Capítulo 1

Matrizes

1.1 História

O termo matriz foi utilizado pela primeira vez pelo matemático e advogado inglês James Sylvester, que o definiu em 1850 como um "arranjo oblongo de termos". Sylvester comunicou seu trabalho sobre matrizes para seu colega Arthur Caley, que então introduziu algumas operações básicas em um livro intitulado *Memoir on the Theory of Matrices* que foi publicado em 1858. Para Sylverster matriz era apenas um ingrediente dos determinantes, foi somente Caley quem deu vida própria as matrizes.

A referência mais antiga de matrizes ocorreu na china em 2500 AC onde se opera com tabelas do mesmo modo que fazemos com matrizes hoje em dia. O conceito de matrizes hoje aparece em muitas áreas, como matemática, física, engenharia e computação.

1.2 Exemplos e Conceitos

Exemplo 1.1: Uma indústria tem quatro fábricas A, B, C, D, cada uma das quais produz três produtos 1, 2, 3. A tabela mostra a produção da indústria durante uma semana.

	Fábrica A	**Fábrica B**	**Fábrica C**	**Fábrica D**
Produto 1	560	360	380	0
Produto 2	340	450	420	80
Produto 3	280	270	210	380

Exemplo 1.2: Uma empresa de engenharia dispõe seus serviços: Venda de apartamentos de 2 quartos, venda de Apartamentos de 3 quartos, venda de lotes no Loteamento x, venda de lotes no Loteamento y e projetos nos três primeiros meses do ano na seguinte tabela:

	Janeiro	**Fevereiro**	**Março**
2 Quartos	30	6	26
3 Quartos	15	10	10
Loteamento X	12	10	20
Loteamento Y	24	8	12
Projetos	60	23	35

Ao abstrairmos os significados de linhas e colunas nos exemplos acima temos as matrizes abaixo:

$$\begin{pmatrix} 560 & 360 & 380 & 0 \\ 340 & 450 & 420 & 80 \\ 280 & 270 & 210 & 380 \end{pmatrix} \quad \text{e} \quad \begin{pmatrix} 30 & 6 & 26 \\ 15 & 10 & 10 \\ 12 & 10 & 20 \\ 24 & 8 & 12 \\ 60 & 23 & 35 \end{pmatrix}$$

Definição 1.1: Chama-se matriz de ordem *m* por *n* a um quadro ou tabela de $m \times n$ elementos dispostos em *m* linhas(horizontais) e *n* colunas(verticais).

Notação: Seja $A_{m\times n}$ e seja $i, j \in IR$ tal que $1 \le i \le m$ e $1 \le j \le n$. Indicaremos uma matriz usando uma letra maiúscula, por exemplo, *A* e indicaremos com a_{ij} o elemento da matriz *A* que ocupa a linha *i* e a coluna *j*. Denotaremos então a matriz *A* por:

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{bmatrix}$$

A matriz A pode ser representada abreviadamente por:

$$A = [a_{ij}]_{m \times n}$$

O índice i representa a posição da linha ao qual o elemento se encontra e o índice j representa a posição da coluna ao qual o elemento se encontra, portanto i: 1 à m e j: 1 à n. Podemos representar uma matriz apenas pelo símbolo $A_{m \times n}$.

Podemos denotar uma matriz também usando parênteses ou barra dupla, como por exemplo:

$$\begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 1 & 5 \end{pmatrix} \text{ e } \begin{Vmatrix} -1 & 2 \\ 1 & 5 \end{Vmatrix}$$

Definição 1.2: Duas matrizes $A = [a_{ij}]_{m \times n}$ e $B = [b_{ij}]_{m \times n}$ são iguais, $A = B$,se todos os seus elementos correspondentes são iguais, isto é, $a_{ij} = b_{ij}$.

Exemplo 1.3:

(a) $\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -2 & 3 \\ 6 & -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -2 & 3 \\ 6 & -1 \end{bmatrix}$

(b) $\begin{pmatrix} 3^2 & 1 & sen 90^o \\ 2 & 2^3 & 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 9 & 1 & 1 \\ 2 & 8 & 5 \end{pmatrix}$

Exercício 1.1: Calcule o valor de x para que as matrizes $A = \begin{bmatrix} 7 & 8 \\ 4 & x^2 \end{bmatrix}$ e $B = \begin{bmatrix} 7 & 8 \\ 4 & 10x - 25 \end{bmatrix}$ sejam iguais.

Exercício 1.2: Calcule o valor de x e y de modo que as matrizes $A = \begin{bmatrix} y+4 & 2 \\ 9 & x^2+4 \end{bmatrix}$ e $B = \begin{bmatrix} 12 & 2 \\ 9 & 53 \end{bmatrix}$ sejam iguais.

1.1) $A=\begin{pmatrix}7 & 8\\ 4 & x^2\end{pmatrix}_{2\times 2}$ $B=\begin{pmatrix}7 & 8\\ 4 & 10x-25\end{pmatrix}_{2\times 2}$

FALTA P/ $A=B$

$x^2=10x-25$

$x^2-10x+25=0$

$(x-5)^2=0$

$x=5$

Solução: $x=5$

1.2) $A=\begin{bmatrix}y+4 & 2\\ 9 & x^2+4\end{bmatrix}_{2\times 2}$ $B=\begin{bmatrix}12 & 2\\ 9 & 53\end{bmatrix}_{2\times 2}$

$\left.\begin{matrix}A=B\\ x=?\\ y=?\end{matrix}\right\}$

$y+4=12$

$y=8$

x^2 [illegible] $4=53$

$x^2=49$

$x=\pm\sqrt{49}$

$x=\pm 7$

Solução: $(x,y)=(+7,8)$ ou $(x,y)=(-7,8)$

Ex: $\begin{pmatrix}1-m^2 & 1\\ -2 & 1-m\end{pmatrix}_{2\times 2}=\begin{pmatrix}0 & 1\\ -2 & 0\end{pmatrix}_{2\times 2}$ $m=?$

$1-m=0$

$-m=-1$

$m=1$

$1-m^2=0$

$-m^2=-1$

$m^2=1$

$m=\pm 1$

~~$\Rightarrow m=-1$~~ FALSO

$\Rightarrow m=+1$

Pois se $m=-1$

então $1-m=1-(-1)=2\neq 0$.

S: $m=1$.

ex:

$$\begin{pmatrix} 2^x-1 & y^4 \\ y^x & \cancel{2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & \cancel{x} \end{pmatrix}$$

$x=?$
$y=?$

$2^x-1=1$
$2^x=1+1$
$2^x=2$
$\cancel{2}^x=\cancel{2}^1$
$\boxed{x=1}$

$y^4=1$
$y=\pm\sqrt[4]{1}$
$y=\pm 1$
$y=-1$
ou
~~$y=+1$~~
FALSO

$y^x=-1$
$y^1=-1$
$y=-1$

$S: (x,y)=(1,-1)$

Os exemplos 1.1 e 1.2 geraram matrizes que foram obtidas a partir de dados reais de um problema. Também podemos obter matrizes a partir de uma lei de formação.

Exemplo 1.4: Represente explicitamente a matriz $A = [a_{ij}]$, com $1 \leq i \leq 3$ e $1 \leq j \leq 2$, tal que $a_{ij} = 3i - 2j + 4$.

