$$\left|\begin{array}{c|ccc} 1 & 2+2^x & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 3-2^x & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1-2^x \end{array}\right| = 0 \Rightarrow \begin{vmatrix} 1+2^x & 0 & 0 \\ 0 & 2-2^x & 0 \\ 0 & 0 & -2^x \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow (1+2^x)\cdot(2-2^x)\cdot(-2^x) = 0 \Rightarrow \begin{cases} 1+2^x = 0 \Rightarrow 2^x = -1 \Rightarrow \nexists\, x \in \mathbb{R}, \text{ que satisfaz} \\ \text{ou} \\ 2-2^x = 0 \Rightarrow 2^x = 2 \\ \text{ou} \\ -2^x = 0 \Rightarrow \nexists\, x \in \mathbb{R}, \text{ que satisfaz.} \end{cases}$$

Logo, $2^x = 2$
Resposta: *c*.

23 $g(x) = 8x^2 + x + 3$; como $\Delta < 0$, não há raízes reais. Assim, o gráfico de *g* não intercepta o eixo *x*.
Resposta: *d*.

25 *1ª solução:* $A^2 = 2A \Rightarrow \det(A^2) = \det(2A) \Rightarrow \det(A \cdot A) = 2 \cdot 2 \cdot \det A \Rightarrow$
$\Rightarrow \det A \cdot \det A = 4 \cdot \det A \underset{\substack{\det A \neq 0, \\ \text{pois } A \text{ é} \\ \text{inversível}}}{\Rightarrow} \det A = 4$

2ª solução: $A^2 = 2 \cdot A \Rightarrow A \cdot A = 2 \cdot A$. Como *A* é inversível, multiplicamos, à direita, por A^{-1}:

$$A \cdot A \cdot A^{-1} = 2 \cdot \underbrace{A \cdot A^{-1}}_{I_2} \Rightarrow A = 2 \cdot I_2 = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}; \det A = 4$$

Resposta: *e*.

26 $A - \lambda \cdot I = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} \lambda & 0 & 0 \\ 0 & \lambda & 0 \\ 0 & 0 & \lambda \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1-\lambda & 0 & 1 \\ 1 & -\lambda & 1 \\ 0 & 1 & 1-\lambda \end{bmatrix}$

$\det(A - \lambda \cdot I) = 0 \Leftrightarrow -\lambda(1-\lambda)^2 + 1 - (1-\lambda) = 0 \Rightarrow -\lambda(1 - 2\lambda + \lambda^2) + \cancel{1} - \cancel{1} + \lambda = 0$
$2\lambda^2 - \lambda^3 = 0 \Rightarrow \lambda^2(2-\lambda) = 0 \Rightarrow \lambda = 0$ ou $\lambda = 2$; a soma é 2
Resposta: *b*.

28 • $A = A^t$ equivale a $\begin{bmatrix} 2 & 2 \\ k & 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & k \\ 2 & 3 \end{bmatrix} \Rightarrow k = 2$

• $\det(k^2 \cdot A) = \det(4A) = 4^2 \cdot \det A = 16 \cdot 2 = 32$
Resposta: *b*.

Desafios

1 Desenvolvendo o determinante pelos elementos da 3ª linha, vem:

$$D = 3 \cdot A_{33} = 3 \cdot (-1)^6 \cdot \begin{vmatrix} \log_3 x & \log_3 x^3 \\ 3^x & 9^x \end{vmatrix} = 0, \text{ isto é, } 3 \cdot \begin{vmatrix} \log_3 x & 3\log_3 x \\ 3^x & 9^x \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow$$

$\Rightarrow \log_3 x \cdot 9^x - 3\log_3 x \cdot 3^x = 0 \Rightarrow$

$\Rightarrow \log_3 x\,(9^x - 3 \cdot 3^x) = 0$
- $\log_3 x = 0 \Rightarrow 3^0 = x \Rightarrow x = 1$
- ou
- $9^x - 3 \cdot 3^x = 0 \Rightarrow 9^x = 3^{x+1} \Rightarrow 3^{2x} = 3^{x+1} \Rightarrow x = 1$

A única raiz é $x = 1$.

Seja $D = \begin{vmatrix} bc & a & a^2 \\ ac & b & b^2 \\ ab & c & c^2 \end{vmatrix}$. Vamos multiplicar por *a* os elementos da 1ª linha:

$a \cdot D = \begin{vmatrix} abc & a^2 & a^3 \\ ac & b & b^2 \\ ab & c & c^2 \end{vmatrix}$; multipliquemos por *b* os elementos da 2ª linha:

$a \cdot b \cdot D = \begin{vmatrix} abc & a^2 & a^3 \\ abc & b^2 & b^3 \\ ab & c & c^2 \end{vmatrix}$ e multipliquemos por *c* os elementos da 3ª linha:

$a \cdot b \cdot c \cdot D = \begin{vmatrix} abc & a^2 & a^3 \\ abc & b^2 & b^3 \\ abc & c^2 & c^3 \end{vmatrix}$

Finalmente, vamos dividir por abc (multiplicar por $\frac{1}{abc}$) os elementos da 1ª coluna desta última matriz:

$$abc \cdot \frac{1}{abc} \cdot D = \begin{vmatrix} 1 & a^2 & a^3 \\ 1 & b^2 & b^3 \\ 1 & c^2 & c^3 \end{vmatrix} \Rightarrow D = \begin{vmatrix} 1 & a^2 & a^3 \\ 1 & b^2 & b^3 \\ 1 & c^2 & c^3 \end{vmatrix}$$

8 SISTEMAS LINEARES

Exercícios

8 De $3x + 4y = 61$ vem $x = \frac{61 - 4y}{3}$, em que *x* e *y* são naturais, pois representam o número de peixes "capturados" por cada irmão.
Para que *x* resulte natural, o numerador $61 - 4y$ deve ser múltiplo de 3 e, além disso, positivo, isto é, $61 - 4y > 0 \rightarrow y < \frac{61}{4} = 15{,}25$, $y \in \mathbb{N}$.

Verificando:
$y = 15 \rightarrow x \notin \mathbb{N}$; $y = 14 \rightarrow x \notin \mathbb{N}$; $y = 13 \rightarrow x = 3$ (16 peixes ao todo). Note, agora, que as possibilidades seguintes são obtidas para:
$y = 10 \rightarrow x = 7 \rightarrow$ 17 peixes ao todo;
$y = 7 \rightarrow x = 11 \rightarrow$ 18 peixes ao todo;
$y = 4 \rightarrow x = 15 \rightarrow$ 19 peixes ao todo;
$y = 1 \rightarrow x = 19 \rightarrow$ 20 peixes ao todo.

