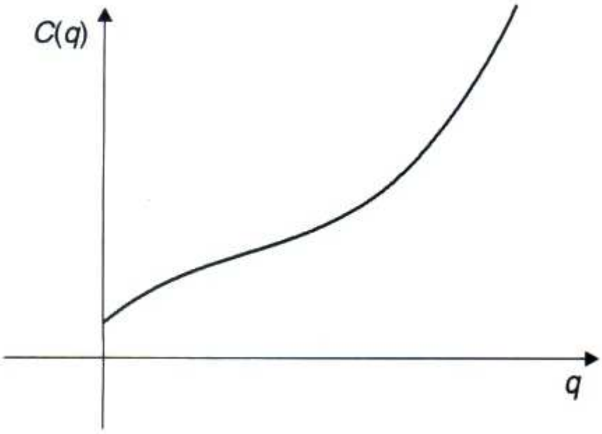
17. Supor que o custo total de produção de uma quantidade de um certo produto é dado pelo gráfico da figura que segue.

(*a*) Dar o significado de $C(0)$.

(*b*) Descrever o comportamento do custo marginal.



18. O custo total $C(q)$ da produção de q unidades de um produto é dado por.

$$C(q) = \frac{1}{2}q^3 - 5q^2 + 10q + 120$$

(*a*) Qual é o custo fixo?

(*b*) Qual é o custo marginal quando o nível de produção é $q = 20$ unidades.

(*c*) Determinar se existem os valores de q tais que o custo marginal é nulo.

19. A função $q = 20.000 - 400p$ representa a demanda de um produto em relação a seu preço p. Calcular e interpretar o valor da elasticidade da demanda ao nível de preço $p = 4$.

20. A função $q = 15 + 60y - 0{,}06y^2$ mede a demanda de um bem em função da renda média per capita denotada por y (unidade monetária), quando os outros fatores que influenciam a demanda são considerados constantes.

(*a*) Determinar a elasticidade da demanda em relação à renda y.

(*b*) Dar o valor da elasticidade da demanda, por em nível de renda $y = 300$. Interpretar o resultado.

5.4 Máximos e Mínimos

A Figura 5.6 nos mostra o gráfico de uma função $y = f(x)$, onde assinalamos pontos de abscissas x_1, x_2, x_3 e x_4.

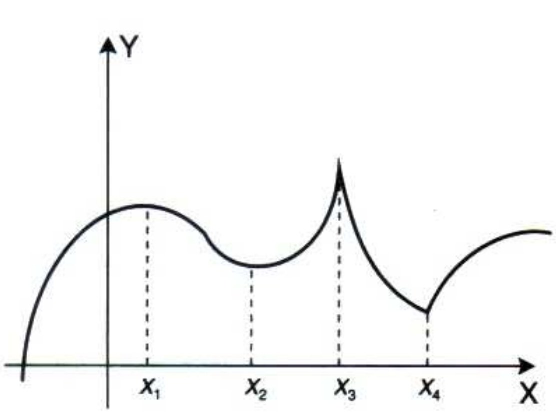


Figura 5.6

Esses pontos são chamados *pontos extremos* da função. Os valores $f(x_1)$ e $f(x_3)$ são chamados *máximos relativos* e $f(x_2), f(x_4)$ são chamados *mínimos relativos*.

Podemos formalizar as definições.

5.4.1 Definição Uma função f tem um máximo relativo em c, se existir um intervalo aberto I, contendo c, tal que $f(c) \geq f(x)$ para todo $x \in I \cap D(f)$.

5.4.2 Definição Uma função f tem um mínimo relativo em c, se existir intervalo aberto I, contendo c, tal que $f(c) \leq f(x)$ para todo $x \in I \cap D(f)$.

5.4.3 Exemplo

(i) A função $f(x) = 3x^4 - 12x^2$ tem um máximo relativo em $c_1 = 0$, pois existe o intervalo $(-2, 2)$, tal que $f(0) \geq f(x)$ para todo $x \in (-2, 2)$.

Em $c_2 = -\sqrt{2}$ e $c_3 = +\sqrt{2}$, a função dada tem mínimos relativos, pois $f(-\sqrt{2}) \leq f(x)$ para todo $x \in (-2, 0)$ e $f(\sqrt{2}) \leq f(x)$ para todo $x \in (0, 2)$ (ver Figura 5.7).

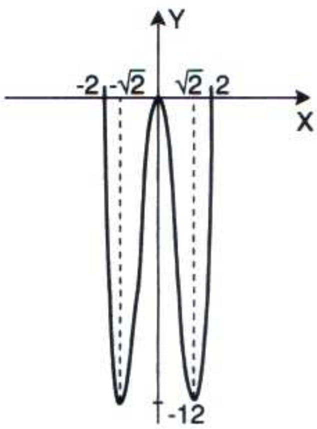


Figura 5.7

(ii) Na Figura 5.8 apresentamos a função $f(x) = x^4 - 4x^3 - 13x^2 + 28x + 60$. Analisar a existência de pontos extremos da função.

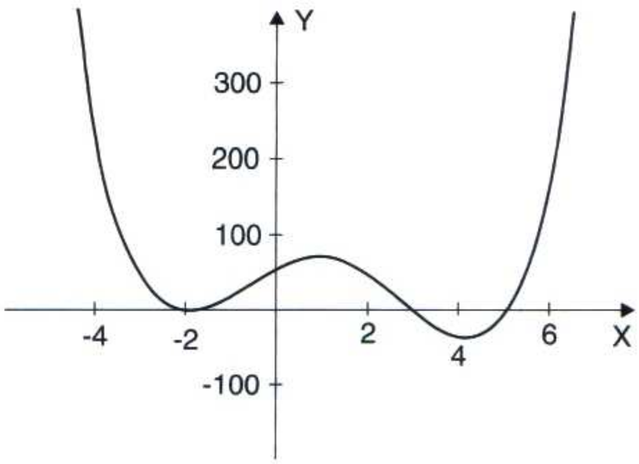


Figura 5.8

O gráfico de uma função é de muita importância para visualizarmos os pontos extremos da função. Entretanto, podemos ficar diante da situação de poder apresentar somente uma estimativa para os valores de máximo e de mínimo.

Ao observar a Figura 5.8 é coerente afirmar que estamos diante de dois pontos de mínimos relativos situados em $x = -2$ e $x \cong 4{,}2$ e um ponto de máximo em $x = 0{,}8$.

Podemos, com o uso de um software específico analisar uma tabela de valores para verificar se a estimativa apresentada pode ser melhorada (ter uma melhor aproximação). Nas tabelas 5.1, (*b*) e (*c*), observamos que efetivamente os pontos estimados são pontos extremos e conseguimos constatar que a estimativa dada com uma casa decimal está confirmada.

Tabela 5.1

x	$f(x)$
−3	48,0000
−2	**0**
−1	24,0000
0	60,0000

(*a*)

x	$f(x)$
0,6	71,3856
0,7	72,0981
0,8	**72,4416**
0,9	72,4101
1,0	72,0000

(*b*)

x	$f(x)$
4,0	−36,0000
4,1	−36,8379
4,2	**−36,9024**
4,3	−36,1179

(*c*)

A proposição seguinte permite encontrar com precisão os possíveis pontos extremos de uma função.

5.4.4 Proposição Suponhamos que $f(x)$ existe para todos os valores de $x \in (a, b)$ e que f tem um extremo relativo em c, onde $a < c < b$. Se $f'(c)$ existe, então $f'(c) = 0$.

Prova: Suponhamos que f tem um ponto de máximo relativo em c e que $f'(c)$ existe.

Então,

$$f'(c) = \lim_{x \to c} \frac{f(x) - f(c)}{x - c} = \lim_{x \to c^+} \frac{f(x) - f(c)}{x - c} = \lim_{x \to c^-} \frac{f(x) - f(c)}{x - c}.$$

Como f tem um ponto de máximo relativo em c, pela Definição 5.4.1, se x estiver suficientemente próximo de c, temos que $f(c) \geq f(x)$ ou $f(x) - f(c) \leq 0$.

Se $x \to c^+$, temos $x - c > 0$. Portanto, $\dfrac{f(x) - f(c)}{x - c} \leq 0$ e então:

$$f'(c) = \lim_{x \to c^+} \frac{f(x) - f(c)}{x - c} \leq 0. \tag{1}$$

Se $x \to c^-$, temos $x - c < 0$. Portanto, $\dfrac{f(x) - f(c)}{x - c} \geq 0$ e então:

$$f'(c) = \lim_{x \to c^-} \frac{f(x) - f(c)}{x - c} \geq 0. \tag{2}$$

Por (1) e (2), concluímos que $f'(c) = 0$.

Se f tem um ponto de mínimo relativo em c, a demonstração é análoga.

Esta proposição pode ser interpretada geometricamente. Se f tem um extremo relativo em c e se $f'(c)$ existe, então o gráfico de $y = f(x)$ tem uma reta tangente horizontal no ponto onde $x = c$.

Da proposição, podemos concluir que, quando $f'(c)$ existe, a condição $f'(c) = 0$ é *necessária* para a existência de um extremo relativo em c. Esta condição *não é suficiente* (ver Figura 5.9(a)). Isto é, se $f'(c) = 0$, a função f pode ter ou não um extremo relativo no ponto c.

Da mesma forma, a Figura 5.9(b) e (c) nos mostra que, quando $f'(c)$ não existe, $f(x)$ pode ter ou não um extremo relativo em c.

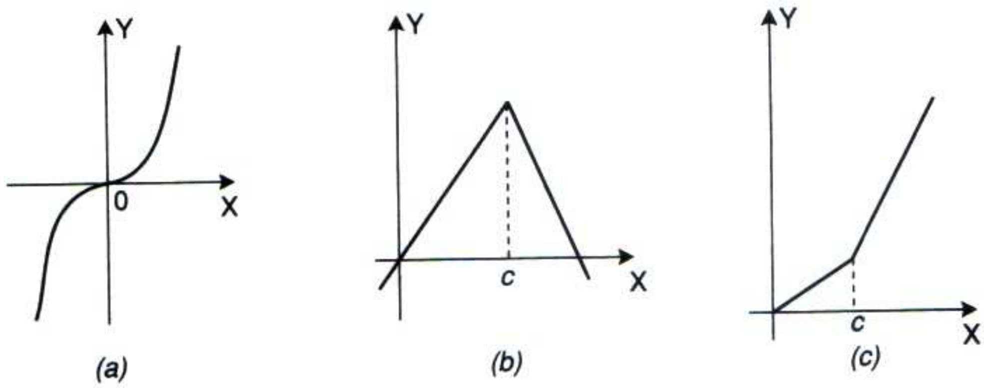


Figura 5.9

O ponto $c \in D(f)$ tal que $f'(c) = 0$ ou $f'(c)$ não existe, é chamado *ponto crítico* de f.

