INSTITUTO FEDERAL
Catarinense
Campus Blumenau

Assuntos: Função Exponencial e Função Logarítmica
Professor: Fabricio Alves Oliveira

Essa lista deverá ser entregue resolvida no dia da segunda prova.

(**1**) Calcule:

(a) $(-4)^2$ (b) -4^2 (c) $-(-2)^4$ (d) $\left(\frac{2}{3}\right)^0$

(e) $3^{2^3} - (3^2)^3$ (f) $(10^0 + 10^1 + 10^2)^2$ (g) 2^{-3} (h) $(-5)^{-3}$

(i) $\left(-\frac{1}{3}\right)^{-4}$ (j) $\left[\dfrac{2^{-1} - (-2)^{-1}}{\left(\frac{1}{2}\right)^{-1}}\right]^{-2}$ (k) $\dfrac{3 \cdot 2^{-2} - 2 \cdot 3^{-2}}{(3 \cdot 2)^{-2}}$

(**2**) Simplifique:

(a) $\sqrt{72} + \sqrt{18} - 2\sqrt{50}$ (b) $\dfrac{\sqrt[3]{16} + \sqrt[3]{54}}{\sqrt[3]{125}}$ (c) $\sqrt{48} - \sqrt{45} + \sqrt{12}$

(**3**) Calcule:

(a) $\sqrt{3} \cdot \sqrt{21}$ (b) $\dfrac{\sqrt[4]{32}}{\sqrt[4]{2}}$ (c) $\dfrac{\sqrt{2} \cdot \sqrt{3}}{\sqrt{5}}$

(d) $\dfrac{\sqrt[3]{4} \cdot \sqrt{2}}{\sqrt[6]{2}}$ (e) $\sqrt{8 + \sqrt{15}} \cdot \sqrt{8 - \sqrt{15}}$ (f) $\sqrt{2\sqrt{2\sqrt[3]{2}}}$

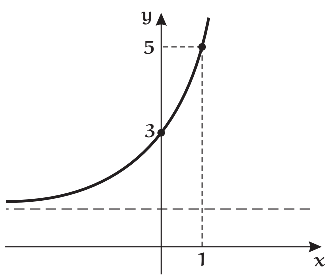
(**4**) Racionalize o denominador de cada uma das frações:

(a) $\dfrac{1}{\sqrt{3}}$ (b) $\dfrac{\sqrt{5}}{\sqrt{2}}$ (c) $\dfrac{1}{\sqrt{3} + 1}$ (d) $\dfrac{\sqrt{5}}{\sqrt{5} - 1}$

(**5**) Construa os gráficos das seguintes funções exponenciais:

(a) $f(x) = 3^x$ (b) $f(x) = \left(\frac{1}{3}\right)^x$ (c) $f(x) = e^x$ (d) $f(x) = 3^x - 2$ (e) $f(x) = 3^{1-x}$

(**6**) O gráfico abaixo representa a função f cuja lei é $f(x) = a + b \cdot 2^x$, sendo a e b constantes positivas.



(a) Determine a e b.

(b) Qual é o conjunto imagem de f?

(c) Calcule $f(-2)$.

(**7**) Utilizando um microscópio, um técnico constatou que cada célula de uma bactéria subdivide-se em duas ao final de 20 minutos. Ao final de dez horas, qual será o total de células produzidas a partir de uma célula?

(**8**) Meia-vida ou período de semidesintegração é o tempo necessário para a desintegração de metade dos átomos radioativos (ou metade da massa) de um certo isótopo de um elemento químico. A Química nos ensina que, na verdade, a massa desse isótopo não está sumindo, apenas está diminuindo pelo fato do isótopo se transformar em outro isótopo.
O cobalto 60, Co^{60}_{27}, tem meia-vida de 5 anos. Ele é usado em hospitais na radioterapia para tratamento de pacientes com câncer. A partir de uma amostra de 10 g do cobalto 60, determine:

(a) A massa de isótopo daqui a 5 anos e daqui a 10 anos.

(b) Encontre a lei que relaciona a massa m da amostra em função da quantidade de anos x.