22 a) Há duas variáveis livres: *y* e *z*. Fazendo $z = \alpha$ e $y = \beta$, encontramos: $x + \beta - \alpha = 0 \Rightarrow x = \alpha - \beta$, e a solução geral é $(\alpha - \beta, \beta, \alpha)$; $\alpha \in \mathbb{R}$ e $\beta \in \mathbb{R}$.

O sistema proposto equivale a: $\begin{cases} x - y + z = 2 \\ 2x + y - 3z = 0 \end{cases} \sim \begin{cases} x - y + z = 2 \\ 3y - 5z = -4 \end{cases}$ (*)

A variável livre é z. Fazendo $z = \alpha$, $\alpha \in \mathbb{R}$, segue, da 2ª equação de (*):

$3y - 5\alpha = -4 \Rightarrow 3y = 5\alpha - 4 \Rightarrow y = \dfrac{5\alpha - 4}{3}$. Substituindo agora na 1ª equação de (*), vem:

$x - \dfrac{5\alpha - 4}{3} + \alpha = 2 \Rightarrow x = \dfrac{2 + 2\alpha}{3}$

28 Vamos denotar por a o número de mesas ocupadas por 2 pessoas; e por b o número de mesas ocupadas por 4 pessoas.

Do enunciado, segue o sistema $\begin{cases} a + b = 12 \\ 2a + 4b = 38 \end{cases}$, que, resolvido, fornece $a = 5$ e $b = 7$

29 Vamos indicar o número de rapazes por r e o número de moças por m.

1º) Após a saída de 8 rapazes, havia na festa $r - 8$ rapazes e m moças.

Daí: $\dfrac{m}{r - 8} = \dfrac{3}{2} \Rightarrow 2m = 3r - 24 \Rightarrow 3r - 2m = 24$ (I)

2º) Depois disso, 10 moças saíram da festa, e então havia $r - 8$ rapazes e $m - 10$ moças; e assim:

$\dfrac{m - 10}{r - 8} = \dfrac{5}{4} \Rightarrow 5r - 4m = 0$ (II)

Resolvendo o sistema formado por (I) e (II), encontramos $r = 48$ e $m = 60$.

31 c) $\begin{cases} 4x - y + 7z = 9 \\ 17y - 39z = -45 \leftarrow (-5 \times 1^a \text{ eq.}) + (4 \times 2^a \text{ eq.}) \\ -51y + 117z = 139 \leftarrow (7 \times 1^a \text{ eq.}) + (4 \times 3^a \text{ eq.}) \end{cases}$

Se dividirmos os coeficientes da última equação do sistema acima por -3 obteremos:

$17y - 39z = \dfrac{-139}{3}$, que é incompatível com a segunda equação. Logo, o sistema é impossível.

32 Os preços do pedágio para carros, ônibus e caminhões serão denotados por x, y, z, respectivamente. Do enunciado, segue o sistema $\begin{cases} 2x + 3y = 26 \\ 2y + 5z = 47 \\ 6x + 4z = 52 \end{cases}$. Daí, $z = 7$, $y = 6$ e $x = 4$.

34 Sejam os preços unitários do televisor, videocassete e aparelho de som, respectivamente, T, V e S.

Temos: $\begin{cases} T + V = 1200 \\ V + S = 1100 \\ T + S = 1500 \end{cases}$. Neste problema, como alternativa ao escalonamento, podemos somar membro a membro as três equações, obtendo: $2T + 2V + 2S = 1\,200 + 1\,100 + 1\,500 \Rightarrow$

$\Rightarrow 2(T + V + S) = 3\,800 \Rightarrow T + V + S = 1\,900$ reais.

36 Sejam D, L e M, respectivamente, os valores, em francos franceses, de um dólar, uma libra e marco.

Temos: $\begin{cases} 50\,D + 20\,L + 10\,M = 502{,}90 \\ 40\,D + 30\,L + 10\,M = 533{,}40 \\ 30\,D + 20\,L + 30\,M = 450{,}70 \end{cases}$

Convém dividir todos os coeficientes, em cada equação, por 10:

$\begin{cases} 5\,D + 2\,L + M = 50{,}29 \\ 4\,D + 3\,L + M = 53{,}34 \\ 3\,D + 2\,L + 3\,M = 45{,}07 \end{cases} \sim \begin{cases} 5\,D + 2\,L + M = 50{,}29 \\ 7\,L + M = 65{,}54 \leftarrow (-4 \times 1^a \text{ eq.}) + (5 \times 2^a \text{ eq.}) \\ 4\,L + 12M = 74{,}48 \leftarrow (-3 \times 1^a \text{ eq.}) + (5 \times 3^a \text{ eq.}) \end{cases} \sim$

$\sim \begin{cases} 5D + 2\,L + M = 50{,}29 \\ 7\,L + M = 65{,}54 \\ 80\,M = 259{,}20 \leftarrow (-4 \times 2^a \text{ eq.}) + (7 \times 3^a \text{ eq.}) \end{cases}$

Daí, $M = 3{,}24$; $L = 8{,}9$ e $D = 5{,}85$.

37 Seja n o número de soldadinhos que o menino possui.

- Quando são formadas x fileirinhas de x soldadinhos, tem-se, de acordo com o enunciado, $x \cdot x + 12 = n \Rightarrow n = x^2 + 12$ (1).
- Na outra hipótese, haveria $x + 1$ fileiras, cada uma com $x + 2$ soldadinhos, e teríamos: $(x + 1) \cdot (x + 2) = n + 11$ (2).

De (1) e (2) segue o sistema (não linear) $\begin{cases} n = x^2 + 12 \\ x^2 + 3x + 2 = n + 11 \end{cases}$.

Substituindo a 1ª equação na 2ª, vem:

$\cancel{x^2} + 3x + 2 = \underbrace{\cancel{x^2} + 12}_{n} + 11 \Rightarrow x = 7$, e assim $n = 61$.

44 a) $\begin{vmatrix} \lambda & 1 & 1 \\ 1 & \lambda & 1 \\ 1 & 1 & \lambda \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow \lambda^3 - 3\lambda + 2 = 0 \Rightarrow \lambda^3 - \lambda - 2\lambda + 2 = 0 \Rightarrow \lambda(\lambda^2 - 1) - 2(\lambda - 1) = 0 \Rightarrow$

$\Rightarrow \lambda(\lambda - 1)(\lambda + 1) - 2(\lambda - 1) = 0 \Rightarrow (\lambda - 1) \cdot (\lambda^2 + \lambda - 2) = 0$ ⟨ $\lambda = 1$ ou $\lambda^2 + \lambda - 2 = 0 \Rightarrow$ $\Rightarrow \lambda = 1$ ou $\lambda = -2$

Assim, as raízes pedidas são 1 e -2.

b) Quando $\lambda = -2$; obtemos o sistema homogêneo

$\begin{cases} -2x + y + z = 0 \\ x - 2y + z = 0 \\ x + y - 2z = 0 \end{cases} \sim \begin{cases} x - 2y + z = 0 \\ -2x + y + z = 0 \\ x + y - 2z = 0 \end{cases} \sim \begin{cases} x - 2y + z = 0 \\ -3y + 3z = 0 \\ 3y - 3z = 0 \end{cases} \sim \begin{cases} x - 2y + z = 0 \\ y - z = 0 \end{cases}$.

