Agora é a sua vez da seção 1 (Noção intuitiva de limites)

1)

a)

x	y
0,01	2,9295
0,001	2,992995
0,0001	2,999299950
-0,01	3,0695
-0,001	3,006995
-0,0001	3,000699949

$$\lim_{x \to 0}(3 - 7x - 5x^2) = 3$$

b)

x	y
-1,5	11,5
-1,2	10,6
-1,1	10,3
-0,9	9,7
-0,8	9,4
-0,5	8,5

$$\lim_{x \to -1}(-3x + 7) = 10$$

c)

x	y
0,9	1,9
0,99	1,99
0,999	1,999
1,001	2,001
1,01	2,01
1,1	2,1

$$\lim_{x \to 1}\frac{x^2 - 1}{x - 1} = 2$$

d)

x	y
1,2	3,021978021
1,15	4,127669786
1,1	6,344410876
1,01	66,3344444
1,001	666,3334444
1,0001	6666,3333

$$\lim_{x\to 1^+} \frac{x+1}{x^3-1} = +\infty$$

e)

x	y
0,5	-1,714285714
0,8	-3,688524590
0,9	-7,011070110
0,99	-67,00111107
0,999	-667,0001111
0,9999	-6666,999966

$$\lim_{x\to 1^-} \frac{x+1}{x^3-1} = -\infty$$

f)

x	y
100	$2{,}93\text{x}10^{4}$
1000	$2{,}993002\text{x}10^{6}$
10000	$2{,}99930002\text{x}10^{8}$
100000	$2{,}999993\text{x}10^{10}$
1000000	$2{,}99999\text{x}10^{12}$

$$\lim_{x\to +\infty} (3x^2 - 7x + 2) = +\infty$$

g)

x	y
-100	$3{,}0702\text{x}10^{4}$
-1000	$3{,}007002\text{x}10^{6}$
-10000	$3{,}00070002\text{x}10^{8}$
-100000	$3{,}00007\text{x}10^{10}$
-1000000	$3{,}000007\text{x}10^{12}$

$$\lim_{x\to -\infty} (3x^2 - 7x + 2) = +\infty$$

2)

Analisando o gráfico da Figura 2.3 resolva os seguintes limites:

a)	b)	c)	d)
$\lim\limits_{x\to 2^+} f(x) = 5$	$\lim\limits_{x\to 2^-} f(x) = 5$	$\lim\limits_{x\to +\infty} f(x) = -\infty$	$\lim\limits_{x\to -\infty} f(x) = +\infty$

Agora é a sua vez da seção 2 (Cálculo de limites usando propriedades)

Calcular os seguintes limites:

a) $\lim\limits_{x\to -3}(x^2 - 6x + 1)$

$$\lim_{x\to -3}(x^2 - 6x + 1) = (-3)^2 - 6\cdot(-3) + 1 = 9 + 18 + 1 = 28$$

b) $\lim\limits_{x\to 4}\dfrac{x^2-16}{x-4}$

Não podemos aplicar diretamente a propriedade 6, pois o limite do denominador vale zero, portanto fazemos primeiramente uma fatoração do numerador.

$$\lim_{x\to 4}\frac{x^2-16}{x-4} = \lim_{x\to 4}\frac{(x-4)(x+4)}{x-4} = \lim_{x\to 4}(x+4) = 8$$

c) $\lim\limits_{x\to 0}(x+5)^{2/5}$

Aplicamos aqui a propriedade 8.

$$\lim_{x\to 0}(x+5)^{2/5} = \left(\lim_{x\to 0}(x+5)\right)^{2/5} = (0+5)^{2/5} = \sqrt[5]{5^2} = \sqrt[5]{25}$$

d) $\lim\limits_{x\to 2}(x^2-1)^5(x-3)^3$

Aplicamos a propriedade do produto e a propriedade 8.

