Lista 2 – Métodos Numéricos

1) Eliminação de Gauss

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 3 & -4 & 1 & 9 \\ 1 & 2 & 2 & 3 \\ 4 & 0 & 3 & -2 \end{array}\right) \quad \begin{array}{l} m_2 = \frac{1}{3} \quad m_3 = \frac{4}{3} \\ L_2 = L_2 - (m_2 \cdot L_1) \\ L_3 = L_3 - (m_3 \cdot L_1) \end{array} \quad \left(\begin{array}{ccc|c} 3 & -4 & 1 & 9 \\ 0 & \frac{10}{3} & \frac{5}{3} & 0 \\ 0 & \frac{16}{3} & \frac{5}{3} & -14 \end{array}\right) \quad m_3 = \frac{\left(\frac{16}{3}\right)}{\left(\frac{10}{3}\right)} = \frac{8}{5} \quad L_3 = L_3 - (m_3 \cdot L_2)$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 3 & -4 & 1 & 9 \\ 0 & \frac{10}{3} & \frac{5}{3} & 0 \\ 0 & 0 & -1 & -14 \end{array}\right)$$

$-x_3 = -14$
$x_3 = 14$

$\frac{10}{3} x_2 + \frac{5}{3} \cdot 14 = 0$
$\frac{10}{3} x^2 = -\frac{70}{3}$
$x_2 = \frac{\left(-\frac{70}{3}\right)}{\left(\frac{10}{3}\right)} = -\frac{70}{\cancel{3}} \cdot \frac{\cancel{3}}{10} = -7$

$3 \quad -4 \quad 1 = 9$
$3x_1 - 4 \cdot -7 + 14 = 9$
$3x_1 + 28 + 14 = 9$
$3x_1 = 9 - 42$
$x_1 = \frac{-33}{3} = -11$

2)

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 3 & -4 & 1 & 9 \\ 1 & 2 & 2 & 3 \\ 4 & 0 & 3 & -2 \end{array}\right) = \left(\begin{array}{ccc|c} 4 & 0 & 3 & -2 \\ 1 & 2 & 2 & 3 \\ 3 & -4 & 1 & 9 \end{array}\right) \quad \begin{array}{l} m_2 = \frac{1}{4} \quad m_3 = \frac{3}{4} \\ L_2 = L_2 - (m_2 \cdot L_1) \\ L_3 = L_3 - (m_3 \cdot L_1) \end{array} \quad \left(\begin{array}{ccc|c} 4 & 0 & 3 & -2 \\ 0 & 2 & 5/4 & 7/2 \\ 0 & -4 & -5/4 & 21/2 \end{array}\right) = \left(\begin{array}{ccc|c} 4 & 0 & 3 & -2 \\ 0 & -4 & -5/4 & 21/2 \\ 0 & 2 & 5/4 & 7/2 \end{array}\right)$$

pivô

$$m_3 = \frac{2}{-4} = -\frac{1}{2} \quad L_3 = L_3 - (m_3 \cdot L_2) \quad \left(\begin{array}{ccc|c} 4 & 0 & 3 & -2 \\ 0 & -4 & -5/4 & 21/2 \\ 0 & 0 & 5/8 & \frac{35}{4} \end{array}\right)$$

$\frac{5}{8} x_3 = \frac{35}{4}$
$x_3 = \frac{35}{4} \cdot \frac{8}{5} = 14$

$-4x_2 - 5/4 \cdot 14 = \frac{21}{2}$
$-4x_2 = \frac{21}{2} + \frac{35}{2}$
$-4x_2 = 28$
$x_2 = -7$

$4x_1 + 0 + 3 \cdot 14 = -2$
$4x_1 = -2 - 42$
$x_1 = -44/4 = -11$

3)

$$A = \begin{pmatrix} 5 & 2 & 1 \\ 3 & 1 & 4 \\ 1 & 1 & 3 \end{pmatrix}$$

a) Para A ser decomposta em LU, temos q fazer o det da:

1° linha e 1° coluna, único valor q pertence a 1° linha e 1° coluna é o 5, $\det(5) = 5 \neq 0$

2° linha e 2° coluna, são os valores q pertence em ambos simultaneamente $\det\begin{pmatrix} 5 & 2 \\ 3 & 1 \end{pmatrix} = 5 - 6 \neq 0$

∴ A pode ser decomposta em LU

b)
$$\begin{pmatrix} 5 & 2 & 1 \\ 3 & 1 & 4 \\ 1 & 1 & 3 \end{pmatrix} \quad \begin{array}{l} m_2 = \frac{3}{5} \\ m_3 = \frac{1}{5} \end{array} \quad \begin{pmatrix} 5 & 2 & 1 \\ 0 & -1/5 & \frac{17}{5} \\ 0 & 3/5 & \frac{14}{5} \end{pmatrix} \quad m_3 = \frac{3/5}{-\frac{1}{5}} = -3 \quad \begin{pmatrix} 5 & 2 & 1 \\ 0 & -1/2 & \frac{17}{5} \\ 0 & 0 & 13 \end{pmatrix}$$

