Produto de Vetores

(1) Produto Escalar (ou Produto Interno)

Seja $Oxyz$ sistema de coordenadas cartesianas ortogonais no espaço com base canônica $B = \{\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}\}$. Sejam $\vec{u} = (x_1, y_1, z_1)$ e $\vec{v} = (x_2, y_2, z_2)$ vetores com coordenadas em $Oxyz$. Definimos o **produto escalar** (ou o **produto interno**) de $\vec{u}$ e $\vec{v}$ como sendo o número real

$$\boxed{\vec{u} \cdot \vec{v} = x_1 x_2 + y_1 y_2 + z_1 z_2.}$$

O produto escalar de $\vec{u}$ e $\vec{v}$ também costuma ser indicado por $\langle \vec{u}, \vec{v} \rangle$.

Exemplo: Dados $\vec{u} = (2, -2, 0)$ e $\vec{v} = (-1, 4, 1)$, determine:

(a) $\vec{u} \cdot \vec{v} = (2, -2, 0) \cdot (-1, 4, 1) = -2 - 8 + 0 = -10$

(b) $\vec{u} \cdot \vec{u} = (2, -2, 0) \cdot (2, -2, 0) = 4 + 4 + 0 = 8$

(c) $(\vec{u} + \vec{v}) \cdot (2\vec{u} - \vec{v}) = (1, 2, 1) \cdot (5, -8, -1) = 5 - 16 - 1 = -12$

Propriedades do Produto Escalar

Sejam $\vec{u}$, $\vec{v}$ e $\vec{w}$ vetores no espaço e $\alpha \in \mathbb{R}$.

(1) $\vec{u} \cdot \vec{0} = 0$;

(2) $\vec{u} \cdot \vec{v} = \vec{v} \cdot \vec{u}$ (comutativa);

(3) $\vec{u} \cdot (\vec{v} + \vec{w}) = \vec{u} \cdot \vec{v} + \vec{u} \cdot \vec{w}$ (distributiva);

(4) $\alpha\,(\vec{u} \cdot \vec{v}) = (\alpha\vec{u}) \cdot \vec{v} = \vec{u} \cdot (\alpha\vec{v})$ (associatividade em relação ao produto por escalar);

(5) $\vec{u} \cdot \vec{u} \geq 0$ e, além disso, $\vec{u} \cdot \vec{u} = 0$ se, somente se, $\vec{u} = \vec{0}$;

(6) $\|\vec{u}\|^2 = \vec{u} \cdot \vec{u}$, ou seja, $\|\vec{u}\| = \sqrt{\vec{u} \cdot \vec{u}}$.

Exemplos:

(**1**) Sabendo que $\|\vec{u}\| = 4$, $\|\vec{v}\| = 2$ e $\vec{u} \cdot \vec{v} = 3$, calcule $(3\vec{u} - 2\vec{v}) \cdot (-\vec{u} + 4\vec{v})$.

Solução: Temos que

$$
\begin{aligned}
(3\vec{u} - 2\vec{v}) \cdot (-\vec{u} + 4\vec{v}) &= 3\vec{u} \cdot (-\vec{u} + 4\vec{v}) - 2\vec{v} \cdot (-\vec{u} + 4\vec{v}) \\
&= -3\vec{u} \cdot \vec{u} + 12\vec{u} \cdot \vec{v} + 2\vec{v} \cdot \vec{u} - 8\vec{v} \cdot \vec{v} \\
&= -3\|\vec{u}\|^2 + 14\vec{u} \cdot \vec{v} - 8\|\vec{v}\|^2 \\
&= -3(4)^2 + 14(3) - 8(2)^2 \\
&= -48 + 42 - 32 \\
&= -38
\end{aligned}
$$

(**2**) Mostre que:

(**a**) $\|\vec{u}+\vec{v}\|^2 = \|\vec{u}\|^2 + 2\,\vec{u}\cdot\vec{v} + \|\vec{v}\|^2$