$$\lim_{x\to 2}(x^2-1)^5(x-3)^3 = \lim_{x\to 2}(x^2-1)^5 \cdot \lim_{x\to 2}(x-3)^3 = (2^2-1)^5\cdot(2-3)^3 = 243\cdot(-1) = -243$$

e) $\lim_{x \to 2} \dfrac{x^2 - 5x + 6}{x - 2}$

Aqui não podemos aplicar a propriedade do quociente, já que o limite do denominador é zero. Fazemos então uma fatoração do denominador.

$$\lim_{x \to 2} \frac{x^2 - 5x + 6}{x - 2} = \lim_{x \to 2} \frac{(x-2)(x-3)}{x - 2} = \lim_{x \to 2}(x - 3) = 2 - 3 = -1$$

f) $\lim_{x \to 0}(e^x + 1)$

Usamos a propriedade 12.

$$\lim_{x \to 0}(e^x + 1) = e^0 + 1 = 1 + 1 = 2$$

g) $\lim_{x \to \frac{1}{3}}(7x - 8)$

Usamos a propriedade 1.

$$\lim_{x \to \frac{1}{3}}(7x - 8) = 7 \cdot \frac{1}{3} - 8 = \frac{-17}{3}$$

h) $\lim_{x \to 3} \sqrt[3]{x^2 - 1}$

Aplicamos a propriedade 8.

$$\lim_{x \to 3} \sqrt[3]{x^2 - 1} = \sqrt[3]{3^2 - 1} = \sqrt[3]{8} = 2$$

i) $\lim_{x \to 5} \dfrac{x^2 - 5}{x + 7}$

Basta aplicar a propriedade 6.

$$\lim_{x \to 5} \frac{x^2 - 5}{x + 7} = \frac{5^2 - 5}{5 + 7} = \frac{20}{12} = \frac{5}{3}$$

Agora é a sua vez da seção 3 (Limites laterais e indeterminações)

1) Calcular $\lim_{x\to 3} f(x)$, para $f(x)=\begin{cases} x^2-5 & ; \quad x\leqslant 3 \\ \sqrt{x+13} & ; \quad x>3 \end{cases}$

Para $\lim_{x\to 3} f(x)$ existir, é necessário que os limites laterais existam e sejam iguais.

$$\lim_{x\to 3^+} f(x) = \lim_{x\to 3^+} \sqrt{x+13} = \sqrt{3+13} = \sqrt{16} = 4$$
$$\lim_{x\to 3^-} f(x) = \lim_{x\to 3^-} (x^2-5) = 3^2-5 = 9-5 = 4$$

Logo, $\lim_{x\to 3} f(x) = 4$

2) Seja $f(x)=\begin{cases} \dfrac{|x|}{x} & x\neq 0 \\ 0 & x=0 \end{cases}$

Calcular $\lim_{x\to 0^+} f(x)$, $\lim_{x\to 0^-} f(x)$, $\lim_{x\to 0} f(x)$ se existirem.

Lembre-se que $\dfrac{|x|}{x} = \dfrac{x}{x} = 1$, se $x>0$ e $\dfrac{|x|}{x} = -\dfrac{x}{x} = -1$, se $x<0$. Logo

$$\lim_{x\to 0^+} f(x) = \lim_{x\to 0^+} 1 = 1$$
$$\lim_{x\to 0^-} f(x) = \lim_{x\to 0} (-1) = -1$$

$\lim_{x\to 0} f(x)$ não existe pois os limites laterais são diferentes.

3) Calcule os seguintes limites.

a) $\lim_{x\to -2} \dfrac{x^3+8}{x+2}$

$$\lim_{x\to -2} \frac{x^3+8}{x+2} = \lim_{x\to -2} \frac{(x+2)(x^2-2x+4)}{x+2} =$$
$$= \lim_{x\to -2} (x^2-2x+4) = (-2)^2 - 2\cdot(-2) + 4 = 4+4+4 = 12$$

b) $\lim_{x\to 3} \dfrac{x^2-x-6}{x-3}$

$$\lim_{x\to 3} \frac{x^2-x-6}{x-3} = \lim_{x\to 3} \frac{(x-3)(x+2)}{x-3} = \lim_{x\to 3} (x+2) = 3+2 = 5$$

