1 Conceitos Fundamentais

Neste primeiro capítulo veremos uma introdução aos conceitos fundamentais da Teoria dos Grafos, a começar pelo próprio conceito de grafo. Iniciaremos mostrando fatos históricos desta área de estudo, que remonta ao século XVIII. Veremos também alguns exemplos simples de aplicações da Teoria dos Grafos na modelagem de problemas de logística, química, eletrônica, e ciência da computação.

1.1 Introdução

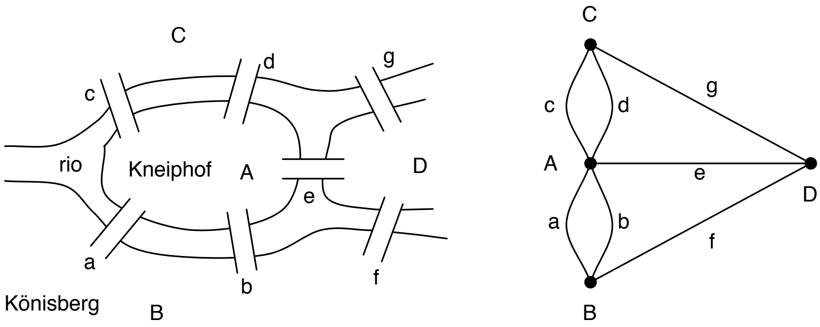
A primeira notícia que se tem do uso de grafos refere-se ao ano de 1736 (BIGGS; LLOYD; WILSON, 1986), quando Leonhard Euler publicou um artigo intitulado *"Solutio problematis ad geometriam situs pertinentis"* ("A solução de um problema relacionado à geometria de posição") no qual ele discutia a solução do problema das "sete pontes de Königsberg". A cidade de Königsberg na Prússia continha uma ilha central chamada Kneiphof. Em volta dela corria o rio Pregel, que depois era dividido em duas partes pela ilha, conforme pode ser visto no mapa da Figura 1.1.

Figura 1.1 – Gravura da cidade de Königsberg, no século XVIII

Fonte: Paoletti (2006)

As quatro partes da cidade, que chamaremos de A, B, C e D eram conectadas por sete pontes (a, b, c, d, e, f, g), conforme mostrado no diagrama da parte esquerda da Figura 1.2. O problema consistia em determinar se é possível sair de qualquer ponto da cidade de Königsberg, atravessar cada uma das 7 pontes somente uma vez e retornar ao ponto de partida. Em 1730, Euler demonstrou que era impossível e o fez por meio de um diagrama. Para tal, não importava qual o caminho a ser percorrido dentro da cidade, mas sim quando o caminho incluía a passagem por uma ponte. Euler reduziu cada uma das 4 regiões de terra a pontos, e ligou os pontos com linhas, para representar cada uma das pontes. Isto resultou no diagrama do lado direito da Figura 1.2. Este diagrama é tido como a primeira referência que se tem aos grafos como se conhece hoje, mas o que vem a ser exatamente um grafo? Veremos uma definição formal na próxima seção.

Figura 1.2 – Diagrama representando o problema das pontes de Königsberg



Fonte: o autor.

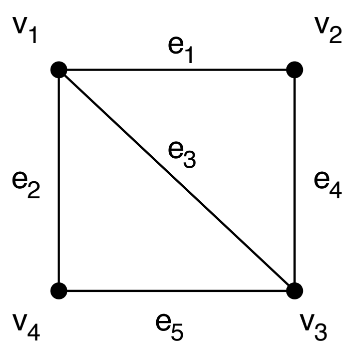
1.2 Grafos

Um grafo é um conceito, uma estrutura, uma ideia, mais precisamente uma abstração matemática que modela relações simétricas dois a dois entre determinados elementos de um conjunto. Apesar desta definição aparentemente simples, os grafos podem representar uma gama enorme de problemas teóricos e práticos. Dependendo do problema, podemos reduzi-lo a um modelo de grafo, e eventualmente, utilizar teoremas e algoritmos dentro da própria teoria para obter conclusões e soluções dos problemas. A seguir, temos uma definição mais formal de um grafo.

Definição 1.1 (Grafo)**.** *Um grafo $G = (V, E)$ é definido por um conjunto não vazio V de vértices e um conjunto E de arestas, em que cada aresta $e \in E$ é definida por um par não-ordenado de vértices (u, v), sendo ambos u e $v \in V$.*

Para fins didáticos, normalmente os grafos são representados graficamente por desenhos formados por pontos representando os vértices e linhas representando as arestas. Devido à definição apresentada acima, podemos concluir que as linhas (arestas) nunca ligam mais que dois vértices. Numa representação gráfica de um grafo, geralmente a disposição geométrica dos vértices e arestas não é importante, mas sim a conectividade entre estes elementos, isto é, qual vértice está ligado com qual aresta. A Figura 1.3 mostra um exemplo de representação gráfica de um grafo com 4 vértices e 5 arestas:

Figura 1.3 – Exemplo de grafo não dirigido



Fonte: o autor.

Um grafo também pode ser descrito por seus dois conjuntos de vértices e arestas. Para o exemplo da Figura 1.3, teríamos os conjuntos: $V = \{v_1, v_2, v_3, v_4\}$ e $E = \{(v_1, v_2), (v_1, v_4), (v_1, v_3), (v_2, v_3), (v_4, v_3)\}$. Note que, como cada aresta é formada por um par não-ordenado de vértice, tanto faz definirmos $e_1 = (v_1, v_2)$ ou $e_1 = (v_2, v_1)$.

Exercício 1.1. *Desenhe o grafo não-dirigido abaixo, sendo dados os conjuntos de vértices e arestas:* $V = \{1, 2, 3, 4, 5\}$ *e* $E = \{(1, 2), (1, 4), (1, 5), (2, 3), (3, 4), (4, 4)\}$.

Cabe ressaltar que a terminologia utilizada na Teoria dos Grafos não é padronizada e cada autor acaba usando seus próprios termos, o que pode causar uma certa confusão. Alguns autores, por exemplo, chamam arestas de arcos e vértices de nós, o que é válido desde que seja mantida consistência ao longo da obra. No presente texto, optamos, na medida do possível, por utilizar os termos mais amplamente utilizados na bibliografia.

Abaixo, seguem algumas definições básicas a respeito da estrutura dos grafos:

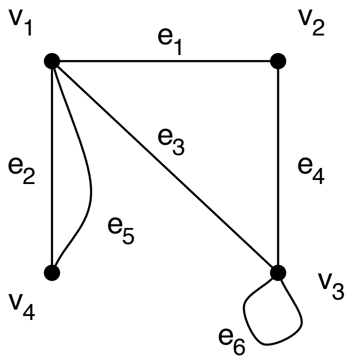
Definição 1.2 (Incidência)**.** *É a propriedade de uma aresta estar conectada a um vértice.*

Definição 1.3 (Adjacência)**.** *É a propriedade de dois vértices estarem conectados por intermédio de uma aresta. Dois vértices adjacentes também podem ser chamados de* ***vizinhos****.*

Exemplo 1.1. *Na Figura 1.4, as arestas* e_1 *e* e_4 *são incidentes ao vértice* v_2*; o vértice* v_2 *é adjacente aos vértices* v_1 *e* v_3*, e vice-versa. No caso de digrafos a relação de adjacência não é simétrica. No digrafo da Figura 1.5, o vértice* v_1 *é adjacente a* v_2*, mas* v_2 *não é adjacente a* v_1*.*

A tabela mostrada na Figura 1.4 é chamada de tabela de incidência, ela representa a **função de incidência** do grafo. A função de incidência, denotada por *endpts(e)* mapeia

Figura 1.4 – Grafo não dirigido - incidência e adjacência



$$V = \{v_1, v_2, v_3, v_4\}$$
$$E = \{e_1, e_2, e_3, e_4, e_5, e_6\}$$

aresta	e_1	e_2	e_3	e_4	e_5	e_6
endpts	v_1	v_1	v_1	v_2	v_1	v_3
	v_2	v_4	v_3	v_3	v_4	v_3

Fonte: o autor.

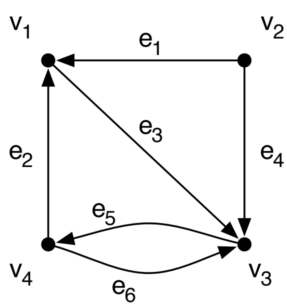
cada aresta e para um subconjunto de um ou dois elementos de V. Na Figura 1.4 temos, por exemplo, $endpts(e_1) = \{v_1, v_2\}$ e $endpts(e_6) = \{v_3\}$.

1.3 Grafos dirigidos

Dependendo do tipo de problema a ser modelado, a relação entre elementos do problema (vértices) pode não ser simétrica. Neste caso, os grafos são “dirigidos”, isto é, as arestas apresentam um sentido que vai do vértice origem para o vértice destino. Estes grafos também são chamados de **digrafos**.

Definição 1.4 (Digrafo ou Grafo Dirigido)**.** *Um grafo dirigido $G = (V, E)$ é definido por um conjunto não vazio V de vértices e um conjunto E de arestas, em que cada aresta $e \in E$ é definida por um par ordenado de vértices (u, v), sendo ambos u e $v \in V$. O vértice u é o vértice origem, e v é o vértice destino da aresta e.*

Figura 1.5 – Exemplo de grafo dirigido (ou digrafo)



Fonte: o autor.

Na representação gráfica de digrafos, as arestas são desenhadas como setas, apontando na direção origem-destino, conforme ilustra o exemplo da Figura 1.5. Para este grafo, os conjuntos de vértices e arestas são: $V = \{v_1, v_2, v_3, v_4\}$ e $E = \{(v_2, v_1), (v_4, v_1), (v_1, v_3),$ $(v_2, v_3), (v_3, v_4), (v_4, v_3)\}$. Note que agora, sendo um grafo dirigido, $e_1 = (v_2, v_1) \neq (v_1, v_2)$.

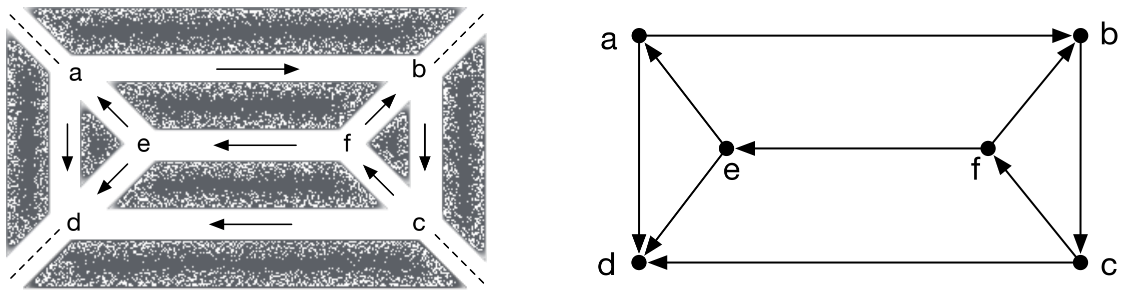
Para digrafos, o conceito de **adjacência** é um pouco diferente daquele visto anteriormente. Aqui, dizemos que um vértice v_j é adjacente a um vértice v_i se houver pelo menos uma aresta (v_i, v_j). Portanto, na Figura 1.6, o vértice v_j é adjacente a v_i, porém v_i **não** é adjacente a v_j.

Figura 1.6 – Adjacência de vértices em digrafos.

Fonte: o autor.

Exemplo 1.2. *Considere o seguinte sistema de ruas de mão única de uma cidade, conforme ilustrado na Figura 1.7. Como as ruas são de mão única, não poderíamos representar este sistema como um grafo (não dirigido). Entretanto, se considerarmos que a direção das ruas pode ser representada por arestas dirigidas, podemos modelar este sistema como um grafo dirigido conforme a figura abaixo:*

Figura 1.7 – Exemplo de modelagem de sistema de trânsito



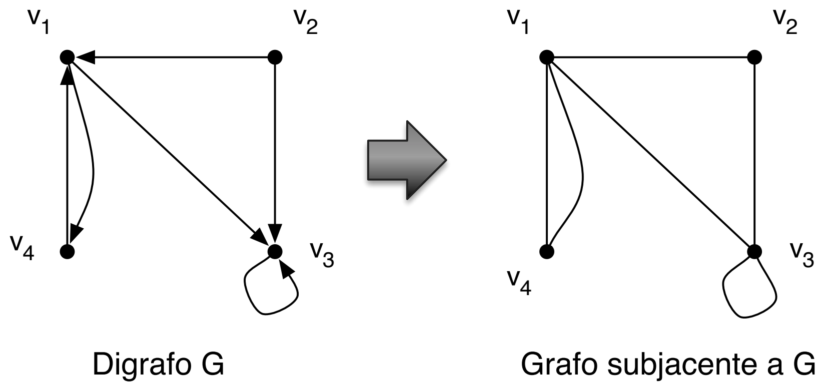
Fonte: o autor.