(**b**) $\|\vec{u}-\vec{v}\|^2 = \|\vec{u}\|^2 - 2\,\vec{u}\cdot\vec{v} + \|\vec{v}\|^2$

(**c**) $(\vec{u}+\vec{v})(\vec{u}-\vec{v}) = \|\vec{u}\|^2 - \|\vec{v}\|^2$

Solução:

(**a**) Temos que

$$\begin{aligned}
\|\vec{u}+\vec{v}\|^2 &= (\vec{u}+\vec{v})\cdot(\vec{u}+\vec{v}) \\
&= \vec{u}\cdot(\vec{u}+\vec{v}) + \vec{v}\cdot(\vec{u}+\vec{v}) \\
&= \vec{u}\cdot\vec{u} + \vec{u}\cdot\vec{v} + \vec{v}\cdot\vec{u} + \vec{v}\cdot\vec{v} \\
&= \|\vec{u}\|^2 + 2\,\vec{u}\cdot\vec{v} + \|\vec{v}\|^2
\end{aligned}$$

(**2**) Mostre que:

(**a**) $\|\vec{u}+\vec{v}\|^2 = \|\vec{u}\|^2 + 2\,\vec{u}\cdot\vec{v} + \|\vec{v}\|^2$

(**b**) $\|\vec{u}-\vec{v}\|^2 = \|\vec{u}\|^2 - 2\,\vec{u}\cdot\vec{v} + \|\vec{v}\|^2$

(**c**) $(\vec{u}+\vec{v})(\vec{u}-\vec{v}) = \|\vec{u}\|^2 - \|\vec{v}\|^2$

Solução:

(**b**) Temos que

$$\begin{aligned}\|\vec{u}-\vec{v}\|^2 &= (\vec{u}-\vec{v})\cdot(\vec{u}-\vec{v})\\ &= \vec{u}\cdot(\vec{u}-\vec{v}) - \vec{v}\cdot(\vec{u}-\vec{v})\\ &= \vec{u}\cdot\vec{u} - \vec{u}\cdot\vec{v} - \vec{v}\cdot\vec{u} + \vec{v}\cdot\vec{v}\\ &= \|\vec{u}\|^2 - 2\,\vec{u}\cdot\vec{v} + \|\vec{v}\|^2\end{aligned}$$

(2) Mostre que:

(a) $\|\vec{u}+\vec{v}\|^2 = \|\vec{u}\|^2 + 2\,\vec{u}\cdot\vec{v} + \|\vec{v}\|^2$

(b) $\|\vec{u}-\vec{v}\|^2 = \|\vec{u}\|^2 - 2\,\vec{u}\cdot\vec{v} + \|\vec{v}\|^2$

(c) $(\vec{u}+\vec{v})(\vec{u}-\vec{v}) = \|\vec{u}\|^2 - \|\vec{v}\|^2$

Solução:

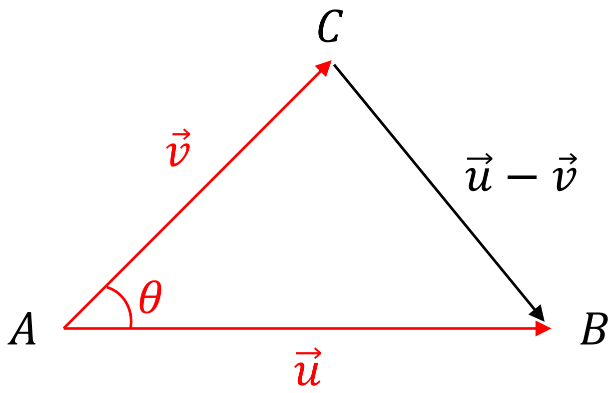
(c) Temos que

$$\begin{aligned}
(\vec{u}+\vec{v})(\vec{u}-\vec{v}) &= \vec{u}\cdot(\vec{u}-\vec{v}) + \vec{v}\cdot(\vec{u}-\vec{v}) \\
&= \vec{u}\cdot\vec{u} - \vec{u}\cdot\vec{v} + \vec{v}\cdot\vec{u} - \vec{v}\cdot\vec{v} \\
&= \vec{u}\cdot\vec{u} - \vec{v}\cdot\vec{v} \\
&= \|\vec{u}\|^2 - \|\vec{v}\|^2
\end{aligned}$$

