6 MATRIZES

1 Introdução

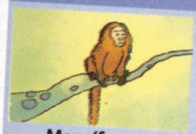
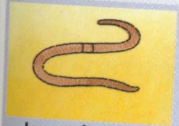
Para onde foram os turistas internacionais em 1999		
	Milhões de visitantes	**%**
Europa	386	59
Américas	126	19
Ásia e Pacífico	93	14
África	27	4,1
Outros	25	3,9
Total	**657**	**100**

Fonte: *Exame*, 19/4/2000.

Quadro de medalhas					
	País	**Ouro**	**Prata**	**Bronze**	**Total**
1º.	EUA	39	25	33	97
2º.	Rússia	32	28	28	88
3º.	China	28	16	15	59
4º.	Austrália	16	25	17	58
5º.	Alemanha	14	17	26	57
6º.	França	13	14	11	38
7º.	Itália	13	8	13	34
8º.	Holanda	12	9	4	25
9º.	Cuba	11	11	7	29
10º.	Grã-Bretanha	11	10	7	28
52º.	Brasil	0	6	6	12

Fonte: *Folha de S. Paulo*, 2/10/2000.

Países que concentram o maior número de espécies ameaçadas (plantas e animais)

	EUA	Malásia	Indonésia	Brasil	Austrália
 Mamíferos	37	47	140	79	63
 Aves	55	37	113	113	35
 Répteis	27	21	28	22	39
 Anfíbios	25	0	0	6	25
 Peixes	131	16	67	17	44
 Moluscos	255	1	3	21	174
 Invertebrados	300	2	28	13	106
 Plantas	168	681	384	338	38
Total	**998**	**805**	**763**	**609**	**524**

Fonte: World Conservation Union e World Conservation Monitoring Center.

Quando abrimos jornais e revistas, encontramos com freqüência informações numéricas organizadas na forma de tabelas com linhas e colunas. Essas tabelas serão chamadas, em matemática, de *matrizes.*

Dizemos, então, que uma matriz $m \times n$ é uma tabela de $m \cdot n$ números dispostos em m linhas (filas horizontais) e n colunas (filas verticais). Vejamos:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 \\ 0 & 4 & 2 \end{pmatrix} \text{ é uma matriz } 2 \times 3;$$

$$B = \begin{bmatrix} 4 & 0 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \text{ é uma matriz } 2 \times 2;$$

$$C = \begin{pmatrix} 2 & 5 & -3 & 1 \\ 4 & 1 & 0 & 8 \\ 7 & \frac{1}{4} & \sqrt{2} & 13 \end{pmatrix} \text{ é uma matriz } 3 \times 4.$$

2 Representação de uma matriz

Consideremos uma matriz A do tipo $m \times n$. Um elemento qualquer dessa matriz será representado pelo símbolo a_{ij}, no qual o índice i refere-se à linha em que se encontra tal elemento e o índice j refere-se à coluna em que se encontra o elemento.

Representaremos também a matriz A por $A = (a_{ij})_{m \times n}$. Note que $1 \leq i \leq m$ e $1 \leq j \leq n$.

Exemplo 1

Seja a matriz $A = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 4 & -1 \\ 0 & -2 \end{pmatrix}_{3 \times 2}$

- O elemento que está na *linha 1, coluna 1,* é $a_{11} = 2$.
- O elemento que está na *linha 1, coluna 2,* é $a_{12} = 3$.
- O elemento que está na *linha 2, coluna 1,* é $a_{21} = 4$.
- O elemento que está na *linha 2, coluna 2,* é $a_{22} = -1$.
- O elemento que está na *linha 3, coluna 1,* é $a_{31} = 0$.
- O elemento que está na *linha 3, coluna 2,* é $a_{32} = -2$.

Exemplo 2

Vamos escrever a matriz $A = (a_{ij})_{2 \times 2}$, em que $a_{ij} = 2i + j$.

Uma matriz do tipo 2×2 pode ser genericamente representada por $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$. Utilizando a "regra de formação" dos elementos dessa matriz, temos:

$a_{11} = 2 \cdot 1 + 1 = 3$ $\qquad$ $a_{12} = 2 \cdot 1 + 2 = 4$

$a_{21} = 2 \cdot 2 + 1 = 5$ $\qquad$ $a_{22} = 2 \cdot 2 + 2 = 6$

Assim, $A = \begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 5 & 6 \end{pmatrix}$.

3 Matrizes especiais

Vejamos a seguir alguns tipos de matrizes especiais.

- *Matriz linha:* é uma matriz formada por uma única linha.
  Exemplo: $A = (1 \ \ 2 \ \ -3)$ é uma matriz linha 1×3.
- *Matriz coluna:* é uma matriz formada por uma única coluna.

  Exemplo: $B = \begin{bmatrix} 2 \\ 4 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix}$ é uma matriz coluna 4×1.
- *Matriz nula:* é uma matriz cujos elementos são todos iguais a zero.

  Exemplos: $A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ é uma matriz nula 2×3 e $B = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ é uma matriz nula 2×2.
- *Matriz quadrada:* é uma matriz que possui número de linhas igual ao número de colunas.

  Exemplos: $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & -3 \end{pmatrix}$ é uma matriz quadrada 2×2. Dizemos que *A* é quadrada de ordem 2.

  $B = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 8 \\ 1 & 1/5 & 2 \\ -3 & 4 & \sqrt{2} \end{pmatrix}$ é uma matriz quadrada 3×3. Dizemos que *B* é quadrada de ordem 3.

Seja A uma mátriz quadrada de ordem n.

▶ **1º** Os elementos de A cujo índice da linha é igual ao índice da coluna constituem a *diagonal principal* de A. Assim, $a_{11}, a_{22}, a_{33}, ..., a_{nn}$ formam a diagonal principal de:

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & & \ddots & \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

▶ **2º** Os elementos de A cuja soma dos índices da linha e da coluna é igual a $n + 1$ constituem a *diagonal secundária* de A.

Se, por exemplo, A é quadrada de ordem 3, os elementos a_{13}, a_{22} e a_{31} formam a diagonal secundária de A, conforme indicado abaixo:

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$$

EXERCÍCIOS

1 Escreva o tipo de cada uma das seguintes matrizes:

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1/2 & 4 \\ 0 & -1 & \sqrt{3} & 2 \end{pmatrix} \qquad C = \begin{pmatrix} 3 & 1 & \sqrt{3} \\ 0 & -2 & 5 \end{pmatrix} \qquad E = \begin{pmatrix} 4 & 2 \\ 3 & 1 \\ 1/4 & -1 \\ 0 & \sqrt{3} \end{pmatrix}$$

$$B = \begin{pmatrix} 4 \\ 4 \\ 1 \\ 5 \end{pmatrix} \qquad D = (0\ 1) \qquad F = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & -3 \\ -2 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

2 Escreva a matriz $A = (a_{ij})_{2 \times 3}$, em que $a_{ij} = 2i + 3j$.

3 Escreva a matriz $B = (b_{ij})_{3 \times 3}$, em que $b_{ij} = \frac{i}{j}$. Que elementos pertencem às diagonais principal e secundária de B?

4 Escreva as matrizes $C = (c_{ij})_{4 \times 1}$, em que $c_{ij} = i^2 + j$, e $D = (d_{ij})_{1 \times 3}$, em que $d_{ij} = i - j$. Que matrizes especiais são essas?

5 Escreva a matriz $A = (a_{ij})_{4 \times 3}$, em que $a_{ij} = \begin{cases} 2, \text{ se } i \geq j \\ -1, \text{ se } i < j \end{cases}$.

6 Escreva a matriz $A = (a_{ij})_{3 \times 3}$, em que $a_{ij} = \begin{cases} i + j, \text{ se } i = j \\ 0, \text{ se } i \neq j \end{cases}$. Forneça os elementos que pertencem às diagonais principal e secundária de A.

7 Escreva a matriz $A = (a_{ij})_{2 \times 3}$, em que $a_{ij} = \begin{cases} 2i + j, \text{ se } i \geqslant j \\ i - j, \text{ se } i < j \end{cases}$.

8 Chama-se *traço* de uma matriz quadrada a soma dos elementos de sua diagonal principal. Determine o traço de cada uma das matrizes $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 4 & 3 \end{pmatrix}$ e $B = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ \sqrt{2} & 3 & -5 \\ -1 & 0 & -1 \end{pmatrix}$.

9 (Covest-PE) Eric necessita de complementos das vitaminas *A* e *C*. Diariamente precisa de pelo menos 63 unidades de *A* e no mínimo 55 unidades de *C*. Ele pode escolher entre os compostos I e II, que apresentam, por cápsula, as características abaixo:

Composto	Vitamina *A*	Vitamina C	Valor R$
I	7 unidades	4 unidades	0,70
II	4 unidades	5 unidades	0,50

Qual o gasto mínimo diário de Eric, em reais, com os compostos I e II?

10 (UF-RJ) Antônio, Bernardo e Cláudio saíram para tomar chope, de bar em bar, tanto no sábado quanto no domingo.

As matrizes a seguir resumem quantos chopes cada um consumiu e como a despesa foi dividida:

$$S = \begin{bmatrix} 4 & 1 & 4 \\ 0 & 2 & 0 \\ 3 & 1 & 5 \end{bmatrix} \quad \text{e} \quad D = \begin{bmatrix} 5 & 5 & 3 \\ 0 & 3 & 0 \\ 2 & 1 & 3 \end{bmatrix}$$

S refere-se às despesas de sábado e *D* às de domingo.

Cada elemento a_{ij} nos dá o número de chopes que *i* pagou para *j*, sendo Antônio o número 1, Bernardo o número 2 e Cláudio o número 3 (a_{ij} representa o elemento da linha *i*, coluna *j* de cada matriz).

Assim, no sábado Antônio pagou 4 chopes que ele próprio bebeu, 1 chope de Bernardo e 4 de Cláudio (primeira linha da matriz *S*).

a) Quem bebeu mais chope no fim de semana?

b) Quantos chopes Cláudio ficou devendo para Antônio?

4 Igualdade de matrizes

Elementos correspondentes

Dadas duas matrizes, $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & & & \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}_{m \times n}$ e $B = \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & \cdots & b_{1n} \\ b_{21} & b_{22} & \cdots & b_{2n} \\ \vdots & & & \\ b_{m1} & b_{m2} & \cdots & b_{mn} \end{pmatrix}_{m \times n}$,

dizemos que *elementos de mesmo índice* (linha e coluna) *são correspondentes.*

Assim:

- a_{11} e b_{11} são correspondentes;
- a_{12} e b_{12} são correspondentes;

  $\vdots \quad \vdots$
- a_{mn} e b_{mn} são correspondentes.

Igualdade

Duas matrizes de mesmo tipo $m \times n$ são iguais quando todos os seus elementos correspondentes são iguais.

Exemplo 1

Determinemos a, b, c, d, de modo que se tenha $\begin{pmatrix} a & 1 \\ 1 & b+1 \\ c-2 & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \\ 6 & 3 \end{pmatrix}$.

Observando os elementos correspondentes, devemos ter $\begin{cases} a = 2 \\ b + 1 = 1 \Rightarrow b = 0 \\ c - 2 = 6 \Rightarrow c = 8 \\ d = 3 \end{cases}$.

