

## 3.7 Exercícios

1 - Seja  $f(x) = \frac{4x^2 - 11x + 6}{x - 2}$ . Para cada  $\varepsilon$  dado, determine  $\delta$  tal que  $|f(x) - 5| < \varepsilon$  sempre que  $0 < |x - 2| < \delta$ .

- a)  $\varepsilon = 4$                       b)  $\varepsilon = 2$   
c)  $\varepsilon = 1$                       d)  $\varepsilon = 0,08$

*Sugestão:* Simplificar a fração que define  $f$  por  $x - 2$ , para  $x \neq 2$ .

2 - Calcule os limites.

- a)  $\lim_{x \rightarrow -1} (3x^2 - 7x - 4)$                       b)  $\lim_{x \rightarrow 6} \frac{x^2 - 12x + 36}{x - 5}$   
c)  $\lim_{x \rightarrow -2} \sqrt{5x^2 + 3x + 2}$                       d)  $\lim_{x \rightarrow -3} \log(x^4 - 3x + 10)$   
e)  $\lim_{x \rightarrow \pi} \cos x \cdot \sin(x + \pi)$                       f)  $\lim_{x \rightarrow -\pi} e^{\sin x}$

3 - Para cada função a seguir, calcule  $\lim_{x \rightarrow a^+} f(x)$ ,  $\lim_{x \rightarrow a^-} f(x)$  e  $\lim_{x \rightarrow a} f(x)$  caso este exista.

- a)  $f(x) = \begin{cases} 3 - x^2 & \text{se } x < 0 \\ 2x & \text{se } x \geq 0 \end{cases}$                       b)  $f(x) = \frac{x^2 - 3x - 4}{x - 4}$   
 $a=0$                        $a=4$   
c)  $f(x) = \begin{cases} x^2 - 4x - 1 & \text{se } x < 2 \\ 2 - x & \text{se } x \geq 2 \end{cases}$                       d)  $f(x) = \begin{cases} 2x + 3 & \text{se } x < -1 \\ -x & \text{se } x > -1 \\ 0 & \text{se } x = -1 \end{cases}$   
 $a=2$                        $a=-1$

4 - Calcule os limites.

- a)  $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2 + 5x - 14}{x - 2}$                       b)  $\lim_{x \rightarrow 3} \frac{x^2 - 6x + 9}{x - 3}$   
c)  $\lim_{x \rightarrow -2} \frac{2x^2 + x - 6}{x + 2}$                       d)  $\lim_{x \rightarrow -3} \frac{5x^3 + 23x^2 + 24x}{x^2 - x - 12}$   
e)  $\lim_{x \rightarrow -1} \frac{x^3 + 65x^2 + 63x - 1}{x + 1}$                       f)  $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^4 - 3x^2 - 4}{x - 2}$   
g)  $\lim_{x \rightarrow 4} \frac{2x^3 - 13x^2 + 17x + 12}{x^2 - 6x + 8}$                       h)  $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^5 - x^3 - 5x^2 + 5}{x^2 + x - 2}$   
i)  $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{(a+h)^2 - a^2}{h}$                       j)  $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{(a+h)^3 - a^3}{h}$   
k)  $\lim_{t \rightarrow 1} \frac{t^4 - 1}{t - 1}$                       l)  $\lim_{t \rightarrow 1} \frac{t^5 - 1}{t - 1}$   
m)  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{16 - x} - 4}{x}$                       n)  $\lim_{x \rightarrow 27} \frac{\sqrt[3]{x} - 3}{x - 27}$   
o)  $\lim_{x \rightarrow 9} \frac{x^2 - 9x}{\sqrt{x} - 3}$                       p)  $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt[3]{x} - 1}{\sqrt{x} - 1}$   
q)  $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt[4]{x^3} - 1}{\sqrt[6]{x} - 1}$                       r)  $\lim_{x \rightarrow 32} \frac{\sqrt[5]{x} - 2}{x - 32}$   
s)  $\lim_{x \rightarrow 5} \frac{\sqrt{2(x-3)} - 2}{x - 5}$                       t)  $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{h}{a - \sqrt{a^2 + h}}$ , ( $a > 0$ )  
u)  $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{\sqrt{a+h} - \sqrt{a}}{h}$  ( $a > 0$ )                      v)  $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{\sqrt[3]{a+h} - \sqrt[3]{a}}{h}$

5 - Seja  $f(x) = \frac{x+1}{x}$ .

