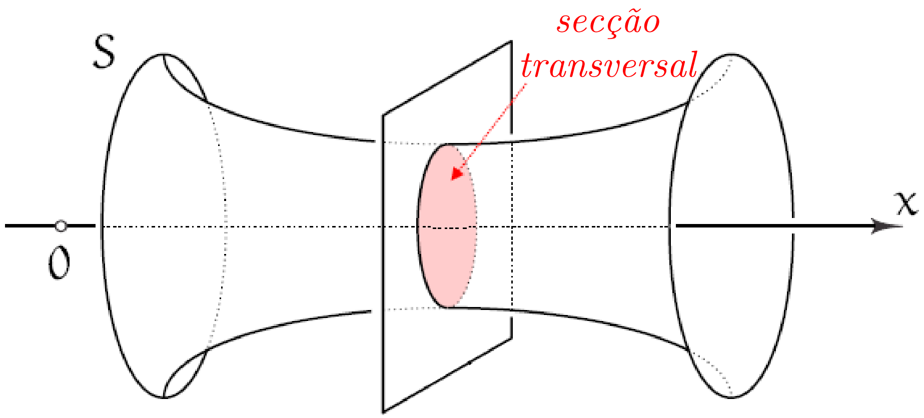
Aplicações da integral definida:
- volume
- comprimento de curva
- área de superfície de revolução

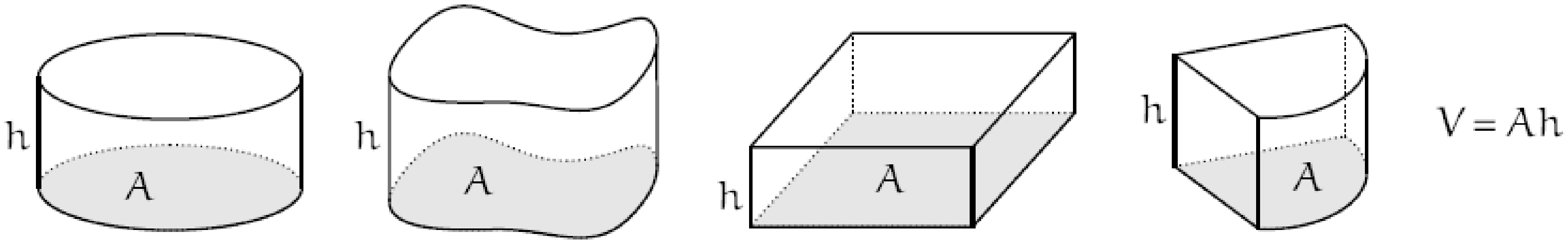
Volume de Sólidos

(1) Método das Secções Transversais

Uma **secção transversal** de um sólido S é a região plana formada pela interseção de S com um plano.

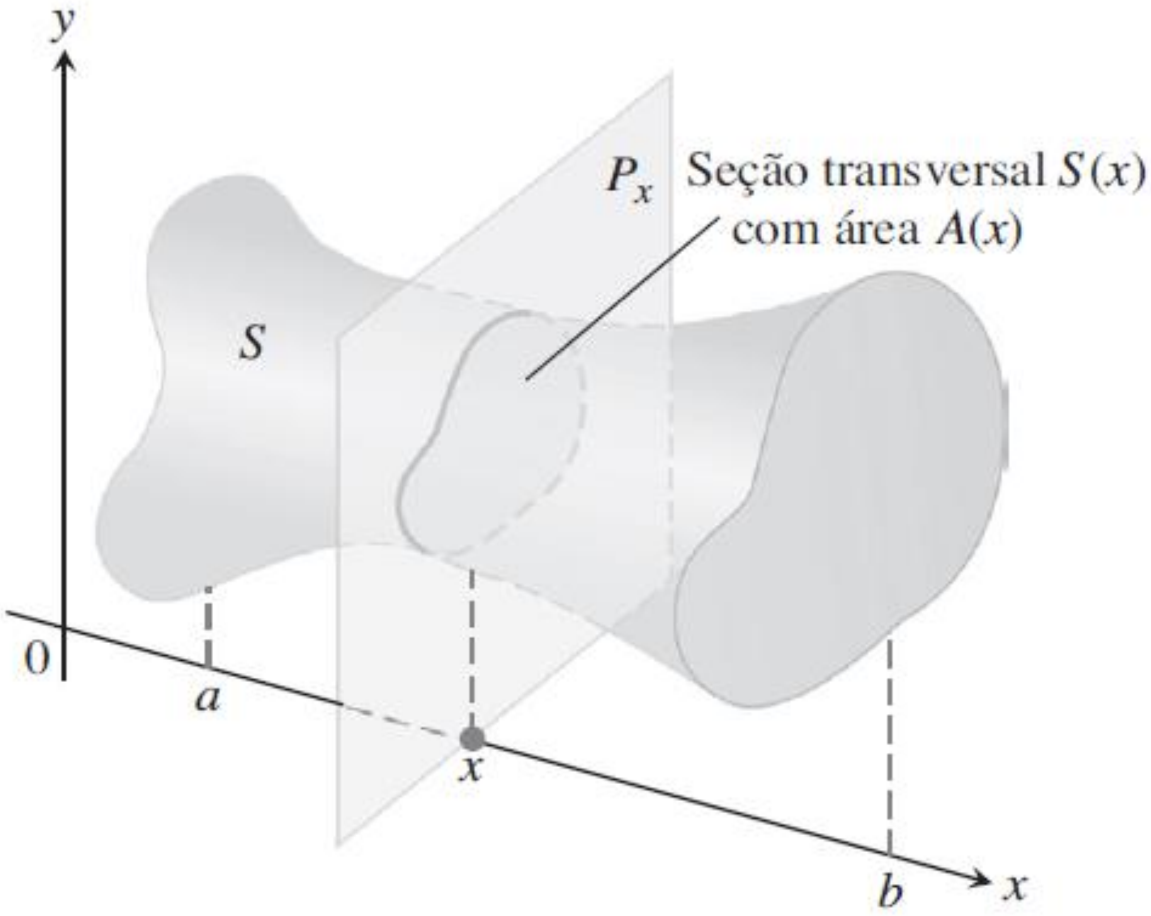


Se um sólido cilíndrico tem área da base A e altura h, então seu volume é dado por $V = Ah$.



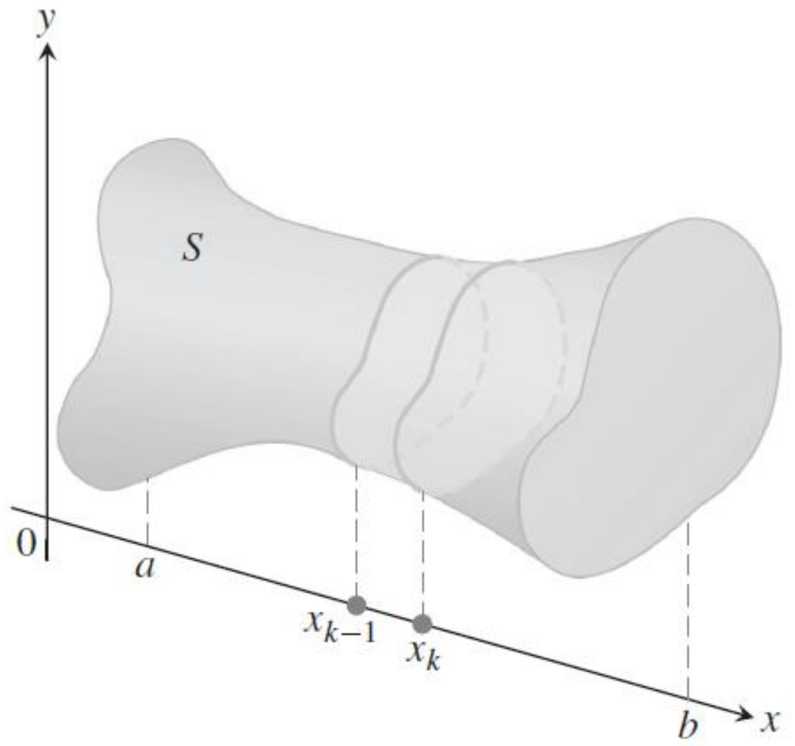
Vamos usar essa fórmula para obter um método para calcular o volume de um sólido cuja área de qualquer secção transversal é conhecida.

Suponha que desejamos calcular o volume de um sólido S, como o da figura abaixo.

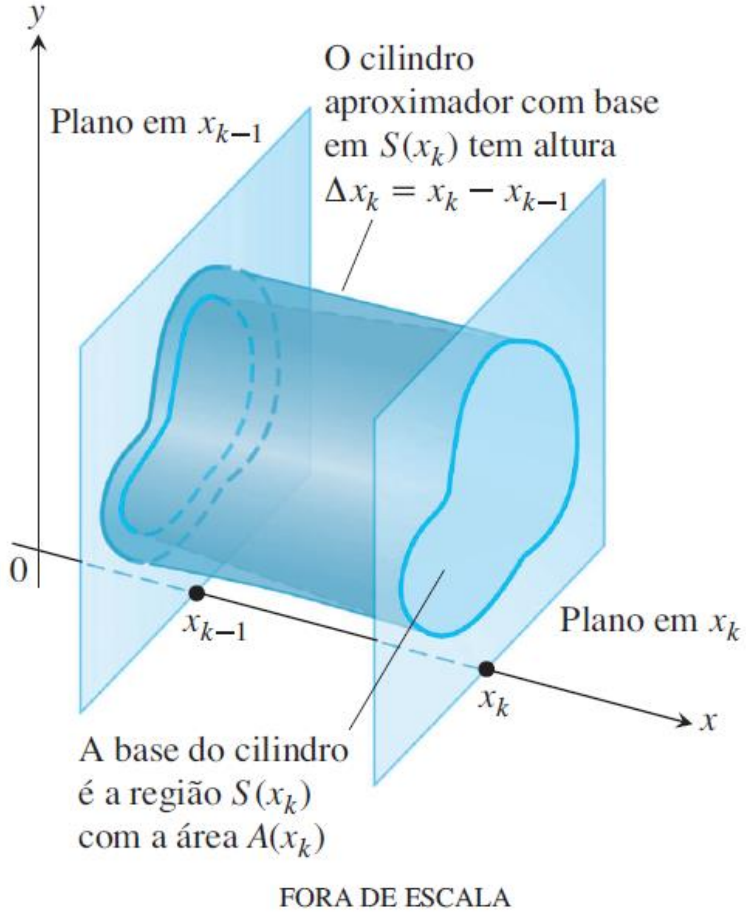


Seja $A(x)$ a área da secção transversal $S(x)$, intersecção de S com o plano P_x perpendicular ao eixo x e passando pelo ponto x, com $a \leq x \leq b$.

Dividimos $[a, b]$ em subintervalos de comprimento Δx_k e fatiamos o sólido por planos perpendiculares ao eixo x nos pontos da partição $a = x_0 < x_1 < \cdots < x_n = b$.



Os planos perpendiculares ao eixo x nos pontos da partição dividem S em "fatias". A figura ao lado mostra uma fatia típica.



Aproximamos a fatia situada entre o plano em x_{k-1} e o plano em x_k usando um sólido cilíndrico com área da base $A(x_k)$ e altura $\Delta x_k = x_k - x_{k-1}$.