Exercício 1.2. *Desenhe o seguinte grafo dirigido, sendo dados seus conjuntos de vértices e arestas:* $V = \{1, 2, 3, 4\}$ *e* $E = \{(1, 2), (2, 3), (2, 4), (3, 4)\}$.

Definição 1.5 (Grafo subjacente)**.** *Dado um grafo dirigido G, seu grafo subjacente é um grafo não dirigido formado pelo mesmo conjunto de vértices de G, porém com cada aresta dirigida de G substituída por uma aresta não-dirigida. A Figura 1.8 exibe um exemplo de grafo subjacente obtido a partir de um grafo dirigido G.*

Definição 1.6 (Grafo transposto)**.** *Dado um grafo dirigido $G = (V, E)$, seu grafo transposto é definido por $G^T = (V, E^T)$, em que $E^T = \{(u, v) : (v, u) \in E\}$.*

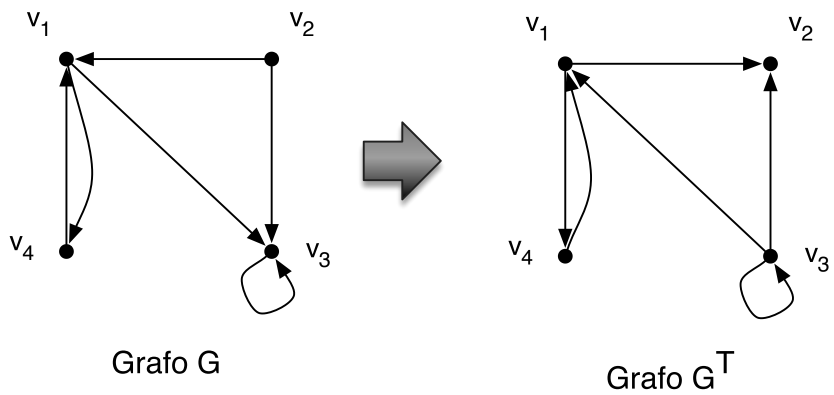
Figura 1.8 – Grafo subjacente a um grafo dirigido



Fonte: o autor.

Em outras palavras, um grafo transposto a um grafo dirigido é obtido invertendo-se o sentido de todas as suas arestas. A Figura 1.9 ilustra um exemplo de grafo transposto a um grafo dirigido.

Figura 1.9 – Grafo transposto a um grafo dirigido



Fonte: o autor.

1.4 Laços e arestas paralelas

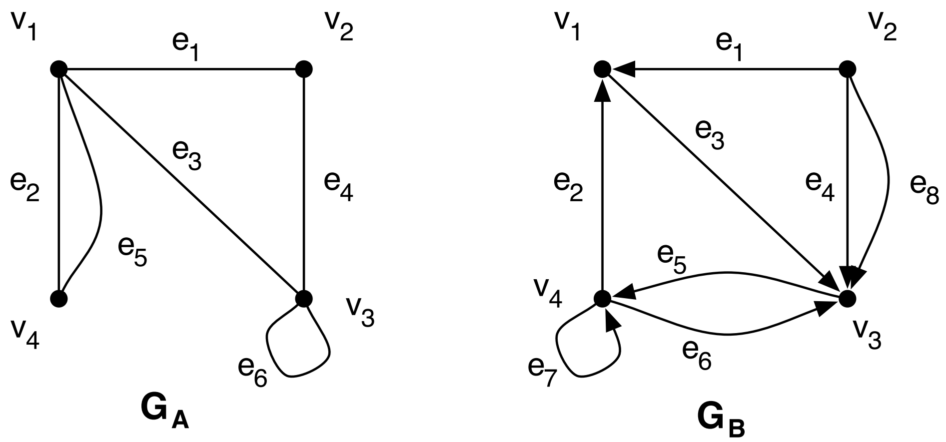
Eventualmente grafos e digrafos podem apresentar alguns tipos especiais de arestas:

Definição 1.7 (Laço)**.** *Um laço é uma aresta que conecta um vértice a ele mesmo. Os laços também podem ser chamados de* ***loops*** *ou* ***self-loops****.*

Definição 1.8 (Arestas paralelas)**.** *Arestas paralelas são conjuntos de duas ou mais arestas que conectam o mesmo par de vértices.*

Exemplo 1.3. *Na Figura 1.10, as arestas e_2 e e_5 do grafo não-dirigido G_A são arestas paralelas, e a aresta e_6 é um laço. No digrafo G_B, as arestas e_4 e e_8 são paralelas e a aresta e_7 é um laço. Note que as arestas e_5 e e_6 do digrafo G_B não são paralelas, pois por serem dirigidas, não conectam exatamente o mesmo par de vértices.*

Figura 1.10 – Laços e arestas paralelas



Fonte: o autor.

De acordo com a existência destes tipos especiais de arestas, podemos classificar os grafos e digrafos em dois grandes grupos: grafos simples e multigrafos.

Definição 1.9 (Grafo simples)**.** *Um grafo simples (ou digrafo simples) é um grafo que não contém laços e nem arestas paralelas.*

Definição 1.10 (Multigrafo)**.** *Um multigrafo é um grafo (ou digrafo) que contém pelo menos um laço ou um conjunto de arestas paralelas.*

1.5 Parâmetros quantitativos

Normalmente, precisamos utilizar parâmetros quantitativos a respeito de um grafo, conseqüentemente, do problema modelado pelo grafo. Abaixo estão descritos os principais parâmetros utilizados neste livro.

Definição 1.11 (Ordem)**.** *A **ordem** de um grafo representa a cardinalidade do conjunto V. Em outras palavras, a ordem representa a quantidade de vértices do grafo, a qual é denotada por $|V|$ ou pela letra n.*

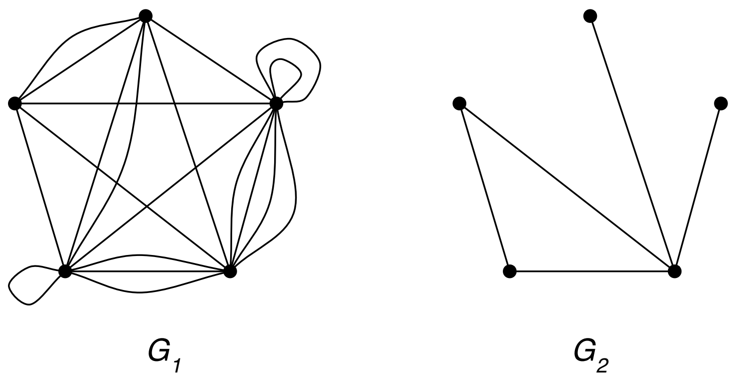
Definição 1.12 (Tamanho)**.** *O **tamanho** de um grafo representa a cardinalidade do conjunto E. Em outras palavras, o tamanho representa a quantidade de arestas do grafo, a qual é denotada por $|E|$ ou pela letra m.*

Definição 1.13 (Densidade)**.** *A **densidade** de um grafo é dada em função da relação entre sua ordem e seu tamanho, ou seja, representa a proporção entre quantidade de arestas e vértices.*

Em relação a esta proporção que define a densidade, um grafo é dito **denso** quando se tem muitas arestas para uma determinada quantidade de vértices. Se, ao contrário, o grafo tiver poucas arestas para uma determinada quantidade de vértices, ele é chamado de grafo **esparso**. A densidade não é uma medida exata, mas considera-se um grafo denso quando a quantidade de arestas é próxima ou maior que $|V|^2$. Por outro lado, o grafo é considerado esparso se o número de arestas for muito menor que $|V|^2$.

Exemplo 1.4. *A Figura 1.11 mostra dois grafos distintos, cada um deles tem 5 vértices. Por outro lado, o grafo G_1 possui 20 arestas enquanto o grafo G_2 tem apenas 5. Comparando os dois grafos, podemos conluir que, G_1 é denso e o grafo G_2 pode ser considerado esparso.*

Figura 1.11 – Grafos denso e esparso



Fonte: o autor.

Em algumas situações, é importante saber quantas ligações de arestas existem em um determinado vértice. Por exemplo, considere um grafo representando um mapa rodoviário, com vértices para cidades e arestas para estradas que ligam diretamente duas cidades. A quantidade de arestas ligando um determinado vértice representa a quantidade de estradas pelas quais se pode sair da cidade. Esta quantidade é o grau do vértice.

Definição 1.14 (Grau de vértice)**.** *O grau de um vértice é igual à quantidade de arestas incidentes ao vértice, com cada laço sendo contado duas vezes. O grau de um vértice pode ser denotado por $grau(v)$.*

Definição 1.15 (Sequência de graus)**.** *Dado um grafo não dirigido, sua sequência de graus é obtida listando-se os graus de todos os seus vértices em ordem não-decrescente, com repetições caso necessário.*

Exemplo 1.5. *O grafo G_A da Figura 1.10, tem $|V| = n = 4$, $|E| = m = 6$, $grau(v_1) = 4$ e $grau(v_2) = 2$, $grau(v_3) = 4$ e $grau(v_4) = 2$. Note que este grafo tem ordem e tamanho iguais a 4 e 6, respectivamente ($|V| = n = 4$ e $|E| = v = 6$). Podemos observar que a soma dos graus de todos os vértices é igual a 12, ou seja exatamente $2m$. Sua sequência de graus é $(2, 2, 4, 4)$.*

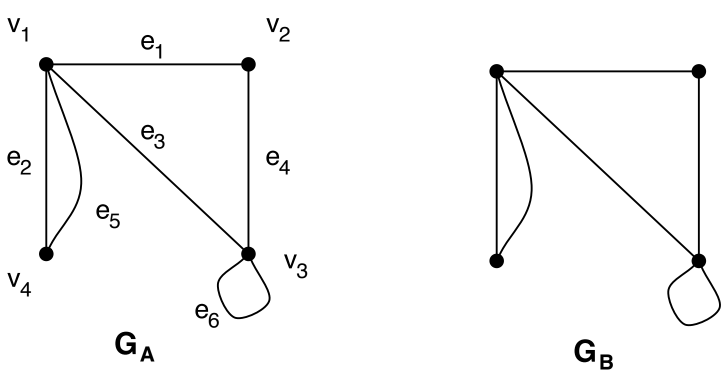
Definição 1.16 (Grau de vértice em digrafos)**.** *Em grafos dirigidos, o conceito de grau de vértice é um pouco diferente: o grau de entrada de um vértice é igual à quantidade de arestas dirigidas que chegam no vértice e o grau de saída é igual à quantidade de arestas que partem do vértice. Estes parâmetros são denotados por $grau_e(v)$ e $grau_s(v)$, respectivamente.*

Exemplo 1.6. *O digrafo G_B da Figura 1.10, tem $|V| = n = 4$, $|E| = m = 8$, $grau_e(v_2) = 0$, $grau_s(v_2) = 3$, $grau_e(v_4) = 2$ e $grau_s(v_4) = 3$.*

1.6 Grafos rotulados e não-rotulados

Na Figura 1.12, o grafo G_A é rotulado. Isto significa que seus vértices e arestas tem algum tipo de identificação, ou rótulo. Em várias situações, não é necessário identificar cada vértice e aresta individualmente, neste caso os grafos são chamados não-rotulados. Como exemplo, temos o grafo G_B da Figura 1.12. Para fins de estudo teórico, muitas vezes não é necessário rotular os vértices. Por outro lado, a identificação explícita de vértices e arestas se faz necessária quando estamos modelando um problema real ou então quando estamos demonstrando ou executando algum algoritmo. Ao longo do texto, vamos apresentar grafos rotulados e não-rotulados de acordo com a necessidade ou a conveniência.