- a) Encontre  $k$  tal que  $|f(x) - 1| < 0,001$  para todo  $x > k$ .  
b) Dado  $\varepsilon > 0$  encontre  $k < 0$  tal que  $x < k \Rightarrow |f(x) - 1| < \varepsilon$ .  
c) Encontre o maior  $\delta$  tal que  $-\delta < x < 0 \Rightarrow f(x) < -100$ .  
d) Dado  $M > 0$  encontre o maior  $\delta$ , tal que  $0 < x < \delta \Rightarrow f(x) > M$ .

6 - Calcule os limites.

1)  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{4x^3 - 5x^2 + x}{x^4 + 7x^2}$

2)  $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{3x^5 - x^4 + 7x}{6x^5 + 8x^4 + 20}$

3)  $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x^5 + \operatorname{sen} x}{20x^4 + 3x^2 + x}$

4)  $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{4x^5 + 12x^2 + 5x}{x^3 + 4x^2 + 2}$

5)  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{10x^2 + 5 - 3\cos x^2}{2x^2 + 3x - 4}$

6)  $\lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{x^3 + x - 3}{x - 1}$

7)  $\lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{x^3 + x - 3}{x - 1}$

8)  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\sqrt{x^2 - \sqrt{x}}}{\sqrt{x+1}}$

9)  $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{\sqrt{x^2 + \sqrt{x^2 + 1}}}{x}$

10)  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\sqrt{x^2 + 1}}{\sqrt{x^2 + \sqrt{x^2 + 1}}}$

11)  $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{\sqrt{1-x} + \sqrt{1-x}}{\sqrt{1-x}}$

12)  $\lim_{x \rightarrow 3} \frac{x^2 + 4}{x^2 - 6x + 9}$

13)  $\lim_{x \rightarrow 4^+} \frac{4x + 4}{16 - x^2}$

14)  $\lim_{x \rightarrow 4^-} \frac{4x + 4}{16 - x^2}$

15)  $\lim_{x \rightarrow 2^+} \frac{x^2 - x - 2}{x^2 - 4x + 4}$

16)  $\lim_{x \rightarrow 2^-} \frac{x^2 - x - 2}{x^2 - 4x + 4}$

17)  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x}{\operatorname{tg} x}$

18)  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos^4 x}{x^2}$

19)  $\lim_{x \rightarrow 0^+} [7x(1 + \operatorname{ctg}^2 x)]^{-1}$

20)  $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{5}{x-1}\right)^{x+7}$

21)  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(2 + \frac{1}{x}\right)^x$

22)  $\lim_{x \rightarrow 0} (1 + kx)^{\frac{1}{x}}$

23)  $\lim_{x \rightarrow 0} (1 - 2x)^{\frac{1}{x}}$

24)  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{5^{x+2} - 25}{10x}$

25)  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{7^{x-1} - \frac{1}{7}}{x}$

26)  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{(ab)^x - a^x}{ax}$

27)  $\lim_{x \rightarrow 2^-} \frac{x^2 + 3x - 7}{2 - x}$

28)  $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{2}{x+1}\right)^x$

29)  $\lim_{x \rightarrow -1} (2+x)^{\frac{1}{x+1}}$

30)  $\lim_{x \rightarrow 0} x^2 \operatorname{ctg}^2 x$

31)  $\lim_{x \rightarrow +\infty} (\sqrt{x^3 - 3x} - x^2)$

32)  $\lim_{x \rightarrow +\infty} (\sqrt{x^4 - 3x} - x^2)$

33)  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{tg} x}{x \cdot \sec x}$

34)  $\lim_{x \rightarrow 0} (x \cdot \sec x \cdot \operatorname{cosec} x)$

7 - Calcule  $\lim_{t \rightarrow +\infty} m(t)$  e  $\lim_{t \rightarrow +\infty} l(t)$  para as funções  $m(t)$  e  $l(t)$  obtidas nos exercícios 7 e 8 do capítulo 2. Explique o significado desses limites.