Exemplo 2

Para que ocorra a igualdade $\begin{pmatrix} 1-m^2 & 1 \\ -2 & 1-m \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -2 & 0 \end{pmatrix}$, devemos ter:

$$\begin{cases} 1 - m^2 = 0 \Longrightarrow m = -1 \text{ ou } m = 1 \quad \text{(I)} \\ \text{e} \\ 1 - m = 0 \Longrightarrow m = 1 \quad \text{(II)} \end{cases}$$

Como (I) e (II) devem ser satisfeitas simultaneamente, segue que $m = 1$.

EXERCÍCIOS

11 Determine a, b, c e d para que se tenha $\begin{pmatrix} -1 & \frac{5}{6} \\ 2 & 10 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & 5b \\ \frac{c}{3} & -d \end{pmatrix}$.

12 Determine x, y e z que satisfaçam $\begin{pmatrix} 1 & -2 & x \\ 3y & 5 & z-1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -2 & \frac{3}{4} \\ -6 & 5 & 0 \end{pmatrix}$.

13 Determine p e q, tais que $\begin{pmatrix} p+q & -2 \\ 0 & 2p-q \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 & -2 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$.

14 Verifique se existe m, $m \in \mathbb{R}$, para que se tenha $\begin{pmatrix} 2 & m^2-9 \\ m-3 & m+3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$.

15 Determine m, $m \in \mathbb{R}$, se existir, tal que $\begin{pmatrix} 4-m^2 & 1 \\ -2 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ m & 3 \end{pmatrix}$.

16 Seja $A = (a_{ij})_{2 \times 3}$, em que $a_{ij} = i + j$. Determine m, n e p em

$B = \begin{pmatrix} m+n & 3 & 4 \\ n-1 & m-2p & 5 \end{pmatrix}$, a fim de que tenhamos $A = B$.

17 Determine $0 \leqslant x < 2\pi$ e $0 \leqslant y < 2\pi$ de modo que $\begin{pmatrix} \operatorname{sen} x & \cos y \\ \operatorname{sen} y & \cos x \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$.

18 Determine x e y reais de modo que $\begin{bmatrix} 2^x - 1 & y^4 \\ y^x & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 2 \end{bmatrix}$.

5 Adição e subtração

Adição de matrizes

Dadas duas matrizes, $A = (a_{ij})_{m \times n}$ e $B = (b_{ij})_{m \times n}$, a matriz soma $A + B$ é a matriz $C = (c_{ij})_{m \times n}$, em que $c_{ij} = a_{ij} + b_{ij}$ para todo *i* e todo *j*.

Em outras palavras, a matriz soma *C* é do mesmo tipo que *A* e *B* e é tal que cada um de seus elementos é a soma de elementos correspondentes de *A* e *B*, como podemos observar na soma:

$$\begin{pmatrix} 2 & -1 & 3 \\ 0 & 5 & 2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & 3 & -4 \\ 2 & -2 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 2 & -1 \\ 2 & 3 & 5 \end{pmatrix}$$

Exemplo 1

Vamos determinar a matriz *X* tal que $\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ -1 & 1 \\ 4 & -2 \end{pmatrix} + X = \begin{pmatrix} 5 & -1 \\ 4 & -3 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}$.

A matriz *X* procurada é do tipo 3×2 e a representaremos por $X = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \\ e & f \end{pmatrix}$.

Temos: $\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ -1 & 1 \\ 4 & -2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \\ e & f \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 & -1 \\ 4 & -3 \\ 3 & 2 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} 2+a & 3+b \\ -1+c & 1+d \\ 4+e & -2+f \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 & -1 \\ 4 & -3 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}$

Do conceito de igualdade, vem:

$2 + a = 5 \Rightarrow \boxed{a = 3}$ $\quad 3 + b = -1 \Rightarrow \boxed{b = -4}$ $\quad -1 + c = 4 \Rightarrow \boxed{c = 5}$

$1 + d = -3 \Rightarrow \boxed{d = -4}$ $\quad 4 + e = 3 \Rightarrow \boxed{e = -1}$ $\quad -2 + f = 2 \Rightarrow \boxed{f = 4}$

Assim, $X = \begin{pmatrix} 3 & -4 \\ 5 & -4 \\ -1 & 4 \end{pmatrix}$.

Matriz oposta

Seja a matriz $A = (a_{ij})_{m \times n}$. Chama-se *oposta* de *A* a matriz representada por $-A$, tal que $A + (-A) = O$, em que *O* é a matriz nula do tipo $m \times n$.

Da definição, decorre que $-A$ é sempre obtida de *A* trocando-se o sinal de cada um de seus elementos.

Dessa maneira, temos:

- se $A = \begin{pmatrix} -2 & \frac{1}{2} \\ 1 & -1 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$, então $-A = \begin{pmatrix} 2 & -\frac{1}{2} \\ -1 & 1 \\ 0 & -3 \end{pmatrix}$;
- se $B = \begin{pmatrix} 5 & -1 \\ -4 & 3 \end{pmatrix}$, então $-B = \begin{pmatrix} -5 & 1 \\ 4 & -3 \end{pmatrix}$.

Subtração de matrizes

Dadas duas matrizes, $A = (a_{ij})_{m \times n}$ e $B = (b_{ij})_{m \times n}$, definimos a matriz diferença $A - B$ como a soma de A com a oposta de B; isto é: $\boxed{A - B = A + (-B)}$.

Vejamos estes exemplos:

1. $\begin{pmatrix} 2 & 5 \\ -1 & 6 \\ 4 & -2 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} -2 & 3 \\ 2 & 5 \\ 3 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 5 \\ -1 & 6 \\ 4 & -2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2 & -3 \\ -2 & -5 \\ -3 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & 2 \\ -3 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$

2. $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -3 & 2 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -2 & 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -3 & 2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 2 & -5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ -1 & -3 \end{pmatrix}$

Exemplo 2

Vamos resolver a equação matricial $X - \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -3 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1/2 \\ 3 & -5 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -2 & 3/2 \\ -4 & 3 \end{pmatrix}$.

A matriz X procurada é $X = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$.

Temos:

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 3 & -4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1/2 \\ 3 & -5 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -2 & 3/2 \\ -4 & 3 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} a-2 & b+1 \\ c+3 & d-4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ -1 & -2 \end{pmatrix},$$

donde $\begin{cases} a - 2 = -1 \rightarrow a = 1 \\ b + 1 = 2 \rightarrow b = 1 \\ c + 3 = -1 \rightarrow c = -4 \\ d - 4 = -2 \rightarrow d = 2 \end{cases}$

Logo, $X = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -4 & 2 \end{pmatrix}$.

Propriedades da adição

Sendo *A*, *B* e *C* matrizes de mesmo tipo e *O* a matriz nula, valem as seguintes propriedades para a adição de matrizes:

I. $A + B = B + A$ (comutativa)

II. $(A + B) + C = A + (B + C)$ (associativa)

III. $A + (-A) = O$ (oposto)

IV. $A + O = A$ (elemento neutro)

Exemplo 3

Vamos determinar a matriz *X* tal que $X - A + B = C$, em que *A*, *B* e *C* são matrizes do mesmo tipo.

Utilizemos as propriedades acima, para "isolar" a matriz *X* nessa equação.

- **1º** Somamos, aos dois membros, a matriz oposta de *B*, que é $-B$:

$$X - A + B + (-B) = C + (-B)$$

- **2º** Usamos agora as propriedades II, III e IV:

$$(X - A) + \underbrace{(B + (-B))}_{O} = C + (-B) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow X - A = C + (-B)$$

- **3º** Somamos aos dois membros desta última equação a matriz *A* e usamos a associativa:

$$X - A + A = C + (-B) + A,$$

isto é,

$$X + \underbrace{(-A + A)}_{O} = C + (-B) + A \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \boxed{X = C - B + A}$$

A seqüência acima nos mostra que essa equação é resolvida do mesmo modo que a equação $x - a + b = c$, em que *x*, *a*, *b* e *c* são *números reais*. Assim, para *adição* e *subtração* de *matrizes* é possível simplesmente fazer: $X - A + B = C \Rightarrow X = C - B + A$.

EXERCÍCIOS

19 Calcule:

a) $\begin{pmatrix} 1 & 0 & -3 \\ 2 & -3 & -1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 4 & -2 & 1/2 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix}$

b) $\begin{pmatrix} 2 & -3 \\ \sqrt{3} & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 5 & -4 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$

c) $\begin{pmatrix} 3 & -5 \\ 2 & 7 \\ 4 & 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -3 & 5 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$

d) $\begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ -5 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 \\ -2 \\ 4 \end{pmatrix}$

20 Sejam as matrizes $A = (a_{ij})_{3 \times 2}$, em que $a_{ij} = i + 2j$, e $B = (b_{ij})_{3 \times 2}$, em que $b_{ij} = 1 + i + j$.

a) Determine a matriz A + B.
b) Determine a matriz D = A − B. Como você representaria, genericamente, um elemento d_{ij} de D?

21 Sejam $A = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 4 & 3 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ -2 & 2 \end{pmatrix}$ e $C = \begin{pmatrix} 1 & -3 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$. Determine a matriz A + B + C.

22 Resolva as seguintes equações matriciais:

a) $X + \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 11 \\ 3 \\ -2 \end{pmatrix}$

b) $X - \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 4 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & -1 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$

23 Determine a matriz X em $\begin{pmatrix} 2 & 4 \\ -3 & 5 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -1 & 3 \\ 5 & 0 \end{pmatrix} = X - \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$.

24 Sejam as matrizes $A = (a_{ij})_{7 \times 9}$, em que $a_{ij} = 2i - j$, e $B = (b_{ij})_{7 \times 9}$, em que $b_{ij} = i + j$. Seja $C = A + B$, em que $c_{ij} = a_{ij} + b_{ij}$. Determine os elementos:

a) c_{21}

b) c_{63}

25 Resolva o sistema matricial $\begin{cases} X + Y = \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \\ 5 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix} \\ X - Y = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -6 \end{pmatrix} \end{cases}$

26 Resolva o sistema $\begin{cases} X + Y + \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & 0 \\ 1/2 & -1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 3/2 & 4 \end{pmatrix} \\ X - Y = \begin{pmatrix} 6 & -3 \\ 4 & 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 2 & -2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \end{cases}$

6 Multiplicação de um número real por uma matriz

Seja a matriz $A = (a_{ij})_{m \times n}$ e k um número real diferente de zero. A multiplicação de k pela matriz A é definida como a matriz B (do tipo $m \times n$), $B = k \cdot A$, em que $b_{ij} = k \cdot a_{ij}$.

O significado é: B é obtida de A, multiplicando-se todos os seus elementos por k.

Exemplo 1

Se $A = \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 0 & -3 \\ 6 & 10 \end{pmatrix}$, então:

$$2 \cdot A = 2 \cdot \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 0 & -3 \\ 6 & 10 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 & -2 \\ 0 & -6 \\ 12 & 20 \end{pmatrix} \quad \text{e} \quad \frac{1}{3} \cdot A = \frac{1}{3} \cdot \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 0 & -3 \\ 6 & 10 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -1/3 \\ 0 & -1 \\ 2 & 10/3 \end{pmatrix}$$

Exemplo 2

Vamos resolver a equação matricial $2X = A + B$, em que $A = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ -5 & 2 \end{pmatrix}$ e $B = \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$.

Devemos determinar $X = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$.

