Integração envolvendo as Funções Trigonométricas

1- Integrais de Produtos de Seno e Cosseno

$$\int \operatorname{sen}(ax)\cos(bx)\,dx\,,\int cos(ax)\cos(bx)\,dx \quad \text{e} \quad \int \operatorname{sen}(ax)\operatorname{sen}(bx)\,dx\,, \text{onde } a, b \text{ são inteiros positivos}$$

Usamos as seguintes identidades trigonométricas:

$$\operatorname{sen} a \cos b = \frac{1}{2}[\operatorname{sen}(a+b) + \operatorname{sen}(a-b)]$$

$$\cos a \cos b = \frac{1}{2}[\cos(a+b) + \cos(a-b)]$$

$$\operatorname{sen} a \operatorname{sen} b = \frac{1}{2}[\cos(a-b) - \cos(a+b)]$$

Exemplo: Calcule a integral $\int sen\, 2x \cos 7x\, dx$.

2- Integrais de Potências de Seno e Cosseno

$$\int \operatorname{sen}^n x \, dx\,, \int \cos^n x \, dx\,, \text{onde } n \text{ é um inteiro positivo}$$

Vamos aplicar as seguintes regras:

$$\int \operatorname{sen}^n x \, dx$$

- Se n for ímpar: use $sen^2 x = 1 - \cos^2 x$ e faça $u = \cos x$
- Se n for par: use $sen^2 x = \frac{1}{2} - \frac{\cos 2x}{2}$

$$\int \cos^n x \, dx$$

- Se n for ímpar: use $\cos^2 x = 1 - \operatorname{sen}^2 x$ e faça $u = \operatorname{sen} x$
- Se n for par: use $\cos^2 x = \frac{1}{2} + \frac{\cos 2x}{2}$

Exemplo: Calcule as integrais:

(a) $\int \cos^3 x \, dx$ (b) $\int \operatorname{sen}^4(2x) \, dx$ (c) $\int \operatorname{sen}^5 x \, dx$

Observação: Para o cálculo de $\int \operatorname{sen}^n x\, dx$ e $\int \cos^n x\, dx$, com $n \geq 5$, utilizamos as **Fórmulas de Recorrência:**

$$\boxed{\int \operatorname{sen}^n x dx = -\frac{1}{n} \operatorname{sen}^{n-1} x \cos x + \frac{n-1}{n} \int \operatorname{sen}^{n-2} x dx.}$$

$$\boxed{\int \cos^n x dx = \frac{1}{n} \cos^{n-1} x \operatorname{sen} x + \frac{n-1}{n} \int \cos^{n-2} x dx.}$$

Exemplo: Calcule a integral $\int \operatorname{sen}^5 x\, dx$.

3- Integrais de Produtos de Potências de Seno e Cosseno

$$\boxed{\int \operatorname{sen}^m x \cos^n x \; dx \text{, onde } m \text{ e } n \text{ são inteiros positivos}}$$

Vamos aplicar as seguintes regras:

- Se m for ímpar: use $sen^2 x = 1 - \cos^2 x$ e faça $u = \cos x$
- Se n for ímpar: use $\cos^2 x = 1 - \operatorname{sen}^2 x$ e faça $u = \operatorname{sen} x$
- Se m e n forem pares simultaneamente: use $sen^2 x = \frac{1}{2} - \frac{\cos 2x}{2}$ e $\cos^2 x = \frac{1}{2} + \frac{\cos 2x}{2}$

Exemplo: Calcule as integrais:

(a) $\displaystyle\int sen^3 x \cos^2 x \, dx$ (b) $\displaystyle\int \operatorname{sen}^2 x \cos^5 x \, dx$ (c) $\displaystyle\int \operatorname{sen}^2 x \cos^4 x \, dx$

4- Integrais de Potências de Secante, Tangente, Cossecante e Cotangente

$\int sec^n\, x\, dx\, , \int tg^n\, x\, dx\, , \int cossec^n\, x\, dx \int cotg^n\, x\, dx$, onde n é um inteiro positivo

Nessas integrais, usamos as identidades:

- $1 + \text{tg}^2\, x = \sec^2 x$
- $1 + cotg^2\, x = cossec^2\, x$
- Para $\sec x$ e $cossec\; x$ com n ímpar: aplicar integração por partes