8 - Verifique se cada função a seguir é contínua no ponto  $a$  indicado.

$$a) f(x) = \begin{cases} x+3 & \text{se } x \leq 1 \\ 4 & \text{se } x > 1 \end{cases}, \quad a=1$$

$$b) f(x) = \begin{cases} 1-x^2 & \text{se } x < 2 \\ x-5 & \text{se } x > 2 \\ 0 & \text{se } x = 2 \end{cases}, \quad a=2$$

$$c) f(x) = \begin{cases} \frac{\operatorname{sen} x}{x} & \text{se } x < 0 \\ \frac{\operatorname{tg} x}{x} & \text{se } x > 0 \\ 1 & \text{se } x = 0 \end{cases}, \quad a=0$$

$$d) f(x) = \begin{cases} x \operatorname{sen} x & \text{se } x \neq 0 \\ 0 & \text{se } x = 0 \end{cases}, \quad a=0$$

$$e) f(x) = \begin{cases} x^2 - 8 & \text{se } x < 3 \\ \frac{\sin(x-3)}{x-3} & \text{se } x > 3 \\ 1 & \text{se } x = 3 \end{cases}, \quad a=3$$

$$f) f(x) = \begin{cases} x - x^2 & \text{se } x < -2 \\ x^3 + 2 & \text{se } x > -2 \\ 3 & \text{se } x = -2 \end{cases}, \quad a=-2$$

9 - Explique por que as seguintes funções são contínuas:

$$\begin{array}{ll} a) f(x) = \ln(1 + \sin^2 x) & b) g(x) = \cos(x^3 - 2x + 7) \\ c) h(x) = \sqrt{x^2 - 7x - 4} & d) r(x) = e^{x + \cos x} \end{array}$$

10 - Mostre que existe  $x \in (-1, 0)$  tal que  $e^x + x = 0$ .

Sugestão: Use o T.V.I..

11 - Mostre que a função  $f(x) = x^3 + x^2 - 2x - 2$  possui uma raiz no intervalo  $(1, 2)$ .

12 - Sejam  $f(x) = e^x$  e  $g(x) = -x^2 + 4$ . Mostre que existe  $x \in (0, 2)$  tal que  $f(x) = g(x)$ .

Sugestão: Considere  $h(x) = f(x) - g(x) = e^x + x^2 - 4$  e use o T.V.I..

13- Seja  $k \in \mathbb{R}$ ,  $k \neq 0$ . Dada  $f(x) = e^{kx} + x^2 - 5$ , verifique se existe  $x \in (0, 2)$  tal que  $f(x) = 0$ .

Sugestão: Analise separadamente os casos  $k > 0$  e  $k < 0$ .

## Respostas

$$1) a) 1 \quad b) \frac{1}{2} \quad c) \frac{1}{4} \quad d) 0,02$$

$$2) a) 6 \quad b) 0 \quad c) 4 \quad d) 2 \quad e) 0 \quad f) 1$$

$$3) a) 0; 3; \text{ não existe} \quad b) 5; 5; 5 \quad c) 0; -5; \text{ não existe} \quad d) 1; 1; 1$$

$$4) a) 9 \quad b) 0 \quad c) -7 \quad d) -3 \quad e) -64 \quad f) 20$$

$$g) \frac{9}{2} \quad h) -\frac{8}{3} \quad i) 2a \quad j) 3a^2 \quad k) 4 \quad l) 5$$

$$m) -\frac{1}{8} \quad n) \frac{1}{27} \quad o) 54 \quad p) \frac{2}{3} \quad q) \frac{9}{2} \quad r) \frac{1}{80}$$

$$s) \frac{1}{2} \quad t) -2a \quad u) \frac{1}{2\sqrt{a}} \quad v) \frac{1}{3\sqrt[3]{a^2}}$$

$$5) a) k=1000 \text{ ou } k>1000 \quad b) k \leq -\frac{1}{\varepsilon} \quad c) \frac{1}{101} \quad d) \frac{1}{M-1}$$

$$6) 1) 0 \quad 2) \frac{1}{2} \quad 3) -\infty \quad 4) +\infty \quad 5) 5 \quad 6) -\infty \quad 7) +\infty$$

$$8) +\infty \quad 9) -1 \quad 10) 1 \quad 11) 1 \quad 12) +\infty \quad 13) -\infty \quad 14) +\infty$$

$$15) +\infty \quad 16) -\infty \quad 17) 1 \quad 18) 2 \quad 19) 0 \quad 20) e^5$$

$$21) +\infty \quad 22) e^k \quad 23) e^{-2} \quad 24) \frac{5}{2} \ln 5 \quad 25) \frac{\ln 7}{7}$$

$$26) \frac{\ln b}{a} \quad 27) +\infty \quad 28) e^2 \quad 29) e \quad 30) 1$$

$$31) -\infty \quad 32) 0 \quad 33) 1 \quad 34) 1$$

7) 1030kg e 40cm

8) a) Contínua    b) Descontínua    c) Contínua  
d) Contínua    e) Contínua    f) Descontínua