Resolução: A matriz a ser encontrada tem forma genérica dada por:

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{bmatrix}$$

- Para $i = 1$ e $j = 1 \Rightarrow a_{11} = 3.1 - 2.1 + 4 = 5$
- Para $i = 1$ e $j = 2 \Rightarrow a_{12} = 3.1 - 2.2 + 4 = 3$
- Para $i = 2$ e $j = 1 \Rightarrow a_{21} = 3.2 - 2.1 + 4 = 8$
- Para $i = 2$ e $j = 2 \Rightarrow a_{22} = 3.2 - 2.2 + 4 = 6$
- Para $i = 3$ e $j = 1 \Rightarrow a_{31} = 3.3 - 2.1 + 4 = 11$
- Para $i = 3$ e $j = 2 \Rightarrow a_{32} = 3.3 - 2.2 + 4 = 9$

Logo:

$$A = \begin{bmatrix} 5 & 3 \\ 8 & 6 \\ 11 & 9 \end{bmatrix}$$

Exercício 1.3: Represente explicitamente uma matriz quadrada de ordem 2, de modo que $a_{ij} = i - 3j - 2$

Exercício 1.4: Represente explicitamente uma matriz quadrada de ordem 3, de modo que $a_{ij} = 1$, se $i = j$ e $a_{ij} = 2i - j^2$, se $i \neq j$.

1.3) A_{2x2} $a_{ij} = i - 3j - 2$

$$A_{2x2} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} 1-3(1)-2 & 1-3(2)-2 \\ 2-3(1)-2 & 2-3(2)-2 \end{bmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} 1-3-2 & 1-6-2 \\ 2-3-2 & 2-6-2 \end{pmatrix} = \boxed{\begin{pmatrix} -4 & -7 \\ -3 & -6 \end{pmatrix}}$$

1.4 A_{3x3} $a_{ij} = 1$ se $i = j$

$a_{ij} = 2i - j^2$ se $i \neq j$

$$A_{3x3} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 2(1)-(2)^2 & 2(1)-(3)^2 \\ 2(2)-(1)^2 & 1 & 2(2)-(3)^2 \\ 2(3)-(1)^2 & 2(3)-(2)^2 & 1 \end{bmatrix}$$

$i=j$

$$= \begin{pmatrix} 1 & 2-4 & 2-9 \\ 4-1 & 1 & 4-9 \\ 6-1 & 6-4 & 1 \end{pmatrix} = \boxed{\begin{pmatrix} 1 & -2 & -7 \\ 3 & 1 & -5 \\ 5 & 2 & 1 \end{pmatrix}}$$

1.3 Tipos Especiais

Consideraremos agora alguns casos particulares de matrizes $m \times n$

1.3.1 **Matriz Retangular:** É a matriz no qual o número de linhas é diferente do número de colunas, isto é, $m \neq n$.

Exemplo 1.5

$$A = \begin{bmatrix} 5 & 3 \\ 8 & 6 \\ 11 & 9 \end{bmatrix}_{3\times 2} \qquad B = \begin{pmatrix} 560 & 360 & 380 & 0 \\ 340 & 450 & 420 & 80 \\ 280 & 270 & 210 & 380 \end{pmatrix}_{3\times 4}$$

Dentre as matrizes retangulares destacamos duas:

1.3.1(a) Matriz – Coluna: A matriz de ordem *n* por 1 é uma matriz coluna.

$$A = \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \\ \vdots \\ a_n \end{bmatrix}$$

1.3.1(b) Matriz-Linha: A matriz de ordem 1 por *n* é uma matriz linha.

$$A = \begin{bmatrix} a_1 & a_2 & a_3 & \cdots & a_n \end{bmatrix}$$

1.3.2 **Matriz Quadrada:** É a matriz no qual o número de linhas é igual ao número de colunas, isto é, $m = n$.

Exemplo 1.6

$$A = \begin{bmatrix} 7 & 8 \\ 4 & 3 \end{bmatrix} \qquad B = \begin{bmatrix} -1 & 7 & 5 \\ 2 & 0 & 9 \\ -3 & 2 & 1 \end{bmatrix}$$

Observação 1: As matrizes quadradas podem ser representadas apenas por A_n, que é o mesmo que dizer a que a matriz é de ordem *n* por *n*.

MATRIZ QUADRADA

$$A_{2x2} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$$

diagonal principal

$i = j$

Diagonal secundaria

$i + j = n + 1$

$$A_{3x3} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$$

D.P.

D.S.

Observação 2: Dada uma matriz quadrada $A = [a_{ij}]_{n \times n}$ os elementos a_{ij} tal que $i = j$, constituem a **diagonal principal**, e os elementos a_{ij} tal que $i + j = n + 1$, constituem a **diagonal secundária**.

Destaquemos agora alguns casos especiais de matrizes quadradas:

1.3.2(a) Matriz Diagonal: É uma matriz quadrada $A = [a_{ij}]_{m \times n}$ onde $a_{ij} = 0$ se $i \neq j$, isto é , fora da diagonal principal todos os elementos são nulos. É claro que isto não implica que diagonal também contenha elementos nulos.

Lei de Formação: $a_{ij} = 0$ se $i \neq j$

Exemplo 1.7

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

1.3.2(b) Matriz Identidade: É uma matriz diagonal onde os elementos da diagonal principal são todos iguais à 1, isto é, $a_{ij} = 1$ se $i = j$ e $a_{ij} = 0$ se $i \neq j$.

Exemplo 1.8

$$I = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Lei de Formação: $a_{ij} = 1$ se $i = j$ e $a_{ij} = 0$ se $i \neq j$

1.3.2(c) Matriz Triangular Superior: É uma matriz quadrada $A=[a_{ij}]_{m\times n}$, onde os elementos abaixo da diagonal são nulos, isto é, $a_{ij}=0$ se $i>j$.

$$A=\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ 0 & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & a_{nn} \end{bmatrix}$$

Lei de Formação: $a_{ij}=0$ se $i>j$

1.3.2(d) Matriz Triangular Inferior: É uma matriz quadrada, onde os elementos acima da diagonal são nulos, isto é, $a_{ij}=0$ se $i<j$.

$$A=\begin{bmatrix} a_{11} & 0 & \dots & 0 \\ a_{21} & a_{22} & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{bmatrix}$$

Lei de Formação: $a_{ij}=0$ se $i<j$

1.3.3 Matriz Nula: É uma matriz quadrada ou retangular tal que $a_{ij}=0$, $\forall i$ e $\forall j$, isto é todos os elementos da matriz são nulos.

Exemplo 1.9

$$\mathbf{A}=\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

1.3.3 **Matriz Transposta:** Seja A uma matriz de ordem $m\times n$, se permurtarmos as linhas pelas colunas de mesmo índice, obtemos uma nova matriz denotada por A^T ou A' chamada de matriz transposta. De modo geral, tudo que é linha se transforma em coluna e vice versa, portanto se uma matriz é de ordem $m\times n$, então sua transposta é de ordem $n\times m$.

Exemplo 1.10

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \end{bmatrix} \text{ e } A^T = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{21} \\ a_{12} & a_{22} \\ a_{13} & a_{23} \end{bmatrix}$$

1.3.4(a) Simétrica: É uma matriz quadrada $A = [a_{ij}]$ onde $A = A^T$. Em outras palavras uma matriz é simétrica se $a_{ij} = a_{ji}$.

Exercício 1.5: Represente explicitamente uma matriz quadrada de ordem 4, de modo que $a_{ij} = i \cdot j^2 + i^2 \cdot j$.

1.3.4(b) Matriz Antissimétrica: É uma matriz quadrada $A = [a_{ij}]$ onde $A^T = -A$. Em outras palavras uma matriz é simétrica se $a_{ij} = -a_{ji}$. Para que isto ocorra todos os elementos da diagonal principal devem ser zeros.