O volume desse sólido cilíndrico é dado por $V_k = A(x_k)\Delta x_k$, que é aproximadamente o mesmo volume da fatia:

$$\text{volume da } k\text{-ésima fatia} \approx V_k = A(x_k)\Delta x_k.$$

Logo, é razoável que o volume V do sólido inteiro S é, aproximado, pela soma dos volumes desses sólidos cilíndricos, ou seja,

$$V \approx \sum_{k=1}^{n} V_k = \sum_{k=1}^{n} A(x_k)\Delta x_k\,.$$

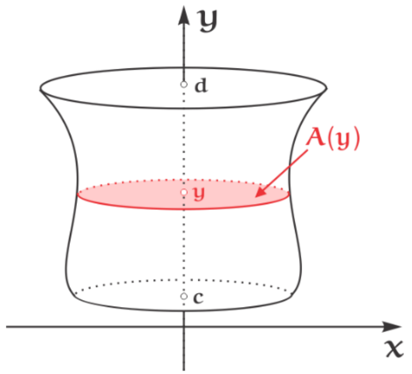
Essa soma é uma Soma de Riemann da função $A(x)$ em $[a, b]$. Esperamos que as aproximações dessas somas melhorem à medida que aumentamos a quantidade de subintervalos na partição. Assim, supondo que exista o limite das Somas de Riemann quando $n \to \infty$, temos a integral definida

$$\int_a^b A(x)\,dx = \lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} A(x_k)\Delta x_k\,.$$

Logo, quando o limite acima existe, é natural **definir o volume de S** como sendo $\boxed{V = \int_a^b A(x)\,dx.}$

Observação: Se o sólido é tal que as secções transversais são perpendiculares ao eixo y, então seu volume é dado por

$$\boxed{V = \int_c^d A(y)\,dy.}$$



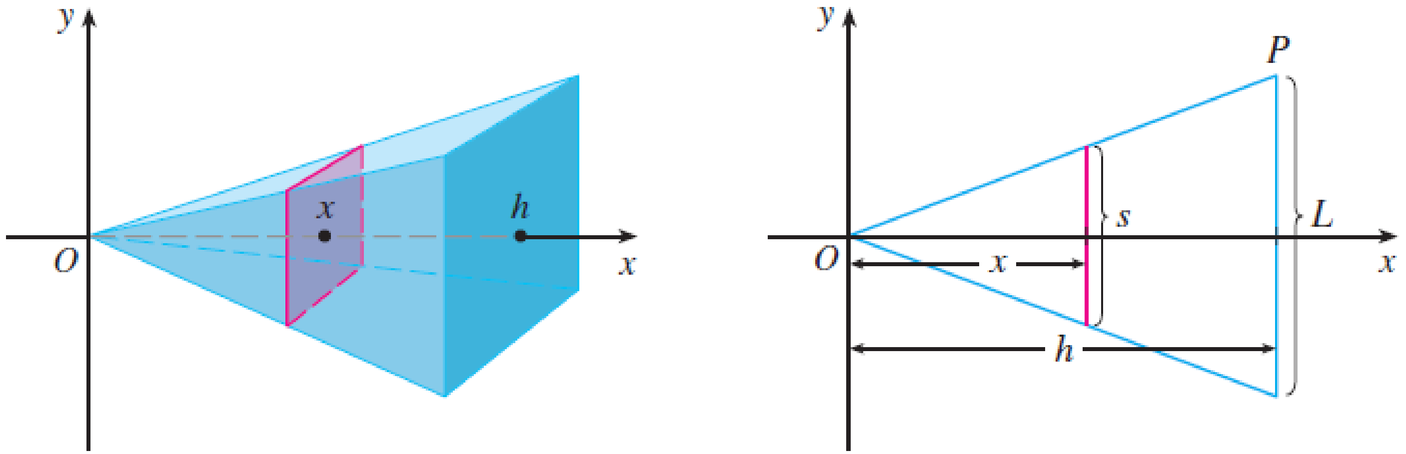
Exemplos:

(1) Calcule o volume de uma pirâmide de base quadrada com lado L e cuja altura é h.

Solução: Posicionamos o eixo x de tal modo que passe pelo vértice e pelo centro da base da pirâmide, sendo $x = 0$ correspondente ao vértice e $x = h$ correspondente ao centro da base.
Qualquer plano que passa por x e é perpendicular ao eixo x intersecta a pirâmide em um quadrado com lado de comprimento s.

Podemos expressar s em termos de x, através dos triângulos semelhantes ao lado:

$$\frac{x}{h} = \frac{s/2}{L/2} = \frac{s}{L} \Rightarrow s = \frac{Lx}{h}\,.$$



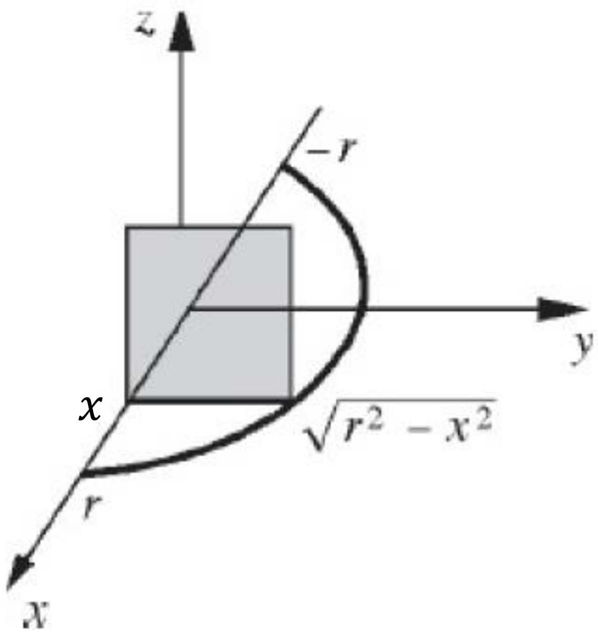
Logo, a área da secção transversal é

$$A(x) = s^2 = \frac{L^2}{h^2}x^2.$$

Como a pirâmide está entre $x = 0$ e $x = h$, seu volume é

$$V = \int_a^b A(x)\,dx = \int_0^h \frac{L^2}{h^2}x^2\,dx = \frac{L^2}{h^2}\frac{x^3}{3}\bigg|_0^h = \frac{L^2 h}{3}\,.$$

(**2**) Calcule o volume do sólido cuja base é o semicírculo $x^2 + y^2 \leq r^2, y \geq 0$, e cujas secções perpendiculares ao eixo x são quadrados.



Solução: Vamos obter o lado do quadrado de uma secção transversal num ponto x. Temos que:

$$x^2 + y^2 = r^2 \Rightarrow y^2 = r^2 - x^2 \Rightarrow y = \sqrt{r^2 - x^2}.$$

Assim, o lado do quadrado em um ponto x é igual a

$$l = y = \sqrt{r^2 - x^2}.$$

Logo, a área da secção transversal é

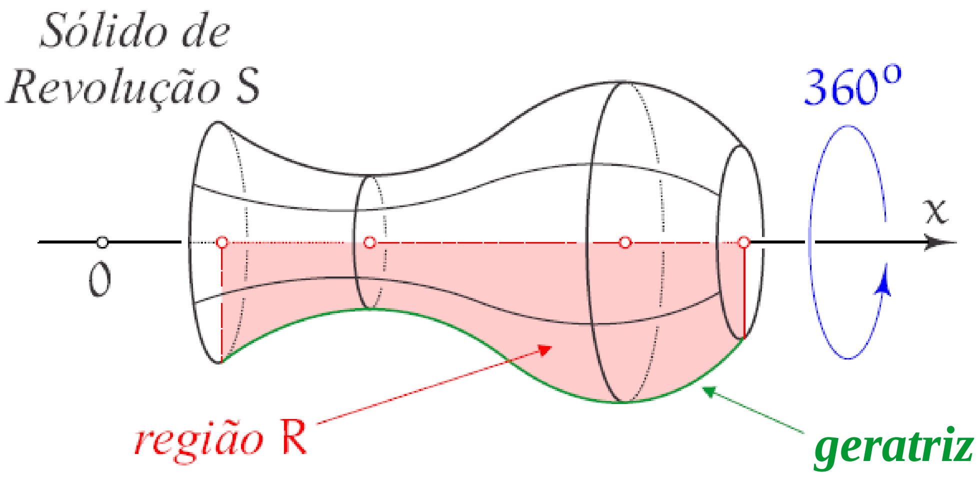
$$A(x) = l^2 = \left(\sqrt{r^2 - x^2}\right)^2 = r^2 - x^2.$$

Como x vai de $-r$ a r, o volume do sólido é

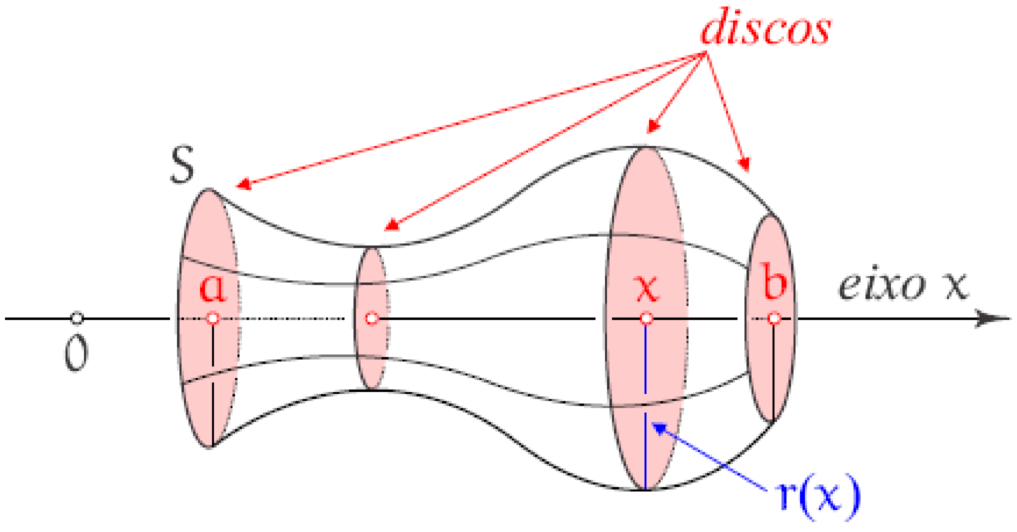
$$V = \int_a^b A(x)\, dx = \int_{-r}^{r} (r^2 - x^2)\, dx = \left(r^2 x - \frac{x^3}{3}\right)\Bigg|_{-r}^{r} = \frac{4r^3}{3}.$$

Caso Particular: Volume de Sólidos de Revolução – Método dos Discos

Um caso particular importante do Método das Secções Transversais é obtido quando o sólido S é um **sólido de revolução,** que é obtido pela rotação de uma região R ao redor de um eixo.



Neste caso, as secções transversais perpendiculares ao eixo x são discos. Suponhamos que seja possível encontrar uma expressão analítica $r(x)$ para os raios desses discos em função de x e que o lado da região R que está sobre o eixo x esteja delimitado pelos pontos a e b.



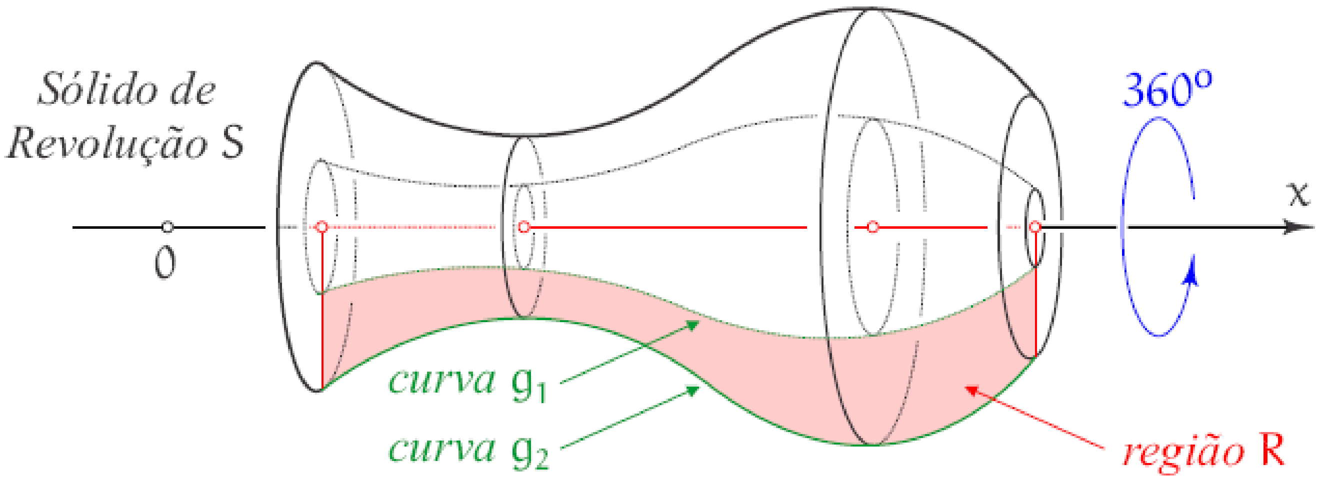
Assim, a área de cada secção transversal é dada por $A(x) = \pi r^2(x)$ e o volume do sólido de revolução é

$$\boxed{V = \int_a^b A(x)\,dx = \int_a^b \pi r^2(x)\,dx\,.}$$

Esse caso particular do método das secções transversais recebe o nome de **Método dos Discos.**