Portanto, uma condição necessária para a existência de um extremo relativo em um ponto c é que c seja um ponto crítico.

É interessante verificar que uma função definida num dado intervalo pode admitir diversos pontos extremos relativos. *O maior valor* da função num intervalo é chamado *máximo absoluto* da função nesse intervalo. Analogamente, o menor valor é chamado *mínimo absoluto*.

Por exemplo, a função $f(x) = 3x$ tem um mínimo absoluto igual a 3 em $[1, 3)$. Não existe um máximo absoluto em $[1, 3)$.

A função $f(x) = -x^2 + 2$ possui um máximo absoluto igual a 2 em $(-3, 2)$. Também podemos dizer que -7 é mínimo absoluto em $[-3, 2]$.

Temos a seguinte proposição, cuja demonstração será omitida.

5.4.5 Proposição Seja $f:[a, b] \to \mathbb{R}$ uma função contínua, definida em um intervalo fechado $[a, b]$. Então f assume máximo e mínimo absoluto em $[a, b]$.

Para analisarmos o máximo e o mínimo absoluto de uma função quando o intervalo não for especificado usamos as definições que seguem.

5.4.6 Definição Dizemos que $f(c)$ é o máximo absoluto da função f, se $c \in D(f)$ e $f(c) \geq f(x)$ para todos os valores de x no domínio de f.

5.4.7 Definição Dizemos que $f(c)$ é o mínimo absoluto da função f se $c \in D(f)$, e $f(c) \leq f(x)$ para todos os valores de x no domínio de f.

5.4.8 Exemplos

(i) A função $f(x) = x^2 + 6x - 3$ tem um mínimo absoluto igual a -12 em $c = -3$, já que $f(-3) = -12 \leq f(x)$ para todos os valores de $x \in D(f)$ (ver Figura 5.10(a)).

(ii) A função $f(x) = -x^2 + 6x - 3$ tem um máximo absoluto igual a 6 em $c = 3$, já que $f(3) = 6 \geq f(x)$ para todos os $x \in D(f)$ (ver Figura 5.10(b)).

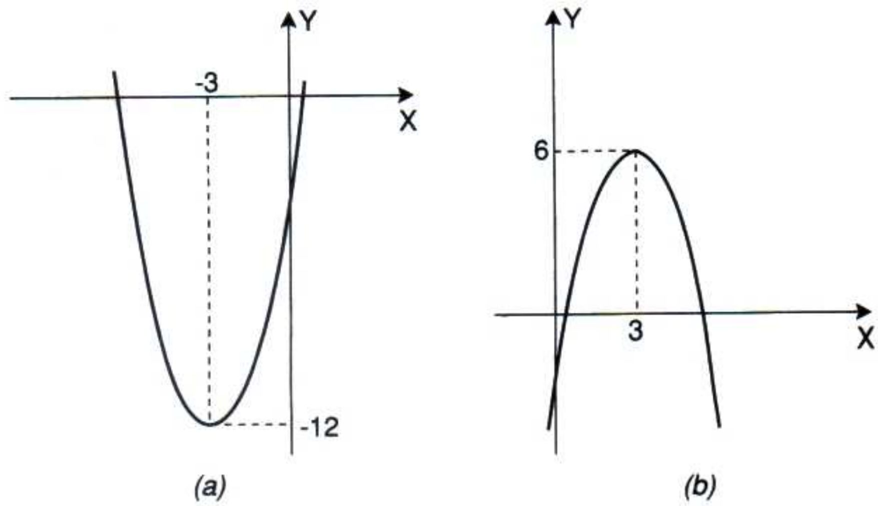


Figura 5.10

5.5 Teoremas sobre Derivadas

5.5.1 Teorema de Rolle Seja f uma função definida e contínua em $[a, b]$ e derivável em (a, b). Se $f(a) = f(b) = 0$, então existe pelo menos um ponto c entre a e b tal que $f'(c) = 0$.

Sob as mesmas hipóteses o teorema de Rolle pode ser estendido para funções tais que $f(a) = f(b) \neq 0$. As Figuras 5.11 (a), (b), (c) e (d) mostram exemplos de funções em que o Teorema de Rolle é válido.

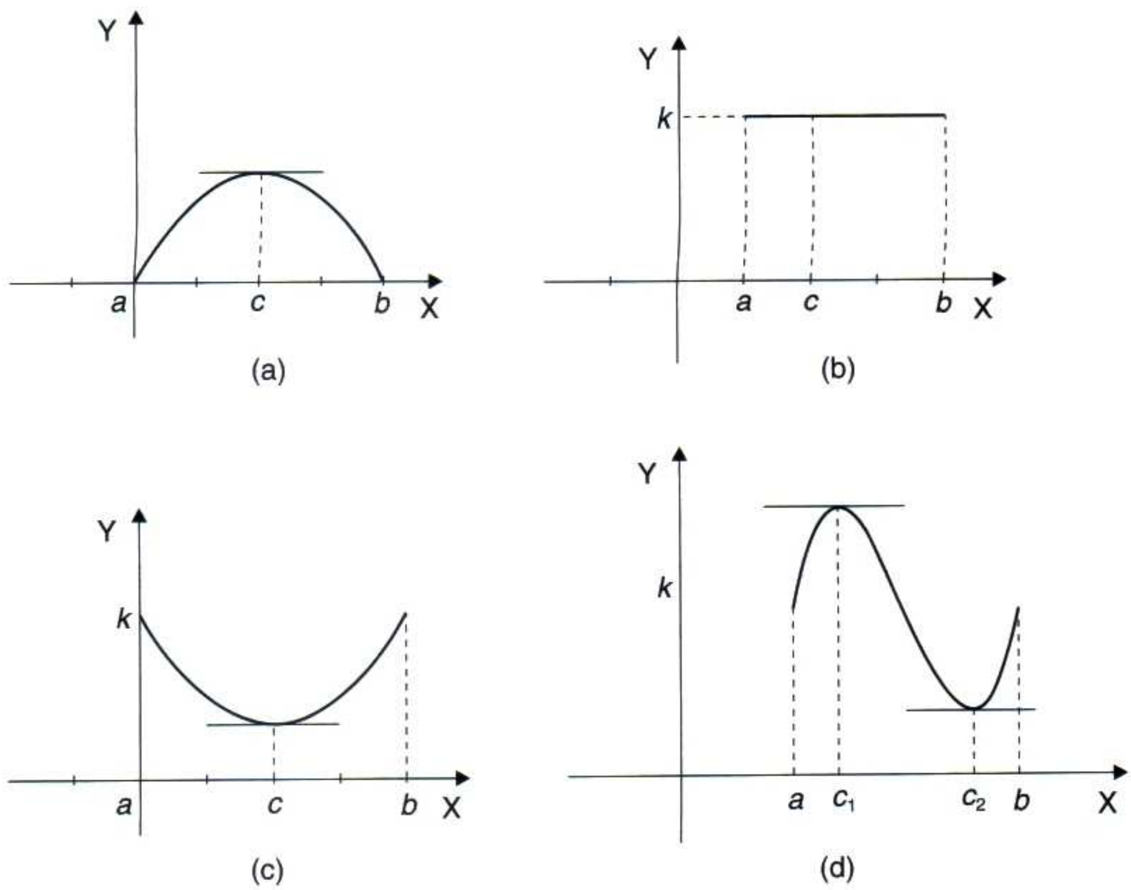


Figura 5.11

Prova: Faremos a prova em duas partes.

1ª parte. Seja $f(x) = 0$, para todo x, $a \leq x \leq b$. Então $f'(x) = 0$ para todo x, $a < x < b$. Portanto, qualquer número entre a e b pode ser tomado para c.

2ª parte. Seja $f(x) \neq 0$, para algum x, $a < x < b$. Como f é contínua em $[a, b]$, pela proposição 5.4.5, f atinge seu máximo e seu mínimo em $[a, b]$. Sendo $f(x) \neq 0$ para algum $x \in (a, b)$, um dos extremos de f será diferente de zero. Como $f(a) = f(b) = 0$, esse extremo será atingido em um ponto $c \in (a, b)$.

Como f é derivável em $c \in (a, b)$, usando a proposição 5.4.4, concluímos que $f'(c) = 0$.

5.5.2 Teorema do Valor Médio. Seja f uma função contínua em $[a, b]$ e derivável em (a, b). Então existe um número c no intervalo (a, b) tal que:

$$f'(c) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}.$$

Antes de provar este teorema apresentaremos sua *interpretação geométrica*.

Geometricamente, o teorema do valor médio estabelece que, se a função $y = f(x)$ é contínua em $[a, b]$ e derivável em (a, b), então existe pelo menos um ponto c entre a e b onde a tangente à curva é paralela à corda que une os pontos $P(a, f(a))$ e $Q(b, f(b))$ (ver Figura 5.12).

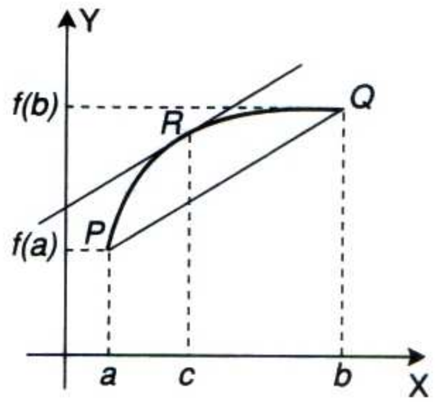


Figura 5.12

Prova do teorema do valor médio: Sejam $P(a, f(a))$ e $Q(b, f(b))$. A equação da reta $\overleftrightarrow{PQ}$ é

$$y - f(a) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}(x - a).$$

Fazendo $y = h(x)$, temos:

$$h(x) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}(x - a) + f(a).$$

Como $h(x)$ é uma função polinomial, $h(x)$ é contínua e derivável em todos os pontos.

