5- Funções definidas por várias sentenças e Função Modular

Funções definidas por mais de uma sentença

São funções do tipo $f: X \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ em que f é definida por mais de uma sentença aberta, cada uma das quais ligada a um domínio X_i contido em X. Desse modo, para obter o valor de $f(x)$ usa-se uma sentença ou outra dependendo do intervalo em que o valor de x se enquadra.

Exemplos:

(1) Considere a função definida por $f(x) = \begin{cases} 1, \text{se } x < 0 \\ x + 1, \text{se } x \geq 0 \end{cases}$.

(**a**) Determine os valores de $f(-3), f\left(-\sqrt{2}\right), f(0)$ e $f(2)$.
(**b**) Construa o gráfico de f.

Solução:

(**a**) Temos que:

- $-3 < 0 \Rightarrow f(-3) = 1$
- $-\sqrt{2} < 0 \Rightarrow f\left(-\sqrt{2}\right) = 1$
- $0 \geq 0 \Rightarrow f(0) = 0 + 1 = 1$
- $2 \geq 0 \Rightarrow f(2) = 2 + 1 = 3$

(**b**) Para construir o gráfico de $f(x) = \begin{cases} 1, \text{se } x < 0 \\ x + 1, \text{se } x \geq 0 \end{cases}$, procedemos da seguinte forma:

- *1º passo:* construímos o gráfico da função constante f(x) = 1, mas só consideramos o trecho em que x < 0 (fig. 1).
- *2º passo:* construímos o gráfico da função afim f(x) = x + 1, mas só consideramos o trecho em que x ⩾ 0 (fig. 2).
- *3º passo:* reunimos os dois gráficos num só (fig. 3).

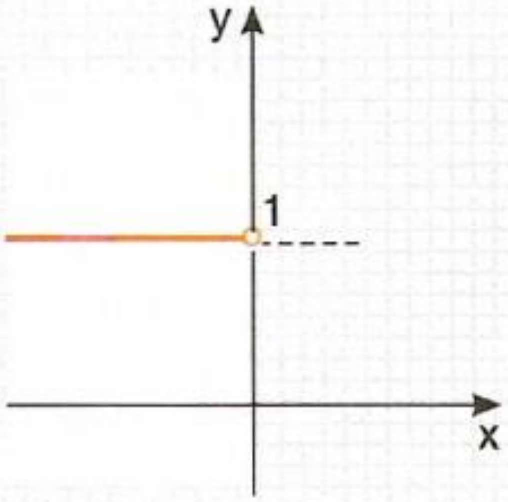


Fig. 1

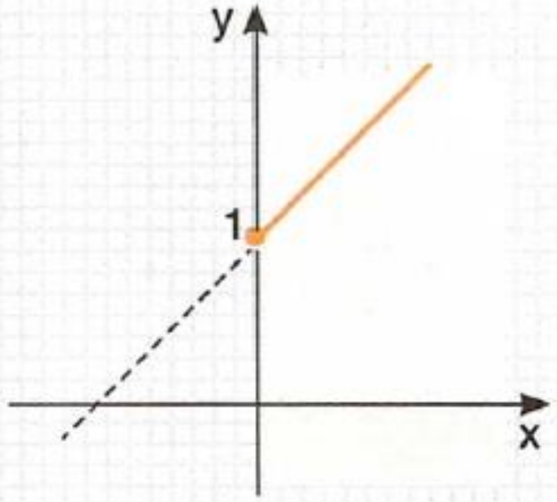


Fig. 2

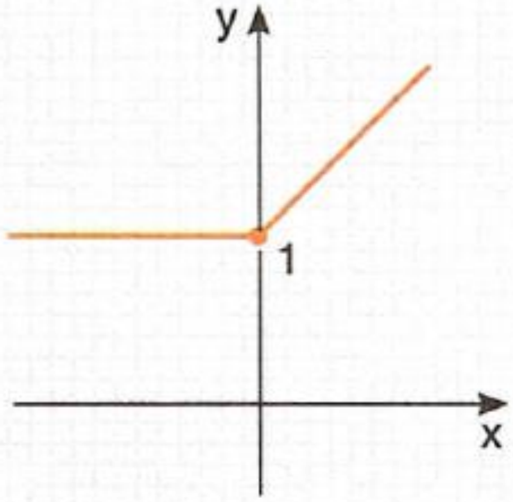


Fig. 3

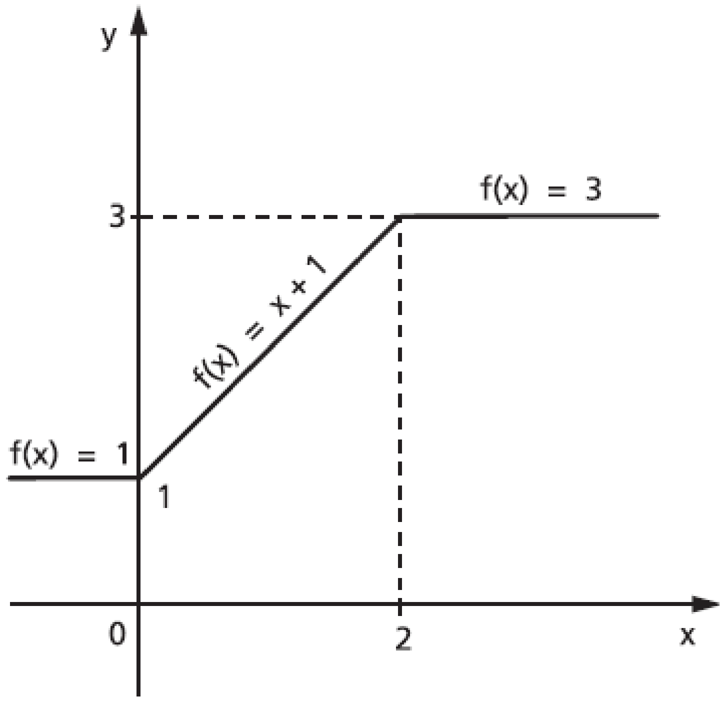
(**2**) Construir o gráfico das seguintes funções:

(**a**) $f(x) = \begin{cases} 1 & \text{se } x < 0 \\ x+1 & \text{se } 0 \leqslant x < 2 \\ 3 & \text{se } x \geqslant 2 \end{cases}$

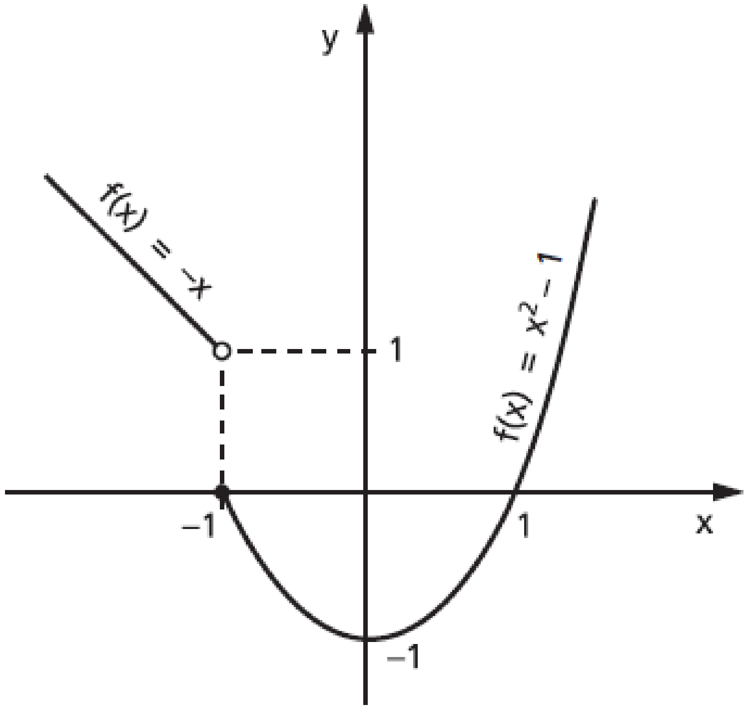
(**b**) $f(x) = \begin{cases} -x & \text{se} \quad x < -1 \\ x^2 - 1 & \text{se} \quad x \geqslant -1 \end{cases}$

Solução: Temos que:

(**a**)



(**b**)



Exercícios

(1) Seja $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definida por $f(x) = \begin{cases} 2x - 1, \text{se } x \geq 0 \\ x^2 + 5x, \text{se } x < 0 \end{cases}$.

Calcule:

(a) $f(-3)$ **(b)** $f\left(-\frac{1}{2}\right)$ **(c)** $f(0)$ **(d)** $f(2)$

(2) Construa o gráfico das seguintes funções e determine o conjunto imagem.

(a) $f(x) = \begin{cases} 2x + 1, \text{se } x \geq 1 \\ 4 - x, \text{se } x < 1 \end{cases}$

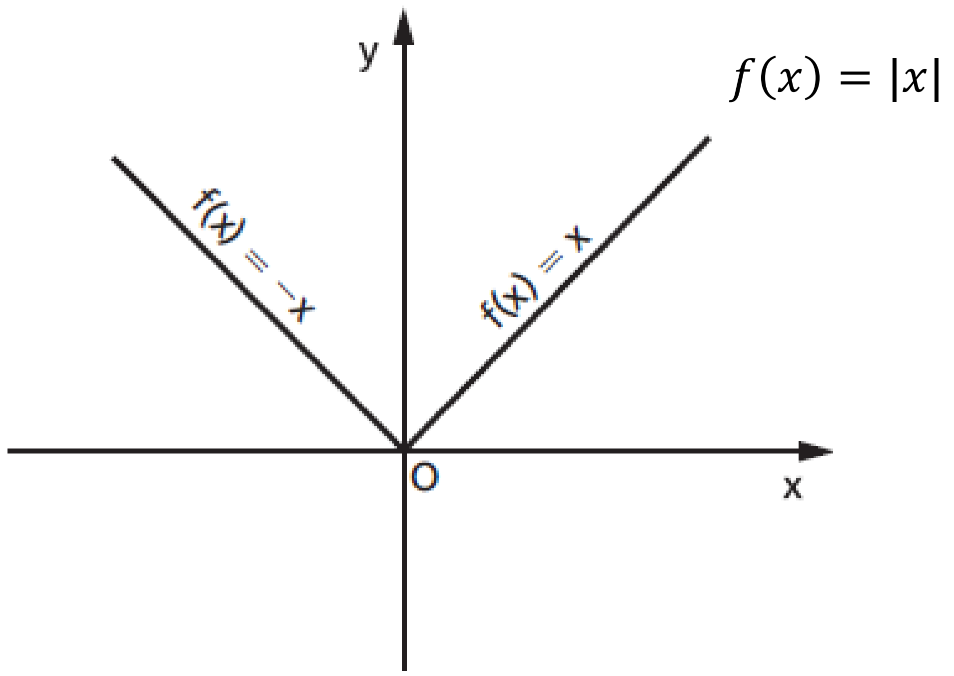
(b) $f(x) = \begin{cases} x^2 + 2x, \text{se } x < -1 \\ x, \text{se } -1 \leq x \leq 1 \\ 1, \text{se } x > 1 \end{cases}$

Função Modular

A função $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, definida por $f(x) = |x|$ é chamada de **função modular.**

Utilizando o conceito de módulo de um número real, a função modular é dada por:

$$f(x) = \begin{cases} x, \text{se } x \geq 0 \\ -x, \text{se } x < 0 \end{cases}.$$



O gráfico da função modular, mostrado ao lado, é dado pela união de duas semirretas de origem O, que são as bissetrizes do 1º e 2º quadrantes.