Caso Particular: Volume de Sólidos de Revolução – Método dos Anéis Circulares

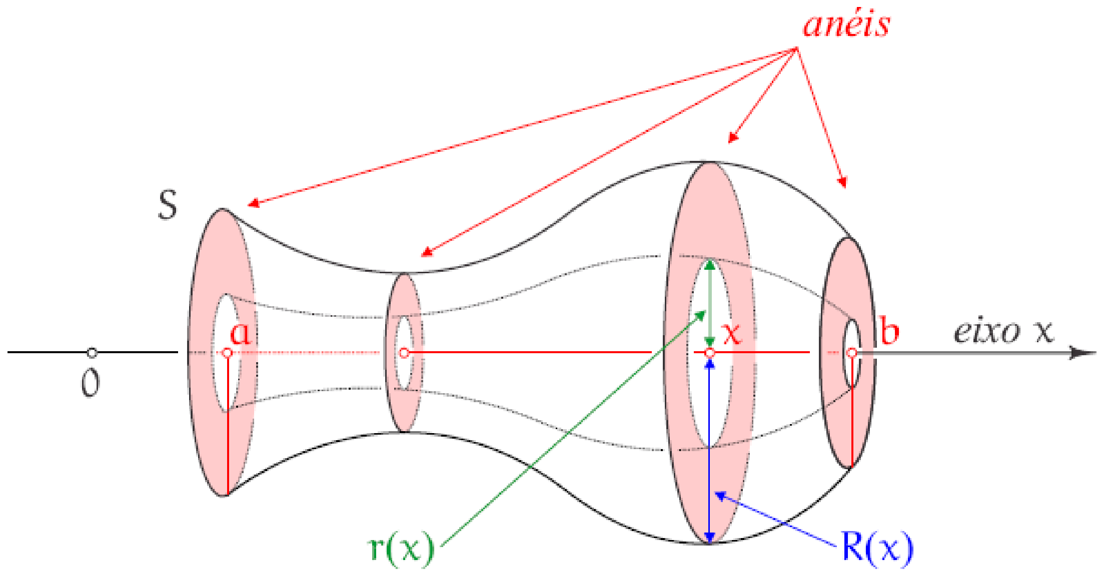
Outro caso particular do Método das Secções Transversais também ocorre com um sólido de revolução, obtido do seguinte modo: tomamos um eixo x e uma região R delimitada por duas curvas g_1 e g_2 e por dois segmentos perpendiculares ao eixo x, conforme a figura abaixo. O sólido S é a região do espaço descrita por R à medida em que R é girada de $360°$ em torno do eixo x.



Observe que, dependendo das curvas g_1 e g_2, podemos ter sólidos "furados" ao longo do eixo de rotação, como ocorre no exemplo da figura acima.

As curvas g_1 e g_2 são chamadas de **geratrizes** da superfície de revolução que envolve o sólido S.

Neste caso, as secções transversais perpendiculares ao eixo x são anéis circulares. Suponhamos que seja possível encontrar expressões analíticas $r(x)$ e $R(x)$ para os raios internos e externos, respectivamente, desses anéis em função de x. Suponhamos também que a projeção ortogonal da região R sobre o eixo x esteja entre os pontos a e b.



Assim, a área de cada secção é dada por $A(x) = \pi R^2(x) - \pi r^2(x) = \pi\left(R^2(x) - r^2(x)\right)$ e o volume do sólido de revolução é

$$\boxed{V = \int_a^b A(x)\,dx = \int_a^b \pi\left(R^2(x) - r^2(x)\right)dx\,.}$$

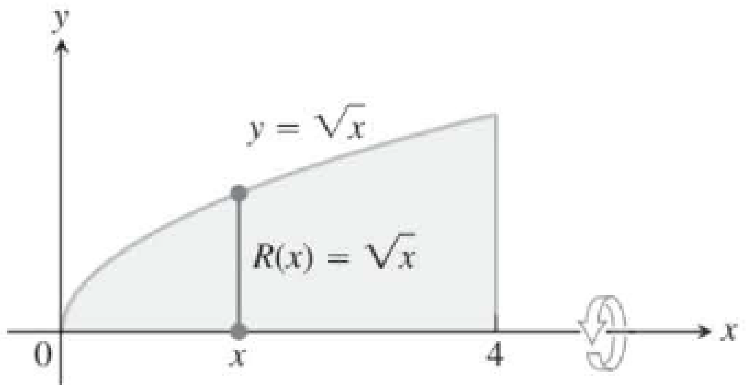
Esse caso particular do método das secções transversais é chamado de **Método dos Anéis Circulares.**

Exemplos:

(1) A região delimitada pelas curvas $y = \sqrt{x}, 0 \leq x \leq 4$, e o eixo x gira em torno do eixo x para gerar um sólido. Determine seu volume.

Solução: Observe que cada secção plana do sólido perpendicular ao eixo x é um disco de raio $r = \sqrt{x}$, sendo $0 \leq x \leq 4$. A área de cada uma dessas secções é $A(x) = \pi r^2(x) = \pi(\sqrt{x})^2$.

Pelo Método dos Discos, temos

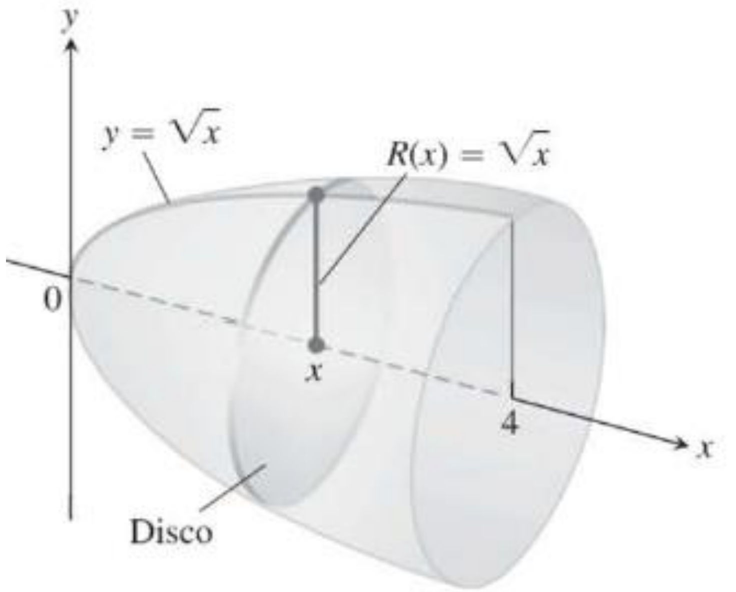


$$V = \int_0^4 \pi(\sqrt{x})^2\, dx$$

$$= \int_0^4 \pi x\, dx$$

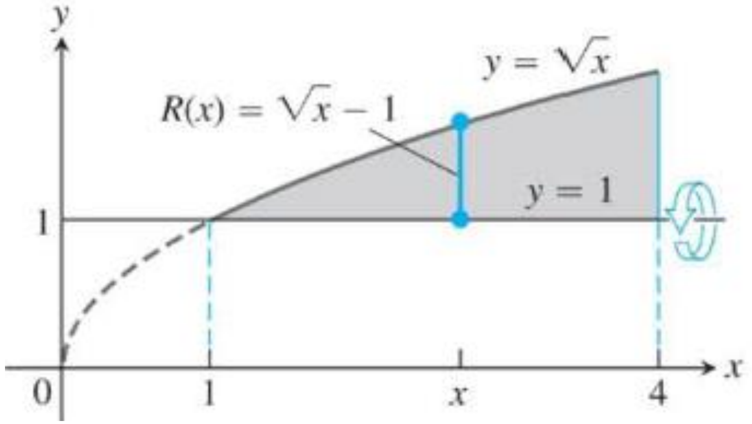
$$= \left.\frac{\pi x^2}{2}\right|_0^4$$

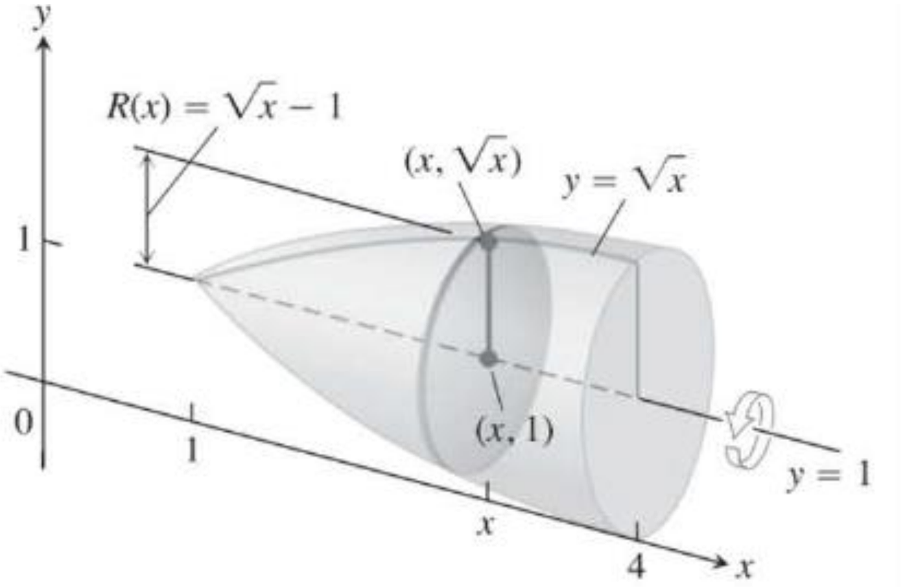
$$= 8\pi.$$



(**2**) Determine o volume do sólido obtido com a rotação da região limitada por $y = \sqrt{x}$ e as retas $y = 1, x = 4$ em torno da reta $y = 1$.

Solução: Na figura abaixo esboçamos a região e o sólido de revolução.



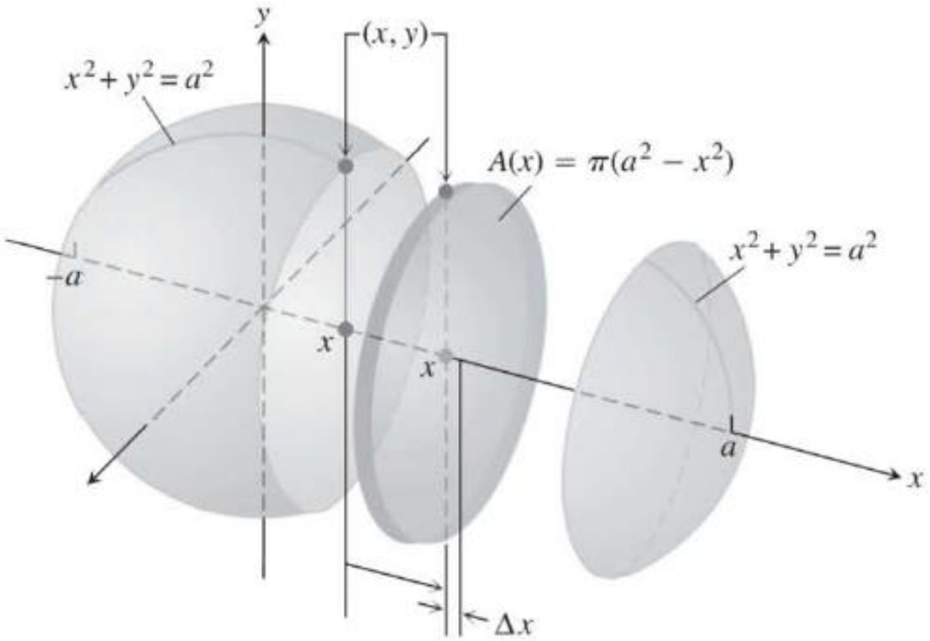


Cada secção plana do sólido perpendicular ao eixo x é um disco de raio $r = \sqrt{x} - 1$, sendo $1 \leq x \leq 4$.
A área de cada uma dessas secções é $A(x) = \pi r^2(x) = \pi(\sqrt{x} - 1)^2$.
Pelo Método dos Discos, segue que o volume do sólido é

$$V = \int_1^4 \pi(\sqrt{x} - 1)^2 \, dx = \pi \int_1^4 (x - 2\sqrt{x} + 1) \, dx = \frac{7}{6}\pi.$$

(**3**) Mostre que o volume de uma esfera de raio a é $V = \frac{4}{3}\pi a^3$.

Solução: Considere uma esfera de raio a com centro na origem do sistema de coordenadas. Podemos considerar que essa esfera foi obtida pela rotação em torno do eixo x do círculo $x^2 + y^2 = a^2$.

