3 Limite e Continuidade

O objetivo deste capítulo é discutir a definição de limite de diferentes formas. Inicialmente apresenta-se a noção intuitiva usando exemplos de sucessões numéricas. Em seguida apresentamos tabelas e gráficos que auxiliam na visualização do limite da função. A definição formal é apresentada propiciando a demonstração de propriedades que serão usadas no cálculo de limites e, finalmente, é apresentado o conceito de continuidade das funções.

3.1 Noção Intuitiva

Inicialmente faremos algumas considerações. Sabemos que, no conjunto dos números reais, podemos sempre escolher um conjunto de números segundo qualquer regra preestabelecida.

Analisemos os seguintes exemplos de sucessões numéricas.

(1) 1, 2, 3, 4, 5, ...

(2) 1/2, 2/3, 3/4, 4/5, 5/6, ...

(3) 1, 0, -1, -2, -3, ...

(4) 1, 3/2, 3, 5/4, 5, 7/6, 7, ...

Na sucessão (1), os termos tornam-se cada vez maiores sem atingir um LIMITE. Dado um número real qualquer, por maior que seja, podemos sempre encontrar, na sucessão, um termo maior. Dizemos então que os termos dessa sucessão *tendem para o infinito* ou que o *limite da sucessão é infinito*.

Denota-se

$x \to +\infty$.

Na sucessão (2) os termos crescem, mas não ilimitadamente. Os números aproximam-se cada vez mais do valor 1, sem nunca atingirem esse valor. Dizemos que

$x \to 1$.

De maneira análoga, dizemos que na sucessão (3)

$x \to -\infty$.

Em (4) os termos da sucessão oscilam sem tender para um limite.

Ampliaremos, agora, o conceito de LIMITE para os diversos casos de *limite de uma função*.

Observemos as seguintes funções:

Exemplo 1:

Seja $y = 1-1/x$ (ver Figura 3.1 e Tabela 3.1).

Tabela 3.1

x	1	2	3	4	5	6	...	500	...	1000	...
y	0	1/2	2/3	3/4	4/5	5/6	...	499/500	...	999/1.000	...

x	-1	-2	-3	-4	-5	...	-100	...	-500	...
y	2	3/2	4/3	5/4	6/5	...	101/100	...	501/500	...

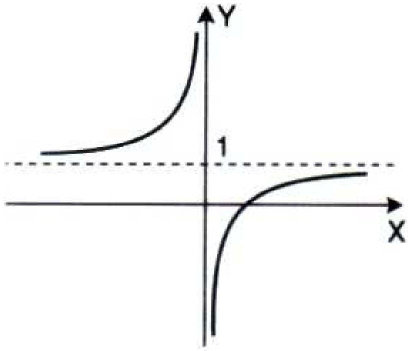


Figura 3.1

Esta função tende para 1 quando x tende para o infinito. Basta observar as tabelas e o gráfico para constatar que:

$y \to 1$ quando $x \to \pm\infty$.

Denota-se $\lim_{x \to \pm\infty} (1 - 1/x) = 1$.

Exemplo 2:

A função $y = x^2 + 3x - 2$ tende para $+\infty$ quando $x \to \pm\infty$.

Denota-se $\lim_{x \to \pm\infty} (x^2 + 3x - 2) = +\infty$.

De fato, intuitivamente, basta analisar o gráfico (Figura 3.2) e as sucessões da Tabela 3.2.

Tabela 3.2

x	1	2	3	4	5	6	7	...	100	...	1.000	...
y	2	8	16	26	38	52	68	...	10.298	...	1.002.998	...

x	-1	-2	-3	-4	-5	-6	...	-100	...	-500	...
y	-4	-4	-2	2	8	16	...	9.698	...	248.498	...

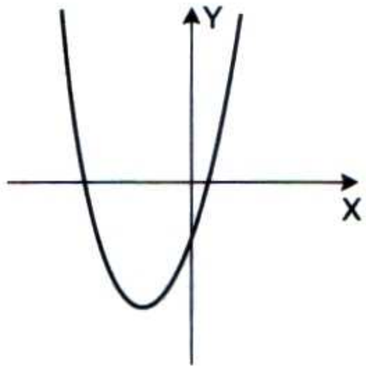


Figura 3.2

Exemplo 3:

A função $y = \dfrac{2x+1}{x-1}$ tende para 2 quando $x \to \pm\infty$ e escrevemos

$$\lim_{x \to \pm\infty} \frac{2x+1}{x-1} = 2.$$

Tabela 3.3

x	3	2	1,5	1,25	1,1	1,01	1,001	1,0001	...
y	3,5	5	8	14	32	302	3.002	30.002	...

x	-1	0	0,9	0,99	0,999	0,9999	...
y	0,5	-1	-28	-298	-2.998	-29.998	...

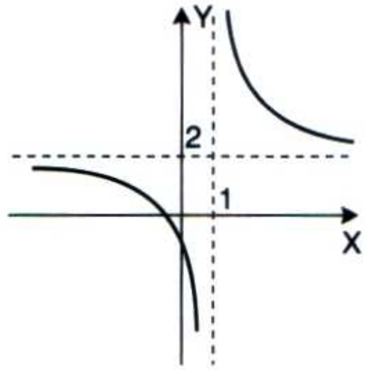


Figura 3.3

Observando a Figura 3.3 e a Tabela 3.3 ainda podemos dizer que $y \to +\infty$ quando $x \to 1$ através de valores maiores do que 1 e $y \to -\infty$ quando $x \to 1$ através de valores menores do que 1. Nesse caso, estamos nos referindo aos *limites laterais* denotados por:

$$\lim_{x\to 1^+} \frac{2x+1}{x-1} = +\infty \quad \text{e} \quad \lim_{x\to 1^-} \frac{2x+1}{x-1} = -\infty,$$

respectivamente chamados *limite à direita e limite à esquerda.*

Exemplo 4:

A Figura 3.4 nos mostra o gráfico da função

$$y = \frac{1}{(x+1)^2}.$$

Observando a Figura 3.4 e a Tabela 3.4 podemos afirmar que esta função tende para o infinito quando x tende para -1 e escrevemos

$$\lim_{x\to -1} \frac{1}{(x+1)^2} = +\infty$$

ou ainda,

$$\lim_{x\to -1^+} \frac{1}{(x+1)^2} = \lim_{x\to -1^-} \frac{1}{(x+1)^2} = +\infty.$$

Tabela 3.4

x	-3	-2	$-1{,}5$	$-1{,}25$	$-1{,}1$	$-1{,}01$	$-1{,}001$	...
y	0,25	1	4	16	100	10.000	1.000.000	...

x	1	0	$-0{,}5$	$-0{,}75$	$-0{,}9$	$-0{,}99$	$-0{,}999$	...
y	0,25	1	4	16	100	10.000	1.000.000	...

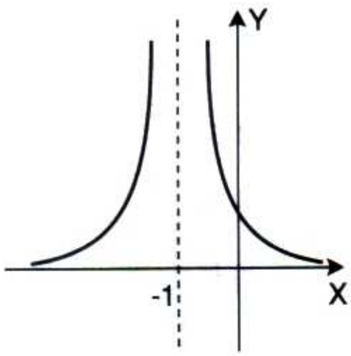


Figura 3.4

Exemplo 5:

A Figura 3.5 mostra o gráfico da função $y = \dfrac{-1}{(x-2)^2}$ e a Tabela 3.5 apresenta o comportamento da função numa vizinhança de 2.

Escrevemos $\lim_{x \to 2} \dfrac{-1}{(x-2)^2} = -\infty$ ou $y \to -\infty$ quando $x \to 2$.

Tabela 3.5

x	4	3	2,5	2,1	2,01	2,001	...
y	−0,25	−1	−4	−100	−10.000	−1.000.000	...

x	0	1	1,5	1,9	1,99	1,999	...
y	−0,25	−1	−4	−100	−10.000	−1.000.000	...

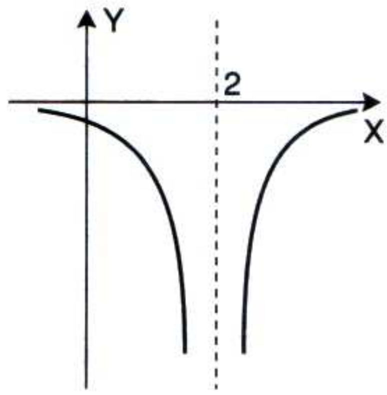


Figura 3.5

Exemplo 6:

Na Figura 3.6 temos o gráfico da função $y = \cos \dfrac{1}{x}$. Observando esta figura e a Tabela 3.6, podemos afirmar que o gráfico dessa função oscila numa vizinhança de zero, sem tender para um limite.

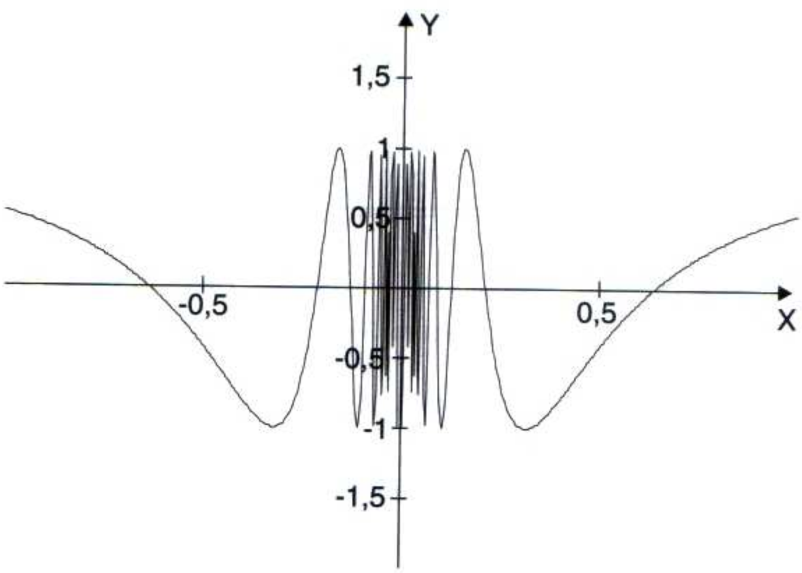


Figura 3.6

Tabela 3.6

x	$\frac{1}{\pi} \cong 0{,}318309$	$\frac{1}{2\pi} \cong 0{,}159154$	$\frac{1}{3\pi} \cong 0{,}106103$	$\frac{1}{4\pi} \cong 0{,}0795774$	...
y	-1	1	-1	1	...

Exemplo 7:

Na Figura 3.7 temos o gráfico da função $y = \frac{1}{2}x + 3$. De modo análogo aos exemplos anteriores, observando esse gráfico e a Tabela 3.7, podemos escrever que

$$\lim_{x \to 4^+} \left(\frac{1}{2}x + 3\right) = \lim_{x \to 4^-} \left(\frac{1}{2}x + 3\right) = 5$$

ou ainda,

$$\lim_{x \to 4} \left(\frac{1}{2}x + 3\right) = 5.$$

Tabela 3.7

x	5	4,5	4,1	4,01	4,001	4,0001	...
y	5,5	5,25	5,05	5,005	5,0005	5,00005	...

x	3	3,5	3,9	3,99	3,999	3,9999	...
y	4,5	4,75	4,95	4,995	4,9995	4,99995	...

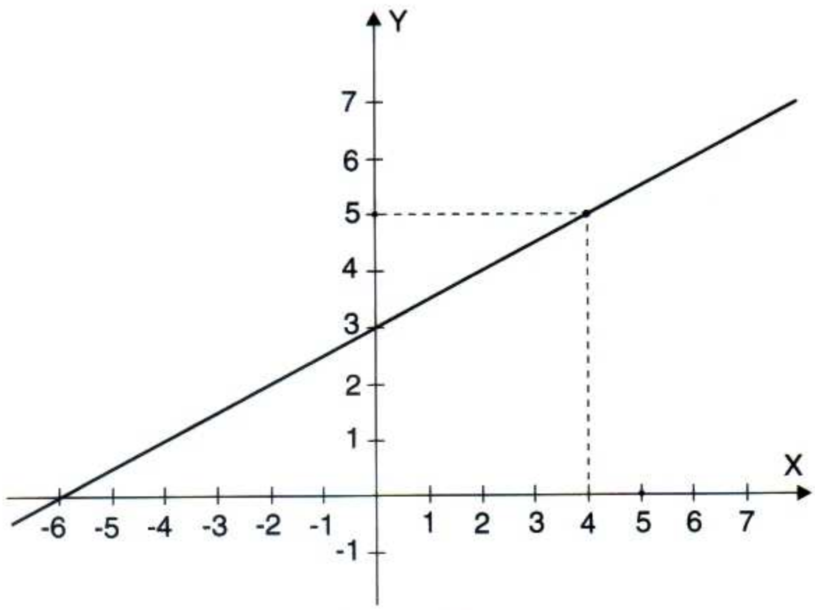


Figura 3.7

Pode-se observar no Exemplo 7 que, à medida que tomamos valores de x cada vez mais próximos de 4 ou $(x \to 4)$, os valores de y tornam-se cada vez mais próximos de 5 ou $(y \to 5)$, independentemente da sucessão de valores de x usados.

Esse mesmo exemplo pode ser analisado de outra forma, mais conveniente para a introdução da definição formal de limite.

Pode-se observar que é possível tornar o valor de y tão próximo de 5 quanto desejamos, desde que tornemos x suficiente próximo de $4 (x \neq 4)$.

A idéia "tornar o valor de y tão próximo de 5 quanto desejarmos", é traduzida matematicamente pela desigualdade

$$|y - 5| < \varepsilon \tag{1}$$

sendo ε um número positivo qualquer, tão pequeno quanto se possa imaginar.

A idéia "desde que tornemos x suficientemente próximo de 4 $(x \neq 4)$" significa que deve existir um intervalo aberto de raio $\delta > 0$ e centro $a = 4$, tal que se x $(x \neq 4)$ variar nesse intervalo (isto é, se $0 < |x - 4| < \delta$), então deve valer a desigualdade (1).

Na Figura 3.8 ilustramos essas idéias geometricamente.

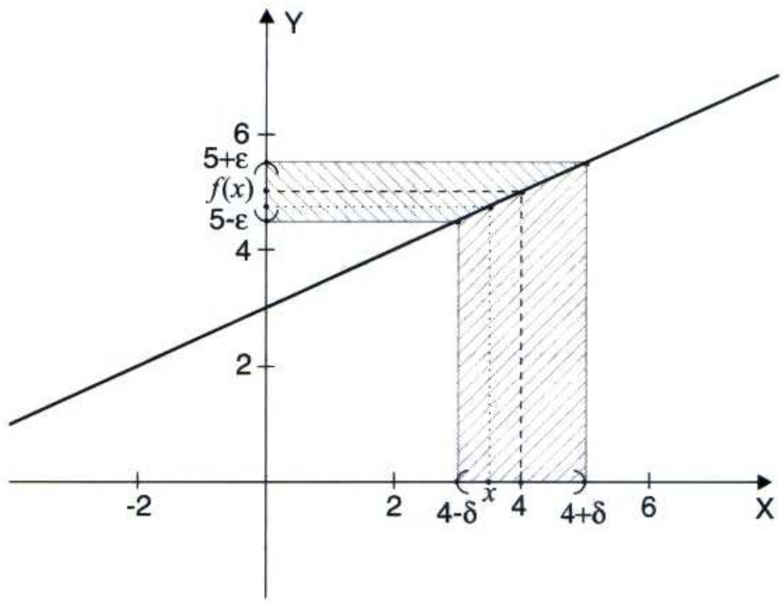


Figura 3.8

Podemos agora formular a definição de limite.

3.2 Definição

Intuitivamente, dizemos que uma função $f(x)$ tem limite L quando x tende para a, se é possível tornar $f(x)$ arbitrariamente próximo de L, desde que tomemos valores de x, $x \neq a$ suficientemente próximos de a.

De uma maneira formal, temos:

Seja $f(x)$ definida num intervalo aberto I, contendo a, exceto, possivelmente, no próprio a. Dizemos que o limite de $f(x)$ quando x aproxima-se de a é L e escrevemos

$$\lim_{x \to a} f(x) = L$$

se, para todo $\varepsilon > 0$, existe um $\delta > 0$, tal que $|f(x) - L| < \varepsilon$ sempre $0 < |x - a| < \delta$.

3.3 Exemplos

Usando a definição 3.2 provar que:

(i) $\lim\limits_{x \to 1} (3x - 1) = 2.$

De acordo com a definição 3.2 devemos mostrar que, para todo $\varepsilon > 0$, existe um $\delta > 0$, tal que

$|(3x - 1) - 2| < \varepsilon$ sempre que $0 < |x - 1| < \delta$.

O exame da desigualdade envolvendo ε proporciona uma chave para a escolha de δ.
As seguintes desigualdades são equivalentes:

$$|3x - 1 - 2| < \varepsilon$$

$$|3x - 3| < \varepsilon$$

$$|3(x - 1)| < \varepsilon$$

$$3|x - 1| < \varepsilon$$

$$|x - 1| < \varepsilon/3.$$

A última desigualdade nos sugere a escolha do δ.

Fazendo $\delta = \varepsilon/3$, vem que

$|(3x - 1) - 2| < \varepsilon$ sempre que $0 < |x - 1| < \delta$.

Portanto, $\lim\limits_{x \to 1} (3x - 1) = 2.$

Observamos que o valor sugerido para δ não é o único valor que garante a relação pretendida. Poderíamos tomar, por exemplo, $\delta = \dfrac{\varepsilon}{4}$ ou qualquer outro valor $\delta < \dfrac{\varepsilon}{3}$.

