2 – Núcleo e imagem de transformações lineares

Dada uma transformação linear $T : V \to W$, chama-se **núcleo** de T e denota-se por N(T) ou ker(T) o conjunto definido por $N(T) = \{v \in V \mid T(v) = 0\}$.

Dada uma transformação linear $T : V \to W$, chamamos **imagem** de T, e denotamos por Im(T) o conjunto definido por $Im(T) = \{w \in W \mid T(v) = w\}$, para algum $v \in V$.

obs: $Im(T) \neq \phi$; pois $0 \in Im(T)$ já que $T(0)=0$. $\forall T$

Numa $T: V \to W$

V = Domínio

W = Contradomínio

$N(T) \subset V$

$N(T)$ é subconjunto do domínio

$Im(T) \subset W$

$Im(T)$ é subconjunto do Contradomínio.

i) NÚCLEO:

Encontrar os vetores com imagem $\vec{0}$
ou seja, $T(v)=\vec{0}$

ii) Imagem

Encontrar $w=(a,b,c)\in W \,/\, \forall v=(x,y,z)\in V$

$T(v)=w$.

3.11. Determinar o **núcleo** e a **imagem** do operador linear $T_1 : R^3 \rightarrow R^3$ definido por

$$T_1(x, y, z) = (x + y - z,\ 2x + 4y - z,\ 3x + 2y + 2z)$$

a) NÚCLEO: Fazer $T(v)=\vec{0}$ com $V=(x,y,z)$

$T_1(x,y,z) = (x+y-z,\ 2x+4y-z,\ 3x+2y+2z) = (0,0,0)$

$$\begin{cases} x+y-z=0 \\ 2x+4y-z=0 \\ 3x+2y+2z=0 \end{cases} \longrightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -1 & 0 \\ 2 & 4 & -1 & 0 \\ 3 & 2 & 2 & 0 \end{array}\right) \xrightarrow[L_3=L_3-3L_1]{L_2=L_2-2L_1}$$

SI ou SPI

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & -1 & 5 \end{pmatrix} \xrightarrow{L_3=2L_3+L_2} \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 11 \end{pmatrix} \xrightarrow{L_3=\frac{1}{11}L_3}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow[L_2=L_2-L_3]{L_1=L_1+L_3} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow[L_2=\frac{1}{2}L_2]{L_2 \text{ por } 2}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{L_1=L_1-L_2} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \longrightarrow$$

$\longrightarrow (x,y,z) = (0,0,0)$

$\therefore\ N(T_1) = \{(0,0,0)\}$

ou $\ker(T_1) = \{(0,0,0)\}$

b) IMAGEM   Fazer $T(v)=(a,b,c)$
$v=(x,y,z)$

$$(x+y-z,\ 2x+4y-z,\ 3x+2y+2z)=(a,b,c)$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -1 & a \\ 2 & 4 & -1 & b \\ 3 & 2 & 2 & c \end{array}\right) \xrightarrow[L_3=L_3-3L_1]{L_2=L_2-2L_1} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -1 & a \\ 0 & 2 & 1 & -2a+b \\ 0 & -1 & 5 & -3a+c \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow{L_3=2L_3+L_2} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -1 & a \\ 0 & 2 & 1 & -2a+b \\ 0 & 0 & 11 & -8a+b+3c \end{array}\right) \xrightarrow[L_2=11L_2-L_3]{L_1=11L_1+L_3}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 11 & 11 & 0 & 3a+b+3c \\ 0 & 22 & 0 & -14a+10b-3c \\ 0 & 0 & 11 & -8a+b+3c \end{array}\right) \xrightarrow{L_1=2L_1-L_2}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 22 & 0 & 0 & 20a-8b+9c \\ 0 & 22 & 0 & -14a+10b-3c \\ 0 & 0 & 11 & -8a+b+3c \end{array}\right) \xrightarrow[L_2=\frac{1}{22}L_2,\ L_3=\frac{1}{11}L_3]{L_1=\frac{1}{22}L_1}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & \frac{20a-8b+9c}{22} \\ 0 & 1 & 0 & \frac{-14a+10b-3c}{22} \\ 0 & 0 & 1 & \frac{-8a+b+3c}{11} \end{array}\right)$$

$\therefore$ O S.L. tem solução $\forall(x,y,z)$
Basta tomar $(x,y,z)=\left(\frac{10}{11}a-\frac{4}{11}b+\frac{9}{22}c,\ -\frac{7}{11}a+\frac{5}{11}b-\frac{3}{22}c,\ -\frac{8}{11}a+\frac{1}{11}b+\frac{3}{11}c\right)$

$\therefore\ Im(T_1)=\mathbb{R}^3$ (pois sempre tem solução).