Consideremos a função $g(x) = f(x) - h(x)$. Essa função determina a distância vertical entre um ponto $(x, f(x))$ do gráfico de f e o ponto correspondente na reta secante $\overleftrightarrow{PQ}$.

Temos:

$$g(x) = f(x) - \frac{f(b) - f(a)}{b - a}(x - a) - f(a).$$

A função $g(x)$ satisfaz as hipóteses do Teorema de Rolle em $[a, b]$. De fato,

(i) $g(x)$ é contínua em $[a, b]$, já que $f(x)$ e $h(x)$ são contínuas em $[a, b]$.

(ii) $g(x)$ é derivável em (a, b), pois $f(x)$ e $h(x)$ são deriváveis em (a, b).

(iii) $g(a) = g(b) = 0$, pois

$$g(a) = f(a) - \frac{f(b) - f(a)}{b - a}(a - a) - f(a) = 0$$

e

$$g(b) = f(b) - \frac{f(b) - f(a)}{b - a}(b - a) - f(a) = 0$$

Portanto, existe um ponto c entre a e b tal que $g'(c) = 0$.

Como $g'(x) = f'(x) - \dfrac{f(b) - f(a)}{b - a}$, temos:

$$g'(c) = f'(c) - \frac{f(b) - f(a)}{b - a} = 0.$$

e, desta forma,

$$f'(c) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}.$$

5.6 Funções Crescentes e Decrescentes

5.6.1 Definição Dizemos que uma função f, definida num intervalo I, é *crescente* neste intervalo se para quaisquer $x_1, x_2 \in I$, $x_1 < x_2$, temos $f(x_1) \leq f(x_2)$ (ver Figura 5.13).

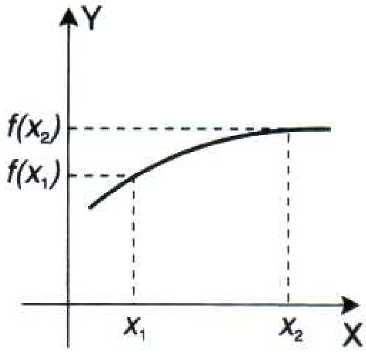


Figura 5.13

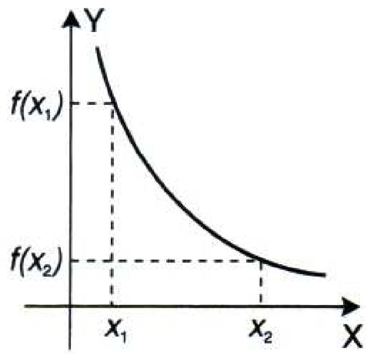


Figura 5.14

5.6.2 Definição Dizemos que uma função f, definida num intervalo I, é *decrescente* nesse intervalo se para quaisquer $x_1, x_2 \in I$, $x_1 < x_2$, temos $f(x_1) \geq f(x_2)$ (ver Figura 5.14).

Se uma função é crescente ou decrescente num intervalo, dizemos que é *monótona* neste intervalo.

Analisando geometricamente o sinal da derivada podemos determinar os intervalos onde uma função derivável é crescente ou decrescente. Temos a seguinte proposição.

5.6.3 Proposição Seja f uma função contínua no intervalo $[a, b]$ e derivável no intervalo (a, b).

(i) Se $f'(x) > 0$ para todo $x \in (a, b)$, então f é crescente em $[a, b]$;

(ii) Se $f'(x) < 0$ para todo $x \in (a, b)$, então f é decrescente em $[a, b]$.

Prova: Sejam x_1 e x_2 dois números quaisquer em $[a, b]$ tais que $x_1 < x_2$. Então f é contínua em $[x_1, x_2]$ e derivável em (x_1, x_2). Pelo teorema do valor médio, segue que:

$$\exists\, c \in (x_1, x_2) \text{ tal que } f'(c) = \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1}. \tag{1}$$

(i) Por hipótese, $f'(x) > 0$ para todo $x \in (a, b)$. Então $f'(c) > 0$. Como $x_1 < x_2$, $x_2 - x_1 > 0$.

Analisando a igualdade (1), concluímos que $f(x_2) - f(x_1) > 0$, ou seja, $f(x_2) > f(x_1)$.
Logo, f é crescente em $[a, b]$.

(ii) Neste caso, $f'(x) < 0$ para todo $x \in (a, b)$. Temos então $f'(c) < 0$ e $x_2 - x_1 > 0$.

Analisando a igualdade (1), concluímos que $f(x_2) - f(x_1) < 0$ e, dessa forma, $f(x_2) < f(x_1)$.
Logo, f é decrescente em $[a, b]$.

Observamos que a hipótese da continuidade de f no intervalo fechado $[a, b]$ é muito importante. De fato, tomando por exemplo, a função:

$f: [0, 1] \to \mathbb{R}$

$$f(x) = \begin{cases} x + 1, & \text{para } 0 \leq x < 1 \\ 1, & \text{para } x = 1 \end{cases}$$

temos que $f'(x) = 1 > 0$ para todo $x \in (0, 1)$ e, no entanto, f não é crescente em $[0, 1]$.

A proposição não pode ser aplicada porque $f(x)$ não é contínua no ponto 1.

5.6.4 Exemplos

Determinar os intervalos nos quais as funções seguintes são crescentes ou decrescentes.

(i) $f(x) = x^3 + 1$.

Vamos derivar a função e analisar quais os números x tais que $f'(x) > 0$ e quais os números x tais que $f'(x) < 0$.
Temos:

$f'(x) = 3x^2$.

Como $3x^2$ é maior que zero para todo $x \neq 0$, concluímos que a função é sempre crescente.
A Figura 5.15 ilustra este exemplo.

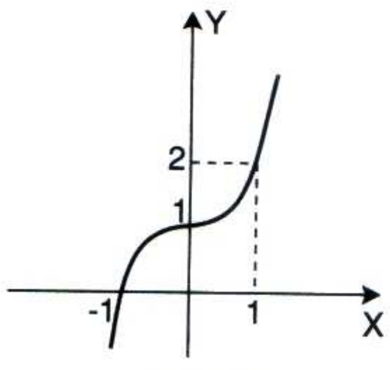


Figura 5.15

(ii) $f(x) = x^2 - x + 5$.

Temos $f'(x) = 2x - 1$. Então, para $2x - 1 > 0$ ou $x > 1/2$ a função é crescente.
Para $2x - 1 < 0$ ou $x < 1/2$ a função é decrescente (ver Figura 5.16).

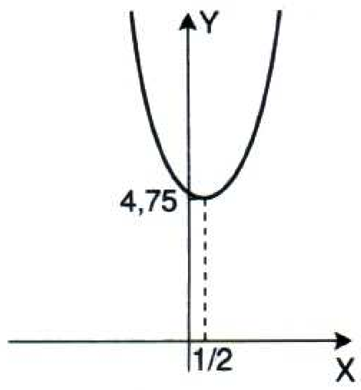


Figura 5.16

(iii) $f(x) = \begin{cases} 2x^2 - 4, & \text{se } x \leq 1 \\ -x - 1, & \text{se } x \geq 1. \end{cases}$

O gráfico de $f(x)$ pode ser visto na Figura 5.17.

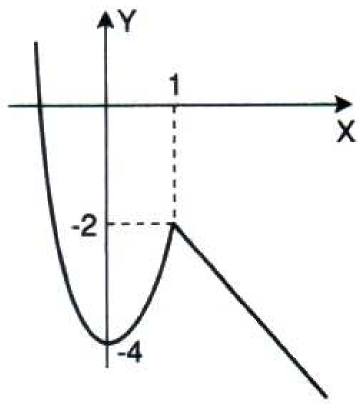


Figura 5.17

Se $x < 1$, então $f'(x) = 4x$. Temos:

$4x > 0$ para $x \in (0, 1)$;

$4x < 0$ para $x \in (-\infty, 0)$.

Se $x > 1$, temos $f'(x) = -1$. Então, $f'(x) < 0$ para todo $x \in (1, +\infty)$. Concluímos que f é crescente em $[0, 1]$ e decrescente em $(-\infty, 0] \cup [1, +\infty)$.

5.7 Critérios para Determinar os Extremos de uma Função

A seguir demonstraremos teoremas que estabelecem critérios para determinar os extremos de uma função.

5.7.1 **Teorema (Critério da derivada primeira para determinação de extremos)** Seja f uma função contínua num intervalo fechado $[a, b]$ que possui derivada em todo o ponto do intervalo (a, b), exceto possivelmente num ponto c.

(i) Se $f'(x) > 0$ para todo $x < c$ e $f'(x) < 0$ para todo $x > c$, então f tem um máximo relativo em c.

(ii) Se $f'(x) < 0$ para todo $x < c$ e $f'(x) > 0$ para todo $x > c$, então f tem um mínimo relativo em c.

Prova do item (i): Usando a proposição 5.6.3, podemos concluir que f é crescente em $[a, c]$ e decrescente em $[c, b]$. Portanto, $f(x) < f(c)$ para todo $x \neq c$ em (a, b) e assim f tem um máximo relativo em c.

Prova do item (ii): Pela proposição 5.6.3, concluímos que f é decrescente em $[a, c]$ e crescente em $[c, b]$. Logo $f(x) > f(c)$ para todo $x \neq c$ em (a, b). Portanto, f tem um mínimo relativo em c.

A Figura 5.18 ilustra as diversas possibilidades do teorema.