Temos:

$$2 \cdot \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ -5 & 2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} 2a & 2b \\ 2c & 2d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & 2 \\ -6 & 2 \end{pmatrix}$$

Do conceito de igualdade, vem:

$2a = 4 \Rightarrow \boxed{a = 2}$ $\qquad$ $2b = 2 \Rightarrow \boxed{b = 1}$

$2c = -6 \Rightarrow \boxed{c = -3}$ $\qquad$ $2d = 2 \Rightarrow \boxed{d = 1}$

Assim, $X = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -3 & 1 \end{pmatrix}$.

EXERCÍCIOS

27 Dada a matriz $A = \begin{pmatrix} 1 & -11 & 3 \\ 8 & 5 & -2 \end{pmatrix}$, obtenha as matrizes:

a) $3 \cdot A$

b) $\frac{1}{2} A$

28 Sejam as matrizes $A = \begin{pmatrix} 3 & -2 \\ 1 & -5 \\ 4 & -3 \end{pmatrix}$ e $B = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -3 & 2 \\ 1 & 5 \end{pmatrix}$. Determine as seguintes matrizes:

a) $2A + B$

b) $A - 2B$

29 Sejam as matrizes $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ -1 & 2 & 2 \\ 0 & 5 & -4 \end{pmatrix}$ e $B = (b_{ij})_{3 \times 3}$, em que $b_{ij} = i - j$. Determine a matriz $\frac{1}{2}A + 4B$.

30 Sejam as matrizes $A = \begin{pmatrix} 3 & -4 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$ e $B = \begin{pmatrix} 1 & 5 \\ 3 & -1 \end{pmatrix}$.

a) Calcule $2 \cdot (A + B)$ e $2A + 2B$. Os resultados são iguais?
b) Calcule $3 \cdot (A - B)$ e $3A - 3B$. Os resultados são iguais?
c) Calcule $2 \cdot (3 \cdot A)$ e $(2 \cdot 3) \cdot A$. Os resultados são iguais?
d) Calcule $1 \cdot A$. A matriz obtida é igual a A?

31 Resolva a equação $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -3 & -2 & 4 \end{pmatrix} + 2 \cdot X = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & 5 \end{pmatrix}$.

32 Dadas as matrizes $A = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ e $C = \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$, determine a matriz X que verifica a equação $2A + B = X + 2C$.

33 Dada uma matriz $A = (a_{ij})_{m \times n}$, chama-se ***transposta de A*** a matriz $A^t = (a'_{ij})_{n \times m}$, em que $a'_{ij} = a_{ji}$, para todo i e todo j. Isso significa que as linhas de A^t são ordenadamente iguais às colunas de A (e as colunas de A^t são ordenadamente iguais às linhas de A).

Assim, se $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 3 & -1 & 4 \end{pmatrix}_{2\times3}$, então $A^t = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 1 & -1 \\ 0 & 4 \end{pmatrix}_{3\times2}$, e se $B = \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 4 & 5 \end{pmatrix}_{2\times2}$, então $B^t = \begin{pmatrix} 0 & 4 \\ 2 & 5 \end{pmatrix}_{2\times2}$.

Sendo $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -3 & 4 \end{pmatrix}$ e $B = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 4 & 3 \\ -2 & 5 \end{pmatrix}$, determine:

a) $2A + A^t$

b) B^t

34 Determine X em $3X + 2A = B^t + 2X$, se $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ -2 & -1 & 3 \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ e $B = \begin{pmatrix} 5 & -1 & 4 \\ 1 & 2 & 3 \\ -3 & -4 & 1 \end{pmatrix}$.

35 Resolva a equação $2X^t - 3A = B$, se $A = \begin{pmatrix} 4 & -3 \\ 5 & 2 \end{pmatrix}$ e $B = \begin{pmatrix} 0 & -2 \\ 1 & 4 \end{pmatrix}$.

36 Resolva o sistema $\begin{cases} 2X + Y = \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 5 & -3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & -2 \end{pmatrix} \\ 3X + 2Y = \begin{pmatrix} 1/2 & -1/4 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1/2 & -3/2 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \end{cases}$

37 (UF-RS) Uma matriz A é dita *simétrica* quando $A = A^t$. Sabendo-se que a matriz $\begin{pmatrix} 1 & 2 & y \\ x & 4 & 5 \\ 3 & z & 6 \end{pmatrix}$ é simétrica, qual é o valor de $x + y + z$?

38 (UC-GO) Uma matriz quadrada A é dita simétrica se $A = A^T$ e é dita anti-simétrica se $A^T = -A$, em que A^T é a matriz transposta de A. Analise a afirmação seguinte:

Se A é uma matriz quadrada, então $A + A^T$ é uma matriz simétrica e $A - A^T$ é uma matriz anti-simétrica.

39 (UE-CE) Sejam as matrizes $P_1 = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, $P_2 = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$ e $I = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$.

Se $(2 - n) \cdot I + n \cdot P_1 = P_2$ $(n \in \mathbb{N})$, quanto vale $n^2 - 2n + 7$?

7 Multiplicação de matrizes

Introdução

Suponhamos que um jornal esportivo, o *Brasil*, circule em todo o país. Seu preço varia de acordo com o Estado em que é vendido, pois leva-se em consideração a distância ao Estado de São Paulo, onde ele é produzido.

As bancas de jornal "Leia Já", que distribuem o jornal *Brasil*, fazem parte de uma rede com sede em São Paulo e filiais em Belo Horizonte, Salvador e Recife.

O proprietário da rede decidiu, durante uma semana, fazer um levantamento sobre a arrecadação gerada pelas vendas do jornal *Brasil*, a fim de estimar qual fração dessa receita representavam as vendas do domingo.

5 −1 4
1 2 3
-3 −4 1

que a matriz

é dita anti-
se a afirma-

simétrica e

preço varia
distância ao

le uma rede

ento sobre a
lessa receita

Na semana em que foi realizado o levantamento, foram vendidas as seguintes quantidades:

Cidade	Número de exemplares vendidos: de segunda-feira a sábado	Número de exemplares vendidos: domingo
São Paulo	248	46
Belo Horizonte	93	32
Salvador	62	29
Recife	57	25

Na tabela seguinte, é possível encontrar o preço de venda do *Brasil* em cada cidade citada:

Cidade	Preço (em reais)
São Paulo	1,50
Belo Horizonte	2,00
Salvador	2,60
Recife	3,00

Qual foi a receita obtida pelas vendas de *Brasil* de segunda-feira a sábado nessas cidades? E aos domingos?

- De acordo com as tabelas anteriores, a arrecadação de *segunda-feira a sábado* pode ser assim calculada:

$$\underbrace{248 \cdot 1{,}50}_{\text{São Paulo}} + \underbrace{93 \cdot 2{,}00}_{\text{Belo Horizonte}} + \underbrace{62 \cdot 2{,}60}_{\text{Salvador}} + \underbrace{57 \cdot 3{,}00}_{\text{Recife}} = 890{,}20 \quad \text{(I)}$$

- A arrecadação de *domingo* é calculada como segue:

$$\underbrace{46 \cdot 1{,}50}_{\text{São Paulo}} + \underbrace{32 \cdot 2{,}00}_{\text{Belo Horizonte}} + \underbrace{29 \cdot 2{,}60}_{\text{Salvador}} + \underbrace{25 \cdot 3{,}00}_{\text{Recife}} = 283{,}40 \quad \text{(II)}$$

Construiremos duas matrizes: a matriz "vendas" e a matriz "preços". O cálculo anterior sugere um processo para se multiplicarem matrizes. A matriz resultante corresponde à arrecadação da semana.

$$\underbrace{\begin{pmatrix} 248 & 93 & 62 & 57 \\ 46 & 32 & 29 & 25 \end{pmatrix}_{2\times 4}}_{\text{"vendas"}} \cdot \underbrace{\begin{pmatrix} 1{,}50 \\ 2{,}00 \\ 2{,}60 \\ 3{,}00 \end{pmatrix}_{4\times 1}}_{\text{"preços"}} = \begin{pmatrix} 890{,}20 \\ 283{,}40 \end{pmatrix}_{2\times 1} \begin{array}{l} \leftarrow \text{arrecadação de segunda-feira a sábado} \\ \leftarrow \text{arrecadação de domingo} \end{array}$$

Note que (I), por exemplo, corresponde a tomar a 1ª linha da matriz "vendas", a 1ª (e única) coluna da matriz "preços" e somar os respectivos produtos.

Esse exemplo facilita a compreensão da definição formal de produto de matrizes.

Definição

Dadas as matrizes $A = (a_{ij})_{m \times n}$ e $B = (b_{jk})_{n \times p}$, chama-se *produto de A por B*, e se indica por $A \cdot B$, a matriz $C = (c_{ik})_{m \times p}$, em que um elemento qualquer c_{ik} é obtido da seguinte maneira:

- **1º** Tomamos ordenadamente os n elementos da linha i da matriz A: $a_{i1}, a_{i2}, ..., a_{in}$. (I)
- **2º** Tomamos ordenadamente os n elementos da coluna k da matriz B: $b_{1k}, b_{2k}, ..., b_{nk}$. (II)
- **3º** Multiplicamos o 1º elemento de (I) pelo 1º elemento de (II), o 2º elemento de (I) pelo 2º elemento de (II), e assim sucessivamente.
- **4º** Somamos os produtos obtidos.

Assim:

$$c_{ik} = a_{i1} \cdot b_{1k} + a_{i2} \cdot b_{2k} + ... + a_{in} \cdot b_{nk}$$

Observações

1ª) A definição garante a existência do produto AB se, e somente se, o número de colunas de A é igual ao número de linhas de B.

2ª) A matriz produto C = AB é uma matriz cujo número de linhas é igual ao número de linhas de A e o número de colunas é igual ao número de colunas de B. Observemos o esquema abaixo:

$$A_{(m \times \mathbf{n})} \cdot B_{(\mathbf{n} \times p)} = C_{(m \times p)}$$

garante a existência do produto

3ª) Notemos que, se A é do tipo m × n e B é do tipo n × p, com p diferente de m, então AB existe, mas BA não existe, pois:

$$B_{(n \times \mathbf{p})} \cdot A_{(\mathbf{m} \times n)}$$

diferentes!

Exemplo 1

Dadas as matrizes $A = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 1 \\ -1 & 0 & 2 \end{pmatrix}$ e $B = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 0 & 5 \\ 4 & 1 \end{pmatrix}$, vamos determinar, se existirem, AB e BA.

1º Como A é do tipo 2×3 e B é do tipo 3×2, segue que $\boxed{C = A \cdot B}$ existe e é do tipo 2×2. Escrevendo os elementos de C em sua forma genérica, temos $C = \begin{pmatrix} c_{11} & c_{12} \\ c_{21} & c_{22} \end{pmatrix}_{2 \times 2}$.

