Giovani Zanella de Maia

IFC Blumenau - álgebra linear - 2024.1 - PROVA 2
Bacharelado em Engenharia Elétrica - 09/05/2024 - Prof. Cechetto Jr.

NOME: Giovani Zanella da maia **Nº** ~~8~~ 7

LAPIS

As questões devem ser feitas da forma completa, com seus raciocínios, não colocar somente resposta final.
Simplificar frações e racionalizar raízes, evitar ao máximo o uso de aproximações.
Pode ser usada calculadora cientifica que não são calculadoras gráficas e/ou programáveis.

Entregar as questões em ordem numérica nas folhas brancas que você recebeu.
Incluir a folha de anotações no final.

---

1. Resolva o sistema linear possível e determinado usando a forma que julgar mais conveniente. Escreva a solução no final.

$$\begin{cases} -3c = -12 \\ e - 5d - a = -7 \\ 7c = 16 + 2d \\ a + 5c - b - 7d - e = -31 \\ 2 + 4e = 5c + d \end{cases}$$

$$\begin{cases} -3c = -12 \\ -a - 5d + e = -7 \\ 7c - 2d = 16 \\ a - b + 5c - 7d - e = -31 \\ -5c - d \quad + 4e = -2 \end{cases}$$

ignorar

$$\begin{array}{c} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \\ 5 \end{array} \left[\begin{array}{ccccc|c} 0 & 0 & -3 & 0 & 0 & -12 \\ -1 & 0 & 0 & -5 & 1 & -7 \\ 0 & 0 & 7 & -2 & 0 & 16 \\ 1 & -1 & 5 & -7 & -1 & -31 \\ 0 & 0 & -5 & -1 & 4 & -2 \end{array}\right] \quad \begin{array}{l} L2 \cdot (-1) \\ L2 \leftrightarrow L1 \end{array}$$

$$\boxed{c = \frac{-12}{-3} = 4}$$

$7 \cdot 4 = 16 + 2d$

$28 = 16 + 2d$

$28 - 16 = 2d$

$12 = 2d$

$$\boxed{d = \frac{12}{2} = 6}$$

$2 + 4e = 5 \cdot 4 + 6$

$2 + 4e = 26$

$4e = 26 - 2$

$e = \frac{24}{24}$

$$\boxed{e = 6}$$

$6 - 5 \cdot 6 - a = -7$

$6 - 30 - a = -7$

$-24 - a = -7$

$-a = -7 + 24$

$-a = 17 \quad \cdot(-1)$

$$\boxed{a = -17}$$

$\overbrace{-17}^{a} + 5 \cdot \overbrace{4}^{c} - b - 7 \cdot \overbrace{6}^{d} - \overbrace{6}^{e} = -31$

$-17 + 20 - b - 42 - 6 = -31$

$3 - b - 42 - 6 = -31$

$-b - 45 = -31$

$-b = -31 + 45$

$-b = 14$

$$\boxed{b = -14}$$

5,0

2. Use o método de Gauss-Jordan (escalonamento completo) ou o método de Gauss (escalonamento parcial) para mostrar que o sistema linear abaixo é um sistema Impossível. Justifique porque a solução é um conjunto vazio.

$$\begin{cases} 10x - 4y + 3z = 7 \\ -4x + 25y - 2z = 27 \\ -\dfrac{94}{3}x + \dfrac{61}{3}y - \dfrac{29}{3}z = 12 \\ 94x - 61y + 29z = -36 \end{cases}$$

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 10 & -4 & 3 & 7 \\ -4 & 25 & -2 & 27 \\ -\frac{94}{3} & \frac{61}{3} & -\frac{29}{3} & 12 \\ 94 & -61 & 29 & -36 \end{array}\right]$$

$L2 = \frac{L2}{-4}$

$L3 = L3 \cdot 3$

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 10 & -4 & 3 & 7 \\ +1 & -5 & +\frac{1}{2} & \frac{27}{-4} \\ -94 & 61 & -29 & 36 \\ 94 & -61 & 29 & -36 \end{array}\right]$$

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -5 & \frac{1}{2} & \frac{27}{4} \\ 10 & -4 & 3 & 7 \\ -94 & 61 & -29 & 36 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right]$$

$L4 = L3 + L4$

$L2 = L2 - (L1 \cdot 10)$

$L3 = L3 + (L1 \cdot 94)$

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -5 & \frac{1}{2} & \frac{27}{4} \\ 0 & 46 & -2 & \frac{121}{2} \\ 0 & -409 & 18 & \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right]$$

3. Use o método de Gauss-Jordan (escalonamento completo com a identidade ao lado) para calcular a matriz inversa da matriz abaixo.
Dica: Os resultados na inversa são todos inteiros.

$$\begin{pmatrix} \frac{1}{4} & \frac{1}{4} & \frac{-1}{2} \\ \frac{-1}{2} & \frac{1}{2} & 0 \\ \frac{1}{4} & \frac{1}{4} & \frac{1}{2} \end{pmatrix} \left|\begin{matrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{matrix}\right.$$