Proposição (interpretação geométrica do produto escalar): Sejam $\vec{u}$ e $\vec{v}$ vetores não nulos e $0 < \theta < \pi$ a medida, em radianos, do ângulo formado entre $\vec{u}$ e $\vec{v}$. Então

$$\vec{u} \cdot \vec{v} = \|\vec{u}\|.\|\vec{v}\| \cos\theta\,.$$

Demonstração: Considere o triângulo ABC abaixo:



Aplicando a Lei dos Cossenos, obtemos $\|\vec{u} - \vec{v}\|^2 = \|\vec{u}\|^2 + \|\vec{v}\|^2 - 2\|\vec{u}\|\|\vec{v}\|\cos\theta$.

Vimos que $\|\vec{u} - \vec{v}\|^2 = \|\vec{u}\|^2 - 2\,\vec{u} \cdot \vec{v} + \|\vec{v}\|^2$.

Igualando as duas equações acima, temos que

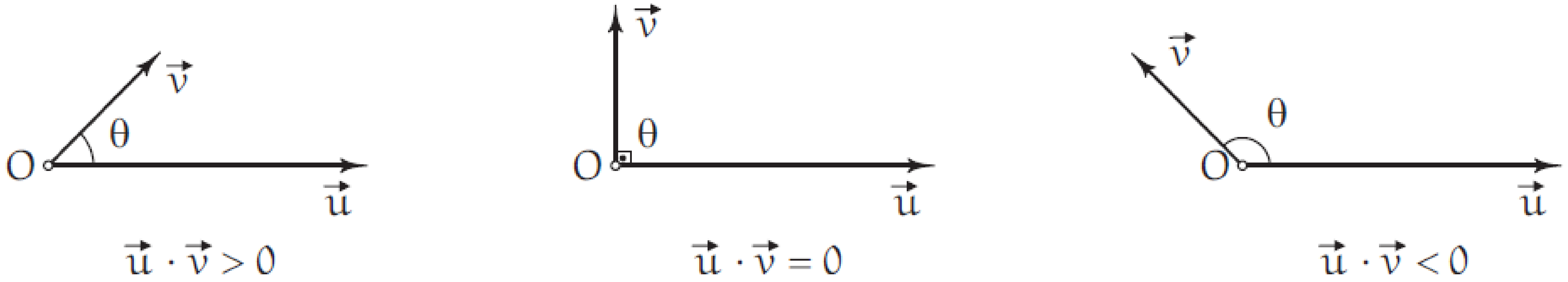
$$\|\vec{u}\|^2 - 2\,\vec{u} \cdot \vec{v} + \|\vec{v}\|^2 = \|\vec{u}\|^2 + \|\vec{v}\|^2 - 2\|\vec{u}\|\|\vec{v}\|\cos\theta$$

ou seja, $\vec{u} \cdot \vec{v} = \|\vec{u}\|.\|\vec{v}\| \cos\theta$. $\square$

Observação:

Observemos que, nas condições da proposição acima, podemos deduzir

(i) o ângulo entre $\vec{u}$ e $\vec{v}$ é agudo ou nulo se, e somente se, $\vec{u} \cdot \vec{v} > 0$;
(ii) se o ângulo entre $\vec{u}$ e $\vec{v}$ for reto, então $\vec{u} \cdot \vec{v} = 0$;
(iii) o ângulo entre $\vec{u}$ e $\vec{v}$ é obtuso ou raso se, e somente se, $\vec{u} \cdot \vec{v} < 0$.



Proposição (condição de ortogonalidade):
O vetor $\vec{u}$ é ortogonal ao vetor $\vec{v}$ se, e somente se, $\vec{u} \cdot \vec{v} = 0$.