Da definição, vem:

- c_{11}: (linha 1 de A e coluna 1 de B); $c_{11} = 2 \cdot 1 + 3 \cdot 0 + 1 \cdot 4 = 6$

$$\begin{array}{|c|c|c|} \hline 2 & 3 & 1 \\ \hline \end{array} \qquad \begin{array}{|c|} \hline 1 \\ \hline 0 \\ \hline 4 \\ \hline \end{array}$$

- c_{12}: (linha 1 de A e coluna 2 de B); $c_{12} = 2 \cdot (-2) + 3 \cdot 5 + 1 \cdot 1 = 12$

$$\begin{array}{|c|c|c|} \hline 2 & 3 & 1 \\ \hline \end{array} \qquad \begin{array}{|c|} \hline -2 \\ \hline 5 \\ \hline 1 \\ \hline \end{array}$$

- c_{21}: (linha 2 de A e coluna 1 de B); $c_{21} = (-1) \cdot 1 + 0 \cdot 0 + 2 \cdot 4 = 7$

$$\begin{array}{|c|c|c|} \hline -1 & 0 & 2 \\ \hline \end{array} \qquad \begin{array}{|c|} \hline 1 \\ \hline 0 \\ \hline 4 \\ \hline \end{array}$$

- c_{22}: (linha 2 de A e coluna 2 de B); $c_{22} = (-1) \cdot (-2) + 0 \cdot 5 + 2 \cdot 1 = 4$

$$\begin{array}{|c|c|c|} \hline -1 & 0 & 2 \\ \hline \end{array} \qquad \begin{array}{|c|} \hline -2 \\ \hline 5 \\ \hline 1 \\ \hline \end{array}$$

Assim, $C = \begin{pmatrix} 6 & 12 \\ 7 & 4 \end{pmatrix}$.

▶ **2º** Como *B* é do tipo 3 × 2 e *A* é do tipo 2 × 3, segue que $D = B \cdot A$ existe e é do tipo 3 × 3.

Assim, $D = \begin{pmatrix} d_{11} & d_{12} & d_{13} \\ d_{21} & d_{22} & d_{23} \\ d_{31} & d_{32} & d_{33} \end{pmatrix}$.

Aplicando a definição, vem:

- d_{11}: (linha 1 de *B* e coluna 1 de *A*); $d_{11} = 1 \cdot 2 + (-2)(-1) = 4$

$$\begin{bmatrix} 1 & -2 \end{bmatrix} \qquad \begin{bmatrix} 2 \\ -1 \end{bmatrix}$$

- d_{12}: (linha 1 de *B* e coluna 2 de *A*); $d_{12} = 1 \cdot 3 + (-2) \cdot 0 = 3$

$$\begin{bmatrix} 1 & -2 \end{bmatrix} \qquad \begin{bmatrix} 3 \\ 0 \end{bmatrix}$$

- d_{13}: (linha 1 de *B* e coluna 3 de *A*); $d_{13} = 1 \cdot 1 + (-2) \cdot 2 = -3$

$$\begin{bmatrix} 1 & -2 \end{bmatrix} \qquad \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}$$

- d_{21}: (linha 2 de *B* e coluna 1 de *A*); $d_{21} = 0 \cdot 2 + 5\,(-1) = -5$

$$\begin{bmatrix} 0 & 5 \end{bmatrix} \qquad \begin{bmatrix} 2 \\ -1 \end{bmatrix}$$

- d_{22}: (linha 2 de *B* e coluna 2 de *A*); $d_{22} = 0 \cdot 3 + 5 \cdot 0 = 0$

$$\begin{bmatrix} 0 & 5 \end{bmatrix} \qquad \begin{bmatrix} 3 \\ 0 \end{bmatrix}$$

- d_{23}: (linha 2 de *B* e coluna 3 de *A*); $d_{23} = 0 \cdot 1 + 5 \cdot 2 = 10$

$$\begin{bmatrix} 0 & 5 \end{bmatrix} \qquad \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}$$

- d_{31}: (linha 3 de *B* e coluna 1 de *A*); $d_{31} = 4 \cdot 2 + 1\,(-1) = 7$

$$\begin{bmatrix} 4 & 1 \end{bmatrix} \qquad \begin{bmatrix} 2 \\ -1 \end{bmatrix}$$

- d_{32}: (linha 3 de *B* e coluna 2 de *A*); $d_{32} = 4 \cdot 3 + 1 \cdot 0 = 12$

$$\begin{bmatrix} 4 & 1 \end{bmatrix} \qquad \begin{bmatrix} 3 \\ 0 \end{bmatrix}$$

- d_{33}: (linha 3 de B e coluna 3 de A); $d_{33} = 4 \cdot 1 + 1 \cdot 2 = 6$

$$\begin{array}{|c|c|}\hline 4 & 1 \\ \hline \end{array} \qquad \begin{array}{|c|}\hline 1 \\ \hline 2 \\ \hline \end{array}$$

Logo, $D = \begin{pmatrix} 4 & 3 & -3 \\ -5 & 0 & 10 \\ 7 & 12 & 6 \end{pmatrix}$.

Exemplo 2

Dadas as matrizes $A = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ -1 & 5 \end{pmatrix}$ e $B = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$, determinemos AB e BA.

▶ **1º** Como A é do tipo 2×2 e B é do tipo 2×2, segue que $C = A \cdot B$ existe e é do tipo 2×2, isto é:

$$\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ -1 & 5 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c_{11} & c_{12} \\ c_{21} & c_{22} \end{pmatrix},$$

em que:

$c_{11} = 2 \cdot 0 + 3\,(-1) = -3$

$c_{21} = (-1) \cdot 0 + 5\,(-1) = -5$

$c_{12} = 2 \cdot 1 + 3 \cdot 2 = 8$

$c_{22} = (-1) \cdot 1 + 5 \cdot 2 = 9$

Assim, $C = AB = \begin{pmatrix} -3 & 8 \\ -5 & 9 \end{pmatrix}$.

▶ **2º** $D = B \cdot A$ existe e é do tipo 2×2, isto é:

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ -1 & 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} d_{11} & d_{12} \\ d_{21} & d_{22} \end{pmatrix},$$

em que:

$d_{11} = 0 \cdot 2 + 1 \cdot (-1) = -1$

$d_{21} = (-1) \cdot 2 + 2 \cdot (-1) = -4$

$d_{12} = 0 \cdot 3 + 1 \cdot 5 = 5$

$d_{22} = (-1) \cdot 3 + 2 \cdot 5 = 7$

Assim, $D = BA = \begin{pmatrix} -1 & 5 \\ -4 & 7 \end{pmatrix}$.

Observação

Notemos, nesse exemplo, que AB e BA existem, mas $AB \neq BA$. Isso sugere que, em geral, o produto de matrizes não é comutativo. Quando $AB = BA$, dizemos que ***A*** *e* ***B*** *comutam*.

Exemplo 3

Sejam as matrizes $A = (a_{ij})_{6 \times 3}$, em que $a_{ij} = i + j$, e $B = (b_{jk})_{3 \times 8}$, em que $b_{jk} = 2j - k$. Sendo $C = A \cdot B = (c_{ik})_{6 \times 8}$, vamos determinar o elemento c_{35}.

O elemento c_{35} da matriz produto *C* será obtido tomando-se a linha 3 de *A* e a coluna 5 de *B*. Dessa forma, usamos a "regra de formação" dos elementos de *A* e *B* para determinar as filas procuradas:

$$A = \begin{pmatrix} \dots & \dots & \dots \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \\ \dots & \dots & \dots \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \dots & \dots & \dots \\ 4 & 5 & 6 \\ \dots & \dots & \dots \end{pmatrix}_{6 \times 3} ; \; B = \begin{pmatrix} \dots & b_{15} & \dots \\ \dots & b_{25} & \dots \\ \dots & b_{35} & \dots \end{pmatrix}_{3 \times 8} = \begin{pmatrix} \dots & -3 & \dots \\ \dots & -1 & \dots \\ \dots & 1 & \dots \end{pmatrix}$$

Assim, $c_{35} = 4 \cdot (-3) + 5 \cdot (-1) + 6 \cdot 1 = -11$.

Exemplo 4

Vamos encontrar a matriz *X* em $A \cdot X = B$, em que $A = \begin{pmatrix} 2 & -4 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}$ e $B = \begin{pmatrix} 5 \\ -3 \end{pmatrix}$.

Precisamos, inicialmente, determinar o tipo da matriz *X*.

Temos:

$$\underset{(2 \times 2)}{\underset{\downarrow}{A}} \cdot \underset{(n \times p)}{\underset{\downarrow}{X}} = \underset{(2 \times 1)}{\underset{\downarrow}{B}}$$

Devemos ter:

- $n = 2$, para garantir a existência do produto;
- $p = 1$, pois o número de colunas de *X* é igual ao número de colunas de *B*.

Assim, $X = \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$.

Daí, $\begin{pmatrix} 2 & -4 \\ 3 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \\ -3 \end{pmatrix}$.

Efetuando o produto, vem: $\begin{pmatrix} 2a - 4b \\ 3a + b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \\ -3 \end{pmatrix}$, donde resulta o sistema $\begin{cases} 2a - 4b = 5 \\ 3a + b = -3 \end{cases}$, cuja solução é $a = -\frac{1}{2}$ e $b = -\frac{3}{2}$.

Logo, $X = \begin{pmatrix} -1/2 \\ -3/2 \end{pmatrix}$.

Propriedades da multiplicação

Supondo que existam todas as operações abaixo, valem as seguintes propriedades para a multiplicação de matrizes:

I. *associativa:*

$$(A \cdot B) \cdot C = A \cdot (B \cdot C)$$

II. *distributiva à direita em relação à adição/subtração:*

$$(A \pm B) \cdot C = A \cdot C \pm B \cdot C$$

III. *distributiva à esquerda em relação à adição/subtração:*

$$C \cdot (A \pm B) = C \cdot A \pm C \cdot B$$

No exercício 48 poderemos verificar tais propriedades.

EXERCÍCIOS

40 Determine, se existirem, os produtos:

a) $\begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 4 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 & 4 & 3 & -2 \\ 0 & 1 & 1 & -3 \end{bmatrix}$

b) $\begin{pmatrix} 4 & -3 \\ 2 & 5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$

c) $\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 0 & -3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 4 & 2 \\ 3 & 5 \\ 5 & -2 \end{pmatrix}$

41 Determine, se existirem, os produtos:

a) $\begin{pmatrix} 1 & 10 & -6 \\ 5 & 2 & 0 \\ -3 & -1 & -3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 5 \\ -2 \end{pmatrix}$

b) $\begin{pmatrix} 4 & -3 \\ 2 & 1 \\ 0 & -1 \\ 3 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 3 & 5 \end{pmatrix}$

c) $\begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 5 & 2 \\ -3 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 4 \\ 0 \\ 5 \\ 2 \end{bmatrix}$

d) $\begin{pmatrix} 1 & -2 & 0 \\ 5 & 0 & 4 \\ 2 & -3 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & 4 \\ -3 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

42 Determine, se existirem, os produtos:

a) $\begin{pmatrix} 3 & 5 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 4 \\ 5 \\ 0 \end{pmatrix}$

b) $\begin{pmatrix} 2 \\ 10 \\ 5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 4 & -1 & 3 \end{pmatrix}$

c) $\begin{pmatrix} 1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 4 & -3 \end{pmatrix}$

43 Sejam as matrizes $A = \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 0 & 2 \\ 1 & 4 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & -3 \end{pmatrix}$ e $C = \begin{pmatrix} 4 \\ -1 \end{pmatrix}$. Determine, se existir:

a) $A \cdot B$ b) $B \cdot A$ c) $A \cdot C$ d) $B^t \cdot C$ e) $B \cdot A^t$

44 Sejam as matrizes $A = \begin{pmatrix} 4 & -1 & 5 & 3 \\ 0 & -2 & 0 & 1 \\ 4 & 3 & 2 & 5 \\ 1 & -3 & 0 & 8 \end{pmatrix}$ e $B = \begin{pmatrix} 10 & -6 \\ 5 & -3 \\ -2 & 4 \\ 1 & 8 \end{pmatrix}$.