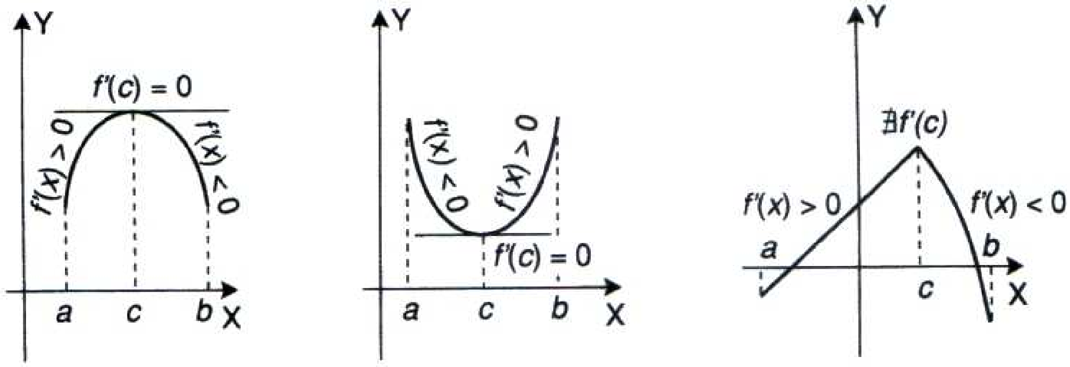


Figura 5.18

5.7.2 Exemplos

(i) Encontrar os intervalos de crescimento, decrescimento e os máximos e mínimos relativos da função

$f(x) = x^3 - 7x + 6.$

Temos $f'(x) = 3x^2 - 7$, para todo x. Fazendo $f'(x) = 0$, vem:

$3x^2 - 7 = 0$

ou, $x = \pm\sqrt{7/3}.$

Portanto, os pontos críticos da função f são $+\sqrt{7/3}$ e $-\sqrt{7/3}$.

Para $x < -\sqrt{7/3}$, $f'(x)$ é positiva. Aplicando a proposição 5.6.3, concluímos que f é crescente em $(-\infty, -\sqrt{7/3})$. Para $-\sqrt{7/3} < x < \sqrt{7/3}$, $f'(x)$ é negativa. Então f é decrescente em $[-\sqrt{7/3}, \sqrt{7/3}\,]$. Para $x > \sqrt{7/3}$, $f'(x)$ é positiva e, então, f é crescente em $[\sqrt{7/3}, +\infty)$.

Pelo critério da derivada primeira concluímos que f tem um máximo relativo em $-\sqrt{7/3}$ e f tem um mínimo relativo em $+\sqrt{7/3}$.

A Figura 5.19 mostra um esboço do gráfico de f.

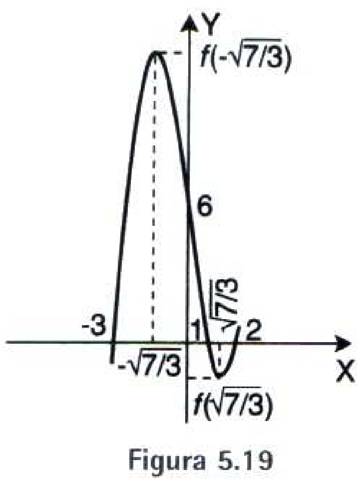


Figura 5.19

(ii) Seja

$$f(x) = \begin{cases} (x-2)^2 - 3, & \text{se } x \le 5 \\ 1/2(x+7), & \text{se } x > 5. \end{cases}$$

Se $x < 5$, temos $f'(x) = 2(x-2)$ e, se $x > 5$, temos $f'(x) = 1/2$.

Ainda $f'_+(5) = 1/2$ e $f'_-(5) = 6$. Logo, $f'(5)$ não existe e então 5 é um ponto crítico de f.

O ponto $x = 2$ também é ponto crítico, pois $f'(2) = 0$.

Se $x < 2$, $f'(x)$ é negativa. Então, pela proposição 5.6.3, f é decrescente em $(-\infty, 2]$.

Se $2 < x < 5$, $f'(x)$ é positiva. Então f é crescente em $[2, 5]$.

Se $x > 5$, $f'(x)$ é positiva. Então f é crescente em $[5, +\infty)$.

Pelo critério da derivada primeira, concluímos que f tem um mínimo relativo em $x = 2$.

Apresentamos o gráfico de f na Figura 5.20.

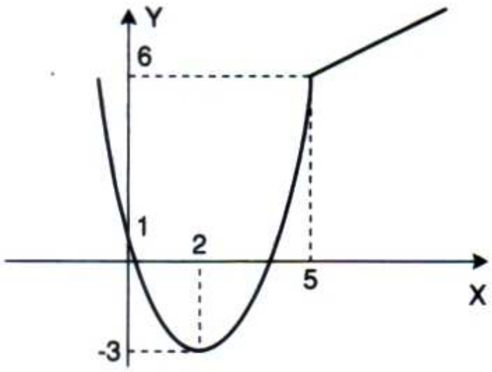


Figura 5.20

5.7.3 Teorema (Critério da derivada 2ª para determinação de extremos de uma função) Sejam f uma função derivável num intervalo (a, b) e c um ponto crítico de f neste intervalo, isto é, $f'(c) = 0$, com $a < c < b$. Se f admite a derivada f'' em (a, b), temos:

(i) Se $f''(c) < 0$, f tem um valor máximo relativo em c.

(ii) Se $f''(c) > 0$, f tem um valor mínimo relativo em c.

Prova: Para provar este teorema utilizaremos o seguinte resultado que não foi mencionado no Capítulo 3. "Se $\lim\limits_{x \to a} f(x)$ existe e é negativo, existe um intervalo aberto contendo a tal que $f(x) < 0$ para todo $x \neq a$ no intervalo."

Prova do item (i): Por hipótese $f''(c)$ existe e $f''(c) < 0$. Então,

$$f''(c) = \lim_{x \to c} \frac{f'(x) - f'(c)}{x - c} < 0.$$

Portanto, existe um intervalo aberto I, contendo c, tal que

$$\frac{f'(x) - f'(c)}{x - c} < 0, \text{ para todo } x \in I. \quad (1)$$

Seja A o intervalo aberto que contém todos os pontos $x \in I$ tais que $x < c$. Então, c é o extremo direito do intervalo aberto A.

Seja B o intervalo aberto que contém todos os pontos $x \in I$ tais que $x > c$. Assim, c é o extremo esquerdo do intervalo aberto B.

Se $x \in A$, temos $x - c < 0$. De (1), resulta que $f'(x) > f'(c)$.

Se $x \in B$, $x - c > 0$. De (1), resulta que $f'(x) < f'(c)$.

Como $f'(c) = 0$, concluímos que, se $x \in A$, $f'(x) > 0$ e, se $x \in B$, $f'(x) < 0$. Pelo critério da derivada primeira (Teorema 5.7.1), f tem um valor máximo relativo em c.

A prova de (ii) é análoga.

5.7.4 Exemplos

Encontre os máximos e os mínimos relativos de f aplicando o critério da derivada segunda.

(i) $f(x) = 18x + 3x^2 - 4x^3$.

Temos:

$$f'(x) = 18 + 6x - 12x^2$$

e $$f''(x) = 6 - 24x.$$

Fazendo $f'(x) = 0$, temos $18 + 6x - 12x^2 = 0$. Resolvendo esta equação obtemos os pontos críticos de f que são 3/2 e -1.

Como $f''(3/2) = -30 < 0$, f tem um valor máximo relativo em 3/2.

Como $f''(-1) = 30 > 0$, f tem um valor mínimo relativo em -1.

(ii) $f(x) = x(x-1)^2$.

Neste exemplo, temos:

$$\begin{aligned} f'(x) &= x \cdot 2(x-1) + (x-1)^2 \cdot 1 \\ &= 3x^2 - 4x + 1 \end{aligned}$$

e $$f''(x) = 6x - 4.$$

Fazendo $f'(x) = 3x^2 - 4x + 1 = 0$ e resolvendo a equação obtemos os pontos críticos de f, que neste caso são 1 e 1/3.

Como $f''(1) = 2 > 0$, f tem um valor mínimo relativo em 1. Como $f''(1/3) = -2 < 0$, f tem um valor máximo relativo em 1/3.

(iii) $f(x) = 6x - 3x^2 + \frac{1}{2}x^3$.

Temos:

$$f'(x) = 6 - 6x + \frac{3}{2}x^2.$$

e $$f''(x) = -6 + 3x.$$

Fazendo $f'(x) = 0$, temos $6 - 6x + \frac{3}{2}x^2 = 0$. Resolvendo a equação, obtemos $x = 2$, que neste caso é o único ponto crítico de f.

Como $f''(2) = 0$, nada podemos afirmar com auxílio do Teorema 5.7.3.

Usando o critério da derivada primeira ou a visualização do gráfico da função na Figura 5.21, podemos concluir que a função dada é sempre crescente. Portanto, não existem máximos nem mínimos relativos.

Com as informações da seção seguinte vamos poder constatar que (2, 4) é um ponto de inflexão.

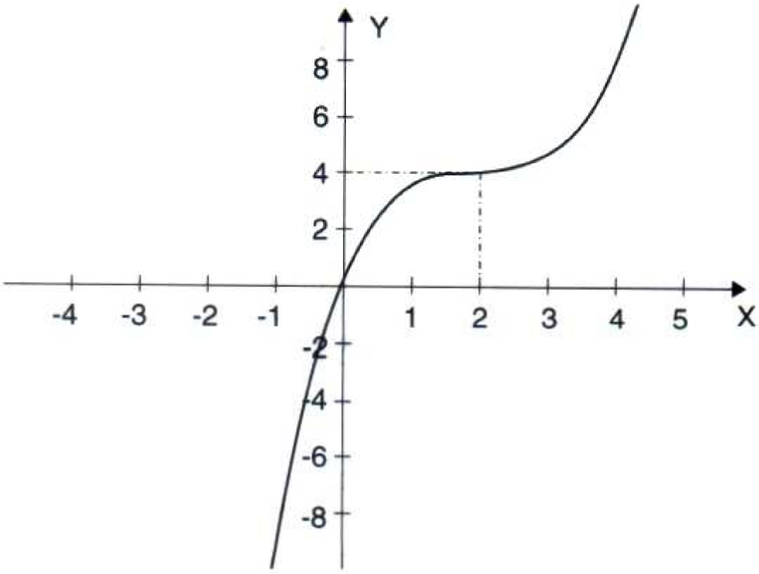


Figura 5.21

5.8 Concavidade e Pontos de Inflexão

O conceito de concavidade é muito útil no esboço do gráfico de uma curva.

Vamos introduzi-lo analisando geometricamente a Figura 5.22.