A variável livre é z. Fazendo $z = \alpha$, obtemos $y = \alpha$ e $x = \alpha$; $S = \{(\alpha, \alpha, \alpha), \alpha \in \mathbb{R}\}$.

47 $A \cdot X = \lambda \cdot X$ equivale a $\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 3 \end{bmatrix}_{2 \times 2} \cdot \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}_{2 \times 1} = \lambda \cdot \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} \Leftrightarrow \begin{bmatrix} x \\ 2x + 3y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \lambda x \\ \lambda y \end{bmatrix} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \lambda x \\ 2x + 3y = \lambda y \end{cases} \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \begin{cases} x(1 - \lambda) = 0 \\ 2x + (3 - \lambda)y = 0 \end{cases}$ (*)

O sistema homogêneo obtido deverá ser *possível e indeterminado*.

Da 1ª equação, temos: $x = 0$ ou $\lambda = 1$.

1º caso: $x = 0$; na 2ª equação teríamos $2 \cdot 0 + (3 - \lambda)y = 0 \Rightarrow (3 - \lambda) \cdot y = 0$ e, para que haja soluções diferentes do trivial, é preciso que $\lambda = 3$. Nesse caso, a solução é dada por

$$X = \begin{bmatrix} 0 \\ y \end{bmatrix};\ y \in \mathbb{R}.$$

2º caso: $\lambda = 1$; substituindo na 2ª equação, encontramos:

$\{2 \cdot x + (3 - 1)y = 0 \sim \{2x + 2y = 0 \sim \{x + y = 0$, e daí a variável livre é y. Fazendo $y = \alpha$,

segue que $x = -\alpha$, e a solução é $X = \begin{bmatrix} -\alpha \\ \alpha \end{bmatrix};\ \alpha \in \mathbb{R}$.

Assim, os autovalores de A são $\lambda = 3$ ou $\lambda = 1$.

Observação: a solução fica simplificada com o uso de determinantes. De fato, para que (*) resulte SPI devemos ter $D = 0$, isto é, $\begin{vmatrix} 1-\lambda & 0 \\ 2 & 3-\lambda \end{vmatrix} = 0$, que dá $\lambda = 1$ ou $\lambda = 3$.

Retome esse exercício quando estiver trabalhando com discussão!

52

a) $D = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & -1 \\ -1 & 0 & 1 & -2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -2 & -3 & 1 \\ 1 & -1 & -1 \\ 1 & 2 & -2 \end{vmatrix} = -8 \neq 0$; logo, temos SPD.

b) $\begin{cases} x + y + z = 4 \\ 2x - z + w = -4 \\ +y - z - w = -2 \\ -x + z - 2w = 2 \end{cases} \sim \begin{cases} x + y + z = 4 \\ -2y - 3z + w = -12 \\ y - z - w = -2 \\ y + 2z - 2w = 6 \end{cases} \sim \begin{cases} x + y + z = 4 \\ y - z - w = -2 \\ -2y - 3z + w = -12 \\ y + 2z - 2w = 6 \end{cases} \sim$

$\sim \begin{cases} x + y + z = 4 \\ y - z - w = -2 \\ -5z - w = -16 \\ 3z - w = 8 \end{cases} \sim \begin{cases} x + y + z = 4 \\ y - z - w = -2 \\ -5z - w = -16 \\ -8w = -8 \end{cases} \Rightarrow w = 1,\ z = 3,\ y = 2$ e $x = -1$

Observação: poderíamos resolver o sistema dado por Cramer.

53

$D = \begin{vmatrix} 28 & 42 & 48 \\ 23 & 50 & 45 \\ 30 & 45 & 60 \end{vmatrix} = 3\,720$

$D_x = \begin{vmatrix} 102 & 42 & 48 \\ 95 & 50 & 45 \\ 117 & 45 & 60 \end{vmatrix} = 5\,580;\ x = \dfrac{5\,580}{3\,720} \Rightarrow x = 1{,}5$ (O preço unitário do churrasco é R$ 1,50.)

$D_y = \begin{vmatrix} 28 & 102 & 48 \\ 23 & 95 & 45 \\ 30 & 117 & 60 \end{vmatrix} = 1\,488;\ y = \dfrac{1\,488}{3\,720} \Rightarrow y = 0{,}40$ (O preço unitário do quentão é R$ 0,40.)

Por substituição de x e y, concluímos que o preço unitário do pastel (z) é R$ 0,90.

55 Com a sugestão dada, obtemos o sistema $\begin{cases} 2x' - y' - z' = -1 \\ x' + y' + z' = 0 \\ 3x' - 2y' + z' = 4 \end{cases}$. Resolvendo-o por Cramer (ou escalonando), obtemos $x' = -\dfrac{1}{3}$, $y' = -\dfrac{14}{9}$ e $z' = \dfrac{17}{9}$, e, então, $x = -3$, $y = -\dfrac{9}{14}$ e $z = \dfrac{9}{17}$.

58 Sejam x, y e z, respectivamente, os pesos da 1ª, 2ª e 3ª provas.

Rafael $\rightarrow 4x + 5y + 3z = 15$; Joana $\rightarrow 3x + 4y + 4z = 15$; e

Leandro $\rightarrow 5x + 5y + 2z = 14$. Resolvendo o sistema formado pelas equações obtidas, encontramos $x = 1$, $y = 1$ e $z = 2$.

Logo, o total de pontos de Fernando é: $4 \cdot 1 + 6 \cdot 1 + 3 \cdot 2 = 16$.

60 Sejam a, b e c os gramas correspondentes aos alimentos A, B e C, que perfazem as quantidades que a mistura deve conter. Temos:

$\begin{cases} 40a + 80b + 120c = 3\,600 \\ 100a + 50b + 50c = 2\,500 \\ 120a + 30b + 60c = 2\,700 \end{cases}$. Dividindo os coeficientes das equações por 40, 50 e 30, respectivamente, vem: $\begin{cases} a + 2b + 3c = 90 \\ 2a + b + c = 50 \\ 4a + b + 2c = 90 \end{cases}$; $D = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 1 \\ 4 & 1 & 2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -3 & -5 \\ -7 & -10 \end{vmatrix} = -5$.

$D_C = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 90 \\ 2 & 1 & 50 \\ 4 & 1 & 90 \end{vmatrix} = -100$, e assim $C = \dfrac{D_C}{D} = \dfrac{-100}{-5} = 20$ g.

