

## Agora é a sua vez da seção 1 (Noção intuitiva de limites)

1)

a)

$x$	$y$	$\lim_{x \rightarrow 0} (3 - 7x - 5x^2) = 3$
0,01	2,9295	
0,001	2,992995	
0,0001	2,999299950	
-0,01	3,0695	
-0,001	3,006995	
-0,0001	3,000699949	

b)

$x$	$y$	$\lim_{x \rightarrow -1} (-3x + 7) = 10$
-1,5	11,5	
-1,2	10,6	
-1,1	10,3	
-0,9	9,7	
-0,8	9,4	
-0,5	8,5	

c)

$x$	$y$	$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 - 1}{x - 1} = 2$
0,9	1,9	
0,99	1,99	
0,999	1,999	
1,001	2,001	
1,01	2,01	
1,1	2,1	

d)

$x$	$y$	$\lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{x+1}{x^3-1} = +\infty$
1,2	3,021978021	
1,15	4,127669786	
1,1	6,344410876	
1,01	66,3344444	
1,001	666,3334444	
1,0001	6666,3333	

e)

$x$	$y$	$\lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{x+1}{x^3-1} = -\infty$
0,5	-1,714285714	
0,8	-3,688524590	
0,9	-7,011070110	
0,99	-67,00111107	
0,999	-667,0001111	
0,9999	-6666,999966	

f)

$x$	$y$	$\lim_{x \rightarrow +\infty} (3x^2 - 7x + 2) = +\infty$
100	$2,93 \times 10^4$	
1000	$2,993002 \times 10^6$	
10000	$2,99930002 \times 10^8$	
100000	$2,999993 \times 10^{10}$	
1000000	$2,999999 \times 10^{12}$	

g)

$x$	$y$	$\lim_{x \rightarrow -\infty} (3x^2 - 7x + 2) = +\infty$
-100	$3,0702 \times 10^4$	
-1000	$3,007002 \times 10^6$	
-10000	$3,00070002 \times 10^8$	
-100000	$3,00007 \times 10^{10}$	
-1000000	$3,000007 \times 10^{12}$	

2)

Analisando o gráfico da Figura 2.3 resolva os seguintes limites:

a)	b)	c)	d)
$\lim_{x \rightarrow 2^+} f(x) = 5$	$\lim_{x \rightarrow 2^-} f(x) = 5$	$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = -\infty$	$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = +\infty$

### Agora é a sua vez da seção 2 (Cálculo de limites usando propriedades)

Calcular os seguintes limites:

a)  $\lim_{x \rightarrow -3} (x^2 - 6x + 1)$

$$\lim_{x \rightarrow -3} (x^2 - 6x + 1) = (-3)^2 - 6 \cdot (-3) + 1 = 9 + 18 + 1 = 28$$

b)  $\lim_{x \rightarrow 4} \frac{x^2 - 16}{x - 4}$

Não podemos aplicar diretamente a propriedade 6, pois o limite do denominador vale zero, portanto fazemos primeiramente uma fatoração do numerador.

$$\lim_{x \rightarrow 4} \frac{x^2 - 16}{x - 4} = \lim_{x \rightarrow 4} \frac{(x - 4)(x + 4)}{x - 4} = \lim_{x \rightarrow 4} (x + 4) = 8$$

c)  $\lim_{x \rightarrow 0} (x + 5)^{\frac{2}{5}}$

Aplicamos aqui a propriedade 8.

$$\lim_{x \rightarrow 0} (x + 5)^{\frac{2}{5}} = \left( \lim_{x \rightarrow 0} (x + 5) \right)^{\frac{2}{5}} = (0 + 5)^{\frac{2}{5}} = \sqrt[5]{5^2} = \sqrt[5]{25}$$

d)  $\lim_{x \rightarrow 2} (x^2 - 1)^5 (x - 3)^3$

Aplicamos a propriedade do produto e a propriedade 8.

