^2+4\right)} \log_3 e$$

$$= \frac{(2x)}{\left(x^2+4\right)} \log_3 e$$

j) $y = 4^{\frac{x+1}{x}}$

$$y' = 4^{\frac{x+1}{x}} \ln 4 \left(\frac{x+1}{x} \right)'$$

$$= 4^{\frac{x+1}{x}} \ln 4 \left(\frac{(x)(x+1)' - (x+1)x'}{x^2} \right)$$

$$= 4^{\frac{x+1}{x}} \ln 4 \left(\frac{(x)(1+0) - (x+1) \cdot 1}{x^2} \right)$$

$$= 4^{\frac{x+1}{x}} \ln 4 \left(\frac{x - x - 1}{x^2} \right)$$

$$= \frac{-1}{x^2} 4^{\frac{x+1}{x}} \ln 4$$

k) $y = 7 - \frac{3}{4}x^4$ $\qquad$ $y' = 0 - 4 \cdot \frac{3}{4}x^3 = -3x^3$

l) $f(t) = 4t^3 - 6t + 3$ $\qquad$ $f'(t) = 3 \cdot 4t^2 - 6 + 0 = 12t^2 - 6$

m) $g(s) = (s^3 + 1)(s^2 + 3s)$

Usamos a regra do produto, então:

$$g'(s) = (s^3 + 1)(s^2 + 3s)' + (s^3 + 1)'(s^2 + 3s)$$
$$= (s^3 + 1)(2s + 3) + 3s^2(s^2 + 3s)$$
$$= 2s^4 + 3s^3 + 2s + 3 + 3s^4 + 9s^3$$
$$= 5s^4 + 12s^3 + 2s + 3$$

n) $h(x) = \frac{4}{3} \cdot \frac{x-1}{x+1}$

Usamos a regra do quociente.

$$h'(x) = \frac{4}{3} \cdot \frac{(x+1)(x-1)' - (x-1)(x+1)'}{(x+1)^2}$$

$$= \frac{4}{3} \cdot \frac{(x+1) - (x-1)}{(x+1)^2}$$

$$= \frac{4}{3} \cdot \frac{2}{(x+1)^2}$$

$$= \frac{8}{3(x+1)^2}$$

o) Podemos reescrever a função como um quociente da seguinte forma:

$$f(x) = \frac{(x+4)}{(4-x^3)}$$

Assim, a derivada passa a ser:

$$f'(x) = \frac{(4-x^3)(x+4)' - (x+4)(4-x^3)'}{(4-x^3)^2}$$

$$= \frac{(4-x^3)(1+0) - (x+4)(0-3x^2)}{(4-x^3)^2}$$

$$= \frac{(4-x^3) - (x+4)(-3x^2)}{(4-x^3)^2}$$

$$= \frac{(4-x^3) - (-3x^3 - 12x^2)}{(4-x^3)^2}$$

$$= \frac{4 - x^3 + 3x^3 + 12x^2}{(4-x^3)^2}$$

$$= \frac{4 + 2x^3 + 12x^2}{(4-x^3)^2}.$$

p) Reescrevendo a função temos $y = (x^2 + 2x + 1)^{\frac{1}{4}}$.

$$y' = \frac{1}{4}\left(x^2+2x+1\right)^{\frac{1}{4}-1}\left(x^2+2x+1\right)'$$

$$= \frac{1}{4}\left(x^2+2x+1\right)^{\frac{-3}{4}}(2x+2)$$

$$= \frac{2(x+1)}{4\left(x^2+2x+1\right)^{\frac{3}{4}}}$$

$$= \frac{(x+1)}{2\sqrt[4]{\left(x^2+2x+1\right)^3}}.$$

q) $y = \frac{4}{x^3} - \frac{2}{x^4}$

Podemos reescrever como:

$$y = 4x^{-3} - 2x^{-4}$$

$$y' = -12x^{-4} + 8x^{-5}$$

5) Para as funções escritas na forma implícita, calcular a derivada $\frac{dy}{dx}$:

a) $y^2 = 4x - 8$

$$\left(y^2\right)' = (4x)' - (8)'$$

$$2yy' = 4 - 0$$

$$y' = \frac{4}{2y}$$

b) $x^2 + y^2 - 4\sqrt{y} = 9$

$$\left(x^2\right)' + \left(y^2\right)' - \left(4\sqrt{y}\right)' = (9)'$$

$$2x + 2yy' - 4\frac{1}{2}y^{\frac{1}{2}-1}y' = 0$$

$$2yy' - 2y^{-\frac{1}{2}}y' = -2x$$

$$y'\left(2y - 2y^{-\frac{1}{2}}\right) = -2x$$

$$y' = \frac{-2x}{2y - 2y^{-\frac{1}{2}}}$$

c) $xy^2 - x^4 = 3y$

$$\left(xy^2\right)' - \left(x^4\right)' = \left(3y\right)'$$

$$x\left(y^2\right)' + x'y^2 - 4x^3 = 3y'$$

$$x2yy' + 1y^2 - 3y' = 4x^3$$

$$y'\left(2xy - 3\right) = 4x^3 - y^2$$

$$y' = \frac{4x^3 - y^2}{2xy - 3}$$

6) Calcular a derivada sucessiva até a ordem n indicada:

a) $y = \dfrac{3}{x-4}$, $n = 4$

Reescrevendo a função temos $y = 3\left(x-4\right)^{-1}$

$$y' = 3 \cdot -1\left(x-4\right)^{-1-1} = -3\left(x-4\right)^{-2}$$

$$y'' = -3 \cdot -2\left(x-4\right)^{-2-1} = 6\left(x-4\right)^{-3}$$

$$y''' = 6 \cdot -3\left(x-4\right)^{-3-1} = -18\left(x-4\right)^{-4}$$

$$y^{IV} = -18 \cdot -4\left(x-4\right)^{-4-1} = 72\left(x-4\right)^{-5}$$

b) $f\left(x\right) = \dfrac{1}{2e^x}$, $n = 3$

Reescrevendo a função temos $f\left(x\right) = \dfrac{1}{2}e^{-x}$

$$f'\left(x\right) = \frac{1}{2}e^{-x}\left(-x\right)' = \frac{1}{2}e^{-x}\left(-1\right) = \frac{-1}{2}e^{-x}$$

$$f''\left(x\right) = \frac{-1}{2}e^{-x}\left(-x\right)' = \frac{-1}{2}e^{-x}\left(-1\right) = \frac{1}{2}e^{-x}$$

$$f'''\left(x\right) = \frac{1}{2}e^{-x}\left(-x\right)' = \frac{1}{2}e^{-x}\left(-1\right) = \frac{-1}{2}e^{-x}$$

c) $v(t) = \ln 3t$, $n = 2$

$$v'(t) = \frac{(3t)'}{3t} = \frac{3}{3t} = \frac{1}{t}$$

$$v''(t) = \frac{-1}{t^2}$$

7) O volume de um cano flexível varia, aproximadamente, 0,1cm^3. Sabendo-se que a altura é constante e sempre igual a três vezes o raio da base, use diferenciais para determinar a correspondente variação do raio. (o volume de um cilindro é $V = \pi r^2 h$)

Pelos dados do problema, *dV=0,1*e *h=3r* . Assim, $V = \pi r^2 3r = 3\pi r^3$.

$$dV = \left(3\pi r^3\right)' dr$$

$$0,1 = 3 \cdot 3\pi r^2 \cdot dr$$

$$\frac{0,1}{3 \cdot 3\pi r^2} = dr$$

$$dr = \frac{0,1}{9\pi r^2}$$