(ii) $\lim\limits_{x \to 4} x^2 = 16.$

Vamos mostrar que, dado $\varepsilon > 0$, existe $\delta > 0$, tal que

$|x^2 - 16| < \varepsilon$ sempre que $0 < |x - 4| < \delta$.

Da desigualdade que envolve ε, temos

$$|x^2 - 16| < \varepsilon$$

$$|x - 4||x + 4| < \varepsilon$$

Necessitamos agora substituir $|x + 4|$ por um valor constante. Nesse caso, vamos supor

$0 < \delta \leq 1,$

e então, de $0 < |x - 4| < \delta$, seguem as seguintes desigualdades equivalentes:

$$|x - 4| < 1$$

$$-1 < x - 4 < 1$$

$$3 < x < 5$$

$$7 < x + 4 < 9$$

Portanto, $|x + 4| < 9.$

Escolhendo $\delta = \min(\varepsilon/9, 1)$, temos que, se $|x - 4| < \delta$, então

$$|x^2 - 16| = |x - 4||x + 4| < \delta \cdot 9$$

$$\leq \frac{\varepsilon}{9} \cdot 9$$
$$= \varepsilon.$$

Logo $\lim\limits_{x \to 4} x^2 = 16$.

3.4 Proposição (Unicidade do Limite)

Se $\lim\limits_{x \to a} f(x) = L_1$ e $\lim\limits_{x \to a} f(x) = L_2$, então $L_1 = L_2$.

Prova Seja $\varepsilon > 0$ arbitrário. Como $\lim\limits_{x \to a} f(x) = L_1$, existe $\delta_1 > 0$ tal que

$|f(x) - L_1| < \varepsilon/2$ sempre que $0 < |x - a| < \delta_1$.

Como $\lim\limits_{x \to a} f(x) = L_2$, existe $\delta_2 > 0$ tal que

$|f(x) - L_2| < \varepsilon/2$ sempre que $0 < |x - a| < \delta_2$.

Seja $\delta = \min\{\delta_1, \delta_2\}$. Então $|f(x) - L_1| < \varepsilon/2$ e $|f(x) - L_2| < \varepsilon/2$ sempre que $0 < |x - a| < \delta$.

Seja x tal que $0 < |x - a| < \delta$. Então, podemos escrever

$|L_1 - L_2| = |L_1 - f(x) + f(x) - L_2| \leq |f(x) - L_1| + |f(x) - L_2| < \varepsilon/2 + \varepsilon/2 = \varepsilon$.

Como ε é arbitrário, temos $|L_1 - L_2| = 0$ e portanto $L_1 = L_2$.

3.5 Propriedades dos Limites

Na Seção 3.3, usamos a definição de limite para provar que um dado número era limite de uma função. Foi um processo relativamente simples para funções lineares, que se tornou complicado para funções mais elaboradas. A seguir introduziremos propriedades que podem ser usadas para achar muitos limites sem apelar para a pesquisa do número δ que aparece na definição 3.2.

3.5.1 Proposição

Se a, m e n são números reais, então

$$\lim_{x \to a} (mx + n) = ma + n.$$

Prova **Caso 1: $m \neq 0$** De acordo com a definição 3.2, dado $\varepsilon > 0$, devemos mostrar que existe $\delta > 0$, tal que

$|(mx + n) - (ma + n)| < \varepsilon$ sempre que $0 < |x - a| < \delta$.

Podemos obter a chave para a escolha de δ examinando a desigualdade que envolve ε. As seguintes desigualdades são equivalentes:

$$|(mx + n) - (ma + n)| < \varepsilon$$
$$|mx - ma| < \varepsilon$$
$$|m||x - a| < \varepsilon$$
$$|x - a| < \frac{\varepsilon}{|m|}.$$

A última desigualdade sugere a escolha $\delta = \dfrac{\varepsilon}{|m|}$.

De fato, se $\delta = \dfrac{\varepsilon}{|m|}$, temos

$$|(mx + n) - (ma + n)| = |m||x - a| < |m| \cdot \frac{\varepsilon}{|m|} \text{ sempre que } 0 < |x - a| < \delta,$$

e, portanto,

$$\lim_{x \to a} (mx + n) = ma + n.$$

Caso 2: $m = 0$ Se $m = 0$, então $|(mx + n) - (ma + n)| = 0$ para todos os valores de x.

Logo, tomando qualquer $\delta > 0$, a definição de limite é satisfeita.

Portanto, $\lim\limits_{x \to a}(mx + n) = ma + n$, para quaisquer a, m e n reais.

Da proposição 3.5.1, decorre que:

(a) Se c é um número real qualquer, então

$$\lim_{x \to a} c = c.$$

(b) $\lim\limits_{x \to a} x = a.$

3.5.2 Proposição Se $\lim\limits_{x \to a} f(x)$ e $\lim\limits_{x \to a} g(x)$ existem, e c é um número real qualquer, então:

(a) $\lim\limits_{x \to a} [f(x) \pm g(x)] = \lim\limits_{x \to a} f(x) \pm \lim\limits_{x \to a} g(x)$;

(b) $\lim\limits_{x \to a} cf(x) = c \cdot \lim\limits_{x \to a} f(x)$;

(c) $\lim\limits_{x \to a} f(x) \cdot g(x) = \lim\limits_{x \to a} f(x) \cdot \lim\limits_{x \to a} g(x)$;

(d) $\lim\limits_{x \to a} \dfrac{f(x)}{g(x)} = \dfrac{\lim\limits_{x \to a} f(x)}{\lim\limits_{x \to a} g(x)}$, desde que $\lim\limits_{x \to a} g(x) \neq 0$;

(e) $\lim\limits_{x \to a} [f(x)]^n = [\lim\limits_{x \to a} f(x)]^n$ para qualquer inteiro positivo n;

(f) $\lim\limits_{x \to a} \sqrt[n]{f(x)} = \sqrt[n]{\lim\limits_{x \to a} f(x)}$, se $\lim\limits_{x \to a} f(x) > 0$ e n inteiro ou se $\lim\limits_{x \to a} f(x) \leq 0$ e n é um inteiro positivo ímpar;

(g) $\lim\limits_{x \to a} \ln [f(x)] = \ln [\lim\limits_{x \to a} f(x)]$ se $\lim\limits_{x \to a} f(x) > 0$;

(h) $\lim\limits_{x \to a} \cos [f(x)] = \cos [\lim\limits_{x \to a} f(x)]$;

(i) $\lim\limits_{x \to a} \operatorname{sen} [f(x)] = \operatorname{sen} [\lim\limits_{x \to a} f(x)]$;

(j) $\lim\limits_{x \to a} e^{f(x)} = e^{\lim_{x \to a} f(x)}$.

Provaremos o item (a) desta proposição usando sinal positivo.

Prova do item (a)

Sejam $\lim\limits_{x \to a} f(x) = L$, $\lim\limits_{x \to a} g(x) = M$ e $\varepsilon > 0$ arbitrário. Devemos provar que existe $\delta > 0$ tal que

$$|(f(x) + g(x)) - (L + M)| < \varepsilon \text{ sempre que } 0 < |x - a| < \delta.$$

Como $\lim\limits_{x \to a} f(x) = L$ e $\varepsilon/2 > 0$, existe $\delta_1 > 0$ tal que $|f(x) - L| < \varepsilon/2$ sempre que $0 < |x - a| < \delta_1$.

Como $\lim\limits_{x \to a} g(x) = M$, existe $\delta_2 > 0$ tal que $|g(x) - M| < \varepsilon/2$ sempre que $0 < |x - a| < \delta_2$.

Seja δ o menor dos números δ_1 e δ_2.

Então $\delta \leq \delta_1$ e $\delta \leq \delta_2$ e assim, se $0 < |x - a| < \delta$, temos $|g(x) - M| < \varepsilon/2$ e $|f(x) - L| < \varepsilon/2$.

Logo,
$$\begin{aligned}|(f(x) + g(x)) - (L + M)| &= |(f(x) - L) + (g(x) - M)| \\ &\leq |f(x) - L| + |g(x) - M| \\ &< \varepsilon/2 + \varepsilon/2 \\ &= \varepsilon\end{aligned}$$

sempre que $0 < |x - a| < \delta$ e desta forma $\lim\limits_{x \to a}(f(x) + g(x)) = L + M$.

3.5.3 Proposição Se $f(x) \leq h(x) \leq g(x)$ para todo x em um intervalo aberto contendo a, exceto possivelmente em $x = a$, e se

$$\lim_{x \to a} f(x) = L = \lim_{x \to a} g(x)$$

então,

$$\lim_{x \to a} h(x) = L.$$

Prova Seja $\varepsilon > 0$ arbitrário. Como $\lim\limits_{x \to a} f(x) = L$, existe $\delta_1 > 0$ tal que $|f(x) - L| < \varepsilon$ sempre que $0 < |x - a| < \delta_1$. Como $\lim\limits_{x \to a} g(x) = L$, existe $\delta_2 > 0$ tal que $|g(x) - L| < \varepsilon$ sempre que $0 < |x - a| < \delta_2$.

Seja $\delta = \min\{\delta_1, \delta_2\}$.

Então, se $0 < |x - a| < \delta$ temos que $|f(x) - L| < \varepsilon$ e $|g(x) - L| < \varepsilon$, ou de forma equivalente, $L - \varepsilon < g(x) < L + \varepsilon$ e $L - \varepsilon < f(x) < L + \varepsilon$.

Assim, usando a hipótese, concluímos que, se $0 < |x - a| < \delta$, então,

$L - \varepsilon < f(x) \leq h(x) \leq g(x) < L + \varepsilon$, isto é,

$L - \varepsilon < h(x) < L + \varepsilon$.

Logo, se $0 < |x - a| < \delta$, temos que $|h(x) - L| < \varepsilon$ e, portanto, $\lim\limits_{x \to a} h(x) = L$.

Na Figura 3.9 podemos observar graficamente um exemplo da situação descrita nessa proposição. Esse resultado é conhecido como Teorema do Confronto ou Teorema do Sanduíche.

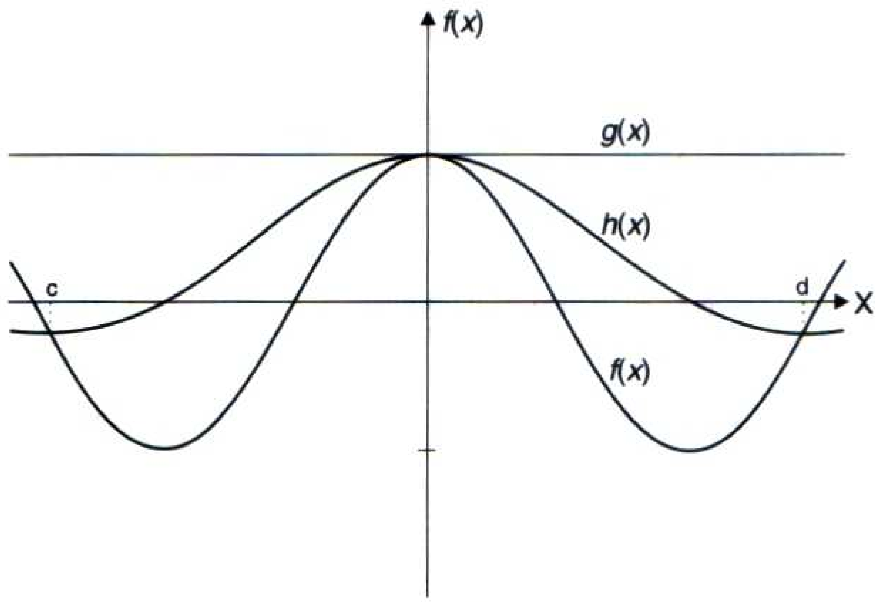


Figura 3.9

3.5.4 Exemplos.

(i) Encontrar $\lim\limits_{x \to 2} (x^2 + 3x + 5)$.

Temos,

$$\begin{aligned}\lim_{x \to 2} (x^2 + 3x + 5) &= \lim_{x \to 2} x^2 + \lim_{x \to 2} 3x + \lim_{x \to 2} 5 \\ &= \lim_{x \to 2} x^2 + 3 \lim_{x \to 2} x + \lim_{x \to 2} 5 \\ &= 2^2 + 3 \cdot 2 + 5 \\ &= 15.\end{aligned}$$

(ii) Encontrar $\lim\limits_{x \to 3} \dfrac{x - 5}{x^3 - 7}$.

$$\lim_{x \to 3} \frac{x - 5}{x^3 - 7} = \frac{\lim\limits_{x \to 3} (x - 5)}{\lim\limits_{x \to 3} (x^3 - 7)} = \frac{3 - 5}{27 - 7} = \frac{-1}{10}.$$

(iii) Encontrar $\lim\limits_{x \to -2} \sqrt{x^4 - 4x + 1}$.

$$\begin{aligned}\lim_{x \to -2} \sqrt{x^4 - 4x + 1} &= \sqrt{\lim_{x \to -2} (x^4 - 4x + 1)} \\ &= \sqrt{(-2)^4 - 4(-2) + 1} \\ &= 5.\end{aligned}$$

(iv) Encontrar $\lim\limits_{x \to 1} \dfrac{x^2 - 1}{x - 1}$.

Nesse caso, não podemos aplicar a propriedade do quociente, pois $\lim\limits_{x \to 1} (x - 1) = 0$.

Porém, se fatoramos o numerador, obtemos

$$\frac{x^2 - 1}{x - 1} = \frac{(x - 1)(x + 1)}{x - 1} = x + 1 \text{ para } x \neq 1.$$

Como no processo de limite os valores de x considerados são próximos de 1, mas diferentes de 1, temos

$$\lim_{x \to 1} \frac{x^2 - 1}{x - 1} = \lim_{x \to 1} \frac{(x - 1)(x + 1)}{x - 1} = \lim_{x \to 1} (x + 1) = 2.$$

(v) Encontrar $\lim\limits_{x \to 0} x^2 \left| \operatorname{sen} \dfrac{1}{x} \right|$.

Vamos usar a proposição 3.5.3. Como todos os valores da função seno estão entre -1 e 1, temos

$$0 \leq \left| \operatorname{sen} \frac{1}{x} \right| \leq 1, \forall\, x \neq 0.$$

Multiplicando a desigualdade por x^2, temos

$$0 \leq x^2 \left| \operatorname{sen} \frac{1}{x} \right| \leq x^2, \forall\, x \neq 0.$$

Como $\lim\limits_{x \to 0} 0 = 0$ e $\lim\limits_{x \to 0} x^2 = 0$, pela proposição 3.5.3 concluímos que $\lim\limits_{x \to 0} x^2 \left| \operatorname{sen} \dfrac{1}{x} \right| = 0$.

A Figura 3.10 ilustra a resolução desse exercício.

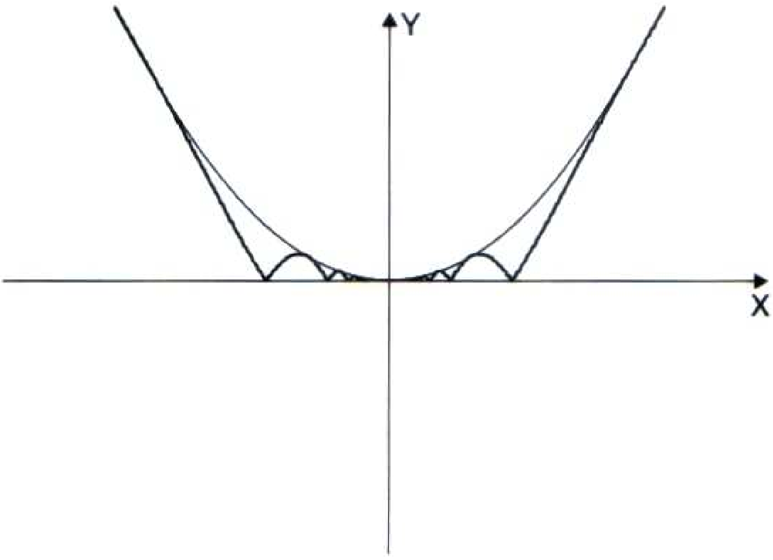
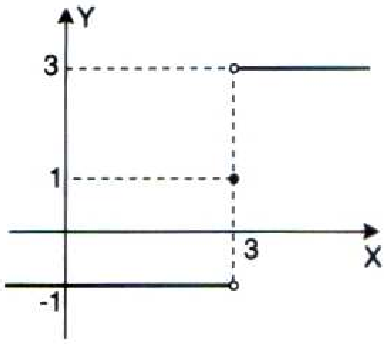


Figura 3.10

3.6 Exercícios

1. Seja $f(x)$ a função definida pelo gráfico:

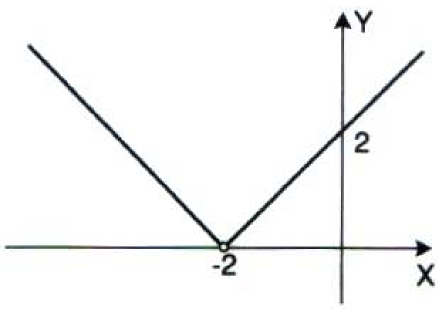


Intuitivamente, encontre se existir:

(*a*) $\lim\limits_{x \to 3^-} f(x)$. (*b*) $\lim\limits_{x \to 3^+} f(x)$. (*c*) $\lim\limits_{x \to 3} f(x)$.

(*d*) $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x)$. (*e*) $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x)$. (*f*) $\lim\limits_{x \to 4} f(x)$.