Se $C = (c_{ij})_{4 \times 2}$ é a matriz produto $A \cdot B$, determine, se existirem, os elementos:

a) c_{12} b) c_{41} c) c_{23}

45 Calcule x e y em $\begin{pmatrix} 2 & x \\ y & -3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 4 \\ -5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -3 \end{pmatrix}$.

46 Sejam as matrizes $A = (a_{ij})_{6 \times 3}$, em que $a_{ij} = i + j$, e $B = (b_{jk})_{3 \times 4}$, em que $b_{jk} = 3j - 2k$. Sendo $C = (c_{ik})_{6 \times 4}$ a matriz produto $A \cdot B$, determine o elemento c_{52}.

47 (UF-SC) Sejam $A = (a_{ij})_{4 \times 3}$ e $B = (b_{ij})_{3 \times 4}$ duas matrizes definidas por $a_{ij} = i + j$ e $b_{ij} = 2i + j$, respectivamente.
Se $A \cdot B = C$, então qual é o elemento c_{32} da matriz C?

48 Sejam as matrizes $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & -3 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 4 & 1 \\ 1 & -2 \end{pmatrix}$ e $C = \begin{pmatrix} 7 & 3 \\ -4 & 2 \end{pmatrix}$.

a) Calcule $(A + B) \cdot C$ e $A \cdot C + B \cdot C$. Os resultados são iguais?
b) Calcule $(A - B) \cdot C$ e $A \cdot C - B \cdot C$. Os resultados são iguais?
c) Calcule $(A \cdot B) \cdot C$ e $A \cdot (B \cdot C)$. Os resultados são iguais?
d) Calcule $A \cdot B$ e $B \cdot A$. Os resultados são iguais?

49 Determine x e y a fim de que as matrizes $\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ -3 & 4 \end{pmatrix}$ e $\begin{pmatrix} 3 & x \\ y & 1 \end{pmatrix}$ comutem.

50 Encontre todas as matrizes quadradas de ordem 2 que comutam com a matriz $\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$.

51 Dois alunos, A e B, apresentaram a seguinte pontuação em uma prova de português e em outra de matemática:

	Português	Matemática
aluno A	4	6
aluno B	9	3

a) Se o peso da prova de português é 3 e o da prova de matemática é x, obtenha, através de produto de matrizes, a matriz que fornece a pontuação total dos alunos A e B.

b) Qual deve ser o valor de x a fim de que A e B apresentem mesma pontuação final?

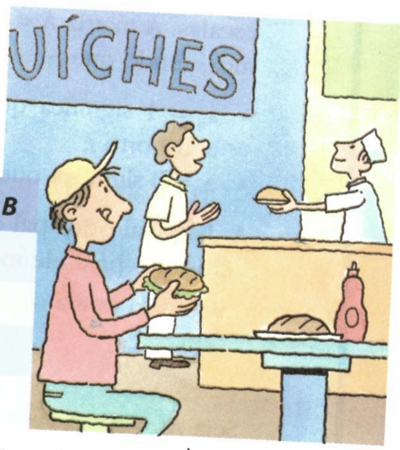
52 Seja A uma matriz quadrada de ordem n; definimos $A^2 = A \cdot A$. Assim, determine A^2 nos seguintes casos:

a) $A = \begin{pmatrix} -1 & -3 \\ 4 & 5 \end{pmatrix}$

b) $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -2 \\ 0 & 3 & 4 \\ -4 & -1 & 0 \end{pmatrix}$

53 Resolva a equação $X \cdot \begin{pmatrix} 2 & -3 \\ 1 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 3 \\ -1 & 5 \end{pmatrix}$.

54 Um *fast-food* de sanduíches naturais vende dois tipos de sanduíche, A e B, utilizando os ingredientes (queijo, atum, salada, rosbife) nas seguintes quantidades (em gramas) por sanduíche:



	Sanduíche A	Sanduíche B
queijo	18 g	10 g
salada	26 g	33 g
rosbife	23 g	12 g
atum	—	16 g

Durante um almoço foram vendidos 6 sanduíches do tipo A e 10 sanduíches do tipo B. Qual foi a quantidade necessária de cada ingrediente para a preparação desses 16 sanduíches? Represente-a na forma de produto de matrizes.

55 Sendo $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -3 & 4 \end{pmatrix}$ e $B = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 4 & 3 \\ -2 & 5 \end{pmatrix}$, resolva a equação $A^t \cdot X = B^t$.

56 Resolva a equação $A \cdot X + B = C$, na qual $A = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 1 & 3 \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} 1 \\ 5 \end{bmatrix}$ e $C = \begin{bmatrix} 0 \\ -3 \end{bmatrix}$.

57 Resolva a equação $A \cdot B = X \cdot C$, se $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -3 \\ 2 & 1 & 4 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -4 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$ e $C = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$.

58 (Fuvest-SP, adaptado) É dada a matriz $P = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$.

a) Calcule P^2, P^3 e P^4.
b) Intuitivamente, qual é a expressão de P^n ($n \in \mathbb{N}$)?

59 (UC-MG) O produto das matrizes $A = \begin{pmatrix} -2 & x \\ 3 & 1 \end{pmatrix}$ e $B = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ é uma matriz simétrica. Qual é o valor de x?

60 (Vunesp-SP) Considere as matrizes reais 2×2 do tipo:

$$A(x) = \begin{bmatrix} \cos x & \operatorname{sen} x \\ \operatorname{sen} x & \cos x \end{bmatrix}$$

a) Calcule o produto $A(x) \cdot A(x)$.
b) Determine todos os valores de $x \in [0, 2\pi]$ para os quais $A(x) \cdot A(x) = A(x)$.

61 (UF-MT) Os aeroportos 1, 2 e 3 estão interligados por vôos diretos e/ou com escalas. A matriz $A = (a_{ij})$, abaixo, descreve a forma de interligação dos mesmos, sendo que:

- $a_{ij} = 1$ significa que há vôo direto (sem escala) do aeroporto i para o aeroporto j;
- $a_{ij} = 0$ significa que não há vôo direto do aeroporto i para o aeroporto j.

A diagonal principal de A é nula, significando que não há vôo direto de um aeroporto para ele mesmo.

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Seja $A^2 = A \cdot A = (b_{ij})$. Se $b_{ij} \neq 0$ significa que há vôo do aeroporto i para o aeroporto j com uma escala. Com base nessas informações, julgue os itens.

a) Há vôo direto do aeroporto 1 para o aeroporto 3, mas não há vôo direto do aeroporto 3 para o 1.
b) Há vôo do aeroporto 2 para o aeroporto 3 com uma escala.

62 Sendo $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}$ e $B = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$, determine $A \cdot B$.

Tente relacionar o resultado obtido com uma conhecida propriedade de números reais. Qual é a conclusão?

8 Matriz identidade

Definição

Seja A uma matriz quadrada de ordem n. A é dita *matriz identidade de ordem* $\boldsymbol{n}$ (indica-se por I_n) quando os elementos de sua diagonal principal são todos iguais a 1, e os demais elementos são iguais a zero.

Assim:

- $I_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ é a matriz identidade de ordem 2.
- $I_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ é a matriz identidade de ordem 3.

$\vdots$

- $I_n = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & & \vdots \\ \vdots & & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & \cdots & 1 \end{pmatrix}$ é a matriz identidade de ordem n.

Propriedade

Qualquer que seja a matriz quadrada A de ordem n, tem-se:

$$A \cdot I_n = A \quad \text{e} \quad I_n \cdot A = A$$

Veja dois exemplos:

$$\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 1 & -5 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 1 & -5 \end{pmatrix} \quad \text{e} \quad \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -2 & 4 & 3 \\ 1 & 5 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 & 4 & 3 \\ 1 & 5 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

Devido a essa propriedade, a matriz identidade funciona como elemento neutro na multiplicação de matrizes.

9 Matriz inversa

Definição

Seja A uma matriz quadrada de ordem n. A é dita inversível (ou invertível) se existir uma matriz B tal que:

$$A \cdot B = B \cdot A = I_n$$

Nesse caso, B é dita *inversa* de A e indicada por A^{-1}.

Exemplo 1

A inversa de $A = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 4 & -3 \end{pmatrix}$ é $A^{-1} = \begin{pmatrix} 1/2 & 0 \\ 2/3 & -1/3 \end{pmatrix}$, pois:

$$A \cdot A^{-1} = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 4 & -3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1/2 & 0 \\ 2/3 & -1/3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{e} \quad A^{-1} \cdot A = \begin{pmatrix} 1/2 & 0 \\ 2/3 & -1/3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 4 & -3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Exemplo 2

Vamos encontrar, se existir, a inversa de $A = \begin{pmatrix} 4 & -5 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}$.

Devemos determinar $A^{-1} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ tal que $A \cdot A^{-1} = I_2$.

Temos:

$$\begin{pmatrix} 4 & -5 \\ 3 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} 4a - 5c & 4b - 5d \\ 3a + c & 3b + d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Do conceito de igualdade, seguem os sistemas:

$$\begin{cases} 4a - 5c = 1 \\ 3a + c = 0 \end{cases} \Rightarrow a = \frac{1}{19} \quad \text{e} \quad c = \frac{-3}{19}$$

$$\begin{cases} 4b - 5d = 0 \\ 3b + d = 1 \end{cases} \Rightarrow b = \frac{5}{19} \quad \text{e} \quad d = \frac{4}{19}$$

Assim, $A^{-1} = \begin{pmatrix} 1/19 & 5/19 \\ -3/19 & 4/19 \end{pmatrix} = \frac{1}{19} \begin{pmatrix} 1 & 5 \\ -3 & 4 \end{pmatrix}$.

É fácil verificar que a outra condição, $A^{-1} \cdot A = I_2$, está satisfeita.

Exemplo 3

Sejam *A* e *B* matrizes quadradas de mesma ordem e invertíveis.
Como podemos "isolar" a matriz *X* em $A \cdot X = B$?

- Multiplicamos os dois membros, à esquerda, por A^{-1}:

$$A^{-1} \cdot (A \cdot X) = A^{-1} \cdot B$$

- Usamos a associativa, a definição de matriz inversa e o elemento neutro:

$$\underbrace{(A^{-1} \cdot A)}_{I} \cdot X = A^{-1} \cdot B$$

$$I \cdot X = A^{-1} \cdot B \Rightarrow \boxed{X = A^{-1} \cdot B}$$

EXERCÍCIOS

63 Verifique se $\begin{pmatrix} 3/5 & -2/5 \\ 1/5 & 1/5 \end{pmatrix}$ é a inversa de $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 3 \end{pmatrix}$.