Figura 1.12 – Grafos rotulado e não-rotulado



Fonte: o autor.

1.7 Isomorfismo

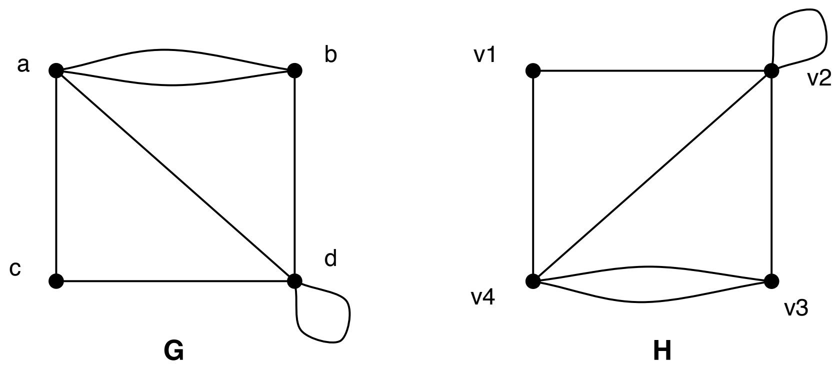
Quando um grafo é rotulado, normalmente seus vértices representam elementos de um problema concreto, portanto não é totalmente correto afirmarmos que dois grafos são iguais, se os nomes de seus vértices são diferentes. A rigor, um grafo rotulado seria fruto da modelagem matemática de determinado problema.

Por outro lado, em algumas situações, é importante verificar semelhanças estruturais entre diferentes grafos. Assim, ao invés de uma igualdade absoluta entre dois grafos, vamos procurar uma igualdade *estrutural*. Este tipo de conceito é chamado *isomorfismo*.

Definição 1.17 (Isomorfismo)**.** *Dois grafos G e H são isomorfos se H puder ser obtido renomeando-se os vértices de G. Isto é, se existir correspondência de um para um entre os vértices de G e H de tal forma que o número de arestas conectadas a cada par de vértices em G é igual ao número de arestas conectadas aso pares de vértices correspondentes em H. Tal correspondência de um para um constitui o isomorfismo, é denotada por $G \simeq H$.*

Exemplo 1.7. *Na Figura 1.13, os grafos G e H são isomorfos (ou $G \simeq H$). Note que não podemos dizer que são iguais porque seus conjuntos de vértices e arestas são diferentes (por exemplo $V_G = \{a, b, c, d\}$ e $V_H = \{v_1, v_2, v_3, v_4\}$, mas eles tem estruturas iguais.*

Figura 1.13 – Isomorfismo $G \simeq H$



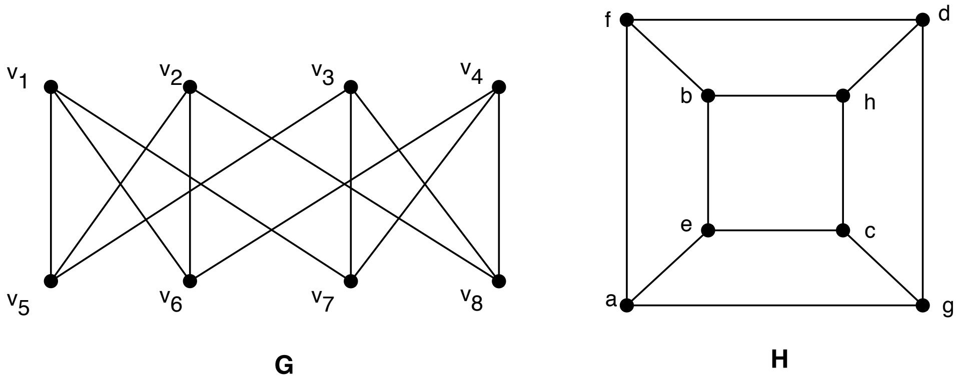
Fonte: o autor.

Podemos provar isto encontrando uma função bijetora f mapeando os vértices de um grafo para o outro. Assim, poderíamos estabelecer a seguinte correspondência:

$$a \to v_4, \qquad b \to v_3, \qquad , c \to v_1, \qquad d \to v_2$$

No grafo G, o vértice c é adjacente aos vértices a e d mas não é adjacente ao vértice b. Se observarmos o grafo H, constatamos que $v_1 = f(c)$ é adjacente aos vértices $v_2 = f(d)$ e $v_4 = f(a)$, mas não é adjacente ao vértice $v_3 = f(b)$. Neste sentido, a bijeção $f : V_G \to V_H$ também deve ser consistente na bijeção das adjacências.

Exercício 1.3. *Dados os grafos G e H abaixo, prove que $G \simeq H$.*



Sugestão: procure encontrar um mapeamento de V_G para V_H.

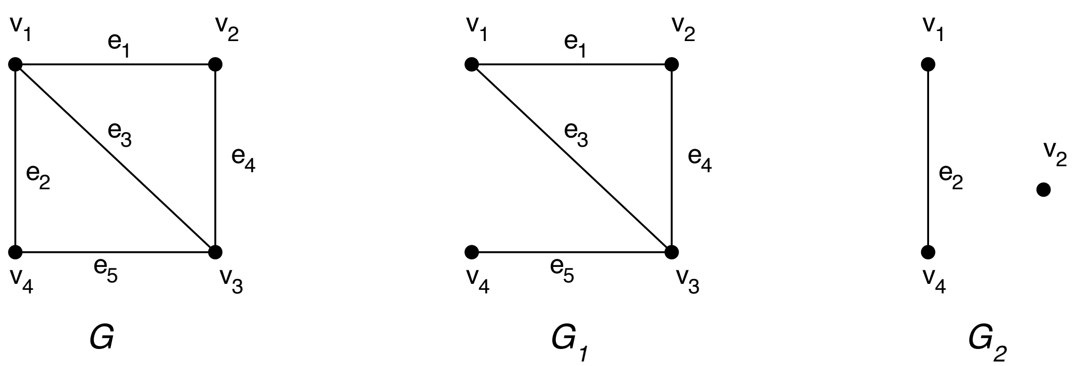
1.8 Subgrafos

Muitas vezes queremos abordar partes menores de um problema. O conceito de subgrafos está diretamente relacionado ao conceito de subconjuntos de um conjunto, ou subgrupos de um grupo. Na teoria dos grafos podemos utilizar a seguinte definição:

Definição 1.18 (Subgrafo)**.** *Um subgrafo de um grafo $G = (V, E)$ é um grafo cujos vértices são vértices de G e cujas arestas são arestas de G.*

Exemplo 1.8. *A Figura 1.14 exemplifica este conceito. O grafo G é composto pelos conjuntos $V = \{v_1, v_2, v_3, v_4\}$ e $E = \{e_1, e_2, e_3, e_4, e_5\}$. O primeiro subgrafo G_1, é formado pelos seguintes subconjuntos de V e E: $V_1 = \{v_1, v_2, v_3, v_4\}$ e $E_1 = \{e_1, e_3, e_4, e_5\}$; o segundo subgrafo G_2, é formado por $V_2 = \{v_1, v_2, v_4\}$ e $E_2 = \{e_2\}$.*

Figura 1.14 – Dois subgrafos de um grafo G



Fonte: o autor.

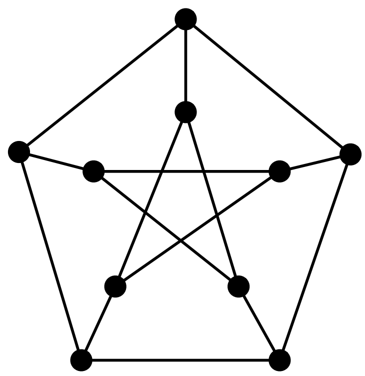
1.9 Classes de grafos

Existem alguns tipos de grafos que compartilham certas características estruturais em comum, tais grafos podem ser classificados em grupos com mesmas características, o que geralmente facilita o estudo teórico de propriedades e algoritmos. A seguir, veremos algumas dessas classes.

Definição 1.19 (Grafo regular)**.** *Um grafo é dito* ***regular*** *se todos os seus vértices tem o mesmo grau. Um grafo é chamado de* ***r-regular*** *ou* ***regular de grau r*** *se o grau de cada um de seus vértices é igual a* r*.*

Exemplo 1.9. *A Figura 1.15 mostra um exemplo de grafo 3-regular. Este grafo é chamado de* ***Grafo de Petersen*** *(PETERSEN, 1898), ele tem propriedades interessantes sob vários aspectos da Teoria dos Grafos, sendo comumente utilizado para exemplificar teoremas e testar conjecturas. O nome deste grafo é uma homenagem ao matemático dinamarquês Julius Petersen e foi apresentado em um artigo científico de sua autoria, em 1898.*

Figura 1.15 – Grafo de Petersen



Fonte: o autor.

Teorema 1.1. *Seja* G *um grafo* r*-regular com* n *vértices. Então* G *tem* $nr/2$ *arestas.*

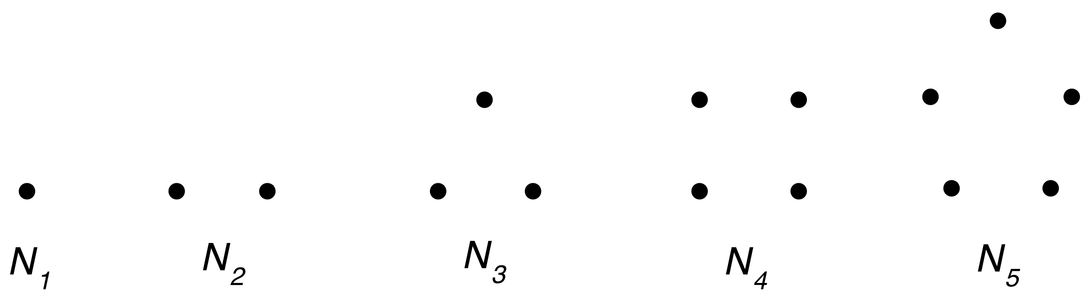
Prova. *Seja* G *um grafo com* n *vértices, cada um com grau* r*, então a soma dos graus de todos os vértices é igual a* nr*. Pelo lema do aperto de mão, o número de arestas de um grafo é igual à metade desta soma, portanto igual a* $nr/2$*.*

Definição 1.20 (Grafo nulo)**.** *Grafo nulo é um grafo sem arestas. O grafo nulo é denotado por* N_n *em que* n *representa o número de vértices do grafo*[1]*.*

[1] Um grafo nulo sempre tem vértices isolados, o qual denomina-se grafo 0-regular.

Exemplo 1.10. *A Figura 1.16 mostra os grafos nulos N_1, N_2, N_3, N_4 e N_5.*

Figura 1.16 – Grafos nulos



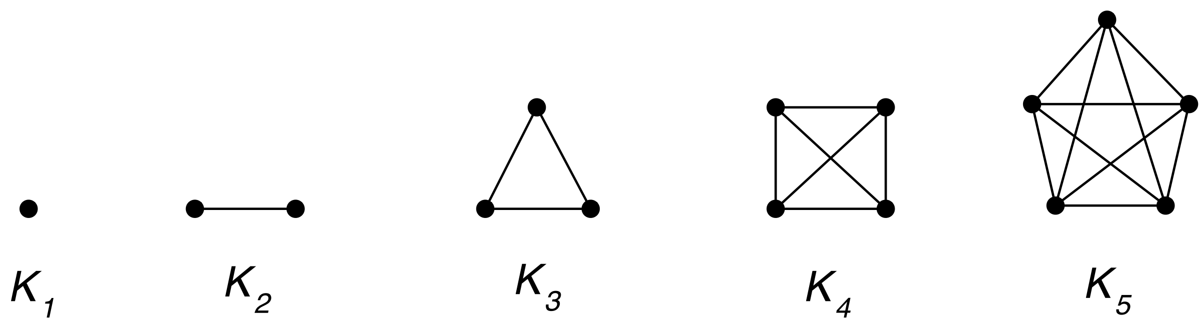
Fonte: o autor.

Definição 1.21 (Grafo completo)**.** *Grafo completo é um grafo simples em que cada par de vértices distintos é adjacente. Nós denotamos o grafo completo com n vértices por K_n.*

Os grafos completos são bastante interessantes no estudo de teoria dos grafos. Note que um grafo completo com n vértices, é o grafo simples mais denso possível para esta quantidade de vértices. É também um grafo $(n-1)$-regular.