2. Seja $f(x)$ a função definida pelo gráfico:

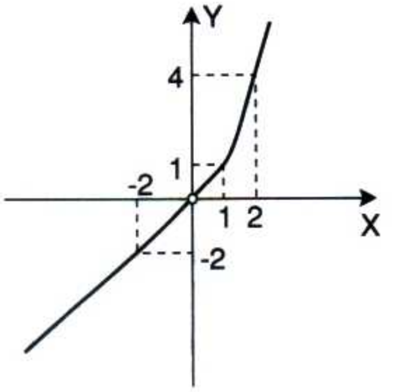


Intuitivamente, encontre se existir:

(*a*) $\lim_{x \to -2^+} f(x)$. (*b*) $\lim_{x \to -2^-} f(x)$.

(*c*) $\lim_{x \to -2} f(x)$. (*d*) $\lim_{x \to +\infty} f(x)$.

3. Seja $f(x)$ a função definida pelo gráfico:

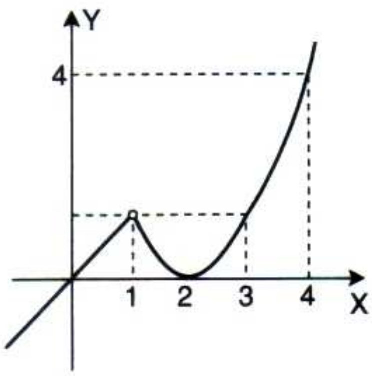


Intuitivamente, encontre se existir:

(*a*) $\lim_{x \to 0^+} f(x)$. (*b*) $\lim_{x \to 0^-} f(x)$. (*c*) $\lim_{x \to 0} f(x)$.

(*d*) $\lim_{x \to +\infty} f(x)$. (*e*) $\lim_{x \to -\infty} f(x)$. (*f*) $\lim_{x \to 2} f(x)$.

4. Seja $f(x)$ a função definida pelo gráfico:

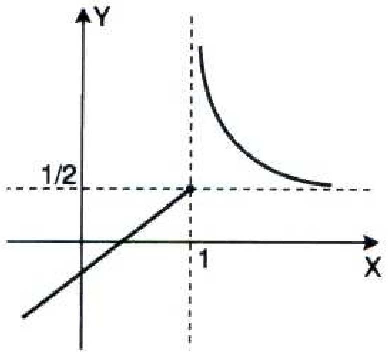


Intuitivamente, encontre se existir:

(*a*) $\lim_{x \to 2^+} f(x)$. (*b*) $\lim_{x \to 2^-} f(x)$. (*c*) $\lim_{x \to +\infty} f(x)$.

(*d*) $\lim_{x \to -\infty} f(x)$. (*e*) $\lim_{x \to 1} f(x)$.

5. Seja $f(x)$ a função definida pelo gráfico:



Intuitivamente, encontre se existir:

(a) $\lim_{x\to 1^+} f(x)$. (b) $\lim_{x\to 1^-} f(x)$. (c) $\lim_{x\to 1} f(x)$.

(d) $\lim_{x\to +\infty} f(x)$. (e) $\lim_{x\to -\infty} f(x)$.

6. Descrever analítica e graficamente uma função $y = f(x)$ tal que $\lim_{x\to 3} f(x)$ não existe e $\lim_{x\to 6} f(x)$ existe.

7. Definir uma função $y = g(x)$ tal que $\lim_{x\to 2} g(x) = 4$, mas $g(x)$ não é definida em $x = 2$.

8. Definir e fazer o gráfico de uma função $y = h(x)$ tal que $\lim_{x\to 0^+} h(x) = 1$ e $\lim_{x\to 0^-} h(x) = 2$.

9. Mostrar que existe o limite de $f(x) = 4x - 5$ em $x = 3$ e que é igual a 7.

10. Mostrar que $\lim_{x\to 3} x^2 = 9$.

Nos exercícios 11 a 15 é dado $\lim_{x\to a} f(x) = L$. Determinar um número δ para o ε dado tal que $|f(x) - L| < \varepsilon$ sempre que $0 < |x - a| < \delta$. Dar exemplos de dois outros números positivos para δ, que também satisfazem a implicação dada.

11. $\lim_{x\to 2} (2x + 4) = 8,\ \varepsilon = 0{,}01$.

12. $\lim_{x\to -1} (-3x + 7) = 10,\ \varepsilon = 0{,}5$.

13. $\lim_{x\to -2} \dfrac{x^2 - 4}{x + 2} = -4,\ \varepsilon = 0{,}1$.

14. $\lim_{x\to 5} \dfrac{1}{2 - x} = \dfrac{-1}{3},\ \varepsilon = 0{,}25$.

15. $\lim_{x\to 1} \dfrac{x^2 - 1}{x - 1} = 2,\ \varepsilon = 0{,}75$.

16. Fazer o gráfico das funções $y = f(x)$ dadas, explorando diversas escalas para visualizar melhor o gráfico numa vizinhança da origem. Observando o gráfico, qual a sua conjectura sobre o $\lim_{x\to 0} f(x)$? Comprove analiticamente se a sua conjectura é verdadeira.

(*a*) $f(x) = \operatorname{sen} \dfrac{1}{x}$

(*b*) $f(x) = x\operatorname{sen} \dfrac{1}{x}$

(*c*) $f(x) = x^2\operatorname{sen} \dfrac{1}{x}$

(*d*) $f(x) = x^3\operatorname{sen} \dfrac{1}{x}$

17. Mostrar que:

(i) Se f é uma função polinomial, então $\lim\limits_{x \to a} f(x) = f(a)$ para todo real a.

(ii) Se g é uma função racional e a pertence ao domínio de g, então $\lim\limits_{x \to a} g(x) = g(a)$.

Calcular os limites nos exercícios 18 a 37 usando as propriedades de Limites.

18. $\lim\limits_{x \to 0} (3 - 7x - 5x^2)$.

19. $\lim\limits_{x \to 3} (3x^2 - 7x + 2)$.

20. $\lim\limits_{x \to -1} (-x^5 + 6x^4 + 2)$.

21. $\lim\limits_{x \to 1/2} (2x + 7)$.

22. $\lim\limits_{x \to -1} [(x + 4)^3 \cdot (x + 2)^{-1}]$.

23. $\lim\limits_{x \to 0} [(x - 2)^{10} \cdot (x + 4)]$.

24. $\lim\limits_{x \to 2} \dfrac{x + 4}{3x - 1}$.

25. $\lim\limits_{t \to 2} \dfrac{t + 3}{t + 2}$.

26. $\lim\limits_{x \to 1} \dfrac{x^2 - 1}{x - 1}$.

27. $\lim\limits_{t \to 2} \dfrac{t^2 + 5t + 6}{t + 2}$.

28. $\lim\limits_{t \to 2} \dfrac{t^2 - 5t + 6}{t - 2}$.

29. $\lim\limits_{s \to 1/2} \dfrac{s + 4}{2s}$.

30. $\lim\limits_{x \to 4} \sqrt[3]{2x + 3}$.

31. $\lim\limits_{x \to 7} (3x + 2)^{2/3}$.

32. $\lim\limits_{x \to \sqrt{2}} \dfrac{2x^2 - x}{3x}$.

33. $\lim\limits_{x \to 2} \dfrac{x\sqrt{x} - \sqrt{2}}{3x - 4}$.

34. $\lim\limits_{x \to \pi/2} [2 \operatorname{sen} x - \cos x + \operatorname{cotg} x]$.

35. $\lim\limits_{x \to 4} (e^x + 4x)$.

36. $\lim\limits_{x \to -1/3} (2x + 3)^{1/4}$.

37. $\lim\limits_{x \to 2} \dfrac{\operatorname{senh} x}{4}$.

3.7 Limites Laterais

3.7.1 Definição Seja f uma função definida em um intervalo aberto (a, c). Dizemos que um número L é o *limite à direita* da função f quando x tende para a e escrevemos

$$\lim_{x \to a^+} f(x) = L,$$

se para todo $\varepsilon > 0$ existe um $\delta > 0$, tal que $|f(x) - L| < \varepsilon$ sempre que $a < x < a + \delta$.

Se $\lim\limits_{x \to a^+} f(x) = L$, dizemos que $f(x)$ tende para L quando x tende para *a pela direita*. Usamos o símbolo $x \to a^+$ para indicar que os valores são sempre maiores do que a.

De maneira análoga, definimos limite à esquerda.

3.7.2 Definição Seja f uma função definida em um intervalo aberto (d, a). Dizemos que um número L é o *limite à esquerda* da função f quando x tende para a e escrevemos

$$\lim_{x \to a^-} f(x) = L,$$

se para todo $\varepsilon > 0$, existe um $\delta > 0$, tal que $|f(x) - L| < \varepsilon$ sempre que $a - \delta < x < a$.

Nesse caso, o símbolo $x \to a^-$ indica que os valores de x considerados são sempre menores do que a.

Observação. As propriedades de limites, vistas nas proposições 3.5.1, 3.5.2 e 3.5.3 continuam válidas se substituirmos $x \to a$ por $x \to a^+$ ou $x \to a^-$.

3.7.3 Exemplos

(i) Dada a função $f(x) = (1 + \sqrt{x - 3})$, determinar, se possível,

$\lim\limits_{x \to 3^+} f(x)$ e $\lim\limits_{x \to 3^-} f(x)$.

A função dada só é definida para $x \geq 3$. Assim, não existe $\lim\limits_{x \to 3^-} f(x)$.

Para calcular $\lim\limits_{x \to 3^+} f(x)$, podemos aplicar as propriedades. Temos,

$$\begin{aligned}
\lim_{x \to 3^+} f(x) &= \lim_{x \to 3^+} (1 + \sqrt{x - 3}\,) \\
&= \lim_{x \to 3^+} 1 + \lim_{x \to 3^+} \sqrt{x - 3} \\
&= 1 + \sqrt{\lim_{x \to 3^+} (x - 3)} \\
&= 1 + 0 \\
&= 1.
\end{aligned}$$

(ii) Seja $f(x) = \begin{cases} \dfrac{-|x|}{x}, & \text{se } x \neq 0 \\ 1, & \text{se } x = 0 \end{cases}$

Determinar $\lim_{x\to 0^+} f(x)$ e $\lim_{x\to 0^-} f(x)$. Esboçar o gráfico.

Se $x > 0$, então $|x| = x$ e $f(x) = \dfrac{-x}{x} = -1$.

Logo, $\lim_{x\to 0^+} f(x) = \lim_{x\to 0+} -1 = -1$.

Se $x < 0$, então $|x| = -x$ e $f(x) = \dfrac{x}{x} = 1$.

Portanto, $\lim_{x\to 0^-} f(x) = \lim_{x\to 0} 1 = 1$.

O gráfico da função pode ser visto na Figura 3.11. Observamos que

$\lim_{x\to 0^+} f(x) \neq \lim_{x\to 0^-} f(x)$.

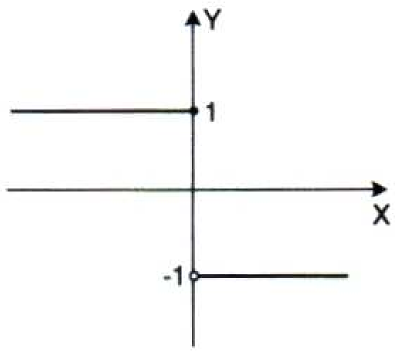


Figura 3.11

(iii) Seja $f(x) = |x|$. Determinar $\lim_{x\to 0^+} f(x)$ e $\lim_{x\to 0^-} f(x)$. Esboçar o gráfico.

Se $x \geq 0$, então $f(x) = x$. Logo $\lim_{x\to 0^+} f(x) = \lim_{x\to 0^+} x = 0$.

Se $x < 0$, então $f(x) = -x$. Logo $\lim_{x\to 0^-} f(x) = \lim_{x\to 0^-} (-x) = 0$.

A Figura 3.12 mostra o esboço do gráfico da função. Neste exemplo, podemos observar que

$\lim_{x\to 0^+} f(x) = \lim_{x\to 0^-} f(x)$.

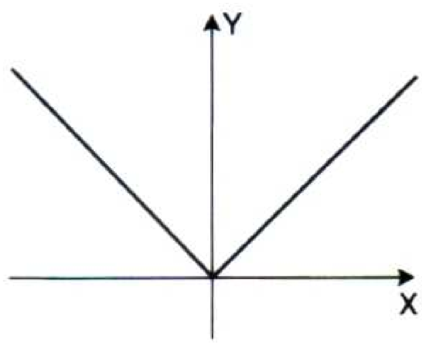


Figura 3.12

O teorema a seguir nos dá a relação existente ente *limites laterais* e *limite* de uma função.

3.7.4 Teorema Se f é definida em um intervalo aberto contendo a, exceto possivelmente no ponto a, então $\lim_{x \to a} f(x) = L$ se e somente se $\lim_{x \to a^+} f(x) = L$ e $\lim_{x \to a^-} f(x) = L$.

Prova Provaremos apenas a condição suficiente. A condição necessária é conseqüência imediata das definições dos limites envolvidos.

Suponhamos que $\lim_{x \to a^+} f(x) = L$ e $\lim_{x \to a^-} f(x) = L$. Então, dado $\varepsilon > 0$ arbitrário, existe $\delta_1 > 0$ tal que $|f(x) - L| < \varepsilon$ sempre que $a < x < a + \delta_1$ e existe $\delta_2 > 0$ tal que $|f(x) - L| < \varepsilon$ sempre que $a - \delta_2 < x < a$.

Seja $\delta = \min \{\delta_1, \delta_2\}$. Então $a - \delta_2 \leq a - \delta$ e $a + \delta \leq a + \delta_1$, e, portanto, se $x \neq a$ e $a - \delta < x < a + \delta$, temos que $|f(x) - L| < \varepsilon$.

De forma equivalente, $|f(x) - L| < \varepsilon$ sempre que $0 < |x - a| < \delta$ e, desta forma, $\lim_{x \to a} f(x) = L$.

3.7.5 Exemplos

(i) Analisando os exemplos anteriores, podemos concluir que:

(a) Também não existe $\lim_{x \to 0} - \dfrac{|x|}{x}$.

(b) $\lim_{x \to 0} |x| = 0$.

(ii) Seja $f(x) = \begin{cases} x^2 + 1, & \text{para } x < 2 \\ 2 \quad , & \text{para } x = 2 \\ 9 - x^2, & \text{para } x > 2. \end{cases}$

Determinar, se existirem, $\lim_{x \to 2^+} f(x)$, $\lim_{x \to 2^-} f(x)$ e $\lim_{x \to 2} f(x)$. Esboçar o gráfico da função.

Se $x > 2$, então, $f(x) = 9 - x^2$.

Assim,

$$\lim_{x \to 2^+} f(x) = \lim_{x \to 2^+} (9 - x^2) = \lim_{x \to 2^+} 9 - \lim_{x \to 2^+} x^2 = 9 - 4 = 5.$$

Se $x < 2$, então $f(x) = x^2 + 1$.

Portanto,

$$\lim_{x \to 2^-} f(x) = \lim_{x \to 2^-} (x^2 + 1) = \lim_{x \to 2^-} x^2 + \lim_{x \to 2^-} 1 = 4 + 1 = 5.$$

Como $\lim_{x \to 2^+} f(x) = \lim_{x \to 2^-} f(x) = 5$, concluímos que

$$\lim_{x \to 2} f(x) = 5.$$

A Figura 3.13 mostra o gráfico de $f(x)$.

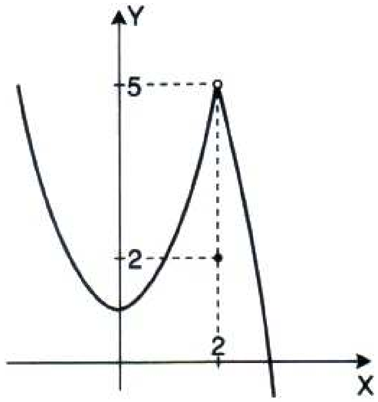


Figura 3.13

3.8 Exercícios

1. Seja $f(x) = \begin{cases} x - 1, x \leq 3 \\ 3x - 7, x > 3. \end{cases}$

Calcule:

(*a*) $\lim\limits_{x \to 3^-} f(x)$. (*b*) $\lim\limits_{x \to 3^+} f(x)$. (*c*) $\lim\limits_{x \to 3} f(x)$.

(*d*) $\lim\limits_{x \to 5^-} f(x)$. (*e*) $\lim\limits_{x \to 5^+} f(x)$. (*f*) $\lim\limits_{x \to 5} f(x)$.

Esboçar o gráfico de $f(x)$.

2. Seja $h(x) = \begin{cases} x^2 - 2x + 1, & x \neq 3 \\ 7 \quad , & x = 3. \end{cases}$

Calcule $\lim\limits_{x \to 3} h(x)$. Esboce o gráfico de $h(x)$.

3. Seja $F(x) = |x - 4|$. Calcule os limites indicados se existirem:

(*a*) $\lim\limits_{x \to 4^+} F(x)$. (*b*) $\lim\limits_{x \to 4^-} F(x)$. (*c*) $\lim\limits_{x \to 4} F(x)$.

Esboce o gráfico de $F(x)$.

4. Seja $f(x) = 2 + |5x - 1|$. Calcule se existir:

(*a*) $\lim\limits_{x \to 1/5^+} f(x)$. (*b*) $\lim\limits_{x \to 1/5^-} f(x)$. (*c*) $\lim\limits_{x \to 1/5} f(x)$.

Esboce o gráfico de $f(x)$.

