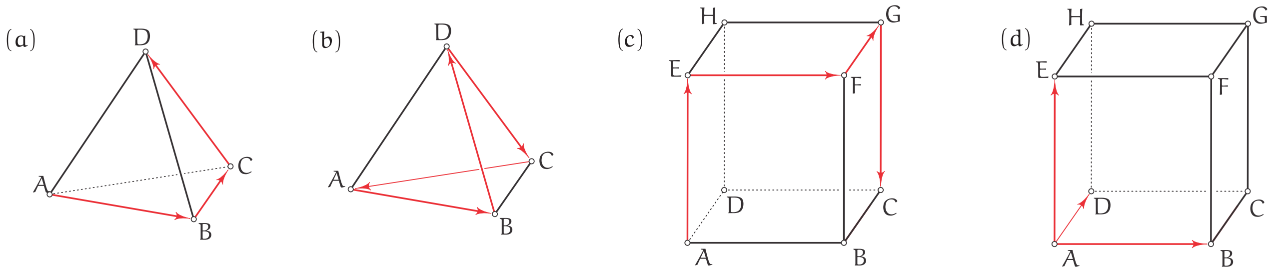
1ª Lista de Exercícios - Geometria Analítica

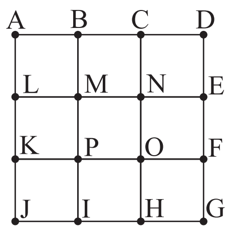
Vetores

Vetores: abordagem geométrica

(**1**) Determine a soma dos vetores indicados em cada caso:



(**2**) Considere a figura abaixo formada por quadrados:



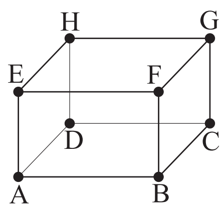
Determine representantes para os vetores abaixo, expressando-os com origem no ponto A.

(a) $\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{CN}$ (b) $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BD}$ (c) $\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{DC}$ (d) $\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{AK}$

(e) $\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{EO}$ (f) $\overrightarrow{AM}+\overrightarrow{BL}$ (g) $\overrightarrow{AK}+\overrightarrow{AN}$ (h) $\overrightarrow{AO}-\overrightarrow{OE}$

(i) $\overrightarrow{MO}-\overrightarrow{NP}$ (j) $\overrightarrow{BC}-\overrightarrow{CB}$ (k) $\overrightarrow{LP}+\overrightarrow{PN}+\overrightarrow{NF}$ (l) $\overrightarrow{BL}+\overrightarrow{BN}+\overrightarrow{PB}$

(**3**) Considere o paralelepípedo retângulo:



(i) Decida se é verdadeira ou falsa cada uma das afirmações:

(a) $\overrightarrow{DH}=\overrightarrow{BF}$

(b) $\overrightarrow{AB}=-\overrightarrow{HG}$

(c) $\overrightarrow{AB}\perp\overrightarrow{CG}$

(d) $\overrightarrow{AF}\perp\overrightarrow{BC}$

(e) $||\overrightarrow{AC}||=||\overrightarrow{HF}||$

(f) $||\overrightarrow{AG}||=||\overrightarrow{DF}||$

(g) $\overrightarrow{BG}\,/\!/\,\overrightarrow{ED}$

(h) $\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{BC}$ e $\overrightarrow{CG}$ são coplanares

(i) $\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{FG}$ e $\overrightarrow{EG}$ são coplanares

(j) $\overrightarrow{EG}, \overrightarrow{CB}$ e $\overrightarrow{HF}$ são coplanares

(k) $\overrightarrow{AC}, \overrightarrow{DB}$ e $\overrightarrow{FG}$ são coplanares

(l) $\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{BG}$ e $\overrightarrow{CF}$ são coplanares

(m) $\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{DC}$ e $\overrightarrow{CF}$ são coplanares

(n) $\overrightarrow{AE}$ é ortogonal ao plano ABC

(o) $\overrightarrow{AB}$ é ortogonal ao plano BCG

(p) $\overrightarrow{DC}$ é paralelo ao plano HEF

(ii) Determinar os vetores abaixo, expressando-os com origem no ponto A:

(a) $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{CG}$

(b) $\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{DE}$

(c) $\overrightarrow{BF}+\overrightarrow{EH}$

(d) $\overrightarrow{EG}-\overrightarrow{BC}$

(e) $\overrightarrow{CG}+\overrightarrow{EH}$

(f) $\overrightarrow{EF}-\overrightarrow{FB}$

(g) $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{AE}$

(h) $\overrightarrow{EG}+\overrightarrow{DA}+\overrightarrow{FH}$

(**4**) Decidir se é verdadeira ou falsa cada uma das afirmações:

(a) ( ) Se $\vec{u}=\vec{v}$, então $||\vec{u}||=||\vec{v}||$.