Exemplo 1.11. *A Figura 1.17 ilustra exemplos dos grafos completos K_1, K_2, K_3, K_4 e K_5.*

Figura 1.17 – Grafos completos



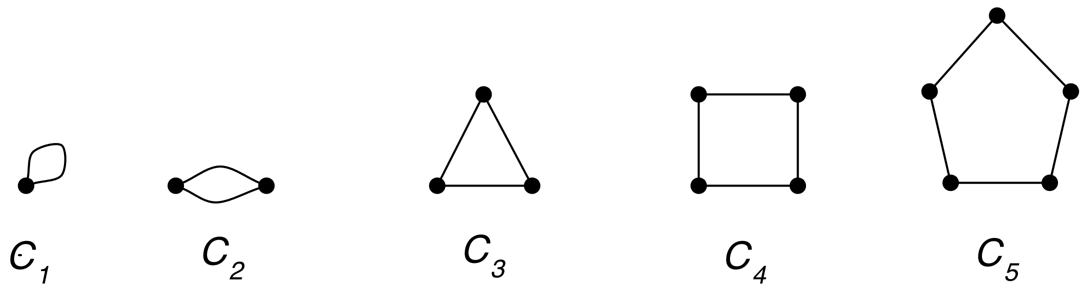
Fonte: o autor.

Exercício 1.4. *Desenhe os grafos completos K_6, K_7 e K_8.*

Definição 1.22 (Grafo ciclo)**.** *Grafo ciclo é um grafo constituído por apenas um ciclo de vértices e arestas*[2]. *O grafo ciclo com* n *vértices é denotado por* C_n.

Exemplo 1.12. *A Figura 1.18 ilustra exemplos dos grafos ciclo* C_1, C_2, C_3, C_4 *e* C_5.

Figura 1.18 – Grafos ciclo



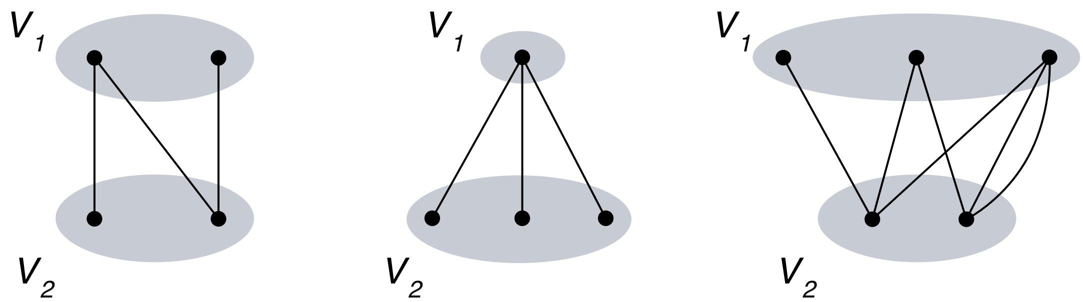
Fonte: o autor.

Definição 1.23 (Grafo bipartido)**.** *Um grafo bipartido* $G = (V_1 \cup V_2, E)$ *é definido por dois conjuntos de vértices* V_1 *e* V_2, *em que* $V_1 \cap V_2 = \emptyset$ *e um conjunto* E *de arestas, tal que, para cada aresta* $e \in E$, *tem-se que* $e = (u, v)$ *e* $u \in V_1$ *e* $v \in V_2$. *Os conjuntos* V_1 *e* V_2 *são chamados de subconjuntos de bipartição de* G.

Note que a definição 1.23 implica em nunca haver arestas entre vértices dos conjuntos V_1 e V_2 ou laços. Porém é possível haver arestas paralelas.

Exemplo 1.13. *A Figura 1.19 mostra três exemplos de grafos bipartidos. Os conjuntos de vértices* V_1 *e* V_2 *para cada grafo são indicados em cinza.*

Figura 1.19 – Grafos bipartidos



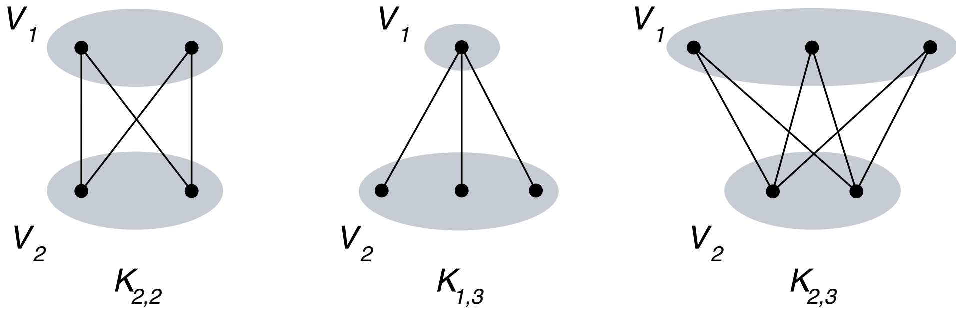
Fonte: o autor.

[2] Note que um grafo ciclo com n vértices sempre é um grafo 2-regular com n arestas.

Definição 1.24 (Grafo bipartido completo)**.** *Um grafo bipartido completo $K_{r,s}$ é um grafo simples bipartido no qual todos os pares de vértices u e v tais que $u \in V_1$ e $v \in V_2$ são adjacentes.*

Exemplo 1.14. *A Figura 1.20 mostra exemplos dos grafos bipartidos completos $K_{2,2}$, $K_{1,3}$ e $K_{2,3}$, respectivamente.*

Figura 1.20 – Grafos bipartidos completos



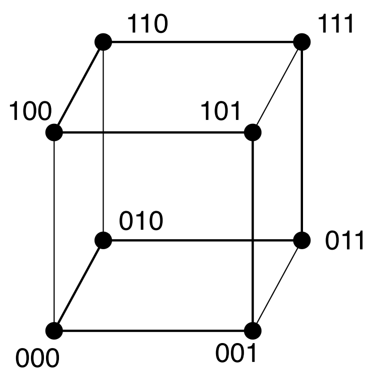
Fonte: o autor.

Exercício 1.5. *Desenhe todos os grafos bipartidos completos $K_{r,s}$ com $r \leq 4$ e $s \leq 4$.*

Definição 1.25 (Grafo cubo)**.** *Um grafo cubo Q_k, também chamado de hipercubo k-dimensional é um grafo cujo conjunto de vértices é formado por palavras binárias de k bits de tal forma que existe uma aresta entre dois vértices se e somente se eles forem diferentes em apenas um bit.*

Exemplo 1.15. *A Figura 1.21 mostra exemplos do grafo cubo Q_3 com os respectivos valores de 3 bits associados aos vértices.*

Figura 1.21 – Grafo cubo Q_3



Fonte: o autor.

Exercício 1.6. *Desenhe os grafos cubo Q_1, Q_2 e Q_4. Dica: construa o grafo Q_4 a partir de dois grafos Q_3.*

1.10 Percursos, trilhas e caminhos

Muitas aplicações na teoria dos Grafos consistem em transitar pelo grafo passando por vértices e arestas. Eventualmente problemas de grafos envolvem noções de distância entre elementos do grafo, mensuradas em quantidades de vértices, arestas ou até em outros parâmetros relevantes para determinado problema. A seguir veremos algumas definições com o intuito de apresentar estes conceitos.

Definição 1.26 (Percurso)**.** *Em um grafo não dirigido, podemos definir um percurso $P = \langle v_0, e_1, v_1, e_2, ..., v_{n-1}, e_n, v_n \rangle$ como sendo uma sequência de vértices e arestas tal que o vértice final de uma aresta no percurso é igual ao vértice inicial da próxima aresta.*

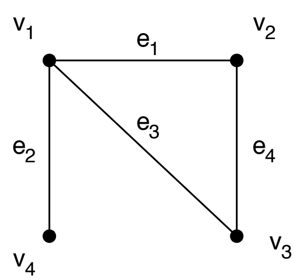
Dependendo da aplicação, pode ser suficiente representar percursos de forma concisa (ou abreviada), representando-os apenas por sequências de vértices ou de arestas, por exemplo: $P = \langle v_0, v_1, ..., v_n \rangle$ ou $P = \langle e_1, e_2, ..., e_n, \rangle$. Também podemos representar percursos de v_0 para v_n como $v_0 \rightsquigarrow v_n$.

Definição 1.27 (Comprimento)**.** *Em um percurso, seu comprimento é igual à quantidade de arestas percorridas no percurso. O comprimento do percurso é dado por $\delta(s, v)$. Se não existir percurso possível entre os vértices v_0 e v_n, então $delta(v_0, v_n) = \infty$.*

Definição 1.28 (Percurso fechado)**.** *Um percurso é dito **fechado** se seu primeiro vértice é igual ao último, isto é: $v_0 = v_n$. Caso contrário, o percurso é **aberto**.*

Exemplo 1.16. *Na Figura 1.22, $P = \langle v_1, e_2, v_4, e_2, v_1, e_1, v_2, e_4, v_3, e_3, v_1, \rangle$ é um exemplo de percurso fechado com comprimento igual a 5 em um grafo de 4 vértices. Note que a sequência $\langle v_1, v_4, v_3, v_2 \rangle$ **não** é um percurso, pois não há aresta entre v_4 e v_3.*

Figura 1.22 – Percurso em um grafo



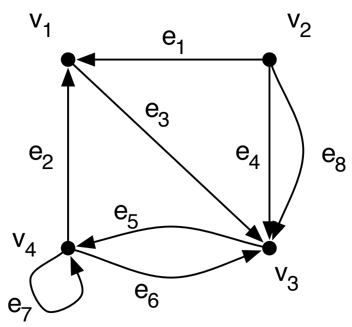
Fonte: o autor.

Definição 1.29 (Percurso dirigido)**.** *Analogamente, em um grafo dirigido, um percurso dirigido* $P = \langle v_0, e_1, v_1, e_2, ..., v_{n-1}, e_n, v_n \rangle$ *é uma sequência de vértices e arestas dirigidas tal que o vértice final de uma aresta dirigida no percurso é igual ao vértice inicial da próxima aresta dirigida.*

Em um percurso dirigido, é necessário respeitar a direção de cada aresta definida pelos seus vértices de origem e destino. Ou seja, não podemos “caminhar na contramão”.

Exemplo 1.17. *Na Figura 1.23,* $P = \langle v_1, e_3, v_3, e_5, v_4, e_7, v_4, e_6, v_3 \rangle$ *é um exemplo de percurso dirigido aberto com comprimento igual a 4. Note que a sequência* $\langle v_1, e_3, v_3, e_4, v_2 \rangle$ ***não*** *é um percurso, pois não podemos caminhar no sentido contrário das arestas (aresta* e_4*).*

Figura 1.23 – Percurso dirigido em um grafo



Fonte: o autor.

Definição 1.30 (Trilha)**.** *Em um grafo, uma trilha é um percurso sem repetição de arestas.*

Definição 1.31 (Caminho)**.** *Em um grafo, um caminho é uma trilha sem repetição de vértices (exceto pelos vértices inicial e final, eventualmente).*

Definição 1.32. *Um percurso, trilha ou caminho é* ***trivial*** *se tiver somente um vértice e nenhuma aresta.*

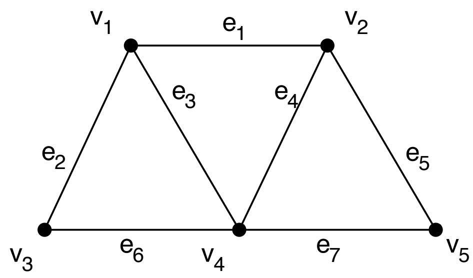
Não existe consenso entre autores a respeito da terminologia para percurso, trilha e caminho. Por exemplo, alguns autores usam caminho simples ao invés de caminho e caminho ao invés de trilha.