5. Seja $g(x) = \begin{cases} \dfrac{|x-3|}{x-3}, & x \neq 3 \\ 0 \quad , & x = 3. \end{cases}$

(*a*) Esboce o gráfico de $g(x)$.

(*b*) Achar, se existirem $\lim_{x \to 3^+} g(x)$, $\lim_{x \to 3^-} g(x)$ e $\lim_{x \to 3} g(x)$.

6. Seja $h(x) = \begin{cases} x/|x|, & \text{se } x \neq 0 \\ 0 \quad , & \text{se } x = 0. \end{cases}$

Mostrar que $h(x)$ não tem limite no ponto 0.

7. Determinar limites à direita e à esquerda da função $f(x) = \text{arc tg } 1/x$ quando $x \to 0$.

8. Verifique se $\lim_{x \to 1} \dfrac{1}{x-1}$ existe.

9. Seja $f(x) = \begin{cases} 1/x \quad , & x < 0 \\ x^2 \quad , & 0 \leq x < 1 \\ 2 \quad , & x = 1 \\ 2 - x, & x > 1. \end{cases}$

Esboce o gráfico e calcule os limites indicados se existirem:

(*a*) $\lim_{x \to -1} f(x)$.
(*b*) $\lim_{x \to 1} f(x)$.
(*c*) $\lim_{x \to 0^+} f(x)$.
(*d*) $\lim_{x \to 0^-} f(x)$.
(*e*) $\lim_{x \to 0} f(x)$.
(*f*) $\lim_{x \to 2^+} f(x)$.
(*g*) $\lim_{x \to 2^-} f(x)$.
(*h*) $\lim_{x \to 2} f(x)$.

10. Seja $f(x) = (x^2 - 25)/(x - 5)$.

Calcule os limites indicados se existirem:

(*a*) $\lim_{x \to 0} f(x)$.
(*b*) $\lim_{x \to 5^+} f(x)$.
(*c*) $\lim_{x \to -5^-} f(x)$.
(*d*) $\lim_{x \to 5} f(x)$.
(*e*) $\lim_{x \to -5} f(x)$.

3.9 Cálculo de Limites

Antes de apresentar os exemplos de cálculo de limites, vamos falar um pouco sobre *expressões indeterminadas*. Costuma-se dizer que as expressões:

$$\frac{0}{0}, \frac{\infty}{\infty}, \infty - \infty, 0 \times \infty, 0^0, \infty^0, 1^\infty$$

são indeterminadas. O que significa isto?

Vejamos, por exemplo, $\frac{0}{0}$.

Sejam f e g funções tais $\lim_{x\to a} f(x) = \lim_{x\to a} g(x) = 0$. Nada se pode afirmar, *a priori*, sobre o limite do quociente f/g. Dependendo das funções f e g ele pode assumir qualquer valor real ou não existir. Exprimimos isso, dizendo que 0/0 é um símbolo de indeterminação.

Para comprovar o que dissemos acima, vejamos dois exemplos:

(i) Sejam $f(x) = x^3$ e $g(x) = x^2$.

Temos, $\lim_{x\to 0} f(x) = \lim_{x\to 0} g(x) = 0$

e $\lim_{x\to 0} \frac{f(g)}{g(x)} = \lim_{x\to 0} \frac{x^3}{x^2} = \lim_{x\to 0} x = 0.$

(ii) Sejam $f(x) = x^2$ e $g(x) = 2x^2$.

Temos, $\lim_{x\to 0} f(x) = \lim_{x\to 0} g(x) = 0$ e, neste caso,

$$\lim_{x\to 0} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to 0} \frac{x^2}{2x^2} = \lim_{x\to 0} \frac{1}{2} = \frac{1}{2}.$$

Analisaremos, agora, alguns exemplos de cálculo de limites onde os artifícios algébricos são necessários. São os casos de funções racionais em que o limite do denominador é zero num determinado ponto e o limite do numerador também é zero neste mesmo ponto.

Simbolicamente estaremos diante da indeterminação do tipo 0/0.

Exemplo 1: $\lim_{x\to -2} \frac{x^3 - 3x + 2}{x^2 - 4}$.

Neste caso, fatora-se o numerador e o denominador fazendo-se a seguir as simplificações possíveis. Aplicamos então a proposição 3.5.2.

Temos,

$$\begin{aligned}\lim_{x\to -2} \frac{x^3 - 3x + 2}{x^2 - 4} &= \lim_{x\to -2} \frac{(x^2 - 2x + 1)(x + 2)}{(x - 2)(x + 2)} \\ &= \lim_{x\to -2} \frac{x^2 - 2x + 1}{x - 2} \\ &= \frac{\lim_{x\to -2} (x^2 - 2x + 1)}{\lim_{x\to -2} (x - 2)} \\ &= -9/4.\end{aligned}$$

Exemplo 2: $\lim_{x\to 0} \frac{\sqrt{x + 2} - \sqrt{2}}{x}$.

Para este exemplo usaremos o artifício da racionalização do numerador da função.

Segue então,

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt{x+2}-\sqrt{2}}{x}=\lim_{x\to 0}\frac{(\sqrt{x+2}-\sqrt{2})(\sqrt{x+2}+\sqrt{2})}{x(\sqrt{x+2}+\sqrt{2})}$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{(\sqrt{x+2})^2-(\sqrt{2})^2}{x(\sqrt{x+2}+\sqrt{2})}$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{x+2-2}{x(\sqrt{x+2}+\sqrt{2})}$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{1}{\sqrt{x+2}+\sqrt{2}}$$

$$=\frac{1}{2\sqrt{2}}.$$

Exemplo 3: $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{\sqrt[3]{x}-1}{\sqrt{x}-1}$.

Neste caso faremos uma troca de variáveis para facilitar os cálculos.

Por exemplo, $x = t^6, t \geq 0$.

Quando $t^6 \to 1$, temos que $t \to 1$.

Portanto,

$$\lim_{x\to 1}\frac{\sqrt[3]{x}-1}{\sqrt{x}-1}=\lim_{t\to 1}\frac{\sqrt[3]{t^6}-1}{\sqrt{t^6}-1}$$

$$=\lim_{t\to 1}\frac{t^2-1}{t^3-1}$$

$$=\lim_{t\to 1}\frac{(t-1)(t+1)}{(t-1)(t^2+t+1)}$$

$$=\lim_{t\to 1}\frac{t+1}{t^2+t+1}$$

$$=2/3.$$

Exemplo 4: $\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{(x+h)^2-x^2}{h}$.

Neste exemplo, simplesmente desenvolve-se o numerador para poder realizar as simplificações. Obtem-se:

$$\lim_{h\to 0}\frac{(x+h)^2-x^2}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{x^2+2xh+h^2-x^2}{h}$$

$$=\lim_{h\to 0}\frac{2xh+h^2}{h}$$

$$=\lim_{h\to 0}\frac{h(2x+h)}{h}$$

$$=\lim_{h\to 0}(2x+h)$$

$$=2x.$$

3.10 Exercícios

1. Para cada uma das seguintes funções ache

$$\lim_{x \to 2} \frac{f(x) - f(2)}{x - 2}.$$

(a) $f(x) = 3x^2.$ (b) $f(x) = 1/x, x \neq 0.$ (c) $f(x) = 2/3x^2.$

(d) $f(x) = 3x^2 + 5x - 1.$ (e) $f(x) = \dfrac{1}{x + 1}, x \neq -1.$ (f) $f(x) = x^3.$

2. Esboçar o gráfico das seguintes funções e dar uma estimativa dos limites indicados.

(a) $f(x) = \dfrac{x^2 - 9}{x - 3};$ $\lim_{x \to 3} f(x)$

(b) $f(x) = \dfrac{x^3 - 3x + 2}{x^2 - 4};$ $\lim_{x \to -2} f(x)$

(c) $f(x) = \dfrac{\sqrt{x} - 1}{\sqrt[3]{x} - 1};$ $\lim_{x \to 1} f(x)$

(d) $f(x) = \dfrac{x - 1}{x^3 - 1};$ $\lim_{x \to 1} f(x)$

3. Calcular os limites indicados no Exercício 2 e comparar seus resultados com as estimativas obtidas.

Nos exercícios 4 a 27 calcule os limites.

4. $\lim_{x \to -1} \dfrac{x^3 + 1}{x^2 - 1}.$

5. $\lim_{t \to -2} \dfrac{t^3 + 4t^2 + 4t}{(t + 2)(t - 3)}.$

6. $\lim_{x \to 2} \dfrac{x^2 + 3x - 10}{3x^2 - 5x - 2}.$

7. $\lim_{t \to 5/2} \dfrac{2t^2 - 3t - 5}{2t - 5}.$

8. $\lim_{x \to a} \dfrac{x^2 + (1 - a)x - a}{x - a}.$

9. $\lim_{x \to 4} \dfrac{3x^2 - 17x + 20}{4x^2 - 25x + 36}.$

10. $\lim_{x \to -1} \dfrac{x^2 + 6x + 5}{x^2 - 3x - 4}.$

11. $\lim_{x \to -1} \dfrac{x^2 - 1}{x^2 + 3x + 2}.$

12. $\lim_{x \to 2} \dfrac{x^2 - 4}{x - 2}.$

13. $\lim_{x \to 2} \dfrac{x^2 - 5x + 6}{x^2 - 12x + 20}.$

14. $\lim\limits_{h\to 0} \dfrac{(2+h)^4 - 16}{h}$.

15. $\lim\limits_{t\to 0} \dfrac{(4+t)^2 - 16}{t}$.

16. $\lim\limits_{t\to 0} \dfrac{\sqrt{25+3t} - 5}{t}$.

17. $\lim\limits_{t\to 0} \dfrac{\sqrt{a^2+bt} - a}{t}, a > 0$.

18. $\lim\limits_{h\to 1} \dfrac{\sqrt{h} - 1}{h - 1}$.

19. $\lim\limits_{h\to -4} \dfrac{\sqrt{2(h^2-8)} + h}{h+4}$.

20. $\lim\limits_{h\to 0} \dfrac{\sqrt[3]{8+h} - 2}{h}$.

21. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sqrt{1+x} - 1}{-x}$.

22. $\lim\limits_{t\to 0} \dfrac{\sqrt{x^2+a^2} - a}{\sqrt{x^2+b^2} - b}, \quad a, b > 0$.

23. $\lim\limits_{x\to a} \dfrac{\sqrt[3]{x} - \sqrt[3]{a}}{x - a}, a \neq 0$.

24. $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{\sqrt[3]{x} - 1}{\sqrt[4]{x} - 1}$.

25. $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{\sqrt[3]{x^2} - 2\sqrt[3]{x} + 1}{(x-1)^2}$.

26. $\lim\limits_{x\to 4} \dfrac{3 - \sqrt{5+x}}{1 - \sqrt{5-x}}$.

27. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sqrt{1+x} - \sqrt{1-x}}{x}$.

3.11 Limites no Infinito

No Exemplo 1 da Seção 3.1, analisamos o comportamento da função $f(x) = 1 - 1/x$ para valores de x muito grandes.

Intuitivamente, vimos que podemos tornar o valor de $f(x)$ tão próximo de 1 quanto desejarmos, tomando para x valores suficientemente elevados. (Observar a Tabela 3.1.) Da mesma forma, fazendo x decrescer ilimitadamente vemos que $f(x)$ se aproxima desse mesmo valor 1.

Temos as seguintes definições:

3.11.1 Definição Seja f uma função definida em um intervalo aberto $(a, +\infty)$. Escrevemos,

$$\lim_{x\to +\infty} f(x) = L,$$

quando o número L satisfaz à seguinte condição:

Para qualquer $\varepsilon > 0$, existe $A > 0$ tal que $|f(x) - L| < \varepsilon$ sempre que $x > A$.

3.11.2 Definição Seja f definida em $(-\infty, b)$. Escrevemos,

$$\lim_{x\to -\infty} f(x) = L,$$

se L satisfaz a seguinte condição:

Para qualquer $\varepsilon > 0$, existe $B < 0$ tal que $|f(x) - L| < \varepsilon$ sempre que $x < B$.

Observação: as propriedades dos limites dadas na proposição 3.5.2 da Seção 3.5 permanecem inalteradas quando substituímos $x \to a$ por $x \to +\infty$ ou $x \to -\infty$.

Temos ainda o seguinte teorema, que nos ajudará muito no cálculo dos limites no infinito.

3.11.3 Teorema

Se n é um número inteiro positivo, então:

(i) $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{1}{x^n} = 0$.

(ii) $\lim\limits_{x \to -\infty} \dfrac{1}{x^n} = 0$.

Prova Vamos demonstrar o item (i). Devemos provar que, para qualquer $\varepsilon > 0$, existe $A > 0$, tal que

$$\left|\frac{1}{x^n} - 0\right| < \varepsilon \text{ sempre que } x > A.$$

O exame da desigualdade que envolve ε nos sugere a escolha de A.
As seguintes desigualdades são equivalentes:

$$\left|\frac{1}{x^n} - 0\right| < \varepsilon$$

$$\frac{1}{|x|^n} < \varepsilon$$

$$\frac{1}{\sqrt[n]{|x|^n}} < \sqrt[n]{\varepsilon}$$

$$\frac{1}{|x|} < \sqrt[n]{\varepsilon}$$

$$|x| > 1/\sqrt[n]{\varepsilon}.$$

A última desigualdade nos sugere fazer $A = 1/\sqrt[n]{\varepsilon}$.

Temos que $x > A \Rightarrow \left|\dfrac{1}{x^n} - 0\right| < \varepsilon$ e, desta forma,

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{1}{x^n} = 0.$$

A demonstração do item (ii) se faz de forma análoga. Sugerimos ao aluno que tente fazê-la.

3.11.4 Exemplos

(i) Determinar $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{2x - 5}{x + 8}$.

Neste caso, temos uma indeterminação do tipo $\dfrac{\infty}{\infty}$.

Vamos dividir o numerador e o denominador por x e depois aplicar as propriedades de limites juntamente com o teorema 3.11.3.

Temos,

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{2x-5}{x+8}=\lim_{x\to+\infty}\frac{2-5/x}{1+8/x}$$

$$=\frac{\lim\limits_{x\to+\infty}(2-5/x)}{\lim\limits_{x\to+\infty}(1+8/x)}$$

$$=\frac{\lim\limits_{x\to+\infty}2-\lim\limits_{x\to+\infty}5/x}{\lim\limits_{x\to+\infty}1+\lim\limits_{x\to+\infty}8/x}$$

$$=\frac{2-5\cdot 0}{1+8\cdot 0}$$

$$=2.$$

(ii) Encontrar $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{2x^3-3x+5}{4x^5-2}$.

Novamente temos uma indeterminação do tipo ∞/∞.

Para usarmos o teorema 3.11.3, dividimos o numerador e o denominador pela maior potência de x, que neste caso é x^5.

Temos,

$$\lim_{x\to-\infty}\frac{2x^3-3x+5}{4x^5-2}=\lim_{x\to-\infty}\frac{\dfrac{2}{x^2}-\dfrac{3}{x^4}+\dfrac{5}{x^5}}{4-2/x^5}$$

$$=\frac{\lim\limits_{x\to-\infty}(2/x^2-3/x^4+5/x^5)}{\lim\limits_{x\to-\infty}(4-2/x^5)}$$

$$=\frac{2\lim\limits_{x\to-\infty}1/x^2-3\lim\limits_{x\to-\infty}1/x^4+5\lim\limits_{x\to-\infty}1/x^5}{\lim\limits_{x\to-\infty}4-2\lim\limits_{x\to-\infty}1/x^5)}$$

$$=\frac{2{,}0-3\cdot 0+5\cdot 0}{4-2\cdot 0}$$

$$=0.$$

(iii) Determinar $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{2x+5}{\sqrt{2x^2-5}}$.

Neste caso, dividimos o numerador e o denominador por x. No denominador tomamos $x=\sqrt{x^2}$, já que os valores de x podem ser considerados positivos ($x\to+\infty$).

Temos,

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{2x+5}{\sqrt{2x^2-5}}=\lim_{x\to+\infty}\frac{2+5/x}{\sqrt{2x^2-5}/\sqrt{x^2}}$$

$$= \frac{\lim\limits_{x\to+\infty} (2 + 5/x)}{\lim\limits_{x\to+\infty} \sqrt{\dfrac{2x^2 - 5}{x^2}}}$$

$$= \frac{\lim\limits_{x\to+\infty} 2 + 5 \lim\limits_{x\to+\infty} 1/x}{\lim\limits_{x\to+\infty} \sqrt{2 - 5/x^2}}$$

$$= \frac{2 + 5 \cdot 0}{\sqrt{\lim\limits_{x\to+\infty} (2 - 5/x^2)}}$$

$$= \frac{2}{\sqrt{2 - 5 \cdot 0}}$$

$$= \frac{2}{\sqrt{2}} = \sqrt{2}.$$

(iv) Determinar $\lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{2x + 5}{\sqrt{2x^2 - 5}}$.

Como exemplo (iii), dividimos numerador e denominador por x. Como neste caso $x \to -\infty$, os valores de x podem ser considerados negativos. Então, para o denominador, tomamos $x = -\sqrt{x^2}$. Temos,

$$\lim_{x\to-\infty} \frac{2x + 5}{\sqrt{2x^2 - 5}} = \lim_{x\to-\infty} \frac{2 + 5/x}{\sqrt{2x^2 - 5}/(-\sqrt{x^2})}$$

$$= \lim_{x\to-\infty} \frac{2 + 5/x}{-\sqrt{\dfrac{2x^2 - 5}{x^2}}}$$

$$= \frac{\lim\limits_{x\to-\infty} (2 + 5/x)}{\sqrt{\lim\limits_{x\to-\infty} (2 - 5/x^2)}}$$

$$= \frac{2 + 5{,}0}{\sqrt{2 - 5 \cdot 0}}$$

$$= \frac{2}{-\sqrt{2}}$$

$$= -\sqrt{2}.$$

3.12 Limites Infinitos

No Exemplo 4 da Seção 3.1, analisamos o comportamento da função $f(x) = 1/(x + 1)^2$ quando x está próximo de -1. Intuitivamente, olhando a Tabela 3.4, vemos que quando x se aproxima cada vez mais de -1, $f(x)$ cresce ilimitadamente. Em outras palavras, podemos tornar $f(x)$ tão grande quanto desejarmos, tomando para x valores bastante próximos de -1.