64 Determine, se existir, a inversa da matriz $\begin{pmatrix} -2 & 1/2 \\ 4 & 1 \end{pmatrix}$.

65 Seja $A = \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$. Determine $10 \cdot A^{-1}$.

66 Sejam as matrizes $A = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ e $B = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -3 & 4 \end{pmatrix}$. Determine:

a) $A^{-1} + B$

b) $A^{-1} \cdot B$

67 Determine, se existir, a matriz inversa de $\begin{pmatrix} 2 & 4 \\ -1 & -2 \end{pmatrix}$.

68 Seja A^{-1} a inversa de $A = \begin{pmatrix} -9 & 4 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}$. Determine:

a) $A + A^{-1}$

b) $(A^{-1})^2 + A^2$

69 A inversa de $\begin{pmatrix} y & -3 \\ -2 & x \end{pmatrix}$ é a matriz $\begin{pmatrix} x & x-4 \\ x-5 & 1 \end{pmatrix}$. Determine x e y.

70 Determine a matriz inversa de $X = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 \\ 1 & 0 & 3 \end{pmatrix}$.

71 Qual é a inversa da matriz $X = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$?

72 (UC-GO) Determine x a fim de que a matriz $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & x \end{pmatrix}$ seja igual a sua inversa.

73 (ITA-SP) Sendo $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 0 & -3 & 2 \\ 3 & -1 & -2 \end{bmatrix}$, determine o elemento da 3ª linha e 1ª coluna de A^{-1}.

74 Usando a inversão de matrizes, resolva a equação $A \cdot X = B$, se $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$ e $B = \begin{pmatrix} 3 & -4 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$.

75 Supondo invertíveis e de mesma ordem todas as matrizes envolvidas, isolar a matriz X em:

a) $X \cdot B + A = C$

b) $A^{-1} \cdot X = B^{-1}$

TESTES *de* VESTIBULARES

1 (UA-AM) Sendo as matrizes

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 0 & -4 \\ 3 & -6 & 1 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} -8 & 2 & -1 \\ 0 & 4 & 10 \end{pmatrix}.$$

e $C = \begin{pmatrix} 6 & -8 & 7 \\ -4 & -2 & 6 \end{pmatrix}$, a matriz

$-2A + \frac{1}{2}B - \frac{3}{2}C$ é igual a:

a) $\begin{pmatrix} -11 & 13 & -3 \\ 0 & 17 & -6 \end{pmatrix}$ d) $\begin{pmatrix} -17 & 18 & -3 \\ -12 & 11 & -6 \end{pmatrix}$

b) $\begin{pmatrix} -17 & 18 & 19 \\ 0 & 17 & -12 \end{pmatrix}$ e) $\begin{pmatrix} 7 & -11 & 6 \\ 18 & 0 & -12 \end{pmatrix}$

c) $\begin{pmatrix} -11 & 13 & 19 \\ -12 & 11 & -6 \end{pmatrix}$

2 (Ucsal-BA) A igualdade matricial

$$2 \cdot \begin{bmatrix} x & x^2 - 1 \\ -1 & -x \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x^2 + 6x & 30 \\ -2 & -2x \end{bmatrix},$$

em que $x \in \mathbb{R}$, é verdadeira se, e somente se, x^3 é igual a:

a) −64 d) −64 ou 64

b) 64 e) −64, 0 ou 64

c) 0

3 (PUC Pelotas-RS) Seja a matriz

$A = (a_{ij})_{3 \times 3}$, na qual $a_{ij} = \begin{cases} 0 \text{ se } i = j \\ 1 \text{ se } i > j \\ -1 \text{ se } i < j \end{cases}$;

então $A - A^t + I_3$ resulta na matriz:

a) $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ d) $\begin{pmatrix} 1 & 2 & -2 \\ -2 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & -2 \end{pmatrix}$

b) $\begin{pmatrix} 0 & -2 & -2 \\ 2 & 0 & -2 \\ 2 & 2 & 0 \end{pmatrix}$ e) $\begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$

c) $\begin{pmatrix} 1 & -2 & -2 \\ 2 & 1 & -2 \\ 2 & 2 & 1 \end{pmatrix}$

4 (UF-AL) O elemento localizado na segunda linha e terceira coluna da matriz $A = (a_{ij})_{3 \times 3}$ definida por

$$a_{ij} = \begin{cases} \sqrt{i}\,, \text{ se } i < j \\ \log j, \text{ se } i = j \\ i^j, \text{ se } i > j \end{cases} \text{ é}$$

a) 8 d) $\sqrt{3}$

b) log 3 e) $\sqrt{2}$

c) log 2

5 (Unificado-RJ) Resolvendo-se a equação matricial $\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 4 & 3 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 \\ 10 \end{bmatrix}$, encontramos para x e y valores respectivamente iguais a:

a) −2 e 1 d) 1 e 2

b) −1 e 2 e) 2 e −1

c) 1 e −2

6 (UA-AM) Se $\begin{bmatrix} 1 & 4 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & x \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$, então o valor de 2x é:

a) 1 c) 2 e) 0

b) $\frac{1}{2}$ d) 4

7 (UF-SE) A matriz $A = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 2 \\ 3 & 3 & 3 \\ 8 & 7 & 4 \end{pmatrix}$

pode ser descrita como a matriz $A = (a_{ij})_{3 \times 3}$ tal que a_{ij} é igual a:

a) $\begin{cases} 1 + i \text{ se } i \leq j \\ i^2 - j \text{ se } i > j \end{cases}$ d) $\begin{cases} 1 + i \text{ se } i \leq 2 \\ i^2 - 1 \text{ se } i = 3 \end{cases}$

b) $\begin{cases} 1 + i \text{ se } i \leq j \\ 2(i + j) \text{ se } i > j \end{cases}$ e) $\begin{cases} 1 + j \text{ se } i \leq 2 \\ i^2 - j \text{ se } i = 3 \end{cases}$

c) $\begin{cases} 1 + i \text{ se } i \leq 2 \\ 4(i - j) \text{ se } i = 3 \end{cases}$

8 (PUC-MG)

Se $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ a & b \end{bmatrix}$ e $A^2 = \begin{bmatrix} 9 & -4 \\ -8 & 17 \end{bmatrix}$,

o valor do produto ab é:

a) -4 c) -8 e) -17
b) -6 d) -12

9 (UF-RN) Dadas as matrizes

$A = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 4 \end{bmatrix}$ e $B = \begin{bmatrix} 4 & 3 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}$, qual é o resultado de $AB - BA$?

a) $\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$ d) $\begin{bmatrix} 20 & 48 \\ 8 & 20 \end{bmatrix}$

b) $\begin{bmatrix} 0 & -18 \\ 12 & 0 \end{bmatrix}$ e) $\begin{bmatrix} 20 & -18 \\ 12 & 20 \end{bmatrix}$

c) $\begin{bmatrix} 20 & 12 \\ 32 & 20 \end{bmatrix}$

10 (Fafi-MG)

Se $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 8 \end{bmatrix}$ e $B = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$,

então o maior elemento de $A \cdot B$ é:

a) 19 c) 30
b) 20 d) 31

11 (Unifor-CE) Diz-se que uma matriz quadrada é simétrica se ela for igual à sua matriz transposta.
Nessas condições, a matriz

$\begin{bmatrix} 2 & -1 & x^2 - 4 \\ x + 1 & 1 & 2y \\ 0 & 2 + y & 2 \end{bmatrix}$ é simétrica se, e somente se:

a) $x = y = 2$
b) $x = y = -2$
c) $x = -2$ e $y = 2$
d) $x = -1$ e $y = 2$
e) $x = 2$ e $y = -1$

12 (Covest-PE) Assinale a proposição verdadeira:

O produto da matriz $\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ pela matriz $\begin{bmatrix} x & y \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ é comutativo se:

a) $x = 1$ e $y = 0$
b) $x = 2$ e $y = 0$
c) $x = 1$ e para todo $y \in \mathbb{R}$
d) $x = 5$ e para todo $y \in \mathbb{R}$
e) $x = 10$ e $y = 10$

13 (Funrei-MG) Sendo *A* uma matriz quadrada, definimos $A^n = \underbrace{A \cdot A \cdot ... \cdot A}_{n \text{ vezes}}$.

No caso de *A* ser a matriz $\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$,

é *correto* afirmar que a soma

$A + A^2 + A^3 + A^4 + ... + A^{39} + A^{40}$

é igual à matriz:

a) $\begin{bmatrix} 20 & 20 \\ 20 & 20 \end{bmatrix}$ c) $\begin{bmatrix} 40 & 40 \\ 40 & 40 \end{bmatrix}$

b) $\begin{bmatrix} 20 & 0 \\ 0 & 20 \end{bmatrix}$ d) $\begin{bmatrix} 0 & 40 \\ 40 & 0 \end{bmatrix}$

14 (Fatec-SP) Sabe-se que as ordens das matrizes *A*, *B* e *C* são, respectivamente, $3 \times r$, $3 \times s$ e $2 \times t$. Se a matriz $(A - B) \cdot C$ é de ordem 3×4, então $r + s + t$ é igual a:

a) 6 b) 8 c) 10 d) 12 e) 14

15 (UE-PI) Se $\begin{pmatrix} \frac{1}{3} & p \\ 0 & \frac{1}{4} \end{pmatrix}$ é a matriz inversa da matriz $\begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 0 & q \end{pmatrix}$, então $p + q$ é igual a:

a) $\frac{43}{12}$ c) $\frac{15}{4}$ e) $\frac{47}{12}$

b) $\frac{11}{3}$ d) $\frac{23}{6}$

16 (PUC-RS)

Se $\begin{bmatrix} x & y \\ 2y & 2x \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} x^2 & -y^2 \\ y^2 & x^2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -6 & 2 \\ -8 & -3 \end{bmatrix}$,

então xy é igual a:

a) -6
b) -5
c) -1
d) 1
e) 6

17 (Unirio-RJ) Considere as matrizes

$A = \begin{bmatrix} 3 & 5 \\ 2 & 1 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} 4 \\ 3 \end{bmatrix}$ e $C = [2 \;\; 1 \;\; 3]$.

A adição da transposta de *A* com o produto de *B* por *C* é:

a) impossível de se efetuar, pois não existe o produto de *B* por *C*.
b) impossível de se efetuar, pois as matrizes são todas de tipos diferentes.
c) impossível de se efetuar, pois não existe a soma da transposta de *A* com o produto de *B* por *C*.
d) possível de se efetuar e o seu resultado é do tipo 2×3.
e) possível de se efetuar e o seu resultado é do tipo 3×2.