62 1ª eq.: $3^x \cdot 3^y \cdot 3^z = 1 \Leftrightarrow 3^{x+y+z} = 3^0 \Leftrightarrow x + y + z = 0$

2ª eq.: $\dfrac{2^x}{2^y \cdot 2^z} = 2^2 \Leftrightarrow \dfrac{2^x}{2^{y+z}} = 2^2 \Leftrightarrow 2^{x-y-z} = 2^2 \Leftrightarrow x - y - z = 2$

3ª eq.: $4^{-x} \cdot 16^y \cdot 4^z = 4^{-1} \Leftrightarrow 4^{-x} \cdot 4^{2y} \cdot 4^z = 4^{-1} \Leftrightarrow -x + 2y + z = -1$

Assim, obtemos o sistema:

$\begin{cases} x + y + z = 0 \\ x - y - z = 2 \\ -x + 2y + z = -1 \end{cases} \sim \begin{cases} x + y + z = 0 \\ -2y - 2z = 2 \\ 3y + 2z = -1 \end{cases} \sim \begin{cases} x + y + z = 0 \\ y + z = -1 \\ 3y + 2z = -1 \end{cases} \sim \begin{cases} x + y + z = 0 \\ y + z = -1 \\ -z = 2 \end{cases}$.

Então, $z = -2$, $y = 1$ e $x = 1$.

70 Uma condição necessária mas *não* suficiente para que tenhamos SPI é $D = 0$, isto é,

$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 3 & 6 & -4 \\ 2 & b & -6 \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow 10b - 40 = 0 \Rightarrow \boxed{b = 4}$.

Quando $b = 4$, o sistema fica: $\begin{cases} x + 2y + 2z = a \\ 3x + 6y - 4z = 4 \\ 2x + 4y - 6z = 1 \end{cases} \sim \begin{cases} x + 2y + 2z = a \\ -10z = -3a + 4 \\ -10z = -2a + 1 \end{cases}$

Se as duas últimas equações *não* forem incompatíveis, teremos um sistema escalonado com 2 equações e 3 variáveis (portanto SPI).

Assim, basta que tenhamos: $-3a + 4 = -2a + 1 \Rightarrow \boxed{a = 3}$.

Observe que, se $a = 3$, chegamos ao sistema $\begin{cases} x + 2y + 2z = 3 \\ -10z = -5 \end{cases}$, que é indeterminado.

76 a) $m = 1$ e $n = 2 \Rightarrow \begin{cases} x + 2y - z = 7 \\ y + 3z = 2 \\ 3y - z = 1 \end{cases} \sim \begin{cases} x + 2y - z = 7 \\ y + 3z = 2 \\ -10z = -5 \leftarrow (-3 \times 2^{\underline{a}} \text{ eq.}) + 3^{\underline{a}} \text{ eq.} \end{cases}$

Daí, $z = \dfrac{1}{2}$, $y = \dfrac{1}{2}$ e $x = \dfrac{13}{2}$.

b) Como condição necessária, porém não suficiente, temos que $D = 0$, isto é, $\begin{vmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 0 & 1 & 3 \\ 0 & 3 & -m \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow$
$\Rightarrow -m - 9 = 0 \Rightarrow m = -9$, que conduz ao sistema

$$\begin{cases} x + 2y - z = 7 \\ y + 3z = n \\ 3y + 9z = 1 \end{cases} \xrightarrow[(\div 3)]{\sim} \begin{cases} x + 2y - z = 7 \\ y + 3z = n \\ y + 3z = \dfrac{1}{3} \end{cases} \Longrightarrow n = \dfrac{1}{3}, \text{ para garantir SPI.}$$

Assim, devemos ter $m = -9$ e $n = \dfrac{1}{3}$.

77 $D = \begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 4 & a \end{vmatrix} = 2a + 4$

Se $2a + 4 \neq 0$, isto é, se $a \neq -2$, temos SPD.

Se $a = -2$, o sistema fica $\begin{cases} 2x - y = 3 \\ 4x - 2y = b \end{cases} \sim \begin{cases} 2x - y = 3 \\ 0 = -6 + b \end{cases}$.

Assim, para $b = 6$, temos SPI, e para $b \neq 6$, temos SI.

78 Análogo ao 77.

79 Análogo ao 70.

80 Temos $D = \begin{vmatrix} -1 & 1 & -1 \\ 4 & a & 1 \\ 1 & -1 & 3 \end{vmatrix} = -2a - 8$

- Quando $D \neq 0$, isto é, $-2a - 8 \neq 0 \Leftrightarrow$ $a \neq -4$, temos SPD.
- Se $a = -4$, podemos ter SPI ou SI. Vejamos:

$$\overset{a = -4}{\Rightarrow} \begin{cases} -x + y - z = 4 \\ 4x - 4y + z = -19 \\ x - y + 3z = b \end{cases} \sim \begin{cases} -x + y - z = 4 \\ -3z = -3 \leftarrow (4 \times 1^{\underline{a}} \text{ eq.}) + (2^{\underline{a}} \text{ eq.}) \\ 2z = 4 + b \leftarrow (1^{\underline{a}} \text{ eq.}) + (2^{\underline{a}} \text{ eq.}) \end{cases}$$

Da segunda equação segue que $z = 1$.

- Para que tenhamos SPI, esse valor de z deve satisfazer a última equação, isto é, $2 \cdot 1 = 4 + b \Rightarrow$ $\Rightarrow b = -2$.
- Caso $b \neq -2$, as duas últimas equações seriam incompatíveis, e daí não haveria solução.
Assim, se $a = -4$ e $b = -2$, temos SPI, e se $a = -4$ e $b \neq -2$, temos SI.

81 a) Notemos inicialmente que se $m = 0$ o sistema é homogêneo e, portanto, tem solução.

Quando $D \neq 0$, o sistema é SPD: $\begin{vmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 1 & -m & -3 \\ 1 & 3 & m \end{vmatrix} \neq 0 \Rightarrow -m^2 - 3m \neq 0 \Rightarrow m \neq 0$ e $m \neq -3$.

Já vimos, porém, que se $m = 0$ o sistema admite solução. Assim, a única condição é que $m \neq -3$.

b) Se $m = 0$, obtemos o sistema

$$\begin{cases} x + 2y - z = 0 \\ x - 3z = 0 \\ x + 3y = 0 \end{cases} \sim \begin{cases} x + 2y - z = 0 \\ -2y - 2z = 0 \leftarrow (-1 \times 1^{\underline{a}} \text{ eq.}) + (2^{\underline{a}} \text{ eq.}) \\ y + z = 0 \leftarrow (-1 \times 1^{\underline{a}} \text{ eq.}) + (3^{\underline{a}} \text{ eq.}) \end{cases} \sim \begin{cases} x + 2y - z = 0 \\ y + z = 0 \end{cases}$$

Fazendo $z = \alpha$, segue que $y = -\alpha$ e $x = 3\alpha$, sendo $\alpha \in \mathbb{R}$.