Observe que $Im(f) = [0, +\infty)$.

Exemplos

(1) Construa o gráfico da função real $f(x) = |x+1|$.

Solução:

Observe que

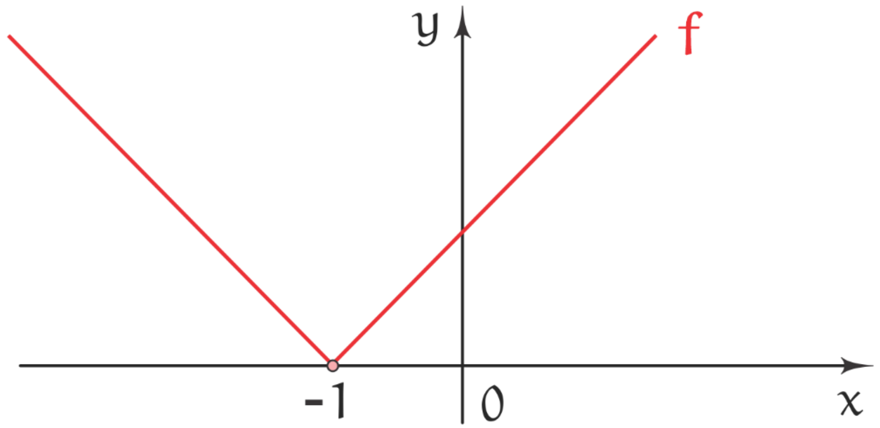
$$|x+1| = \begin{cases} x+1, \text{se } x+1 \geq 0 \\ -(x+1), \text{se } x+1 < 0 \end{cases}$$

$$= \begin{cases} x+1, \text{se } x \geq -1 \\ -x-1, \text{se } x < -1 \end{cases}.$$

Logo, f é uma função definida por partes, dada por

$$f(x) = \begin{cases} x+1, \text{se } x \geq -1 \\ -x-1, \text{se } x < -1 \end{cases}$$

cujo gráfico está representado ao lado.



(**2**) Construa o gráfico da função real $f(x) = |2x+1| + |x-1|$.

Solução: Observe que

$$|2x+1| = \begin{cases} 2x+1, \text{se } x \geq -\frac{1}{2} \\ -2x-1, \text{se } x < -\frac{1}{2} \end{cases} \quad \text{e} \quad |x-1| = \begin{cases} x-1, \text{se } x \geq 1 \\ -x+1, \text{se } x < 1 \end{cases}.$$

Devemos, então, considerar três casos:

1º) quando $x < -\frac{1}{2}$, temos:

$f(x) = |2x+1| + |x-1| = -2x-1-x+1 = -3x.$

2º) quando $-\frac{1}{2} \leq x < 1$, temos:

$f(x)=|2x+1|+|x-1|=2x+1-x+1 = x+2.$

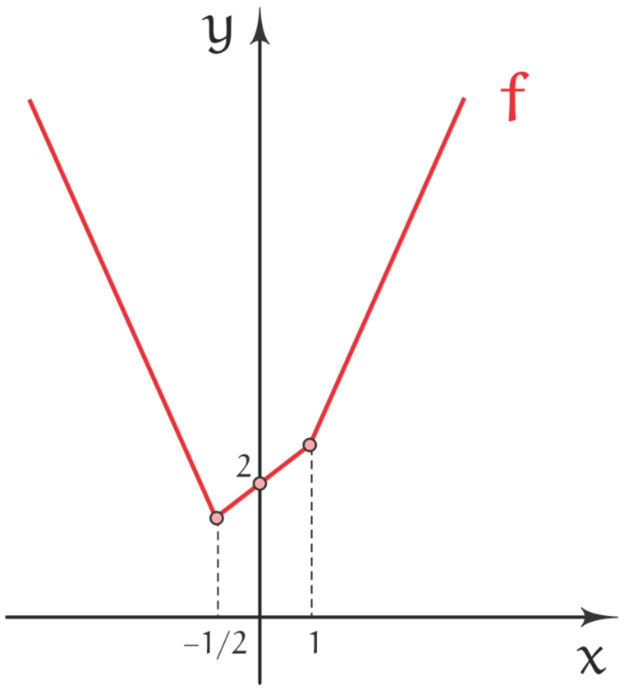
3º) quando $x \geq 1$, temos:

$f(x)=|2x+1|+|x-1|=2x+1+x-1 = 3x.$

Logo, a função f é dada por

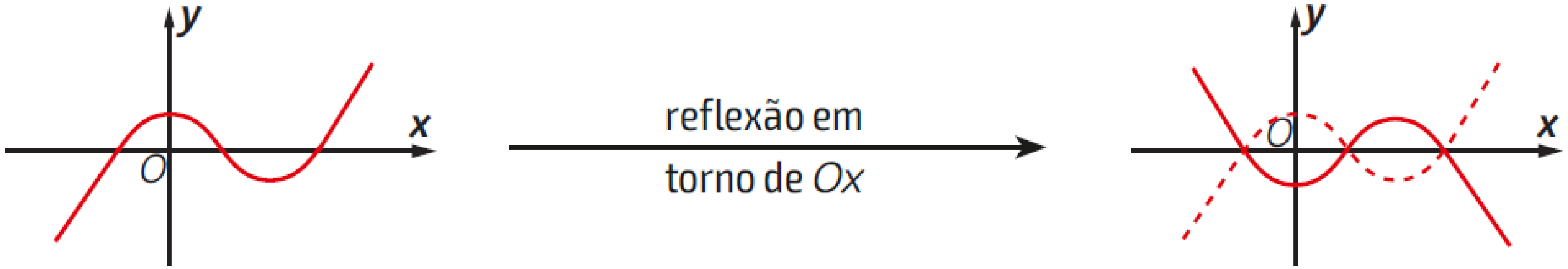
$$f(x) = \begin{cases} -3x, \text{se } x < -\dfrac{1}{2} \\ x + 2, \text{se } -\dfrac{1}{2} \leq x < 1 \\ 3x, \text{se } x \geq 1. \end{cases}$$

e o seu gráfico é mostrado abaixo.

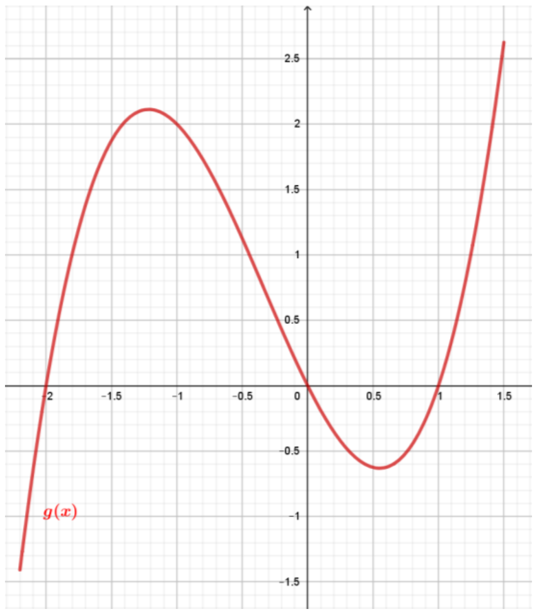


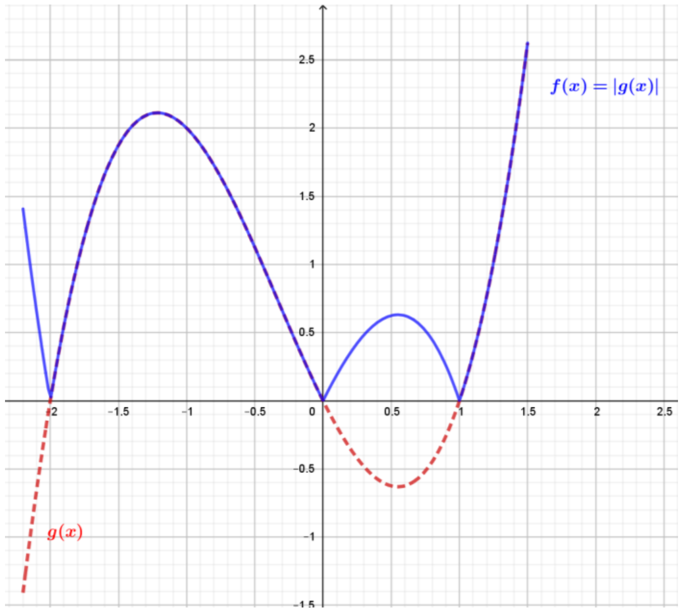
Construção de gráficos usando reflexão

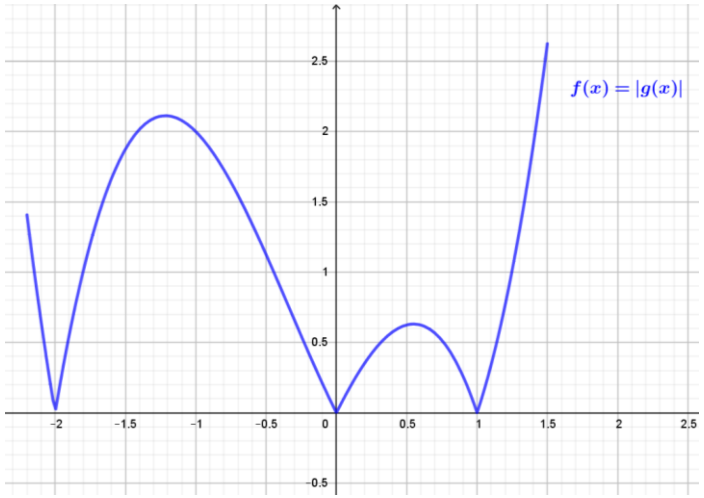
A **reflexão** de um ponto (x, y) em torno do eixo Ox é o ponto $(x, -y)$. Assim, a reflexão de um gráfico em torno do eixo Ox é:



Podemos construir o gráfico de funções modulares do tipo $f(x) = |g(x)|$ fazendo a reflexão da parte do gráfico de $g(x)$ cujas imagens são negativas.