Exemplo 1.11

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 3 & -1 \\ -3 & 0 & 9 \\ 1 & -9 & 0 \end{bmatrix}$$

Propriedades: Sejam A e B matrizes de mesma ordem $m \times n$, e k um número real, então:

(a) $(A^T)^T = A$

(b) $(A+B)^T = A^T + B^T$

(c) $(kA)^T = kA^T$

(d) $(A \cdot B)^T = B^T \cdot A^T$

Para revisar todos os conteúdos com exercícios acessem os links:

https://www.youtube.com/watch?v=gE_1LTPwhV0

https://www.youtube.com/watch?v=QhpIVfVCbKg

MATRIZ NULA

$O_{4\times2}$ = Matriz nula 4x2 $a_{ij}=0\ \forall ij$

$$O_{4\times2}=\begin{bmatrix}0&0\\0&0\\0&0\\0&0\end{bmatrix}\qquad O_{1\times2}=\begin{pmatrix}0&0\end{pmatrix}$$

MATRIZ DIAGONAL (QUADRATA)

$a_{ij}=0\ \forall i\neq j$ e $n=m$

$$\begin{pmatrix}3&0&0\\0&4&0\\0&0&0\end{pmatrix}\qquad\begin{pmatrix}4&0&0&0\\0&7&0&0\\0&0&\operatorname{sen}x&0\\0&0&0&1\end{pmatrix}$$

MATRIZ TRIANGULAR SUPERIOR

$m=n$

$$\begin{pmatrix}7&4\\0&1\end{pmatrix}\qquad\begin{pmatrix}3&2&5\\0&1&2\\0&0&4\end{pmatrix}$$

MATRIZ TRIANGULAR INFERIOR

$$\begin{pmatrix}0&1\\1&10\end{pmatrix}\qquad\begin{pmatrix}0&0&7\\0&1&4\\-2&1/2&1/7\end{pmatrix}$$

MATRIZ TRANSPOSTA.

A^T é a matriz transposta de A se trocar linhas por colunas.

$$A_{2\times3} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \end{pmatrix} \qquad A^T_{3\times2} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{21} \\ a_{12} & a_{22} \\ a_{13} & a_{23} \end{pmatrix}$$

$$B = \begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 5 & 6 \end{pmatrix}_{2\times2} \qquad B^T = \begin{pmatrix} 3 & 5 \\ 4 & 6 \end{pmatrix}_{2\times2}$$

$$C = \begin{pmatrix} 1 & 2 \end{pmatrix}_{1\times2} \qquad C^T = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}_{2\times1}$$

MATRIZ SIMETRICA

A é simétrica se $A = A^T$

ou seja, $a_{ij} = a_{ji}$

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 4 & 5 \\ 3 & 5 & 6 \end{pmatrix} = A^T$$

$\therefore$ A é simétrica.

MATRIZ ANTISSIMÉTRICA

A é antissimetrica se $A = -A^t$

$$B = \begin{pmatrix} 0 & 7 & 15 \\ -7 & 0 & 9 \\ 15 & -9 & 0 \end{pmatrix}$$

$$B^t = \begin{pmatrix} 0 & -7 & -15 \\ 7 & 0 & -9 \\ 15 & 9 & 0 \end{pmatrix}$$

$$-B^t = \begin{pmatrix} 0 & 7 & 15 \\ -7 & 0 & 9 \\ 15 & -9 & 0 \end{pmatrix}$$

$\therefore B = -B^t \Rightarrow B$ é antissim.

Note que D.P. = 0.

1.5) $A_4 \qquad a_{ij} = i \cdot j^2 + i^2 \cdot j$

$$A_{4x4} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{pmatrix} =$$

$$\left(\begin{array}{c|c|c|c} (1)(1)^2+(1)^2(1) & (1)(2)^2+(1)^2(2) & (1)(3)^2+(1)^2(3) & (1)(4)^2+(1)^2(4) \\ \hline (2)(1)^2+(2)^2(1) & (2)(2)^2+(2)^2(2) & (2)(3)^2+(2)^2(3) & (2)(4)^2+(2)^2(4) \\ \hline (3)(1)^2+(3)^2(1) & (3)(2)^2+(3)^2(2) & (3)(3)^2+(3)^2(3) & (3)(4)^2+(3)^2(4) \\ \hline (4)(1)^2+(4)^2(1) & (4)(2)^2+(4)^2(2) & (4)(3)^2+(4)^2(3) & (4)(4)^2+(4)^2(4) \end{array}\right)$$

$$\begin{pmatrix} 2 & 6 & 12 & 20 \\ 6 & 16 & 30 & 48 \\ 12 & 30 & 54 & 84 \\ 20 & 48 & 84 & 128 \end{pmatrix}$$

1.4 Operações com Matrizes (Leitura Particular)

Para complementar esta leitura assista as vídeo aulas abaixo:

Conteúdo: https://www.youtube.com/watch?v=pNWx2LE9meQ&t=984s

Exercícios: https://www.youtube.com/watch?v=SnhBzGHWRvg

1.4.1 Soma de matrizes

Definição: A soma de duas matrizes de mesma ordem $A=[a_{ij}]_{m\times n}$ e $B=[b_{ij}]_{m\times n}$ é uma matriz $m\times n$ que denotaremos por $A+B$, cujos elementos são a soma dos elementos correspondentes de A e B, isto é,

$$A+B=[a_{ij}+b_{ij}]_{m\times n}$$

Exemplo 1.12

$$\begin{bmatrix} 5 & -3 \\ -4 & -1 \\ 7 & 2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 2 & -2 \\ 4 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5+(-1) & -3+0 \\ -4+2 & -1+(-2) \\ 7+4 & 2+1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 & -3 \\ -2 & -3 \\ 11 & 3 \end{bmatrix}$$

Propriedades: Sejam A, B, e C matrizes de mesma ordem $m\times n$, então:

(a) $A+B=B+A$ (Comutatividade)

(b) $A+(B+C)=(A+B)+C$ (Associatividade)

(c) $A+0_{m\times n}=0_{m\times n}+A=A$

(d) $A-A=-A+A=0$

Exercício 1.6: Sejam as matrizes $A=\begin{bmatrix} 1 & 4 & 0 \\ -2 & 6 & 5 \end{bmatrix}$, $B=\begin{bmatrix} -3 & 1 & -1 \\ 3 & 0 & 2 \end{bmatrix}$, $C=\begin{bmatrix} 4 & 3 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}$ e $D=\begin{bmatrix} 1 & -2 & 3 \\ 5 & 2 & -1 \end{bmatrix}$. Calcule se possível $A+B$, $A+C$ e $(B+A)+D$.

ADIÇÃO DE MATRIZES

$$A_{m\times n} + B_{m\times n} = C_{m\times n}$$

→ Definida somente em matrizes de mesma ordem.

Basta somar os elementos de mesma posição e os resultados ficam na mesma posição.

ex. 1.6

$$A=\begin{pmatrix} 1 & 4 & 0 \\ -2 & 6 & 5 \end{pmatrix} \quad B=\begin{pmatrix} -3 & 1 & -1 \\ 3 & 0 & 2 \end{pmatrix} \quad C=\begin{pmatrix} 4 & 3 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$$

$$D=\begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 \\ 5 & 2 & -1 \end{pmatrix}$$

i) $A+B=\begin{pmatrix} 1 & 4 & 0 \\ -2 & 6 & 5 \end{pmatrix}+\begin{pmatrix} -3 & 1 & -1 \\ 3 & 0 & 2 \end{pmatrix}$

$$\begin{pmatrix} 1-3 & 4+1 & 0-1 \\ -2+3 & 6+0 & 5+2 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} -2 & 5 & -1 \\ 1 & 6 & 7 \end{pmatrix}$$

ii) $A+C=\begin{pmatrix} 1 & 4 & 0 \\ -2 & 6 & 5 \end{pmatrix}+\begin{pmatrix} 4 & 3 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$

solução não definida, soma impossível, A é (2×3) e C é (2×2)

iii)
$$\overbrace{(B+A)}^{B+A=A+B}+D=$$

$$\begin{pmatrix}-2 & 5 & -1\\ 1 & 6 & 7\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}1 & -2 & 3\\ 5 & 2 & -1\end{pmatrix}=$$

$$\begin{pmatrix}-2+1 & 5-2 & -1+3\\ 1+5 & 6+2 & 7-1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-1 & 3 & 2\\ 6 & 8 & 6\end{pmatrix}$$