3.12. Para determinar o **núcleo** e a **imagem** do operador linear $T_2 : R^3 \to R^3$, definido por:

$$T_2(x, y, z) = (x + y - z,\ 2x - 3y + z,\ x - 4y + 2z),$$

NÚCLEO

$$\begin{array}{c} \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & 0 \\ 2 & -3 & 1 & 0 \\ 1 & -4 & 2 & 0 \end{pmatrix} \\ \ x \quad\ y \quad\ z \quad\ \vec{0} \end{array} \xrightarrow[L_3 = L_3 - L_1]{L_2 = L_2 - 2L_1} \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 0 & -5 & 3 \\ 0 & -5 & 3 \end{pmatrix} \longrightarrow$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 0 & -5 & 3 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow{L_1 = 5L_1 + L_2} \begin{pmatrix} 5 & 0 & -2 \\ 0 & -5 & 3 \end{pmatrix} \xrightarrow[L_2 = -\frac{1}{5}L_2]{L_1 = \frac{1}{5}L_1}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & -\frac{2}{5} & 0 \\ 0 & 1 & -\frac{3}{5} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$x - \frac{2}{5}z = 0$$
$$x = +\frac{2}{5}z$$

$$y - \frac{3}{5}z = 0$$
$$y = \frac{3}{5}z$$

solução $(x, y, z) = \left(\frac{2}{5}z, \frac{3}{5}z, z\right)$ $z \in \mathbb{R}$

ou $\left(\frac{2}{5}\lambda, \frac{3}{5}\lambda, \lambda\right); \lambda \in \mathbb{R}$.

$\therefore$ $\ker(T_2) = \left\{\left(\frac{2}{5}z, \frac{3}{5}z, z\right) \mid z \in \mathbb{R}\right\}$

IMAGEM

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -1 & a \\ 2 & -3 & 1 & b \\ 1 & -4 & 2 & c \\ x & y & z & \vec{w} \end{array}\right) \xrightarrow[L_3 = L_3 - L_1]{L_2 = L_2 - 2L_1} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -1 & a \\ 0 & -5 & 3 & -2a+b \\ 0 & -5 & 3 & -a+c \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow{L_3 = L_3 - L_2} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -1 & a \\ 0 & -5 & 3 & -2a+b \\ \boxed{0} & \boxed{0} & \boxed{0} & \boxed{a-b+c} \end{array}\right)$$

Só há solução: $0 = a - b + c$

Isolar uma variavel:

$$a = b - c$$

$$\therefore (a, b, c) = (b - c, b, c) \ \forall b, c \in \mathbb{R}$$

ou $(a, b, c) = (\lambda_1 - \lambda_2, \lambda_1, \lambda_2) \ \forall \lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}$

$$\boxed{\therefore Im(T_2) = \{(b - c, b, c) / b, c \in \mathbb{R}\}}$$

3.13. Determine o **núcleo** e a **imagem** da transformação linear $T_3 : R^2 \to R$ definida por $T_3(x, y) = x + y$.

① NÚCLEO:

Encontrar vetores tal que $T(V) = 0$

$$\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$$

$$T(x,y) = x + y = 0$$

$$x = -y \text{ ou } y = -x$$

$$\therefore \ Ker(T_3) = \{(x,-x) / x \in \mathbb{R}\} = \{(-y,y) / y \in \mathbb{R}\}$$

---

② IMAGEM

$x + y = a \qquad (x,y) \in \mathbb{R}^2$ e $a \in \mathbb{R}^1$

qualquer $a \in \mathbb{R}$ pode ser escrito como $x + y = a \,/\, x, y \in \mathbb{R}$.

$$\therefore \ Im(T_3) = \mathbb{R} \quad (\mathbb{R}^1)$$

Teorema 3.2: Seja $T : V \to W$ uma transformação linear. O núcleo de T é um subespaço vetorial de V e a imagem de T é um subespaço vetorial de W.