c) $\lim_{x\to 1}\frac{\sqrt{x+1}-\sqrt{2}}{x-1}$

$$\lim_{x\to 1}\frac{\sqrt{x+1}-\sqrt{2}}{x-1}=\lim_{x\to 1}\frac{(\sqrt{x+1}-\sqrt{2})(\sqrt{x+1}+\sqrt{2})}{(x-1)(\sqrt{x+1}+\sqrt{2})}=\lim_{x\to 1}\frac{x+1-2}{(x-1)(\sqrt{x+1}+\sqrt{2})}=$$

$$=\lim_{x\to 1}\frac{x-1}{(x-1)(\sqrt{x+1}+\sqrt{2})}=\lim_{x\to 1}\frac{1}{\sqrt{x+1}+\sqrt{2}}=\frac{1}{\sqrt{1+1}+\sqrt{2}}=$$

$$=\frac{1}{2\sqrt{2}}$$

d) $\lim_{x\to 2}\frac{x^2-5x+6}{x^2-12x+20}$

$$\lim_{x\to 2}\frac{x^2-5x+6}{x^2-12x+20}=\lim_{x\to 2}\frac{(x-2)(x-3)}{(x-2)(x-10)}=\lim_{x\to 2}\frac{x-3}{x-10}=\frac{2-3}{2-10}=\frac{1}{8}$$

e) $\lim_{x\to 5}\frac{\sqrt{2x-1}-3}{x-5}$

$$\lim_{x\to 5}\frac{\sqrt{2x-1}-3}{x-5}=\lim_{x\to 5}\frac{(\sqrt{2x-1}-3)(\sqrt{2x-1}+3)}{(x-5)(\sqrt{2x-1}+3)}=\lim_{x\to 5}\frac{2x-1-9}{(x-5)(\sqrt{2x-1}+3)}=$$

$$=\lim_{x\to 5}\frac{2x-10}{(x-5)(\sqrt{2x-1}+3)}=\lim_{x\to 5}\frac{2(x-5)}{(x-5)(\sqrt{2x-1}+3)}=$$

$$=\lim_{x\to 5}\frac{2}{\sqrt{2x-1}+3}=\frac{2}{\sqrt{9}+3}=\frac{2}{6}=\frac{1}{3}$$

f) $\lim_{x\to 0}\frac{(x+3)^2-9}{x}$

$$\lim_{x\to 0}\frac{(x+3)^2-9}{x}=\lim_{x\to 0}\frac{x^2+6x+9-9}{x}=\lim_{x\to 0}\frac{x^2+6x}{x}=\lim_{x\to 0}\frac{x(x+6)}{x}=\lim_{x\to 0}(x+6)=6$$

g) $\lim_{x\to 5}\frac{x^2-8x+15}{x(x-5)}$

$$\lim_{x\to 5}\frac{x^2-8x+15}{x(x-5)}=\lim_{x\to 5}\frac{(x-5)(x-3)}{x(x-5)}=\lim_{x\to 5}\frac{x-3}{x}=\frac{5-3}{5}=\frac{2}{5}$$

h) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{(x+1)^4-1}{x}$

$$\lim_{x\to 0}\frac{(x+1)^4-1}{x}=\lim_{x\to 0}\frac{x^4+4x^3+6x^2+4x+1-1}{x}=\lim_{x\to 0}\frac{x(x^3+4x^2+6x+4)}{x}=$$
$$=\lim_{x\to 0}(x^3+4x^2+6x+4)=0+0+0+4=4$$

Agora é a sua vez da seção 4 (Limites no infinito e limites infinitos)

Calcular os seguintes limites.