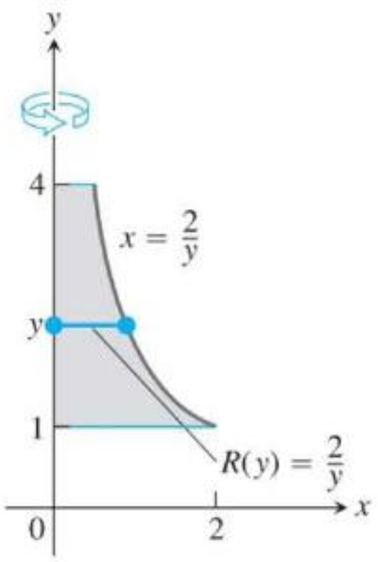


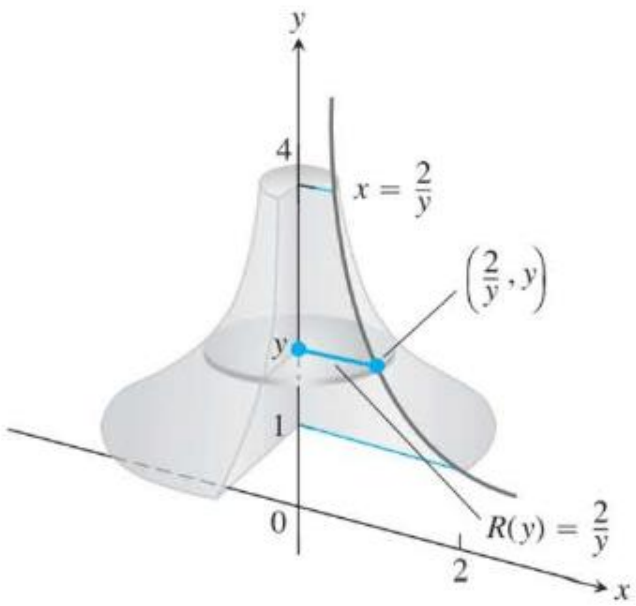
A área de uma secção transversal perpendicular ao eixo x é $A(x) = \pi r^2(x) = \pi(a^2 - x^2)$.
Como x varia de $-a$ até a, então pelo Método dos Discos, temos que o volume do sólido é

$$V = \int_{-a}^{a} \pi(a^2 - x^2)\,dx = \pi\left(a^2x - \frac{x^3}{3}\right)\Bigg|_{-a}^{a} = \pi\left[\left(a^3 - \frac{a^3}{3}\right) - \left(-a^3 + \frac{a^3}{3}\right)\right] = \pi\left(2a^3 - \frac{2a^3}{3}\right) = \frac{4}{3}\pi a^3$$

(4) Determine o volume do sólido obtido com a rotação, em torno do eixo y, da região entre o eixo y e a curva $x = \frac{2}{y}$, com $1 \leq y \leq 4$.

Solução: Na figura abaixo segue um esboço da região e do sólido de revolução.

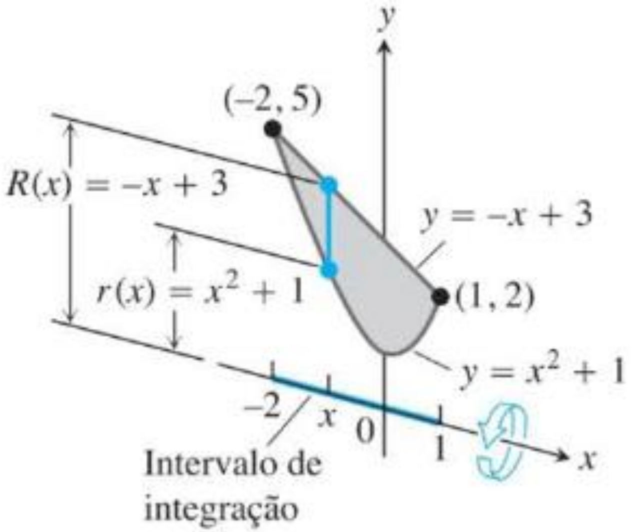




Observe que o raio de uma secção transversal, perpendicular ao eixo y é $r(y) = \frac{2}{y}$. Logo, a área de uma secção é $A(y) = \pi r^2(y) = \pi \left(\frac{2}{y}\right)^2$. Então, o volume do sólido é

$$V = \int_a^b A(y)\, dy = \int_1^4 \pi \left(\frac{2}{y}\right)^2 dy = \pi \int_1^4 \frac{4}{y^2} dy = 4\pi \left(-\frac{1}{y}\right)\Bigg|_1^4 = 3\pi$$

(5) A região limitada pela curva $y = x^2 + 1$ e pela reta $y = -x + 3$ é girada em torno do eixo x para gerar um sólido. Determine o volume desse sólido.



Solução: Nas figuras ao lado seguem um esboço da região e do sólido de revolução.

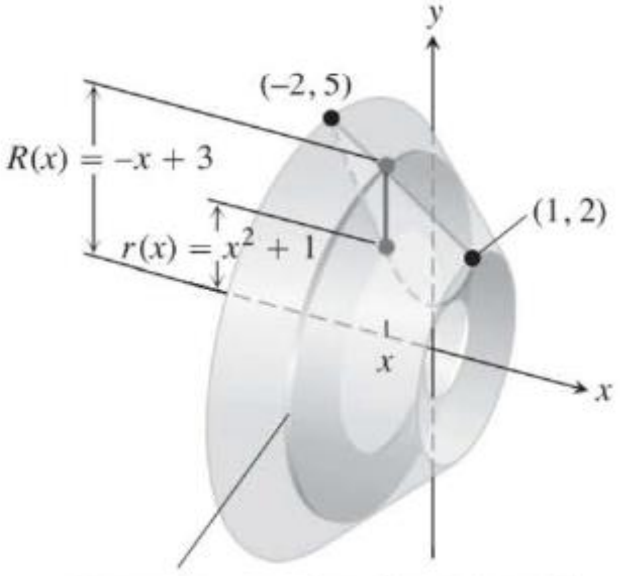
As secções transversais perpendiculares ao eixo x são anéis de raio externo $R(x) = -x + 3$ e raio interno $r(x) = x^2 + 1$.

Para obter os limites de integração, determinamos as abscissas dos pontos de intersecção da parábola com a reta:

$$x^2 + 1 = -x + 3 \Rightarrow x^2 + x - 2 = 0 \Rightarrow x = -2 \text{ ou } x = 1.$$

Logo, o intervalo de integração é $-2 \leq x \leq 1$.

Portanto, pelo Método dos Anéis Circulares, segue que o volume do sólido é



Seção transversal em forma de anel
Raio externo: $R(x) = -x + 3$
Raio interno: $r(x) = x^2 + 1$

$$V = \int_a^b \pi([R(x)]^2 - [r(x)]^2)\,dx$$

$$= \int_{-2}^{1} \pi((-x+3)^2 - (x^2+1)^2)\,dx$$

$$= \pi \int_{-2}^{1} (8 - 6x - x^2 - x^4)\,dx$$

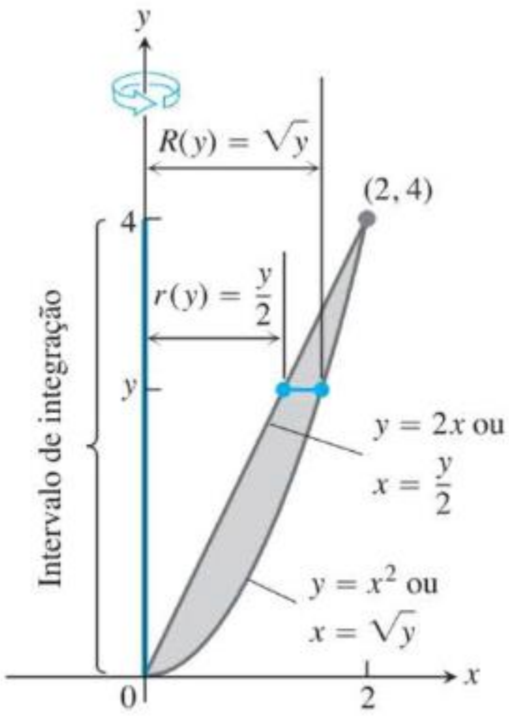
$$= \pi\left[8x - 3x^2 - \frac{x^3}{3} - \frac{x^5}{5}\right]_{-2}^{1} = \frac{117\pi}{5}$$

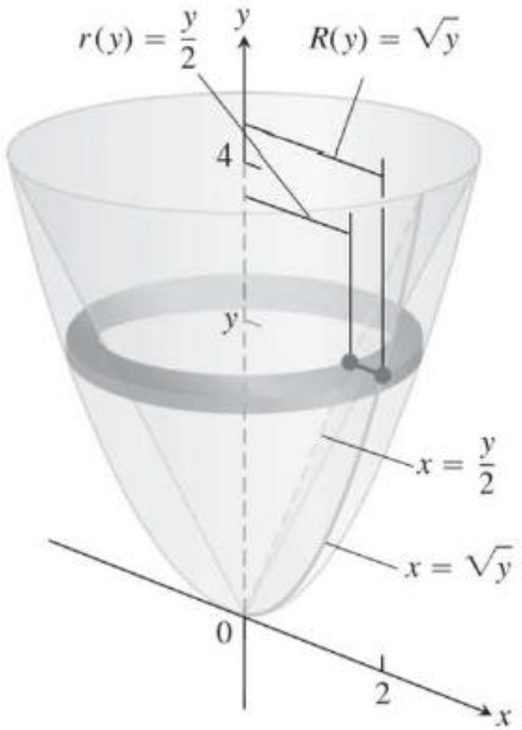
(6) A região compreendida entre a parábola $y = x^2$ e a reta $y = 2x$ no primeiro quadrante gira em torno do eixo y para gerar um sólido. Determine o volume do sólido.

Solução: Nas figuras ao lado seguem um esboço da região e do sólido de revolução.

As secções transversais perpendiculares ao eixo y são anéis de raio externo $R(y) = \sqrt{y}$ e raio interno $r(y) = y/2$.

A reta e a parábola se cruzam em $y = 0$ e $y = 4$. Assim os limites de integração são $c = 0$ e $d = 4$. Logo,





$$V = \int_c^d \pi([R(y)]^2 - [r(y)]^2)\, dy$$

$$= \int_0^4 \pi\left(\left[\sqrt{y}\right]^2 - \left[\frac{y}{2}\right]^2\right) dy$$

$$= \pi \int_0^4 \left(y - \frac{y^2}{4}\right) dy = \pi\left[\frac{y^2}{2} - \frac{y^3}{12}\right]_0^4 = \frac{8}{3}\pi.$$

Exercícios

(1) Encontre o volume do sólido obtido pela rotação ao redor do eixo x da região sob a curva $y = \sqrt{x}$, com $0 \leq x \leq 1$.

(2) Encontre o volume do sólido obtido pela rotação da região limitada por $y = x^3$, $y = 8$ e $x = 0$ ao redor do eixo y.

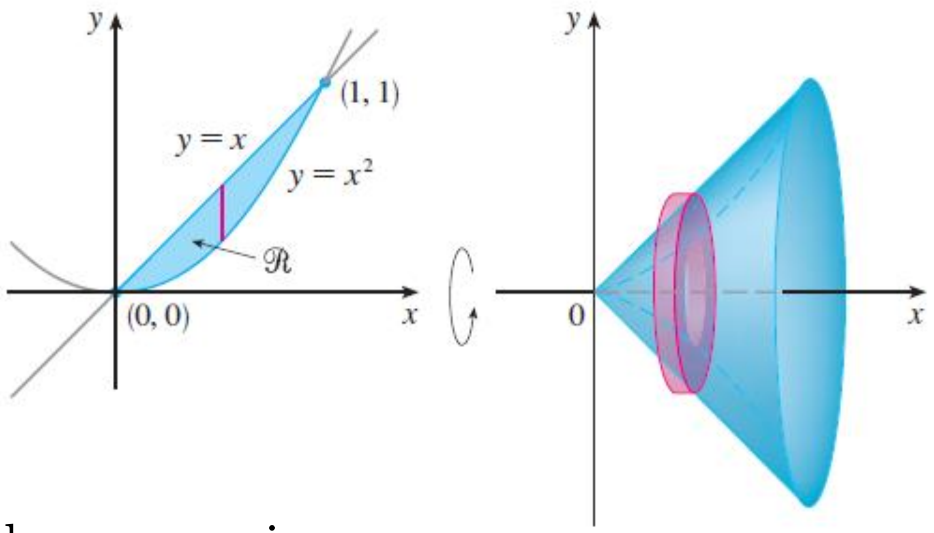
(3) Calcule o volume do sólido cuja base é o semicírculo $x^2 + y^2 \leq r^2, y \geq 0$ e cujas secções perpendiculares ao eixo x são triângulos equiláteros.

