SEÇÃO 4 – Diagonalização de operadores

Objetivo: seja $T : V \to V$, encontrar uma base β de V, na qual a matriz A associada ao operador seja a mais simples possível.

Para chegar a tal matriz, necessitamos de alguns resultados importantes que envolvem autovetores e autovalores.

Teorema 4.1: seja $T : V \to V$ um operador linear. Os autovetores de T associados a autovalores distintos são linearmente independentes.

(DEMONSTRAÇÃO NO MATERIAL COMPLETO)

Uma consequência direta desse teorema é o fato de que, se tivermos um operador $T : V \to V$, onde V tem dimensão n, então qualquer conjunto com n autovetores distintos é uma base de V.

4.9. Seja $T : R^2 \to R^2$ em que $T(x, y) = (2x + 2y, y)$.

Em 4.7, secção 3, Calculamos

$v_1 = (-2,1)$ AUTOVET. ASSOC. AO AUTOVAL. $\lambda_1 = 1$

$v_2 = (1,0)$ " " " " $\lambda_2 = 2$.

→ Pela consequencia do Teorema 4.1,

$\beta = \{v_1, v_2\} = \{(-2,1), (1,0)\}$ é uma base do $\mathbb{R}^2$.

Assim, suponha que não conhecemos T e vamos encontrá-la, calcular $T(x,y)$.

→ Fazer (x,y) C.L. com a β.

$(x,y) = a(-2,1) + b(1,0)$ isolar a e b em função de x,y

$-2a + b = x \qquad +a = y$

$-2y + b = x$

$b = x + 2y$

$\therefore (x,y) = y(-2,1) + (x+2y)(1,0)$

$T(x,y) = y\,T(-2,1) + (x+2y)\,T(1,0)$

$T(x,y) = \underbrace{y \cdot 1 \cdot (-2,1)}_{\lambda_1 \cdot v_1} + \underbrace{(x+2y)(2)(1,0)}_{\lambda_2 \cdot v_2}$

$T(x,y) = (-2y + 2x + 4y,\ y + 0)$

$\boxed{T(x,y) = (2x+2y,\ y)}$ Como queríamos.

Lembre-se de que, dada uma base de V, podemos escrever a matriz de T associada à base de V . Como os autovetores $v_1 = (-2, 1)$ e $v_2 = (1, 0)$ formam uma base de R^2, então a matriz de T associada a essa base é dada por:

$$T(-2, 1) = 1\cdot(-2, 1) + 0\cdot(1, 0)$$

$$T(1, 0) = 0\cdot(-2, 1) + 1\cdot(1, 0)$$

Assim,

$$T_\beta = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}$$

Ou seja, a matriz associada à base dos autovetores é uma matriz diagonal cujos elementos da diagonal principal são os autovalores de T.

Vejamos o caso mais geral. Sejam $T : V \to V$ tal que $\dim V = n$ e suponha que T tenha autovalores $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$ todos distintos, associados aos autovetores $v_1, v_2, \ldots, v_n$. Pelo teorema 4.1 e sua consequência, segue que o conjunto $\beta = \{v_1, v_2, \ldots, v_n\}$ é uma base para V. Portanto, tem-se:

$$
\begin{aligned}
T(v_1) &= \lambda_1 v_1 + 0v_1 + \ + 0v_n \\
T(v_2) &= 0v_1 + \lambda_1 v_1 + \ + 0v_n \\
&\vdots \\
T(v_n) &= 0v_1 + 0v_1 + \ + \lambda_n v_n
\end{aligned}
$$

Assim o operador T é representado na base β dos autovetores pela matriz diagonal:

$$
T_\beta = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \lambda_n \end{bmatrix}
$$

cujos elementos da diagonal principal são os autovalores associados a T.

Podemos, então, enunciar o seguinte teorema:

Teorema 4.2: um operador linear T admite uma base β em relação a qual sua matriz T_β é diagonal se, e somente se, essa base for formada por autovetores de T.

A demonstração foi feita anteriormente.

Quando um operador $T : V \to V$ admite uma base cujos elementos são seus autovetores, então dizemos que este operador é diagonalizável.

4.10. O exemplo 4.8 , $T(x, y) = (2x + 2y, y)$, é um operador linear diagonalizável, pois ele admite uma base cujos elementos são seus autovetores.

RELEMBRANDO:

seja $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$, tal que $T(x, y, z) = (x, 2x - 2y, -3x + y + 2z)$.