Cálculo do ângulo entre dois vetores

Sejam $\vec{u}$ e $\vec{v}$ vetores não nulos e θ o ângulo formado por eles.
Vimos que

$$\vec{u} \cdot \vec{v} = \|\vec{u}\|\|\vec{v}\| \cos\theta \;\Rightarrow \boxed{\cos\theta = \frac{\vec{u} \cdot \vec{v}}{\|\vec{u}\|\|\vec{v}\|}}$$

Essa fórmula permite calcular a medida do ângulo entre dois vetores não nulos.

Exemplo: Calcule o ângulo entre os vetores:

(**a**) $\vec{u} = (1, 1, 4)$ e $\vec{v} = (-1, 2, 2)$ (**b**) $\vec{u} = (2, 0, -3)$ e $\vec{v} = (1, 1, 1)$

Solução:

(**a**) Temos que: $\cos\theta = \frac{\vec{u} \cdot \vec{v}}{\|\vec{u}\|\|\vec{v}\|} = \frac{(1,1,4)\cdot(-1,2,2)}{\sqrt{1^2+1^2+4^2}.\sqrt{(-1)^2+2^2+2^2}} = \frac{-1+2+8}{\sqrt{18}.\sqrt{9}} = \frac{9}{3\sqrt{2}.3} = \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}$.

Logo, $\theta = \arccos\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right) = \frac{\pi}{4}$ rad $= 45°$.

(**b**) Temos que: $\cos\theta = \frac{\vec{u} \cdot \vec{v}}{\|\vec{u}\|\|\vec{v}\|} = \frac{(2,0,-3)\cdot(1,1,1)}{\sqrt{2^2+0^2+(-3)^2}.\sqrt{1^2+1^2+1^2}} = \frac{2+0-3}{\sqrt{13}.\sqrt{3}} = \frac{-1}{\sqrt{39}}$.

Logo, $\theta = \arccos\left(\frac{-1}{\sqrt{39}}\right)$.

Exercícios:

(**1**) Determine o valor x para que $\vec{u} \perp \vec{v}$ nos seguintes casos:

(**a**) $\vec{u} = (x, 0, 3)$ e $\vec{v} = (1, x, 3)$

(**b**) $\vec{u} = (-x, -1, 1)$ e $\vec{v} = (x, -3, 1)$

Solução:

(**a**) Para que os vetores $\vec{u}$ e $\vec{v}$ sejam ortogonais, devemos ter $\vec{u} \cdot \vec{v} = 0$, ou seja,

$$(x, 0, 3) \cdot (1, x\ 3) = x + 0 + 9 = 0 \Rightarrow x = -9.$$

(**b**) Para que os vetores $\vec{u}$ e $\vec{v}$ sejam ortogonais, devemos ter $\vec{u} \cdot \vec{v} = 0$, ou seja,

$$(-x, -1, 1) \cdot (x, -3, 1) = -x^2 + 3 + 1 = 0 \Rightarrow x^2 = 4 \Rightarrow x = \pm 2.$$

(**2**) Determine $\vec{u}$ tal que $\|\vec{u}\| = \sqrt{2}$, a medida do ângulo entre $\vec{u}$ e $(1\ -1, 0)$ seja $45°$ e $\vec{u} \perp (1,1,0)$.

Solução: Seja $\vec{u} = (x, y, z)$.

- De $\|\vec{u}\| = \sqrt{2}$, segue que: $\sqrt{x^2 + y^2 + z^2} = \sqrt{2} \Rightarrow x^2 + y^2 + z^2 = 2$.
- Como a medida do ângulo entre $\vec{u}$ e $(1\ -1, 0)$ é $45°$, então

$$\cos 45° = \frac{\vec{u}\ \cdot(1,-1,0)}{\|\vec{u}\|\|(1,-1,0)\|} \Rightarrow \frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{(x,\ y,\ z)\cdot(1,-1,0)}{\sqrt{2}\,.\sqrt{2}} \Rightarrow x - y = \sqrt{2}\,.$$

