1ª Prova - Cálculo 2

INSTITUTO FEDERAL Catarinense Campus Blumenau

Nome: Giovani Zanella da maia
Data: 30/09/2024 **Valor:** 10 pontos
Curso: Engenharia Elétrica
Professor: Fabricio Alves Oliveira

3,3

ORIENTAÇÕES:
(i) A prova é individual, sem consulta e pode ser feita a lápis.
(ii) Faça letra legível e apresente o desenvolvimento e o raciocínio de forma clara em cada uma das questões. Questões sem justificativas não serão aceitas.

Questões

2,4 **1ª Questão:** (4,2 pontos) Calcule as seguintes integrais indefinidas:

(a) $\int \frac{x}{1+x^2}\,dx$ (b) $\int \frac{\cos(\ln x)}{x}\,dx$ (c) $\int \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}}\,dx$ simples e por partes

(d) $\int \operatorname{sen}^2 x \cos^2 x\,dx$ (e) $\int e^x \cos\left(\frac{x}{2}\right)\,dx$ (f) $\int x \operatorname{arctg} x\,dx$

(**Dicas:** No item **(d)** utilize que $\operatorname{sen}(2x) = 2\operatorname{sen}x \cos x$. Nos itens **(e)** e **(f)** utilize integração por partes.)

0,4 **2ª Questão:** (1,4 pontos) Calcule as integrais definidas:

(a) $\int_1^4 \frac{1+\sqrt{x}}{x^2}\,dx$ (b) $\int_0^1 \frac{e^x}{1+e^{2x}}\,dx$

0 **3ª Questão:** (1,4 pontos) Faça um esboço e calcule a área da região do plano limitada pelos gráficos de $y = x^2$, $y = 2x - 1$ e pelo eixo x.

0 **4ª Questão:** (1,5 pontos) Calcule a integral a seguir, utilizando substituição trigonométrica:

$$\int \frac{x+3}{\sqrt{x^2+2x}}\,dx.$$

(Relembre que: $\int \sec x\,dx = \ln|\sec x + \operatorname{tg} x| + k$.)

0,5 **5ª Questão:** (1,5 pontos) Utilize decomposição em frações parciais para calcular a integral

$$\int \frac{x^2+x+1}{x^4-x^2}\,dx.$$

$x^2+2x+1-1$

$(x-1)($

a) $\int \frac{x}{1+x^2}\,dx = \int \frac{1}{1+x^2} \cdot x\,dx = \int \frac{1}{u}\,\frac{du}{2} = \frac{1}{2}\int \frac{1}{u}\,du$

$u = 1+x^2$

$du = 2x\,dx \qquad = \frac{1}{2}\ln|1+x^2| + K \;//$ e

$x\,dx = \frac{du}{2}$ 0,7 22

b) $\int \frac{\cos(\ln x)}{x}\,dx = \int \cos(\ln x) \cdot \frac{1}{x}\,dx =$

$u = \cos(\ln x) \qquad dv = \frac{1}{x}\,dx$

$du = -\operatorname{sen}(\ln x) \cdot \frac{1}{x} \qquad v = \ln x + K$

$= \cos(\ln x) \cdot \ln x - \int \ln x \cdot -\operatorname{sen}(\ln x) \cdot \frac{1}{x}\,dx$

$= \cos(\ln x) \cdot \ln x + \int \ln x \cdot \operatorname{sen}(\ln x) \cdot \frac{1}{x}\,dx$

c) $\int \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}}\,dx = \int \frac{1}{e^x + e^{-x}} \cdot e^x - e^{-x}\,dx$

$= \int \frac{1}{u}\,du = \ln u + K$

$u = e^x + e^{-x}$

$du = e^x - e^{-x}\,dx \qquad = \ln|e^x + e^{-x}| + K \;//$ e 0,7

d) $\int \operatorname{sen}^2 x \cdot \cos^2 x\,dx$

?

f) $\int x \cdot \text{arc tg } x \, dx$

$$\boxed{\begin{array}{ll} u = \text{arc tg } x & \\ du = \frac{1}{1+x^2} dx & v = \frac{x^2}{2} \end{array}}$$

$= \text{arc tg } x \cdot \frac{x^2}{2} - \int \frac{x^2}{2} \cdot \frac{1}{1+x^2} dx$