(**9**) Resolva, em $\mathbb{R}$, as seguintes equações exponenciais:

(a) $2^x = 128$ (b) $\left(\frac{1}{5}\right)^x = 125$ (c) $(\sqrt[4]{3})^x = \sqrt[3]{9}$

(d) $\frac{1}{e^2} = e^{x-3}$ (e) $8^{2x+1} = \sqrt[3]{4^{x-1}}$ (f) $5^{2x^2+3x-2} = 1$

(g) $(9^{x+1})^{x-1} = 3^{x^2+x+4}$ (h) $2^{3x-1} \cdot 4^{2x+3} = 8^{3-x}$ (i) $(3^{2x-7})^3 : 9^{x+1} = (3^{3x-1})^4$

(j) $2^{x+1} + 2^x - 2^{x-2} = 44$ (k) $4^x - 2^x = 2$ (l) $5^{2x} + 5^x + 6 = 0$

(**10**) Resolva, em $\mathbb{R}$, as seguintes inequações exponenciais:

(a) $4^x \geq 8$ (b) $\left(\frac{1}{9}\right)^x \leq 243$ (c) $7^{5x-6} < 1$

(d) $\left(\frac{1}{8}\right)^{x^2-1} < \left(\frac{1}{32}\right)^{2x+1}$ (e) $4^x - 6 \cdot 2^x + 8 < 0$

(**11**) Calcule pela definição, os seguintes logaritmos:

(a) $\log_3 27$ (b) $\log_2 64$ (c) $\log 1000$ (d) $\log_8 32$ (e) $\log_{\frac{1}{4}} 128$

(f) $\ln e^8$ (g) $\log_{0,25} 2$ (h) $\log_{49} \sqrt{7}$ (i) $\log_{\frac{1}{16}} \sqrt[3]{\frac{1}{2}}$ (j) $\log_5 0,008$

(**12**) Calcule:

(a) $\ln e$ (b) $\ln 1$ (c) $\ln\left(\frac{1}{e}\right)$ (d) $e^{\ln 3}$ (e) $e^{2\ln 5}$ (f) $e^{2+\ln 2}$

(**13**) Sejam x, y, b reais positivos, $b \neq 1$. Sabendo que $\log_b x = -2$ e $\log_b y = 3$, calcule o valor dos seguintes logaritmos:

(a) $\log_b(xy)$ (b) $\log_b\left(\frac{x}{y}\right)$ (c) $\log_b(x^3y^2)$ (d) $\log_b\left(\frac{y^2}{\sqrt{x}}\right)$ (e) $\log_b\left(\frac{x\sqrt{y}}{b}\right)$

(**14**) Determine o valor de:

(a) $\log_{15} 3 + \log_{15} 5$

(b) $\frac{1}{3}\log_{15} 8 + 2\log_{15} 2 + \log_{15} 5 - \log_{15} 9000$

($\mathbf{15}$) Determine o domínio das funções logarítmicas a seguir:

(a) $y = \log_5(x-1)$ (b) $y = \log_{\frac{1}{2}}(x^2-9)$ (c) $y = \log_{x-1}(-3x+4)$

($\mathbf{16}$) Construa os gráficos das seguintes funções logarítmicas:

(a) $f(x) = \log_3 x$ (b) $f(x) = \log_{\frac{1}{3}} x$ (c) $f(x) = \ln x$

(d) $f(x) = 2 + \log_2 x$ (e) $f(x) = \log_2(x-1)$

($\mathbf{17}$) Seja $f : \mathbb{R} \longrightarrow]2, +\infty[$ uma função definida por $f(x) = 3^x + 2$.

(a) Obtenha a lei que define f^{-1}.

(b) Represente os gráficos de f e f^{-1} no mesmo plano cartesiano.

($\mathbf{18}$) O investimento financeiro mais conhecido do brasileiro é a caderneta de poupança, que rende aproximadamente 6% ao ano. Ao aplicar hoje $R\$2000,00$, um poupador terá, daqui a n anos, um valor v, em reais, dado por $v(n) = 2000 \cdot (1,06)^n$.

(a) Que valor terá o poupador daqui a 3 anos? E daqui a 6 anos? Use $1,06^3 \simeq 1,2$.

(b) Qual é o tempo mínimo (em anos inteiros) necessário para que o valor dessa poupança seja de $R\$4000,00$? E de $R\$6500,00$? Considere $\log 2 \simeq 0,3; \log 13 \simeq 1,14$ e $\log 1,06 \simeq 0,025$.