Na Figura 5.22 (*a*) observamos que dado um ponto qualquer c entre a e b, em pontos próximos de c o gráfico de f está acima da tangente à curva no ponto $P(c, f(c))$. Dizemos que a curva tem concavidade voltada para cima no intervalo (a, b).

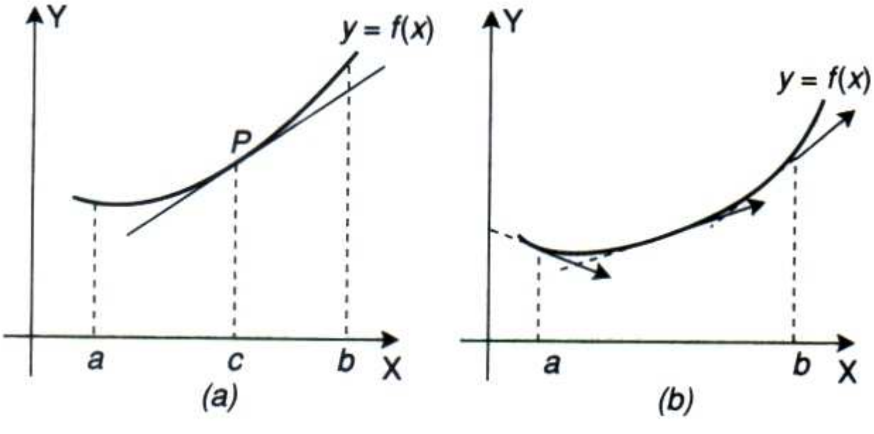


Figura 5.22

Como $f'(x)$ é a inclinação da reta tangente à curva, observa-se na Figura 5.22(*b*) que podemos descrever essa mesma situação afirmando que no intervalo (a, b) a derivada $f'(x)$ é crescente. Geometricamente, isto significa que a reta tangente gira no sentido anti-horário à medida que avançamos sobre a curva da esquerda para a direita.

Analogamente, a Figura 5.23 descreve uma função que tem concavidade voltada para baixo no intervalo (a, b).

Na Figura 5.23(*b*) vemos que a tangente gira no sentido horário quando nos deslocamos sobre a curva da esquerda para a direita. A derivada $f'(x)$ é decrescente em (a, b).

Temos as seguintes definições:

5.8.1 Definição Uma função f é dita côncava para cima no intervalo (a, b), se $f'(x)$ é crescente neste intervalo.

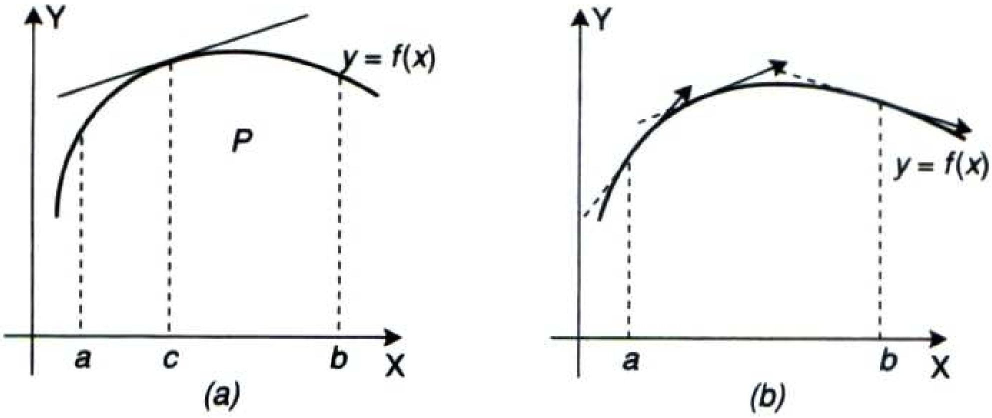


Figura 5.23

5.8.2 Definição Uma função f é côncava para baixo no intervalo (a, b), se $f'(x)$ for decrescente neste intervalo.

Reconhecer os intervalos onde uma curva tem concavidade voltada para cima ou para baixo, auxilia muito no traçado de seu gráfico. Faremos isso analisando o sinal da derivada $f''(x)$.

5.8.3 Proposição Seja f uma função contínua no intervalo $[a, b]$ e derivável até 2ª ordem no intervalo (a, b).

(i) Se $f''(x) > 0$ para todo $x \in (a, b)$, então f é côncava para cima em (a, b).

(ii) Se $f''(x) < 0$ para todo $x \in (a, b)$, então f é côncava para baixo em (a, b).

Prova de (i): $f''(x) = [f'(x)]'$, se $f''(x) > 0$ para todo $x \in (a, b)$, pela proposição 5.6.3, $f'(x)$ é crescente no intervalo (a, b). Logo, f é côncava para cima em (a, b).

Analogamente, se prova (ii).

Podem existir pontos no gráfico de uma função em que a concavidade muda de sentido. Esses pontos são chamados *pontos de inflexão*.

5.8.4 Definição Um ponto $P(c, f(c))$ do gráfico de uma função contínua f é chamado um ponto de inflexão, se existe um intervalo (a, b) contendo c, tal que uma das seguintes situações ocorra:

(i) f é côncava para cima em (a, c) e côncava para baixo em (c, b).

(ii) f é côncava para baixo em (a, c) e côncava para cima em (c, b).

Na Figura 5.24, os pontos de abscissa c_1, c_2, c_3 e c_4 são pontos de inflexão. Vale observar que c_2 e c_3 são pontos de extremos de f e que f não é derivável nesses pontos. Nos pontos c_1 e c_4, existem as derivadas $f'(c_1)$ e $f'(c_4)$. Nos correspondentes pontos $(c_1, f(c_1))$ e $(c_4, f(c_4))$ a reta tangente corta o gráfico de f.

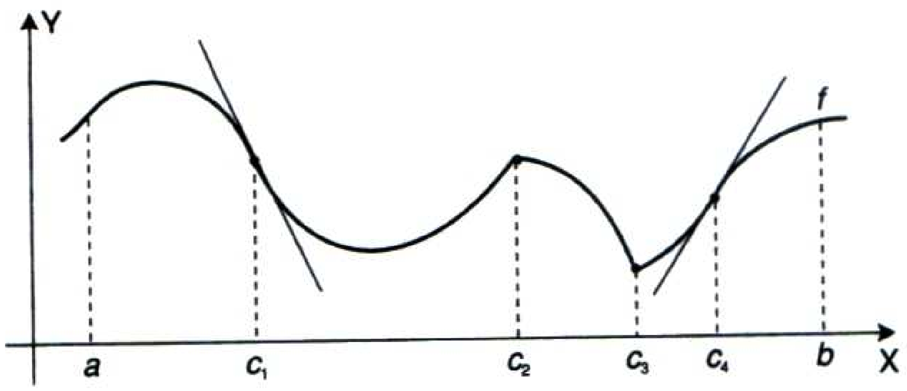


Figura 5.24

5.8.5 Exemplos Determinar os pontos de inflexão e reconhecer os intervalos onde as funções seguintes tem concavidade voltada para cima ou para baixo.

(i) $f(x) = (x - 1)^3$.

Temos:

$$f'(x) = 3(x - 1)^2$$

e $$f''(x) = 6(x - 1).$$

Fazendo $f''(x) > 0$, temos as seguintes desigualdades equivalentes:

$$6(x - 1) > 0$$

$$x - 1 > 0$$

$$x > 1.$$

Portanto, no intervalo $(1, +\infty)$, $f''(x) > 0$. Analogamente, no intervalo $(-\infty, 1)$, $f''(x) < 0$. Pela proposição 5.8.3 f é côncava para baixo no intervalo $(-\infty, 1)$ e no intervalo $(1, +\infty)$ f é côncava para cima.

No ponto $c = 1$ a concavidade muda de sentido. Logo, neste ponto, o gráfico de f tem um ponto de inflexão.

Podemos ver o gráfico de f na Figura 5.25.

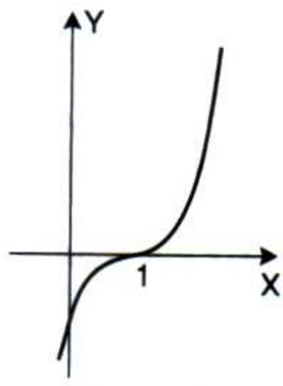


Figura 5.25

(ii) $f(x) = x^4 - x^2$.

Temos:

$$f'(x) = 4x^3 - 2x$$

e $$f''(x) = 12x^2 - 2.$$

Fazendo $f''(x) > 0$, vem:

$$12x^2 - 2 > 0$$

$$x^2 > 1/6.$$

Então, $x > \dfrac{\sqrt{6}}{6}$ ou $x < -\dfrac{\sqrt{6}}{6}$.

Portanto, f tem concavidade para cima nos intervalos

$$\left(-\infty, -\frac{\sqrt{6}}{6}\right), \left(\frac{\sqrt{6}}{6}, +\infty\right).$$

No intervalo $\left(-\frac{\sqrt{6}}{6}, \frac{\sqrt{6}}{6}\right)$, $f''(x) < 0$. Portanto, neste intervalo f é côncava para baixo.

Nos pontos $c_1 = \frac{-\sqrt{6}}{6}$ e $c_2 = \frac{+\sqrt{6}}{6}$ a concavidade muda de sentido. Logo, nestes pontos o gráfico de f tem pontos de inflexão.

A Figura 5.26 mostra o gráfico de f onde assinalamos os pontos de inflexão.

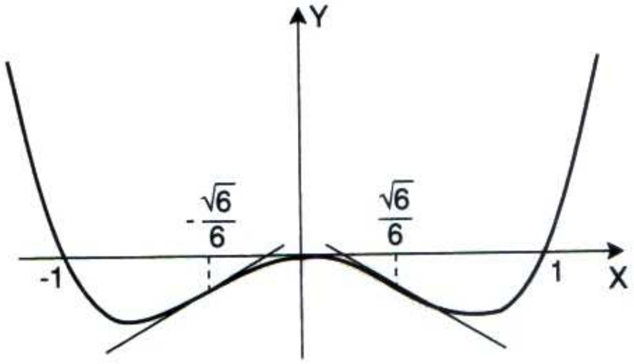


Figura 5.26

(iii) $f(x) = \begin{cases} x^2, & \text{para } x \leq 1 \\ 1 - (x-1)^2, & \text{para } x > 1. \end{cases}$

Para $x < 1$, $f'(x) = 2x$ e $f''(x) = 2$. Para $x > 1$, $f'(x) = -2(x-1)$ e $f''(x) = -2$. Logo, para $x \in (-\infty, 1)$, $f''(x) > 0$ e, portanto, f é côncava para cima neste intervalo. No intervalo $(1, +\infty)$, $f''(x) < 0$. Portanto, neste intervalo f é côncava para baixo.