(4) Determine o volume do sólido resultante da rotação da região limitada pelas curvas $y = x$ e $y = x^2$:

(**a**) em torno do eixo x.
(**b**) em torno da reta $y = 2$.
(**c**) em torno da reta $x = -1$.

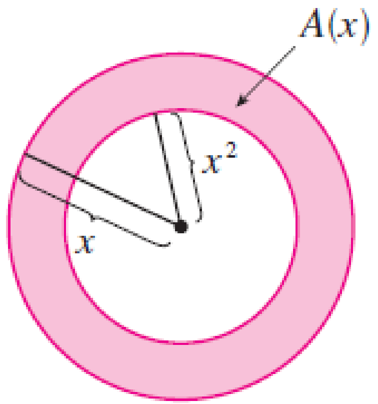
Solução do Exercício (4)

(**a**) Observe que os pontos de intersecção de $y = x$ e $y = x^2$ são $(0,0)$ e $(1,1)$.
Ao lado, temos um esboço da região R e do sólido de revolução dessa região em torno do eixo x.



Veja que a secção transversal tem o formato de um anel circular, com raio externo $R(x) = x$ e raio interno $r(x) = x^2$. Logo, sua área é

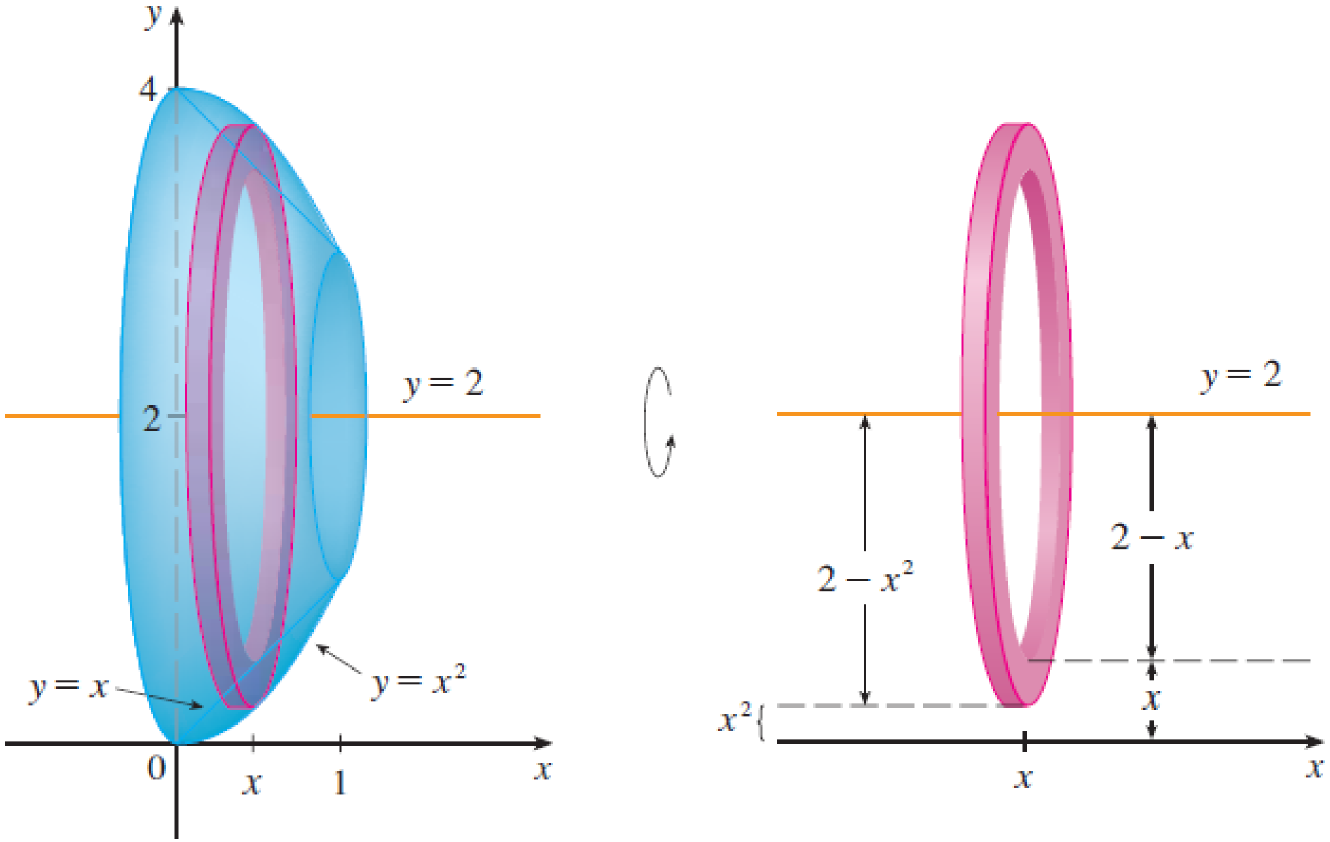
$$
\begin{aligned}
A(x) &= \pi(raio\ externo)^2 - \pi(raio\ interno)^2 \\
&= \pi x^2 - \pi(x^2)^2 \\
&= \pi(x^2 - x^4)
\end{aligned}
$$



Portanto, o volume do sólido é dado por:

$$V = \int_a^b A(x)\,dx = \int_0^1 \pi(x^2 - x^4) = \frac{2\pi}{15}.$$

(**b**) Um esboço do sólido e a da secção transversal são mostrados abaixo:



Novamente, a secção transversal tem o formato de um anel circular. Neste caso, temos que

$$R(x) = 2 - x^2 \quad \text{e} \quad r(x) = 2 - x.$$

Logo, sua área é

$$A(x) = \pi(2 - x^2)^2 - \pi(2 - x)^2$$

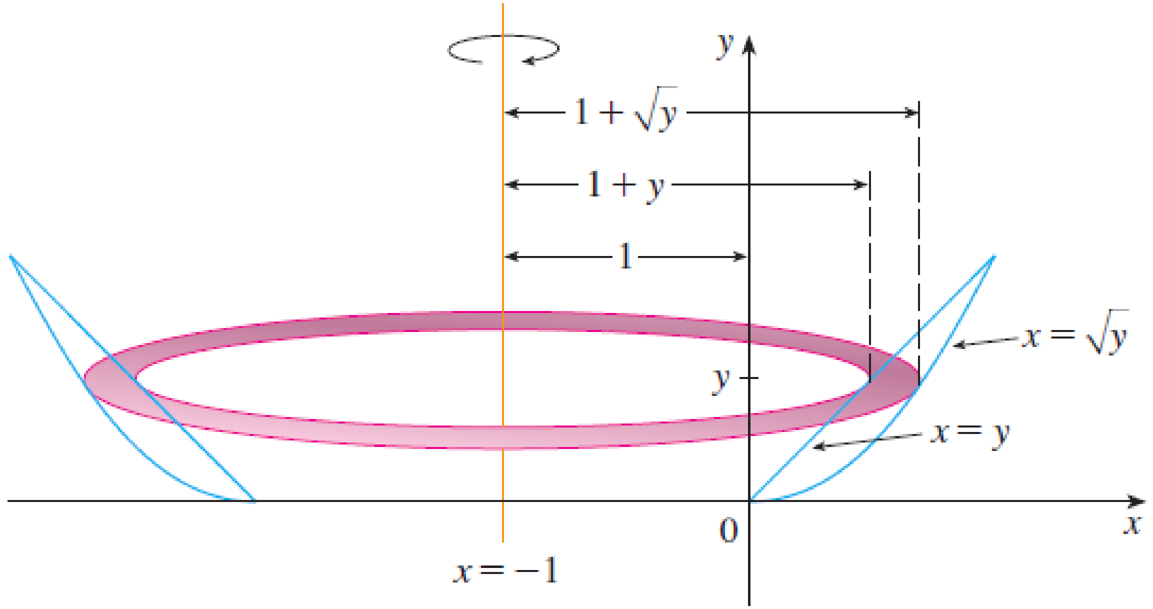
$$= \pi(x^4 - 5x^2 + 4x)$$

Portanto, o volume do sólido é dado por:

$$V = \int_a^b A(x)\, dx = \int_0^1 \pi(x^4 - 5x^2 + 4x) = \frac{8\pi}{15}.$$

(**c**) Ao rotacionar a região R em torno de $x = -1$, obtemos uma secção transversal horizontal, que tem o formato de um anel circular, cujos raios externo e interno são dados por

$$R(y) = 1 + \sqrt{y} \quad \text{e} \quad r(y) = 1 + y.$$



Logo, sua área é

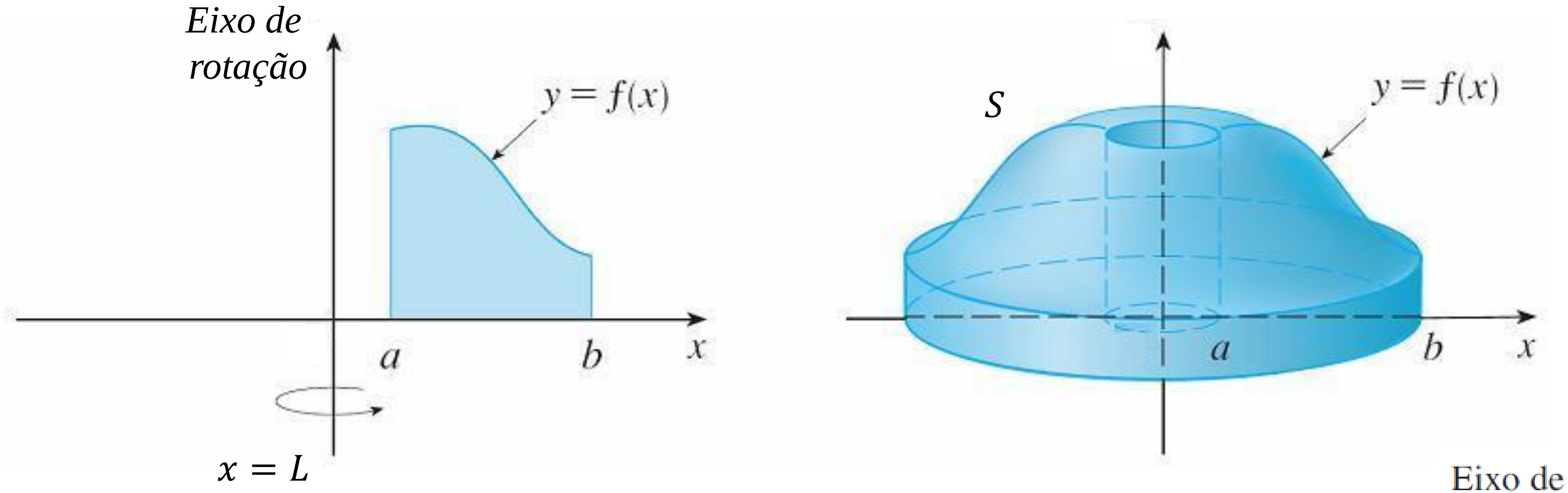
$$A(y) = \pi(1+\sqrt{y})^2 - \pi(1+y)^2$$
$$= \pi(-y^2 - y + 2\sqrt{y})$$

Portanto, o volume do sólido é dado por:

$$V = \int_c^d A(y)\, dy = \int_0^1 \pi(-y^2 - y + 2\sqrt{y})\, dy = \frac{\pi}{2}.$$

(2) Método das Cascas Cilíndricas

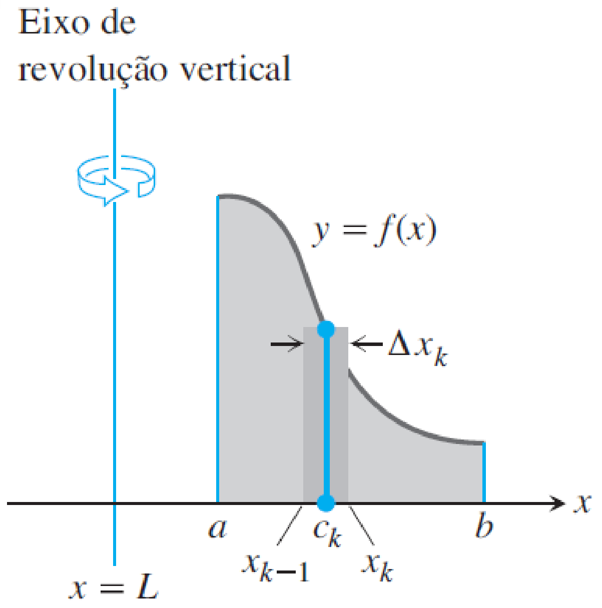
Seja $y = f(x)$ uma função contínua não negativa em $[a, b]$. Considere S o sólido obtido pela rotação em torno do eixo $x = L$ da região delimitada por $y = f(x),\ y = 0,\ x = a$ e $x = b$, com $a \geq L$.