a) $\lim\limits_{t\to-\infty}\left(x^2+6x+7\right)=\lim\limits_{x\to-\infty}x^2(1+\dfrac{6}{x}+\dfrac{7}{x^2})=\infty\cdot(1+0+0)=+\infty$

b) $\lim\limits_{x\to 8^+}\dfrac{2x-1}{2x-16}=\dfrac{2\cdot 8-1}{0^+}=\dfrac{15}{0^+}=+\infty$

c)
$$\lim_{t\to+\infty}\frac{6x^4-7x^3+2x^2+6x+10}{7x+1}=\lim_{x\to+\infty}\frac{6x^4}{7x}=\frac{6}{7}\lim_{x\to+\infty}x^3=\frac{6}{7}\cdot+\infty=+\infty$$

d) $\lim\limits_{t\to 2^-}\dfrac{x^2+3x+1}{x^2+x-6}=\lim\limits_{x\to 2^-}\dfrac{x^2+3x+1}{(x-2)(x+3)}=\dfrac{2^2+3\cdot 2+1}{0^-\cdot 5}=\dfrac{11}{0^-}=-\infty$

e) $\lim\limits_{t\to-\infty}\dfrac{x^2+2x+2}{x^3-1}=\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{x^2}{x^3}=\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{1}{x}=0$

f) $\lim\limits_{t\to+\infty}\dfrac{3x^2+x-6}{6x^2-7x+1}=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{3x^2}{6x^2}=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{3}{6}=\dfrac{3}{6}=\dfrac{1}{2}$

Agora é a sua vez da seção 6 (Continuidade)

1) Verificar se as seguinte funções são contínuas no ponto indicado.

a) $f(x) = \dfrac{x^2 - 5x + 6}{x^2 - 9}$ em $x = 3$

Para que f(x) seja contínua em x=3, é necessário calcular f(3). Isto não é possível pois não existe divisão por zero, logo a função não é contínua em x=3.

b) $g(x) = \begin{cases} \dfrac{x^2 - 9}{x^2 - 5x + 6} & x \neq 3 \\ 6 & x = 3 \end{cases}$ em x=*3*

- *f(3)=6*

- $\lim\limits_{x \to 3} f(x) = \lim\limits_{x \to 3} \dfrac{x^2 - 9}{x^2 - 5x + 6} = \lim\limits_{x \to 3} \dfrac{(x-3)(x+3)}{(x-3)(x-2)} = \lim\limits_{x \to 3} \dfrac{x+3}{x-2} = \dfrac{6}{1} = 6$

Como $f(3) = 6 = \lim\limits_{x \to 3} f(x)$, segue que a função é contínua em x=3.

c) $h(x) = x^2 - 2x + 1$ em x=*1*

- $f(1) = 1 - 2 + 1 = 0$

- $\lim\limits_{x \to 1} (x^2 - 2x + 1) = 1 - 2 + 1 = 0$

Como $f(1) = 0 = \lim\limits_{x \to 1} f(x)$, segue que a função é contínua em x=1.

d) $f(x) = \begin{cases} x^2 & x \geqslant 0 \\ x + 2 & x < 0 \end{cases}$ em x=*0*

- $f(0) = 0^2 = 0$

- $\lim\limits_{x \to 0^+} f(x) = \lim\limits_{x \to 0^+} x^2 = 0$ e $\lim\limits_{x \to 0^-} f(x) = \lim\limits_{x \to 0^-} (x + 2) = 2$

O fato de os limites laterais não serem iguais caracteriza a descontinuidade da função em x=0.

2) Em cada item, encontre uma função f que satisfaça a condição proposta.

a) f é contínua em toda parte, exceto no ponto x=1.

b) f tem limite em x=1, mas não é contínua naquele ponto.

Encontre um exemplo de duas funções com as características solicitadas e envie ao professor tutor, via e-mail, para que ele faça a correção para você.