$$\lim_{x \rightarrow 2} (x^2 - 1)^5 (x - 3)^3 = \lim_{x \rightarrow 2} (x^2 - 1)^5 \cdot \lim_{x \rightarrow 2} (x - 3)^3 = (2^2 - 1)^5 \cdot (2 - 3)^3 = 243 \cdot (-1) = -243$$

$$e) \lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2 - 5x + 6}{x - 2}$$

Aqui não podemos aplicar a propriedade do quociente, já que o limite do denominador é zero. Fazemos então uma fatoração do denominador.

$$\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2 - 5x + 6}{x - 2} = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{(x - 2)(x - 3)}{x - 2} = \lim_{x \rightarrow 2} (x - 3) = 2 - 3 = -1$$

$$f) \lim_{x \rightarrow 0} (e^x + 1)$$

Usamos a propriedade 12.

$$\lim_{x \rightarrow 0} (e^x + 1) = e^0 + 1 = 1 + 1 = 2$$

$$g) \lim_{x \rightarrow \frac{1}{3}} (7x - 8)$$

Usamos a propriedade 1.

$$\lim_{x \rightarrow \frac{1}{3}} (7x - 8) = 7 \cdot \frac{1}{3} - 8 = \frac{-17}{3}$$

$$h) \lim_{x \rightarrow 3} \sqrt[3]{x^2 - 1}$$

Aplicamos a propriedade 8.

$$\lim_{x \rightarrow 3} \sqrt[3]{x^2 - 1} = \sqrt[3]{3^2 - 1} = \sqrt[3]{8} = 2$$

$$i) \lim_{x \rightarrow 5} \frac{x^2 - 5}{x + 7}$$

Basta aplicar a propriedade 6.

$$\lim_{x \rightarrow 5} \frac{x^2 - 5}{x + 7} = \frac{5^2 - 5}{5 + 7} = \frac{20}{12} = \frac{5}{3}$$

### Agora é a sua vez da seção 3 (Limites laterais e indeterminações)

1) Calcular  $\lim_{x \rightarrow 3} f(x)$ , para  $f(x) = \begin{cases} x^2 - 5 & ; \quad x \leq 3 \\ \sqrt{x+13} & ; \quad x > 3 \end{cases}$

Para  $\lim_{x \rightarrow 3} f(x)$  existir, é necessário que os limites laterais existam e sejam iguais.

$$\lim_{x \rightarrow 3^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 3^+} \sqrt{x+13} = \sqrt{3+13} = \sqrt{16} = 4$$

$$\lim_{x \rightarrow 3^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 3^-} (x^2 - 5) = 3^2 - 5 = 9 - 5 = 4$$

Logo,  $\lim_{x \rightarrow 3} f(x) = 4$

2) Seja  $f(x) = \begin{cases} \frac{|x|}{x} & x \neq 0 \\ 0 & x = 0 \end{cases}$

Calcular  $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x)$ ,  $\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x)$ ,  $\lim_{x \rightarrow 0} f(x)$  se existirem.

Lembre-se que  $\frac{|x|}{x} = \frac{x}{x} = 1$ , se  $x > 0$  e  $\frac{|x|}{x} = -\frac{x}{x} = -1$ , se  $x < 0$ . Logo

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} 1 = 1$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^-} (-1) = -1$$

$\lim_{x \rightarrow 0} f(x)$  não existe pois os limites laterais são diferentes.

3) Calcule os seguintes limites.

a)  $\lim_{x \rightarrow -2} \frac{x^3 + 8}{x + 2}$

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow -2} \frac{x^3 + 8}{x + 2} &= \lim_{x \rightarrow -2} \frac{(x+2)(x^2 - 2x + 4)}{x + 2} = \\ &= \lim_{x \rightarrow -2} (x^2 - 2x + 4) = (-2)^2 - 2 \cdot (-2) + 4 = 4 + 4 + 4 = 12 \end{aligned}$$

b)  $\lim_{x \rightarrow 3} \frac{x^2 - x - 6}{x - 3}$

$$\lim_{x \rightarrow 3} \frac{x^2 - x - 6}{x - 3} = \lim_{x \rightarrow 3} \frac{(x-3)(x+2)}{x-3} = \lim_{x \rightarrow 3} (x+2) = 3 + 2 = 5$$

$$c) \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt{x+1} - \sqrt{2}}{x-1}$$