$$L = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ ? & 1 & 0 \\ ? & ? & 1 \end{pmatrix} =$$ são os "m" usados para zerar a diagonal inferior $$= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 3/5 & 1 & 0 \\ 1/5 & -3 & 1 \end{pmatrix}$$

$$U = \begin{pmatrix} 5 & 2 & 1 \\ 0 & -1/2 & 17/5 \\ 0 & 0 & 13 \end{pmatrix}$$

c) $\det(A) = \det(U) = 5 \cdot \left(-\frac{1}{5}\right) \cdot 13 = -13$

d) $Ax = b \iff L\overbrace{Ux}^{y} = b$ 1°) $Ly = b$ 2°) $Ux = b$

1°)
$$\overset{L}{\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 3/5 & 1 & 0 \\ 1/5 & -3 & 1 \end{pmatrix}} \cdot \overset{y}{\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix}} = \overset{b}{\begin{pmatrix} 0 \\ -7 \\ -5 \end{pmatrix}} \qquad y = \begin{pmatrix} y_1 = 0 \\ y_2 = 7 \\ y_3 = -26 \end{pmatrix}$$

2)
$$\begin{pmatrix} 5 & 2 & 1 \\ 0 & -\frac{1}{5} & \frac{17}{5} \\ 0 & 0 & 13 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ -7 \\ -5 \end{pmatrix} \quad = \quad x = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}$$

4)

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 5 & 2 & 1 & -12 \\ -1 & 4 & 2 & 20 \\ 2 & 3 & 10 & 3 \end{array}\right)$$

a) aplicando o teorema vimos q pode ser decomposta em LU

$$\begin{pmatrix} 5 & 2 & 1 \\ -1 & 4 & 2 \\ 2 & 3 & 10 \end{pmatrix} = \begin{array}{l} m_2 = -\frac{1}{5} \quad m_3 = \frac{2}{5} \\ L_2 = L_2 - \left(-\frac{1}{5} \cdot L_1\right) \end{array} \quad \begin{pmatrix} 5 & 2 & 1 \\ 0 & \frac{22}{5} & \frac{11}{5} \\ 0 & \frac{11}{5} & 48/5 \end{pmatrix} \quad m_3 = \frac{\left(\frac{11}{5}\right)}{\frac{22}{5}} = \frac{1}{2} \quad \begin{pmatrix} 5 & 2 & 1 \\ 0 & \frac{22}{5} & \frac{11}{5} \\ 0 & 0 & \frac{17}{2} \end{pmatrix}$$

$$L = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1/5 & 1 & 0 \\ 2/5 & 1/2 & 1 \end{pmatrix} \quad U = \begin{pmatrix} 5 & 2 & 1 \\ 0 & \frac{22}{5} & \frac{11}{5} \\ 0 & 0 & \frac{17}{2} \end{pmatrix}$$

$Ly = b$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1/5 & 1 & 0 \\ 2/5 & 1/2 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -12 \\ 20 \\ 3 \end{pmatrix} \qquad y = \begin{pmatrix} -12 \\ \frac{88}{5} \\ 23 \end{pmatrix}$$

$Ux = b$

$$\begin{pmatrix} 5 & 2 & 1 \\ 0 & \frac{22}{5} & \frac{11}{5} \\ 0 & 0 & \frac{17}{2} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -12 \\ 20 \\ 3 \end{pmatrix} \qquad x = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ -4 \end{pmatrix}$$

b) $\det\begin{pmatrix} 5 & 2 & 1 \\ 0 & \frac{22}{5} & \frac{11}{5} \\ 0 & 0 & \frac{17}{3} \end{pmatrix} = 187$

5)

Os métodos Gauss-Jacobi e Gauss-Seidel são métodos iterativos para resolver sistemas de equações lineares da forma $Ax=b$ Ax=b. A principal diferença entre eles está na forma como utilizam os valores das incógnitas ao longo das iterações.

Gauss-Jacobi:

A cada interação os novos valores das incognitas são calculado exclusivamente a partir dos valores da interação anterior
todas as atualizações ocorrem ao mesmo tempo, ou seja os novos valores não são usados até que ainteração acabe

Gauss-Seidel:

As incognitas são atualizadas uma por uma e cada novo valor calculado é imediatamente usado para calcular as proximas incognitas
Com essa atualização a convergencia pode ser mais rapida do que o gauss jacobi

6) Gauss – Jacobi – Criterio das linhas

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 20 & 7 & 9 & 16 \\ 7 & 30 & 8 & 38 \\ 9 & 8 & 30 & 38 \end{array}\right) = \qquad x_0 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Criterio dos Linhas

$$a1 = \frac{7+9}{20} = \frac{16}{20} = 0.8$$
$$a2 = \frac{7+8}{30} = \frac{15}{30} = 0.5$$
$$a3 = \frac{9+1}{30} = \frac{17}{30} \simeq 0.56$$