(b) ( ) Se $||\vec{u}||=||\vec{v}||$, então $\vec{u}=\vec{v}$.

(c) ( ) Se $\vec{u}\,/\!\!/\,\vec{v}$, então $\vec{u}=\vec{v}$.

(d) ( ) Se $\vec{u}=\vec{v}$, então $\vec{u}\,/\!\!/\,\vec{v}$.

(e) ( ) Se $\vec{w}=\vec{u}+\vec{v}$, então $||\vec{w}||=||\vec{u}||+||\vec{v}||$.

(f) ( ) Se $||\vec{w}||=||\vec{u}||+||\vec{v}||$, então $\vec{u},\vec{v}$ e $\vec{w}$ são paralelos.

(g) ( ) $||5\vec{v}||=||-5\vec{v}||=5||\vec{v}||$.

(h) ( ) Os vetores $3\vec{v}$ e $-4\vec{v}$ são paralelos e de mesmo sentido.

(i) ( ) Se $||\vec{v}||=3$, então o versor de $-10\vec{v}$ é $-\frac{\vec{v}}{3}$.

(**5**) Sabendo que o ângulo entre os vetores $\vec{u}$ e $\vec{v}$ é de 60^o, determine o ângulo formado pelos vetores:

(a) $\vec{u}$ e $-\vec{v}$ (b) $-\vec{u}$ e $2\vec{v}$ (c) $-\vec{u}$ e $-\vec{v}$ (d) $3\vec{u}$ e $5\vec{v}$

(**6**) Considere três vetores não nulos $\vec{u},\vec{v}$ e $\vec{w}$, coplanares, representados graficamente com uma mesma origem comum, e de tal modo que:

(i) o ângulo formado por $\vec{u}$ e $\vec{v}$ mede $45°$;

(ii) o ângulo formado por $\vec{u}$ e $\vec{w}$ mede $60°$;

(iii) o ângulo formado por $\vec{v}$ e $\vec{w}$ mede $105°$.

Determine:
(a) o vetor $\vec{x}+\vec{y}$, sendo $\vec{x}=\vec{u}+2\vec{v}$ e $\vec{y}=\vec{v}-2\vec{u}$ e o represente graficamente junto aos vetores $\vec{u},\vec{v}$ e $\vec{w}$.
(b) a medida do ângulo determinado pelos vetores $-3\vec{v}$ e $\vec{w}$.
(c) a medida do ângulo determinado pelos vetores $-3\vec{u}$ e $-\vec{w}$.

(**7**) Demosntrar que o segmento cujos extremos são os pontos médios de dois lados de um triângulo é paralelo ao terceiro lado e igual à sua metade.

(**8**) Mostre que o segmento de extremos nos pontos médios dos lados não paralelos de um trapézio é paralelo às bases e igual à sua semi-soma.

Vetores: abordagem algébrica

(**1**) Determinar a extremidade do segmento que representa o vetor $\vec{v}=(2,-5)$, sabendo que sua origem é o ponto $A=(-1,3)$.

(**2**) Dados os vetores $\vec{u}=(3,-1)$ e $\vec{v}=(-1,2)$, determine o vetor $\vec{w}$ tal que $4(\vec{u}-\vec{v})+\frac{1}{3}\vec{w}=2\vec{u}-\vec{w}$.

(**3**) Dados os pontos $A=(-1,3), B=(2,5)$ e $C=(3,-1)$, calcular os vetores $\overrightarrow{OA}-\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{OC}-\overrightarrow{BC}$ e $3\overrightarrow{BA}-4\overrightarrow{CB}$.
(**4**) Dados os vetores $\vec{u}=(2,-4), \vec{v}=\left(-\frac{9}{4},3\right)$ e $\vec{w}=(-12,6)$, determinar k_1 e k_2 tal que $\vec{w}=k_1\vec{u}+k_2\vec{v}$.