A subtração segue como somar com o oposto, onde

$$A_{m\times n}-B_{m\times n}=A_{m\times n}+\underbrace{(-B_{m\times n})}_{\text{MATRIZ OPOSTA}}$$

$$\boxed{\begin{pmatrix}a_{11} & a_{12}\\ a_{21} & a_{22}\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}b_{11} & b_{12}\\ b_{21} & b_{22}\end{pmatrix}=}$$

$$\begin{pmatrix}a_{11} & a_{12}\\ a_{21} & a_{22}\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}-b_{11} & -b_{12}\\ -b_{21} & -b_{22}\end{pmatrix}=$$

$$\boxed{\begin{pmatrix}a_{11}-b_{11} & a_{12}-b_{12}\\ a_{21}-b_{21} & a_{22}-b_{22}\end{pmatrix}}$$

e/ Calcule a matriz X
onde

$$\begin{pmatrix}2&4\\-3&5\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}-1&3\\5&0\end{pmatrix}=X-\begin{pmatrix}1&-2\\3&4\end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix}1&7\\2&5\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}x_1&x_2\\x_3&x_4\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}1&-2\\3&4\end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix}1&7\\2&5\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}x_1-1&x_2+2\\x_3-3&x_4-4\end{pmatrix}$$

$$x_1-1=1 \quad \Big\} \quad x_2+2=7 \quad \Big\} \quad x_3-3=2 \quad \Big\} \quad x_4-4=5$$
$$x_1=2 \quad \Big\} \quad x_2=5 \quad \Big\} \quad x_3=5 \quad \Big\} \quad x_4=9$$

$$\therefore X=\begin{pmatrix}2&5\\5&9\end{pmatrix}$$

— ou —

$$\begin{pmatrix}2&4\\-3&5\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}-1&3\\5&0\end{pmatrix}=X-\begin{pmatrix}1&-2\\3&4\end{pmatrix}$$

$$X=\begin{pmatrix}2&4\\ \cancel{-3}&5\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}\cancel{-1}&3\\5&\cancel{0}\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}\cancel{1}&-2\\ \cancel{3}&4\end{pmatrix}$$

$$X=\begin{pmatrix}2&5\\5&9\end{pmatrix}$$

kkk

ex: Resolva o sistema:

$$\begin{cases} X+Y+\begin{pmatrix}1&1\\1&1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}4&0\\1/2&-1\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}0&2\\3/2&4\end{pmatrix} \\ X-Y=\begin{pmatrix}6&-3\\4&0\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}2&-2\\2&1\end{pmatrix} \end{cases}$$

$$\begin{cases} X+Y=\begin{pmatrix}3&1\\1&2\end{pmatrix} \\ X-Y=\begin{pmatrix}4&-1\\2&-1\end{pmatrix} \end{cases}$$

$+$

$$2X=\begin{pmatrix}7&0\\3&1\end{pmatrix}$$

$$X=\frac{\begin{pmatrix}7&0\\3&1\end{pmatrix}}{2}$$

$$\boxed{X=\begin{pmatrix}7/2&0\\3/2&1/2\end{pmatrix}}$$

$-$

$$2Y=\begin{pmatrix}-1&2\\-1&3\end{pmatrix}$$

$$\boxed{Y=\begin{pmatrix}-1/2&1\\-1/2&3/2\end{pmatrix}}$$

1.4.2 Multiplicação por Escalar

Definição: Seja $A = [a_{ij}]_{m\times n}$ uma matriz e *k* um número real, então definimos a matriz

$$k \cdot A = [k \cdot a_{ij}]_{m\times n}$$

Exemplo 1.13

$$\frac{1}{2}\cdot\begin{bmatrix} 2 & 1 & -6 \\ 3 & 2 & 10 \\ 4 & -5 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & \frac{1}{2} & -3 \\ \frac{3}{2} & 1 & 5 \\ 2 & -\frac{5}{2} & \frac{1}{2} \end{bmatrix}$$

Propriedades: Seja *A* e *B* matrizes de ordem $m\times n$, *k*, k_1 e k_2 números reais.

(a) $k\cdot(A+B) = k\cdot A + k\cdot B$

(b) $(k_1+k_2)\cdot A = k_1\cdot A + k_2\cdot A$

(c) $1\cdot A = A$

(d) $k_1\cdot(k_2\cdot A) = (k_1\cdot k_2)\cdot A$

Observação: A matriz diferença *A* – *B* de duas matrizes de mesma ordem $m\times n$, é definida por:

$$A - B = A + (-B)[a_{ij} - b_{ij}]_{m\times n}$$

Exercício 1.7: Sejam

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 3 & 8 \\ -5 & 9 & -6 \\ 7 & 4 & 1 \end{bmatrix}, \qquad B = \begin{bmatrix} -3 & 7 & 1 \\ -4 & 2 & 5 \\ 0 & 9 & 4 \end{bmatrix}, \qquad C = \begin{bmatrix} 7 & -8 & 3 \\ 4 & -3 & 2 \\ 9 & -5 & 1 \end{bmatrix}$$

Calcule $2A - B + 3C$

MULTIPLICAÇÃO DE $\underbrace{\text{ESCALAR}}_{\substack{\text{NUMERO}\\ \text{PURO.}\\ K\in\mathbb{R}}}$ E MATRIZ

Dada uma matriz A, e $K \in \mathbb{R}$

$$KA = \begin{pmatrix} Ka_{11} & Ka_{12} & Ka_{13} & \cdots \\ Ka_{21} & Ka_{22} & Ka_{23} & \cdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{pmatrix}$$

$$e \quad \frac{A}{K} = \begin{pmatrix} \frac{a_{11}}{K} & \frac{a_{12}}{K} & \frac{a_{13}}{K} & \cdots \\ \frac{a_{21}}{K} & \frac{a_{22}}{K} & \frac{a_{23}}{K} & \cdots \end{pmatrix} \quad (K \neq 0)$$

exercicio 1.7.

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 8 \\ -5 & 9 & -6 \\ 7 & 4 & 1 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} -3 & 7 & 1 \\ -4 & 2 & 5 \\ 0 & 9 & 4 \end{pmatrix} \quad C = \begin{pmatrix} 7 & -8 & 3 \\ 4 & -3 & 2 \\ 9 & -5 & 1 \end{pmatrix}$$

$$2A - B + 3C =$$

$$2\begin{pmatrix} 2 & 3 & 8 \\ -5 & 9 & -6 \\ 7 & 4 & 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} -3 & 7 & 1 \\ -4 & 2 & 5 \\ 0 & 9 & 4 \end{pmatrix} + 3\begin{pmatrix} 7 & -8 & 3 \\ 4 & -3 & 2 \\ 9 & -5 & 1 \end{pmatrix} =$$

$$\begin{pmatrix} 4+3+21 & 6-7-24 & 16-1+9 \\ -10+4+12 & 18-2-9 & -12-5+6 \\ 14+0+27 & 8-9-15 & 2-4+3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 28 & -25 & 24 \\ 6 & 7 & -11 \\ 41 & -16 & 1 \end{pmatrix}$$

ex/ $X = ?$

se $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ -2 & -1 & 3 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ $\quad B = \begin{pmatrix} 5 & -1 & 4 \\ 1 & 2 & 3 \\ -3 & -4 & 1 \end{pmatrix}$

$$3X + 2A = B^t + 2X$$

$$3X + 2A = B^t + 2X$$

$$X = B^t - 2A = B^t + (-2A)$$

$$X = \begin{pmatrix} 5 & 1 & -3 \\ -1 & 2 & -4 \\ 4 & 3 & 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -2 & 0 & -2 \\ +4 & +2 & -6 \\ +2 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$X = \begin{pmatrix} 3 & 1 & -5 \\ 3 & 4 & -10 \\ 6 & 3 & 1 \end{pmatrix}$$

MATRIZ IDENTIDADE I

I é quadrada, triangular superior e inferior,
com $a_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{se } i = j \\ 0 & \text{se } i \neq 0 \end{cases}$

$I_1 = (1) \qquad I_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad I_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

$I_4 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad I_5 = \dots$

1.4.3 Multiplicação de Matrizes

Para melhor ilustrar o conceito de multiplicação de matrizes, vejamos um exemplo.