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt{x+1} - \sqrt{2}}{x-1} &= \lim_{x \rightarrow 1} \frac{(\sqrt{x+1} - \sqrt{2})(\sqrt{x+1} + \sqrt{2})}{(x-1)(\sqrt{x+1} + \sqrt{2})} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x+1-2}{(x-1)(\sqrt{x+1} + \sqrt{2})} = \\ &= \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x-1}{(x-1)(\sqrt{x+1} + \sqrt{2})} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{1}{\sqrt{x+1} + \sqrt{2}} = \frac{1}{\sqrt{1+1} + \sqrt{2}} = \\ &= \frac{1}{2\sqrt{2}} \end{aligned}$$

$$d) \lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2 - 5x + 6}{x^2 - 12x + 20}$$

$$\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2 - 5x + 6}{x^2 - 12x + 20} = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{(x-2)(x-3)}{(x-2)(x-10)} = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{x-3}{x-10} = \frac{2-3}{2-10} = \frac{1}{8}$$

$$e) \lim_{x \rightarrow 5} \frac{\sqrt{2x-1} - 3}{x-5}$$

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 5} \frac{\sqrt{2x-1} - 3}{x-5} &= \lim_{x \rightarrow 5} \frac{(\sqrt{2x-1} - 3)(\sqrt{2x-1} + 3)}{(x-5)(\sqrt{2x-1} + 3)} = \lim_{x \rightarrow 5} \frac{2x-1-9}{(x-5)(\sqrt{2x-1} + 3)} = \\ &= \lim_{x \rightarrow 5} \frac{2x-10}{(x-5)(\sqrt{2x-1} + 3)} = \lim_{x \rightarrow 5} \frac{2(x-5)}{(x-5)(\sqrt{2x-1} + 3)} = \\ &= \lim_{x \rightarrow 5} \frac{2}{\sqrt{2x-1} + 3} = \frac{2}{\sqrt{9} + 3} = \frac{2}{6} = \frac{1}{3} \end{aligned}$$

$$f) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(x+3)^2 - 9}{x}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{(x+3)^2 - 9}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2 + 6x + 9 - 9}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2 + 6x}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x(x+6)}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} (x+6) = 6$$

$$g) \lim_{x \rightarrow 5} \frac{x^2 - 8x + 15}{x(x-5)}$$

$$\lim_{x \rightarrow 5} \frac{x^2 - 8x + 15}{x(x-5)} = \lim_{x \rightarrow 5} \frac{(x-5)(x-3)}{x(x-5)} = \lim_{x \rightarrow 5} \frac{x-3}{x} = \frac{5-3}{5} = \frac{2}{5}$$

$$h) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(x+1)^4 - 1}{x}$$

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(x+1)^4 - 1}{x} &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^4 + 4x^3 + 6x^2 + 4x + 1 - 1}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x(x^3 + 4x^2 + 6x + 4)}{x} = \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} (x^3 + 4x^2 + 6x + 4) = 0 + 0 + 0 + 4 = 4 \end{aligned}$$

**Agora é a sua vez da seção 4 (Limites no infinito e limites infinitos)**

Calcular os seguintes limites.