$L1 = L1 \cdot 4$

$L2 = L2 \cdot 2$

$L3 = L3 \cdot 4$

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & -2 & 4 & 0 & 0 \\ -1 & 4 & 0 & 0 & 2 & 0 \\ 1 & 1 & 2 & 0 & 0 & 4 \end{array}\right]$$

$L2 = L2 + L1$

$L3 = L3 - L1$

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & -2 & 4 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & -2 & 4 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 4 & -4 & 0 & 0 \end{array}\right]$$

$L2 = \frac{L2}{2}$

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & -2 & 4 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 4 & -4 & 0 & 0 \end{array}\right]$$

$L1 = L1 - L2$

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & -1 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 4 & -4 & 0 & 0 \end{array}\right]$$

$L3 = \frac{L3}{4}$

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & -1 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & 0 \end{array}\right]$$

$L1 = L1 + (L3)$

$L2 = L2 + L3$

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & 0 \end{array}\right]$$

1
2

//

4. Foi visto em aulas que:
Um sistema linear pode ser escrito através de usas matrizes associadas: $AX = B$
Foi visto também que:

$$AX = B$$
$$A^{-1}AX = A^{-1}B$$
$$IX = A^{-1}B$$
$$X = A^{-1}B$$

Portando, use o resultado da questão anterior e o método da matriz inversa $X = A^{-1}B$ para resolver o sistema linear possível e determinado abaixo:

$$\begin{cases} \frac{1}{4}x + \frac{1}{4}y - \frac{1}{2}z = \frac{1}{9} \\ -\frac{1}{2}x + \frac{1}{2}y = -\sqrt{2} \\ \frac{1}{4}x + \frac{1}{4}y + \frac{1}{2}z = \frac{e}{7} \end{cases}$$

$$\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \frac{1}{9} \\ -\sqrt{2} \\ \frac{e}{7} \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} X \\ Y \\ Z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{9} + \sqrt{2} + 0 \\ \frac{1}{9} - \sqrt{2} + 0 \\ -\frac{1}{9} + 0 + 0 \end{bmatrix}$$

$$\begin{cases} \frac{1}{9} + \sqrt{2} = X \\ \frac{1}{9} - \sqrt{2} = Y \\ -\frac{1}{9} = Z \end{cases}$$

$\frac{1}{9} + \sqrt{2} = x$ $\frac{1}{9} - \sqrt{2} = y$

5. Mostre que o conjunto V abaixo não é um espaço vetorial:
Dê um contra-exemplo.
$V = \mathbb{R}^3$
$+: (a, b, c) + (d, e, f) = (a + d, b + e, c + f)$
$\otimes : k(a, b, c) = (ka, kb, (kc)^2)$

$U = (x, y, z) \quad U \subset \mathbb{R}^3$

M4) $1 \cdot U = U$ ∴ não é espaço vetoria

$\Rightarrow 1 \cdot (x, y, z)$ Pela M4

$\Rightarrow (x, y, (z)^2) \neq U$

10

6. Justifique porque o conjunto W abaixo não é um subespaço vetorial em relação a soma e multiplicação por escalar usuais.

$$W = \left\{ \begin{bmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{bmatrix} \in M_3 \ ; a = 0 \ , \quad b = -15c + 4d - 7i \ , e = 2f \ , \quad g + h = 3 \ , \quad g - h = -1 \right\}$$

7. Escreva o vetor $\overbrace{(17, 23, 10, 43)}^{V} \in \mathbb{R}^4$ como combinação dos vetores $u = (6, 4, 0, 60)$, $v = (-2, -3, 0, 1)$ e $w = (0, 0, 1, 2)$

$V = a \cdot u + b \cdot v + c \cdot w$

$$\begin{pmatrix} 17 \\ 23 \\ 10 \\ 43 \end{pmatrix} = a \cdot \begin{pmatrix} 6 \\ 4 \\ 0 \\ 60 \end{pmatrix} + b \cdot \begin{pmatrix} -2 \\ -3 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + c \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

$$\begin{cases} 6a - 2b = 17 \\ 4a - 3b = 23 \\ 0 + 0 + c = 10 \\ 60a + 1b + 2c = 43 \end{cases}$$

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 6 & -2 & 0 & 17 \\ 4 & -3 & 0 & 23 \\ 0 & 0 & 1 & 10 \\ 60 & 1 & 2 & 43 \end{array}\right] \quad L1 = \frac{L1}{6} \quad \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -\frac{1}{3} & 0 & \frac{17}{6} \\ 4 & -3 & 0 & 23 \\ 0 & 0 & 1 & 10 \\ 60 & 1 & 2 & 43 \end{array}\right]$$

$L2 = L2 - (L1 \cdot 4)$

$L4 = L4 - (L1 \cdot 60)$

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -\frac{1}{3} & 0 & \frac{17}{6} \\ 0 & -\frac{13}{3} & 0 & \frac{35}{3} = 7 \\ 0 & 0 & 1 & 10 \\ 0 & 20 & 2 & -127 \end{array}\right]$$

$$L2 = \frac{L2}{\left(-\frac{13}{3}\right)} \quad \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -\frac{1}{3} & 0 & \frac{17}{6} \\ 0 & 1 & 0 & -\frac{21}{13} \\ 0 & 0 & 1 & 10 \\ 0 & 20 & 2 & -127 \end{array}\right]$$