3) Ache o valor de k para que a função f seja contínua.

$$f(x) = \begin{cases} 4x-3 & ; \quad x \geqslant 3 \\ kx & ; \quad x < 3 \end{cases}$$

Para a função ser contínua, devemos ter $f(3) = \lim_{x \to 3} f(x)$. Mas $f(3) = 4 \cdot 3 - 3 = 9 \cdot$

Agora $\lim_{x \to 3^+} f(x) = \lim_{x \to 3^+} (4x-3) = 9$ e $\lim_{x \to 3^-} f(x) = \lim_{x \to 3^-} kx = 3k$. Assim para satisfazer a condição de continuidade devemos ter

$$3k = 9$$
$$k = 3$$

4) Encontre os pontos de descontinuidade das seguintes funções:

a) $f(x) = \dfrac{x^3 - 8}{x^2 - 4}$

O denominador desta função se anula quando x=-2 e x=2, logo não existem f(-2) e f(2), e portanto a função é descontinua em x=-2 e x=2.

b) $g(x) = \dfrac{x}{|x|}$

É fácil de perceber que não é possível calcular f(0), pois temos uma divisão por zero, logo a função não é contínua em zero.

c) $h(x) = \begin{cases} x^2 + 1 & x \neq 3 \\ 10 & x = 3 \end{cases}$

Aqui temos que f(3)=10 e $\lim_{x \to 3} (x^2 + 1) = 9 + 1 = 10$, portanto a função h(x) é contínua em x=3. Qualquer outro ponto x=a, a função também é contínua, pois $f(a) = a^2 - 1 = \lim_{x \to a} f(x)$

Logo esta função não apresenta ponto de descontinuidade.

Atividades de auto-avaliação

1) Calcular os limites abaixo:

a) $\lim_{x\to 2}(x^3 - 6x^2 + 7x - 1) = 2^3 - 6\cdot 2^2 + 7\cdot 2 - 1 = 8 - 24 + 14 - 1 = -3$

b) $\lim_{x\to 0}\sqrt[3]{x^2 + x + 64} = \sqrt[3]{0^2 + 0 + 64} = \sqrt[3]{64} = 4$

c) $\lim_{x\to \frac{1}{2}}\dfrac{x-1}{x+2} = \dfrac{1/2 - 1}{1/2 + 2} = \dfrac{-1/2}{5/2} = -\dfrac{1}{5}$

d) $\lim_{x\to 1} e^{x^2-1} = e^{1^2-1} = e^0 = 1$

e)

$$\lim_{x\to 2}(x^2-1)^5(x-3)^3 = \lim_{x\to 2}(x^2-1)^5 \cdot \lim_{x\to 2}(x-3)^3 =$$
$$= (2^2-1)^5\cdot(2-3)^3 = 243\cdot(-1) = -243$$

2) Calcular os limites abaixo:

a)

$$\lim_{x\to 0}\frac{(x-3)^2-9}{x} = \lim_{x\to 0}\frac{x^2-6x+9-9}{x} = \lim_{x\to 0}\frac{x(x-6)}{x} = \lim_{x\to 0}(x-6) = 0-6 = -6$$

b)

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt{x^2+16}-4}{x^2} = \lim_{x\to 0}\frac{(\sqrt{x^2+16}-4)(\sqrt{x^2+16}+4)}{x^2(\sqrt{x^2+16}+4)} = \lim_{x\to 0}\frac{x^2+16-16}{x^2(\sqrt{x^2+16}+4)} =$$
$$\lim_{x\to 0}\frac{1}{\sqrt{x^2+16}+4} = \frac{1}{\sqrt{16}+4} = \frac{1}{8}$$

c) $\lim_{x\to 0}\dfrac{x^3 - x}{x} = \lim_{x\to 0}\dfrac{x(x^2-1)}{x} = \lim_{x\to 0}(x^2-1) = 0 - 1 = -1$

d)

$$\lim_{x\to -1}\frac{x^3+1}{x^2-1}=\lim_{x\to -1}\frac{(x+1)(x^2-x+1)}{(x+1)(x-1)}=\lim_{x\to -1}\frac{x^2-x+1}{x-1}=\frac{1+1+1}{-1-1}=-\frac{3}{2}$$

e)

$$\lim_{x\to 4}\frac{4-x}{2-\sqrt{x}}=\lim_{x\to 4}\frac{(4-x)(2+\sqrt{x})}{(2-\sqrt{x})(2+\sqrt{x})}=\lim_{x\to 4}\frac{(4-x)(2+\sqrt{x})}{4-x}=\lim_{x\to 4}(2+\sqrt{x})=2+\sqrt{4}=4$$

f) $$\lim_{x\to 5}\frac{x^2-2x-15}{-5x+x^2}=\lim_{x\to 5}\frac{(x-5)(x+3)}{x(x-5)}=\lim_{x\to 5}\frac{x+3}{x}=\frac{8}{5}$$