($\mathbf{5}$) Dados os pontos $A = (2, -3, 1)$ e $B = (4, 5, -2)$, determine o ponto P tal que $\overrightarrow{AP} = \overrightarrow{PB}$.

($\mathbf{6}$) Determinar o vetor $\vec{v}$ sabendo que $(3, 7, 1) + 2\vec{v} = (6, 10, 4) - \vec{v}$.

($\mathbf{7}$) Determine os valores de a e b para que os vetores $\vec{u} = (4, 1, -3)$ e $\vec{v} = (6, a, b)$ sejam paralelos.

($\mathbf{8}$) Verificar se são colineares os pontos:

(a) $A = (-1, -5, 0), B = (2, 1, 3)$ e $C = (-2, -7, -1)$

(b) $A = (2, 1, -1), B = (3, -1, 0)$ e $C = (1, 0, 4)$

($\mathbf{9}$) Mostre que os pontos $A = (4, 0, 1), B = (5, 1, 3), C = (3, 2, 5)$ e $D = (2, 1, 3)$ são vértices de um paralelogramo.

($\mathbf{10}$) Determinar o simétrico do ponto $P = (3, 1, -2)$ em relação ao ponto $A = (-1, 0, 3)$.

($\mathbf{11}$) Calcular a distância do ponto $A = (3, 4, -2)$:

(a) ao plano xy (b) ao plano xz (c) ao plano yz (d) ao eixo x (e) ao eixo y (f) ao eixo z

($\mathbf{12}$) Determinar os três vértices de um triângulo, sabendo que os pontos médios de seus lados são $M = (5, 0, -2)$, $N = (3, 1, -3)$ e $P = (4, 2, 1)$.

($\mathbf{13}$) Sendo $A = (-2, 1, 3)$ e $B = (6, -7, 1)$ extremidades de um segmento. Determine os pontos C e D que dividem o segmento AB em três partes de mesmo comprimento.

($\mathbf{14}$) Determinar o valor de n para que o vetor $\vec{v} = \left(n, -\frac{1}{2}, \frac{3}{4}\right)$ seja unitário.

Produto de Vetores
Produto escalar ou produto interno

($\mathbf{1}$) Dados os vetores $\vec{u} = (2, -3, -1)$ e $\vec{v} = (1, -1, 4)$, calcule:

(a) $2\vec{u} \cdot (-\vec{v})$ (b) $(\vec{u} + 3\vec{v}) \cdot (\vec{v} - 2\vec{u})$
(c) $(\vec{u} + \vec{v}) \cdot (\vec{u} - \vec{v})$ (d) $(\vec{u} + \vec{v}) \cdot (\vec{v} - \vec{u})$

($\mathbf{2}$) Mostre que:

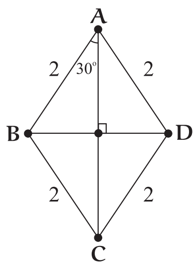
(a) $||\vec{u} + \vec{v}||^2 = ||\vec{u}||^2 + 2\vec{u} \cdot \vec{v} + ||\vec{v}||^2$

(b) $||\vec{u} - \vec{v}||^2 = ||\vec{u}||^2 - 2\vec{u} \cdot \vec{v} + ||\vec{v}||^2$

(c) Se $\vec{u}$ e $\vec{v}$ são vetores não nulos, paralelos e de mesmo sentido, então $\vec{u} \cdot \vec{v} = ||\vec{u}||\,||\vec{v}||$.

(d) Se $\vec{u}$ e $\vec{v}$ são vetores não nulos, paralelos e de sentidos opostos, então $\vec{u} \cdot \vec{v} = -||\vec{u}||\,||\vec{v}||$.

($\mathbf{3}$) O quadrilátero $ABCD$ da figura abaixo é um losango de lado medindo 2.



Calcular:
(a) $\overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{BD}$ (b) $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AD}$ (c) $\overrightarrow{BA} \cdot \overrightarrow{BC}$ (d) $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{BC}$ (e) $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{DC}$ (f) $\overrightarrow{BC} \cdot \overrightarrow{DA}$
($\mathbf{4}$) Prove que as diagonais de um losango são perpendiculares entre si.