No ponto $c = 1$, a concavidade muda de sentido e assim o gráfico de f apresenta um ponto de inflexão em $c = 1$.

O gráfico de f pode ser visto na Figura 5.27. Observamos que no ponto $c = 1$, f tem um máximo relativo.

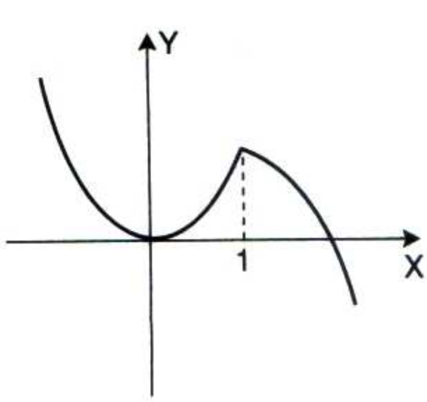


Figura 5.27

5.9 Análise Geral do Comportamento de uma Função

Utilizando os conceitos e resultados discutidos nas últimas seções, podemos formar um conjunto de informações que permite fazer a análise do comportamento das funções. O uso da representação algébrica em sintonia com a representação gráfica vai propiciar uma discussão interessante sobre várias propriedades e características das funções. Essa análise é importante no contexto da resolução de problemas práticos que será discutida na seção seguinte.

5.9.1 Construção de Gráficos

O quadro a seguir apresenta um resumo que poderá ser seguido para analisar o comportamento de uma função a partir de sua representação algébrica. Neste caso sua análise pode culminar com um esboço gráfico destacando as propriedades e características da função.

Etapas	**Procedimento**	**Definições e Teoremas Utilizados**
1ª	Encontrar $D(f)$.	
2ª	Calcular os pontos de intersecção com os eixos. (Quando não requer muito cálculo.)	
3ª	Encontrar os pontos críticos.	Seção 5.4.
4ª	Determinar os intervalos de crescimento e decrescimento de $f(x)$.	Proposição 5.6.3.
5ª	Encontrar os máximos e mínimos relativos.	Teoremas 5.7.1 ou 5.7.3.
6ª	Determinar a concavidade e os pontos de inflexão de f.	Proposição 5.8.3.
7ª	Encontrar as assíntotas horizontais e verticais, se existirem.	Definições 3.14.1 e 3.14.3.
8ª	Esboçar o gráfico.	

5.9.2 Exemplos Esboçar o gráfico das funções:

(i) $f(x) = 3x^4 - 8x^3 + 6x^2 + 2$.

Seguindo as etapas propostas, temos:

1ª etapa. $D(f) = \mathbb{R}$.

2ª etapa. Intersecção com o eixo dos y.

$f(0) = 2$.

3ª etapa. $f'(x) = 12x^3 + 24x^2 + 12x$.

Resolvendo $12x^3 + 24x^2 + 12x = 0$, encontramos $x_1 = 0$ e $x_2 = 1$, que são os pontos críticos.

4ª etapa. Fazendo $f'(x) > 0$, obtemos que $12x^3 - 24x^2 + 12x > 0$ quando $x > 0$. Portanto, f é crescente para $x \geq 0$.

Fazendo $f'(x) < 0$, obtemos que $12x^3 - 24x^2 + 12x < 0$ quando $x < 0$. Portanto, f é decrescente para $x \leq 0$.

5ª etapa. Temos $f''(x) = 36x^2 - 48x + 12$.

Como $f''(0) = 12 > 0$, temos que o ponto 0 é um ponto mínimo e $f(0) = 2$ é um mínimo relativo de f.

Como $f''(1) = 0$, nada podemos afirmar.

6ª etapa. Fazendo $f''(1) > 0$, temos que $36x^2 - 48x + 12 > 0$ quando $x \in [(-\infty, 1/3) \cup (1, +\infty)]$.

Então, f é côncava para cima em $(-\infty, 1/3) \cup (1, +\infty)$.

Fazendo $f''(x) < 0$, temos que $36x^2 - 48x + 12 < 0$ para $x \in (1/3, 1)$. Então f é côncava para baixo em (1/3, 1).

Os pontos de abscissa 1/3 e 1 são pontos de inflexão.

7ª etapa. Não existem assíntotas.

8ª etapa. Temos na Figura 5.28 o esboço do gráfico.

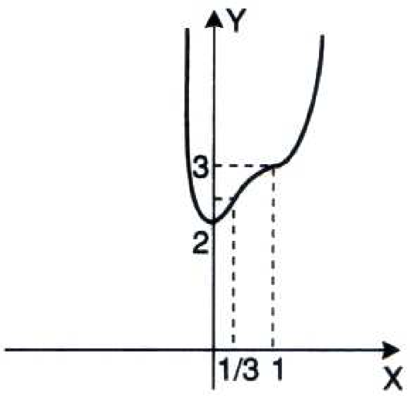


Figura 5.28

(ii) $f(x) = \dfrac{x^2}{x-3}$.

O domínio de f é $D(f) = \mathbb{R} - \{3\}$.

Temos,

$$f'(x) = \frac{x(x-6)}{(x-3)^2}$$

e

$$f''(x) = \frac{18x - 54}{(x-3)^4}.$$

Fazendo $f'(x) = 0$, temos:

$$\frac{x(x-6)}{(x-3)^2} = 0$$

e, então, $x = 0$ e $x = 6$ são pontos críticos.

Vemos que $f'(x) > 0$ quando $x \in [(-\infty, 0) \cup (6, +\infty)]$. Assim, f é crescente em $(-\infty, 0) \cup (6, +\infty)$. Fazendo $f'(x) < 0$, vemos que f é decrescente em $[0, 6]$.

Como $f''(0) < 0$, temos que 0 é ponto de máximo relativo e, como $f''(6) > 0$, temos que 6 é ponto de mínimo relativo.

Ainda $f(0) = 0$ é o máximo relativo de f e $f(6) = 12$ é o mínimo relativo de f.

Fazendo

$$f''(x) = \frac{18x - 54}{(x-3)^4} > 0,$$

obtemos que f é côncava para cima em $(3, +\infty)$ e fazendo

$$f''(x) = \frac{18x - 54}{(x-3)^4} < 0,$$

obtemos que f é côncava para baixo em $(-\infty, 3)$.

Determinando os limites

$$\lim_{x\to 3^+} \frac{x^2}{x-3} = \frac{9}{0^+} = +\infty$$

e

$$\lim_{x\to 3^-} \frac{x^2}{x-3} = \frac{9}{0^-} = -\infty$$

encontramos que $x = 3$ é assíntota vertical. Não existe assíntota horizontal.

A Figura 5.29 mostra o esboço do gráfico de $f(x) = \dfrac{x^2}{x-3}$.

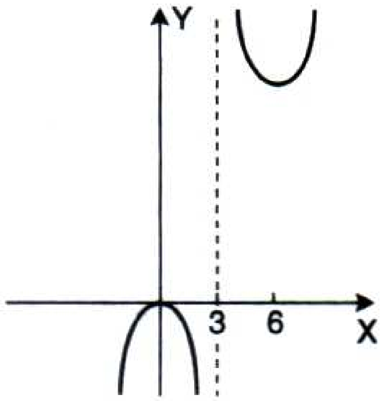


Figura 5.29

(iii) $f(x) = (x+1)^{1/3}$.

O domínio de $f(x)$ é $D(f) = \mathbb{R}$.

$f(x)$ corta o eixo dos y no ponto $y = 1$, já que $f(0) = 1$. Corta o eixo dos x em -1, já que resolvendo $(x+1)^{1/3} = 0$, obtemos $x = -1$.

Fazendo

$$f'(x) = \frac{1}{3}(x+1)^{-2/3} = 0,$$

concluímos que não existe x que satisfaça $f'(x) = 0$. Como $f'(-1)$ não existe, o único ponto crítico de f é $x = -1$.

Como $f'(x)$ é sempre positiva, concluímos que a função é sempre crescente. Não existem máximos nem mínimos.

Como

$$f''(x) = \frac{-2}{9}(x+1)^{-5/3},$$

concluímos que, para $x < -1$, $f''(x) > 0$ e, portanto, f é côncava para cima em $(-\infty, -1)$. Quando $x > -1$, $f''(x) < 0$ e então f é côncava para baixo em $(-1, +\infty)$.

O ponto de abscissa $x = -1$ é um ponto de inflexão.

Não existem assíntotas.

A Figura 5.30 mostra o gráfico de $f(x)$.

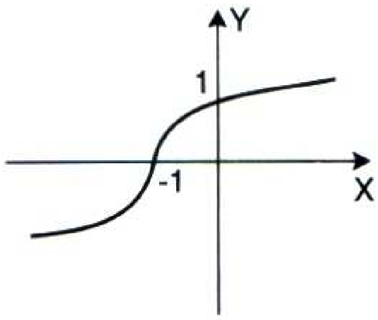


Figura 5.30

5.9.3 Análise de Gráficos

Para o desenvolvimento desta seção estamos supondo o uso de uma ferramenta gráfica para a construção inicial do gráfico da função. A partir do gráfico sugerimos as etapas apresentadas no quadro a seguir para a análise do comportamento da função, destacando suas propriedades e características.

Etapas	Procedimento	Observação Visual
1ª	Construção do gráfico usando um software.	Verificar se a janela e a escala utilizadas estão adequadas para uma boa visualização.
2ª	Encontrar *D(f)*.	Observar a variação no eixo dos *x*.
3ª	Encontrar o conjunto imagem.	Observar a variação no eixo dos *y*.
4ª	Analisar as raízes reais da função.	Verificar pontos em que a curva corta o eixo dos *x*.
5ª	Analisar os pontos críticos, identificamos os extremos da função.	Observar o formato do gráfico, identificando pontos angulosos ou pontos em que a reta tangente seja paralela ao eixo dos *x*.
6ª	Analisar os intervalos de crescimento ou decrescimento.	Observar o gráfico, verificando o crescimento e o decrescimento no eixo dos *y* à medida que os valores de *x* crescem.
7ª	Discutir a concavidade da função e a existência de pontos de inflexão.	Observar o formato do gráfico: "concavidade para baixo" ou "concavidade para cima".
8ª	Analisar a existência de assíntotas.	Visualizar as tendências da curva.