Exemplo 1.14: Suponhamos que a tabela abaixo nos forneça as quantidades de vitaminas *A*, *B* e *C* obtidas em cada unidade dos alimentos I e II

	Vitamina A	**Vitamina B**	**Vitamina C**
Alimento I	4	3	0
Alimento II	5	0	1

Se ingerirmos 5 unidades do alimento I e 2 unidades do alimento II, quanto consumiremos de cada tipo de vitamina?

Resolução: Vamos representar o consumo dos alimentos I e II pela matriz consumo B:

$$B = [5 \quad 2]$$

A operação que vai nos fornecer a quantidade ingerida de cada vitamina é o produto:

$$[5 \quad 2] \cdot \begin{bmatrix} 4 & 3 & 0 \\ 5 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \left[5 \cdot 4 + 2 \cdot 5 \quad 5 \cdot 3 + 2 \cdot 0 \quad 5 \cdot 0 + 2 \cdot 1\right] = \left[30 \quad 15 \quad 2\right]$$

Isto é, são ingeridas 30 unidades de vitamina A, 15 de vitamina B e 2 de vitamina C.

Definição: Sejam $A = [a_{ij}]_{m \times n}$ e $B = [b_{rs}]_{n \times p}$. Definimos o produto $A \cdot B = [c_{uv}]_{m \times p}$ onde

$$c_{uv} = a_{u1} \cdot b_{1v} + a_{u2} \cdot b_{2v} + \ldots + a_{un} \cdot b_{nv}$$

Observação 1: O produto só é possível se o número de colunas da primeira matriz for igual ao número de linhas da segunda matriz.

Observação 2: A ordem da matriz produto *C* é dada pelo número de linhas da matriz *A* e pelo número de colunas da matriz *B*.

Observação 3: Para encontrar a matriz produto *C*, multiplicamos cada linha da matriz, por cada coluna de *B*.

Observação 4: Para encontra os elementos c_{ij}, basta multiplicar os elementos da i-ésima linha da 1ª matriz com os elementos da j-ésima coluna da 2ª matriz e somá-los.

Vejamos um exemplo:

Exemplo 1.14: Seja as matrizes $A = \begin{bmatrix} 4 & 2 & 6 \\ 2 & 5 & 3 \end{bmatrix}_{2\times 3}$ e $B = \begin{bmatrix} 5 & 2 & 4 & 1 \\ 2 & 3 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 7 & 6 \end{bmatrix}_{3\times 4}$ Encontre o produto de *A* por *B*.

Solução: De acordo com a observação 1, esta multiplicação é possível pois o numero de colunas da matriz *A* (três colunas) é igual o número de linhas da matriz *B* (Três linhas).

De acordo com a observação 2, a matriz produto *C*, terá ordem 2 x 4, pois 2 é o número de linhas da matriz *A*, e 4 é o número de colunas da matriz *B*.

A matriz *C*, é disposta então da seguinte maneira: $C = \begin{bmatrix} c_{11} & c_{12} & c_{13} & c_{14} \\ c_{21} & c_{22} & c_{23} & c_{24} \end{bmatrix}$. Agora vamos a multiplicação efetiva:

$c_{11} =$ 1ª linha de *A* x 1ª coluna de *B* = 4 x 5 + 2 x 2 + 6 x 1 = 20 + 4 + 6 = 30

$c_{12} =$ 1ª linha de *A* x 2ª coluna de *B* = 4 x 2 + 2 x 3 + 6 x 2 = 8 + 6 + 12 = 26

$c_{13} =$ 1ª linha de *A* x 3ª coluna de *B* = 4 x 4 + 2 x 1 + 6 x 7 = 16 + 2 + 42 = 60

$c_{14} =$ 1ª linha de *A* x 4ª coluna de *B* = 4 x 1 + 2 x 0 + 6 x 6 = 4 + 0 + 36 = 40

$c_{21} =$ 2ª linha de *A* x 1ª coluna de *B* = 2 x 5 + 5 x 2 + 3 x 1 = 10 + 10 + 3 = 23

$c_{22} =$ 2ª linha de *A* x 2ª coluna de *B* = 2 x 2 + 5 x 3 + 3 x 2 = 4 + 15 + 6 = 25

$c_{23} =$ 2ª linha de *A* x 3ª coluna de *B* = 2 x 4 + 5 x 1 + 3 x 7 = 8 + 5 + 21 = 34

$c_{24} =$ 2ª linha de *A* x 4ª coluna de *B* = 2 x 1 + 5 x 0 + 3 x 6 = 2 + 0 + 18 = 20

Portanto a matriz produto $C = A \times B$ é dada por $C = \begin{bmatrix} 30 & 26 & 60 & 40 \\ 23 & 25 & 34 & 20 \end{bmatrix}$

Exercício 1.8: Se uma matriz *A* tem ordem 3 x 5 e uma matriz *B* tem ordem 5 x 6. Qual a ordem da matriz $C = A \times B$.

Exercício 1.9: Seja $A = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 4 & 2 \\ 5 & 3 \end{bmatrix}$ e $B = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 4 \end{bmatrix}$. Encontre o elemento c_{32} da matriz produto de *A* por *B*.

Exercício 1.10: Calcule $\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -2 & 3 \\ 5 & 4 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 0 & 6 & 1 \\ 3 & 8 & -2 \end{bmatrix}$

Exercício 1.11: Calcule o produto das matrizes $A = \begin{bmatrix} 2 & 3 & 4 \\ 3 & 5 & -4 \\ 4 & 7 & -2 \end{bmatrix}$ e $X = \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}$.

1.4.4 Comutatividade na Multiplicação de duas Matrizes

Em geral, a existência do produto $A \cdot B$ não implica a existência do produto $B \cdot A$.

Por exemplo, $A_{2\times 4} \times B_{4\times 3} = C_{2\times 3}$

Já o produto, $B_{4\times 3} \times A_{2\times 4}$, não é possível pois o número de colunas de *B* é diferente do número de linhas de *A*.

Mesmo quando o produto $A \times B$ e $B \times A$ são possíveis, os dois produtos são, em geral, diferentes:

Por exemplo: $A_{4\times 3} \times B_{3\times 4} = C_{4\times 4}$ e $A_{3\times 4} \times B_{4\times 3} = C_{3\times 3}$, ou seja, os produtos são possíveis, mas os resultados dos produtos são matrizes de ordens diferentes.

Assim, podemos afirmar que o produto de matrizes **não é comutativo**. Mas existem matrizes onde $A \times B = B \times A$, porém esta não é a regra. Acompanhe os dois casos:

Mas, existem alguns casos particulares onde a comutatividade é possível

1° Caso: Elemento Neutro

A matriz identidade *I* de ordem *n* comuta com qualquer matriz *A* de ordem *n*, isto é,

$$A \cdot I = I \cdot A = A$$

I é o elemento neutro da multiplicação de matrizes.