3.14. Determine as dimensões do núcleo e da imagem das transformações lineares apresentadas no exemplo 3.11:

$$T_1 : R^3 \to R^3,\ T_1(x, y, z) = (x + y - z,\ 2x + 4y - z,\ 3x + 2y + 2z)$$

$N(T_1) = \{(0, 0, 0,)\}$ como nesse conjunto está contido um único ponto sua dimensão é zero, ou seja, dim $N(T_1) = 0$ e $Im(T_1) = R^3$, então dim $Im(T_1) = 3$.

3.15. Determine as dimensões do núcleo e da imagem das transformações lineares apresentadas no exemplo 3.12.

$$T_2 : R^3 \to R^3,\ T_2(x, y, z) = (x + y - z,\ 2x - 3y + z,\ x - 4y + 2z)$$

$N(T_2) = (\frac{2}{5}z, \frac{3}{5}z, z)$, como o vetor que representa os elementos do núcleo apresenta apenas uma variável livre, dim $N(T_2) =1$.

$Im(T_2) = \{(x, y, y - x)\}$, o vetor que representa os elementos do conjunto imagem possui duas variáveis, então dim $Im(T_2) =2$.

3.16. Determine as dimensões do núcleo e da imagem das trans formações lineares apresentadas no exemplo 3.13.

$$T_3 : R^2 \to R,\ T_3(x, y) = x + y$$

$N(T_3) = \{(x, -x)\}$, observe aqui que o vetor que representa o núcleo possui apenas uma variável, assim dim $N(T_3) = 1$.

$Im(T_3) = x,\ x \in R$, ou seja é uma reta, apresenta uma variável livre, dim $Im(T_3) = 1$.

O teorema 3.3 é chamado de **teorema das dimensões**.

Teorema 3.3: Seja $T : V \to W$ uma transformação linear. Então

$$\dim N(T) + \dim Im(T) = \dim V.$$

3.17. Verifique o teorema das dimensões para a transformação linear do exemplo 3.14.

$$T_1 : R^3 \to R^3,\ T_1(x, y, z) = (x + y - z, 2x + 4y - z, 3x + 2y + 2z)$$

Como $\dim N(T_1) = 0$, $\dim Im(T_1) = 3$ e $\dim V = \dim R^3 = 3$

$$\dim V = \dim N(T_1) + \dim Im(T_1) = 0 + 3 = 3.$$

3.18. Verifique o teorema das dimensões para a transformação linear do exemplo 3.15.

$$T_2 : R^3 \to R^3,\ T_2(x, y, z) = (x + y - z, 2x - 3y + z, x - 4y + 2z)$$

Como $\dim N(T_2) = 1$, $\dim Im(T_2) = 2$ e $\dim V = \dim R^3 = 3$

$$\dim V = \dim N(T_2) + \dim Im(T_2) = 1 + 2 = 3.$$

3.19. Verifique o teorema das dimensões para a transformação linear do exemplo 3.16.

$$T_3 : R^2 \to R,\ T_3(x, y) = x + y$$

Como $\dim N(T_3) = 1$, $\dim Im(T_3) = 1$ e $\dim V = \dim R^3 = 2$

$$\dim V = \dim N(T_3) + \dim Im(T_3) = 1 + 1 = 2.$$

Transformação linear injetora e sobrejetora

Como em funções bijetoras, é importante sabermos se uma transformação linear é bijetora. Esse fato auxilia a determinação de novas transformações lineares.

Uma transformação linear $T : V \to W$ é **injetora** se $\forall v_1, v_2 \in V$, $T(v_1) = T(v_2)$ implica que $v_1 = v_2$, de modo análogo, se $\forall v_1, v_2 \in V$ se $v_1 \neq v_2$ implica que $T(v_1) \neq T(v_2)$.

Em outras palavras, dizemos que uma transformação linear é injetora se, dados dois vetores distintos do domínio, suas respectivas imagens também são distintas. Você pode observar que essa definição tem uma consequência importante para o núcleo da transformação.

Propriedade 1: Uma transformação linear $T : V \to W$ é injetora se, e somente se, $N(T) = \{0\}$.

Uma transformação linear $T : V \to W$ é **sobrejetora** se $\forall w \in W$ existir pelo menos um $v \in V$ tal que $T(v) = w$.