Exemplo: Construa os gráficos das seguintes funções modulares usando reflexão.

(a) $f(x) = |2x|$
(b) $f(x) = |x - 2|$
(c) $f(x) = |4 - x^2|$
(d) $f(x) = |x^2 - 2x - 8|$

6- Potenciação e Radiciação

Potências e Raízes

Potência de expoente natural

Dados um número real **a** e um número natural **n**, com $n \geqslant 2$, chama-se **potência de base a** e **expoente n** o número **a^n** que é o produto de **n** fatores iguais a **a**.

$$a^n = \underbrace{a \cdot a \cdot a \cdot \ldots \cdot a}_{\textbf{n} \text{ fatores}}$$

Dessa definição decorre que:

$$a^2 = a \cdot a, \qquad a^3 = a \cdot a \cdot a, \qquad a^4 = a \cdot a \cdot a \cdot a \qquad \text{etc.}$$

Há dois casos especiais:

- Para $n = 1$, definimos $a^1 = a$, pois com um único fator não se define o produto.
- Para $n = 0$ e supondo $a \neq 0$, definimos $a^0 = 1$.

Vejamos alguns exemplos de potências:

- $4^3 = 4 \cdot 4 \cdot 4 = 64$
- $\left(\frac{2}{5}\right)^2 = \frac{2}{5} \cdot \frac{2}{5} = \frac{4}{25}$
- $(-6)^4 = (-6) \cdot (-6) \cdot (-6) \cdot (-6) = 1\,296$
- $3^1 = 3$
- $\left(\frac{3}{10}\right)^0 = 1$
- $(3{,}2)^2 = 3{,}2 \cdot 3{,}2 = 10{,}24$
- $0^5 = 0 \cdot 0 \cdot 0 \cdot 0 \cdot 0 = 0$
- $(-8)^1 = -8$
- $7^0 = 1$
- $(1{,}5)^3 = 1{,}5 \cdot 1{,}5 \cdot 1{,}5 = 3{,}375$

Propriedades da Potenciação

Sendo **a** e **b** números reais e **m** e **n** naturais, valem as seguintes propriedades:

I) $a^m \cdot a^n = a^{m+n}$

II) $\dfrac{a^m}{a^n} = a^{m-n}$ $(a \neq 0 \text{ e } m \geqslant n)$

III) $(a \cdot b)^n = a^n \cdot b^n$

IV) $\left(\dfrac{a}{b}\right)^n = \dfrac{a^n}{b^n}$ $(b \neq 0)$

V) $(a^m)^n = a^{m \cdot n}$

OBSERVAÇÃO

Na definição de potência com expoente natural, foi estabelecido que $\forall a \in \mathbb{R}^*$, $a^0 = 1$. Isso garante a validade das propriedades apresentadas. Veja:

- Façamos $m = 0$, de acordo com a primeira propriedade:

$$\underbrace{a^0 \cdot a^n}_{} = a^{0+n} = \underbrace{a^n}_{}$$

  Para que ocorra igualdade, devemos ter $a^0 = 1$.

- Façamos $m = n$, de acordo com a segunda propriedade:

  Por um lado, $\dfrac{a^n}{a^n} = 1$, que é o quociente de dois números iguais.

  Por outro lado, aplicando a propriedade, temos:

$$\frac{a^n}{a^n} = a^{n-n} = a^0$$

  Convenciona-se, então, $a^0 = 1$.

Potência de expoente inteiro negativo

Dado um número real *a*, não nulo, e um número *n* natural, define-se a potência a^{-n} pela relação

$$\boxed{a^{-n} = \frac{1}{a^n}}$$

isto é, a potência de base real, não nula, e expoente inteiro negativo é definida como o inverso da correspondente potência de inteiro positivo.

Exemplos:

1º) $2^{-1} = \dfrac{1}{2^1} = \dfrac{1}{2}$

2º) $2^{-3} = \dfrac{1}{2^3} = \dfrac{1}{8}$

3º) $(-2)^{-3} = \dfrac{1}{(-2)^3} = \dfrac{1}{-8} = -\dfrac{1}{8}$

4º) $\left(-\dfrac{2}{3}\right)^{-2} = \dfrac{1}{\left(-\dfrac{2}{3}\right)^2} = \dfrac{1}{\dfrac{4}{9}} = \dfrac{9}{4}$

5º) $\left(-\dfrac{1}{2}\right)^{-5} = \dfrac{1}{\left(-\dfrac{1}{2}\right)^5} = \dfrac{1}{-\dfrac{1}{32}} = -32$

Observação: As cinco propriedades enunciadas para potência de expoente natural são válidas para potência de expoente inteiro negativo, quaisquer que sejam os valores dos expoentes **m** e **n** inteiros.

Raiz enésima aritmética

Dados um número real não negativo **a** e um número natural **n**, $n \geqslant 1$, chama-se **raiz enésima aritmética de a** o número real e não negativo **b** tal que $b^n = a$.

O símbolo $\sqrt[n]{a}$, chamado **radical**, indica a raiz enésima aritmética de **a**. Nele, **a** é chamado **radicando**, e **n**, **índice**.

$$\sqrt[n]{a} = b \Leftrightarrow b \geqslant 0 \text{ e } b^n = a$$

Vejamos alguns exemplos:

- $\sqrt[2]{16} = \sqrt{16} = 4$, pois $4^2 = 16$
- $\sqrt[6]{0} = 0$, pois $0^6 = 0$
- $\sqrt[3]{27} = 3$, pois $3^3 = 27$
- $\sqrt[4]{16} = 2$, pois $2^4 = 16$

Observações:

1ª) Da definição decorre $(\sqrt[n]{a})^n = a$, para todo $a \geqslant 0$.