2° Caso: Inversa de Matriz

Definição: Seja *A* uma matriz de ordem *n*. A matriz *B* de ordem *n* que satisfaz,

$$A \cdot B = B \cdot A = I$$

é chamada de matriz inversa de *A* e é denotada por A^{-1}. A inversa é única.

Exercício 1.12: Seja $A = \begin{bmatrix} 9 & 5 \\ 7 & 4 \end{bmatrix}$ e $B = \begin{bmatrix} 4 & n \\ m & 9 \end{bmatrix}$. Encontre o valor de *m* e *n* para que *B* seja inversa de *A*. Aqui devemos multiplicar *A* por *B* e igualar a identidade, ou seja, usamos a definição de inversa.

Exercício 1.13: Verifique se a matriz $A = \begin{bmatrix} 2 & 5 \\ 1 & 3 \end{bmatrix}$ é inversa da matriz $B = \begin{bmatrix} 3 & -5 \\ -1 & 2 \end{bmatrix}$.

O Método para obtenção de matriz inversa será visto mais tarde.

Propriedades

(a) Dadas as matrizes *A*, *B* e *C* de ordem $m \times n$, $n \times p$ e $p \times r$ respectivamente, então

$$(A \times B) \times C = A \times (B \times C)$$

(b) Dadas as matrizes *A*, *B* e *C* de ordem $m \times n$, $m \times n$ e $n \times p$ respectivamente, então

$$(A + B) \times C = A \times C + B \times C$$

(c) Dadas as matrizes *A*, *B* e *C* de ordem $n \times p$, $n \times p$ e $m \times n$ respectivamente, então

$$C \times (A + B) = C \times A + C \times B$$

(d) Se *A* de ordem $m \times n$, então

$$I_m \times A = A \times I_n = A$$

(e) Dadas as matrizes A e B de ordem $m \times n$ e $n \times p$ respectivamente e k um número real, então

$$(kA) \times B = A \times (kB) = k(A \times B)$$

MULTIPLICAÇÃO DE MATRIZES

→ Multiplicar somente se

$$A_{M\times N} \cdot B_{N\times P} = C_{M\times P}$$

=

Resultado.

$C_{M\times P}$ só existe se a qt. das ~~linhas~~ COLUNAS de A for igual a qt. das ~~Col~~ LINHAS de B. O resultado C tem a qt. de Linhas de A e qt. de colunas de B.

Em geral: $A \times B \neq B \times A$.

I é o elemento neutro da mult. de Matrizes.

$$A_{M\times N} \cdot I_{\textcircled{N}} = A_{M\times N}.$$

$$\downarrow$$

$$I_{N\times N}$$

=

Resultado.

se $A_{m\times n} \cdot B_{n\times p} = C_{m\times p} = \begin{pmatrix} c_{11} & c_{12} & c_{13} \cdots \\ c_{21} & c_{22} & c_{23} \cdots \\ \cdots & & \cdots \end{pmatrix}$

então:

C_{11} = Produto escalar da linha 1 de A com coluna 2 de B.

$C_{12} = L_{1A} \bullet C_{2B}$

$C_{13} = L_{1A} \bullet C_{3B}$

$\vdots$

$C_{mp} = L_{mA} \bullet C_{pC}$

∴ A·B é o produto escalar de Linhas de A por colunas de B.

(PRODUTO ESCALAR VISTO EM G.A.)

Ex. 1.8

A_{3x5} e B_{5x6}

Qual a ordem de $C = A \times B$?

$$A_{3x5} \cdot B_{5x6} = C_{3x6}.$$

1.9) $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 4 & 2 \\ 5 & 3 \end{pmatrix}$ $B = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 4 \end{pmatrix}$

C_{32} = ? de $A \cdot B = C$.

$C_{32} = L_{3A} \cdot C_{2B}$

$(5, 3) \cdot (-1, 4) = -5 + 12 = 7$

$\therefore C_{32} = 7.$

1.10)

$A_{4\times2}\cdot B_{2\times3}=C_{4\times3}$

34

$$\begin{pmatrix}1&0\\-2&3\\5&4\\0&1\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}0&6&1\\3&8&-2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}C_{11}&C_{12}&C_{13}\\C_{21}&C_{22}&C_{23}\\C_{31}&C_{32}&C_{33}\end{pmatrix}$$

$$\begin{bmatrix}(1,0)\cdot(0,3)&(1,0)\cdot(6,8)&(1,0)\cdot(1,-2)\\(-2,3)\cdot(0,3)&(-2,3)\cdot(6,8)&(-2,3)\cdot(1,-2)\\(5,4)\cdot(0,3)&(5,4)\cdot(6,8)&(5,4)\cdot(1,-2)\\(0,1)\cdot(0,3)&(0,1)\cdot(6,8)&(0,1)\cdot(1,-2)\end{bmatrix}_{4\times3}$$

$$\begin{pmatrix}0+0&6+0&1-0\\0+9&-12+24&-2-6\\0+12&30+24&5-8\\0+3&0+8&0-2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0&6&1\\9&12&-8\\12&54&-3\\3&8&-2\end{pmatrix}$$

1.11)

$$\begin{bmatrix}2&3&4\\3&5&-4\\4&7&-2\end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix}x\\y\\z\end{bmatrix}=$$

$$\begin{pmatrix}(2,3,4)\cdot(x,y,z)\\(3,5,-4)\cdot(x,y,z)\\(4,7,-2)\cdot(x,y,z)\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2x+3y+4z\\3x+5y-4z\\4x+7y-2z\end{pmatrix}$$

$\boxed{3\times1}$

Então, podemos associar matrizes a sistemas lineares:

$$AX = B$$

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_{11} \\ b_{21} \end{pmatrix}$$

$$\begin{cases} a_{11}X + a_{12}Y = b_{11} \\ a_{21}X + a_{22}Y = b_{12} \end{cases}$$

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_{11} \\ b_{21} \\ b_{31} \end{pmatrix}$$

$$\begin{cases} a_{11}X + a_{12}Y + a_{13}Z = b_{11} \\ a_{21}X + a_{22}Y + a_{23}Z = b_{21} \\ a_{31}X + a_{32}Y + a_{33}Z = b_{31} \end{cases}$$

$$\begin{cases} a_1X + b_1Y + c_1Z = d_1 \\ a_2X + b_2Y + c_2Z = d_2 \\ a_3X + b_3Y + c_3Z = d_3 \end{cases} \Longrightarrow$$

$$\begin{pmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} d_1 \\ d_2 \\ d_3 \end{pmatrix}$$

INVERSÃO DA ORDEM A×B.

Só é definido A×B e B×A se A e B são quadradas de mesma ordem.

Em geral $A \times B \neq B \times A$; exceto se A, B, ou A e B, for I. (Identidade).

$$\longrightarrow A_N \times I_N = I_N \times A_N = A_N$$

$$\longrightarrow I_N \times I_N = I_N$$

Verifique:

$$\begin{pmatrix} 3 & 7 & 11 \\ 1 & 5 & 2 \\ 0 & 1 & -7 \end{pmatrix} \cdot \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}}_{I_3} = \begin{pmatrix} 3 & 7 & 11 \\ 1 & 5 & 2 \\ 0 & 1 & -7 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

I_N é o elemento neutro de $A_N \cdot I_N$.