$$a) \lim_{t \rightarrow -\infty} (x^2 + 6x + 7) = \lim_{x \rightarrow -\infty} x^2 \left(1 + \frac{6}{x} + \frac{7}{x^2}\right) = \infty \cdot (1 + 0 + 0) = +\infty$$

$$b) \lim_{x \rightarrow 8^+} \frac{2x - 1}{2x - 16} = \frac{2 \cdot 8 - 1}{0^+} = \frac{15}{0^+} = +\infty$$

$$c) \lim_{t \rightarrow +\infty} \frac{6x^4 - 7x^3 + 2x^2 + 6x + 10}{7x + 1} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{6x^4}{7x} = \frac{6}{7} \lim_{x \rightarrow +\infty} x^3 = \frac{6}{7} \cdot +\infty = +\infty$$

$$d) \lim_{t \rightarrow 2^-} \frac{x^2 + 3x + 1}{x^2 + x - 6} = \lim_{x \rightarrow 2^-} \frac{x^2 + 3x + 1}{(x - 2)(x + 3)} = \frac{2^2 + 3 \cdot 2 + 1}{0^- \cdot 5} = \frac{11}{0^-} = -\infty$$

$$e) \lim_{t \rightarrow -\infty} \frac{x^2 + 2x + 2}{x^3 - 1} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x^2}{x^3} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{1}{x} = 0$$

$$f) \lim_{t \rightarrow +\infty} \frac{3x^2 + x - 6}{6x^2 - 7x + 1} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{3x^2}{6x^2} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{3}{6} = \frac{3}{6} = \frac{1}{2}$$

### Agora é a sua vez da seção 6 (Continuidade)

1) Verificar se as seguintes funções são contínuas no ponto indicado.

a)  $f(x) = \frac{x^2 - 5x + 6}{x^2 - 9}$  em  $x = 3$

Para que  $f(x)$  seja contínua em  $x=3$ , é necessário calcular  $f(3)$ . Isto não é possível pois não existe divisão por zero, logo a função não é contínua em  $x=3$ .

b)  $g(x) = \begin{cases} \frac{x^2 - 9}{x^2 - 5x + 6} & x \neq 3 \\ 6 & x = 3 \end{cases}$  em  $x=3$

■  $f(3)=6$

■  $\lim_{x \rightarrow 3} f(x) = \lim_{x \rightarrow 3} \frac{x^2 - 9}{x^2 - 5x + 6} = \lim_{x \rightarrow 3} \frac{(x-3)(x+3)}{(x-3)(x-2)} = \lim_{x \rightarrow 3} \frac{x+3}{x-2} = \frac{6}{1} = 6$

Como  $f(3) = 6 = \lim_{x \rightarrow 3} f(x)$ , segue que a função é contínua em  $x=3$ .

c)  $h(x) = x^2 - 2x + 1$  em  $x=1$

■  $f(1) = 1 - 2 + 1 = 0$

■  $\lim_{x \rightarrow 1} (x^2 - 2x + 1) = 1 - 2 + 1 = 0$

Como  $f(1) = 0 = \lim_{x \rightarrow 1} f(x)$ , segue que a função é contínua em  $x=1$ .

d)  $f(x) = \begin{cases} x^2 & x \geq 0 \\ x + 2 & x < 0 \end{cases}$  em  $x=0$

■  $f(0) = 0^2 = 0$

■  $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} x^2 = 0$  e  $\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^-} (x + 2) = 2$

O fato de os limites laterais não serem iguais caracteriza a descontinuidade da função em  $x=0$ .



2) Em cada item, encontre uma função  $f$  que satisfaça a condição proposta.

a)  $f$  é contínua em toda parte, exceto no ponto  $x=1$ .

b)  $f$  tem limite em  $x=1$ , mas não é contínua naquele ponto.

Encontre um exemplo de duas funções com as características solicitadas e envie ao professor tutor, via e-mail, para que ele faça a correção para você.

3) Ache o valor de  $k$  para que a função  $f$  seja contínua.

$$f(x) = \begin{cases} 4x - 3 & ; \quad x \geq 3 \\ kx & ; \quad x < 3 \end{cases}$$

Para a função ser contínua, devemos ter  $f(3) = \lim_{x \rightarrow 3} f(x)$ . Mas  $f(3) = 4 \cdot 3 - 3 = 9$ .