($\mathbf{5}$) Calcular $||\vec{u}+\vec{v}||, ||\vec{u}-\vec{v}||$ e $(\vec{u}+\vec{v})\cdot(\vec{u}-\vec{v})$, sabendo que $||\vec{u}|| = 4, ||\vec{v}|| = 3$ e o ângulo entre $\vec{u}$ e $\vec{v}$ é de 60^o.

($\mathbf{6}$) Os pontos A, B e C são vértices de um triângulo equilátero cujo lado mede 10 cm. Calcule o produto escalar dos vetores $\overrightarrow{AB}$ e $\overrightarrow{AC}$.

($\mathbf{7}$) Verificar para os vetores $\vec{u} = (4,-1,2)$ e $\vec{v} = (-3,2,-2)$ as desigualdades:

(a) $||\vec{u}\cdot\vec{v}|| \leq ||\vec{u}||\,||\vec{v}||$ (Desigualdade de Schwarz)

(b) $||\vec{u}+\vec{v}|| \leq ||\vec{u}|| + ||\vec{v}||$ (Desigualdade Triangular)

($\mathbf{8}$) Qual o valor de α para que os vetores $\vec{a} = \alpha\vec{i}+2\vec{j}-4\vec{k}$ e $\vec{b} = 2\vec{i}+(1-2\alpha)\vec{j}+3\vec{k}$ sejam ortogonais?

($\mathbf{9}$) Dados os pontos $A = (m,1,0), B = (m-1,2m,2)$ e $C = (1,3,-1)$, determine m de modo que o triângulo ABC seja retângulo em A. Calcule também a área desse triângulo.

($\mathbf{10}$) Determinar o vetor $\vec{u}$ tal que $||\vec{u}|| = 2$, o ângulo entre $\vec{u}$ e $\vec{v} = (1,-1,0)$ é 45^o e $\vec{u}$ é ortogonal a $\vec{w} = (1,1,0)$.

($\mathbf{11}$) Determinar o ângulo entre os vetores:

(a) $\vec{u} = (2,-1,-1)$ e $\vec{v} = (-1,-1,2)$.

(b) $\vec{u} = (1,-2,1)$ e $\vec{v} = (-1,1,0)$.

($\mathbf{12}$) Considere o triângulo de vértices $A = (3,4,4), B = (2,-3,4)$ e $C = (6,0,4)$. Determine os ângulos interno e externo ao vértice B.

($\mathbf{13}$) Dados os vetores $\vec{u} = (3,0,1)$ e $\vec{v} = (-2,1,2)$, determinar:

(a) $\text{proj}_{\vec{v}}\vec{u}$

(b) $\text{proj}_{\vec{u}}\vec{v}$.

($\mathbf{14}$) Sejam $A = (2,1,3), B = (m,3,5)$ e $C = (0,4,1)$ vértices de um triângulo.

(a) Determine o valor de m para que o triângulo ABC seja retângulo em A.

(b) Calcule a medida da projeção do cateto AB sobre a hipotenusa BC.

(c) Determine o ponto H, pé da altura relativa ao vértice A.

(d) Prove que $\overrightarrow{AH}$ é ortogonal a $\overrightarrow{BC}$.

Produto vetorial

($\mathbf{1}$) Dados os vetores $\vec{u} = (2,-1,1), \vec{v} = (1,-1,0)$ e $\vec{w} = (-1,2,2)$, calcule:

(a) $\vec{w}\times\vec{v}$

(b) $\vec{v}\times(\vec{w}-\vec{u})$

(c) $(\vec{u}+\vec{v})\times(\vec{u}-\vec{v})$

($\mathbf{2}$) Determinar um vetor simultaneamente ortogonal aos vetores $2\vec{a}+\vec{b}$ e $\vec{b}-\vec{a}$, sendo $\vec{a} = (3,-1,-2)$ e $\vec{b} = (1,0,-3)$.

($\mathbf{3}$) Determinar o valor de m para que o vetor $\vec{w} = (1,2,m)$ seja simultaneamente ortogonal aos vetores $\vec{v}_1 = (2,-1,0)$ e $\vec{v}_2 = (1,-3,-1)$.