Temos as seguintes definições.

3.12.1 Definição Seja $f(x)$ uma função definida em um intervalo aberto contendo a, exceto, possivelmente, em $x = a$. Dizemos que

$$\lim_{x \to a} f(x) = +\infty,$$

se para qualquer $A > 0$, existe um $\delta > 0$ tal que $f(x) > A$ sempre que $0 < |x - a| < \delta$.

De modo semelhante, observando a Figura 3.5, do Exemplo 5 da Seção 3.1, podemos ver o que ocorre com uma função $f(x)$ cujos valores decrescem ilimitadamente nas proximidades de um ponto a.

3.12.2 Definição Seja $f(x)$ definida em um intervalo aberto contendo a, exceto, possivelmente, em $x = a$. Dizemos que

$$\lim_{x \to a} f(x) = -\infty,$$

se para qualquer $B < 0$, existe um $\delta > 0$, tal que $f(x) < B$ sempre que $0 < |x - a| < \delta$.

Além dos limites infinitos definidos em 3.12.1 e 3.12.2, podemos considerar ainda os limites laterais infinitos e os limites infinitos no infinito. Existem definições formais para cada um dos seguintes limites:

$$\lim_{x \to a^+} f(x) = +\infty, \ \lim_{x \to a^-} f(x) = +\infty, \ \lim_{x \to a^+} f(x) = -\infty,$$

$$\lim_{x \to a^-} f(x) = -\infty, \ \lim_{x \to +\infty} f(x) = +\infty, \ \lim_{x \to +\infty} f(x) = -\infty,$$

$$\lim_{x \to -\infty} f(x) = +\infty \text{ e } \lim_{x \to -\infty} f(x) = -\infty.$$

Por exemplo, dizemos que $\lim_{x \to a^+} f(x) = +\infty$ se para qualquer $A > 0$ existe um $\delta > 0$ tal que $f(x) > A$ sempre que $0 < x < a + \delta$.

A seguir apresentamos um teorema muito usado no cálculo de limites infinitos.

3.12.3 Teorema Se n é um número inteiro positivo qualquer, então:

(i) $\displaystyle \lim_{x \to 0^+} \frac{1}{x^n} = +\infty.$

(ii) $\displaystyle \lim_{x \to 0^-} \frac{1}{x^n} = \begin{cases} +\infty, & \text{se } n \text{ é par} \\ -\infty, & \text{se } n \text{ é ímpar.} \end{cases}$

Prova Vamos provar o item (i). Devemos mostrar que para qualquer $A > 0$, existe um $\delta > 0$, tal que

$$\frac{1}{x^n} > A \text{ sempre que } 0 < x < \delta.$$

Trabalhando com a desigualdade que envolve A obtemos uma pista para a escolha de δ. Como $x > 0$, as desigualdades abaixo são equivalentes:

$$\frac{1}{x^n} > A$$

$$x^n < \frac{1}{A}$$

$$x < \sqrt[n]{1/A}.$$

Assim, escolhendo $\delta = \sqrt[n]{1/A}$, temos $1/x^n > A$ sempre que $0 < x < \delta$.

3.12.4 Propriedades dos Limites Infinitos

De certo modo, a proposição 3.5.2 permanece válida para limites infinitos, embora devamos tomar muito cuidado quando combinamos funções envolvendo esses limites. A Tabela 3.8 nos dá um *resumo* dos fatos principais válidos para os limites infinitos, onde podemos ter $x \to a$, $x \to a^+$, $x \to a^-$, $x \to +\infty$ ou $x \to -\infty$. As demonstrações não são difíceis. Provaremos o item 01 como exemplo.

Na Tabela 3.8, 0^+ indica que o limite é zero e a função se aproxima de zero por valores positivos e 0^- indica que o limite é zero e a função se aproxima de zero por valores negativos.

Tabela 3.8

	$\lim f(x)$	$\lim g(x)$	$h(x) =$	$\lim h(x)$	simbolicamente
01	$\pm\infty$	$\pm\infty$	$f(x) + g(x)$	$\pm\infty$	$\pm\infty \pm\infty = \pm\infty$
02	$+\infty$	$+\infty$	$f(x) - g(x)$	?	$(+\infty) - (+\infty)$ é indeterminação
03	$+\infty$	k	$f(x) + g(x)$	$+\infty$	$+\infty + k = +\infty$
04	$-\infty$	k	$f(x) + g(x)$	$-\infty$	$-\infty + k = -\infty$
05	$+\infty$	$+\infty$	$f(x) \cdot g(x)$	$+\infty$	$(+\infty) \cdot (+\infty) = +\infty$
06	$+\infty$	$-\infty$	$f(x) \cdot g(x)$	$-\infty$	$(+\infty) \cdot (-\infty) = -\infty$
07	$+\infty$	$k > 0$	$f(x) \cdot g(x)$	$+\infty$	$+\infty \cdot k = +\infty, k > 0$
08	$+\infty$	$k < 0$	$f(x) \cdot g(x)$	$-\infty$	$+\infty \cdot k = -\infty, k < 0$
09	$\pm\infty$	0	$f(x) \cdot g(x)$	?	$\pm\infty \cdot 0$ é indeterminação
10	k	$\pm\infty$	$f(x)/g(x)$	0	$k/\pm\infty = 0$
11	$\pm\infty$	$\pm\infty$	$f(x)/g(x)$	?	$\pm\infty/\pm\infty$ é indeterminação
12	$k > 0$	0^+	$f(x)/g(x)$	$+\infty$	$k/0^+ = +\infty, k > 0$
13	$+\infty$	0^+	$f(x)/g(x)$	$+\infty$	$+\infty/0^+ = +\infty$
14	$k > 0$	0^-	$f(x)/g(x)$	$-\infty$	$k/0^- = -\infty, k > 0$
15	$+\infty$	0^-	$f(x)/g(x)$	$-\infty$	$+\infty/0^- = -\infty$
16	0	0	$f(x)/g(x)$	?	$0/0$ é indeterminação

Prova do item 01 Sejam f e g tais que $\lim_{x\to a} f(x) = +\infty$, $\lim_{x\to a} g(x) = +\infty$ e $h(x) = f(x) + g(x)$.

Vamos provar que $\lim_{x\to a} h(x) = +\infty$.

Devemos mostrar que dado $A > 0$ existe um $\delta > 0$ tal que $h(x) > A$ sempre que $0 < |x - a| < \delta$.

Seja $A > 0$ qualquer. Como $\lim_{x\to a} f(x) = +\infty$, $\exists\, \delta_1 > 0$ tal que $f(x) > A/2$ sempre que $0 < |x - a| < \delta_1$. Como $\lim_{x\to a} g(x) = +\infty$, existe $\delta_2 > 0$ tal que $g(x) > A/2$ sempre que $0 < |x - a| < \delta_2$.

Seja $\delta = \min\{\delta_1, \delta_2\}$. Temos, então

$h(x) = f(x) + g(x) > A/2 + A/2 = A$ sempre que $0 < |x - a| < \delta$ e desta forma $\lim_{x\to a} h(x) = +\infty$.

3.12.5 Exemplos

(i) Determinar $\lim\limits_{x \to 0} (x^3 + \sqrt{x} + 1/x^2)$.

Temos,

$$\lim_{x \to 0} (x^3 + \sqrt{x} + 1/x^2) = \lim_{x \to 0} x^3 + \lim_{x \to 0} \sqrt{x} + \lim_{x \to 0} 1/x^2$$

$$= 0 + 0 + \infty$$

$$= +\infty.$$

(ii) Determinar $\lim\limits_{x \to +\infty} (3x^5 - 4x^3 + 1)$.

Neste caso, temos uma indeterminação do tipo $\infty - \infty$. Para determinar o limite usamos um artifício de cálculo. Escrevemos,

$$\lim_{x \to +\infty} (3x^5 - 4x^3 + 1) = \lim_{x \to +\infty} x^5\left(3 - \frac{4}{x^2} + \frac{1}{x^5}\right)$$

$$= +\infty(3 - 0 + 0)$$

$$= +\infty.$$

(iii) Determinar $\lim\limits_{x \to 0^+} \dfrac{|x|}{x^2}$, $\lim\limits_{x \to 0^-} \dfrac{|x|}{x^2}$ e $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{|x|}{x^2}$.

Para $x > 0$, temos $|x| = x$. Assim,

$$\lim_{x \to 0^+} \frac{|x|}{x^2} = \lim_{x \to 0^+} \frac{x}{x^2} = \lim_{x \to 0^+} \frac{1}{x} = +\infty.$$

Para $x < 0$, temos $|x| = -x$. Portanto,

$$\lim_{x \to 0^-} \frac{|x|}{x^2} = \lim_{x \to 0^-} \frac{-x}{x^2} = \lim_{x \to 0^-} \frac{-1}{x} = +\infty.$$

Como $\lim\limits_{x \to 0^+} \dfrac{|x|}{x^2} = \lim\limits_{x \to 0^-} \dfrac{|x|}{x^2} = +\infty$, concluímos que $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{|x|}{x^2} = +\infty$.

(iv) Determinar $\lim\limits_{x \to -1} \dfrac{5x + 2}{|x + 1|}$.

Quando $x \to -1$, $|x + 1| \to 0^+$. Assim,

$$\lim_{x \to -1} \frac{5x + 2}{|x + 1|} = \frac{\lim\limits_{x \to -1} (5x + 2)}{\lim\limits_{x \to -1} |x + 1|} = \frac{-3}{0^+} = -\infty.$$

(v) Determinar $\lim\limits_{x\to 2^+} \dfrac{x^2+3x+1}{x^2+x-6}$, $\lim\limits_{x\to 2^-} \dfrac{x^2+3x+1}{x^2+x-6}$ e $\lim\limits_{x\to 2} \dfrac{x^2+3x+1}{x^2+x-6}$.

Temos,

$$\begin{aligned}\lim_{x\to 2^+} \frac{x^2+3x+1}{x^2+x-6} &= \lim_{x\to 2^+} \frac{x^2+3x+1}{(x-2)(x+3)}\\ &= \frac{\lim\limits_{x\to 2^+}(x^2+3x+1)}{\lim\limits_{x\to 2^+}[(x-2)(x+3)]}\\ &= \frac{11}{0^+}\\ &= +\infty.\end{aligned}$$

Ainda,

$$\begin{aligned}\lim_{x\to 2^-} \frac{x^2+3x+1}{x^2+x-6} &= \frac{\lim\limits_{x\to 2^-}(x^2+3x+1)}{\lim\limits_{x\to 2^-}[(x-2)(x+3)]}\\ &= \frac{11}{0^-}\\ &= -\infty.\end{aligned}$$

Como

$\lim\limits_{x\to 2^+} \dfrac{x^2+3x+1}{x^2+x-6} \neq \lim\limits_{x\to 2^-} \dfrac{x^2+3x+1}{x^2+x-6}$ não existe o $\lim\limits_{x\to 2} \dfrac{x^2+3x+1}{x^2+x-6}$.

Porém, muitas vezes, calculando os limites de uma maneira menos formal, escrevemos que

$$\lim_{x\to 2} \frac{x^2+3x+1}{x^2+x-6} = \infty,$$

sem nos preocuparmos com o sinal.

(vi) Determinar $\lim\limits_{x\to +\infty} \dfrac{x^2+3}{x+2}$.

Dividindo o numerador e o denominador por x^2, temos

$$\begin{aligned}\lim_{x\to +\infty} \frac{x^2+3}{x+2} &= \lim_{x\to +\infty} \frac{\left(1+\frac{3}{x^2}\right)}{\left(\frac{1}{x}+\frac{2}{x^2}\right)}\\ &= \frac{\lim\limits_{x\to +\infty}\left(1+\frac{3}{x^2}\right)}{\lim\limits_{x\to +\infty}\left(\frac{1}{x}+\frac{2}{x^2}\right)}\end{aligned}$$

$$= \frac{1}{0^+}$$

$$= +\infty.$$

(vii) Determinar $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{5 - x^3}{8x + 2}$.

Dividindo o numerador e o denominador por x^3, temos

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{5 - x^3}{8x + 2} = \lim_{x \to +\infty} \frac{\dfrac{5}{x^3} - 1}{\dfrac{8}{x^2} + \dfrac{2}{x^3}}$$

$$= \frac{\lim\limits_{x \to +\infty} (5/x^3 - 1)}{\lim\limits_{x \to +\infty} (8/x^2 + 2/x^3)}$$

$$= \frac{-1}{0^+}$$

$$= -\infty.$$

(viii) Determinar $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{2x^4 + 3x^2 + 2x + 1}{4 - x^4}$.

Dividindo o numerador e o denominador por x^4, temos

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{2x^4 + 3x^2 + 2x + 1}{4 - x^4} = \lim_{x \to +\infty} \frac{2 + \dfrac{3}{x^2} + \dfrac{2}{x^3} + \dfrac{1}{x^4}}{\dfrac{4}{x^4} - 1}$$

$$= \frac{\lim\limits_{x \to +\infty} \left(2 + \dfrac{3}{x^2} + \dfrac{2}{x^3} + \dfrac{1}{x^4}\right)}{\lim\limits_{x \to +\infty} \left(\dfrac{4}{x^4} - 1\right)}$$

$$= \frac{2}{-1}$$

$$= -2.$$

(ix) Determinar $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{x^2 + 3x - 1}{x^3 - 2}$.

Dividindo o numerador e o denominador por x^3, temos

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{x^2+3x-1}{x^3-2} = \lim_{x\to+\infty} \frac{\dfrac{1}{x}+\dfrac{3}{x^2}-\dfrac{1}{x^3}}{1-\dfrac{2}{x^3}}$$

$$= \frac{\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\dfrac{1}{x}+\dfrac{3}{x^2}-\dfrac{1}{x^3}\right)}{\lim\limits_{x\to+\infty}\left(1-\dfrac{2}{x^3}\right)}$$

$$= \frac{0}{1}$$

$$= 0.$$

(x) Mostrar que se $P(x) = a_0x^n + a_1x^{n-1} + \dots + a_n$ e $Q(x) = b_0x^m + b_1x^{m-1} + \dots + b_m$, então

$$\lim_{x\to\pm\infty} \frac{P(x)}{Q(x)} = \lim_{x\to\pm\infty} \frac{a_0x^n}{b_0x^m}.$$

Temos,

$$\lim_{x\to\pm\infty} \frac{P(x)}{Q(x)} = \lim_{x\to\pm\infty} \frac{a_0x^n + a_1x^{n-1} + \dots + a_n}{b_0x^m + b_1x^{m-1} + \dots + b_m}.$$

$$= \lim_{x\to\pm\infty} \frac{x^n\left(a_0+\dfrac{a_1}{x}+\dots+\dfrac{a_{n-1}}{x^{n-1}}+\dfrac{a_n}{x^n}\right)}{x^m\left(b_0+\dfrac{b_1}{x}+\dots+\dfrac{b_{m-1}}{x^{m-1}}+\dfrac{b_m}{x^m}\right)}$$

$$= \lim_{x\to\pm\infty} \frac{x^n}{x^m} \cdot \lim_{x\to\pm\infty} \frac{\left(a_0+\dfrac{a_1}{x}+\dots+\dfrac{a_{n-1}}{x^{n-1}}+\dfrac{a_n}{x^n}\right)}{\left(b_0+\dfrac{b_1}{x}+\dots+\dfrac{b_{m-1}}{x^{m-1}}+\dfrac{b_m}{x^m}\right)}$$

$$= \lim_{x\to\pm\infty} \frac{x^n}{x^m} \cdot \frac{a_0}{b_0}$$

$$= \lim_{x\to\pm\infty} \frac{a_0x^n}{b_0x^m}.$$

3.13 Exercícios

1. Se $f(x) = \dfrac{3x+|x|}{7x-5|x|}$, calcule:

   (a) $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$. (b) $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)$.

2. Se $f(x) = \dfrac{1}{(x+2)^2}$, calcule:

   (a) $\lim\limits_{x\to-2} f(x)$. (b) $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$.

Nos exercícios 3 a 40 calcule os limites.

3. $\lim\limits_{x \to +\infty} (3x^3 + 4x^2 - 1)$.

4. $\lim\limits_{x \to +\infty} \left(2 - \dfrac{1}{x} + \dfrac{4}{x^2}\right)$.

5. $\lim\limits_{t \to +\infty} \dfrac{t + 1}{t^2 + 1}$.

6. $\lim\limits_{t \to -\infty} \dfrac{t + 1}{t^2 + 1}$.

7. $\lim\limits_{t \to +\infty} \dfrac{t^2 - 2t + 3}{2t^2 + 5t - 3}$.

8. $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{2x^5 - 3x^3 + 2}{-x^2 + 7}$.

9. $\lim\limits_{x \to -\infty} \dfrac{3x^5 - x^2 + 7}{2 - x^2}$.

10. $\lim\limits_{x \to -\infty} \dfrac{-5x^3 + 2}{7x^3 + 3}$.