Agora  $\lim_{x \rightarrow 3^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 3^+} (4x - 3) = 9$  e  $\lim_{x \rightarrow 3^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 3^-} kx = 3k$ . Assim para satisfazer a condição de continuidade devemos ter

$$3k = 9$$

$$k = 3$$

4) Encontre os pontos de descontinuidade das seguintes funções:

a)  $f(x) = \frac{x^3 - 8}{x^2 - 4}$

O denominador desta função se anula quando  $x=-2$  e  $x=2$ , logo não existem  $f(-2)$  e  $f(2)$ , e portanto a função é descontinua em  $x=-2$  e  $x=2$ .

b)  $g(x) = \frac{x}{|x|}$

É fácil de perceber que não é possível calcular  $f(0)$ , pois temos uma divisão por zero, logo a função não é contínua em zero.

c)  $h(x) = \begin{cases} x^2 + 1 & x \neq 3 \\ 10 & x = 3 \end{cases}$

Aqui temos que  $f(3)=10$  e  $\lim_{x \rightarrow 3} (x^2 + 1) = 9 + 1 = 10$ , portanto a função  $h(x)$  é contínua em  $x=3$ . Qualquer outro ponto  $x=a$ , a função também é contínua, pois  $f(a) = a^2 - 1 = \lim_{x \rightarrow a} f(x)$

Logo esta função não apresenta ponto de descontinuidade.

## Atividades de auto-avaliação

1) Calcular os limites abaixo:

$$\text{a) } \lim_{x \rightarrow 2} (x^3 - 6x^2 + 7x - 1) = 2^3 - 6 \cdot 2^2 + 7 \cdot 2 - 1 = 8 - 24 + 14 - 1 = -3$$

$$\text{b) } \lim_{x \rightarrow 0} \sqrt[3]{x^2 + x + 64} = \sqrt[3]{0^2 + 0 + 64} = \sqrt[3]{64} = 4$$

$$\text{c) } \lim_{x \rightarrow \frac{1}{2}} \frac{x-1}{x+2} = \frac{\frac{1}{2}-1}{\frac{1}{2}+2} = \frac{-\frac{1}{2}}{\frac{5}{2}} = -\frac{1}{5}$$

$$\text{d) } \lim_{x \rightarrow 1} e^{x^2-1} = e^{1^2-1} = e^0 = 1$$

e)

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 2} (x^2 - 1)^5 (x - 3)^3 &= \lim_{x \rightarrow 2} (x^2 - 1)^5 \cdot \lim_{x \rightarrow 2} (x - 3)^3 = \\ &= (2^2 - 1)^5 \cdot (2 - 3)^3 = 243 \cdot (-1) = -243 \end{aligned}$$

2) Calcular os limites abaixo:

a)

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{(x-3)^2 - 9}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2 - 6x + 9 - 9}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x(x-6)}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} (x-6) = 0 - 6 = -6$$

b)

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{x^2 + 16} - 4}{x^2} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(\sqrt{x^2 + 16} - 4)(\sqrt{x^2 + 16} + 4)}{x^2(\sqrt{x^2 + 16} + 4)} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2 + 16 - 16}{x^2(\sqrt{x^2 + 16} + 4)} =$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{\sqrt{x^2 + 16} + 4} = \frac{1}{\sqrt{16} + 4} = \frac{1}{8}$$

$$\text{c) } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^3 - x}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x(x^2 - 1)}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} (x^2 - 1) = 0 - 1 = -1$$

d)

$$\lim_{x \rightarrow -1} \frac{x^3 + 1}{x^2 - 1} = \lim_{x \rightarrow -1} \frac{(x+1)(x^2 - x + 1)}{(x+1)(x-1)} = \lim_{x \rightarrow -1} \frac{x^2 - x + 1}{x-1} = \frac{1+1+1}{-1-1} = -\frac{3}{2}$$

e)