MATRIZ INVERSA DE A : A^{-1}

$$A_N^{-1} \cdot A_n = A_n \cdot A_N^{-1} = I_N$$

A_N^{-1} é única para cada A_N (se existir)

ex: 1.12

$$A=\begin{pmatrix}9 & 5\\ 7 & 4\end{pmatrix} \quad e \quad B=\begin{pmatrix}4 & n\\ m & 9\end{pmatrix}$$

Calcule m e n tal que $B=A^{-1}$.

se $B=A^{-1}$

entõ $A \cdot B = I_2$

$$\begin{pmatrix}9 & 5\\ 7 & 4\end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix}4 & n\\ m & 9\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}$$

$(9,5)\cdot(4,m)=1$
$36+5m=1$
$5m=-35$
$m=-7$

$(9,5)\cdot(n,9)=0$
$9n+45=0$
$9n=-45$
$n=-5$

$(7,4)\cdot(4,m)=0$
$28+4m=0$
$4m=-28$
$m=-7$

$(7,4)\cdot(n,9)=1$
$7n+36=1$
$7n=-35$
$n=-5$

$\therefore$

$(m,n)=(-7,$

→ Calcular a inversa A^{-1} de $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$

$$A \cdot A^{-1} = I_2$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} a+2c & b+2d \\ 3a+4c & 3b+4d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{cases} a+2c=1 \;) \cdot (-2) \\ 3a+4c=0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} -2a-4c=-2 \\ 3a+4c=0 \end{cases}$$

$$a=-2$$

$$a+2c=1$$
$$-2+2c=1$$
$$2c=3$$
$$c=3/2$$

$$\begin{cases} b+2d=0 \;) \cdot (-2) \\ 3b+4d=1 \end{cases}$$

$$\begin{cases} -2b-4d=0 \\ 3b+4d=1 \end{cases}$$

$$b=1$$

$$b+2d=0$$
$$1+2d=0$$
$$d=-1/2$$

$$\therefore A^{-1} = \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 3/2 & -1/2 \end{pmatrix}$$

De fato:

$$A \cdot A^{-1} =$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 3/2 & -1/2 \end{pmatrix} =$$

$$\begin{pmatrix} (1,2)\cdot(-2,3/2) & (1,2)\cdot(1,-1/2) \\ (3,4)\cdot(-2,3/2) & (3,4)\cdot(1,-1/2) \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} -2+3 & 1-1 \\ -6+6 & 3-2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = I_2.$$

$$\therefore A \cdot A^{-1} = I_2$$

OPERAÇÕES ELEMENTARES NUMA MATRIZ

1) Trocar linhas $L_1 \leftrightarrow L_2$

2) Multiplicar uma linha por $K \in \mathbb{R}^*$ $K \cdot L_1$

3) Trocar uma linha pela soma com outra linha.

$$L_1 = L_1 + L_2$$

ou pelo multiplo da soma com outra linha:

$$L_1 = L_1 + KL_2.$$

Ex. 1.14

$$\begin{pmatrix} 0 & -1 & -1 & 1 \\ 2 & 2 & 2 & 2 \\ 2 & 4 & 1 & -2 \\ 3 & 1 & -2 & 2 \end{pmatrix} \xrightarrow[\substack{L_4 = \frac{1}{3}L_4 \\ L_1 = -L_1}]{\substack{L_2 = \frac{1}{2}L_2 \\ L_3 = \frac{1}{2}L_3}} \begin{pmatrix} 0 & +1 & +1 & -1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1/2 & -1 \\ 1 & 1/3 & -2/3 & 2/3 \end{pmatrix} \xrightarrow{L_1 \leftrightarrow L_2}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & -1 \\ 1 & 2 & 1/2 & -1 \\ 1 & 1/3 & -2/3 & 2/3 \end{pmatrix} \xrightarrow[L_4 = L_4 - L_1]{L_3 = L_3 - L_1} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & -1/2 & -2 \\ 0 & -2/3 & -5/3 & -1/3 \end{pmatrix} \xrightarrow{L_4 = -\frac{3}{2}L_4}$$

queremos (1 0 0 0)

queremos (1 1 0 0)

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & -1/2 & -2 \\ 0 & 1 & 5/2 & 1/2 \end{pmatrix} \xrightarrow{\substack{L_3 = L_3 - L_2 \\ L_4 = L_4 - L_2}} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & -3/2 & -1 \\ 0 & 0 & 3/2 & 3/2 \end{pmatrix} \xrightarrow{L_4 = L_4 + L_3}$$

(0, 0)

(1, 1, 1, 0)

1.5 Operações Elementares sobre Linhas de uma Matriz

Definição: Define-se *operações elementares sobre linhas de uma matriz* as seguintes:

(I) Permutação de Linhas

$$L_i \leftrightarrow L_j$$

Isto significa que trocamos a linha i pela linha j.

(II) Multiplicação de uma linha por um número real diferente de zero.

$$kL_i \to L_i$$

Isto significa que multiplicamos a linha i pelo número k e obtivemos uma nova linha i.

(III) Substituir uma linha, pela soma desta linha com outra linha previamente multiplicada por um número real.

$$kL_i + L_j \to L_j$$

Isto significa que substituímos a linha j pela soma dela com a linha i multiplicada por k.

1.5.1 Matriz em Forma escada (Escalonada)

Definição: Uma matriz $m \times n$ é forma escada reduzida por linhas se:

(a) O primeiro elemento não nulo de uma linha não nula é um.

(b) Cada coluna que contém o primeiro elemento não nulo de alguma linha tem todos os seus outros elementos iguais a zero.

(c) Toda linha nula ocorre abaixo de todas as linhas não nulas.

(d) O número de zeros precedendo o primeiro elemento não nulo de uma linha aumenta a cada linha, até que sobrem somente linhas nulas se houver.

Exemplo 1.15: Aplique operações elementares na matriz

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 4 & 6 \\ 3 & 5 & 6 \\ 4 & 2 & 1 \end{bmatrix}$$

De modo a transformá-la na matriz identidade.

$$\begin{bmatrix} 2 & 4 & 6 \\ 3 & 5 & 6 \\ 4 & 2 & 1 \end{bmatrix} \frac{1}{2} L_1 \to L_1 \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 5 & 6 \\ 4 & 2 & 1 \end{bmatrix} \begin{matrix} (-3)L_1 + L_2 \to L_2 \\ (-4)L_1 + L_3 \to L_3 \end{matrix} \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & -1 & -3 \\ 0 & -6 & -11 \end{bmatrix} (-1)L_2 \to L_2$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 3 \\ 0 & -6 & -11 \end{bmatrix} \begin{matrix} (-2)L_2 + L_1 \to L_1 \\ (+6)L_2 + L_3 \to L_3 \end{matrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & -3 \\ 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 7 \end{bmatrix} \frac{1}{7} L_3 \to L_3$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & -3 \\ 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{matrix} (+3)L_3 + L_1 \to L_1 \\ (-3)L_3 + L_2 \to L_2 \end{matrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Exercício 1.14: Faça o mesmo para a matriz:

$$B = \begin{bmatrix} 0 & -1 & -1 & 1 \\ 2 & 2 & 2 & 2 \\ 2 & 4 & 1 & -2 \\ 3 & 1 & -2 & 2 \end{bmatrix}$$

Exercício 1.15: Quais matrizes abaixo estão na forma escalonada?

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \qquad B = \begin{bmatrix} 0 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & -3 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \qquad C = \begin{bmatrix} 0 & 1 & -3 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 2 \end{bmatrix}$$

$$D = \begin{bmatrix} 0 & 1 & -3 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

1.5.2 Posto de uma matriz

Definição: Dada uma matriz $A_{m\times n}$, seja $B_{m\times n}$ a matriz em forma escada da matriz *A*. O posto de *A*, denotado por $p(A)$ é o número de linhas não nulas de *B*.