11. $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{x^2 + 3x + 1}{x}$.

12. $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{x\sqrt{x} + 3x - 10}{x^3}$.

13. $\lim\limits_{t \to +\infty} \dfrac{t^2 - 1}{t - 4}$.

14. $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{x(2x - 7\cos x)}{3x^2 - 5\operatorname{sen} x + 1}$.

15. $\lim\limits_{v \to +\infty} \dfrac{v\sqrt{v} - 1}{3v - 1}$.

16. $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{\sqrt{x^2 + 1}}{x + 1}$.

17. $\lim\limits_{x \to -\infty} \dfrac{\sqrt{x^2 + 1}}{x + 1}$.

18. $\lim\limits_{x \to +\infty} (\sqrt{x^2 + 1} - \sqrt{x^2 - 1})$.

19. $\lim\limits_{x \to +\infty} x(\sqrt{x^2 - 1} - x)$.

20. $\lim\limits_{x \to +\infty} (\sqrt{3x^2 + 2x + 1} - \sqrt{2}x)$.

21. $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{10x^2 - 3x + 4}{3x^2 - 1}$.

22. $\lim\limits_{x \to -\infty} \dfrac{x^3 - 2x + 1}{x^2 - 1}$.

23. $\lim\limits_{x \to -\infty} \dfrac{5x^3 - x^2 + x - 1}{x^4 + x^3 - x + 1}$.

24. $\lim\limits_{s \to +\infty} \dfrac{8 - s}{\sqrt{s^2 + 7}}$.

25. $\lim\limits_{x \to -\infty} \dfrac{\sqrt{2x^2 - 7}}{x + 3}$.

26. $\lim\limits_{x \to +\infty} (\sqrt{16x^4 + 15x^3 - 2x + 1} - 2x)$.

27. $\lim\limits_{s \to +\infty} \sqrt[3]{\dfrac{3s^7 - 4s^5}{2s^7 + 1}}$.

28. $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{\sqrt{2x^2 - 7}}{x + 3}$.

29. $\lim\limits_{y \to +\infty} \dfrac{3 - y}{\sqrt{5 + 4y^2}}$.

30. $\lim\limits_{y \to -\infty} \dfrac{3 - y}{\sqrt{5 + 4y^2}}$.

31. $\lim\limits_{x \to 3^+} \dfrac{x}{x-3}$.

32. $\lim\limits_{x \to 3^-} \dfrac{x}{x-3}$.

33. $\lim\limits_{x \to 2^+} \dfrac{x}{x^2-4}$.

34. $\lim\limits_{x \to 2^-} \dfrac{x}{x^2-4}$.

35. $\lim\limits_{y \to 6^+} \dfrac{y+6}{y^2-36}$.

36. $\lim\limits_{y \to 6^-} \dfrac{y+6}{y^2-36}$.

37. $\lim\limits_{x \to 4^+} \dfrac{3-x}{x^2-2x-8}$.

38. $\lim\limits_{x \to 4^-} \dfrac{3-x}{x^2-2x-8}$.

39. $\lim\limits_{x \to 3^-} \dfrac{1}{|x-3|}$.

40. $\lim\limits_{x \to 3^+} \dfrac{1}{|x-3|}$.

3.14 Assíntotas

Em aplicações práticas, encontramos com muita freqüência gráficos que se aproximam de *uma reta* à medida que x cresce ou decresce (ver figuras 3.14 e 3.15).

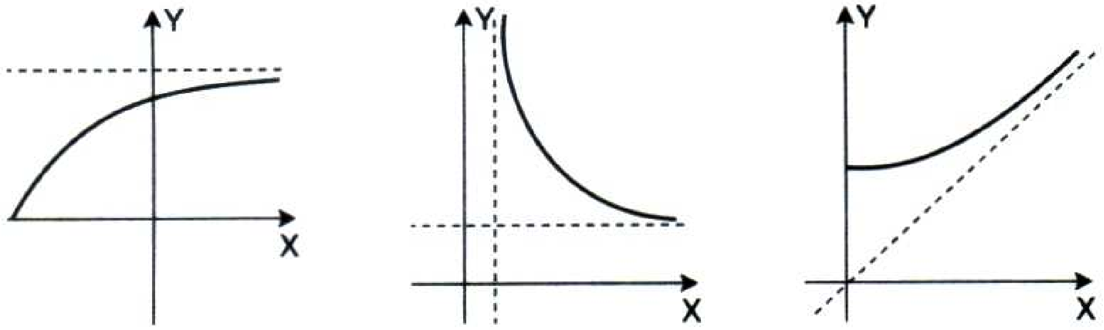


Figura 3.14

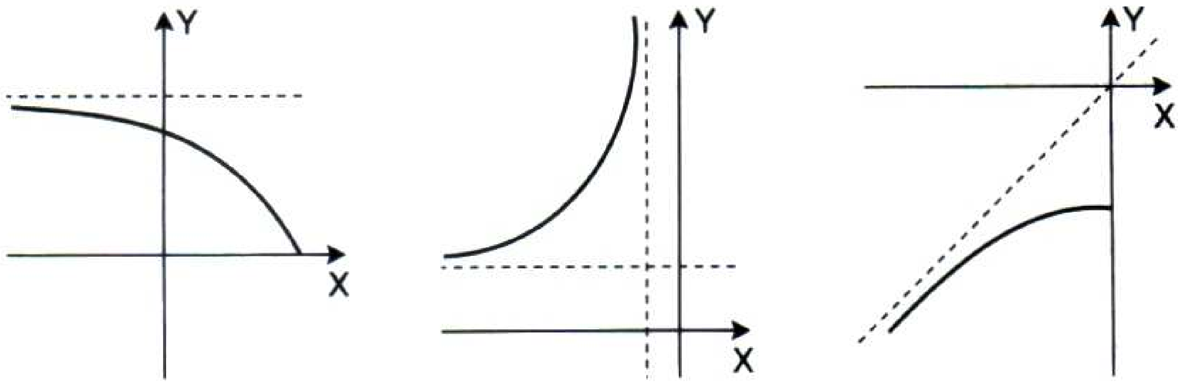


Figura 3.15

Estas retas são chamadas de *assíntotas*.

Particularmente, vamos analisar com um pouco mais de atenção as *assíntotas horizontais* e as *verticais*.

3.14.1 Definição A reta $x = a$ é uma assíntota vertical do gráfico de $y = f(x)$, se pelo menos uma das seguintes afirmações for verdadeira:

(i) $\lim_{x \to a^+} f(x) = +\infty$

(ii) $\lim_{x \to a^-} f(x) = +\infty$

(iii) $\lim_{x \to a^+} f(x) = -\infty$

(iv) $\lim_{x \to a^-} f(x) = -\infty$.

3.14.2 Exemplo A reta $x = 2$ é uma assíntota vertical do gráfico de

$$y = \frac{1}{(x-2)^2}.$$

De fato, $\lim_{x \to 2^+} \frac{1}{(x-2)^2} = \frac{1}{0^+} = +\infty$, ou também,

$$\lim_{x \to 2^-} \frac{1}{(x-2)^2} = \frac{1}{0^+} = +\infty.$$

A Figura 3.16 ilustra este exemplo.

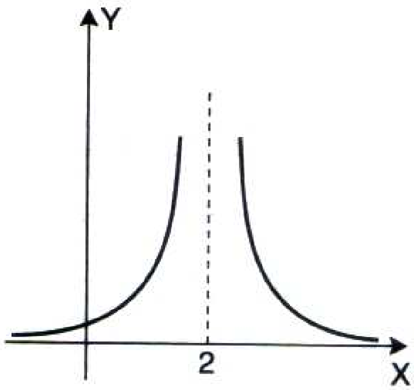


Figura 3.16

3.14.3 Definição A reta $y = b$ é uma assíntota horizontal do gráfico de $y = f(x)$, se pelo menos uma das seguintes afirmações for verdadeira:

(i) $\lim_{x \to +\infty} f(x) = b$

(ii) $\lim_{x \to -\infty} f(x) = b$.

3.14.4 Exemplo As retas $y = 1$ e $y = -1$ são assíntotas horizontais do gráfico de

$$y = \frac{x}{\sqrt{x^2+2}},$$

porque $\lim_{x \to +\infty} = \frac{x}{\sqrt{x^2+2}} = 1$ e $\lim_{x \to -\infty} = \frac{x}{\sqrt{x^2+2}} = -1$ (ver Figura 3.17).

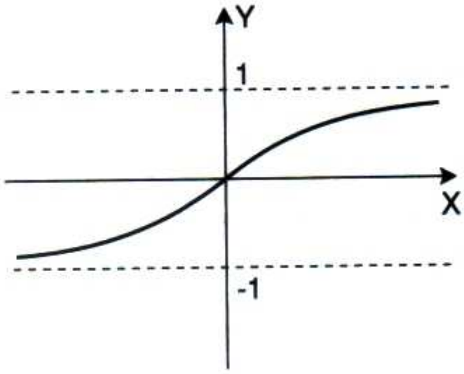


Figura 3.17

3.14.5 Definição A reta $y = ax + b$ é uma assíntota inclinada do gráfico de $y = f(x)$, se pelo menos uma das seguintes afirmações for verdadeira:

(i) $\lim\limits_{x \to +\infty} [f(x) - (ax + b)] = 0$

(ii) $\lim\limits_{x \to -\infty} [f(x) - (ax + b)] = 0.$

3.14.6 Exemplo A reta $y = 2x$ é assíntota do gráfico de $y = \dfrac{2x^3}{x^2 + 4}$.

De fato, $\lim\limits_{x \to \pm\infty} \left[\dfrac{2x^3}{x^2 + 4} - 2x\right] = \lim\limits_{x \to \pm\infty} \left[2x - \dfrac{8x}{x^2 + 4} - 2x\right] = \lim\limits_{x \to \pm\infty} \left[\dfrac{8x}{x^2 + 4}\right] = 0$

A Figura 3.18 ilustra este exemplo.

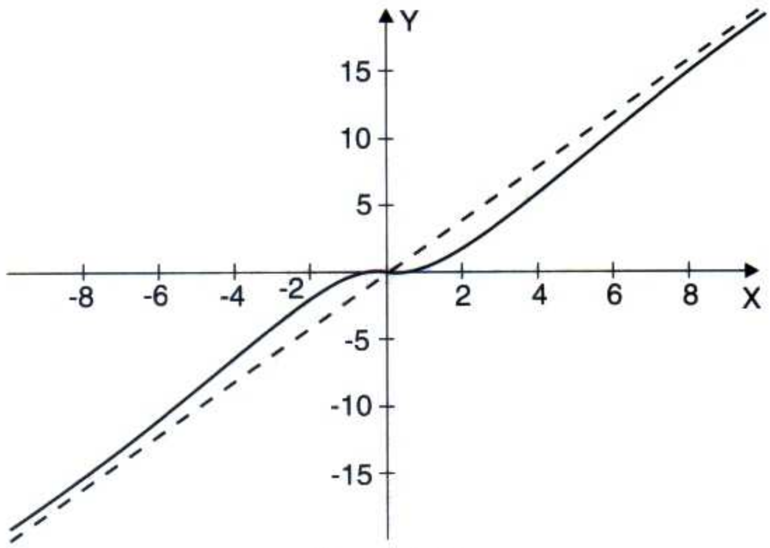


Figura 3.18

3.14.7 Exemplos

Em muitos gráficos de funções é possível observar mais que um tipo de assíntota. Veja o caso das funções:

(i) $f(x) = \dfrac{x}{x^2 - 9}$

As retas $x = 3$ e $x = -3$ são assíntotas verticais do gráfico da função dada, pois

$$\lim_{x \to 3^+} \frac{x}{x^2 - 9} = +\infty; \ \lim_{x \to 3^-} \frac{x}{x^2 - 9} = -\infty \text{ e}$$

$$\lim_{x \to -3^+} \frac{x}{x^2 - 9} = +\infty; \ \lim_{x \to -3^-} \frac{x}{x^2 - 9} = -\infty.$$

A reta $y = 0$ (eixo dos x) é uma assíntota horizontal, pois:

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{x}{x^2 - 9} = 0; \ \lim_{x \to -\infty} \frac{x}{x^2 - 9} = 0.$$

A Figura 3.19 ilustra esse exemplo

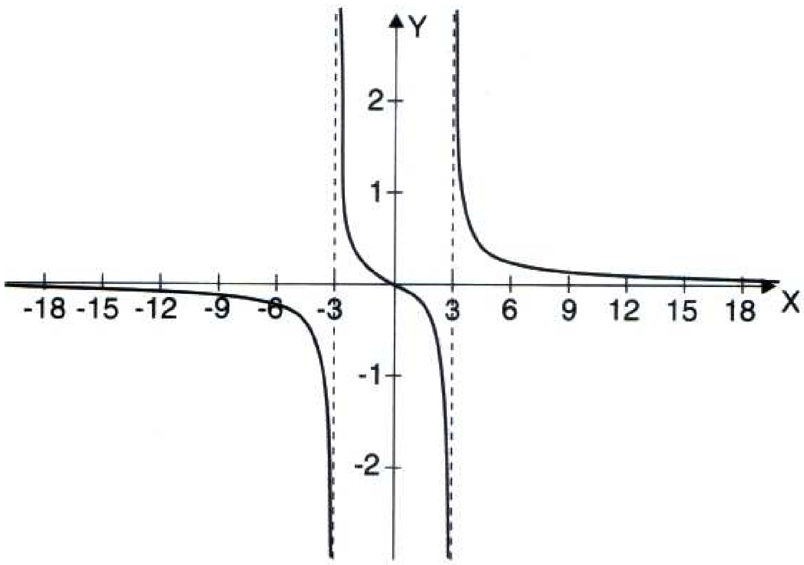


Figura 3.19

(ii) $y = \dfrac{\sqrt{64x^2 + 1}}{2x - 4}$

Vamos observar o gráfico dessa função na Figura 3.20.

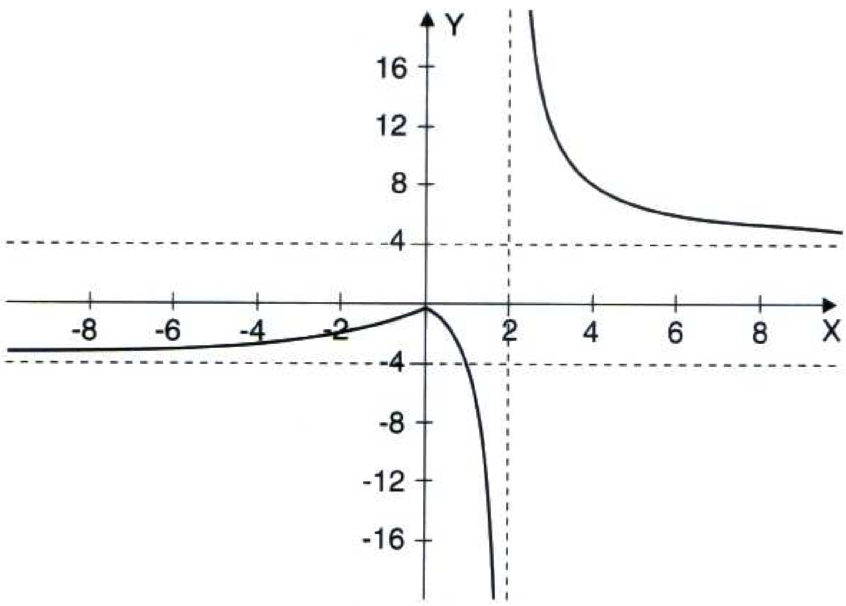


Figura 3.20

Estamos diante de assíntotas horizontais e verticais. Além disso podemos observar que o gráfico corta a assíntota horizontal $y = -4$, rompendo de certa forma com a idéia intuitiva de que o gráfico não pode cortar a assíntota.

As assíntotas mostradas na Figura 3.20 podem ser encontradas algebricamente. De fato, temos:

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{\sqrt{64x^2+1}}{2x-4} = 4;\ \lim_{x\to-\infty} \frac{\sqrt{64x^2+1}}{2x-4} = -4 \text{ e } \lim_{x\to 2^+} \frac{\sqrt{64x^2+1}}{2x-4} = +\infty;\ \lim_{x\to 2^-} \frac{\sqrt{64x^2+1}}{2x-4} = -\infty.$$

3.15 Limites Fundamentais

Daremos a seguir três proposições que caracterizam os chamados limites fundamentais. Trataremos de casos particulares de indeterminações do tipo 0/0, 1^∞ e ∞^0.

3.15.1 Proposição $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\text{sen } x}{x}$ é igual a 1.

Prova Consideremos a circunferência de raio 1 (Figura 3.21).

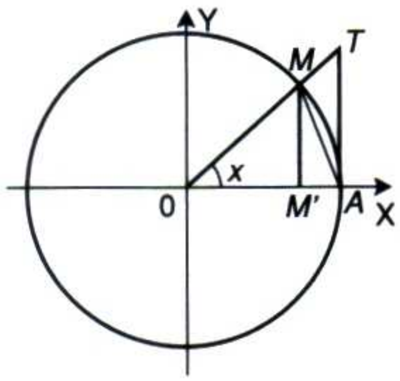


Figura 3.21

Seja x a medida em radianos do arco $\widehat{AOM}$. Limitamos a variação de x ao intervalo $(0, \pi/2)$.
Observando a Figura 3.10, escrevemos as desigualdades equivalentes:

área $\Delta MOA <$ área setor $MOA <$ área ΔAOT

$$\frac{\overline{OA}\cdot\overline{MM'}}{2} < \frac{\overline{OA}\cdot\widehat{AM}}{2} < \frac{\overline{OA}\cdot\overline{AT}}{2}$$

$$\overline{MM'} < \widehat{AM} < \overline{AT}$$

$$\text{sen } x < x < \text{tg } x.$$

Dividindo a última desigualdade por sen x, já que sen $x > 0$ para $x \in (0, \pi/2)$, temos

$$1 < \frac{x}{\text{sen } x} < \frac{1}{\cos x}$$

$$1 > \frac{\operatorname{sen} x}{x} > \cos x.$$

Por outro lado, sen x/x e cos x são funções pares. Então,

$$\frac{\operatorname{sen}(-x)}{(-x)} = \frac{\operatorname{sen} x}{x} \text{ e } \cos(-x) = \cos x.$$

Portanto, a desigualdade (1) vale para qualquer x, $x \neq 0$.