Testes de vestibulares

6 Resolvendo as duas primeiras equações encontramos $x = 2$ e $y = 4$. Como $(2, 4)$ é a única solução, este par deve satisfazer a 3ª equação, isto é, $(m - 1) \cdot 2 + 2m \cdot 4 = 105 \Rightarrow 10m = 107 \Rightarrow m = 10{,}7$.
Resposta: *d*.

8 Sejam *a*, *b* e *c* os preços do quilo das saladas *A*, *B* e *C*, respectivamente. Temos:

$$\begin{matrix} \text{cliente } X \rightarrow \\ \text{cliente } Y \rightarrow \\ \text{cliente } Z \rightarrow \end{matrix} \begin{cases} 0{,}2a + 0{,}3b + 0{,}1c = 5{,}50 \\ 0{,}15a + 0{,}25b + 0{,}2c = 5{,}85 \\ 0{,}12a + 0{,}2b + 0{,}25c = 5{,}76 \end{cases}$$

Vamos multiplicar por 10 os coeficientes de cada uma das equações.

$$\begin{cases} 2a + 3b + c = 55 \\ 1{,}5a + 2{,}5b + 2c = 58{,}5 \\ 1{,}2a + 2b + 2{,}5c = 57{,}6 \end{cases} \sim \begin{cases} 2a + 3b + c = 55 \\ 0{,}5b + 2{,}5c = 34{,}50 \leftarrow (-1{,}5 \times 1^{\underline{a}} \text{ eq.}) + (2 \times 2^{\underline{a}} \text{ eq.}) \\ 0{,}4b + 3{,}8c = 49{,}20 \leftarrow (-1{,}2 \times 1^{\underline{a}} \text{ eq.}) \Downarrow (2 \times 3^{\underline{a}} \text{ eq.}) \end{cases}$$

$$\begin{cases} 2a + 3b + c = 55 \\ 0{,}5b + 2{,}5c = 34{,}50 \\ 0{,}9c = 10{,}80 \leftarrow (-0{,}4 \times 2^{\underline{a}} \text{ eq.}) + (0{,}5 \times 3^{\underline{a}} \text{ eq.}) \end{cases}$$

Da última equação segue que $c = \dfrac{10{,}80}{0{,}9} = 12$; na 2ª equação, temos: $0{,}5b + 30 = 34{,}50 \Rightarrow$ $\Rightarrow b = 9$ e na 1ª obtemos $a = 8$.
Resposta: *c*.

9 Sejam $\begin{cases} x\text{: número de brinquedos} \\ y\text{: números de crianças} \end{cases}$.

- Na 1ª situação temos: $3y + 70 = x$
- Na 2ª situação temos: $5y = x + 40$

$\Rightarrow \begin{cases} x - 3y = 70 \\ x - 5y = -40 \end{cases}$

Resolvendo-o, obtemos $y = 55$ e $x = 235$.
Resposta: *b*.

12 $\begin{cases} -x + y + z = 2 \\ x + 2y - 2z = 0 \\ x - 4y + 10z = 6 \\ 2x + 7y - 5z = 2 \end{cases} \sim \begin{cases} -x + y + z = 2 \\ 3y - z = 2 \\ -3y + 11z = 8 \\ 9y - 3z = 6 \end{cases} \sim \begin{cases} -x + y + z = 2 \\ 3y - z = 2 \\ 10z = 10 \\ 0 = 0 \end{cases} \Rightarrow z = 1, y = 1 \text{ e } x = 0$

e o sistema é determinado.
Resposta: *c*.

13 A pergunta do enunciado é equivalente a: "Para que valores de *k* o sistema $\begin{cases}(k-1)x - 2y = 0\\ -x + ky = 0\end{cases}$

admite uma única solução?". Devemos ter SPD, isto é, $D \neq 0 \Rightarrow \begin{vmatrix} k-1 & -2 \\ -1 & k \end{vmatrix} \neq 0 \rightarrow k \neq -1$ e $k \neq 2$.

Resposta: *e*.

15 $D = \begin{vmatrix} a & 2 \\ b & -1 \end{vmatrix} = -a - 2b$

- $D \neq 0 \rightarrow$ SPD, isto é, $a \neq -2b$, temos SPD.
- $D = 0 \rightarrow$ SPI ou SI, isto é, $a = -2b$, podemos ter SPI ou SI.

Quando $a = -2b$, obtemos o sistema $\begin{cases} bx - y = 1 \\ -2bx + 2y = 3 \end{cases} \sim \begin{cases} bx - y = 1 \\ 0 = 5 \end{cases}$, que é impossível.

Resposta: *e*.

16

	Tarde	Noite
Crianças	x	y
Adultos	z	w

Temos:

1º) $x = 2y$

2º) $\underbrace{5x + 10z}_{\text{renda da tarde}} = \underbrace{5y + 10w}_{\text{renda da noite}} - 300$

3º) $x + z = y + w$

Devemos encontrar o valor de *y*.

- Substituindo (1) em (2) vem: $10y + 10z = 5y + 10w - 300 \Leftrightarrow 5y = 10w - 10z - 300 \Leftrightarrow y = 2w - 2z - 60$ (4).
- Substituindo (1) em (3) vem: $2y + z = y + w \Rightarrow y = w - z$ (5).
- Finalmente, substituímos (5) em (4):

$$y = \underbrace{2w - 2z}_{\Downarrow} - 60$$

$$y = 2y - 60 \Rightarrow \boxed{y = 60}.$$

Resposta: *c*.

17 Sejam *x* o número de filhos e *y* o número de filhas.
Certo filho tem $x - 1$ irmãos e *y* irmãs: $x - 1 = y$.
Certa filha tem *x* irmãos e $y - 1$ irmãs: $x = 2(y - 1)$.
Do sistema, conclui-se que $x = 4$ e $y = 3$; $x + y = 7$.
Resposta: *e*.

19 a) $x = 0$ e $y = 3 \Rightarrow \begin{cases}(k-1)\cdot 3 = 1 \\ (k-1)\cdot 3 = 2\end{cases}$ Não existe *k* que sirva nas duas equações.

b) $k = -2 \Rightarrow \begin{cases} -8x - 3y = 1 \\ -8x - 3y = 2 \end{cases}$ SI

c) $k = 2 \Rightarrow \begin{cases} 8x + y = 1 \\ 8x + y = 2 \end{cases}$ SI

d) Devemos ter $D \neq 0 \Rightarrow \begin{vmatrix} 4k & k-1 \\ k^3 & k-1 \end{vmatrix} \neq 0 \Rightarrow 4k^2 - 4k - k^4 + k^3 \neq 0 \Rightarrow 4k(k-1) - k^3(k-1) \neq 0 \Rightarrow$

$\Rightarrow (k-1)\cdot(4k - k^3) \neq 0 \Rightarrow k \neq 1,\ k \neq 0,\ k \neq -2$ e $k \neq 2$ (4 valores)

Resposta: *b*.