Exemplo 1.16: A matriz *A* do exemplo 1.15 tem posto 3, ou seja, $p(A)=3$. Já a matriz *B* do exercício 1.12 tem posto 4, isto é, $p(B)=4$

Exercício 1.16 Encontre o posto da matriz

$$A=\begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 3 & 5 \\ 1 & -2 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

Exercício 1.17 Aplique operações elementares para transformar as matrizes abaixo na matriz identidade.

$$A=\begin{bmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 4 & 2 & 2 \\ 2 & 5 & 3 \end{bmatrix} \qquad B=\begin{bmatrix} 12 & 7 \\ 5 & 3 \end{bmatrix} \qquad C=\begin{bmatrix} -2 & -1 & 0 & 2 \\ 3 & 1 & -2 & -2 \\ -4 & -1 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & -1 & -2 \end{bmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & -3/2 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 1/2 \end{pmatrix} \xrightarrow[L_4 = 2L_4]{L_3 = -\frac{2}{3}L_3} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 2/3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow[L_3 = L_3 - \frac{2}{3}L_4]{\substack{L_1 = L_1 - L_4 \\ L_2 = L_2 + L_4}}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{\substack{L_1 = L_1 - L_3 \\ L_2 = L_2 - L_3}} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{L_1 = L_1 - L_2}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

posto 4

1.15 A) $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \boxed{-1} & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow{L_2=L_2+L_3}$

④②

$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ ESCALONADA POSTO 1

B) $\begin{pmatrix} 0 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & -3 \\ 2 & 0 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow{L_1 \leftrightarrow L_2} \cancel{\begin{pmatrix} 1 & 0 & -3 \\ 0 & 2 & 1 \\ 2 & 0 & 0 \end{pmatrix}}$ NÃO

$\xrightarrow{L_1 \leftrightarrow L_3} \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & -3 \\ 0 & 2 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{L_1=\frac{1}{2}L_1} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & -3 \\ 0 & 2 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{L_2=L_2-L_1}$

$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -3 \\ 0 & 2 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{L_2 \leftrightarrow L_3} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & -3 \end{pmatrix} \xrightarrow[L_3=-\frac{1}{3}L_3]{L_2=\frac{1}{2}L_2}$

$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{L_2=L_2-\frac{1}{2}L_3} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

POSTO 3

$$C = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -3 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 2 \end{pmatrix} \xrightarrow{L_3 \leftrightarrow L_1}$$

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & -3 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \longrightarrow$$

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & -3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

POSTO 2

$$D = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -3 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

JÁ ESTA ESCALONADA,
POSTO 2

PODEMOS AINDA USAR OPERAÇÕES ELEMENTARES SOBRE MATRIZES QUADABRADAS, PAR CALCULAR A MATRIZ INVERSA.

$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$

$\left[\begin{array}{cc|cc} 1 & 2 & 1 & 0 \\ 3 & 4 & 0 & 1 \end{array}\right]$ USAR OP. EL. ATÉ A VIRAR I_2 NO LUGAR DA I_2, TEREMOS A^{-1}.

$\underbrace{}_{I_2}$

$$\left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 2 & 1 & 0 \\ 3 & 4 & 0 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow[L_2 = L_2 - 3L_1]{} \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & -3 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow[L_2 = -\frac{1}{2}L_2]{L_1 = L_1 + L_2}$$

$$\left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & -2 & 1 \\ 0 & 1 & 3/2 & -1/2 \end{array}\right) \Rightarrow A^{-1} = \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 3/2 & -1/2 \end{pmatrix}$$

Vamos calcular as inversas do exercício 1.17

④④

④

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 4 & 2 & 2 \\ 2 & 5 & 3 \end{pmatrix}$$

45

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 2 & 1 & 3 & 1 & 0 & 0 \\ 4 & 2 & 2 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & 5 & 3 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow[L_3 = L_3 - L_1]{L_2 = L_2 - 2L_1}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 2 & 1 & 3 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -4 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 4 & 0 & -1 & 0 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow{L_3 \longleftrightarrow L_2}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 2 & 1 & 3 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -4 & -2 & 1 & 0 \end{array}\right) \xrightarrow[L_2 = \frac{1}{4}L_2]{L_1 = \frac{1}{2}L_1} \quad L_3 = -\frac{1}{4}L_3$$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1/2 & 3/2 & -1/2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1/4 & 0 & 1/4 \\ 0 & 0 & 1 & 1/2 & -1/4 & 0 \end{array}\right) \xrightarrow{L_1 = L_1 - 3/2\, L_3}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1/2 & 0 & -2 & 3/8 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1/4 & 0 & 1/4 \\ 0 & 0 & 1 & 1/2 & -1/4 & 0 \end{array}\right) \xrightarrow{L_1 = L_1 - \frac{1}{2}L_2}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & -15/8 & 3/8 & -1/8 \\ 0 & 1 & 0 & -1/4 & 0 & 1/4 \\ 0 & 0 & 1 & 1/2 & -1/4 & 0 \end{array}\right)$$

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} -\frac{13}{8} & \frac{3}{8} & -\frac{1}{8} \\ -\frac{1}{4} & 0 & \frac{1}{4} \\ \frac{1}{2} & -\frac{1}{4} & 0 \end{pmatrix}$$

$$B = \begin{pmatrix} 12 & 7 \\ 5 & 3 \end{pmatrix}$$

46

$$\left(\begin{array}{cc|cc} 12 & 7 & 1 & 0 \\ 5 & 3 & 0 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow[L_2 = \frac{1}{5}L_2]{L_1 = \frac{1}{12}L_1}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 7/12 & 1/12 & 0 \\ 1 & 3/5 & 0 & 1/5 \end{pmatrix} \xrightarrow{L_2 = L_2 - L_2}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 7/12 & 1/12 & 0 \\ 0 & 1/60 & -1/12 & 1/5 \end{pmatrix} \xrightarrow{L_2 = 60L_2}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 7/12 & 1/12 & 0 \\ 0 & 1 & -5 & 12 \end{pmatrix} \xrightarrow{L_1 = L_1 - \frac{7}{12}L_2}$$

$$\left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & 3 & -7 \\ 0 & 1 & -5 & 12 \end{array}\right)$$

$$\therefore B^{-1} = \begin{pmatrix} 3 & -7 \\ -5 & 12 \end{pmatrix}$$

$$C = \begin{pmatrix} -2 & -1 & 0 & 2 \\ 3 & 1 & -2 & -2 \\ -4 & -1 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & -1 & -2 \end{pmatrix}$$

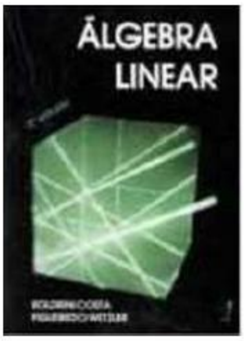
47

$$C^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{11}{21} & -\frac{1}{21} & \frac{20}{21} & 0 \\ -\frac{1}{21} & \frac{2}{21} & \frac{2}{21} & 0 \\ -\frac{10}{21} & -\frac{1}{21} & \frac{20}{21} & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

CONFIRA!

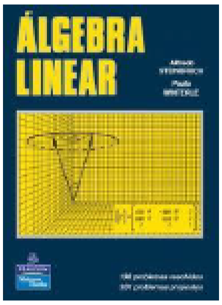
KKK!!!

EXERCICIOS PRINCIPAIS:



BOLDRINI,J.L.; COSTA, S.I.R.; RIBEIRO, V.L.F.F; WETZLER,H.G. *Álgebra Linear*. São Paulo: Editora Harper & Row do Brasil Ltda, 1978.

Pg 11 a 15: 1, 2, 3, 4, 5, 7, 8, 9, 10, 12, 14, 15 e 16(a),(b),(c) e (e)



STEINBRUCH, A.; WINTERLE, P. *Álgebra Linear*. 2 ed. São Paulo: McGraw-Hill, 1987.

Pg 393 a 398: 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12, 13, 14, 15, 16, 17, 18, 19, 20, 21, 22, 23, 24, 25, 26, 27, 28.

Pg 414 a 420: 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12.

Pg 498 e 499: 1, 2 e 3.