3) Calcular os seguintes limites no infinito.

a) $$\lim_{x\to +\infty}\frac{3x-6}{7x+1}=\lim_{x\to +\infty}\frac{3x}{7x}=\frac{3}{7}$$

b) $$\lim_{x\to -\infty}\frac{7x^2-2x+1}{3x^3+2x^2-x+7}=\lim_{x\to -\infty}\frac{7x^2}{3x^3}=\frac{7}{3}\lim_{x\to -\infty}\frac{1}{x}=\frac{7}{3}\cdot 0=0$$

c) $$\lim_{x\to +\infty}\frac{3x^4-7x}{2x^4-6x^3+2x^2-6x+1}=\lim_{x\to +\infty}\frac{3x^4}{2x^4}=\lim_{x\to +\infty}\frac{3}{2}=\frac{3}{2}$$

d) $$\lim_{x\to +\infty}\frac{x-5}{\sqrt{3x^2-x+1}}=\lim_{x\to +\infty}\frac{x/x-5/x}{\sqrt{3x^2-x+1}\,/\sqrt{x^2}}=\lim_{x\to +\infty}\frac{1-5/x}{\sqrt{\dfrac{3x^2-x+1}{x^2}}}=$$

$$=\lim_{x\to +\infty}\frac{1-5/x}{\sqrt{3-1/x+1/x^2}}=\frac{1-0}{\sqrt{3-0+0}}=\frac{1}{\sqrt{3}}$$

4) Calcular os seguintes limites.

a) $$\lim_{x\to +\infty}\frac{1}{x^3}=0$$

b) $$\lim_{x\to -\infty}\frac{1}{x^2}=0$$

c)

$$\lim_{x\to+\infty}(x^3-6x^2+x+1)=\lim_{x\to+\infty}x^3(1-\frac{6}{x}+\frac{1}{x^2}+\frac{1}{x^3})=\infty(1-0+0+0)=+\infty$$

d) $\displaystyle\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{1}{x}+x^2-\frac{1}{x^6}\right)=0+\infty-0=+\infty$

e) $\displaystyle\lim_{x\to+\infty}\frac{x^2+6x-1}{x^2+x-2}=\lim_{x\to+\infty}\frac{x^2}{x^2}=\lim_{x\to+\infty}1=1$

f) $\displaystyle\lim_{x\to-\infty}\frac{3x^2+1}{5x+1}=\lim_{x\to-\infty}\frac{3x^2}{5x}=\frac{3}{5}\lim_{x\to-\infty}x=\frac{3}{5}\cdot(-\infty)=-\infty$

g) $\displaystyle\lim_{x\to+\infty}\frac{5x^3-6x^2+x-1}{10x^4-1}=\lim_{x\to+\infty}\frac{5x^3}{10x^4}=\frac{5}{10}\lim_{x\to+\infty}\frac{1}{x}=\frac{1}{2}\cdot 0=0$

h)

$$\lim_{x\to-\infty}\frac{x-1}{\sqrt{x^2+1}}=\lim_{x\to-\infty}\frac{x-1\big/x}{\sqrt{x^2+1}\big/-\sqrt{x^2}}=\lim_{x\to-\infty}\frac{1-\frac{1}{x}}{-\sqrt{\frac{x^2+1}{x^2}}}=\lim_{x\to-\infty}\frac{1-\frac{1}{x}}{-\sqrt{1+\frac{1}{x^2}}}=$$

$$=\frac{1-0}{-\sqrt{1+0}}=\frac{1}{-1}=-1$$

i) $\displaystyle\lim_{x\to 2^-}\frac{x+2}{2-x}=\frac{4}{0^+}=+\infty$

j) $\displaystyle\lim_{x\to 2^+}\frac{x+2}{2-x}=\frac{4}{0^-}=-\infty$

k) $\displaystyle\lim_{x\to-3}\frac{1}{(x+3)^4}$

Para resolver este limite, é possível fazer a substituição u=x+3. Desta forma teremos:

$$x \to -3$$
$$u - 3 \to -3$$
$$u \to 0$$

Assim será necessário resolver o limite:

$$\lim_{u \to 0} \frac{1}{(u)^4}$$

$$\lim_{u \to 0^+} \frac{1}{(u)^4} = \frac{1}{(0^+)^4} = \frac{1}{0} = +\infty$$

$$\lim_{u \to 0^-} \frac{1}{(u)^4} = \frac{1}{(0^-)^4} = \frac{1}{0} = +\infty$$

Logo $\lim_{x \to -3} \frac{1}{(x+3)^4} = +\infty$

(I) $\lim_{x \to -3^-} \frac{2}{(x+3)^3} = \frac{2}{(0^-)^3} = \frac{2}{0^-} = -\infty$

5) Resolva os seguintes limites fundamentais.

a) $\lim_{x \to +\infty} \left(1 + \frac{5}{x}\right)^x$

Fazendo $\frac{5}{x} = \frac{1}{u}$, temos que x=5u e se $x \to +\infty$ então $u \to +\infty$

$$\lim_{x \to +\infty} \left(1 + \frac{5}{x}\right)^x = \lim_{u \to +\infty} \left(1 + \frac{1}{u}\right)^{5u} = \lim_{u \to +\infty} \left(\left(1 + \frac{1}{u}\right)^u\right)^5 = e^5$$

b) $\lim_{x \to +\infty} \left(\frac{x}{1+x}\right)^x$

Fazendo a substituição 1+x=u ou x=u-1, segue que se $x \to +\infty$ então $u \to +\infty$

$$\lim_{x \to +\infty} \left(\frac{x}{1+x}\right)^x = \lim_{u \to +\infty} \left(\frac{u-1}{u}\right)^{u-1} = \lim_{u \to +\infty} \left(1 + \frac{1}{(-u)}\right)^u \left(1 - \frac{1}{u}\right)^{-1} =$$

$$= \lim_{u \to +\infty} \left(1 + \frac{1}{(-u)}\right)^{-u \times (-1)} \left(1 - \frac{1}{u}\right)^{-1} = e^{-1} \cdot 1 = \frac{1}{e}$$

c) $\lim_{x\to+\infty}\left(1+\frac{5}{x}\right)^{x}$

Faça $\frac{5}{x}=\frac{1}{u}$, ou seja, x=5u. Quando $x\to+\infty$, segue que $u\to+\infty$. Logo,

$$\lim_{x\to+\infty}\left(1+\frac{5}{x}\right)^{x}=\lim_{u\to+\infty}\left(1+\frac{1}{u}\right)^{5u}=\lim_{u\to+\infty}\left(\left(1+\frac{1}{u}\right)^{u}\right)^{5}=e^{5}$$

d) $\lim_{x\to2}\frac{5^{x-2}-1}{x-2}$

Fazendo a substituição u=x-2, nota-se que se $x\to2$, então $u\to0$. Logo,

$$\lim_{x\to2}\frac{5^{x-2}-1}{x-2}=\lim_{u\to0}\frac{5^{u}-1}{u}=\ln 5$$

e) $\lim_{x\to+\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^{x+3}$

$$\lim_{x\to+\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^{x+3}=\lim_{x\to+\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^{x}\cdot\left(1+\frac{1}{x}\right)^{3}=\lim_{x\to+\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^{x}.\lim_{x\to+\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^{3}=e.(1+0)^{3}=e$$

f) $\lim_{x\to3}\frac{6^{x-3}-1}{x-3}$

Faça u=x-3, portanto quando $x\to3$, segue que $u\to0$. Logo,

$$\lim_{x\to3}\frac{6^{x-3}-1}{x-3}=\lim_{u\to0}\frac{6^{u}-1}{u}=\ln 6$$