20 Uma soma de quadrados, em $\mathbb{R}$, vale zero quando todas as suas parcelas são nulas, isto é, $\begin{cases} x + ky - 3 = 0 \\ -x + 4y + 2p = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x + ky = 3 \\ -x + 4y = -2p \end{cases}$. Para que tenhamos SPI, devemos ter $D = 0$ (condição necessária, mas não suficiente): $\begin{vmatrix} 1 & k \\ -1 & 4 \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow k = -4$.

Quando $k = -4$, temos: $\begin{cases} x - 4y = 3 \\ -x + 4y = -2p \end{cases} \sim \begin{cases} x - 4y = 3 \\ 0 = 3 - 2p \end{cases}$ (*)

Para que tenhamos SPI, a 2ª equação de (*) deve se reduzir a $0 = 0$. Então, $3 - 2p = 0 \rightarrow p = \frac{3}{2}$

e, então, $k \cdot p = -4 \cdot \frac{3}{2} = -6$.

Resposta: *a*.

25 Os preços unitários do hambúrguer, do refrigerante e da porção de fritas serão representados, respectivamente, por *x*, *y* e *z*.

$$(*) \begin{cases} 4x + 2y + 2z = 18 \\ 6x + 8y + 3z = 30 \\ 2x + 3y + z = ? \end{cases} \xrightarrow{(\div 2)} \begin{cases} 2x + y + z = 9 \\ 6x + 8y + 3z = 30 \\ 2x + 3y + z = ? \end{cases} \sim \begin{cases} 2x + y + z = 9 \\ 5y = 3 \leftarrow (-3 \times 1^a\ eq.) + (2^a\ eq.) \end{cases}$$

Assim, o preço unitário do refrigerante é $y = \frac{3}{5} = 0{,}60$ e, então, $2x + 0{,}60 + z = 9 \Rightarrow$
$\Rightarrow \boxed{2x + z = 8{,}40}$ (**)

Por fim, na última equação de (*), obtemos o valor da conta da 3ª mesa:

$$\underbrace{2x + 3 \cdot 0{,}6 + z}_{} \overset{\text{por (**)}}{=} 8{,}40 + 1{,}80 = 10{,}20.$$

Resposta: *a*.

27 • Se $(1, 1, -1)$ é uma solução, obtemos, por substituição:

$$\begin{cases} a + 1 - 1 = d \\ 1 + 1 + c(-1) = -1 \\ 1 + b + 1 = 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{matrix} a = d \\ c = 3 \\ b = -1 \end{matrix}$$

- Inicialmente impomos $D = 0$ (pois o sistema é SPI):

$$\begin{vmatrix} a & 1 & 1 \\ 1 & 1 & c \\ 1 & b & -1 \end{vmatrix} = 0 \Leftrightarrow \begin{vmatrix} a & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 3 \\ 1 & -1 & -1 \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow 2a + 2 = 0 \rightarrow a = -1$$

É preciso certificar-se de que, se $a = -1$, temos de fato SPI:

$$\begin{cases} -x + y + z = -1 \\ x + y + 3z = -1 \\ x - y - z = 1 \end{cases} \sim \begin{cases} -x + y + z = -1 \\ 2y + 4z = -2 \rightarrow \text{SPI} \\ 0 = 0 \end{cases}$$

Logo, $a + b + c + d = -1 + (-1) + 3 + (-1) = 0$.

Resposta: *c*.

28 Análogo ao teste 20.

Loja *A*		Loja *B*	
x canetas *y* lapiseiras	$\longrightarrow$ $3x + 5y = 50$	*z* cadernos *w* corretores	$\longrightarrow$ $4z + 2w = 44$

- Por hipótese, $x = z \cdot (1)$
- O número de lapiseiras é dado por:

$y = \dfrac{50 - 3x}{5}$; $y \in \mathbb{N}$. Como $x \in \mathbb{N}$, por verificação, obtemos:

1º) $x = 0$, $y = 10$ (mas $x = 0$ não ocorre!)

2º) $x = 1 \longrightarrow y \notin \mathbb{N}$; $x = 2 \longrightarrow y \notin \mathbb{N}$; $x = 3 \longrightarrow y \notin \mathbb{N}$; $x = 4 \longrightarrow y \notin \mathbb{N}$; $x = 5 \longrightarrow$

$\longrightarrow y = \dfrac{50 - 15}{5} = \dfrac{35}{5} = 7$ (maior valor possível)

(Observe que aumentando o valor de *x*, o de *y* irá diminuir!)

Logo, $y = 7$, $x = 5$, $z = 5$, por (1), e finalmente $4 \cdot 5 + 2w = 44 \Rightarrow w = 12$.

Resposta: *b*.

30

1º sistema: $\begin{cases} x + y - z = 0 \\ x - 3y + z = 1 \\ -2y + z = a \end{cases} \sim \begin{cases} x + y - z = 0 \\ -4y + 2z = 1 \\ -2y + z = a \end{cases} \sim \begin{cases} x + y - z = 0 \\ -2y + z = \frac{1}{2} \\ -2y + z = a \end{cases}$

Como se trata de SPI, devemos ter: $\boxed{a = \frac{1}{2}}$.

2º sistema: Como se trata de um sistema homogêneo, é *suficiente* impor $D = 0 \longrightarrow$

$\longrightarrow \begin{vmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 1 & 2 & -1 \\ 2 & -b & 3 \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow \begin{vmatrix} 3 & -1 \\ -b + 2 & 3 \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow 9 - b + 2 = 0 \Rightarrow \boxed{b = 11}$

Assim, $\dfrac{b}{a} = \dfrac{11}{\frac{1}{2}} = 22$.

Resposta: *b*.

Desafios

1

	(I) Início	(II) Pedro deu *y* reais para Maria	(III) João deu *z* reais para Maria
J	50	50	50 − z
P	50	50 − y	50 − y
M	x	x + y	x + y + z

- Do enunciado temos que: $\underbrace{50 - y}_{\text{Pedro}} = \underbrace{50 - z}_{\text{João}} - 4 \Rightarrow \boxed{y - z = 4}$.
- De (II), sabemos que:

$50 - y = x + y \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \boxed{x + 2y = 50}$

- De (III), sabemos que:

$50 - z = x + y + z \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \boxed{x + y + 2z = 50}$

Segue o sistema:

$\begin{cases} x + y + 2z = 50 \\ x + 2y = 50 \\ y - z = 4 \end{cases} \sim \begin{cases} x + y + 2z = 50 \\ y - 2z = 0 \\ y - z = 4 \end{cases} \sim \begin{cases} x + y + 2z = 50 \\ y - 2z = 0 \\ z = 4 \end{cases}$

Assim, $y = 8$ e $x = 50 - y - 2z = 50 - 8 - 8 = 34$.

