IFC Blumenau - álgebra linear - 2024.1 - PROVA 3 de 3 – 27/06/24

NOME: Estevão Goerll Nascimento **Nº** 4

As questões devem ser feitas da forma completa, com seus raciocínios, não colocar somente resposta final.

Simplificar frações e racionalizar raízes, evitar ao máximo o uso de aproximações.

Pode ser usada calculadora cientifica que não são calculadoras gráficas e/ou programáveis.

Cada QUESTÃO vale 1,25.

1. Verifique se a relação, $T: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ definida por $T(x, y, z) = (x + 2y - z\ ,\ x + 4y - y)$ é uma transformação linear.

z

$T(c \cdot v) = c \cdot T(v)$

$v = (x, y, z)$

$T(cx, cy, cz) = c \cdot (x + 2y - z, x + 4y - z)$

$(cx + 2cy - cz, cx + 4cy - cz) = c . (x + 2y - z, x + 4y - z)$

$c(x + 2y - z, x + 4y - z) = c . (x + 2y - z, x + 4y - z)$

A propriedade da multiplicação é válida

$T(u + v) = T(u) + T(v)$

$u = (x, y, z) \quad v = (a, b, c)$

$T(u + v) = T(x + a, y + b, z + c)$

$= (x + a + 2y + 2b - z - c, x + a + 4y + 4b - z - c)$

$= (x + 2y - z, x + 4y - z) + (a + 2b - c, a + 4b - c)$

$= T(u) + T(v)$

A propriedade da soma também é válida

1,00

É transformação linear

2. Seja a transformação linear $T: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ tal que: $T(1,0,0) = (4,2,1)$, $T(0,1,0) = (1,1,1)$ e $T(0,0,1) = (-1,1,2)$. Calcule $T(4,2,-2)$

Achando $T(x,y,z)$

$(x,y,z) = a.(1,0,0) + b.(0,1,0) + c.(0,0,1)$

$x = a \quad y = b \quad z = c$

$T(x,y,z) = T(x\cdot(1,0,0) + y.(0,1,0) + z.(0,0,1))$

$T(x,y,z) = x\cdot T(1,0,0) + y\cdot T(0,1,0) + z.T(0,0,1)$

$T(x,y,z) = x\cdot(4,2,1) + y\cdot(1,1,1) + z\cdot(-1,1,2)$

$T(x,y,z) = (4x+y-z, 2x+y+z, x+y+2z)$

Substituindo para $(4,2,-2)$

$T(4,2,-2) = (16+2+2, 8+2-2, 4+2-4)$

$T(4,2,-2) = (20, 8, 2)$

10

3. Dado o operador limear: $T(x,y,z) = (x - y - z\ , x + 2y + 3z\ , 2x + 2y + z)$

a) Calcule o Núcleo

b) Calcule a imagem

c) determine as dimensões do nucleo e da imagem

a)
$$\begin{matrix} 1 & -1 & -1 \\ 1 & 2 & 3 \\ 2 & 2 & 1 \end{matrix} \xrightarrow[L3=L3-2L2]{L1=L1-L2} \begin{matrix} 0 & -3 & -4 \\ 1 & 2 & 3 \\ 0 & -2 & -5 \end{matrix}$$

$$\xrightarrow{L2=L2+L3} \begin{matrix} 0 & -3 & -4 \\ 1 & 0 & -2 \\ 0 & -2 & -5 \end{matrix} \xrightarrow{L3=L3-\frac{2}{3}L1} \begin{matrix} 0 & -3 & -4 \\ 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & -\frac{7}{3} \end{matrix}$$

$L3 = L3 \div -\frac{7}{3}$

$L1 = L1 + 4L3$

$L2 = L2 - 2L3$

$L1 \leftrightarrow L2$

$$\rightarrow \begin{matrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{matrix} \xrightarrow{L2=L2\div -3} \begin{matrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{matrix}$$

portanto o núcleo é composto apenas pelo vetor nulo $(0,0,0)$

5

b) $x \cdot (1,1,2) + y \cdot (-1,2,2) + z \cdot (-1,3,1)$

a imagem é composta pelos vetores gerados pela base $\{(1,1,2), (-1,2,2), (-1,3,1)\}$

c) A dimensão do núcleo é 0 pois só tem o vetor nulo, portanto Dim(Im) = Dim(Dom) e a dimensão da imagem é 3 assim como a do domínio.

verif

4. Dados os operadores lineares:
$T_1(x,y,z) = (3x + 4z\ , -3x + 2y - 7z\ , 2x + 2y - z)$ e
$T_2(x,y,z) = (-x - 5y + z\ , -3x + 2y - z\ , x + 2y - z)$
Calcule a transformação composta:
$T_1 o T_2$