Propriedade 2: Uma transformação $T : V \to W$ é sobrejetora se $\forall\, w \in W, \exists\, v \in V$ tal que $T(v) = w$. Ou seja, $Im(T) = W$. Isto é, se o contradomínio é igual à imagem da transformação linear.

Uma transformação linear $T : V \to W$ é **bijetora** se T é **injetora** e **sobrejetora.**

Das propriedades 1 e 2, podemos mostrar que $T : V \to W$ é bijetora se, e somente se, $N(T) = \{0\}$ e $Im(T) = W$.

Verifique se as seguintes transformações lineares são bijetoras:

3.20. $T_1 : R^3 \to R^3$, $T_1(x, y, z) = (x + y - z, 2x + 4y - z, 3x + 2y + 2z)$

1) T_1 é injetora $\iff N(T) = \{\vec{0}\}$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -1 & 0 \\ 2 & 4 & -1 & 0 \\ 3 & 2 & 2 & 0 \end{array}\right) \xrightarrow[\text{ex. 3.11}]{\text{ver}} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{array}\right)$$

$N(T_1) = (0,0,0) = \vec{0}$

$\therefore$ T_1 é injetora

2) T_1 é soblejetora $\iff Im(T_1) = W = \mathbb{R}^3$

Vimos em ex 3.11 que $Im(T_1) = \mathbb{R}^3$

$\therefore$ T_1 é injetora e soblejetora $\iff$ T_1 é bijetora.

3.21. $T_2 : R^3 \to R^3$, $T_2(x, y, z) = (x + y - z, 2x - 3y + z, x - 4y + 2z)$

Ver 3.12

T_2 é injetora? $\iff N(T) = \{\vec{0}\}$

Vimos que

Vimos em 3.12 que $Ker(T_2) = \{(\frac{2}{5}z, \frac{3}{5}z, z) / z \in \mathbb{R}\}$

$\therefore N(T) \neq \vec{0} \Rightarrow T_2$ não é injetora $\Rightarrow$

T_2 não é bijetora.

---

ou ainda; $\dim N(T_2) = 1 \neq 0 \Rightarrow$

T_2 não injetora $\Rightarrow T_2$ não bijetora.

3.22. $T_3 : R^2 \to R$, $T_3(x, y) = x + y$

Vimos em 3.13 que $Ker(T_3) = \{(x, -x) / x \in \mathbb{R}\}$

ou seja, $\dim Ker(T_3) = 1 \neq 0$.

$\therefore T_3$ é não-injetora $\Rightarrow T_3$ é não bijetora

Apesar disso, T_3 é sobrejetora.

Pois $Im(T_3) = \mathbb{R}$

ou seja, ~~[illegible]~~ $\underbrace{\text{Imagem} = \text{Contradomínio}}_{Im(T_3) = W = \text{Contradom}}$

Corolário 3.1: Seja a transformação linear $T : V \to W$:

I. Se $\dim V = \dim W$, então T é **injetora** se, e somente se, é **sobrejetora**.

II. Se $\dim V = \dim W$ e T é **injetora**, então T transforma base em base, isto é, se $\beta = \{v_1, v_2, \ldots, v_n\}$ é base de V, então $\{T(v_1), T(v_2), \ldots, T(v_n)\}$ é base de W.

Uma transformação linear $T : V \to W$ bijetora também é chamada de **isomorfismo**, e seu domínio V e contradomínio W são chamados espaços vetoriais isomorfos.

Observação:

1) Sob o ponto de vista da álgebra, espaços vetoriais isomorfos são ditos **idênticos**.

2) Espaços isomorfos devem ter a mesma dimensão (devido aos teoremas anteriores), portanto, um isomorfismo leva base em base.

3) Um isomorfismo $T : V \to W$ tem uma aplicação inversa $T^{-1} : W \to V$, que é linear e, também, um isomorfismo.

4) Um operador linear $T : V \to V$ também pode ser chamado de endomorfismo.