2ª) Observemos na definição dada que:

$$\sqrt{36} = 6 \text{ e não } \sqrt{36} = \pm 6$$

$$\sqrt{\frac{9}{4}} = \frac{3}{2} \text{ e não } \sqrt{\frac{9}{4}} = \pm\frac{3}{2}$$

3ª) Devemos estar atentos ao cálculo da raiz quadrada de um quadrado perfeito, pois:

$$\sqrt{a^2} = |a|$$

Exemplos:

1º) $\sqrt{(-5)^2} = |-5| = 5$ e não $\sqrt{(-5)^2} = -5$

2º) $\sqrt{x^2} = |\,x\,|$ e não $\sqrt{x^2} = x$

4ª) No **conjunto dos números reais**, temos situações distintas conforme o índice da raiz (n) seja par ou ímpar. Em $\sqrt[n]{a}$, temos:

i) Para n par:

Se a < 0, não existe raiz n-ésima de **a**.

Exemplo: $\sqrt{-5}$ não existe no conjunto dos números reais.

Se a = 0, a única raiz n-ésima é zero.

Exemplo: $\sqrt{0} = 0$

Se a > 0, a única raiz n-ésima de **a** é o número positivo $\sqrt[n]{a}$.

Exemplo: $\sqrt{4} = 2$

ii) Para n ímpar:

Qualquer que seja o número real **a**, existe uma única raiz n-ésima de **a**.

Exemplos

a) $\sqrt[3]{-8} = -2$

b) $\sqrt[5]{1} = 1$

Propriedades da Radiciação

Sendo **a** e **b** reais não negativos, **m** inteiro e **n** e **p** naturais não nulos, valem as seguintes propriedades:

I) $\sqrt[n]{a^m} = \sqrt[n \cdot p]{a^{m \cdot p}}$

II) $\sqrt[n]{a \cdot b} = \sqrt[n]{a} \cdot \sqrt[n]{b}$

III) $\sqrt[n]{\dfrac{a}{b}} = \dfrac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}}$ $(b \neq 0)$

IV) $\left(\sqrt[n]{a}\right)^m = \sqrt[n]{a^m}$

V) $\sqrt[p]{\sqrt[n]{a}} = \sqrt[p \cdot n]{a}$

Observação:

Se $b \in \mathbb{R}_+$ e $n \in \mathbb{N}^*$, temos $b.\sqrt[n]{a} = \sqrt[n]{a.b^n}$.

Exemplos

1º) $2\sqrt[3]{5} = \sqrt[3]{5.2^3} = \sqrt[3]{40}$

2º) $-3\sqrt{2} = -\sqrt{2.3^2} = -\sqrt{18}$

Assim, o coeficiente do radical pode ser colocado no radicando com expoente igual ao índice do radical.

Potência de expoente racional

Dados um número real positivo **a**, um número inteiro **m** e um número natural **n** ($n \geqslant 1$), chama-se **potência de base a** e **expoente** $\mathbf{\frac{m}{n}}$ a raiz enésima (n-ésima) aritmética de a^m.

$$a^{\frac{m}{n}} = \sqrt[n]{a^m}$$

Definição especial:

Sendo $\frac{m}{n} > 0$, define-se: $0^{\frac{m}{n}} = 0$.

Exemplos:

- $5^{\frac{1}{2}} = \sqrt{5}$
- $8^{\frac{1}{3}} = \sqrt[3]{8} = 2$
- $1^{\frac{7}{5}} = \sqrt[5]{1^7} = 1$
- $5^{\frac{2}{3}} = \sqrt[3]{5^2} = \sqrt[3]{25}$
- $64^{-\frac{1}{3}} = \sqrt[3]{64^{-1}} = \sqrt[3]{\frac{1}{64}} = \frac{1}{4}$
- $2^{\frac{3}{2}} = \sqrt{2^3} = \sqrt{8} = 2\sqrt{2}$
- $0^{\frac{11}{3}} = 0$
- $100^{-\frac{1}{2}} = \sqrt[2]{100^{-1}} = \sqrt{\frac{1}{100}} = \frac{1}{10}$

Propriedades

Sendo **a** e **b** reais positivos e $\frac{p}{q}$ e $\frac{r}{s}$ racionais, valem as seguintes propriedades:

I) $a^{\frac{p}{q}} \cdot a^{\frac{r}{s}} = a^{\frac{p}{q} + \frac{r}{s}}$

II) $a^{\frac{p}{q}} : a^{\frac{r}{s}} = a^{\frac{p}{q} - \frac{r}{s}}$

III) $(a \cdot b)^{\frac{p}{q}} = a^{\frac{p}{q}} \cdot b^{\frac{p}{q}}$

IV) $(a : b)^{\frac{p}{q}} = a^{\frac{p}{q}} : b^{\frac{p}{q}}$

V) $\left(a^{\frac{p}{q}}\right)^{\frac{r}{s}} = a^{\frac{p}{q} \cdot \frac{r}{s}}$

Racionalização de denominadores

Para facilitar cálculos, é comum eliminar raízes dos denominadores das frações, através de um processo chamado **racionalização**.