Logo, ao chegar ao encontro, Maria possuía 34 reais.

2 a) $A \cdot X = B \Rightarrow \underbrace{\begin{bmatrix} \cos a & \text{sen } a \\ -\text{sen } a & \cos a \end{bmatrix}}_{2\times 2} \cdot \underbrace{\begin{bmatrix} w \\ y \end{bmatrix}}_{2\times 1} = \begin{bmatrix} \cos 2a \\ \text{sen } 2a \end{bmatrix} \Leftrightarrow \begin{bmatrix} w\cos a + y\,\text{sen } a \\ -w\,\text{sen } a + y\cos a \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos 2a \\ \text{sen } 2a \end{bmatrix} \Rightarrow$

$\Rightarrow \begin{cases} w\cos a + y\,\text{sen } a = \cos 2a \\ -w\,\text{sen } a + y\cos a = \text{sen } 2a \end{cases}$ é um sistema linear nas incógnitas *w* e *y*.

Temos $D = \begin{vmatrix} \cos a & \text{sen } a \\ -\text{sen } a & \cos a \end{vmatrix} = \cos^2 a + \text{sen}^2 a = 1 \neq 0 \longrightarrow$ SPD.

Vamos resolvê-lo por Cramer:

$D_w = \begin{vmatrix} \cos 2a & \text{sen } a \\ \text{sen } 2a & \cos a \end{vmatrix} = \cos 2a \cos a - \text{sen } a\,\text{sen } 2a = \cos(2a + a) = \cos 3a$, e assim

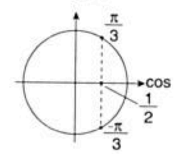
$w = \dfrac{D_w}{D} = \dfrac{\cos 3a}{1} = \cos 3a$.

$D_y = \begin{vmatrix} \cos a & \cos 2a \\ -\text{sen } a & \text{sen } 2a \end{vmatrix} = \cos a\,\text{sen } 2a + \text{sen } a \cos 2a = \text{sen}(2a + a) = \text{sen } 3a$

Assim, $y = \dfrac{D_y}{D} = \dfrac{\text{sen } 3a}{1} = \text{sen } 3a$.

Desse modo, $w = \cos 3a$ e $y = \text{sen } 3a$.

b) $w = \dfrac{1}{2} \Rightarrow \cos 3a = \dfrac{1}{2} \Rightarrow$



$3a = \pm\dfrac{\pi}{3} + k \cdot 2\pi \Rightarrow \boxed{a = \pm\dfrac{\pi}{9} + k \cdot \dfrac{2\pi}{3},\ k \in \mathbb{Z}}$

3 Vamos indicar por *x* a quantidade necessária do alimento I, por *y* a quantidade do alimento II e por *z* a quantidade do alimento III:

$\begin{matrix} \text{Vitamina A} \longrightarrow \\ \text{Vitamina B} \longrightarrow \\ \text{Vitamina C} \longrightarrow \end{matrix} \begin{cases} 2x + 2y + 3z = 11 \\ 2x + y = 3 \\ 8x + 5y + 3z = 20 \end{cases} \sim \begin{cases} 2x + 2y + 3z = 11 \\ -y - 3z = -8 \\ -3y - 9z = -24 \end{cases} \text{coeficientes proporcionais} \sim \begin{cases} 2x + 2y + 3z = 11 \\ y + 3z = 8 \end{cases}$

Trata-se de SPI. A variável livre é *z*. Fazendo $z = \alpha$, segue que $y = 8 - 3\alpha$ e $x = \dfrac{-5 + 3\alpha}{2}$. Por se tratar de quantidades, devemos ter:

$x > 0$; $y > 0$ e $z > 0 \Leftrightarrow \dfrac{-5 + 3\alpha}{2} > 0$; $8 - 3\alpha > 0$ e $\alpha > 0 \Leftrightarrow \alpha > \dfrac{5}{3}$; $\alpha < \dfrac{8}{3}$ e $\alpha > 0$

Da interseção dos três intervalos, segue que $\dfrac{5}{3} < \alpha < \dfrac{8}{3}$. Assim, as quantidades procuradas são:

alimento I $\longrightarrow \dfrac{-5 + 3\alpha}{2}$; alimento II $\longrightarrow 8 - 3\alpha$; alimento III $\longrightarrow \forall\alpha, \dfrac{5}{3} < \alpha < \dfrac{8}{3}$

4 a) Calculemos inicialmente $D = \begin{vmatrix} 2 & -1 & 3 \\ 1 & 2 & -1 \\ 7 & 4 & 3 \end{vmatrix} \begin{matrix} 2 & -1 \\ 1 & 2 \\ 7 & 4 \end{matrix}$

$$\begin{matrix} -42 & +8 & +3 & 12 & 7 & 12 \end{matrix}$$

$D = -42 + 8 + 3 + 12 + 7 + 12 = 0$

Quando $D = 0$, sabemos que o sistema pode ser *impossível* ou *possível e indeterminado*. É necessário, então, escaloná-lo:

$$\begin{cases} 2x - y + 3z = a \\ x + 2y - z = 3 \\ 7x + 4y + 3z = 13 \end{cases} \xrightarrow{\text{troca}} \sim \begin{cases} x + 2y - z = 3 \\ 2x - y + 3z = a \\ 7x + 4y + 3z = 13 \end{cases} \sim \begin{cases} x + 2y - z = 3 \\ -5y + 5z = -6 + a & \leftarrow (-2 \times 1^{a}\text{ eq.}) + (2^{a}\text{ eq.}) \\ -10y + 10z = -8 & \leftarrow (-7 \times 1^{a}\text{ eq.}) + (3^{a}\text{ eq.}) \end{cases}$$

Dividindo os coeficientes da última equação por 2, segue que $\begin{cases} x + 2y - z = 3 \\ -5y + 5z = -6 + a \\ -5y + 5z = -4 \end{cases}$

Para que esse sistema seja possível, devemos ter: $-6 + a = -4 \Rightarrow a = 2$.