Definição 1.33 (Ciclo)**.** *Em um grafo, um ciclo é um caminho fechado com mais de um vértice, ou seja, é um caminho fechado não trivial.*

Definição 1.34 (Circuito)**.** *Em um grafo, um circuito é uma trilha fechada.*

Exemplo 1.18. *Na Figura 1.24, temos os seguintes exemplos (note que um percurso não é uma trilha e uma trilha não é um caminho): Percurso:* $P = \langle e_1, e_4, e_3, e_1, e_5 \rangle$*; Trilha:* $T = \langle e_3, e_4, e_5, e_7, e_6 \rangle$*; Caminho:* $C_a = \langle e_5, e_7, e_6, e_2 \rangle$*; Ciclo:* $C_f = \langle e_5, e_7, e_6, e_2, e_1 \rangle$ *e Circuito:* $C_c = \langle e_3, e_4, e_5, e_7, e_6, e_2 \rangle$*.*

Figura 1.24 – Caminho, trilha, ciclo e circuito em um grafo

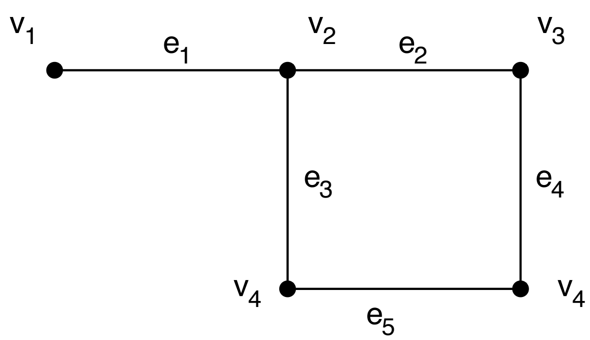


Fonte: o autor.

Definição 1.35 (Caminho mínimo)**.** *Dados dois vértices* s *e* v*, o caminho mínimo* $s \rightsquigarrow v$ *é definido como o caminho de menor comprimento dentre todos os caminhos existentes entre* s *e* v*. Note que, dependendo da estrutura do grafo, pode haver mais de um caminho mínimo* $s \rightsquigarrow v$*.*

Exemplo 1.19. *Na Figura 1.25, existem dois caminhos entre os vértices* v_1 *e* v_4*, são eles:* $C_1 = \langle v_1, e_1, v_2, e_2, v_3, e_4, v_4, e_5, v_4 \rangle$*, com comprimento igual a 4 e* $C_2 = \langle v_1, e_1, v_2, e_3, v_4 \rangle$*, com comprimento igual a 2. Como não é possível encontrar um caminho menor que* C_2*, este é o caminho mínimo entre os vértices* v_1 *e* v_4*.*

Figura 1.25 – Exemplo menor caminho



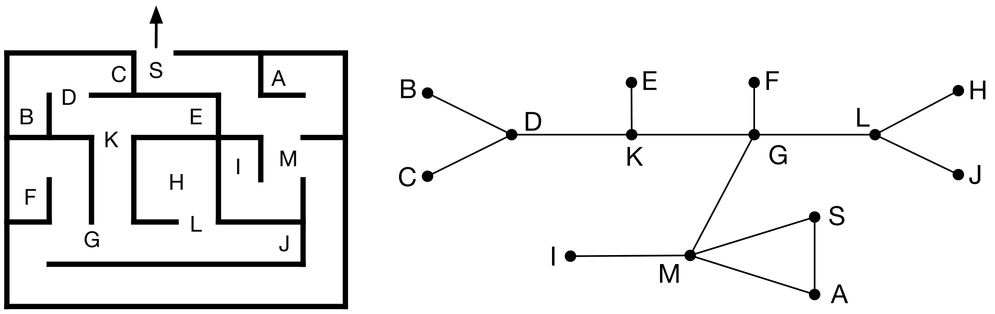
Fonte: o autor.

1.11 Aplicações

1.11.1 Labirintos

Um labirinto é um conjunto complexo de caminhos, corredores ou túneis onde é muito fácil se perder. A Figura 1.26a mostra um exemplo de um labirinto. Podemos utilizar um grafo para representar os becos sem saída e as possibilidades de escolhas de caminhos no labirinto em cada bifurcação. Por exemplo, na bifurcação K, podemos ir para D, E ou G.

Figura 1.26 – Exemplo de modelagem de labirinto



(a) Exemplo de labirinto (b) Grafo do labirinto

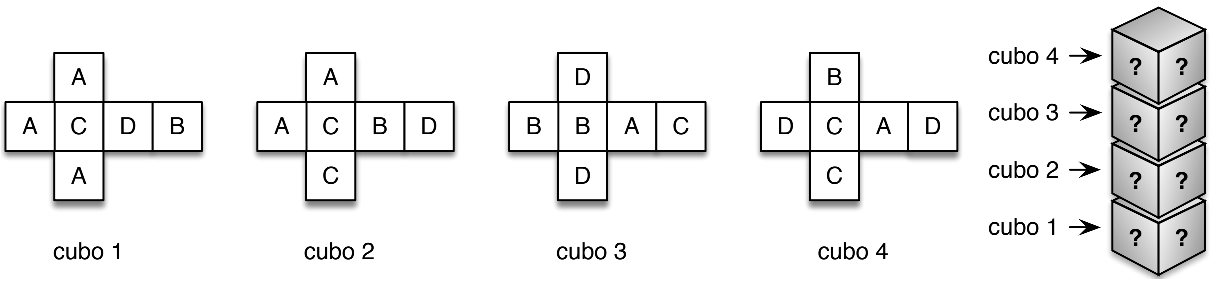
Fonte: o autor.

Para modelar o grafo, os vértices representam os becos sem saída e as bifurcações. As arestas ligam os vértices se e somente se for possível ir de um ponto a outro no labirinto sem passar por nenhuma bifurcação no meio do caminho. A Figura 1.26b mostra o grafo que representa o labirinto da figura anterior. Se quisermos, por exemplo encontrar um caminho do local B até a saída do labirinto, basta encontrar um caminho entre os vértices B e S no grafo.

1.11.2 Problema dos 4 cubos

O problema dos quatro cubos, descrito por Aldous, Best e Wilson (2003), é um jogo do tipo quebra-cabeças no qual são fornecidos 4 cubos com faces marcadas pelas letras A, B, C ou D. Dados os 4 cubos, o problema consiste em empilhá-los de forma que em cada uma das 4 faces da pilha (esquerda, direita, frente e atrás) apareçam as 4 letras, para isso é necessário encontrar uma orientação para cada cubo. A Figura 1.27 exibe uma possível instância deste problema: à esquerda são mostrados 4 cubos planificados e à direita é mostrada a pilha que deve ser construída.

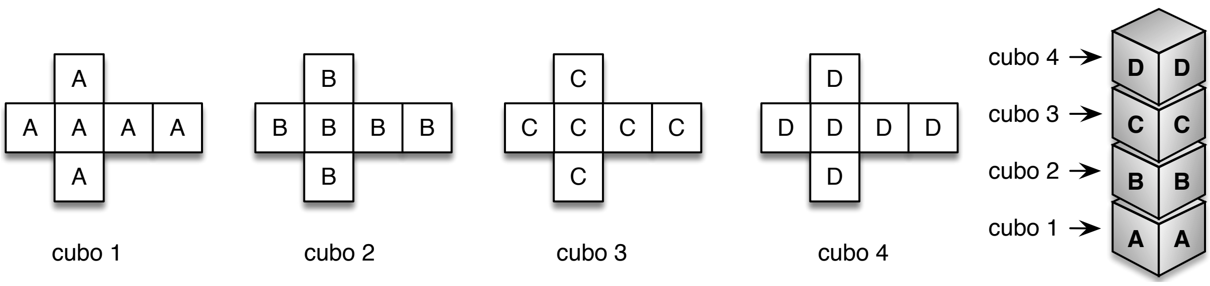
Figura 1.27 – Instância do problema dos 4 cubos



Fonte: adaptado de Aldous, Best e Wilson (2003).

Observe que algumas instâncias do problema não tem solução, ou resultam em uma solução trivial. Na Figura 1.28, cada cubo dispõe em todos os seus lados a marcação de apenas uma letra. Como cada um deles tem uma letra diferente, a solução do problema é trivial. Basta empilhá-los sem qualquer preocupação com a orientação de cada um e cada face da pilha vai exibir as 4 letras.

Figura 1.28 – Instância do problema dos 4 cubos com solução trivial



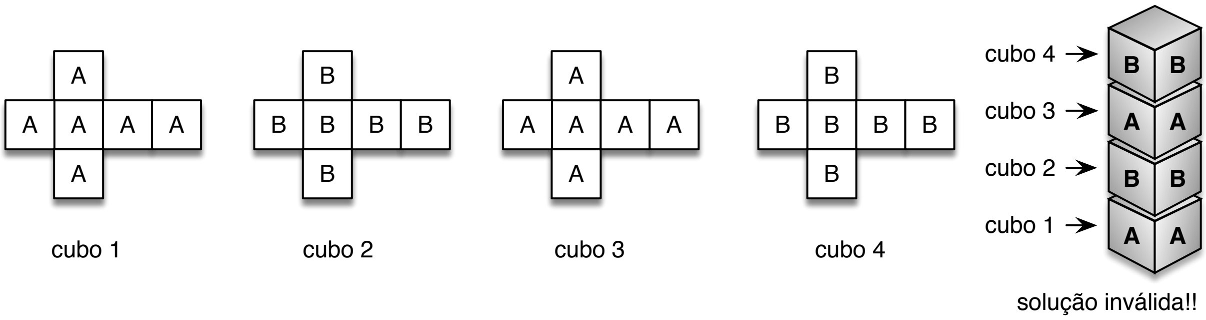
Fonte: adaptado de Aldous, Best e Wilson (2003).

Por outro lado, a Figura 1.29 exibe uma instância sem solução. Neste caso, os cubos 1 e 3 tem todos os lados marcados com a letra A, os cubos 2 e 4 tem todos os lados marcados com a letra B. Com isso, este problema não tem solução, pois nunca será possível exibir as 4 letras diferentes na pilha de cubos.

Com este problema, podemos exemplificar uma aplicação de conceitos fundamentais da Teoria dos Grafos para solucionar uma situação prática. O primeiro passo é modelar o problema como um ou mais grafos, em seguida verificar alguma propriedade, aplicar algum teorema ou executar um algoritmo para buscar a solução desejada.

Precisamos encontrar elementos que, combinados dois a dois, formariam vértices e arestas. No caso do problema dos 4 cubos, uma relação importante e relevante para a busca de uma solução seria o fato de que duas faces opostas de um cubo formam um par específico de letras. Por exemplo: os lados opostos do cubo 1 da Figura 1.27 formam os

Figura 1.29 – Instância do problema dos 4 cubos sem solução

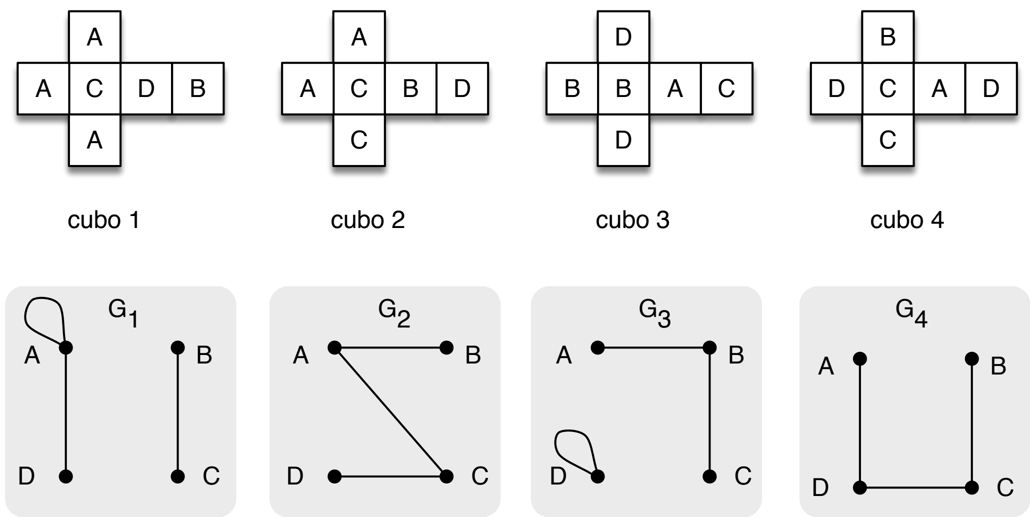


Fonte: adaptado de Aldous, Best e Wilson (2003).

pares (A, A), (C, B) e (A, D). Em razão disso, ao escolhermos uma face para um dos lados da pilha, já estamos escolhendo a face (e a letra) que aparece no lado oposto. Lembre-se, precisamos orientar os cubos para que as 4 letras apareçam nos 4 lados da pilha de cubos. Isto é uma relação importante entre pares de elementos do problema, e podemos utilizá-la para fazer a modelagem utilizando grafos.