Lembre que:

- $(\text{tg}\, x)' = \sec^2 x$
- $(cotg\; x)' = -cossec^2 x$
- $(\sec x)' = \sec x\, \text{tg}\, x$
- $(cossec\; x)' = -cossec\; x\; cotg\; x$
- $\int tg\; x\; dx = -\ln|\cos x| + k$
- $\int cotg\; x\; dx = \ln|sen\; x| + k$
- $\int \sec x\;\; dx = \ln|\sec x + tg\; x| + k$
- $\int cossec\; x\; dx = \ln|cossec\; x - cotg\; x| + k$

Exemplo: Calcule as integrais:

(a) $\displaystyle\int \sec^6 x\, dx$ (b) $\displaystyle\int \text{tg}^3(3x)\, dx$ (c) $\displaystyle\int \text{cotg}^4(2x)\, dx$ (d) $\displaystyle\int \text{cossec}^n\, x\, dx$

5- Integrais de Produtos de Potências de Tangente e Secante

$$\boxed{\int tg^m\, x \sec^n x \;\, dx \text{, onde } m \text{ e } n \text{ são números inteiros positivos}}$$

Vamos aplicar as seguintes regras:

- Se n é par:
  - Separe um fator de $\sec^2 x$
  - Use $\sec^2 x = 1 + \operatorname{tg}^2 x$
  - Faça $u = \operatorname{tg} x$
- Se m é ímpar:
  - Separe um fator de $\sec x \operatorname{tg} x$
  - Use $\operatorname{tg}^2 x = \sec^2 x - 1$
  - Faça $u = \sec x$
- Se n é ímpar e m par:
  - Use $\operatorname{tg}^2 x = \sec^2 x - 1$ para obter uma integral com potências de secante

Exemplo: Calcule as integrais:

(a) $\displaystyle\int \operatorname{tg}^3 x sec^4 x\, dx$ (b) $\displaystyle\int \operatorname{tg}^7 x \sec^5 x\, dx$ (c) $\displaystyle\int \operatorname{tg}^2 x \sec^3 x\, dx$

6- Integrais de Produtos de Potências de Cotangente e Cossecante

$$\int cotg^m\, x\, cossec^n\, x\;\; dx \text{, onde } m \text{ e } n \text{ são números inteiros positivos}$$

Vamos aplicar as seguintes regras:

- Se n é par:
  - Separe um fator de $\operatorname{cossec}^2 x$
  - Use $\operatorname{cossec}^2 x = 1 + \operatorname{cotg}^2 x$
  - Faça $u = \operatorname{cotg} x$
- Se m é ímpar:
  - Separe um fator de $\operatorname{cossec} x \operatorname{cotg} x$
  - Use $\operatorname{cotg}^2 x = \operatorname{cossec}^2 x - 1$
  - Faça $u = \operatorname{cossec} x$
- Se n é ímpar e m par:
  - Use $\operatorname{cotg}^2 x = \operatorname{cossec}^2 x - 1$ para obter uma integral com potências de cossecante

Exemplo: Calcule as integrais:

(a) $\displaystyle\int cotg^2\, x\, cossec^4\, xdx$ (b) $\displaystyle\int cotg\, x\, cossec^3\, xdx$

Observação: Para o cálculo da integral de potências de secante, tangente, cossecante e cotangente, com $n \geq 2$, pode-se utilizar as seguintes **Fórmulas de Recorrência:**

$$\int \sec^n x dx = \frac{\sec^{n-2} x \operatorname{tg} x}{n-1} + \frac{n-2}{n-1} \int \sec^{n-2} x dx$$

$$\int \operatorname{tg}^n x dx = \frac{\operatorname{tg}^{n-1} x}{n-1} - \int \operatorname{tg}^{n-2} x dx$$

$$\int \operatorname{cosec}^n x dx = -\frac{\operatorname{cosec}^{n-2} x \operatorname{cotg} x}{n-1} + \frac{n-2}{n-1} \int \operatorname{cosec}^{n-2} x dx$$

$$\int \operatorname{cotg}^n x dx = -\frac{\operatorname{cotg}^{n-1} x}{n-1} - \int \operatorname{cotg}^{n-2} x dx$$