5) Quando o operador linear $T : R^n \to R^n$ for um isomorfismo, a matriz da transformação $[T]$ é invertível e, assim, existe o operador linear inverso $T^{-1} : R^n \to R^n$:

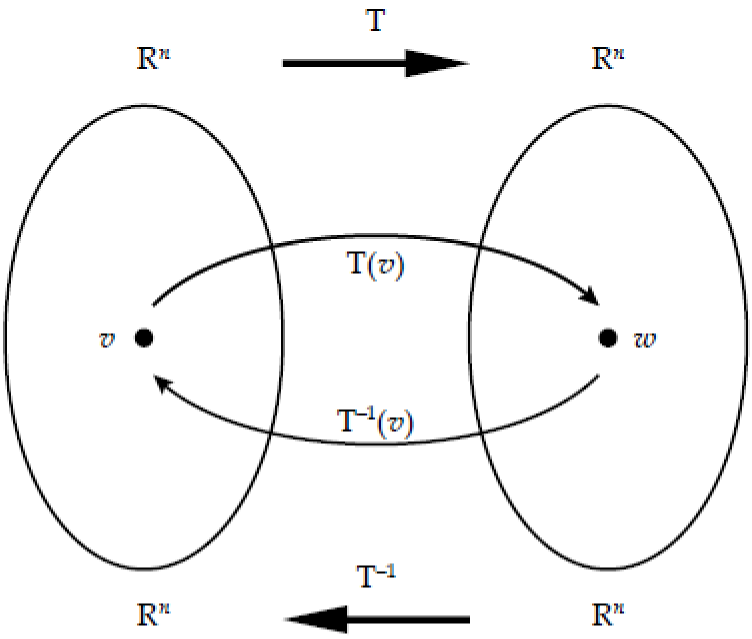

Figura 3.11 - Representação gráfica da inversa de uma transformação linear

A todo operador linear está associada uma matriz que representa esse operador. Seja $[T]_{(n\times n)}$ a matriz canônica que representa $T : R^n \to R^n$ e $[T^{-1}]_{(n\times n)}$ a matriz canônica que representa $T^{-1} : R^n \to R^n$. Já que uma transformação é inversa da outra, então uma matriz canônica também será inversa de outra, assim:

$$[T^{-1}]_{(n\times n)} = [T]^{-1}_{(n\times n)}$$

Mas não esqueça que uma matriz [T] somente possui inversa se $\det[T] \neq 0$.

3.23. Verifique se o operador linear $T_1 : R^3 \to R^3$, definido por $T_1(x, y, z) = (x + y - z, 2x + 4y - z, 3x + 2y + 2z)$, é um isomorfismo.

NO EXEMPLO 3.20, VIMOS QUE É BIJETORA, PORTANTO É ISOMORFISMO.

OU PODERIAMOS PENSAR DA SEGUINTE FORMA:

Como dim V = dim R^3 = dim W, basta verificar se T_1 é injetora, pois pelo corolário 3.1 (I), essa condição é suficiente para mostrar que T_1 é sobrejetora e, consequentemente, bijetora e isomorfismo.

Você já viu, nos exemplos anteriores, que $N(T_1) = \{(0, 0, 0)\}$. Logo, T_1 é injetora, então, sobrejetora.

3.24. Mostre que o seguinte operador linear T é um isomorfismo e determine o operador inverso T^{-1}.

$T : R^3 \to R^3$ dada por $T(x, y, z) = (x - 2y, z, x + y)$.

Essa é nova.

Então, temos que definir $Ker(T)$

Para isto, igualar a $\vec{0}$ e achar a solução para $(x,y,z) \in \mathbb{R}^3$

$$T(x,y,z) = (x-2y, z, x+y) = (0,0,0)$$

$$x - 2z = 0 \qquad z = 0 \qquad x+y=0$$

$$z = 0 \Rightarrow x - 2z = 0 \Rightarrow x + y = 0$$
$$x = 0 \qquad y = 0$$

$$\therefore (x,y,z) = (0,0,0)$$
$$\therefore Ker(T) = \{(0,0,0)\}$$

Como $Ker(T) = \vec{0} \Rightarrow$ injetora.

e como T é injetora e $\dim V = \dim W = 3$, ou seja, T é um operador linear, então T é sobrejetora.

$\therefore T$ é bijetora $\Rightarrow T$ é isomórfica

e T tem T^{-1}.

Agora, calcular T^{-1}

O mais fácil, em $\mathbb{R}^3$, é usar a base canonica $\{\hat{\imath}, \hat{\jmath}, \hat{k}\}$ do $\mathbb{R}^3$.