18 (FEI-SP) Se *B* é a matriz inversa de $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 3 \end{bmatrix}$, então:

a) $B = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$
b) $B = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 1 \end{bmatrix}$
c) $B = \begin{bmatrix} 3 & -2 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}$
d) $B = \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$
e) $B = \begin{bmatrix} -3 & 1 \\ 1 & -2 \end{bmatrix}$

19 (U. F. Viçosa-MG) Considere *A*, *B* e *I* matrizes quadradas, de mesma ordem e com elementos arbitrários. Se *I* é a matriz identidade e *B* é a inversa de *A*, então $(2A + 3B) \cdot (A - B)$ é igual a:

a) $2A^2 + 2I - 3B^2$
b) $2A^2 + I - 3B^2$
c) $2A^2 - I - 3B^2$
d) $2A^2 - 2I - 3B^2$
e) $2A^2 + 3I - 3B^2$

20 (Unificado-RJ) Cláudio anotou suas médias bimestrais de matemática, português, ciências e estudos sociais em uma tabela com quatro linhas e quatro colunas, formando uma matriz, como mostra a figura:

	1º b	2º b	3º b	4º b
matemática	5,0	4,5	6,2	5,9
português	8,4	6,5	7,1	6,6
ciências	9,0	7,8	6,8	8,6
est. sociais	7,7	5,9	5,6	6,2

Sabe-se que as notas de todos os bimestres têm o mesmo peso, isto é, para calcular a média anual do aluno em cada matéria basta fazer a média aritmética de suas médias bimestrais. Para gerar uma nova matriz cujos elementos representem as médias anuais de Cláudio, na mesma ordem acima apresentada, bastará multiplicar essa matriz por:

a) $\frac{1}{2}$

b) $\begin{bmatrix} \frac{1}{4} & \frac{1}{4} & \frac{1}{4} & \frac{1}{4} \end{bmatrix}$

c) $\begin{bmatrix} \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} \end{bmatrix}$

d) $\frac{1}{4}$

e) $\begin{bmatrix} \frac{1}{4} \\ \frac{1}{4} \\ \frac{1}{4} \\ \frac{1}{4} \end{bmatrix}$

21 (Unirio-RJ) O valor de *a* tal que

$\begin{bmatrix} \frac{-11}{2} & \frac{7}{2} \\ \frac{5}{2} & \frac{-3}{2} \end{bmatrix}$ seja a matriz inversa de

$\begin{bmatrix} 3 & 7 \\ a & 11 \end{bmatrix}$ é:

a) -1
b) 3
c) $\frac{1}{5}$
d) 2
e) 5

22 (UF-PB) A inversa da matriz

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 2 & 3 & 4 \end{pmatrix} \text{ é a matriz}$$

$$A^{-1} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 4 & x & -1 \\ 0 & 2 & 0 \\ -2 & -3 & 1 \end{pmatrix}.$$

Então, o valor de x é:

a) -1
b) 0
c) 1
d) 3
e) 2

23 (Funrei-MG) Uma matriz $n \times n$ é chamada de *quadrado mágico* quando a soma dos elementos de cada linha, de cada coluna, da diagonal principal e da outra diagonal é igual.
Se a matriz 4×4 dada por

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & a \\ 4 & 5 & 6 & b \\ 7 & 8 & c & d \\ r & s & t & u \end{bmatrix} \text{ é um quadrado}$$

mágico, então $\dfrac{c + t + d + u}{a + b + r + s}$ é igual a:

a) $-\dfrac{3}{8}$
b) $-\dfrac{7}{32}$
c) $\dfrac{2}{3}$
d) $-\dfrac{5}{16}$

24 (Unirio-RJ) Seja $B = \begin{bmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{bmatrix}$, $a \neq 0$, $b \neq 0$, uma matriz que satisfaz a equação

$B^{-1} \cdot A + 3\ A = \begin{bmatrix} 0 & 9 \\ 5 & 0 \end{bmatrix}$, em que

$A = \begin{bmatrix} 0 & -3 \\ 2 & 0 \end{bmatrix}$. A soma dos elementos da diagonal principal de B é:

a) $\dfrac{1}{3}$
b) -1
c) $-\dfrac{11}{6}$
d) $-\dfrac{13}{6}$
e) $-\dfrac{19}{6}$

25 (UE-CE) Sejam as matrizes

$M = \begin{pmatrix} \sqrt{3} & q \\ n & \sqrt{3} \end{pmatrix}$ e $P = \begin{pmatrix} 6 & 6 \\ 6 & 6 \end{pmatrix}$.

Se $M \cdot M^t = P$, sendo M^t a matriz transposta de M, então $n^2 + n \cdot q$ é igual a:

a) 6 b) 9 c) 12 d) 18

26 (Unifor-CE) Se $X = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 0 \end{bmatrix}$, então a matriz $X^t \cdot X^{-1}$ é igual a:

a) $\begin{bmatrix} -2 & 3 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$

b) $\begin{bmatrix} 2 & -3 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$

c) $\begin{bmatrix} -2 & \frac{3}{2} \\ 0 & -\frac{1}{2} \end{bmatrix}$

d) $\begin{bmatrix} 2 & -\frac{3}{2} \\ 0 & \frac{1}{2} \end{bmatrix}$

e) $\begin{bmatrix} -2 & \frac{1}{2} \\ 0 & -\frac{3}{2} \end{bmatrix}$

DESAFIOS

1 Para cada número real α consideremos a matriz $T_\alpha = \begin{bmatrix} \cos\alpha & -\operatorname{sen}\alpha \\ \operatorname{sen}\alpha & \cos\alpha \end{bmatrix}$.

a) Determine $T_{\frac{\pi}{2}}$.

b) Determine $T_{-\frac{\pi}{2}}$. Qual é a relação existente entre $T_{\frac{\pi}{2}}$ e $T_{-\frac{\pi}{2}}$?

c) Mostre que $T_\alpha \cdot T_\beta = T_{\alpha+\beta}$.

2 Uma matriz quadrada A se diz *ortogonal* se A é inversível e $A^{-1} = A^t$.

a) Determine x, y e z de modo que a matriz $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} \\ x & y & z \end{pmatrix}$ seja ortogonal.

b) Mostre que não existem x e y reais de modo que a matriz $\begin{pmatrix} \sqrt{2} & x \\ y & \sqrt{2} \end{pmatrix}$ seja ortogonal.

3 (FGV-SP) Considere a matriz $A = \begin{bmatrix} 0 & 2 \\ \frac{1}{2} & 0 \end{bmatrix}$. Obtenha as matrizes:

a) $A^2 + A^3$

b) $\sum_{i=1}^{10} A^i$

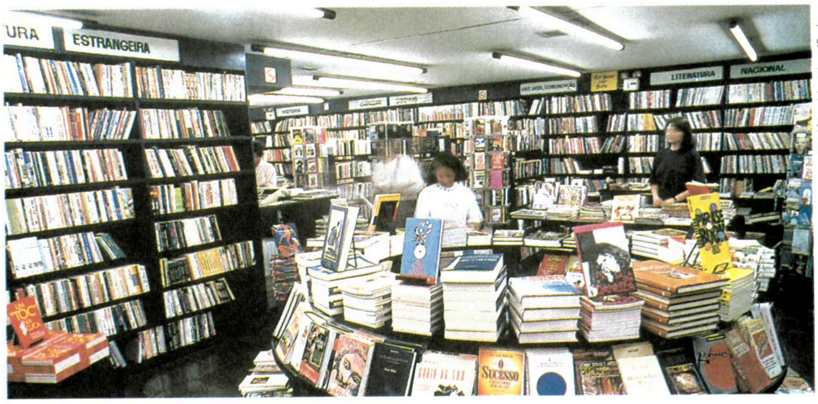
4 (UE-RJ) Observe os quadros I e II, anunciados em uma livraria.

	Quantidade	
	Edição luxo	Edição bolso
Livro *A*	76	240
Livro *B*	50	180

Quadro I

	Preço (em reais)	
	Regular	Oferta
Ed. luxo	8,00	6,00
Ed. bolso	2,00	1,00

Quadro II



Delfim Martins/Pulsar

a) Supondo que todos os livros *A* foram vendidos ao preço regular e todos os livros *B* foram vendidos ao preço de oferta, calcule a quantia arrecadada pela livraria na venda de todos esses livros.

	Preço (regular)	Preço (oferta)
Livro *A*	720,00	440,00
Livro *B*	560,00	340,00

Quadro III

$^{-1} = A^t$.

seja ortogonal.

$\begin{pmatrix} \sqrt{2} & x \\ y & \sqrt{2} \end{pmatrix}$ seja

:

em reais)
Oferta
6,00
1,00


Delfim Martins/Pulsar

Preço (oferta)
440,00
340,00

b) Considere agora o quadro III, que indica a quantia arrecadada na venda de certa quantidade dos livros *A* e *B* (valores em reais).

Utilizando esses dados e os apresentados no quadro II, calcule a quantidade vendida do livro *A* (ao preço regular, edição de luxo) e a quantidade vendida do livro *B* (ao preço de oferta, edição de bolso).

5 (FGV-SP) *A*, *B* e *C* são matrizes de mesma ordem. Sabendo que cada uma das equações abaixo (cuja incógnita é a matriz *X*) tem uma única solução, determine a matriz *X* em:

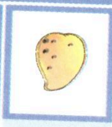
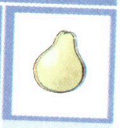
a) $AX + B = C$
b) $XA - X + B = C$

Sempre que necessário, suponha invertíveis as matrizes envolvidas.

6 (UE-RJ) João comeu uma salada de frutas com *a*, *m* e *p* porções de 100 g de abacaxi, manga e pêra, respectivamente, conforme a matriz *X*. A matriz *A* representa as quantidades de calorias, vitamina C e cálcio, em mg, e a matriz *B* indica os preços, em reais, dessas frutas em 3 diferentes supermercados. A matriz *C* mostra que João ingeriu 295,6 cal, 143,9 mg de vitamina C e 93 mg de cálcio.

Matriz *X* (porções de 100 g)	
Abacaxi	*a*
Manga	*m*
Pêra	*p*

Matriz *A* (por 100 g)			
			
Calorias	52	64,3	63,3
Vitamina C	27,2	43	3,5
Cálcio	18	21	15

Matriz *B* (por 100 g)			
			
Coma bem	0,15	0,30	0,40
Compre mais	0,16	0,25	0,45
Boa compra	0,20	0,27	0,35

Matriz *C*	
Calorias	295,6
Vitamina C (mg)	143,9
Cálcio (mg)	93

Considerando que as matrizes inversas de *A* e *B* são A^{-1} e B^{-1}, indique que operações entre matrizes devem ser feitas para se obter o custo dessa salada de frutas em cada supermercado.

6 Matrizes

Exercícios

1 A: 2×4, B: 4×1, C: 2×3, D: 1×2, E: 4×2, F: 3×3

2 $\begin{pmatrix} 5 & 8 & 11 \\ 7 & 10 & 13 \end{pmatrix}$

3 $\begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{2} & \frac{1}{3} \\ 2 & 1 & \frac{2}{3} \\ 3 & \frac{3}{2} & 1 \end{pmatrix}$; principal: 1, 1 e 1 e secundária: $\frac{1}{3}$, 1 e 3

4 $C = \begin{pmatrix} 2 \\ 5 \\ 10 \\ 17 \end{pmatrix}$ é matriz coluna e $D = (0 \ -1 \ -2)$ é matriz linha

5 $\begin{pmatrix} 2 & -1 & -1 \\ 2 & 2 & -1 \\ 2 & 2 & 2 \\ 2 & 2 & 2 \end{pmatrix}$

6 $\begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 6 \end{pmatrix}$; principal: 2, 4 e 6 e secundária: 0, 4 e 0

7 $\begin{pmatrix} 3 & -1 & -2 \\ 5 & 6 & -1 \end{pmatrix}$

8 traço A = 4 e traço B = 4

9 R$ 7,00

10 a) Cláudio (15 chopes)
b) 2

11 $a = -1$, $b = \frac{1}{6}$, $c = 6$, $d = -10$

12 $x = \frac{3}{4}$, $y = -2$, $z = 1$

13 $p = 3$, $q = 3$

14 Não existe m real que satisfaça.

15 $m = -2$

16 $m = -2$, $n = 4$, $p = -3$

17 $x = \pi$, $y = 0$

18 $x = 1$, $y = -1$

19 a) $\begin{pmatrix} 5 & -2 & \frac{-5}{2} \\ 3 & -4 & -1 \end{pmatrix}$ c) $\begin{pmatrix} 2 & -7 \\ 5 & 2 \\ 5 & -1 \end{pmatrix}$

b) $\begin{pmatrix} 7 & -7 \\ \sqrt{3} & -1 \end{pmatrix}$ d) $\begin{pmatrix} 1 \\ 5 \\ -9 \end{pmatrix}$