Por exemplo, ao realizarmos a divisão $\frac{1}{\sqrt{2}}$, como $\sqrt{2}$ é aproximadamente 1,41, teremos de efetuar $\frac{1}{1{,}41}$. Porém, se racionalizarmos a fração dada (multiplicando o numerador e denominador por $\sqrt{2}$) teremos:

$$\frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}.$$

E usando a mesma aproximação anterior, ficamos com a divisão $\frac{1{,}41}{2}$, que é mais simples que a primeira.

Racionalização de denominadores

Regra Prática: De modo geral, para racionalizarmos uma fração com denominador $\sqrt[n]{a^p}$, multiplicamos o numerador e o denominador por $\sqrt[n]{a^{n-p}}$, pois

$$\sqrt[n]{a^p} \cdot \sqrt[n]{a^{n-p}} = \sqrt[n]{a^{p+n-p}} = a.$$

Exemplos

1º) $\dfrac{3}{\sqrt{5}} = \dfrac{3}{\sqrt{5}} . \dfrac{\sqrt{5}}{\sqrt{5}} = \dfrac{3\sqrt{5}}{\sqrt{5^2}} = \dfrac{3\sqrt{5}}{5}$

2º) $\dfrac{1}{\sqrt[5]{3^2}} = \dfrac{1}{\sqrt[5]{3^2}} . \dfrac{\sqrt[5]{3^3}}{\sqrt[5]{3^3}} = \dfrac{\sqrt[5]{3^3}}{\sqrt[5]{3^5}} = \dfrac{\sqrt[5]{27}}{3}$

Racionalização de denominadores

Caso apareça no denominador de uma fração uma soma ou subtração de radicais, devemos utilizar os produtos notáveis.

Exemplo 1

Quando o denominador é do tipo a + b ou a – b, e **a** e / ou **b** são raízes quadradas, lembrando que:

$$a^2 - b^2 = (a + b)(a - b)$$

então devemos multiplicar numerador e denominador por a – b ou a + b, respectivamente. Assim:

1º) $\dfrac{2}{\sqrt{5}+1} = \dfrac{2}{\sqrt{5}+1} \cdot \dfrac{\sqrt{5}-1}{\sqrt{5}-1} = \dfrac{2\left(\sqrt{5}-1\right)}{\left(\sqrt{5}\right)^2 - 1^2} = \dfrac{\sqrt{5}-1}{2}$

2º) $\dfrac{1}{\sqrt{7}-\sqrt{2}} = \dfrac{1}{\sqrt{7}-\sqrt{2}} \cdot \dfrac{\sqrt{7}+\sqrt{2}}{\sqrt{7}+\sqrt{2}} = \dfrac{\sqrt{7}+\sqrt{2}}{5}$

Racionalização de denominadores

Exemplo 2

Quando o denominador é do tipo a – b ou a + b, e um dos dois é uma raiz cúbica, lembrando que:

$$a^3 - b^3 = (a - b)(a^2 + ab + b^2)$$

$$a^3 + b^3 = (a + b)(a^2 - ab + b^2)$$

então devemos multiplicar o numerador e o denominador por $a^2 + ab + b^2$ ou $a^2 - ab + b^2$, respectivamente. Assim:

$$\frac{1}{\sqrt[3]{2}-1} = \frac{1}{\sqrt[3]{2}-1} \cdot \frac{\left[\left(\sqrt[3]{2^2} + \sqrt[3]{2} + 1^2\right)\right]}{\left[\left(\sqrt[3]{2^2} + \sqrt[3]{2} + 1^2\right)\right]} \Rightarrow$$

$$\frac{1}{\sqrt[3]{2}-1} = \frac{\left(\sqrt[3]{2^2} + \sqrt[3]{2} + 1\right)}{\sqrt[3]{2^3} - 1^3} \Rightarrow$$

$$\frac{1}{\sqrt[3]{2}-1} = \sqrt[3]{4} + \sqrt[3]{2} + 1$$

Exercícios

(1) Calcule:

a) $(-3)^2$ b) -3^2 c) -2^3 d) $-(-2)^3$

(2) Simplifique as expressões:

a) $(a^{-2} \cdot b^3)^{-2} \cdot (a^3 \cdot b^{-2})^3$

b) $\dfrac{(a^5 \cdot b^3)^2}{(a^{-4} \cdot b)^{-3}}$

c) $[(a^2 \cdot b^{-3})^2]^{-3}$

d) $\left(\dfrac{a^3 \cdot b^{-4}}{a^{-2} \cdot b^2}\right)^3$

(3) Simplifique os radicais:

a) $\sqrt[3]{64}$ b) $\sqrt{576}$ c) $\sqrt{12}$ d) $\sqrt[3]{2^7}$

(4) Efetue as operações indicadas com as raízes:

a) $\sqrt{3} \cdot \sqrt{12}$

b) $\sqrt[3]{24} : \sqrt[3]{3}$

c) $\sqrt{\frac{3}{2}} : \sqrt{\frac{1}{2}}$

d) $\sqrt{3} \cdot \sqrt[3]{2}$

e) $\sqrt[3]{4} : \sqrt[4]{2}$

f) $\sqrt[3]{\frac{5}{2}} : \sqrt[5]{\frac{1}{2}}$

(5) Racionalize os denominadores:

a) $\dfrac{1}{\sqrt{3}}$ b) $\dfrac{1}{\sqrt[3]{2}}$ c) $\dfrac{5}{3-\sqrt{7}}$ d) $\dfrac{1}{1+\sqrt{2}-\sqrt{3}}$

(6) (UFMG) Se $a = 10^{-3}$, o valor de $\dfrac{0{,}01 . 0{,}001 . 10^{-1}}{100 . 0{,}0001}$, em função de **a**, é

A) 100a

B) 10a

C) a

D) $\dfrac{a}{10}$

(7) (PUC Minas) O valor da expressão $y = 8.\sqrt[3]{10^{-3}}.5.10^{-3}$ é

A) 40

B) 40.10^{2}

C) 40^{-2}

D) 4.10^{-3}

E) 40.10^{-3}

(8) (UNIFEI-MG–2008) Sejam $A = \sqrt{\dfrac{x}{y}}$, $B = \sqrt[3]{\dfrac{y^2}{x}}$ e $C = \sqrt[6]{\dfrac{x}{y}}$.