($\mathbf{4}$) Sejam os vetores $\vec{u} = (1,-2,1), \vec{v} = (1,1,1)$ e $\vec{w} = (1,0,-1)$.

(a) Utilizar o produto escalar para mostrar que os vetores acima são, dois a dois, ortogonais.

(b) Utilizar o produto vetorial para mostrar que o produto vetorial de quaisquer dois deles é paralelo ao terceiro vetor.

(c) Mostrar que $\vec{u} \times (\vec{v} \times \vec{w}) = \vec{0}$.

(**5**) Obter um vetor ortogonal ao plano determinado pelos pontos $A = (2, 3, 1), B = (1, -1, 1)$ e $C = (4, 1, -2)$.

(**6**) Dados os vetores $\vec{u} = (3, -1, 2)$ e $\vec{v} = (-2, 2, 1)$, calcular:

(a) a área do paralelogramo determinado por $\vec{u}$ e $\vec{v}$.

(b) a altura do paralelogramo relativa à base definida pelo vetor $\vec{v}$.

(**7**) Calcular o valor de m para que a área do paralelogramo determinado por $\vec{u} = (m, -3, 1)$ e $\vec{v} = (1, -2, 2)$ seja igual a $\sqrt{26}$.

(**8**) Calcular a área do triângulo ABC e a altura relativa ao lado BC, sendo dados:

(a) $A = (-4, 1, 1), B = (1, 0, 1)$ e $C = (0, -1, 3)$

(b) $A = (4, 2, 1), B = (1, 0, 1)$ e $C = (1, 2, 0)$

(**9**) Resolver os sistemas (encontre $\vec{x}$):

(a) $\begin{cases} \vec{x} \times \vec{j} = \vec{k} \\ \vec{x} \cdot \left(4\vec{i} - 2\vec{j} + \vec{k}\right) = 10 \end{cases}$ (b) $\begin{cases} \vec{x} \times \left(2\vec{i} - \vec{j} + 3\vec{k}\right) = \vec{0} \\ \vec{x} \cdot \left(\vec{i} + 2\vec{j} - 2\vec{k}\right) = 12 \end{cases}$

(**10**) Sejam $\vec{v_1} = (-2, 1, -1)$, $\vec{v_2} = (0, a, b)$ e $\vec{v} = \vec{v_1} \times \vec{v_2}$. Determine a e b de modo que $||\vec{v}|| = 4\sqrt{3}$ e que o vetor $\vec{v}$ faça ângulos congruentes com os eixos x e y.

Produto misto

(**1**) Dados os vetores $\vec{u} = (3, -1, 1), \vec{v} = (1, 2, 2)$ e $\vec{w} = (2, 0, -3)$, calcule:

(a) $(\vec{u}, \vec{v}, \vec{w})$ (b) $(\vec{w}, \vec{u}, \vec{v})$

(**2**) Sabendo que $(\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}) = -5$, calcular:

(a) $(\vec{w}, \vec{v}, \vec{u})$ (b) $(\vec{v}, \vec{u}, \vec{w})$ (c) $\vec{v} \cdot (\vec{w} \times \vec{u})$

(**3**) Verificar se são coplanares os vetores:

(a) $\vec{u} = (1, -1, 2), \vec{v} = (2, 2, 1)$ e $\vec{w} = (-2, 0, -4)$

(b) $\vec{u} = (2, -1, 3), \vec{v} = (3, 1, -2)$ e $\vec{w} = (7, -1, 4)$

(**4**) Determinar o valor de k para que sejam coplanares os vetores $\vec{u} = (2, -1, k), \vec{v} = (1, 0, 2)$ e $\vec{w} = (k, 3, k)$.

(**5**) Um paralelepípedo é determinado pelos vetores $\vec{u} = (3, -1, 4), \vec{v} = (2, 0, 1)$ e $\vec{w} = (-2, 1, 5)$. Calcule seu volume.

(**6**) Representar graficamente o tetraedro $ABCD$ e calcular seu volume, sendo $A = (1, 1, 0), B = (6, 4, 1), C = (2, 5, 0)$ e $D = (0, 3, 3)$.

(**7**) Considere um tetraedro de base ABC e vértice P.