Tomando o exemplo da Figura 1.27, vamos iniciar a modelagem do problema formando conjuntos de vértices com as 4 letras. Considerando que, a relação importante está entre pares de letras em lados opostos dos cubos, este será nosso critério para formar arestas. Ou seja, dadas duas letras, estas formarão uma aresta se aparecerem em lados opostos de um cubo. Com isso, os 4 cubos da Figura 1.27 formam os 4 grafos mostrados na Figura 1.30.

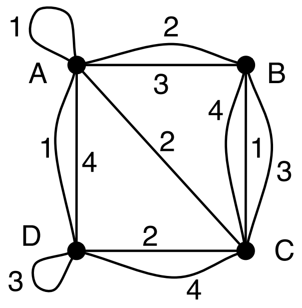
Figura 1.30 – Modelagem de um grafo para cada cubo



Fonte: o autor.

A seguir, se unirmos estes 4 grafos identificando o grafo de procedência de cada aresta com números (cubos 1 ao 4), formamos o grafo da Figura 1.31, o qual engloba todas as opções de lados opostos de cubos.

Figura 1.31 – União dos grafos dos 4 cubos

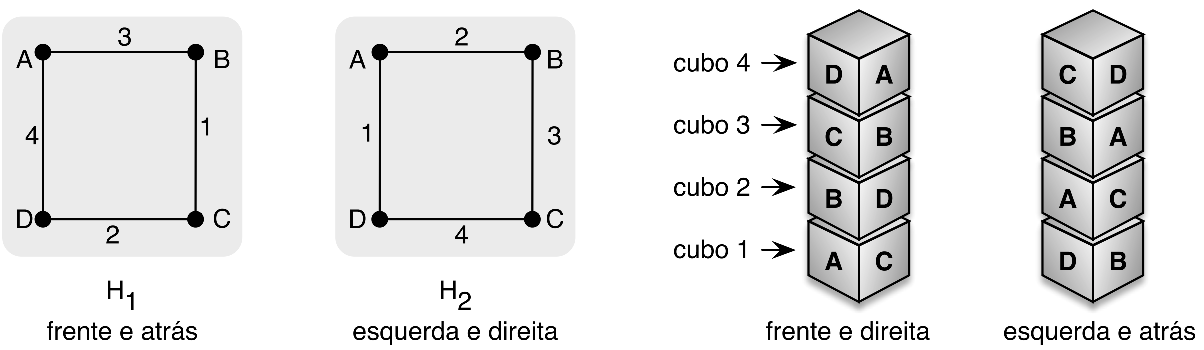


Fonte: o autor.

Visto que, um cubo tem 3 pares de faces opostas, para encontrar uma solução devemos escolher para cada cubo os dois pares de faces que ficarão nos lados da frente e de trás da pilha, bem como esquerda e direita. Para isso, é necessário extrair dois subgrafos H_1 e H_2 do grafo da Figura 1.31 com as seguintes propriedades: (i) cada subgrafo deve conter apenas uma aresta de cada cubo e (ii) cada subgrafo deve ser regular de grau 2.

A primeira propriedade se deve ao fato de que é impossível colocar o mesmo cubo mais de uma vez na pilha, enquanto, a segunda assegura que uma letra apareça uma vez em cada um dos quatro lados da pilha. A Figura 1.32 apresenta uma solução para o problema com os dois subgrafos e uma ilustração de como seria a pilha de cubos correspondente.

Figura 1.32 – Solução do problema dos 4 cubos



Fonte: o autor.

1.12 Exercícios

1. O que é um grafo? Responda com suas próprias palavras.

2. Para que serve um grafo?

3. Desenhe os grafos não-dirigidos abaixo, sendo dados seus conjuntos de vértices e arestas:

   a) $V = \{1, 2, 3, 4, 5\}$ e $E = \{(1, 2), (1, 4), (1, 5), (2, 3), (3, 4), (4, 4)\}$;
   b) $V = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ e $E = \{(1, 2), (1, 4), (1, 4), (2, 3), (2, 5), (3, 5)\}$;
   c) $V = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ e
   $E = \{(1, 2), (1, 3), (1, 4), (2, 5), (2, 6), (3, 5), (3, 6), (4, 5), (4, 6)\}$;
   d) $V = \{1, 2, 3, 4, 5\}$ e $E = \{(1, 2), (1, 4), (2, 3), (2, 4), (2, 5), (3, 4), (3, 5)\}$;
   e) $V = \{1, 2, 3, 4\}$ e $E = \{(1, 2), (2, 3), (2, 4), (3, 4)\}$;
   f) $V = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8\}$ e
   $E = \{(1, 2), (2, 2), (2, 3), (3, 4), (3, 5), (6, 7), (6, 8), (7, 8)\}$.

4. Dados os grafos da questão anterior, classifique-os como simples ou multigrafos.

5. Quais são as diferenças entre grafos simples e multigrafos?

6. Desenhe um exemplo de grafo simples dirigido e um não dirigido.

7. Desenhe um exemplo de multigrafo dirigido e um não dirigido.

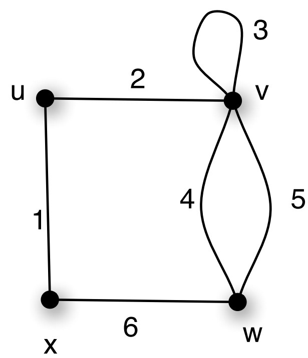
8. Dado o grafo abaixo, quais afirmações estão corretas?

   a) Os vértices v e w são adjacentes;

   b) Os vértices v e x são adjacentes;

   c) A aresta 2 é incidente ao vértice u;

   d) A aresta 5 é incidente ao vértice x.



9. Desenhe um grafo que represente o seguinte panorama de amizade entre quatro pessoas:

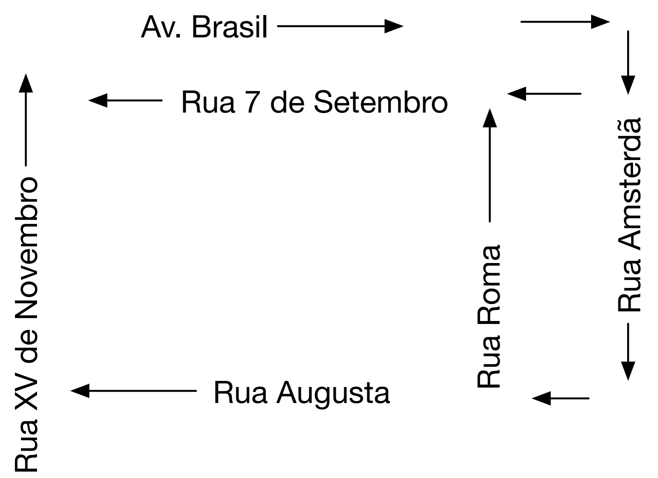
   a) João é amigo de Carolina e de Maria, mas não de Marco;
   b) Marco é amigo de Carolina, mas não de Maria;
   c) Carolina é amiga de Maria.

10. Suponha que há seis pessoas em uma festa e que nenhuma delas é totalmente desconhecida do grupo. Prove que é sempre possível haver três pessoas que se

conhecem mutuamente e três pessoas das quais nenhuma delas conhece as outras duas. (Dica: represente as seis pessoas como vértices de um grafo e considere as 5 possíveis arestas emergindo de um desses vértices).

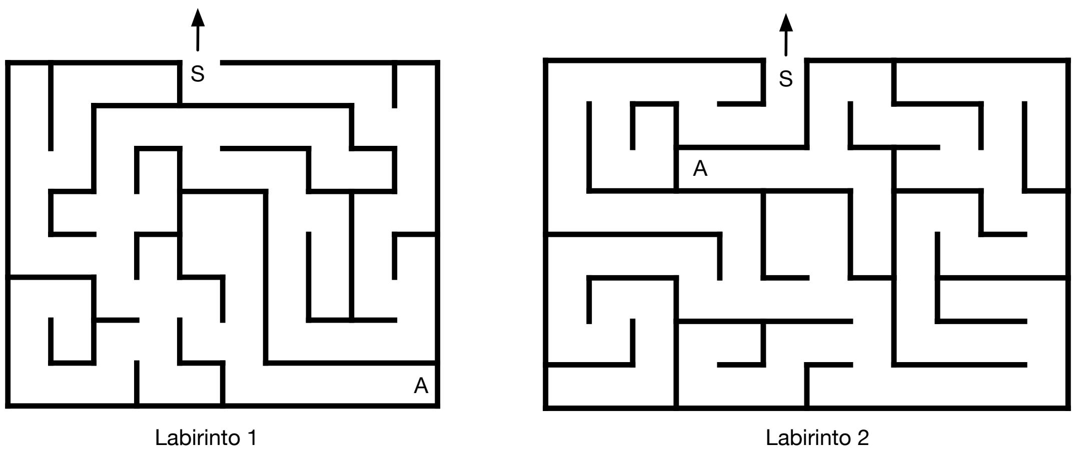
11. A Figura 1.33 representa um sistema de ruas de mão única. Desenhe um grafo dirigido que sirva de modelo para este sistema.

Figura 1.33 – Exemplo sistema de ruas de mão única



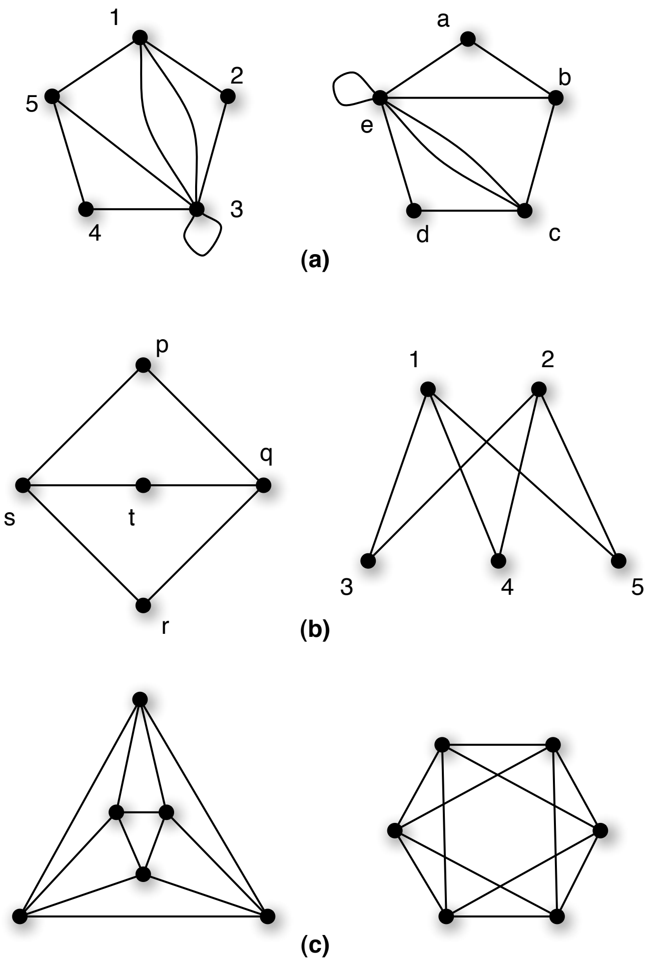
12. A Figura 1.34 mostra dois labirintos. Para cada um deles, modele um grafo para representar as possibilidades de caminho e encontre um caminho que leve do local A até a saída do labirinto.