Como $\lim\limits_{x\to 0} \cos x = 1$ e $\lim\limits_{x\to 0} 1 = 1$, pela proposição 3.5.3, segue que

$$\lim_{x\to 0} \frac{\operatorname{sen} x}{x} = 1.$$

3.15.2 Exemplos

(i) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\operatorname{sen} 2x}{x}$.

Por 3.14.1, podemos calcular limites do tipo

$$\lim_{u\to 0} \frac{\operatorname{sen} u}{u},$$

onde u é uma função em x.

Neste exemplo, $u = 2x$ e $u \to 0$ quando $x \to 0$. Portanto,

$$\lim_{x\to 0} \frac{\operatorname{sen} 2x}{x} = \lim_{u\to 0} \frac{\operatorname{sen} u}{u/2} = 2 \lim_{u\to 0} \frac{\operatorname{sen} u}{u} = 2 \cdot 1 = 2.$$

(ii) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\operatorname{sen} 3x}{\operatorname{sen} 4x}$.

Neste caso, faremos inicialmente alguns artifícios de cálculo como segue:

$$\begin{aligned}
\lim_{x\to 0} \frac{\operatorname{sen} 3x}{\operatorname{sen} 4x} &= \lim_{x\to 0} \frac{\dfrac{\operatorname{sen} 3x}{3x} \cdot 3x}{\dfrac{\operatorname{sen} 4x}{4x} \cdot 4x} \\
&= \frac{3}{4} \frac{\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\operatorname{sen} 3x}{3x}}{\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\operatorname{sen} 4x}{4x}} \\
&= \frac{3}{4} \cdot \frac{1}{1} \\
&= \frac{3}{4}.
\end{aligned}$$

(iii) $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\operatorname{tg} x}{x}$.

Temos neste caso,

$$\lim_{x \to 0} \frac{\operatorname{tg} x}{x} = \lim_{x \to 0} \frac{\dfrac{\operatorname{sen} x}{\cos x}}{x}$$

$$= \lim_{x \to 0} \frac{\operatorname{sen} x}{x} \cdot \frac{1}{\cos x}$$

$$= \lim_{x \to 0} \frac{\operatorname{sen} x}{x} \cdot \lim_{x \to 0} \frac{1}{\cos x}$$

$$= 1 \cdot 1$$

$$= 1.$$

3.15.3 Proposição $\lim\limits_{x \to \pm\infty} (1 + 1/x)^x = e$, onde e é o número irracional neperiano cujo valor aproximado é 2,718281828459... .

Prova A prova desta proposição envolve noções de séries, por este motivo será aqui omitida.

3.15.4 Exemplos

(i) Provar que $\lim\limits_{x \to 0} (1 + x)^{1/x} = e$.

Em primeiro lugar provaremos que $\lim\limits_{x \to 0^+} (1 + x)^{1/x} = e$.

De fato fazendo $x = 1/t$ temos que $t \to +\infty$ quando $x \to 0^+$. Logo,

$$\lim_{x \to 0^+} (1 + x)^{1/x} = \lim_{t \to +\infty} (1 + 1/t)^t = e.$$

Da mesma forma, prova-se que $\lim\limits_{x \to 0^-} (1 + x)^{1/x} = e$.

Portanto, $\lim\limits_{x \to 0} (1 + x)^{1/x} = e$.

(ii) Determinar $\lim\limits_{t \to 0} \ln(1 + t)^{1/t}$.

Usando a proposição 3.5.2 (g), temos

$$\lim_{t \to 0} \ln(1 + t)^{1/t} = \ln \left[\lim_{t \to 0} (1 + t)^{1/t}\right]$$

$$= \ln e$$

$$= 1.$$

3.15.5 Proposição $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{a^x - 1}{x} = \ln a \; (a > 0, a \neq 1).$

Prova Fazendo $t = a^x - 1$, temos

$$a^x = t + 1. \tag{1}$$

Aplicando os logaritmos neperianos na igualdade (1), vem

$$\ln a^x = \ln (t + 1)$$

$$x \ln a = \ln (t + 1)$$

$$x = \frac{\ln (t + 1)}{\ln a}.$$

Quando $x \to 0$, $x \neq 0$ temos que $t \to 0$, $t \neq 0$ e então podemos escrever

$$\begin{aligned}
\lim_{x \to 0} \frac{a^x - 1}{x} &= \lim_{t \to 0} \frac{t}{\dfrac{\ln(t + 1)}{\ln a}} \\
&= \ln a \cdot \lim_{t \to 0} \frac{1}{\dfrac{\ln(t + 1)}{t}} \\
&= \ln a \cdot \frac{\lim\limits_{t \to 0} 1}{\lim\limits_{t \to 0} \dfrac{\ln (t + 1)}{t}}.
\end{aligned}$$

Considerando o Exemplo 3.14.4(ii), concluímos que

$$\lim_{x \to 0} \frac{a^x - 1}{x} = \ln a.$$

3.15.6 Exemplos

(i) $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{a^x - b^x}{x}$.

Temos,

$$\begin{aligned}
\lim_{x \to 0} \frac{a^x - b^x}{x} &= \lim_{x \to 0} \frac{b^x \left[\dfrac{a^x}{b^x} - 1\right]}{x} \\
&= \lim_{x \to 0} b^x \cdot \lim_{x \to 0} \frac{\left(\dfrac{a}{b}\right)^x - 1}{x}
\end{aligned}$$

$$= 1 \cdot \ln \frac{a}{b}$$

$$= \ln a/b.$$

(ii) $\lim\limits_{x \to 1} \dfrac{e^{x-1} - a^{x-1}}{x^2 - 1}$.

Neste exemplo, utilizamos artifícios de cálculo para aplicarmos a proposição 3.15.5.

$$\lim_{x \to 1} \frac{e^{x-1} - a^{x-1}}{x^2 - 1} = \lim_{x \to 1} \frac{(e^{x-1} - 1) - (a^{x-1} - 1)}{(x+1)(x-1)}$$

$$= \lim_{x \to 1} \frac{1}{x+1} \cdot \left[\lim_{x \to 1} \frac{e^{x-1} - 1}{x - 1} - \lim_{x \to 1} \frac{a^{x-1} - 1}{x - 1} \right]$$

$$= \frac{1}{2}\left[\lim_{x \to 1} \frac{e^{x-1} - 1}{x - 1} - \lim_{x \to 1} \frac{a^{x-1} - 1}{x - 1} \right].$$

Fazemos $t = x - 1$ e consideramos que, quando $x \to 1$, $x \neq 1$, temos $t \to 0$, $t \neq 0$.

Portanto,

$$\lim_{x \to 1} \frac{e^{x-1} - a^{x-1}}{x^2 - 1} = \frac{1}{2}\left[\lim_{t \to 0} \frac{e^t - 1}{t} - \lim_{t \to 0} \frac{a^t - 1}{t} \right]$$

$$= \frac{1}{2}(\ln e - \ln a)$$

$$= \frac{1}{2}(1 - \ln a).$$

3.16 Exercícios

1. Determinar as assíntotas horizontais e verticais do gráfico das seguintes funções:

(a) $f(x) = \dfrac{4}{x - 4}$

(b) $f(x) = \dfrac{-3}{x + 2}$

(c) $f(x) = \dfrac{4}{x^2 - 3x + 2}$

(d) $f(x) = \dfrac{-1}{(x - 3)(x + 4)}$

(e) $f(x) = \dfrac{1}{\sqrt{x + 4}}$

(f) $f(x) = -\dfrac{2}{\sqrt{x - 3}}$

(g) $f(x) = \dfrac{2x^2}{\sqrt{x^2 - 16}}$

(h) $f(x) = \dfrac{x}{\sqrt{x^2 + x - 12}}$

(*i*) $f(x) = e^{1/x}$

(*j*) $f(x) = e^x - 1$

(*k*) $f(x) = \ln x$

(*l*) $f(x) = \text{tg}\, x$

2. Constatar, desenvolvendo exemplos graficamente, que as funções racionais do tipo $f(x) = \dfrac{p(x)}{q(x)}$ com $p(x)$ e $q(x)$ polinômios, tais que a diferença entre o grau do numerador e o grau do denominador é igual 1, possuem assíntotas inclinadas.

3. Analisar graficamente a existência de assíntotas para as seguintes funções:

(*a*) $f(x) = \dfrac{x^2}{e^x}$.

(*b*) $f(x) = \dfrac{\cos^2 x}{x^2}$

(*c*) $f(x) = \dfrac{\text{tg}\, x - x}{x^3}$

(*d*) $f(x) = \text{sen}\left(\dfrac{\pi}{x}\right)$

4. Fazer o gráfico das funções seguintes e determinar os respectivos limites. Para melhor visualização, traçar, também, o gráfico das retas indicadas. A seguir, determinar analiticamente os limites dados e comparar os resultados.

(*a*) $f(x) = \dfrac{\text{sen}\, x}{x}$ e $y = 1$; $\lim\limits_{x \to 0} f(x)$

(*b*) $f(x) = \dfrac{\text{sen}\, 3x}{3x}$ e $y = 1$; $\lim\limits_{x \to 0} f(x)$

(*c*) $f(x) = \dfrac{\text{sen}\, 3x}{x}$ e $y = 3$; $\lim\limits_{x \to 0} f(x)$

(*d*) $f(x) = \dfrac{\text{sen}\, 4x}{x}$ e $y = 4$; $\lim\limits_{x \to 0} f(x)$

(*e*) $f(x) = \dfrac{\text{sen}\, 1/3x}{x}$ e $y = 1/3$; $\lim\limits_{x \to 0} f(x)$

(*f*) $f(x) = \dfrac{\text{sen}^3(x/2)}{x^3}$ e $y = 1/8$; $\lim\limits_{x \to 0} f(x)$

Nos exercícios 5 a 27, calcule os limites aplicando os limites fundamentais.

5. $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\text{sen}\, 9x}{x}$.

6. $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\text{sen}\, 4x}{3x}$.

7. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\text{sen } 10x}{\text{sen } 7x}$.

8. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\text{sen } ax}{\text{sen } bx}, b \neq 0$.

9. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\text{tg } ax}{x}$.

10. $\lim\limits_{x\to -1} \dfrac{\text{tg}^3 \dfrac{x+1}{4}}{(x+1)^3}$.

11. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{1 - \cos x}{x}$.

12. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{1 - \cos x}{x^2}$.

13. $\lim\limits_{x\to 3} (x - 3) \cdot \cos ec\, \pi x$.

14. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{6x - \text{sen } 2x}{2x + 3 \text{ sen } 4x}$.

15. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\cos 2x - \cos 3x}{x^2}$.

16. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{1 - 2\cos x + \cos 2x}{x^2}$.

17. $\lim\limits_{n\to \infty} \left(\dfrac{2n+3}{2n+1}\right)^{n+1}$.

18. $\lim\limits_{x\to \pi/2} (1 + 1/\text{tg } x)^{\text{tg } x}$.

19. $\lim\limits_{x\to 3\pi/2} (1 + \cos x)^{1/\cos x}$.

20. $\lim\limits_{x\to \infty} \left(1 + \dfrac{10}{x}\right)^x$.

21. $\lim\limits_{x\to 2} \dfrac{10^{x-2} - 1}{x - 2}$.

22. $\lim\limits_{x\to -3} \dfrac{4^{\frac{x+3}{5}} - 1}{x + 3}$.

23. $\lim\limits_{x\to 2} \dfrac{5^x - 25}{x - 2}$.

24. $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{3^{\frac{x-1}{4}} - 1}{\text{sen } [5(x-1)]}$.

25. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{e^{-ax} - e^{-bx}}{x}$.

26. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\text{tg } h\, ax}{x}$.

27. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{e^{ax} - e^{bx}}{\text{sen } ax - \text{sen } bx}$.

28. Calcular $\lim\limits_{x\to +\infty} f(x)$ das funções dadas. Em seguida conferir graficamente os resultados encontrados.

(a) $f(x) = \left(1 + \dfrac{1}{x}\right)^{x+5}$

(b) $f(x) = \left(1 + \dfrac{2}{x}\right)^{x}$

(c) $f(x) = \left(\dfrac{x}{1+x}\right)^{x}$

3.17 Continuidade

Quando definimos $\lim_{x \to a} f(x)$ analisamos o comportamento da função $f(x)$ para valores de x próximos de a, mas diferentes de a. Em muitos exemplos vimos que $\lim_{x \to a} f(x)$ pode existir, mesmo que f não seja definida no ponto a. Se f está definida em a e $\lim_{x \to a} f(x)$ existe, pode ocorrer que este limite seja diferente de $f(a)$.

Quando $\lim_{x \to a} f(x) = f(a)$ diremos, de acordo com a definição a seguir, que f é contínua em a.

3.17.1 Definição Dizemos que uma função f é contínua no ponto a se as seguintes condições forem satisfeitas:

(a) f é definida no ponto a;

(b) $\lim_{x \to a} f(x)$ existe;

(c) $\lim_{x \to a} f(x) = f(a)$.

A Figura 3.22 mostra esboços de gráficos de funções que não são contínuas em a.

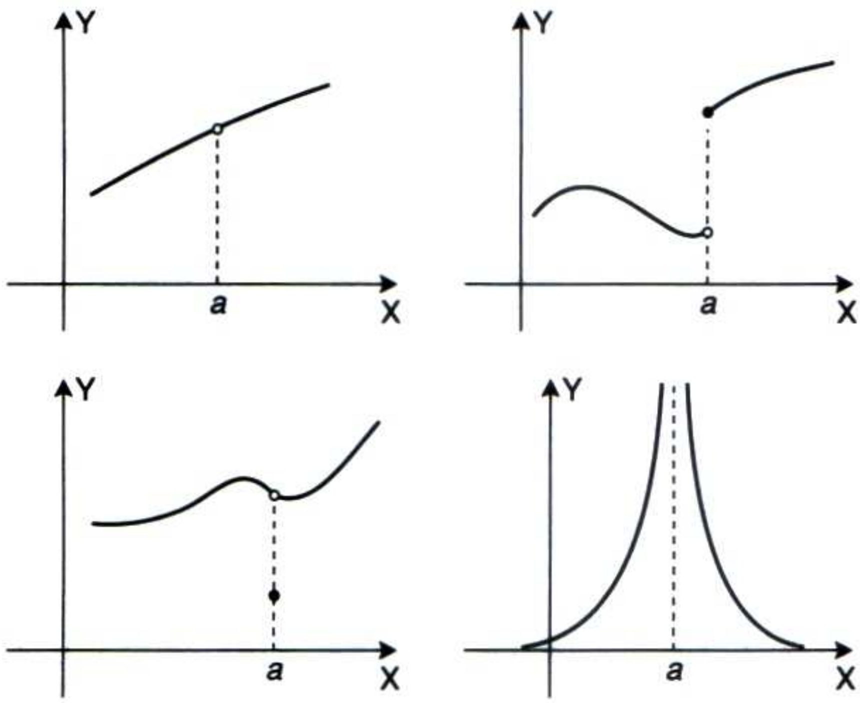


Figura 3.22

3.17.2 Exemplos

(i) Sejam $f(x) = \dfrac{x^2 - 1}{x - 1}$ e

$$g(x) = \begin{cases} \dfrac{x^2 - 1}{x - 1}, & \text{se } x \neq 1 \\ 1 \quad , & \text{se } x = 1. \end{cases}$$

As funções f e g não são contínuas em $a = 1$. A função f não está definida em $a = 1$. Portanto, não satisfaz a condição (a) da definição 3.17.1. Já para a função g, temos $g(1) = 1$, mas

$$\lim_{x \to 1} g(x) = \lim_{x \to 1} \frac{(x-1)(x+1)}{x-1} = \lim_{x \to 1} (x+1) = 2.$$

Logo, a condição (c) não se verifica no ponto $a = 1$.

A Figura 3.23, mostra um esboço do gráfico dessas funções.

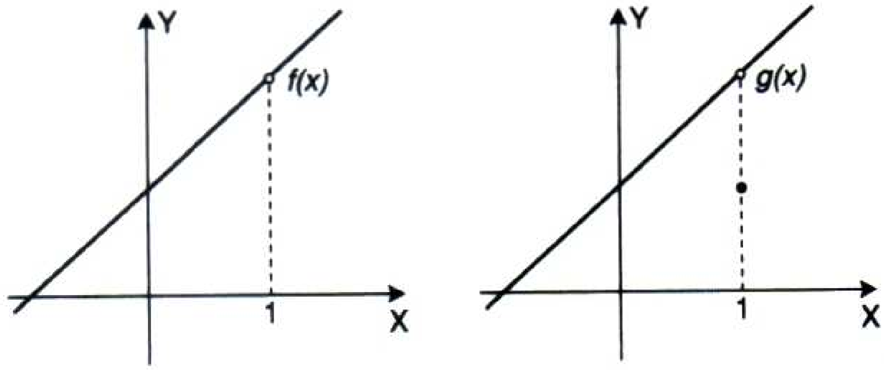


Figura 3.23

(ii) Sejam $f(x) = \dfrac{1}{(x-2)^2}$ e

$$g(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{(x-2)^2}, & \text{se } x \neq 2 \\ 3 & , \text{ se } x = 2. \end{cases}$$

As funções f e g não são contínuas no ponto $a = 2$. A função f não está definida neste ponto e a função g, embora esteja definida em $a = 2$, não cumpre a condição (c) da definição 3.17.1 pois $\lim_{x \to 2} g(x) \neq g(2)$.