$= \text{arc tg } x \cdot \frac{x^2}{2} - \frac{1}{2} \underbrace{\int x^2 \cdot \frac{1}{1+x^2} dx}_{\text{I}}$

0,3

$$\boxed{\begin{array}{ll} \text{I} \quad u = x^2 & dv = \frac{1}{1+x^2} dx \\ du = 2x \, dx & v = \text{arc tg } x \end{array}}$$

$x^2 \cdot \text{arc tg} x - \int \text{arctg} x \; 2x \, dx$

$x^2 \cdot \text{arctg} x - 2 \int \text{arc tg}(x) \, x \, dx$

$= \text{arc tg }(x) \cdot \frac{x^2}{2} - \frac{1}{2}\left[x^2 \cdot \text{arctg} x - 2 \int \text{arc tg} x \cdot x \, dx\right]$

$= \text{arc tg}(x) \cdot \frac{x^2}{2} - \frac{x^2}{2} \text{arc tg}(x) + \int \text{arc tg}(x) \, x dx$ ✗

e) $\int \underbrace{e^x \cos\left(\frac{x}{2}\right) dx}_{f(x)} = \cos\left(\frac{x}{2}\right) e^x - \int e^x \cdot \frac{-1}{2} \text{sen}\left(\frac{x}{2}\right) dx$

$= \cos\left(\frac{x}{2}\right) e^x + \underbrace{\frac{1}{2} \int e^x \text{sen}\left(\frac{x}{2}\right) dx}_{\text{II}}$

$$\boxed{\begin{array}{ll} u = \cos\left(\frac{x}{2}\right) & du = \frac{-1}{2} \text{sen}\left(\frac{x}{2}\right) \\ dv = e^x dx & v = e^x \end{array}}$$

$$\boxed{\begin{array}{l} \text{II} \\ u = \text{sen}\left(\frac{x}{2}\right) \\ du = \frac{1}{2} \cos\left(\frac{x}{2}\right) \\ dv = e^x \\ v = e^x \end{array}}$$

$\int f(x) \, dx = \cos\left(\frac{x}{2}\right) e^x + \frac{1}{2}\left[e^x \text{sen}\left(\frac{x}{2}\right) - \int e^x \frac{1}{2} \cdot \cos\left(\frac{x}{2}\right) dx\right]$

$\cos\left(\frac{x}{2}\right) e^x + \frac{1}{2} e^x \text{sen}\left(\frac{x}{2}\right) - \frac{1}{4} \int e^x \cos\left(\frac{x}{2}\right) dx$

$1 + \frac{1}{4} \int f(x) \, dx = \cos\left(\frac{x}{2}\right) e^x + e^x \text{sen}\left(\frac{x}{2}\right) \cdot \frac{1}{2}$

$\frac{5}{4} \int f(x) \, dx = \cos\left(\frac{x}{2}\right) e^x + e^x \text{sen}\left(\frac{x}{2}\right) \cdot \frac{1}{2}$

$\int f(x) dx = \frac{4}{5}\left(\cos\left(\frac{x}{2}\right) e^x + e^x \text{sen}\left(\frac{x}{2}\right) \cdot \frac{4}{8}\right)$

$= \left(\frac{4}{5} \cos\left(\frac{x}{2}\right) e^x + e^x \text{sen}\left(\frac{x}{2}\right) \frac{2}{5}\right)$

$\frac{2}{5} e^x \left(2 \cos\left(\frac{x}{2}\right) + \text{sen}\left(\frac{x}{2}\right)\right) + K$

0,7

4) $\int \frac{x+3}{\sqrt{(x+3)(x-1)^2+1^2}}\,dx = \int \frac{1}{\sqrt{(x-1)^2+1^2}}\,dx$

?

2º caso $\sqrt{a^2+x^2}$

$x-1 = 1 \cdot tg\,\theta$

$dx = 1 \cdot sec^2\theta\, d\theta$

$\sqrt{a^2+1^2} = 1 \cdot sec\,\theta$

$tg\,\theta = x-1$

$\theta = arc\,tg\,(x-1)$

$sec\,\theta = \sqrt{\ }$

$\int \frac{1}{\cancel{sec\,\theta}} sec^{\cancel{2}}\theta\, d\theta$

$\int sec\,\theta\, d\theta$

$\ln|sec\,\theta + tg\,\theta| + K$

$\ln|arc\,tg(x-1) + \sqrt{(x+3)(x-1)+1}| + K$