"a" global $= \max\{a1, a2, a3\}$

$a = 0.8 < 1$

$$\begin{cases} x_1^{(k+1)} = \frac{1}{20}\left(16 - 7x_2^{(k)} - 9x_3^{(k)}\right) \\ x_2^{(k+1)} = \frac{1}{30}\left(38 - 7x_1^{(k)} - 8x_3^{(k)}\right) \\ x_3^{(k+1)} = \frac{1}{30}\left(38 - 9x_1^{(k)} - 8x_2^{(k)}\right) \end{cases}$$

$$k=0 \quad \begin{cases} x_1^{(1)} = \frac{1}{20}\left(16 - 7(0) - 9(0)\right) = \frac{16}{20} = 0.8 \\ x_2^{(1)} = \frac{1}{30}\left(38 - 7(0) - 8(0)\right) = \frac{38}{30} = 1.2667 \\ x_3^{(1)} = \frac{1}{30}\left(38 - 9(0) - 8(0)\right) = \frac{38}{30} = 1.2667 \end{cases} \qquad x^{(1)} = \begin{pmatrix} 0.8 \\ 1.2667 \\ 1.2667 \end{pmatrix}$$

$$K=1 \quad \begin{cases} x_1^{(2)} = \frac{1}{20}\left(16 - 7(1,2667) - 9(1,2667)\right) \\ x_2^{(2)} = \frac{1}{30}\left(38 - 7(0,8) - 8(1,2667)\right) \\ x_3^{(2)} = \frac{1}{30}\left(38 - 9(0,8) - 8(1,2667)\right) \end{cases} \qquad x^{(2)} = \begin{pmatrix} -0.2133 \\ 0.7422 \\ 0,6888 \end{pmatrix}$$

$$\begin{cases} x_1^{3} = \frac{1}{20}\left(16 - 7(0.7422) - 9(0,6888)\right) = 0,2302 \\ x_2^{3} = \frac{1}{30}\left(38 - 7(-0,2133) - 8(0,6888)\right) = 1,1327 \\ x_3^{3} = \frac{1}{30}\left(38 - 9(-0,2133) - 8(0,7422)\right) = 1,1327 \end{cases}$$

//

7) Criterio sassenfeld Gaus seidel

$$\begin{pmatrix} 10 & 1 & 1 \\ 1 & 10 & 1 \\ 1 & 1 & 10 \end{pmatrix} \qquad b = \begin{pmatrix} 12 \\ 12 \\ 12 \end{pmatrix} \qquad x_0 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

aplicando o criterio

$$\beta_1 = \frac{|1| + |1|}{|10|} = \frac{2}{10} = 0,2$$
$$\beta_2 = \frac{\beta_1 |1| + |1|}{|10|} = \frac{0,2 \cdot 1 + 1}{10} = 0,10$$
$$\beta_3 = \frac{\beta_1 |1| + \beta_2 |1|}{|10|} = \frac{0.32}{10} = 0,032$$

$\beta = \max\{0.2 \,;\, 0,10 \,;\, 0,032\} \Rightarrow 0.2 < 1 \quad \therefore$ satiz faz o criterio

$$\begin{cases} x_1^{(k+1)} = \frac{1}{10}\left(12 - x_2^{(k)} - x_3^{(k)}\right. \\ x_2^{(k+1)} = \frac{1}{10}\left(12 - x_1^{(k)} - x_3^{(k)}\right. \\ x_3^{(k+1)} = \frac{1}{10}\left(12 - x_1^{(k)} - x_2^{(k)}\right. \end{cases}$$

$$k=0 \quad \begin{cases} x_1^{(1)} = \frac{1}{10}\left(12 - 0 - 0\right) = \frac{6}{5} = 1,2 \\ x_2^{(1)} = \frac{1}{10}\left(12 - 1/2 - 0\right) = \frac{10.8}{10} = 1.08 \\ x_3^{(1)} = \frac{1}{10}\left(12 - 1,2 - 1.08\right) = \frac{9.72}{10} = 0.972 \end{cases}$$

$$k=1 \quad \begin{cases} x_1^{2} = \frac{1}{10}\left(12 - 1.08 - 0.972\right) = 0,9948 \\ x_2^{2} = \frac{1}{10}\left(12 - 0,9948 - 0.972\right) = 1.0033 \\ x_3^{2} = \frac{1}{10}\left(12 - 0,9948 - 1.0033\right) = 10002 \end{cases}$$

$$k=2 \quad \begin{cases} x_1^{3} = \frac{1}{10}\left(12 - 1.0033 - 1.0002\right) = 0,99965 \\ x_2^{3} = \frac{1}{10}\left(12 - 0,99965 - 10002 = 1,000015\right. \\ x_3^{3} = \frac{1}{10}\left(12 - 0,99965 - 1,000015 = 1,0000335\right. \end{cases}$$

8) Os métodos iterativos apresentam um mecanismo corretor que amortece pequenos erros.
Mesmo que ocorram imprecisões, as sucessivas aproximações convergem para a solução exata.
Esse comportamento é garantido se o método for, de fato, convergente e os erros forem pequenos.
Portanto, erros moderados não comprometem o resultado final.
A robustez desses métodos assegura a correção gradual dos cálculos.