Figura 1.34 – Exercício labirintos



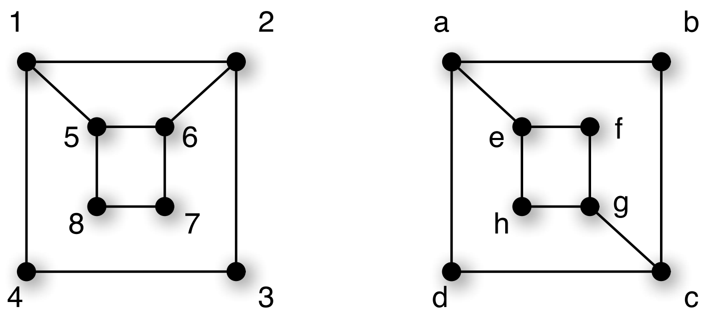
13. Mostre que os pares de grafos da Figura 1.35 são isomorfos. Faça isso por meio da demonstração de correspondência entre os vértices dos grafos.

Figura 1.35 – Exercício sobre isomorfismo



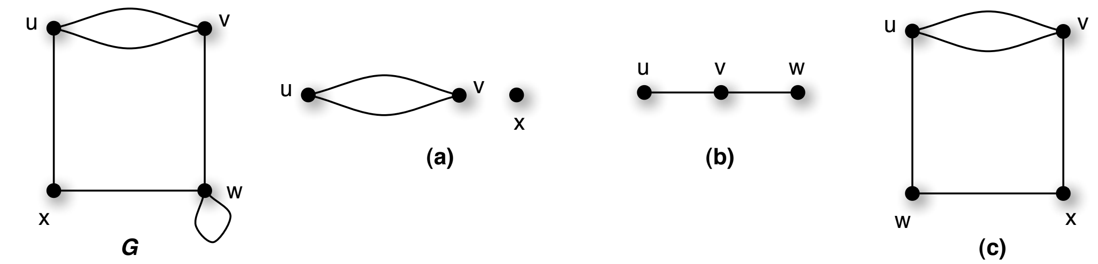
14. Os dois grafos da Figura 1.36 são isomorfos? Em caso afirmativo, encontre uma correspondência de um para um entre os vértices do primeiro com os vértices do segundo grafo. Caso contrário, explique porque tal correspondência não existe.

Figura 1.36 – Exercício isomorfismo



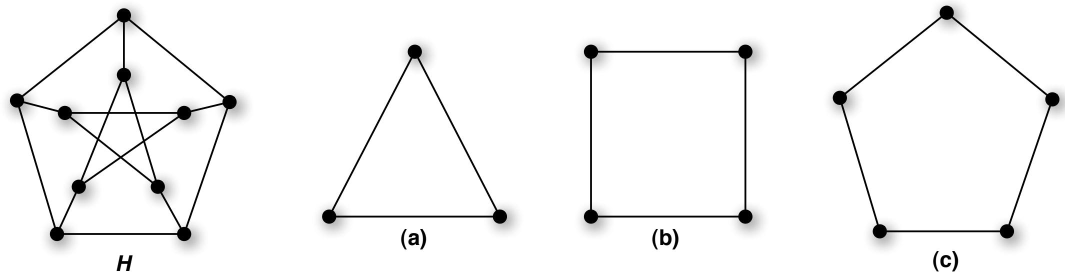
15. Na Figura 1.37, quais dos grafos (a, b, c), são subgrafos do grafo G?

Figura 1.37 – Exercício isomorfismo



16. Na Figura 1.38, quais dos grafos (a, b, c), são subgrafos do grafo H?

Figura 1.38 – Exercício isomorfismo



17. Desenhe um grafo simples com a seguinte sequência de graus: (1, 1, 2, 3, 3, 4, 4, 6).

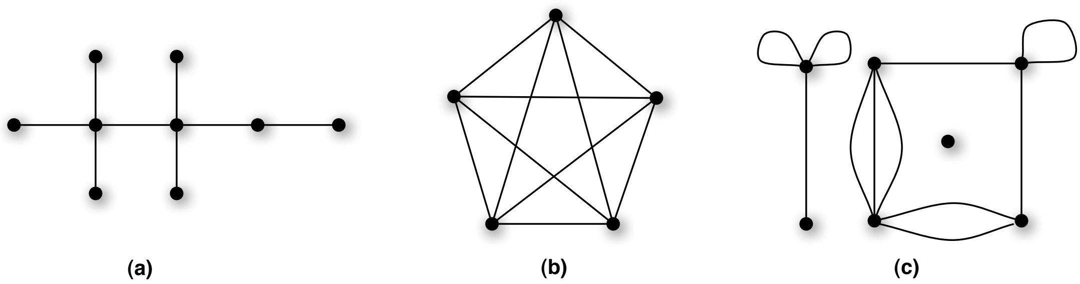
18. Desenhe um grafo simples, com a seguinte sequência de graus: (3, 3, 3, 3, 3, 5, 5, 5).

19. Diga se cada uma das sentenças abaixo é verdadeira ou falsa. Justifique sua resposta com uma prova ou contraexemplo.

    a) Se dois grafos possuem a mesma sequência de graus, então eles são isomorfos.
    b) Se dois grafos são isomorfos, então eles possuem a mesma sequência de graus.

20. Escreva a sequência de graus de cada um dos grafos (a, b, c) da Figura 1.39.

Figura 1.39 – Exercício sequência de graus



21. O que é um grafo completo?

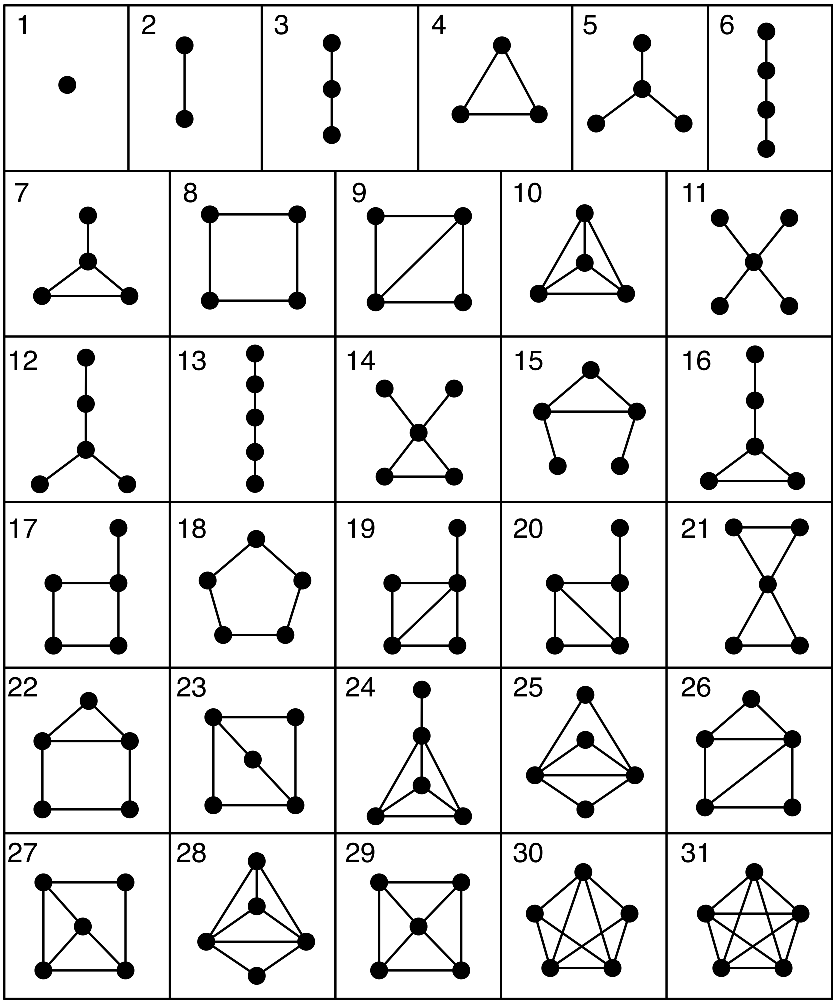
22. O que é um grafo bipartido?

23. O que é um grafo bipartido completo?

24. Sob que circunstâncias devemos usar um grafo dirigido ao invés de um grafo não-dirigido?

25. A Figura 1.40 mostra todos os grafos conexos não rotulados com até 5 vértices. Nesta figura, localize todos os grafos regulares e todos os grafos bipartidos.

Figura 1.40 – Grafos conexos não rotulados com até 5 vértices



26. Quantas arestas tem um grafo nulo N_n? (Obs.: n é a quantidade de vértices)

27. Quantas arestas tem um grafo ciclo C_n?

28. Quantas arestas tem um grafo bipartido completo $K_{r,s}$?

29. Quantas arestas tem um grafo completo K_n?

30. Qual é o grafo simples mais denso que existe? Justifique sua resposta.

31. Desenhe todos os grafos completos com até 8 vértices.

32. Desenhe todos os grafos ciclo com até 6 vértices.

33. Desenhe os seguintes grafos bipartidos completos: $K_{1,1}$, $K_{1,2}$, $K_{1,3}$, $K_{2,2}$, $K_{2,3}$, $K_{2,4}$, $K_{3,3}$, $K_{3,4}$, $K_{4,4}$.

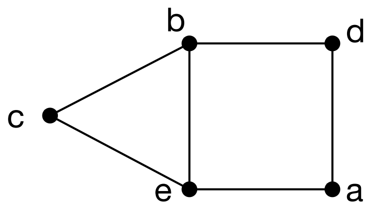
34. Um **grafo tripartido completo** $K_{r,s,t}$ consiste em três conjuntos de vértices (de tamanhos r, s e t), com uma aresta ligando dois vértices se e somente se eles estiverem em conjuntos diferentes. Desenhe os grafos $K_{2,2,2}$ e $K_{3,3,2}$; e determine o número de arestas do grafo $K_{3,4,5}$.

35. Muitas vezes os grafos são usados na implementação de jogos por computador. Por exemplo: as 28 pedras de um jogo de dominó poderiam ser modeladas como um grafo. Como você faria essa modelagem (quais elementos do dominó são vértices? E quais são arestas?)

36. Desenhe um exemplo (se existir) de cada um dos grafos abaixo:

    a) um grafo bipartido que é um grafo regular de grau 5;
    b) um grafo cubo com 11 vértices;
    c) quatro grafos regulares de grau 4.

37. Quais das seguintes sequências de vértices representam um percurso no grafo abaixo? Quais percursos são caminhos? Quais percursos são ciclos? Quais são os comprimentos daqueles que são percursos?



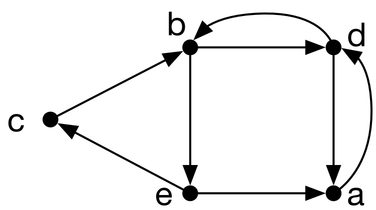
a) $\langle a, e, b, c, b \rangle$

b) $\langle a, e, a, d, b, c, a \rangle$

c) $\langle e, b, a, d, b, e \rangle$

d) $\langle c, b, d, a, e, c \rangle$

38. Quais das seguintes sequências de vértices representam um percurso no grafo abaixo? Quais percursos são caminhos? Quais percursos são ciclos? Quais são os comprimentos daqueles que são percursos?



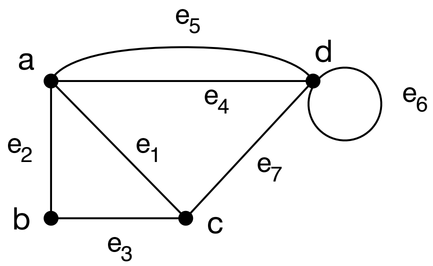
a) $\langle d, b, e, c, b \rangle$

b) $\langle d, a, d, a, d \rangle$

c) $\langle d, a, b, e, d \rangle$

d) $\langle d, b, e, c, b, a, d \rangle$

39. No grafo abaixo, encontre:

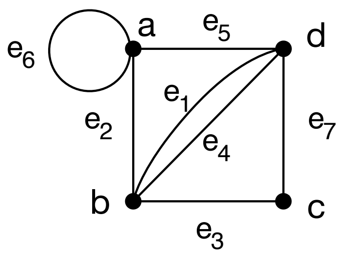


a) um percurso fechado que não é uma trilha;

b) uma trilha fechada que não é um ciclo; e

c) todos os ciclos de tamanho 5 ou menos.

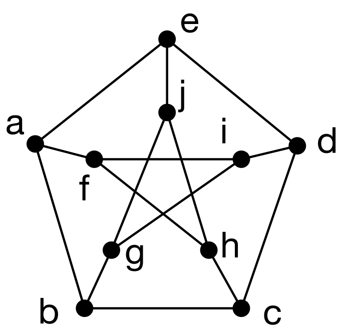
40. No grafo abaixo, encontre:



a) um percurso de tamanho 7 entre os vértices b e d;

b) um caminho de comprimento máximo.