5.9.4 Exemplos

Discutir as propriedades e características das funções:

(i) $f(x) = \dfrac{1}{4}x^4 - 2x^3 - \dfrac{1}{2}x^2 + 30x + 10$

Vamos seguir as etapas propostas:

1ª Etapa. Na Figura 5.31 temos o gráfico da função.

2ª Etapa. Para encontrar o domínio vamos observar o gráfico e constatar que estamos diante de uma função cujo domínio é formado por todos os números reais, conferindo com o fato de estarmos diante de uma função polinomial.

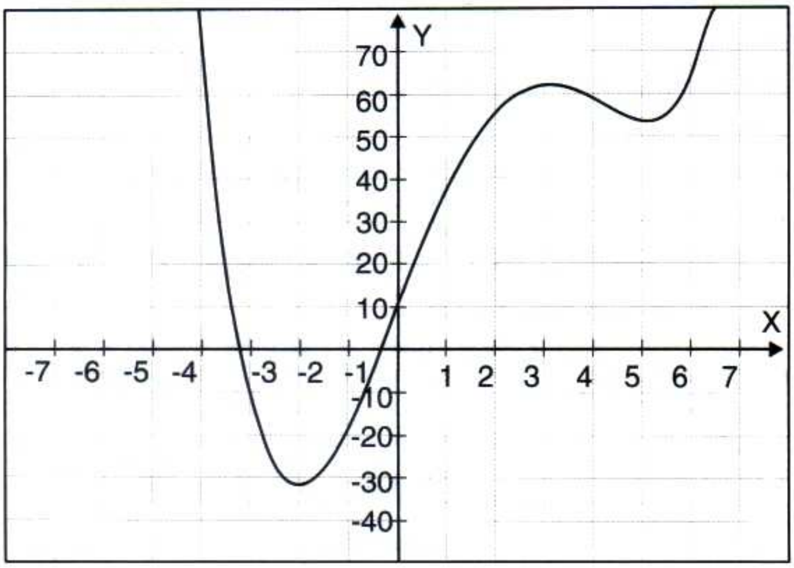


Figura 5.31

3ª Etapa. É possível observar que o conjunto imagem está no intervalo $[f(-2), +\infty)$. Podemos fazer o cálculo da imagem de -2 e confirmar o resultado $[-32, +\infty)$.

4ª Etapa. Ao observar os pontos em que a curva corta o eixo dos x, podemos afirmar que esta função tem duas raízes reais. De forma aproximada podemos estimar os valores $x \cong -0{,}3$ e $x \cong -3{,}1$.

5ª Etapa. É possível verificar a existência de dois pontos de mínimos relativos e um ponto de máximo relativo. Temos:

- ponto de mínimo em $x = -2$;
- ponto de máximo em $x = 3$;
- ponto de mínimo em $x = 5$.

6ª Etapa. O crescimento desta função está bem identificado a partir da visualização gráfica. Temos:

- decrescimento em $(-\infty, -2)$;
- crescimento em $(-2, 3)$;
- decrescimento em $(3, 5)$;
- crescimento em $(5, +\infty)$.

7ª Etapa. Podemos observar que a função tem concavidade distinta em diferentes intervalos, apresentando dois pontos de inflexão. As abscissas desses pontos estão próximas do zero e do quatro, delimitando os intervalos da concavidade inicialmente para cima, posteriormente para baixo e finalmente para cima.

8ª Etapa. Esta função não tem assíntotas.

(ii) $f(t) = t + \cos t$

Seguindo as etapas propostas, temos:

1ª Etapa. Na Figura 5.32 mostramos o gráfico da função.

2ª Etapa. O domínio da função é o conjunto dos números reais.

3ª Etapa. O conjunto imagem da função é o conjunto dos números reais.

4ª Etapa. A função tem uma única raiz real próxima de $x = -\dfrac{\pi}{4}$.

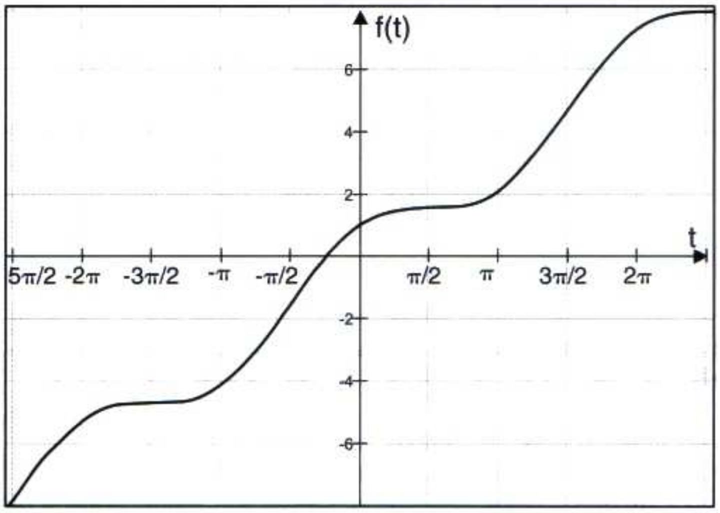


Figura 5.32

5ª Etapa. A função não admite pontos de máximos e de mínimos.

6ª Etapa. A função é sempre crescente.

7ª Etapa. A função tem de forma alternada intervalos de comprimento π em que a sua concavidade é voltada para cima e depois para baixo. Os pontos de inflexão estão localizados em pontos tais que $x = \dfrac{(2n+1)\pi}{2}$, com n pertencente ao conjunto dos números inteiros.

8ª. Etapa. O gráfico não tem assíntotas.

(iii) $f(x) = \dfrac{4 + x^2}{4 - x^2}$.

1ª. Etapa. A Figura 5.33 mostra o gráfico da função dada.

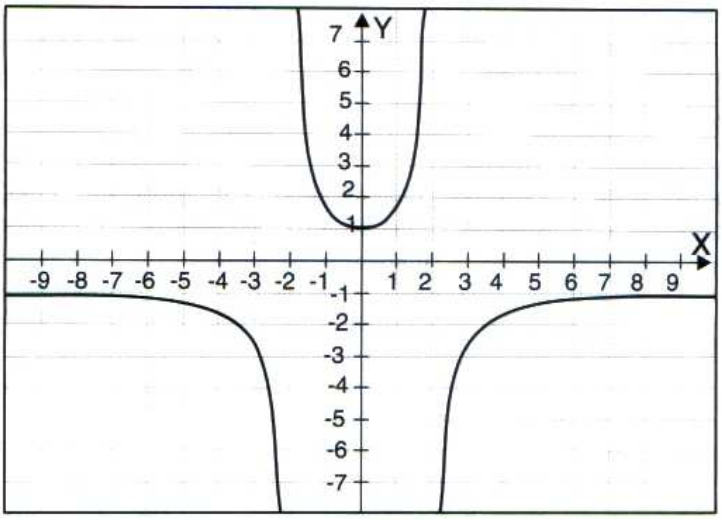


Figura 5.33

2ª Etapa. A função está definida no conjunto dos números reais, exceto nos pontos $x = 2$ e $x = -2$.

3ª Etapa. O conjunto imagem da função pode ser representado por $(-\infty, -1) \cup [1, +\infty)$.

4ª Etapa. Esta função não tem raízes reais.

5ª Etapa. A função apresenta em seu domínio um ponto de mínimo relativo em $x = 0$.

6ª Etapa. Temos os seguintes intervalos de crescimento e decrescimento:

- decrescimento em $(-\infty, -2)$ e $(-2, 0)$;
- crescimento em $(0, 2)$ e $(2, +\infty)$.

7ª Etapa. A função é côncava para cima no intervalo $(-2, 2)$ e côncava para baixo nos intervalos $(-\infty, -2)$ e $(2, +\infty)$. Apesar de existir a mudança da concavidade, a função não tem pontos de inflexão, pois a mudança de concavidade ocorre em pontos que não pertencem ao domínio da função.

8ª Etapa. Observamos a existência das seguintes assíntotas:

- vertical em $x = -2$ e $x = 2$;
- horizontal em $y = -1$.

Salientamos a partir dos exemplos discutidos que, para fazermos uma análise detalhada do comportamento de uma função, é importante contar com as representações algébrica e gráfica da função.

5.10 Exercícios

1. Em cada um dos seguintes casos, verificar se o Teorema do Valor Médio se aplica. Em caso afirmativo, achar um número c em (a, b), tal que

$$f'(c) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}.$$

Interpretar geometricamente.

(*a*) $f(x) = \dfrac{1}{x}$; $a = 2, b = 3$.

(*b*) $f(x) = \dfrac{1}{x}$; $a = -1, b = 3$.

(*c*) $f(x) = x^3$; $a = 0, b = 4$.

(*d*) $f(x) = x^3$; $a = -2, b = 0$.

(*e*) $f(x) = \cos x$; $a = 0, b = \pi/2$.

(*f*) $f(x) = \operatorname{tg} x$; $a = \pi/4, b = 3\pi/4$.

(*g*) $f(x) = \operatorname{tg} x$; $a = 0, b = \pi/4$.

(*h*) $f(x) = \sqrt{1 - x^2}$; $a = -1, b = 0$.

(*i*) $f(x) = \sqrt[3]{x}$; $a = -1, b = 1$.

(*j*) $f(x) = |x|$; $a = -1, b = 1$.

2. A função $f(x) = x^{2/3} - 1$ é tal que $f(-1) = f(1) = 0$. Por que ela não verifica o Teorema de Rolle no intervalo $[-1, 1]$?

3. Seja $f(x) = -x^4 + 8x^2 + 9$. Mostrar que f satisfaz as condições do Teorema de Rolle no intervalo $[-3, 3]$ e determinar os valores de $c \in (-3, 3)$ que satisfaçam $f'(c) = 0$.