Obs: quebrei em linhas para não chegar ao fim da folha

$$T_1 \circ T_2 = \Big(3\cdot(-x-5y+z)+4\cdot(x+2y-z),$$
$$-3\cdot(-x-5y+z)+2\cdot(-3x+2y-z)-7\cdot(x+2y-z),$$
$$2\cdot(-x-5y+z)+2\cdot(-3x+2y-z)-(x+2y-z)\Big)$$

$$T_1 \circ T_2 = (x-7y-z\ ,\ -10x+5y+2z\ ,\ -\cancel{8x\ 4y+z)}$$

66

5. Use transformação inear para rotacionar por um ângulo de $\frac{\pi}{3}$ o vetor $(4, 5, 10)$ no sentido anti-horário em torno do eixo x.

$$(4,5,10)\cdot\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & \cos\frac{\pi}{3} & -\text{sen}\frac{\pi}{3}\\ 0 & \text{sen}\frac{\pi}{3} & \cos\frac{\pi}{3}\end{pmatrix} = \left(4,\ 5\cdot\cos\frac{\pi}{3}+10\cdot\text{sen}\frac{\pi}{3},\ 5\cdot-\text{sen}\frac{\pi}{3}+10\cdot\cos\frac{\pi}{3}\right)$$

$$=\left(4,\ 5\cdot\frac{1}{2}+10\cdot\frac{\sqrt{3}}{2},\ 5\cdot-\frac{\sqrt{3}}{2}+10\cdot\frac{1}{2}\right)$$

$$=\left(4,\ \frac{5+\sqrt{3}}{2},\ \frac{-5\sqrt{3}+10}{2}\right)$$

ou

$$=\left(4,\ \frac{5+\sqrt{3}}{2},\ -\frac{5\sqrt{3}}{2}+5\right)$$

4,5

6. Verifique se o operador linear

$T(x\,,y\,,z\,,t) = \left(\frac{1}{4}x + \frac{3}{4}y - \frac{1}{2}z\ ,\ -\frac{1}{4}x + \frac{1}{4}y + \frac{1}{6}z + \frac{1}{3}t\ ,\frac{1}{2}x - \frac{1}{2}y + \frac{2}{3}z - \frac{2}{3}t\ ,-\frac{1}{3}z + \frac{1}{3}t\right)$

é um isomorfismo, se for, calcule o operador inverso T^{-1}

$$[T] = \begin{matrix} \frac{1}{4} & \frac{3}{4} & -\frac{1}{2} & 0 \\ -\frac{1}{4} & & & \end{matrix}$$

7. Determine os autovalores e autovetores associados a:
$T(x, y, z) = (3x + y + 8z\,, 2y + z\,, 3z\,)$, se existirem.

$$\begin{pmatrix} 3 & 1 & 8 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} \lambda & 0 & 0 \\ 0 & \lambda & 0 \\ 0 & 0 & \lambda \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3-\lambda & 1 & 8 \\ 0 & 2-\lambda & 1 \\ 0 & 0 & 3-\lambda \end{pmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 3-\lambda & 1 & 8 \\ 0 & 2-\lambda & 1 \\ 0 & 0 & 3-\lambda \end{bmatrix} = (3-\lambda)(2-\lambda)(3-\lambda) = 0$$

portanto temos 3 e 2 como autovalores

$\lambda = 3$

$y + 8z = 0 \qquad y = -8z$

$-y + z = 0 \rightarrow 8z + z = 0 \rightarrow (1, 0, 0)$

$0z = 0 \qquad 9z = 0$

$z = 0$

$y = 0$

$\lambda = 2$

$x + y + 8z = 0$

$z = 0 \rightarrow (-1, 1, 0)$

$z = 0$

$x = -y$

1 2

Autovalores: 3 e 2

Autovetores: $(1, 0, 0)$ e $(-1, 1, 0)$

8. Verifique se em $T(x,y,z) = (x - y, x + 2y + z, x - 7y + 4z)$ o vetor $u = (1,2,8)$ é autovetor associado a transformação T. Em caso afirmativo, calcule o autovalor associado.

$T(1,2,8) = (-1, 13, 19)$

$T(1,2,8) =$ autovalor $\cdot (1,2,8)$

autovalor $\cdot (1,2,8) = (-1,13,19)$

não existe autovalor que satisfaça

autovalor = c

$c \cdot (1,2,8) = (-1,13,19)$

$c = -1$

$2c = 13 \Rightarrow$ substituindo $c = -1 \Rightarrow -2 \neq 13$

$8c = 19$

portanto o vetor $(1,2,8)$ não é autovetor desta transformação e não tem autovalor associado.

10