- Como $\vec{u} \perp (1,1,0)$, devemos ter $\vec{u} \cdot (1,1,0) = 0$, ou seja,

$$(x,y,z)\cdot(1,1,0) = 0 \Rightarrow x + y = 0.$$

Resolvendo o sistema

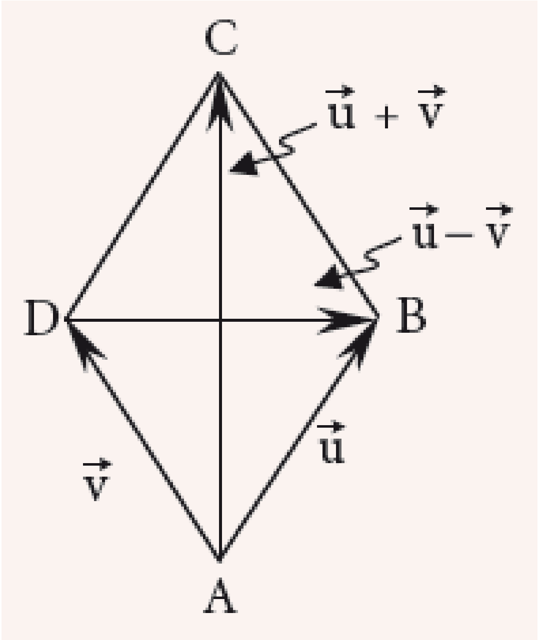
$$\begin{cases} x^2 + y^2 + z^2 = 2 \\ x - y = \sqrt{2} \\ x + y = 0 \end{cases}$$ obtemos $x = \frac{\sqrt{2}}{2}, y = -\frac{\sqrt{2}}{2}$ e $z = \pm 1$.

Portanto, $\vec{u} = \left(\frac{\sqrt{2}}{2}, -\frac{\sqrt{2}}{2}, 1\right)$ ou $\vec{u} = \left(\frac{\sqrt{2}}{2}, -\frac{\sqrt{2}}{2}, -1\right)$.

(3) Prove que as diagonais de um losango são perpendiculares entre si.

Solução: Recorde que um losango é um quadrilátero cujos lados têm o mesmo comprimento.
Seja $ABCD$ um losango, com diagonais AC e DB.
Considere os vetores $\vec{u} = \overrightarrow{AB}$ e $\vec{v} = \overrightarrow{AD}$. Logo, $\vec{u} + \vec{v} = \overrightarrow{AC}$ e $\vec{u} - \vec{v} = \overrightarrow{DB}$.
Devemos mostrar que $\overrightarrow{AC}$ é ortogonal a $\overrightarrow{DB}$, ou seja,

$$\overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{DB} = 0.$$



Temos que:

$$\begin{aligned}\overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{DB} &= (\vec{u} + \vec{v}) \cdot (\vec{u} - \vec{v}) \\ &= \|\vec{u}\|^2 - \|\vec{v}\|^2 \\ &= 0,\end{aligned}$$

pois, $\|\vec{u}\| = \|\vec{v}\|$.

(4) Prove que o triângulo de vértices $A(2,3,1), B(2,1,-1)$ e $C(2,2,-2)$ é um triângulo retângulo.

Solução: Sejam

$$\overrightarrow{AB} = (0,-2,-2),$$
$$\overrightarrow{AC} = (0,-1,-3),$$
$$\overrightarrow{BC} = (0,1,-1),$$

vetores representando os lados do triângulo ABC.

Vamos mostrar que o produto escalar de dois desses vetores é nulo. De fato:

$$\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = (0,-2,-2) \cdot (0,-1,-3) = 0 + 2 + 6 = 8 \neq 0$$

$$\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{BC} = (0,-2,-2) \cdot (0,1,-1) = 0 - 2 + 2 = 0.$$

Como $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{BC} = 0$, segue que o ângulo formado por esses vetores é reto e, logo, o triângulo ABC é retângulo, com ângulo reto no vértice B.

(5) (Desigualdade de Cauchy-Schwarz) Mostre que $|\vec{u} \cdot \vec{v}| \leq \|\vec{u}\|.\|\vec{v}\|$.