A Figura 3.24 mostra os gráficos dessas funções.

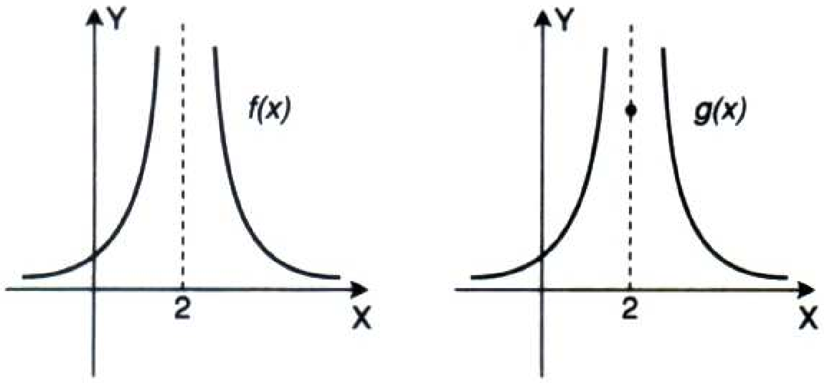


Figura 3.24

(iii) Seja $f(x) = \begin{cases} \dfrac{x}{|x|}, & \text{se } x \neq 0 \\ 0 \ , & \text{se } x = 0. \end{cases}$

f não é contínua no ponto $a = 0$. De fato, se $x > 0$, $f(x) = \dfrac{x}{x} = 1$. Assim, $\lim_{x \to 0^+} f(x) = 1$. Se $x < 0$, $f(x) = \dfrac{x}{-x} = -1$.

Logo $\lim_{x \to 0^-} f(x) = -1$. Portanto, não existe $\lim_{x \to 0} f(x)$ e dessa forma f não é contínua em $a = 0$.

Na Figura 3.25 podemos ver um esboço do gráfico dessa função.

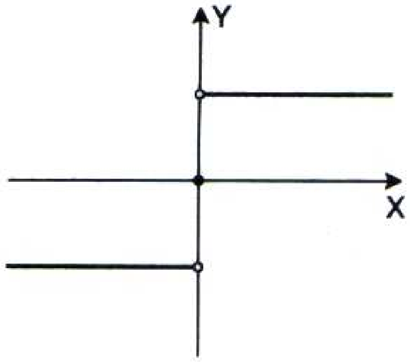


Figura 3.25

(iv) Seja $h(x) = \begin{cases} x + 3, & \text{se } x \geq -1 \\ -x + 1, & \text{se } x < -1. \end{cases}$

h é contínua em todos os pontos.

De fato, seja $a \in \mathbb{R}$. Se $a > -1$, temos

$$\lim_{x \to a} h(x) = \lim_{x \to a} (x + 3) = a + 3 = h(a).$$

Seja $a < -1$, temos

$$\lim_{x \to a} h(x) = \lim_{x \to a} (-x + 1) = -a + 1 = h(a).$$

Se $a = -1$, temos

$$\lim_{x \to -1^+} h(x) = \lim_{x \to -1^+} (x + 3) = -1 + 3 = h(-1) \text{ e}$$

$$\lim_{x \to -1^-} h(x) = \lim_{x \to -1^-} (-x + 1) = -(-1) + 1 = 2.$$

Logo $\lim_{x \to -1^-} h(x) = 2 = h(-1)$.

Podemos ver um esboço do gráfico de $h(x)$, na Figura 3.26.

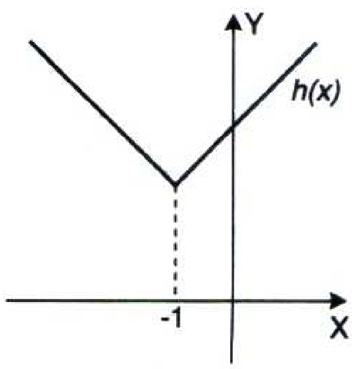


Figura 3.26

(v) Seja $g(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{x + 2}, & \text{se } x \neq -2 \\ 3, & \text{se } x = -2. \end{cases}$

Então, a função g não é contínua em $x = -2$, pois

$$\lim_{x \to -2^-} g(x) = \lim_{x \to -2^-} \frac{1}{x+2} = -\infty \text{ e } \lim_{x \to -2^+} g(x) = \lim_{x \to -2^+} \frac{1}{x+2} = +\infty.$$

Neste caso, embora a função g seja definida em $a = -2$, $\lim_{x \to -2} g(x)$ não existe.

Podemos ver um esboço do gráfico de $g(x)$ na Figura 3.27.

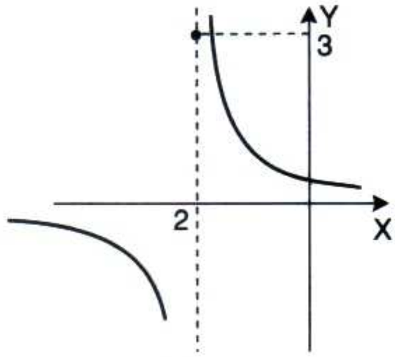


Figura 3.27

Propriedades das Funções Contínuas

3.17.3 Proposição Se as funções f e g são contínuas em um ponto a, então

(i) $f + g$ é contínua em a;

(ii) $f - g$ é contínua em a;

(iii) $f \cdot g$ é contínua em a;

(iv) f/g é contínua em a, desde que $g(a) \neq 0$.

Prova Vamos provar o item (iv). Os demais ficam como exercício.

Suponhamos que $g(a) \neq 0$. Então f/g é definida no ponto a.
Como f e g são contínuas no ponto a, temos

$$\lim_{x \to a} f(x) = f(a) \text{ e } \lim_{x \to a} g(x) = g(a).$$

Assim, pela proposição 3.5.2, temos

$$\lim_{x \to a} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{\lim_{x \to a} f(x)}{\lim_{x \to a} g(x)} = \frac{f(a)}{g(a)} = (f/g)(a).$$

Logo, f/g é contínua no ponto a.

3.17.4 Proposição

(i) Uma função polinomial é contínua para todo número real.

(ii) Uma função racional é contínua em todos os pontos de seu domínio.

(iii) As funções $f(x) = \text{sen } x$ e $f(x) = \cos x$ são contínuas para todo número real x.

(iv) A função exponencial $f(x) = e^x$ é contínua para todo número real x.

A prova dessas proposições segue diretamente das propriedades de limites.

3.17.5 Proposição Sejam f e g funções tais que $\lim_{x \to a} f(x) = b$ e g é contínua em b.

Então $\lim_{x \to a} (g_0 f)(x) = g(b)$, ou seja,

$$\lim_{x \to a} g[f(x)] = g[\lim_{x \to a} f(x)].$$

Prova Queremos mostrar que $\lim_{x \to a} (g_0 f)(x) = g(b)$, isto é, dado $\varepsilon > 0$, $\exists\, \delta > 0$, tal que

$|(g_0 f)(x) - g(b)| < \varepsilon$ sempre que $0 < |x - a| < \delta$.

Como g é contínua em b, por definição, $\lim_{y \to b} g(y) = g(b)$. Portanto, dado $\varepsilon > 0$, $\exists\, \delta_1 > 0$, tal que $|g(y) - g(b)| < \varepsilon$ sempre que $0 < |y - b| < \delta_1$.

Como para $y = b$, temos $|g(y) - g(b)| = 0 < \varepsilon$, podemos escrever

$$|g(y) - g(b)| < \varepsilon, \text{ sempre que } |y - b| < \delta_1. \qquad (1)$$

Como $\lim_{x \to a} f(x) = b$ e $\delta_1 > 0$, pela definição de limite, $\exists \delta > 0$, tal que $|f(x) - b| < \delta_1$ sempre que $0 < |x - a| < \delta$.

Portanto, se $0 < |x - a| < \delta$, $y = f(x)$ satisfaz (1) e dessa forma

$|g[f(x)] - g(b)| < \varepsilon$.

3.17.6 Proposição Se f é contínua em a e g é contínua em $f(a)$, então a função composta $g_0 f$ é contínua no ponto a.

Prova Como f é contínua no ponto a, temos $\lim_{x \to a} f(x) = f(a)$.

Como g é contínua em $f(a)$, podemos aplicar a proposição 3.16.5. Temos, então

$$\lim_{x \to a} (g_0 f)(x) = g[\lim_{x \to a} f(x)] = g[f(a)]$$
$$= (g_0 f)(a).$$

Logo, $g_0 f$ é contínua em a.

3.17.7 Proposição Seja $y = f(x)$ uma função definida e contínua num intervalo I. Seja $J = \text{Im}(f)$. Se f admite uma função inversa $g = f^{-1}: J \to I$, então g é contínua em todos os pontos de J.

Observamos que, com o auxílio desta proposição, podemos analisar a continuidade das diversas funções inversas definidas no Capítulo 2. Por exemplo, a função

$g: \mathbb{R}_+^* \to \mathbb{R}$

$x \to \ln x$

é contínua, já que ela é a inversa da função exponencial $f(x) = e^x$.

3.17.8 Definição

Seja f definida num intervalo fechado $[a, b]$.

(i) Se $\lim\limits_{x \to a^+} f(x) = f(a)$, dizemos que f é *contínua à direita* no ponto a.

(ii) $\lim\limits_{x \to b^-} f(x) = f(b)$, dizemos que f é *contínua à esquerda* no ponto b.

(iii) Se f é contínua em todo ponto do intervalo aberto (a, b), f é contínua à direita em a e contínua à esquerda em b, dizemos que f é contínua no *intervalo fechado* $[a, b]$.

3.17.9 Teorema do Valor Intermediário

Se f é contínua no intervalo fechado $[a, b]$ e L é um número tal que $f(a) \leq L \leq f(b)$ ou $f(b) \leq L \leq f(a)$, então existe pelo menos um $x \in [a, b]$ tal que $f(x) = L$ (ver Figura 3.28).

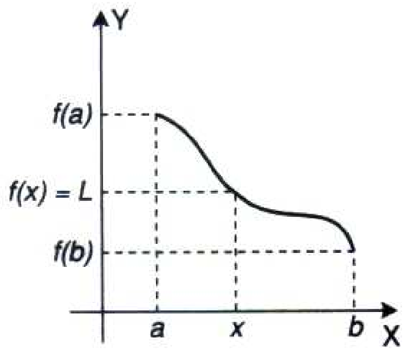


Figura 3.28

Esse teorema nos mostra por que as funções contínuas em um *intervalo* muitas vezes são consideradas como funções cujo gráfico pode ser traçado sem levantar o lápis do papel, isto é, não há interrupções no gráfico. Não apresentamos sua demonstração aqui.

Conseqüência. Se f é contínua em $[a ,b]$ e se $f(a)$ e $f(b)$ têm sinais opostos, então existe pelo menos um número c entre a e b tal que $f(c) = 0$ (ver Figura 3.29).

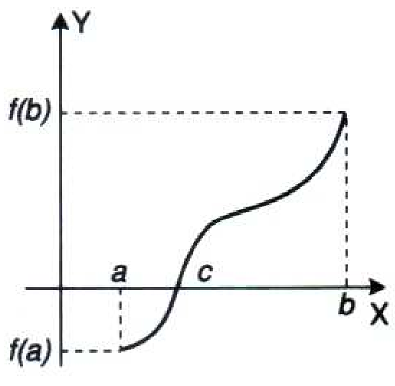


Figura 3.29

3.18 Exercícios

1. Investigue a continuidade nos pontos indicados:

(*a*) $f(x) = \begin{cases} \dfrac{\operatorname{sen} x}{x}, & x \neq 0 \\ 0, & x = 0 \end{cases}$ em $x = 0$.

(*b*) $f(x) = x - |x|$ em $x = 0$.

(*c*) $f(x) = \begin{cases} \dfrac{x^3 - 8}{x^2 - 4}, & x \neq 2 \\ 3 \quad , & x = 2 \end{cases}$ em $x = 2$.

(*d*) $f(x) = \dfrac{1}{\operatorname{sen} 1/x}$ em $x = 2$.

(*e*) $f(x) = \begin{cases} x^2 \operatorname{sen} 1/x, & x \neq 0 \\ 0, & x = 0 \end{cases}$ em $x = 0$.

(*f*) $f(x) = \begin{cases} 1 - x^2, & x < 1 \\ 1 - |x|, & x > 1 \\ 1, & x = 1 \end{cases}$ em $x = 1$.

(*g*) $f(x) = \begin{cases} \dfrac{x^2 - 4}{x - 2}, & x \neq 2 \\ 0 \quad , & x = 2 \end{cases}$ em $x = 2$.

(*h*) $f(x) = \begin{cases} x^2 \quad , & x \geq -1 \\ 1 - |x|, & x < -1 \end{cases}$ em $x = -1$.

(*i*) $f(x) = \dfrac{x^2 - 3x + 7}{x^2 + 1}$, em $x = 2$.

(*j*) $f(x) = \dfrac{2}{3x^2 + x^3 - x - 3}$, em $x = -3$.

2. Determine, se existirem, os valores de $x \in D(f)$, nos quais a função $f(x)$ não é contínua.

(*a*) $f(x) = \begin{cases} \dfrac{x}{x^2 - 1}, & x^2 \neq 1 \\ 0, & x = -1. \end{cases}$

(*b*) $f(x) = \dfrac{1 + \cos x}{3 + \text{sen}\, x}$

(*c*) $f(x) = \dfrac{x - |x|}{x}$

(*d*) $f(x) = \begin{cases} \sqrt{x^2 + 5x + 6}, & x < -3 \text{ e } x > -2 \\ -1 \quad , & -3 \leq x \leq -2 \end{cases}$

(*e*) $f(x) = \begin{cases} 1 - \cos x, & x < 0 \\ x^2 + 1 \quad , & x \geq 0 \end{cases}$

(*f*) $f(x) = \dfrac{2}{e^x - e^{-x}}$

(*g*) $f(x) = \begin{cases} \dfrac{x^2 - 3x + 4}{x - 1}, & x \neq 1 \\ 1, & x = 1 \end{cases}$

(*h*) $f(x) = \cos \dfrac{x}{x + \pi}$

3. Construa o gráfico e analise a continuidade das seguintes funções:

(*a*) $f(x) = \begin{cases} 0, & x \leq 0 \\ x, & x > 0 \end{cases}$

(*b*) $f(x) = \begin{cases} \dfrac{x^2 - 4}{x + 2}, & x \neq -2 \\ 1 \quad , & x = -2 \end{cases}$

(*c*) $f(x) = \begin{cases} \dfrac{x}{|x|}, & x \neq 0 \\ -1, & x = 0 \end{cases}$

(*d*) $f(x) = \begin{cases} \ln (x + 1), & x \geq 0 \\ -x \quad , & x < 0 \end{cases}$

(*e*) $f(x) = \dfrac{x^3 + 3x^2 - x - 3}{x^2 + 4x + 3}.$

4. Calcule p de modo que as funções abaixo sejam contínuas.

(*a*) $f(x) = \begin{cases} x^2 + px + 2, & x \neq 3 \\ 3 \quad , & x = 3 \end{cases}$

(*b*) $f(x) = \begin{cases} x + 2p, & x \leq -1 \\ p^2 \quad , & x > -1 \end{cases}$

(*c*) $f(x) = \begin{cases} e^{2x} \quad , & x \neq 0 \\ p^3 - 7, & x = 0. \end{cases}$

5. Determine, se existirem, os pontos onde as seguintes funções não são contínuas.

(*a*) $f(x) = \dfrac{x}{(x - 3)(x + 7)}$

(*b*) $f(x) = \sqrt{(3 - x)(6 - x)}$

(*c*) $f(x) = \dfrac{1}{1 + 2\, \text{sen}\, x}$

(*d*) $f(x) = \dfrac{x^2 + 3x - 1}{x^2 - 6x + 10}$

6. Prove que se $f(x)$ e $g(x)$ são contínuas em $x_0 = 3$, também o são $f + g$ e $f \cdot g$.

7. Defina funções f, g e h que satisfaçam:

(*a*) f não é contínua em 2 pontos de seu domínio;

(*b*) g é contínua em todos os pontos de seu domínio mas não é contínua em $\mathbb{R}$;

(*c*) $h_0 f$ é contínua em todos os pontos do domínio de f;

Faça o gráfico das funções f, g, h e $h_0 f$.

8. Dê exemplo de duas funções f e g que não são contínuas no ponto $a = 0$ e tais que $h = f \cdot g$ é contínua neste ponto. Faça o gráfico das funções f, g e h.

9. Sejam f, g e h funções tais que, para todos x, $f(x) \leq g(x) \leq h(x)$. Se f e h são contínuas no ponto $x = a$ e $f(a) = g(a) = h(a)$, prove que g é contínua no ponto a.

10. Sejam $a \in \mathbb{R}$ e $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ uma função definida no ponto a. Se $\lim\limits_{x \to a} \dfrac{f(x) - f(a)}{x - a} = m$, prove que f é contínua no ponto a.