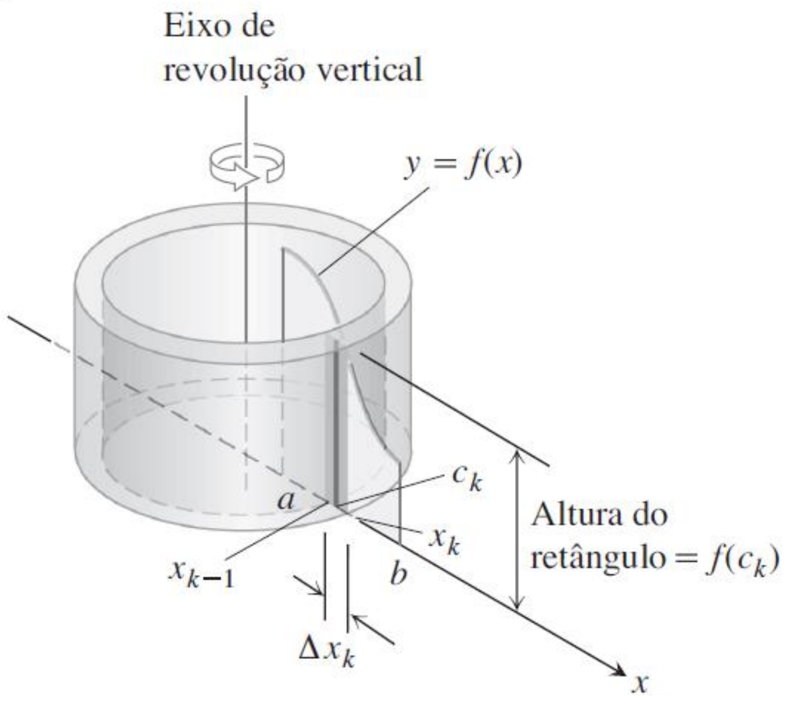
Seja $P: a = x_0 < x_1 < \cdots < x_n = b$ uma partição de $[a, b]$.
Para cada $k = 1, \ldots, n$, seja c_k o ponto médio do intervalo $[x_{k-1}, x_k]$:

$$c_k = \frac{x_k + x_{k-1}}{2}.$$

Vamos aproximar a região acima usando retângulos baseados na partição P.
Um retângulo típico tem altura $f(c_k)$ e comprimento $\Delta x_k = x_k - x_{k-1}$.



Quando giramos o retângulo em torno da reta vertical $x = L$, obtemos uma casca cilíndrica de raio interno $x_{k-1} - L$, raio externo $x_k - L$ e altura $f(c_k)$.



O volume V_k dessa casca é calculado subtraindo o volume V_1 do cilindro interno a partir do volume V_2 do cilindro externo:

$$\begin{aligned}
V_k &= V_2 - V_1 \\
&= \pi(x_k - L)^2 f(c_k) - \pi(x_{k-1} - L)^2 f(c_k) \\
&= \pi f(c_k)[(x_k - L)^2 - (x_{k-1} - L)^2] \\
&= \pi f(c_k)\left[x_k^2 - x_{k-1}^2 - 2x_k L + 2x_{k-1} L\right] \\
&= \pi f(c_k)[(x_k + x_{k-1})(x_k - x_{k-1}) - 2L(x_k - x_{k-1})] \\
&= \pi f(c_k)[2c_k(x_k - x_{k-1}) - 2L(x_k - x_{k-1})] \\
&= 2\pi f(c_k)(c_k - L)(x_k - x_{k-1}) \\
&= 2\pi(c_k - L) f(c_k)\Delta x_k
\end{aligned}$$

Logo, quando somamos os volumes das n cascas cilíndricas, obtemos um valor aproximado para o volume do sólido S:

$$V \approx \sum_{k=1}^{n} V_k = \sum_{k=1}^{n} 2\pi(c_k - L) f(c_k)\Delta x_k.$$

O limite dessa Soma de Riemann quando $n \to \infty$, fornece o volume do sólido como uma integral definida:

$$V = \lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} 2\pi(c_k - L) f(c_k) \Delta x_k \quad \Rightarrow$$

$$\boxed{V = \int_a^b 2\pi(x - L) f(x)\, dx}$$

Observações:

(1) Para facilitar a memorização da fórmula acima, podemos reescrever a integral como

$$\boxed{V = \int_a^b 2\pi(\text{raio da casca})(\text{altura da casca})\, dx\,.}$$

(2) Se o eixo de rotação for uma reta horizontal $y = K$, podemos proceder de maneira análoga ao que fizemos anteriormente.

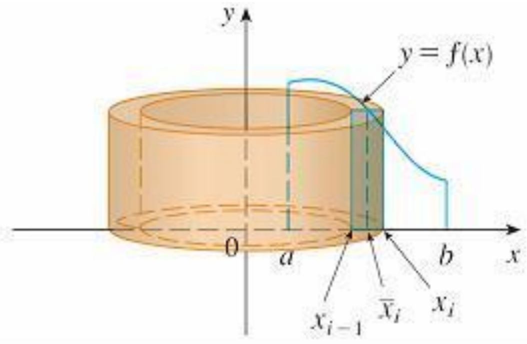
Resumo do Método das Cascas Cilíndricas

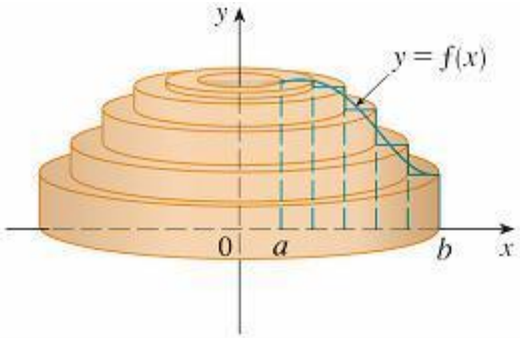
Independente da posição do eixo de revolução (horizontal ou vertical), os passos para implementar o método da casca são os seguintes:

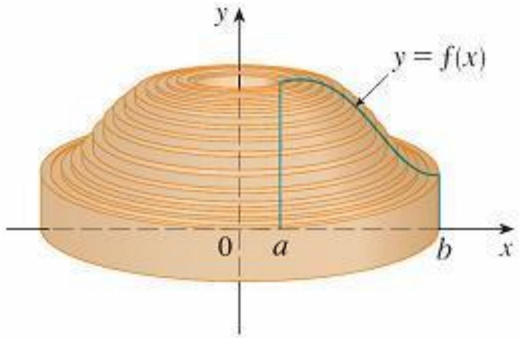
(1) Desenhe a região e esboce um segmento de reta que a atravesse paralelamente ao eixo de revolução. Nomeie a altura ou o comprimento do segmento (altura da casca) e a distância do eixo de revolução (raio da casca).

(2) Determine os limites de integração da variável (x ou y).

(3) Calcule a integral do produto $2\pi(\text{raio da casca})(\text{altura da casca})$ em relação à variável (x ou y) para determinar o volume.



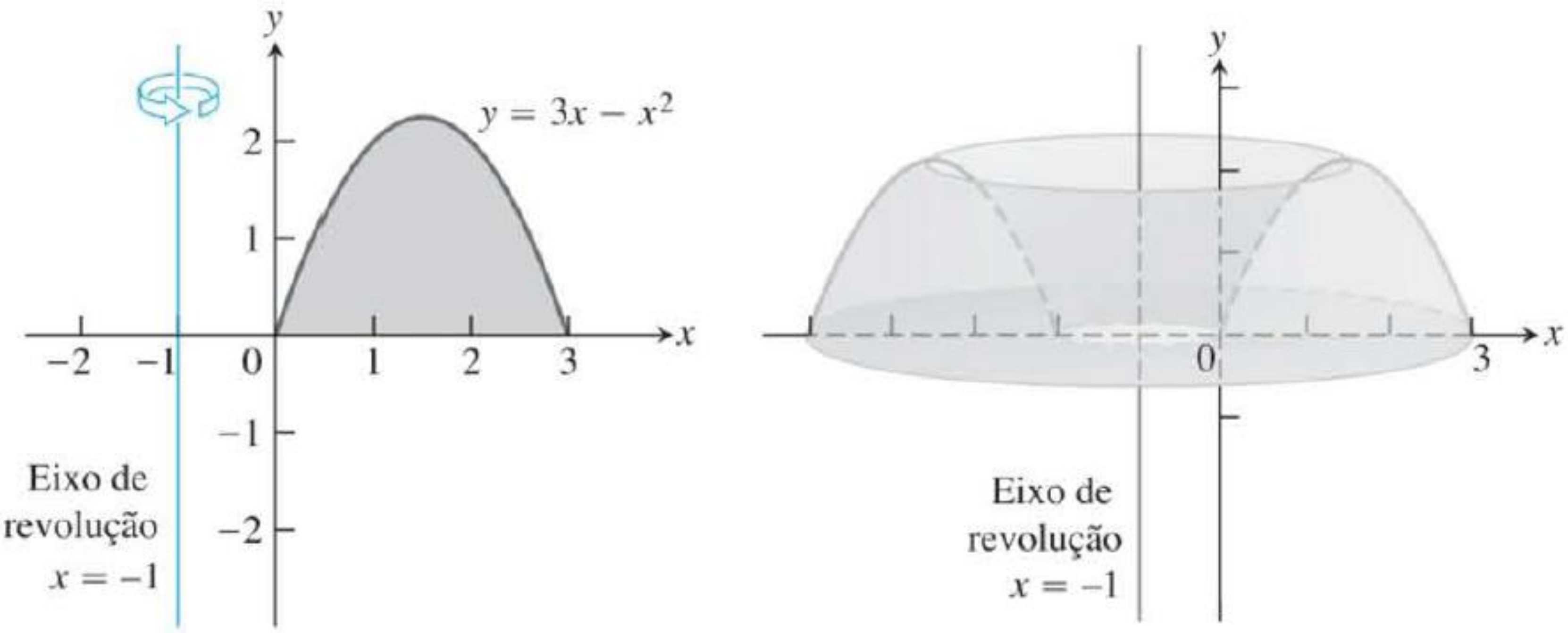




Exemplos:

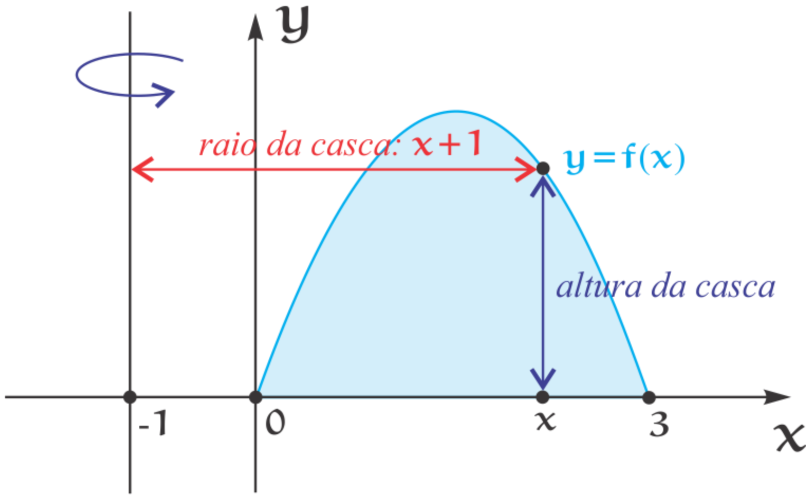
(1) Determine o volume do sólido obtido pela rotação em torno da reta $x = -1$ da região compreendida entre o eixo x e a parábola $y = 3x - x^2$.

Solução: Abaixo temos um esboço da região e do sólido obtido por sua rotação em torno da reta $x = -1$.