Solução: Temos que $\vec{u} \cdot \vec{v} = \|\vec{u}\|.\|\vec{v}\| \cos\theta$, sendo θ a medida do ângulo entre $\vec{u}$ e $\vec{v}$. Logo,

$$\begin{aligned} |\vec{u} \cdot \vec{v}| &= \big|\|\vec{u}\|.\|\vec{v}\| \cos\theta\big| \\ &= \|\vec{u}\|.\|\vec{v}\|.|\cos\theta|. \end{aligned}$$

Como $-1 \leq \cos\theta \leq 1$, então $|\cos\theta| \leq 1$. Portanto,

$$|\vec{u} \cdot \vec{v}| = \|\vec{u}\|.\|\vec{v}\|.|\cos\theta| \leq \|\vec{u}\|.\|\vec{v}\|.1 = \|\vec{u}\|.\|\vec{v}\|,$$

ou seja, $|\vec{u} \cdot \vec{v}| \leq \|\vec{u}\|.\|\vec{v}\|$.

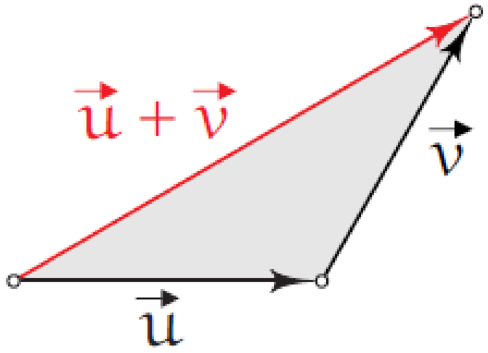
(6) (Desigualdade Triangular) Mostre que $\|\vec{u}+\vec{v}\| \leq \|\vec{u}\| + \|\vec{v}\|$.

Solução: Temos que

$$\begin{aligned} \|\vec{u}+\vec{v}\|^2 &= \|\vec{u}\|^2 + 2\,\vec{u}\cdot\vec{v} + \|\vec{v}\|^2 \\ &\leq \|\vec{u}\|^2 + 2|\vec{u}\cdot\vec{v}| + \|\vec{v}\|^2. \end{aligned}$$

Pela Desigualdade de Cauchy-Schwarz, $|\vec{u}\cdot\vec{v}| \leq \|\vec{u}\|.\|\vec{v}\|$. Logo,

$$\begin{aligned} \|\vec{u}+\vec{v}\|^2 &\leq \|\vec{u}\|^2 + 2|\vec{u}\cdot\vec{v}| + \|\vec{v}\|^2 \\ &\leq \|\vec{u}\|^2 + 2\|\vec{u}\|.\|\vec{v}\| + \|\vec{v}\|^2 \\ &= (\|\vec{u}\| + \|\vec{v}\|)^2. \end{aligned}$$



Portanto, $\|\vec{u}+\vec{v}\|^2 \leq (\|\vec{u}\| + \|\vec{v}\|)^2 \Rightarrow \|\vec{u}+\vec{v}\| \leq \|\vec{u}\| + \|\vec{v}\|$.

Observações:

(i) Essa desigualdade confirma a propriedade geométrica de que, em um triângulo, a soma dos comprimentos de dois lados ($\|\vec{u}\| + \|\vec{v}\|$) é maior do que o comprimento do terceiro lado ($\|\vec{u}+\vec{v}\|$).

(ii) A igualdade ocorre quando $\vec{u}$ e $\vec{v}$ são paralelos e de mesmo sentido.

Ângulos Diretores e Cossenos Diretores de um Vetor

Seja o vetor $\vec{v} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}$ não nulo.

Ângulos diretores de $\vec{v}$ são os ângulos α, β e γ que $\vec{v}$ forma com os vetores $\vec{i}$, $\vec{j}$ e $\vec{k}$, respectivamente.