$$\lim_{x \rightarrow 4} \frac{4-x}{2-\sqrt{x}} = \lim_{x \rightarrow 4} \frac{(4-x)(2+\sqrt{x})}{(2-\sqrt{x})(2+\sqrt{x})} = \lim_{x \rightarrow 4} \frac{(4-x)(2+\sqrt{x})}{4-x} = \lim_{x \rightarrow 4} (2+\sqrt{x}) = 2+\sqrt{4} = 4$$

f)  $\lim_{x \rightarrow 5} \frac{x^2 - 2x - 15}{-5x + x^2} = \lim_{x \rightarrow 5} \frac{(x-5)(x+3)}{x(x-5)} = \lim_{x \rightarrow 5} \frac{x+3}{x} = \frac{8}{5}$

3) Calcular os seguintes limites no infinito.

a)  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{3x-6}{7x+1} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{3x}{7x} = \frac{3}{7}$

b)  $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{7x^2 - 2x + 1}{3x^3 + 2x^2 - x + 7} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{7x^2}{3x^3} = \frac{7}{3} \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{1}{x} = \frac{7}{3} \cdot 0 = 0$

c)  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{3x^4 - 7x}{2x^4 - 6x^3 + 2x^2 - 6x + 1} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{3x^4}{2x^4} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{3}{2} = \frac{3}{2}$

d)  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x-5}{\sqrt{3x^2-x+1}} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\frac{x}{x} - \frac{5}{x}}{\frac{\sqrt{3x^2-x+1}}{\sqrt{x^2}}} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1 - \frac{5}{x}}{\sqrt{\frac{3x^2-x+1}{x^2}}} =$   
 $= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1 - \frac{5}{x}}{\sqrt{3 - \frac{1}{x} + \frac{1}{x^2}}} = \frac{1-0}{\sqrt{3-0+0}} = \frac{1}{\sqrt{3}}$

4) Calcular os seguintes limites.

a)  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{x^3} = 0$

b)  $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{1}{x^2} = 0$

c)

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} (x^3 - 6x^2 + x + 1) = \lim_{x \rightarrow +\infty} x^3 \left(1 - \frac{6}{x} + \frac{1}{x^2} + \frac{1}{x^3}\right) = \infty(1 - 0 + 0 + 0) = +\infty$$

$$\text{d) } \lim_{x \rightarrow +\infty} \left( \frac{1}{x} + x^2 - \frac{1}{x^6} \right) = 0 + \infty - 0 = +\infty$$

$$\text{e) } \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^2 + 6x - 1}{x^2 + x - 2} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^2}{x^2} = \lim_{x \rightarrow +\infty} 1 = 1$$

$$\text{f) } \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{3x^2 + 1}{5x + 1} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{3x^2}{5x} = \frac{3}{5} \lim_{x \rightarrow -\infty} x = \frac{3}{5} \cdot (-\infty) = -\infty$$

$$\text{g) } \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{5x^3 - 6x^2 + x - 1}{10x^4 - 1} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{5x^3}{10x^4} = \frac{5}{10} \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{x} = \frac{1}{2} \cdot 0 = 0$$

h)

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x-1}{\sqrt{x^2+1}} &= \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{\cancel{x-1} / x}{\sqrt{x^2+1} / \cancel{-\sqrt{x^2}}} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{1 - \frac{1}{x}}{-\sqrt{\frac{x^2+1}{x^2}}} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{1 - \frac{1}{x}}{-\sqrt{1 + \frac{1}{x^2}}} = \\ &= \frac{1-0}{-\sqrt{1+0}} = \frac{1}{-1} = -1 \end{aligned}$$

$$\text{i) } \lim_{x \rightarrow 2^-} \frac{x+2}{2-x} = \frac{4}{0^+} = +\infty$$

$$\text{j) } \lim_{x \rightarrow 2^+} \frac{x+2}{2-x} = \frac{4}{0^-} = -\infty$$

$$\text{k) } \lim_{x \rightarrow -3} \frac{1}{(x+3)^4}$$

Para resolver este limite, é possível fazer a substituição  $u=x+3$ . Desta forma teremos:

$$x \rightarrow -3$$

$$u-3 \rightarrow -3$$

$$u \rightarrow 0$$

Assim será necessário resolver o limite:

$$\lim_{u \rightarrow 0} \frac{1}{(u)^4}$$

$$\lim_{u \rightarrow 0^+} \frac{1}{(u)^4} = \frac{1}{(0^+)^4} = \frac{1}{0} = +\infty$$

$$\lim_{u \rightarrow 0^-} \frac{1}{(u)^4} = \frac{1}{(0^-)^4} = \frac{1}{0} = +\infty$$

$$\text{Logo } \lim_{x \rightarrow -3} \frac{1}{(x+3)^4} = +\infty$$

$$(l) \lim_{x \rightarrow -3^-} \frac{2}{(x+3)^3} = \frac{2}{(0^-)^3} = \frac{2}{0^-} = -\infty$$

5) Resolva os seguintes limites fundamentais.

$$a) \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(1 + \frac{5}{x}\right)^x$$

Fazendo  $\frac{5}{x} = \frac{1}{u}$ , temos que  $x=5u$  e se  $x \rightarrow +\infty$  então  $u \rightarrow +\infty$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(1 + \frac{5}{x}\right)^x = \lim_{u \rightarrow +\infty} \left(1 + \frac{1}{u}\right)^{5u} = \lim_{u \rightarrow +\infty} \left(\left(1 + \frac{1}{u}\right)^u\right)^5 = e^5$$

$$b) \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{x}{1+x}\right)^x$$

Fazendo a substituição  $1+x=u$  ou  $x=u-1$ , segue que se  $x \rightarrow +\infty$  então  $u \rightarrow +\infty$

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{x}{1+x}\right)^x &= \lim_{u \rightarrow +\infty} \left(\frac{u-1}{u}\right)^{u-1} = \lim_{u \rightarrow +\infty} \left(1 + \frac{1}{(-u)}\right)^u \left(1 - \frac{1}{u}\right)^{-1} = \\ &= \lim_{u \rightarrow +\infty} \left(1 + \frac{1}{(-u)}\right)^{-u \times (-1)} \left(1 - \frac{1}{u}\right)^{-1} = e^{-1} \cdot 1 = \frac{1}{e} \end{aligned}$$

$$c) \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(1 + \frac{5}{x}\right)^x$$

Faça  $\frac{5}{x} = \frac{1}{u}$ , ou seja,  $x=5u$ . Quando  $x \rightarrow +\infty$ , segue que  $u \rightarrow +\infty$ . Logo,

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(1 + \frac{5}{x}\right)^x = \lim_{u \rightarrow +\infty} \left(1 + \frac{1}{u}\right)^{5u} = \lim_{u \rightarrow +\infty} \left(\left(1 + \frac{1}{u}\right)^u\right)^5 = e^5$$

$$d) \lim_{x \rightarrow 2} \frac{5^{x-2} - 1}{x - 2}$$

Fazendo a substituição  $u=x-2$ , nota-se que se  $x \rightarrow 2$ , então  $u \rightarrow 0$ . Logo,

$$\lim_{x \rightarrow 2} \frac{5^{x-2} - 1}{x - 2} = \lim_{u \rightarrow 0} \frac{5^u - 1}{u} = \ln 5$$

$$e) \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^{x+3}$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^{x+3} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x \cdot \left(1 + \frac{1}{x}\right)^3 = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x \cdot \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^3 = e \cdot (1+0)^3 = e$$

$$f) \lim_{x \rightarrow 3} \frac{6^{x-3} - 1}{x - 3}$$

Faça  $u=x-3$ , portanto quando  $x \rightarrow 3$ , segue que  $u \rightarrow 0$ . Logo,

$$\lim_{x \rightarrow 3} \frac{6^{x-3} - 1}{x - 3} = \lim_{u \rightarrow 0} \frac{6^u - 1}{u} = \ln 6$$