Então, o produto A.B.C é igual a

A) $\sqrt[3]{y}$

B) $\sqrt[3]{x}$

C) $\sqrt[3]{\dfrac{x}{y}}$

D) $\sqrt[3]{xy}$

(9) (UFPel-RS) O valor da expressão $\left(\dfrac{1}{4}\right)^{0,5} \div \left(\dfrac{1}{32}\right)^{0,2}$ é

A) 0,125

B) 0,25

C) 0,5

D) 0,75

E) 1

(10) (FUVEST-SP) Qual é o valor da expressão $\dfrac{\sqrt{3}+1}{\sqrt{3}-1}+\dfrac{\sqrt{3}-1}{\sqrt{3}+1}$?

A) $\sqrt{3}$

B) 4

C) 3

D) 2

E) $\sqrt{2}$

Potência de expoente irracional

Queremos calcular potências do tipo a^x, em que $a \in \mathbb{R}_+^*$ e x é um número **irracional**.

Exemplos de potências com expoente irracional: $2^{\sqrt{2}}, 4^{\sqrt{3}}, 5^{\pi}, \left(\frac{2}{3}\right)^{1-\sqrt{2}}$.

Para obter o valor aproximado de a^x, com x irracional, utilizamos potências com expoentes racionais para aproximar o número procurado por falta e excesso.

Exemplo: Calcule o valor aproximado de $2^{\sqrt{2}}$.

Como $\sqrt{2}$ é irracional, vamos considerar aproximações racionais para esse número por falta e por excesso e, com auxílio de uma calculadora científica, obter o valor das potências de expoentes racionais, como na tabela ao lado.

Note que, à medida que os expoentes se aproximam de $\sqrt{2}$ por valores racionais, tanto por falta quanto por excesso, os valores das potências tendem a um mesmo valor, definido por $2^{\sqrt{2}}$ que é aproximadamente igual a 2,665.

$\sqrt{2} \simeq 1{,}41421356...$

Por falta	Por excesso
$2^1 = 2$	$2^2 = 4$
$2^{1,4} \simeq 2{,}639$	$2^{1,5} = 2^{\frac{3}{2}} = \sqrt{8} = 2\sqrt{2} \simeq 2{,}828$
$2^{1,41} \simeq 2{,}657$	$2^{1,42} \simeq 2{,}676$
$2^{1,414} \simeq 2{,}6647$	$2^{1,415} \simeq 2{,}6666$
$2^{1,4142} \simeq 2{,}6651$	$2^{1,4143} \simeq 2{,}6653$
$\vdots$	$\vdots$

Potência de expoente irracional

Definição especial: Se a base é zero e α é irracional positivo, então definimos

$$\boxed{0^{\alpha} = 0.}$$

Observações:

1ª) Se $a = 1$, então $1^{\alpha} = 1$, $\forall\ \alpha$ irracional.

2ª) Se $a < 0$ e α é irracional e positivo, então o símbolo a^{α} não tem significado. Exemplos: $(-2)^{\sqrt{2}}$, $(-5)^{\sqrt{3}}$ e $\left(-\sqrt{2}\right)^{\sqrt{3}}$ não têm significado.

3ª) Se α é irracional e negativo ($\alpha < 0$), então 0^{α} não tem significado.

4ª) Para as potências de expoente irracional são válidas as propriedades (P).

Potência de expoente real

Seja $a \in \mathbb{R}_+^*$. Já estudamos os diferentes tipos de potências a^x com x racional ou irracional.
Em qualquer caso, temos que:

(1) Toda potência de base real positiva e expoente real é um número positivo:

$$\boxed{a > 0 \Rightarrow a^x > 0.}$$

(2) Para as potências de expoente real continuam válidas todas as propriedades vistas anteriormente.

[P₁] $a^b \cdot a^c = a^{b+c}$ $\quad (a \in \mathbb{R}_+^*, b \in \mathbb{R} \text{ e } c \in \mathbb{R})$

[P₂] $\dfrac{a^b}{a^c} = a^{b-c}$ $\quad (a \in \mathbb{R}_+^*, b \in \mathbb{R} \text{ e } c \in \mathbb{R})$

[P₃] $(a \cdot b)^c = a^c \cdot b^c$ $\quad (a \in \mathbb{R}_+^*, b \in \mathbb{R}_+^* \text{ e } c \in \mathbb{R})$

[P₄] $\left(\dfrac{a}{b}\right)^c = \dfrac{a^c}{b^c}$ $\quad (a \in \mathbb{R}_+^*, b \in \mathbb{R}_+^* \text{ e } c \in \mathbb{R})$

[P₅] $(a^b)^c = a^{b \cdot c}$ $\quad (a \in \mathbb{R}_+^*, b \in \mathbb{R} \text{ e } c \in \mathbb{R})$