($\mathbf{19}$) A população de certa espécie de mamífero em uma região da Amazônia cresce segundo a função $n(t) = 5000e^{0,02t}$, em que $n(t)$ é o número de elementos estimado da espécie no ano t, contado a partir de hoje. Determine o número inteiro mínimo de anos necessários para que a população atinja: (Use $\ln 2 \simeq 0,69$ e $\ln 5 \simeq 1,6$.)

(a) 8000 elementos

(b) 10000 elementos

($\mathbf{20}$) O decaimento radioativo do estrôncio 90 é descrito pela função $P(t) = P_0 \cdot 2^{-bt}$, onde t é o instante de tempo, medido em anos, b é uma constante real e P_0 é a concentração inicial de estrôncio 90, ou seja, a concentração no instante $t = 0$.

(a) Se a meia-vida do estrôncio 90 é 29 anos, isto é, se a concentração de estrôncio 90 cai pela metade em 29 anos, determine o valor da constante b.

(b) Dada uma concentração inicial P_0 de estrôncio 90, determine o tempo necessário para que a concentração seja reduzida a 20% da concentração inicial. Considere $\log_2 10 \simeq 3,32$.

Respostas

(1)

(a) 16 (b) -16 (c) -16 (d) 1

(e) 5832 (f) 12321 (g) $\frac{1}{8}$ (h) $-\frac{1}{125}$

(i) 81 (j) 4 (k) 19

(2)

(a) $-\sqrt{2}$ (b) $\sqrt[3]{2}$ (c) $6\sqrt{3}-3\sqrt{5}$

(3)

(a) $3\sqrt{7}$ (b) 2 (c) $\sqrt{\frac{6}{5}}$

(d) 2 (e) 7 (f) $\sqrt[6]{32}$

(4)

(a) $\frac{\sqrt{3}}{3}$ (b) $\frac{\sqrt{10}}{2}$ (c) $\frac{\sqrt{3}-1}{2}$ (d) $\frac{5+\sqrt{5}}{4}$

(6)

(a) $a = 1$ e $b = 2$

(b) $Im(f) = \{y \in \mathbb{R} : y > 1\}$

(c) $\frac{3}{2}$

(7) 2^{30}

(8)

(a) 5 g; 2,5 g

(b) $m(x) = \dfrac{10}{2^{\frac{x}{5}}}$

(9)

(a) $S = \{7\}$ (b) $S = \{-3\}$ (c) $S = \{\frac{8}{3}\}$

(d) $S = \{1\}$ (e) $S = \{-\frac{11}{16}\}$ (f) $S = \{-2, \frac{1}{2}\}$

(g) $S = \{-2, 3\}$ (h) $S = \{\frac{2}{5}\}$ (i) $S = \{-\frac{19}{8}\}$

(j) $S = \{4\}$ (k) $S = \{1\}$ (l) $S = \emptyset$

(10)

(a) $S = \{x \in \mathbb{R} : x \geq \frac{3}{2}\}$ (b) $S = \{x \in \mathbb{R} : x \geq -\frac{5}{2}\}$ (c) $S = \{x \in \mathbb{R} : x < \frac{6}{5}\}$

(d) $S = \{x \in \mathbb{R} : x < -\frac{2}{3} \text{ ou } x > 4\}$ (e) $S = \{x \in \mathbb{R} : 1 < x < 2\}$

(11)

(a) 3 (b) 6 (c) 3 (d) $\frac{5}{3}$ (e) $-\frac{7}{2}$

(f) 8 (g) $-\frac{1}{2}$ (h) $\frac{1}{4}$ (i) $\frac{1}{12}$ (j) -3

(12)

(a) 1 (b) 0 (c) -1 (d) 3 (e) 25 (f) $2e^2$

(13)

(a) 1 (b) -5 (c) 0 (d) 7 (e) $-\frac{3}{2}$

(14)

(a) 1

(b) -2

(15)

(a) $D = \{x \in \mathbb{R} : x > 1\}$ (b) $D = \{x \in \mathbb{R} : x < -3 \text{ ou } x > 3\}$ (c) $D = \{x \in \mathbb{R} : 1 < x < \frac{4}{3}\}$

(17) (a) $f^{-1}(x) = \log_3(x-2)$

(18)

(a) $2400; 2880$

(b) $12; 22$

(19)

(a) 24 anos

(b) 35 anos

(20)

(a) $b = \frac{1}{2^9}$

(b) 67, 28 anos