$T(x,y,z) = (x-2y, z, x+y)$

$T(1,0,0) = (1,0,1)$

$T(0,1,0) = (-2,0,1)$

$T(0,0,1) = (0,1,0)$

T^{-1} tem domínio e imagens invertidas em relação a T.

i. $T^{-1}(1,0,1) = (1,0,0)$

$T^{-1}(-2,0,1) = (0,1,0)$

$T^{-1}(0,1,0) = (0,0,1)$

Fazer C.L. da $\beta = \{(1,0,1), (-2,0,1), (0,1,0)\}$ em função de x, y e z e isolar a, b e c.

$(x,y,z) = a(1,0,1) + b(-2,0,1) + c(0,1,0)$

$a - 2b = x$ $\quad \boxed{c = y}$ $\quad a + b = z$

$a = x + 2b$

$x + 2b + b = z$

$3b = -x + z$

$\boxed{b = \frac{z-x}{3}}$

$a = x + 2\left(\frac{z-x}{3}\right)$

$a = x - \frac{2}{3}x + \frac{2}{3}z$

$\boxed{a = \frac{x+2z}{3}}$

Vamos verificar se está correto:

$$(x,y,z) = a(1,0,1) + b(-2,0,1) + c(0,1,0)$$

$$= \left(\frac{x+2z}{3}\right)(1,0,1) + \left(\frac{z-x}{3}\right)(-2,0,1) + y(0,1,0)$$

$$= \left(\frac{x}{3} + \cancel{\frac{2z}{3}} - \cancel{\frac{2z}{3}} + \frac{2x}{3}, y, \cancel{\frac{x}{3}} + \frac{2z}{3} + \frac{z}{3} - \cancel{\frac{x}{3}}\right)$$

$$= (x,y,z) \quad \text{ok!!!}$$

Agora, T^{-1}:

$$T^{-1}(x,y,z) = a(1,0,0) + b(0,1,0) + c(0,0,1)$$

$$T^{-1}(x,y,z) = (a,b,c)$$

$$\boxed{T^{-1}(x,y,z) = \left(\frac{x+2z}{3}, \frac{z-x}{3}, y\right)}$$

De fato

$$T(1,2,3) = (-3,3,3)$$

$$T^{-1}(-3,3,3) = (1,2,3)$$

OUTRA FORMA DE FAZER A MESMA QUESTÃO:

3.24. Mostre que o seguinte operador linear T é um isomorfismo e determine o operador inverso T^{-1}.

$T : R^3 \to R^3$ dada por $T(x, y, z) = (x - 2y, z, x + y)$.

T é isomorfica $\Leftrightarrow$ T é bijetora $\Leftrightarrow$ T é injetora e sobrejetora $\Leftrightarrow$ Existe T^{-1}

A inversa da matriz canônica de T é a matriz canônica de T^{-1}

ou seja $[T]$ é matriz canônica de T
então $[T^{-1}]$ é " " de T^{-1}

$$T(x,y,z) = (x-2y, z, x+y)$$

$$[T] = \begin{bmatrix} 1 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

se $\det[T]=0$, então $[T]$ não possui inversa.

$$\begin{vmatrix} 1 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0-0 & 1-0 \\ 1+2 & 0+0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 3 & 0 \end{vmatrix} = -3$$

$\therefore \det[T] \neq 0 \Rightarrow \exists\, [T^{-1}]$

Calculo de $[T^{-1}]$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & -2 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow[L_3 = L_3 - L_1]{L_2 \leftrightarrow L_3}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & -2 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \end{array}\right) \xrightarrow{L_1 = 3L_1 + 2L_2}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 3 & 0 & 0 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 3 & 0 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \end{array}\right) \xrightarrow[L_2 = \frac{1}{3} L_2]{L_1 = \frac{1}{3} L_1}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & \frac{1}{3} & 0 & \frac{2}{3} \\ 0 & 1 & 0 & -\frac{1}{3} & 0 & \frac{1}{3} \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \end{array}\right)$$

$$\therefore \; [T^{-1}] = \begin{bmatrix} \frac{1}{3} & 0 & \frac{2}{3} \\ -\frac{1}{3} & 0 & \frac{1}{3} \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\therefore \; T^{-1}(x,y,z) = \left(\frac{x+2z}{3}, \frac{z-x}{3}, y \right)$$

Como $\exists\, T^{-1} \Rightarrow T$ é bijetora $\Rightarrow$ T é isomorfismo.

ESTUDAR OS EXERCÍCIOS 10 A 16 DO MATERIAL COMPLETO (RESOLUÇÕES NO FINAL)