Observe que usar o método das Secções Transversais neste exercício seria complicado, pois para determinar os raios das secções transversais precisaríamos expressar os valores de x nos braços esquerdo e direito da parábola em termos de y (ou seja, precisaríamos isolar o x).

Fazendo na região um segmento de reta **paralelamente** ao eixo de revolução, temos que o comprimento desse segmento corresponde a altura da casca e a distância do eixo de revolução até o segmento é o raio da casca.



Raio da casca: $x + 1$
Altura da casca: $y = 3x - x^2$
Intervalo de integração: $0 \leq x \leq 3$

O volume do sólido é, portanto:

$$V = \int_a^b 2\pi(\text{raio da casca})(\text{altura da casca})\, dx$$

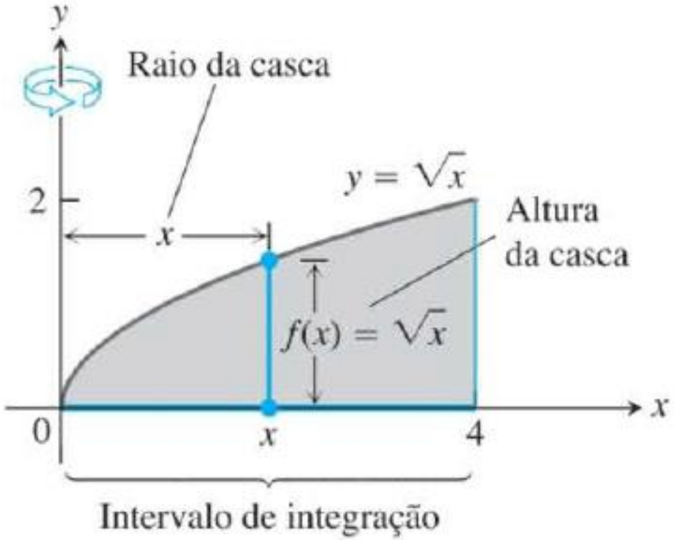
$$= \int_0^3 2\pi(x+1)(3x - x^2)\, dx$$

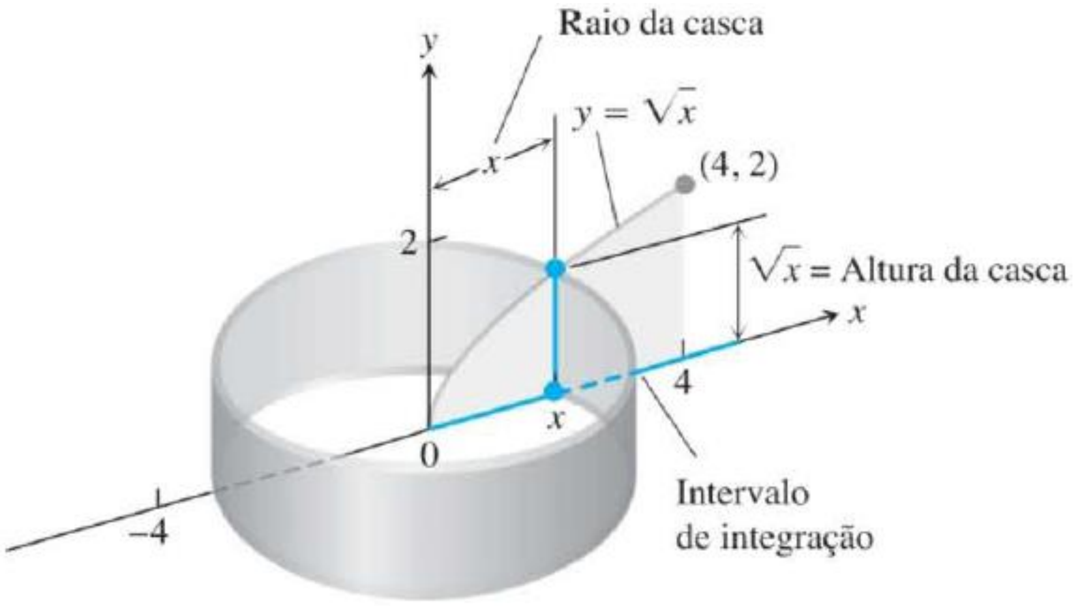
$$= 2\pi \int_0^3 (2x^2 + 3x - x^3)\, dx$$

$$= \frac{45\pi}{2}$$

(**2**) A região limitada pela curva $y = \sqrt{x}$, pelo eixo x e pela reta $x = 4$ é girada em torno do eixo y gerando um sólido. Determine o volume desse sólido.

Solução: Faça um esboço da região e desenhe um segmento de reta através dela **paralelamente** ao eixo de revolução. O comprimento desse segmento será a altura da casca e a distância do eixo de revolução até o segmento será o raio da casca.



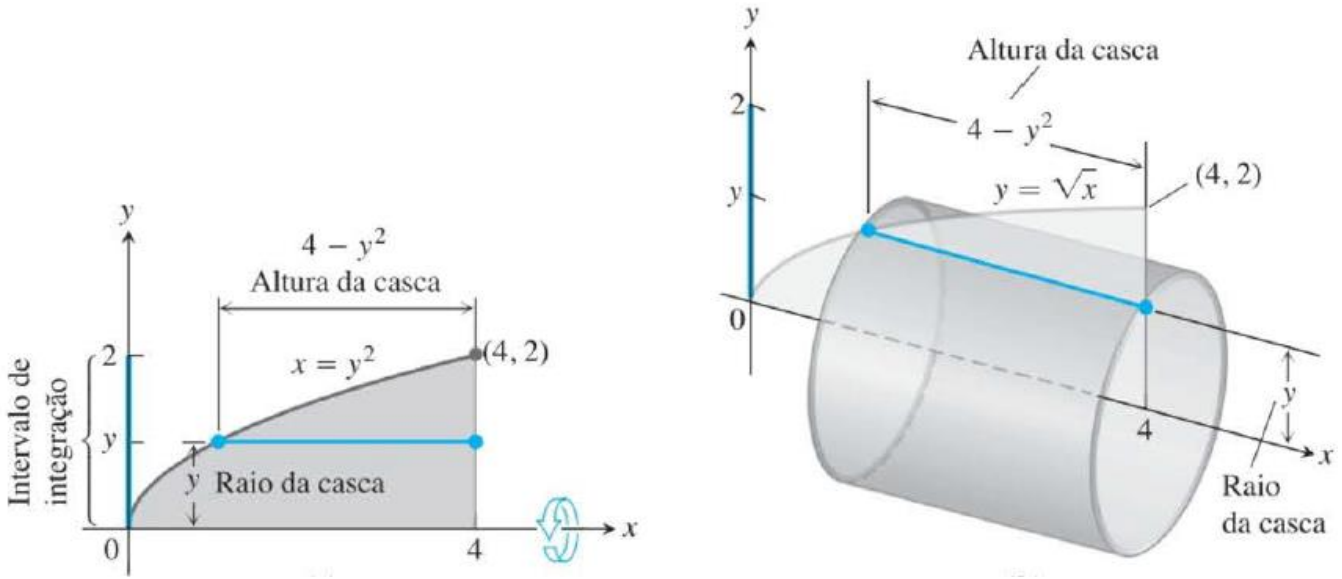


Da figura, obtemos ainda que o intervalo de integração é de 0 até 4. Logo, o volume do sólido é dado por:

$$V = \int_a^b 2\pi(\text{raio da casca})(\text{altura da casca})\,dx \quad = \int_0^4 2\pi(x)(\sqrt{x})\,dx = \frac{128\pi}{5}.$$

(**3**) Determine o volume do sólido obtido pela rotação da região do exercício anterior em torno do eixo x.

Solução: Fazendo um esboço da região e desenhando um segmento de reta através dela **paralelamente** ao eixo de rotação, obtemos que:



Raio da casca: y
Altura da casca: $x = 4 - y^2$
Intervalo de integração: $0 \leq y \leq 2$

Portanto, o volume do sólido é dado por:

$$V = \int_c^d 2\pi(\text{raio da casca})(\text{altura da casca})\, dy$$

$$= \int_0^2 2\pi(y)(4 - y^2)\, dy$$

$$= 2\pi \int_0^2 4y - y^3\, dy = 8\pi.$$

Exercícios

(1) Calcule o volume do sólido obtido pela rotação em torno do eixo y do conjunto de todos os (x, y) tais que $0 \leq x \leq 1$ e $0 \leq y \leq x - x^3$.

(2) Considere a região do 1º quadrante que está acima de $y = x^2$ e abaixo de $y = 2 - x^2$. Calcule o volume do sólido obtido girando-se essa região em torno do eixo y, usando:
(**a**) O método das cascas cilíndricas.
(**b**) O método das secções transversais.

(3) Calcule o volume do sólido obtido pela rotação, em torno do eixo y, do conjunto de todos (x, y) tais que $0 \leq x \leq e$, $0 \leq y \leq 2$ e $y \geq \ln x$.

(4) Sejam

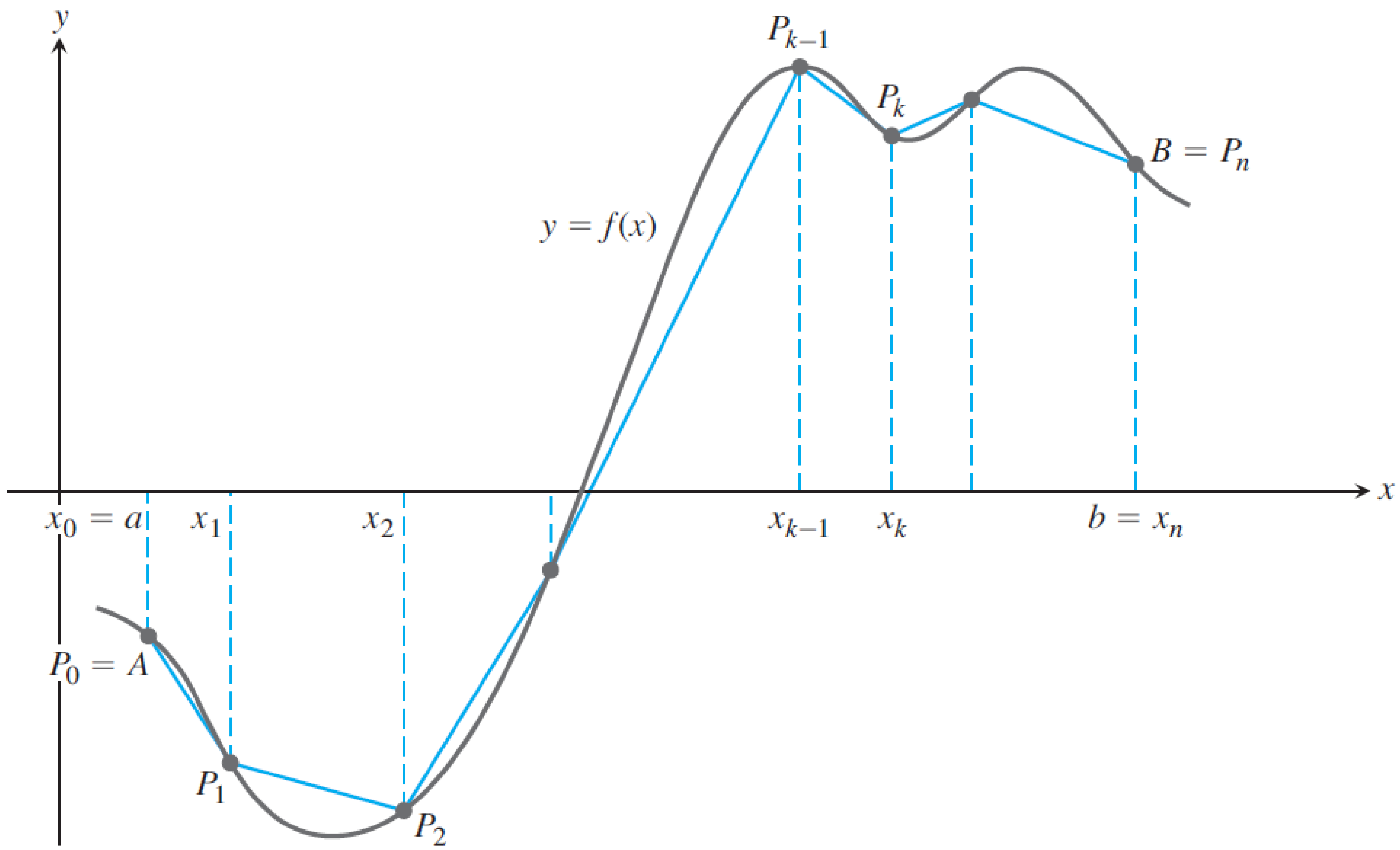
R_1: região limitada pelo eixo x, pela reta $x = 1$ e pela curva $y = x^2$;
R_2: região limitada pelas curvas $y = x^2$ e $y = \sqrt{x}$.