$L1 = L1 + \left(L2 \cdot \frac{1}{3}\right)$

$L4 = L4 + 19$

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & -\frac{21}{13} \\ 0 & 0 & 1 & 10 \\ 0 & 0 & 21 & -102 \end{array}\right]$$

$L4 = L4 - (L3 \cdot 21)$

$$L4 \quad \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & \frac{29}{6} \\ 0 & 1 & 0 & 7 \\ 0 & 0 & 1 & 10 \\ 0 & 0 & 0 & \end{array}\right]$$

$-102 - (10 \cdot 21)$

$-102 - 210$

$$\frac{17}{6} + 6 \cdot \frac{1}{3} \qquad \frac{17}{6} + \frac{2}{1} = \frac{17 + 12}{6}$$

$$\frac{29}{6}$$

8. Encontre o subespaço gerado pelo conjunto $A = \{\overbrace{(1,2,4)}^{v1}, \overbrace{(0,1,2)}^{v2}\}$

$[v1, v2] = \{(x,y,z) = a \cdot v1 + b \cdot v2 \,/\, (x,y,z) \in \mathbb{R}^3\}$

$(x,y,z) = a \cdot v1 + b \cdot v2$

$= a \cdot (1,2,4) + b \cdot (0,1,2)$

$= (a, 2a, 4a) + (0, b, 2b)$

$(x,y,z) = a, 2a+b, 4a+2b$

$$\begin{cases} a = x & \text{I} \\ 2a + b = y & \text{II} \\ 4a + 2b = z & \text{III} \end{cases}$$

II $2 \cdot x + b = y$

$b = y - 2x$

III $4a + 2b = z$

$4 \cdot x + 2(y - 2x) = z$

$\cancel{4x} + 2y - \cancel{4x} = z$

$2y = z$

$\boxed{y = \frac{z}{2}}$

1,0

Portanto $[v1, v2] = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \,/\, y = \frac{z}{2}\}$

9. Verifique se o conjunto D é LD ou LI

$$D = \left\{ \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 5 & 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -1 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 20 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -2 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \right\}$$

$$a \cdot \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 5 & 1 \end{bmatrix} + b \begin{bmatrix} -1 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} + c \begin{bmatrix} 20 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} + d \begin{bmatrix} -2 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 3a & a \\ 5a & a \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -b & -b \\ b & 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 20c & 0 \\ c & c \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -2d & 0 \\ d & d \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 3a-b+20c-2d & a-b \\ 5a+b+c+d & a+c+d \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\begin{cases} 3a-b+20c-2d=0 \\ 5a+b+c+d=0 \\ a-b=0 \\ a+c+d=0 \end{cases} \qquad \left[\begin{array}{cccc|c} 3 & -1 & +20 & -2 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 5a & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 0 \end{array}\right] \quad L1 \leftrightarrow L2$$

$$\left[\begin{array}{cccc|c} 1 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 3 & -1 & 20 & -2 & 0 \\ 5 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 0 \end{array}\right] \quad \begin{array}{l} L2 = L2-(L1 \cdot 3) \\ L3 = L3-(L1 \cdot 5) \\ L4 = L4-(L1 \cdot 1) \end{array} \quad \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 20 & -2 & 0 \\ 0 & 6 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 0 \end{array}\right] \quad L4 \leftrightarrow L2$$

L2

$$\left[\begin{array}{cccc|c} 1 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 6 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 20 & -2 & 0 \end{array}\right] \quad \begin{array}{l} L1 = L1+L2 \\ L3 = L3-(L2 \cdot 6) \\ L4 = L4-(L2 \cdot 2) \end{array} \quad \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -5 & -5 & 0 \\ 0 & 0 & 18 & -4 & 0 \end{array}\right] \quad L3 = \frac{L3}{-5}$$

$$\left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 18 & 4 & 0 \end{array}\right] \quad \begin{array}{l} L1 = L1-L3 \\ L2 = L2-L3 \\ L4 = L4-(L3 \cdot 18) \end{array} \quad \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -14 & 0 \end{array}\right] \quad L4 = \frac{L4}{-14}$$

$$\left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{array}\right] \quad L3 = L3-L4 \quad \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{array}\right]$$

portanto é LI

10. Determine uma base e a dimensão do subespaço vetorial W

$W = \left\{(x, y, z, t) \in \mathbb{R}^3 \,; 2x = 3z, e -7y = \frac{1}{2}t\right\}$

~~$2x = 3z$ $z = \frac{2x}{3}$~~

~~$x = \frac{3z}{2}$~~

Resposta Professor

(x, y, z, T)

$2x = 3z$

$x = \frac{3}{2}z$

$-7y = \frac{1}{2}t$

$t = -14y$

$(x, y, z, T) = (\frac{3}{2}z, y, z, -14y)$

$(\frac{3}{2}z, 0, z, 0) + (0, y, 0, -14)$

$2($