b) Se $a = 2$, o sistema se reduz a $\begin{cases} x + 2y - z = 3 \\ -5y + 5z = -4 \end{cases}$. Sua variável livre é z. Se $z = \alpha$, vem:

$$-5y = -5\alpha - 4 \Rightarrow y = \frac{4 + 5\alpha}{5} = \frac{4}{5} + \alpha \quad \text{e} \quad x + 2\left(\frac{4}{5} + \alpha\right) - \alpha = 3 \Rightarrow x = \frac{7}{5} - \alpha$$

$$S = \left\{\left(\frac{7}{5} - \alpha, \frac{4}{5} + \alpha, \alpha\right); \alpha \in \mathbb{R}\right\}; \quad \begin{matrix} \text{se } \alpha = 0 \leftarrow \left(\frac{7}{5}, \frac{4}{5}, 1\right) \\ \text{se } \alpha = 1 \leftarrow \left(\frac{2}{5}, \frac{9}{5}, 1\right) \\ \vdots \end{matrix}$$

5 Substituímos $y = \frac{1}{x}$ na 2^{a} equação:

$$x^2 + \left(\frac{1}{x}\right)^2 = r^2 \Rightarrow x^2 + \frac{1}{x^2} = r^2 \Rightarrow x^4 - r^2x^2 + 1 = 0$$

"Olhando" essa última igualdade como sendo uma equação de 2^{o} grau na variável x^2, vem:

$$x^2 = \frac{-(-r^2) \pm \sqrt{(-r^2)^2 - 4}}{2} = \frac{r^2 \pm \sqrt{r^4 - 4}}{2}$$

Para que possamos calcular x^2, devemos impor que:

$r^4 - 4 > 0$ (Observe que não vale a igualdade, pois se $r^4 - 4 = 0$, $x^2 = \frac{r^2}{2}$ e, nesse caso,

$\Updownarrow$ teríamos apenas 2 raízes.)

$$(r^2)^2 - 2^2 > 0 \Leftrightarrow \underbrace{(r^2 + 2)}_{\text{sempre positivo}} \cdot (r^2 - 2) > 0 \Rightarrow r^2 - 2 > 0 \Rightarrow r < -\sqrt{2} \text{ ou } r > \sqrt{2} \cong 1{,}41$$

O menor valor natural de r é 2.

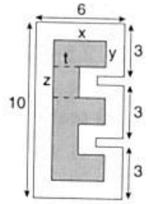
Observação: note, por fim, que quando $r^4 - 4 > 0$, $x^2 = \frac{r^2 + \sqrt{r^4 - 4}}{2}$ ou $x^2 = \frac{r^2 - \sqrt{r^4 - 4}}{2}$.

Como $\sqrt{r^4 - 4} < r^2$, nas duas possibilidades chegamos a dois valores para x, totalizando quatro soluções distintas para x e, conseqüentemente, para y.

9 ÁREAS DE FIGURAS PLANAS

Exercícios

2 $x = 4$ cm; $y = 1$ cm



$A_1 = x \cdot y = (6 - 2) \cdot (3 - 2) \Rightarrow A_1 = 4 \text{ cm}^2$

$A_2 = t \cdot z = (3 - 2) \cdot (2 + 0{,}5) \Rightarrow A_2 = 2{,}5 \text{ cm}^2$

$A = 3 \cdot A_1 + 2 \cdot A_2 \Rightarrow A = 3 \cdot 4 + 2 \cdot 2{,}5 \Rightarrow A = 17 \text{ cm}^2$

7 escala $1 : 1\,000 \Rightarrow 1$ cm no esquema corresponde a $1\,000$ cm $= 10$ m de medida real

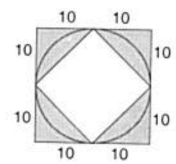
a) $A_I = (20 \text{ m}) \cdot (20 \text{ m}) = 400 \text{ m}^2$

$A_{II} = (50 \text{ m}) \cdot (45 \text{ m}) = 2\,250 \text{ m}^2$

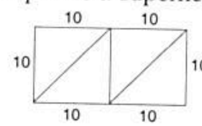
$A_{III} = (65 \text{ m}) \cdot (80 \text{ m}) - (A_I + A_{II}) = 5\,200 \text{ m}^2 - 2\,650 \text{ m}^2 = 2\,550 \text{ m}^2$

b) $\frac{A_I + A_{II}}{A_I + A_{II} + A_{III}} = \frac{2\,650}{5\,200} \cong 51\%$

11

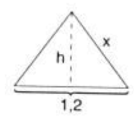


Foram cortados 4 triângulos retângulos isósceles congruentes.
A reunião das superfícies desses triângulos equivale à superfície de um retângulo de base 20 cm e altura 10 cm.



Assim, a área da placa que foi recortada é $A = 20 \cdot 10 \Rightarrow A = 200 \text{ cm}^3$.

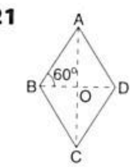
19 $\left.\begin{matrix} \ell\text{: medida do lado do quadrado} \\ \text{A: área da mesa} = 1{,}44 \text{ m}^2 \end{matrix}\right\} \Rightarrow \ell^2 = 1{,}44 \Rightarrow \ell = 1{,}2 \text{ m}$



$$\left.\begin{matrix} A_1\text{: área de cada triângulo} \Rightarrow A_1 = \frac{1}{2} \cdot 1{,}2 \cdot h = 0{,}6h \\ A_1 = \frac{1}{4} A = \frac{1}{4} \cdot 1{,}44 = 0{,}36 \end{matrix}\right\} \Rightarrow \begin{matrix} 0{,}6h = 0{,}36 \Rightarrow \\ \Rightarrow h = 0{,}6 \text{ m} \end{matrix}$$

Pitágoras: $x^2 = h^2 + (1{,}2)^2 \Rightarrow x^2 = (0{,}6)^2 + (1{,}2)^2 \Rightarrow x = 0{,}6\sqrt{2} \Rightarrow x = \frac{3\sqrt{2}}{5}$ m

21



$$\left.\begin{matrix} D = 1 \text{ cm} \Rightarrow AO = \frac{1}{2} \text{ cm} \\ \text{tg } 60° = \frac{AO}{BO} \Rightarrow \sqrt{3} = \frac{\frac{1}{2}}{BO} \Rightarrow BO = \frac{\sqrt{3}}{6} \Rightarrow d = 2 \cdot \frac{\sqrt{3}}{6} \Rightarrow d = \frac{\sqrt{3}}{3} \text{ cm} \end{matrix}\right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow A = \frac{1}{2} D \cdot d \Rightarrow A = \frac{\sqrt{3}}{6} \text{ cm}^2$$

$$\left.\begin{matrix} 1 \text{ cm}^2 \text{———} 8\,100 \text{ km}^2 \\ \frac{\sqrt{3}}{6} \text{ cm}^2 \text{———} A \end{matrix}\right\} \Rightarrow A = \frac{\sqrt{3}}{6} \cdot 8\,100 \Rightarrow A = 1\,350\sqrt{3} \text{ km}^2$$