20 a) $\begin{pmatrix} 6 & 9 \\ 8 & 11 \\ 10 & 13 \end{pmatrix}$ b) $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$; $d_{ij} = -1 + j$

21 $\begin{pmatrix} 6 & -5 \\ 1 & 5 \end{pmatrix}$

22 a) $\begin{pmatrix} 8 \\ 4 \\ -7 \end{pmatrix}$ b) $\begin{pmatrix} 6 & 2 \\ 4 & 4 \end{pmatrix}$

23 $\begin{pmatrix} 2 & 5 \\ 5 & 9 \end{pmatrix}$

24 a) $c_{21} = 6$ b) $c_{63} = 18$

25 $X = \begin{pmatrix} 3 \\ \frac{5}{2} \\ \frac{-1}{2} \end{pmatrix}$ e $Y = \begin{pmatrix} 2 \\ \frac{1}{2} \\ \frac{17}{2} \end{pmatrix}$

26 $X = \begin{pmatrix} \frac{7}{2} & 0 \\ \frac{3}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$ e $Y = \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} & 1 \\ -\frac{1}{2} & \frac{3}{2} \end{pmatrix}$

27 a) $\begin{pmatrix} 3 & -33 & 9 \\ 24 & 15 & -6 \end{pmatrix}$

b) $\begin{pmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{11}{2} & \frac{3}{2} \\ 4 & \frac{5}{2} & -1 \end{pmatrix}$

28 a) $\begin{pmatrix} 6 & -3 \\ -1 & -8 \\ 9 & -1 \end{pmatrix}$ b) $\begin{pmatrix} 3 & -4 \\ 7 & -9 \\ 2 & -13 \end{pmatrix}$

29 $\begin{bmatrix} 1 & -\frac{7}{2} & -8 \\ \frac{7}{2} & 1 & -3 \\ 8 & \frac{13}{2} & -2 \end{bmatrix}$

30 a) $2 \cdot (A + B) = 2A + 2B = \begin{pmatrix} 8 & 2 \\ 10 & 0 \end{pmatrix}$

b) $3 \cdot (A - B) = 3A - 3B =$

$= \begin{pmatrix} 6 & -27 \\ -3 & 6 \end{pmatrix}$

c) $2 \cdot (3 \cdot A) = (2 \cdot 3) \cdot A =$

$= 6A = \begin{pmatrix} 18 & -24 \\ 12 & 6 \end{pmatrix}$

d) $1 \cdot A = \begin{pmatrix} 3 & -4 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} = A$

31 $X = \begin{pmatrix} 0 & -\frac{3}{2} & -\frac{3}{2} \\ 1 & 2 & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$

32 $\begin{pmatrix} 7 & -5 \\ 4 & -1 \end{pmatrix}$

33 a) $\begin{pmatrix} 4 & -2 \\ -2 & 16 \end{pmatrix}$ b) $\begin{pmatrix} 0 & 4 & -2 \\ 1 & 3 & 5 \end{pmatrix}$

34 $\begin{pmatrix} 3 & 1 & -5 \\ 3 & 4 & -10 \\ 6 & 3 & 1 \end{pmatrix}$

35 $X = \begin{pmatrix} 6 & -\frac{11}{2} \\ 8 & 5 \end{pmatrix}$

36 $X = \begin{pmatrix} 2 & \frac{35}{4} \\ 9 & -9 \end{pmatrix}$ e

$Y = \begin{pmatrix} -3 & -\frac{25}{2} \\ -13 & 13 \end{pmatrix}$

37 10

38 V

39 10

40 a) $\begin{bmatrix} -2 & 7 & 5 & -1 \\ -4 & 19 & 15 & -17 \end{bmatrix}$

b) $\begin{pmatrix} 4 & -10 \\ 2 & 8 \end{pmatrix}$

c) Não existe.

41 a) $\begin{pmatrix} 63 \\ 15 \\ -2 \end{pmatrix}$ c) Não existe.

b) $\begin{pmatrix} -5 & -23 \\ 5 & 1 \\ -3 & -5 \\ 3 & -6 \end{pmatrix}$ d) $\begin{pmatrix} 1 & -3 & -6 \\ -7 & -5 & 10 \\ 2 & -5 & -8 \end{pmatrix}$

42 a) (37)

b) $\begin{pmatrix} 8 & -2 & 6 \\ 40 & -10 & 30 \\ 20 & -5 & 15 \end{pmatrix}$

c) Não existe.

43 a) $\begin{pmatrix} -1 & 6 \\ 2 & -6 \\ 4 & -11 \end{pmatrix}$ d) $\begin{pmatrix} -1 \\ 7 \end{pmatrix}$

b) Não existe. e) $\begin{pmatrix} -1 & 2 & 4 \\ 6 & -6 & -11 \end{pmatrix}$

c) $\begin{pmatrix} 13 \\ -2 \\ 0 \end{pmatrix}$

44 a) 23

b) 3

c) Não existe tal elemento.

45 $x = \frac{7}{5}$ e $y = \frac{-9}{2}$

46 48

47 94

48 a) $(A + B) \cdot C = A \cdot C + B \cdot C = \begin{pmatrix} 34 & 22 \\ 27 & -7 \end{pmatrix}$

b) $(A - B) \cdot C = A \cdot C - B \cdot C =$

$= \begin{pmatrix} -14 & -6 \\ -3 & -5 \end{pmatrix}$

c) $(AB) \cdot C = A \cdot (B \cdot C) = \begin{pmatrix} 63 & 27 \\ -45 & 3 \end{pmatrix}$

d) $A \cdot B = \begin{pmatrix} 9 & 0 \\ -3 & 6 \end{pmatrix}$ e $B \cdot A = \begin{pmatrix} 8 & 1 \\ 2 & 7 \end{pmatrix}$

Nos itens *a* e *b*, vale a propriedade distributiva da multiplicação em relação à adição e subtração. No item *c*, vale a propriedade associativa da multiplicação. Com relação ao item *d*, em geral, não vale a propriedade comutativa da multiplicação de matrizes.

49 $x = 0$ e $y = 3$

50 Toda matriz de forma $\begin{pmatrix} a & a - d \\ 0 & d \end{pmatrix}$, em que $a \in \mathbb{R}$ e $d \in \mathbb{R}$.

51 a) $\begin{bmatrix} 12 + 6x \\ 27 + 3x \end{bmatrix}$ b) $x = 5$

52 a) $\begin{pmatrix} -11 & -12 \\ 16 & 13 \end{pmatrix}$

b) $\begin{pmatrix} 9 & 2 & -2 \\ -16 & 5 & 12 \\ -4 & -3 & 4 \end{pmatrix}$

53 $X = \begin{pmatrix} -\frac{3}{11} & \frac{6}{11} \\ -\frac{9}{11} & \frac{7}{11} \end{pmatrix}$

54 208 g de queijo, 486 g de salada, 258 g de rosbife e 160 g de atum

55 $X = \begin{pmatrix} \frac{3}{10} & \frac{5}{2} & \frac{7}{10} \\ \frac{1}{10} & -\frac{1}{2} & \frac{9}{10} \end{pmatrix}$

56 $X = \begin{bmatrix} 1 \\ -3 \end{bmatrix}$

57 $X = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -\frac{35}{11} & \frac{16}{11} \end{pmatrix}$

58 a) $P^2 = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$, $P^3 = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$,

$P^4 = \begin{bmatrix} 1 & 4 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$

b) $P^n = \begin{bmatrix} 1 & n \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$

59 $x = 1$

60 a) $\begin{bmatrix} 1 & \text{sen } 2x \\ \text{sen } 2x & 1 \end{bmatrix}$ b) $x = 0$ ou $x = 2\pi$

61 a) V b) V, pois $b_{23} = 1$

62 $A \cdot B = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$; assim, $A \cdot B = 0$, mas $A \neq 0$ e $B \neq 0$.

63 sim

64 $\begin{pmatrix} -\frac{1}{4} & \frac{1}{8} \\ 1 & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$

65 $\begin{pmatrix} -4 & 2 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}$

66 a) $\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -4 & 7 \end{pmatrix}$ b) $\begin{pmatrix} 6 & -7 \\ -9 & 11 \end{pmatrix}$

67 Não existe a inversa.

68 a) $\begin{pmatrix} -10 & 0 \\ 0 & -10 \end{pmatrix}$ b) $\begin{pmatrix} 98 & 0 \\ 0 & 98 \end{pmatrix}$

69 $x = 7$ e $y = 1$

70 $X^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{1}{2} & 0 \\ -\frac{1}{3} & 0 & \frac{1}{3} \end{pmatrix}$

71 $X^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

72 $x = -1$

73 $\frac{9}{11}$

74 $X = \begin{pmatrix} 3 & -4 \\ \frac{5}{2} & -\frac{3}{2} \end{pmatrix}$

75 a) $X = (C - A) \cdot B^{-1}$ b) $X = A \cdot B^{-1}$

Testes de vestibulares

1	a	**8**	d	**15**	e	**22**	d
2	a	**9**	b	**16**	a	**23**	a
3	c	**10**	d	**17**	d	**24**	d
4	e	**11**	c	**18**	c	**25**	a
5	d	**12**	c	**19**	b	**26**	c
6	a	**13**	a	**20**	e		
7	a	**14**	b	**21**	e		

7 Determinantes

Exercícios

1 a) 3 b) $-\frac{1}{5}$ c) 1 d) -10 e) -7

2 -1

3 $S = \{-4\}$

4 $S = \{5, -1\}$

5 $S = \left\{x \in \mathbb{R} \mid x \leq -\frac{1}{3}\right\}$

6 a) 105 b) 0

7 a) -1 b) $a - a^3$

8 -3

9 $S = \{x \in \mathbb{R} \mid x > -1\}$

10 a) $\begin{pmatrix} 7 & 3 \\ -8 & 2 \end{pmatrix}$ e (7)

b) -1 ou 2

11 a) $S = \{1\}$ b) $S = \left\{0, -\sqrt{3}, \sqrt{3}\right\}$

12 -76

13 $\frac{3}{2}$

14 zero

15 $S = \{2\}$

16 $x = 13$

17 -3 e 5

18 zero

19 $\begin{pmatrix} 2 & -\frac{3}{4} & -\frac{5}{2} \\ 8 & -3 & -2 \\ 2 & -1 & 1 \end{pmatrix}$

20 $S = \{x \in \mathbb{R} \mid -1 < x < 0 \text{ ou } x > 1\}$

21 a) -208 b) -3 c) 84

22 a) 0 b) $a^2 + b^2$ c) $-2x(1 + y^2)$

23 $S = \left\{0, \frac{1}{2}\right\}$

24 $S = \{5\}$

25 -50

26 a) 0 b) 0

27 a) -4 b) 20 c) 20 d) 100

28 a) -60 b) 40

29 45

30 25

31 x

32 a) $m = 3$ b) 12

33 a) $\frac{1}{2}$ b) 1 c) 0