Encontre o volume do sólido quando:

(**a**) R_1 gira em torno do eixo y, usando o método das cascas cilíndricas.
(**b**) R_1 gira em torno do eixo y, usando o método das secções transversais.
(**c**) R_2 gira em torno do eixo x, usando o método das secções transversais.
(**d**) R_2 gira em torno do eixo x, usando o método das cascas cilíndricas.

Comprimento de Curva

Seja C uma curva dada por $y = f(x)$, cuja derivada seja contínua em $[a, b]$.
Seja $P: a = x_0 < x_1 < \cdots < x_n = b$ uma partição de $[a, b]$ e sejam $P_i = \big(x_i, f(x_i)\big)$, $0 \leq i \leq n$.



Considere os segmentos de reta da forma $P_{k-1}P_k$. A união de todos esses segmentos é chamada de **poligonal** e os pontos P_i são chamados de **vértices** da poligonal.

O comprimento do segmento $P_{k-1}P_k$ é dado por $d(P_{k-1},P_k) = \sqrt{(x_k - x_{k-1})^2 + \big(f(x_k) - f(x_{k-1})\big)^2}$.

Logo, o comprimento da poligonal é

$$\sum_{k=1}^{n} \sqrt{(x_k - x_{k-1})^2 + \big(f(x_k) - f(x_{k-1})\big)^2}\,.$$

Pelo Teorema do Valor Médio, em cada intervalo da partição, existe $c_k \in [x_{k-1}, x_k]$ tal que

$$\begin{aligned} f(x_k) - f(x_{k-1}) &= f'(c_k) \cdot (x_k - x_{k-1}) \\ &= f'(c_k) \cdot \Delta x_k\ ,\ \text{ onde } \Delta x_k = x_k - x_{k-1}. \end{aligned}$$

Então, o comprimento da poligonal fica

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^{n} \sqrt{(x_k - x_{k-1})^2 + \big(f(x_k) - f(x_{k-1})\big)^2} &= \sum_{k=1}^{n} \sqrt{(\Delta x_k)^2 + (f'(c_k) \cdot \Delta x_k)^2} \\ &= \sum_{k=1}^{n} \sqrt{(\Delta x_k)^2 (1 + f'(c_k)^2)} \\ &= \sum_{k=1}^{n} \Delta x_k \sqrt{1 + f'(c_k)^2} \end{aligned}$$

Essa soma é uma aproximação para o comprimento da curva C. Além disso, ela representa uma Soma de Riemann da função $\sqrt{1+f'(x)^2}$.

Fazendo $n \to \infty$, temos uma melhora na aproximação do comprimento da curva C pelo comprimento da poligonal. Deste modo, definimos o comprimento de C por

$$L = \lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} \Delta x_k \sqrt{1+f'(c_k)^2} \quad \Rightarrow \quad \boxed{L = \int_a^b \sqrt{1+f'(x)^2}\ dx.}$$

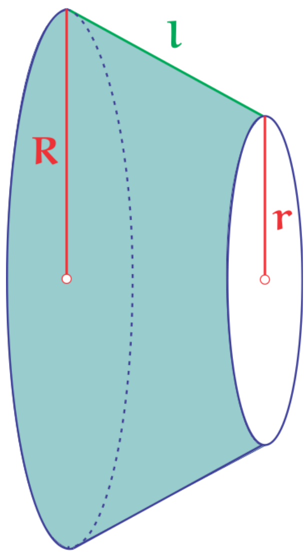
Exercícios

(1) Calcule o comprimento da curva $y = \frac{x^2}{2}$, $0 \leq x \leq 1$.

(2) Determine o comprimento da curva $x = \frac{y^3}{3} + \frac{1}{4y}$, $1 \leq y \leq 3$.

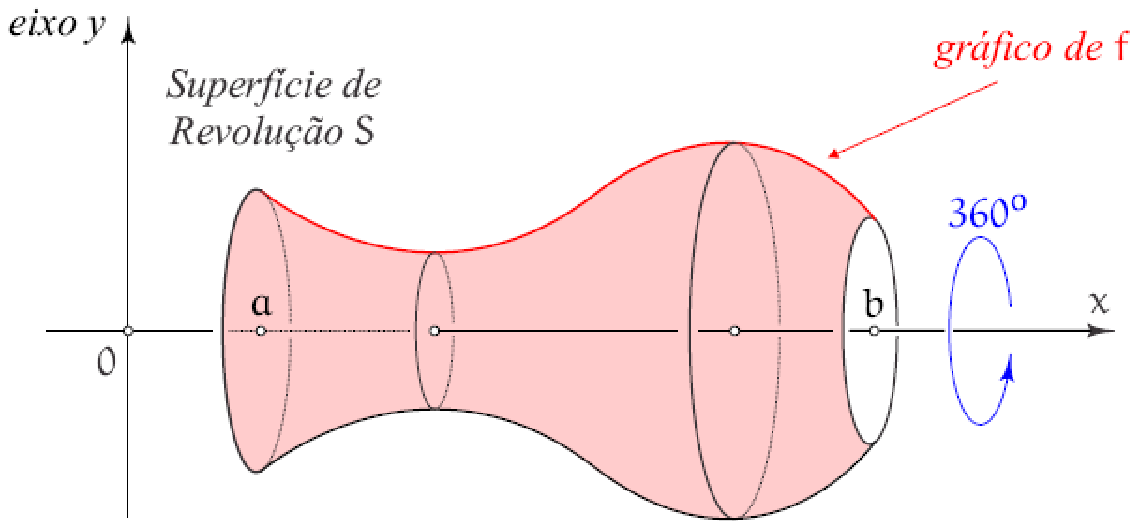
Área de Superfície de Revolução

Da geometria espacial, sabemos que se um tronco de cone tem geratriz l, raio da base menor r e raio da base maior R, então a sua área lateral é dada por

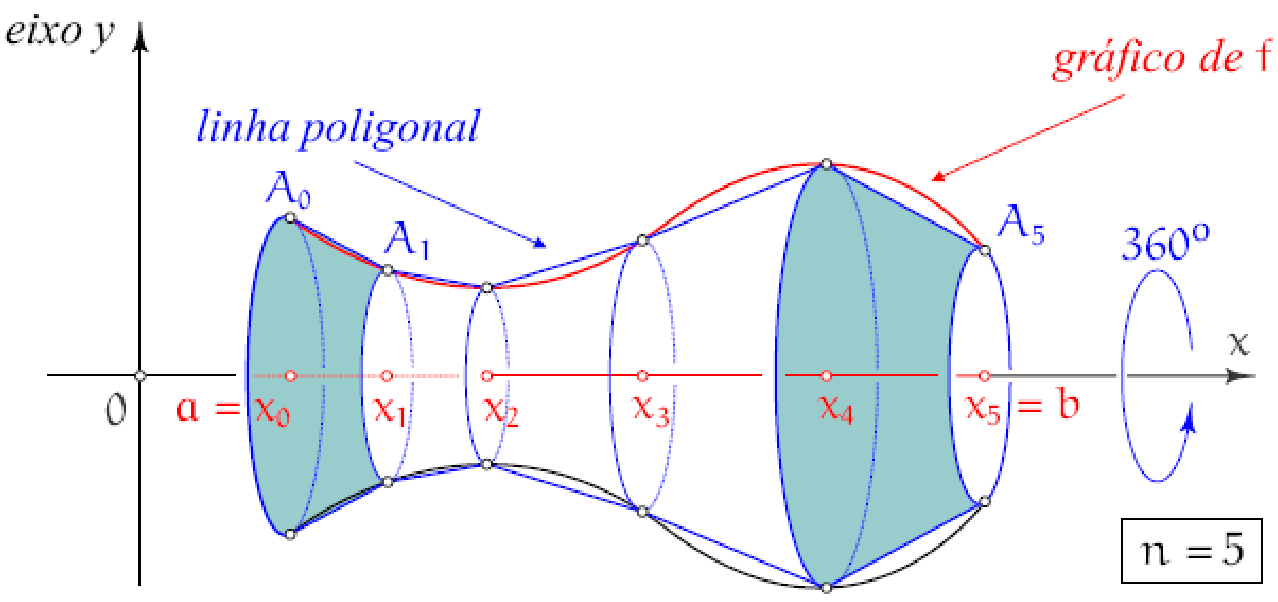


$$\boxed{A_l = 2\pi l\left(\frac{R+r}{2}\right)}$$

Seja $y = f(x)$ uma função positiva, com derivada contínua, para todo $x \in [a, b]$.
Consideremos a superfície S, obtida pela rotação do gráfico de f em torno do eixo x.
Vamos calcular a área dessa superfície de revolução.



Seja $P: a = x_0 < x_1 < \cdots < x_n = b$ uma partição de $[a, b]$, com $\Delta x_i = x_i - x_{i-1}$.
Considere os segmentos de reta com extremos nos pontos $A_{i-i}A_i$, sendo $A_i = (x_i, f(x_i))$, com $1 \leq i \leq n$. Temos assim, uma poligonal com vértices no gráfico de f.



Observe que cada segmento $A_{i-1}A_i$ dá origem a uma superfície de um tronco de cone, cujos raios são dados por $f(x_{i-1})$ e $f(x_i)$. Assim, a área do tronco de cone entre x_{i-1} e x_i é igual a

$$A_l = 2\pi A_{i-1}A_i \left(\frac{f(x_{i-1}) + f(x_i)}{2}\right).$$

Sabemos que $\mathrm{A}_{i-1}A_i = d(A_{i-1}, A_i) = \sqrt{(x_i - x_{i-1})^2 + \left(f(x_i) - f(x_{i-1})\right)^2}.$

Pelo Teorema do Valor Médio, existe $c_i \in [x_{i-1}, x_i]$ tal que

$$f(x_i) - f(x_{i-1}) = f'(c_i) \cdot (x_i - x_{i-1}) = f'(c_i)\Delta x_i.$$

Então,

$$A_{i-1}A_i = \sqrt{(\Delta x_i)^2 + (f'(c_i) \cdot \Delta x_i)^2} = \sqrt{(\Delta x_i)^2(1 + f'(c_i)^2)} = \Delta x_i\sqrt{1 + f'(c_i)^2}\,.$$

Logo,

$$A_l = 2\pi\left(\frac{f(x_{i-1}) + f(x_i)}{2}\right)\Delta x_i\sqrt{1 + f'(c_i)^2}.$$

Quando Δx_i é muito pequeno, x_i e x_{i-1} estão próximos de c_i e, como f é contínua, segue que $f(x_i) \approx f(c_i)$ e $f(x_{i-1}) \approx f(c_i)$. Assim,

$$A_l = 2\pi\left(\frac{2f(c_i)}{2}\right)\Delta x_i\sqrt{1 + f'(c_i)^2} = 2\pi f(c_i)\Delta x_i\sqrt{1 + f'(c_i)^2}.$$

A soma

$$\sum_{i=1}^{n} 2\pi f(c_i)\Delta x_i\sqrt{1 + f'(c_i)^2}$$

é uma aproximação para a área lateral da superfície S.

Naturalmente, quando $n \to \infty$ temos uma melhora nessa aproximação. Deste modo, definimos a área da superfície S como sendo

$$A = \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} 2\pi f(c_i)\Delta x_i \sqrt{1 + f'(c_i)^2} \quad \Rightarrow \quad \boxed{A = \int_a^b 2\pi f(x)\sqrt{1 + f'(x)^2}\ dx.}$$

Observação: Se a superfície de revolução é obtida girando-se a curva $x = g(y)$, $c \leq y \leq d$, em torno do eixo y, então a sua área é dada por

$$\boxed{A = \int_c^d 2\pi g(y)\sqrt{1 + g'(y)^2}\, dy\,.}$$

Exercícios

(1) A curva $\sqrt{4-x^2}, -1 \leq x \leq 1$ é um arco da circunferência $x^2 + y^2 = 4$. Encontre a área da superfície obtida pela rotação desse arco em torno do eixo x.

(2) Calcule a área da superfície gerada pela rotação em torno do eixo y, da curva $y = \frac{x^2}{2}$, $0 \leq x \leq 1$.