(a) Sendo $A = (2,0,0)$, $B = (2,4,0)$, $C = (0,3,0)$ e $P = (2,-2,9)$, qual é o volume do tetraedro e sua altura (relativa ao vértice P)?

(b) Sendo $A = (-2,4,-1)$, $B = (-3,2,3)$, $C = (1,-2,-1)$ e o volume do tetraedro igual a 6, determinar o vértice P sabendo que ele pertence ao eixo y.

Respostas

Vetores

Vetores: abordagem algébrica

1) A extremidade de $\vec{v}$ é o ponto $(1, -2)$.

2) $\vec{w} = \left(-\frac{30}{4}, \frac{30}{4}\right)$

3) $\overrightarrow{OA} - \overrightarrow{AB} = (-4, 1)$ $\quad$ $\overrightarrow{OC} - \overrightarrow{BC} = (2, 5)$ $\quad$ $3\overrightarrow{BA} - 4\overrightarrow{CB} = (-5, -30)$

4) $k_1 = \frac{15}{2}$ e $k_2 = 12$

5) $P = \left(3, 1, -\frac{1}{2}\right)$

6) $\vec{v} = (1, 1, 1)$

7) $a = \frac{3}{2}$ e $b = -\frac{9}{2}$

8) (a) A, B e C são colineares $\quad$ (b) A, B e C não são colineares

9) Considere um quadrilátero de vértices ABCD. Para mostrar que ABCD é um paralelogramo, basta mostrar que os lados opostos são paralelos, ou seja, que os pares de vetores $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{DC}$ e $\overrightarrow{AD}$, $\overrightarrow{BC}$ são paralelos.

10) $P' = (-5, -1, 8)$

11) (a) 2 $\quad$ (b) 4 $\quad$ (c) 3 $\quad$ (d) $2\sqrt{5}$ $\quad$ (e) $\sqrt{13}$ $\quad$ (f) 5

12) Considerando M ponto médio de AB, N ponto médio de AC e P ponto médio de BC, temos que $A = (4, -1, -6)$, $B = (6, 1, 2)$ e $C = (2, 3, 0)$.

Produto de Vetores

Produto escalar ou produto interno

1) (a) -2 $\quad$ (b) 21 $\quad$ (c) -4 $\quad$ (d) 4

3) (a) 0 $\quad$ (b) 2 $\quad$ (c) -2 $\quad$ (d) 2 $\quad$ (e) 4 $\quad$ (f) -4

5) $||\vec{u} + \vec{v}|| = \sqrt{37}$, $||\vec{u} - \vec{v}|| = \sqrt{13}$, $(\vec{u} + \vec{v})(\vec{u} - \vec{v}) = 7$

6) $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = 50$

8) $\alpha = -5$

9) $m = 1$ e a área do triângulo é $\frac{\sqrt{30}}{2}$

11) (a) $\theta = 120^o$ ou $\frac{2}{3}\pi$ rad $\quad$ (b) 150^o ou $\frac{5}{6}\pi$ rad

12) Ângulo interno: 45^o, ângulo externo: 135^o

13) (a) $\frac{1}{9}(8, -4, 8)$ $\quad$ (b) $\left(-\frac{6}{5}, 0, -\frac{2}{5}\right)$

Produto vetorial

1) (a) $(2, 2, -1)$ $\quad$ (b) $(-1, -1, 0)$ $\quad$ (c) $(-2, -2, 2)$

2) $(9, 21, 3)$

3) $m = -5$

5) $(12, -3, 10)$

6) (a) $3\sqrt{10}$ (b) $\sqrt{10}$

7) 0 ou 2

8) (a) área do triângulo: $\frac{140}{2}$, altura: $\sqrt{\frac{70}{3}}$ (b) área do triângulo: $\frac{7}{2}$, altura: $\frac{7\sqrt{5}}{5}$

9) (a) $\vec{x} = (1, -3, 0)$ (b) $\vec{x} = (-4, 2, -6)$

10) $a = b = \pm 2$

Produto misto

1) (a) -29 (b) -29

2) (a) 5 (b) 5 (c) -5

3) (a) não são coplanares (b) são coplanares

4) 6

5) 17

6) $\frac{19}{2}$

7) (a) $V = 12$ e $h = 9$ (b) $P = (0, 2, 0)$