VIMOS QUE:

Autovalor	Autovetor
$\lambda_1 = -2$	$v_1 = (0, -4, 1)$
$\lambda_2 = 1$	$v_2 = \left(1, \frac{2}{3}, \frac{7}{3}\right)$
$\lambda_3 = 2$	$v_3 = (0, 0, 1)$

$$\therefore\ T_B = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

$\therefore \{(-2,0,0),(0,1,0),(0,0,2)\} = B$ é base (uma) do $\mathbb{R}^3$.

4.11. Seja o operador $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, em que $T(x, y) = (2x + y, 3x + 4y)$. Verifique se T é diagonalizável e determine uma base para T cuja matriz seja diagonal.

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$$

$$\det(A - \lambda I) = \begin{vmatrix} 2-\lambda & 1 \\ 3 & 4-\lambda \end{vmatrix} = (2-\lambda)(4-\lambda) - 3 = 0$$

$$8 - 2\lambda - 4\lambda + \lambda^2 - 3 = 0$$

$$\lambda^2 - 6\lambda + 5 = 0$$

$$(\lambda - 3)^2 = -5 + 9$$

$$(\lambda - 3)^2 = 4$$

$$\lambda - 3 = \pm 2$$

$$\lambda = 3 \pm 2$$

$$\boxed{\lambda_1 = 1 \qquad \lambda_2 = 5}$$

P/ $\lambda_1 = 1$ $\quad (A - \lambda_1 I)V_1 = 0$

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 3 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\left(\begin{array}{cc|c} 1 & 1 & 0 \\ 3 & 3 & 0 \end{array}\right) \longrightarrow \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

$x + y = 0$

$x = -y$ ou $y = -x$

$$V_1 = (x, y) = (x, -x) = x(1, -1)$$

$$\lambda_1 = 1 \text{ e } V_1 = (1, -1)$$

P/ $\lambda_2 = 5$ $\quad (A - \lambda_2 I)V_2 = 0$

$$\begin{pmatrix} -3 & 1 \\ 3 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\left(\begin{array}{cc|c} -3 & 1 & 0 \\ 3 & -1 & 0 \end{array}\right) \longrightarrow \left(\begin{array}{cc|c} -3 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

$-3x + y = 0$

$y = 3x$

$V_2 = (x, 3x) = x(1,3)$

$\lambda_2 = 5$ e $V_2 = (1,3)$

$\therefore$ $\beta = \{(1,-1),(1,3)\}$ é uma base do $\mathbb{R}^2$

e a base dos autovetores é

$$T_\beta = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 5 \end{pmatrix}.$$

4.12. Verifique se o operador $T(x, y, z) = (3x, 3y, y - z)$ é diagonalizável.

exemplo

O operador: $T(x,y,z) = (3x, 2x+3y, y-z)$ é diagonalizável?

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 2 & 3 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}$$

$$\det(A - \lambda I) = \begin{vmatrix} 3-\lambda & 0 & 0 \\ 2 & 3-\lambda & 0 \\ 0 & 1 & -1-\lambda \end{vmatrix}$$

$$= (3-\lambda)^2(-1-\lambda) = 0$$

$-1-\lambda = 0$

$-\lambda = 1$

$\boxed{\lambda = -1}$

$3 - \lambda = 0$

$-\lambda = -3$

$\boxed{\lambda_2 = \lambda_3 = +3}$

---

p/ $\lambda_1 = -1$: $(A - \lambda I)V_1 = 0$

$$\begin{pmatrix} 4 & 0 & 0 \\ 2 & 4 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 4 & 0 & 0 \\ 2 & 4 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow[L_1 = \frac{1}{4}L_1]{L_2 = \frac{L_2 - 2L_1}{4}} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \longrightarrow$$

$$\longrightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

$x = 0 \quad y = 0$

$z \in \mathbb{R}$.

$\therefore V_1 = (0, 0, z) = z(0, 0, 1)$

$\therefore\ \lambda_1=-1$ tem $V_1=(0,0,1)$

P/ $\lambda_2=\lambda_3=3 \qquad (A-\lambda I)V_2=0$

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$x=0 \qquad y-4z=0$

$y=4z$

$V_2=(0,4z,z)=z(0,4,1)$

$V_2=(0,4,1)$

Mas, temos só dois vetores L.I. distintos.

Pois

$a(0,0,1)+b(0,4,1)=(0,0,0)$

$$\left(\begin{array}{cc|c} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \end{array}\right) \quad \begin{array}{l} b=0 \\ a+b=0 \\ a=0 \end{array}$$

só solução (0,0) L.I

Então, os autovetores não formam base do $\mathbb{R}^3$

Logo, T <u>NÃO</u> é diagonalizável!

ESTUDEM OS EXERCÍCIOS 7 A 11 DO FINAL DO MATERIAL, QUE TEM TODAS AS RESOLUÇÕES NO FINAL.

GAME OVER