41. No grafo abaixo, encontre:



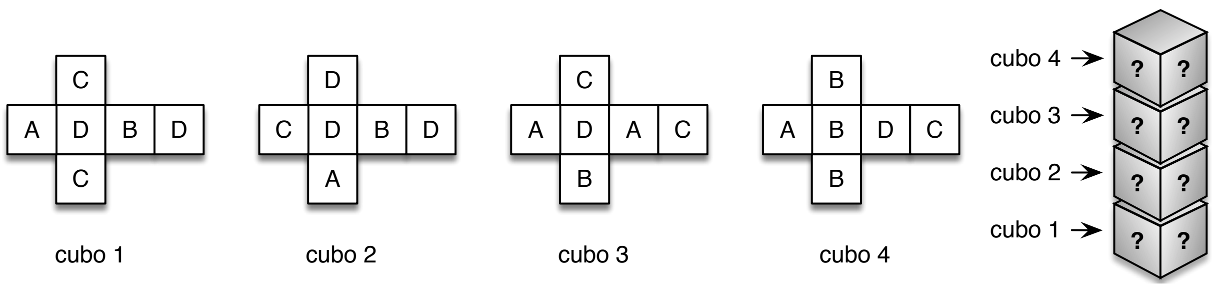
a) uma trilha de tamanho 5;

b) um caminho de tamanho 9;

c) ciclos de tamanhos 5, 6, 8 e 9.

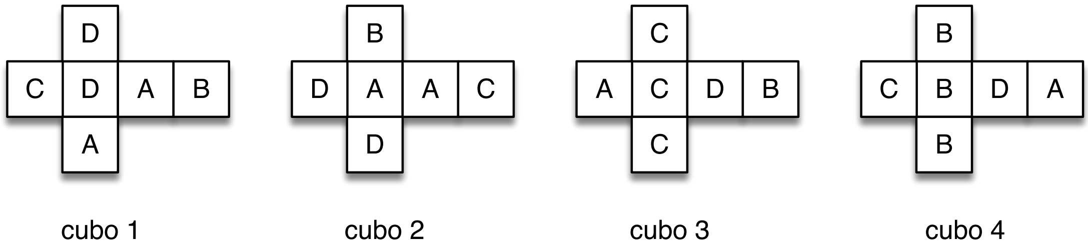
42. O jogo dos 4 cubos é um quebra-cabeças em que são dados 4 cubos com suas faces coloridas de vermelho (*R-red*), verde (*G-green*), azul (*B-blue*) e amarelo (*Y-yellow*). A solução consiste em empilhar os 4 cubos de forma a cada uma das cores aparecer em cada um dos lados da pilha. Dados os 4 cubos da Figura 1.41 (planificados), use os conceitos de Teoria dos Grafos vistos até agora para encontrar uma solução do problema.

Figura 1.41 – Exercício 4 cubos



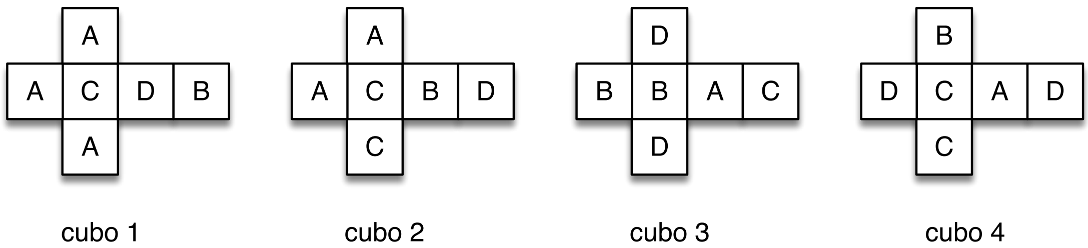
43. Mostre que não existe solução para o problema dos quatro cubos ilustrado na Figura 1.42 .

Figura 1.42 – Exercício 4 cubos sem solução



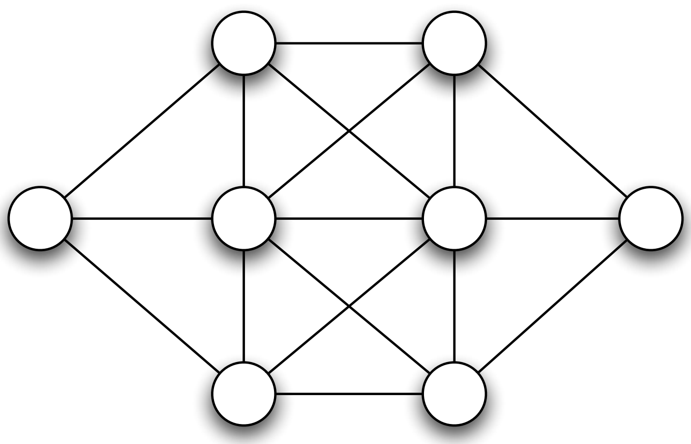
44. Prove que o problema dos quatro cubos ilustrado na Figura 1.43 tem uma única solução.

Figura 1.43 – Exercício 4 cubos com solução única

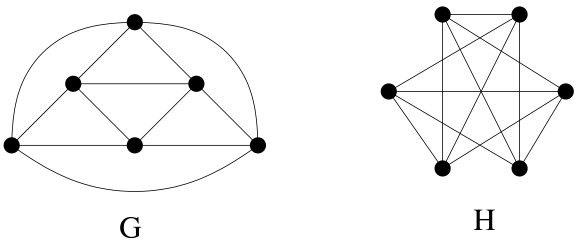


45. O problema dos oito círculos consiste em colocar as letras A, B, C, D, E, F, G e H nos oito círculos da Figura 1.44 de tal forma que nenhuma letra pode ficar adjacente a outra letra se elas forem vizinhas na ordenação alfabética. Tente encontrar uma solução para o problema escrevendo as letras no grafo abaixo.

Figura 1.44 – Problema dos oito círculos

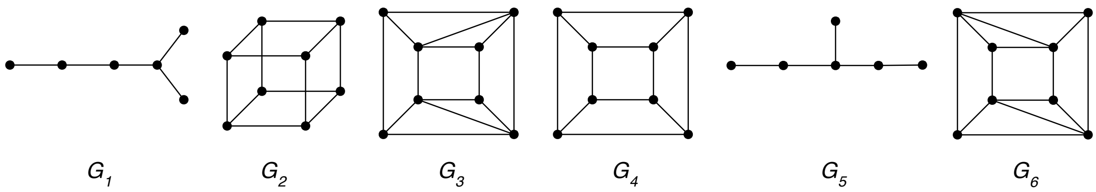


46. (PosComp – 2005) Os grafos $G = (V_G, E_G)$ e $H = (V_H, E_H)$ são isomorfos. Assinale a a alternativa que justifica esta afirmação.



a) As sequências de grau dos vértices G e H são iguais.
b) Os grafos têm o mesmo número de vértices e o mesmo número de arestas.
c) Existe uma bijeção de V_G em V_H que preserva adjacências.
d) Cada vértice de G e de H pertence a exatamente quatro triângulos distintos.
e) Ambos os grafos admitem um circuito que passa por cada aresta exatamente uma vez.

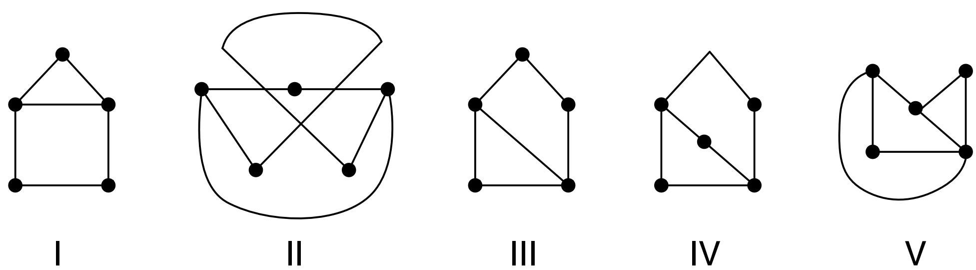
47. (PosComp – 2007) Considere os seis grafos G_1, G_2, G_3, G_4, G_5 e G_6 mostrados a seguir.



Pode-se afirmar que os únicos pares de grafos isomorfos entre si são:

a) G_1 e G_5; G_3 e G_6
b) G_3 e G_4; G_2 e G_6
c) G_1 e G_5
d) G_2 e G_4
e) G_3 e G_6

48. (PosComp – 2008) Considere os grafos I, II, III, IV e V, mostrados abaixo:



São grafos isomorfos:

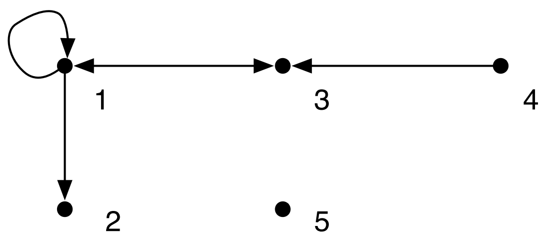
a) todos acima apresentados.
b) apenas I e III.
c) apenas II e V.
d) apenas III e IV.
e) apenas I, II e III.

49. (PosComp – 2010) Dados dois grafos não orientados $G_1 = (V_1, E_1)$ e $G_2 = (V_2, E_2)$:
$G_1 : V_1 = \{a, b, c\}, E_1 = \{(a, b), (b, c), (a, c)\}$
$G_2 : V_2 = \{d, e\}, E_2 = \{(d, e)\}$

Qual alternativa apresenta corretamente o grafo $G_r = (V, E)$ resultante da soma dos grafos G_1 e G_2?

a) $G_r : V = \{a, b, c, d, e\}, E = \{(a, b), (b, c), (a, c), (d, e)\}$
b) $G_r : V = \{a, b, c, d, e\}, E = \{(a, d), (a, e), (b, d), (b, e), (c, d), (c, e), (d, e)\}$
c) $G_r : V = \{a, b, c, d, e\}$,
$E = \{(a, b), (b, c), (a, c), (a, d), (a, e), (b, d), (b, e), (c, d), (c, e)\}$
d) $G_r : V = \{a, b, c, d, e\}$,
$E = \{(a, b), (b, c), (a, c), (a, d), (a, e), (b, d), (b, e), (c, d), (c, e), (d, e)\}$
e) $G_r : V = \{a, b, c, d, e\}, E = \{(a, b), (b, c), (c, d), (d, e), (e, a)\}$

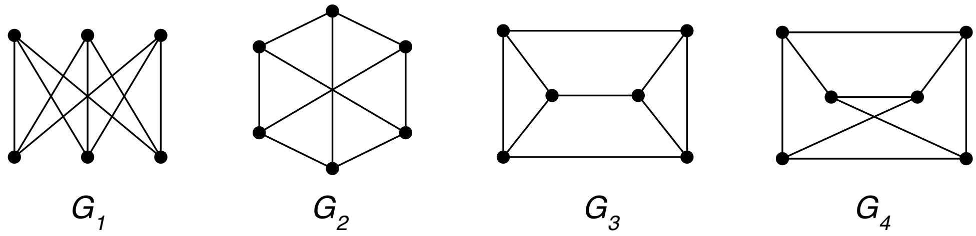
50. (PosComp – 2011) Considere o grafo a seguir:



O grafo representa a relação:

a) $R = \{(1, 1), (1, 2), (1, 3), (3, 1), (4, 3)\}$
b) $R = \{(1, 1), (1, 2), (1, 3), (3, 1), (3, 4)\}$
c) $R = \{(1, 1), (1, 3), (2, 1), (3, 1), (3, 4)\}$
d) $R = \{(1, 1), (1, 2), (1, 3), (3, 4), (4, 3)\}$
e) $R = \{(1, 1), (1, 3), (2, 1), (3, 1), (4, 3)\}$

51. (PosComp – 2015) Considere o grafos a seguir:



Pela análise desses grafos, verifica-se que:

a) G_3 e G_4 são grafos completos.
b) G_1 e G_2 são grafos isomorfos.
c) G_3 e G_1 são grafos bipartidos.
d) G_2 e G_3 são grafos planares.
e) G_4 e G_1 são multigrafos.