4. Usando o teorema do valor médio provar que:

(a) $|\operatorname{sen} \theta - \operatorname{sen} \alpha| \leq |\theta - \alpha|, \ \forall\, \theta, \alpha \in \mathbb{R}$;

(*b*) $\operatorname{sen} \theta \leq \theta, \ \theta \geq 0$.

5. Determinar os pontos críticos das seguintes funções, se existirem.

(*a*) $y = 3x + 4$.

(*b*) $y = x^2 - 3x + 8$.

(c) $y = 2 + 2x - x^2$.
(d) $y = (x - 2)(x + 4)$.
(e) $y = 3 - x^3$.
(f) $y = x^3 + 2x^2 + 5x + 3$.
(g) $y = x^4 + 4x^3$.
(h) $y = \operatorname{sen} x$.
(i) $y = \cos x$.
(j) $y = \operatorname{sen} x - \cos x$.
(k) $y = e^x - x$.
(l) $y = (x^2 - 9)^{2/3}$.
(m) $y = \dfrac{x}{x^2 - 4}$.
(n) $y = |2x - 3|$.
(o) $f(x) = \begin{cases} x, & x < 0 \\ x^2, & x \geq 0 \end{cases}$.

6. Determinar, algebricamente, os intervalos nos quais as funções seguintes são crescentes ou decrescentes. Fazer um esboço do gráfico, comparando os resultados.

(a) $f(x) = 2x - 1$.
(b) $f(x) = 3 - 5x$.
(c) $f(x) = 3x^2 + 6x + 7$.
(d) $f(x) = x^3 + 2x^2 - 4x + 2$.
(e) $f(x) = (x - 1)(x - 2)(x + 3)$.
(f) $f(x) = \dfrac{x}{2} + \operatorname{sen} x$.
(g) $f(x) = 2^x$.
(h) $f(x) = e^{-x}$.
(i) $f(x) = xe^{-x}$.
(j) $f(x) = \dfrac{x^2}{x - 1}$.
(k) $f(x) = x + \dfrac{1}{x}$.
(l) $f(x) = e^x \operatorname{sen} x,\ x \in [0, 2\pi]$.

7. Determinar os máximos e mínimos das seguintes funções, nos intervalos indicados.

(a) $f(x) = 1 - 3x, [-2, 2]$.
(b) $f(x) = x^2 - 4, [-1, 3]$.
(c) $f(x) = 4 - 3x + 3x^2, [0, 3]$.
(d) $f(x) = x^3 - x^2, [0, 5]$.
(e) $f(x) = \dfrac{x}{1 + x^2}, [-2, 2]$.
(f) $f(x) = |x - 2|, [1, 4]$.
(g) $f(x) = \cosh x,\ [-2, 2]$.
(h) $f(x) = \operatorname{tgh} x, [-2, 2]$.
(i) $f(x) = \cos 3x, [0, 2\pi]$.
(j) $f(x) = \cos^2 x, [0, 2\pi]$.
(k) $f(x) = \operatorname{sen}^3 x - 1, [0, \pi/2]$.

8. Encontrar os intervalos de crescimento, decrescimento, os máximos e os mínimos relativos das seguintes funções.

(a) $f(x) = 2x + 5$.
(b) $f(x) = 3x^2 + 6x + 1$.
(c) $g(x) = 4x^3 - 8x^2$.
(d) $h(x) = \dfrac{1}{3}x^3 + \dfrac{1}{2}x^2 - 6x + 5$.
(e) $f(t) = \dfrac{t - 1}{t + 1}$.
(f) $f(t) = t + \dfrac{1}{t}$.

(g) $g(x) = x\,e^x$.

(h) $h(x) = \dfrac{1}{\sqrt{x}}$.

(i) $f(x) = |2 - 6x|$.

(j) $g(x) = \begin{cases} x + 4, & x \leq -2 \\ x^2 - 2, & x > -2 \end{cases}$.

(k) $h(t) = \begin{cases} 3 - 4t, & t > 0 \\ 4t + 3, & t \leq 0 \end{cases}$.

(l) $f(x) = \begin{cases} 1 + x, & x < -1 \\ 1 - x^2, & x \geq -1 \end{cases}$.

(m) $g(x) = \begin{cases} 10 - (x-3)^2, & x \leq -2 \\ 5(x-1), & -2 < x \leq -1. \\ -\sqrt{91 + (x-2)^2}, & x > -1 \end{cases}$

9. Encontrar os pontos de máximo e mínimo relativos das seguintes funções, se existirem. Fazer um esboço do gráfico e comparar os resultados.

(a) $f(x) = 7x^2 - 6x + 3$.

(b) $g(x) = 4x - x^2$.

(c) $h(x) = \frac{1}{3}x^3 + 3x^2 - 7x + 9$.

(d) $h(x) = \frac{1}{4}x^4 - \frac{5}{3}x^3 + 4x^2 - 4x + 8$.

(e) $f(t) = \begin{cases} t^2, & t < 0 \\ 3t^2, & t \geq 0. \end{cases}$

(f) $f(x) = 6x^{2/3} - 2x$.

(g) $f(x) = 5 + (x-2)^{7/5}$.

(h) $f(x) = 3 + (2x+3)^{4/3}$.

(i) $g(x) = \dfrac{4x}{x^2 + 4}$.

(j) $h(x) = \dfrac{x + 1}{x^2 - 2x + 2}$.

(k) $f(x) = (x+2)^2(x-1)^3$.

(l) $f(x) = x^2\sqrt{16 - x}$.

10. Mostrar que $y = \dfrac{\log_a x}{x}$ tem seu valor máximo em $x = e$ (número neperiano) para todos os números $a > 1$.

11. Determinar os coeficientes a e b de forma que a função $f(x) = x^3 + ax^2 + b$ tenha um extremo relativo no ponto $(-2, 1)$.

12. Encontrar a, b, c e d tal que a função $f(x) = 2ax^3 + bx^2 - cx + d$ tenha pontos críticos em $x = 0$ e $x = 1$. Se $a > 0$, qual deles é ponto de máximo, qual é ponto de mínimo?

13. Demonstrar que a função $y = ax^2 + bx + c$, $x \in \mathbb{R}$, tem máximo se, e somente se, $a < 0$; e mínimo se, e somente se, $a > 0$.

14. Determinar os pontos de inflexão e reconhecer os intervalos onde as funções seguintes tem concavidade voltada para cima ou para baixo.

(a) $f(x) = -x^3 + 5x^2 - 6x$.

(b) $f(x) = 3x^4 - 10x^3 - 12x^2 + 10x + 9$.

(c) $f(x) = \dfrac{1}{x + 4}$.

(d) $f(x) = 2x\,e^{-3x}$.

(e) $f(x) = x^2 e^x$.

(f) $f(x) = 4\sqrt{x + 1} - \frac{\sqrt{2}}{2}x^2 - 1$.

(g) $f(t) = \dfrac{t^2 + 9}{(t-3)^2}$.

(h) $f(t) = e^{-t}\cos t,\ \ t \in [0, 2\pi]$.

(*i*) $f(x) = \begin{cases} 2x - x^2, & x < 1 \\ x, & x \geq 1 \end{cases}$

(*j*) $f(x) = \begin{cases} x^2 - 4, & x \leq 2 \\ 4 - x^2, & x > 2 \end{cases}$

15. Seguindo as etapas apresentadas em 5.9.1, fazer um esboço do gráfico das seguintes funções:

(*a*) $y = x^2 + 4x + 2$

(*b*) $y = \dfrac{-x^3}{3} + \dfrac{3x^2}{2} - 2x + \dfrac{5}{6}$

(*c*) $y = \dfrac{-1}{4}x^4 + \dfrac{5}{3}x^3 - 2x^2$

(*d*) $y = x + \dfrac{2}{x}$

(*e*) $y = \dfrac{3x + 1}{(x + 2)(x - 3)}$

(*f*) $y = \dfrac{4}{\sqrt{x + 2}}$

(*g*) $y = x^{3/2}$

(*h*) $y = \ln(2x + 3)$

16. Usando uma ferramenta gráfica, construir o gráfico das funções seguintes, analisando suas propriedades e características como apresentado em 5.9.3.

(*a*) $y = (x - 3)(x + 2)$

(*b*) $y = x^3 - \dfrac{9}{2}x^2 - 12x + 3$

(*c*) $y = x^4 - 32x + 48$

(*d*) $y = \dfrac{2x}{x + 2}$

(*e*) $y = \dfrac{2}{x^2 - 2x - 3}$

(*f*) $y = \cosh x$

(*g*) $y = e^{x - x^2}$

(*h*) $f(x) = x^2 \operatorname{sen} x$

(*i*) $f(x) = x\sqrt{4 - x^2}$

(*j*) $f(x) = x^2 \ln x$

(*k*) $f(x) = \ln(x^2 + 1)$

(*l*) $f(x) = \dfrac{1}{\sqrt{2x - 1}}$

5.11 Problemas de Maximização e Minimização

A seguir apresentamos alguns problemas práticos em diversas áreas, onde aplicamos o que foi visto nas Seções 5.4 e 5.7 sobre máximos e mínimos.

O primeiro passo para solucionar estes problemas é escrever precisamente qual a função que deverá ser analisada. Esta função poderá ser escrita em função de uma ou mais variáveis. Quando a função é de mais de uma variável, devemos procurar expressar uma das variáveis em função da outra.

Com a função bem definida, devemos identificar um intervalo apropriado e então proceder a rotina matemática aplicando definições e teoremas.

5.11.1 Exemplos

(1) Na Biologia, encontramos a fórmula $\phi = V \cdot A$, onde ϕ é o fluxo de ar na traquéia, V é a velocidade do ar e A a área do círculo formado ao seccionarmos a traquéia (ver Figura 5.34).

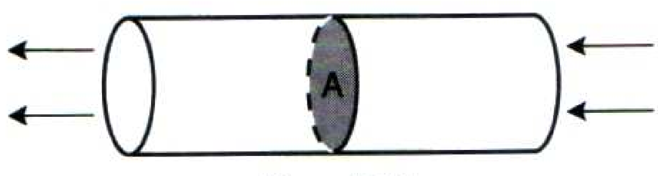


Figura 5.34