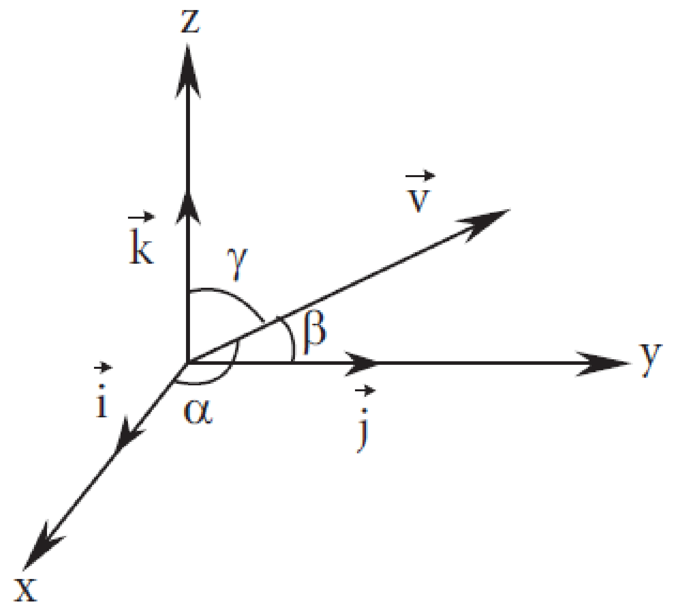
Cossenos diretores de $\vec{v}$ são os cossenos de seus ângulos diretores.

O cálculo dos cossenos diretores são feitos utilizando a fórmula do ângulo entre vetores:

$$\cos\alpha = \frac{\vec{v}\cdot\vec{i}}{\|\vec{v}\|\|\vec{i}\|} = \frac{(x,y,z)\cdot(1,0,0)}{\|\vec{v}\|.1} = \frac{x}{\|\vec{v}\|}$$

$$\cos\beta = \frac{\vec{v}\cdot\vec{j}}{\|\vec{v}\|\|\vec{j}\|} = \frac{(x,y,z)\cdot(0,1,0)}{\|\vec{v}\|.1} = \frac{y}{\|\vec{v}\|}$$

$$\cos\gamma = \frac{\vec{v}\cdot\vec{k}}{\|\vec{v}\|\|\vec{k}\|} = \frac{(x,y,z)\cdot(0,0,1)}{\|\vec{v}\|.1} = \frac{z}{\|\vec{v}\|}$$



Observação:

Os cossenos diretores de $\vec{v}$ são as componentes do versor de $\vec{v}$:

$$\frac{\vec{v}}{\|\vec{v}\|} = \frac{(x, y, z)}{\|\vec{v}\|} = \left(\frac{x}{\|\vec{v}\|}, \frac{y}{\|\vec{v}\|}, \frac{z}{\|\vec{v}\|}\right) = (\cos\alpha\,, \cos\beta\,, \cos\gamma).$$

Como o versor é um vetor unitário, decorre imediatamente que:

$$\boxed{\cos^2\alpha + \cos^2\beta + \cos^2\gamma = 1\,.}$$

Exemplos:

(1) Calcule os ângulos diretores de $\vec{v} = (1, -1, 0)$.

Solução: Temos que $\|\vec{v}\| = \sqrt{1^2 + (-1)^2 + 0^2} = \sqrt{2}$.
Logo:

$$\cos\alpha = \frac{x}{\|\vec{v}\|} = \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2} \Rightarrow \alpha = 45° \left(\frac{\pi}{4} \text{ rad}\right)$$

$$\cos\beta = \frac{y}{\|\vec{v}\|} = \frac{-1}{\sqrt{2}} = -\frac{\sqrt{2}}{2} \Rightarrow \beta = 135° \left(\frac{3\pi}{4} \text{ rad}\right)$$

$$\cos\gamma = \frac{z}{\|\vec{v}\|} = \frac{0}{\sqrt{2}} = 0 \Rightarrow \gamma = 0° \;(0 \text{ rad})$$

(2) Os ângulos diretores de um vetor são $\alpha, 45°$ e $60°$. Determine α.

Solução: Como $\alpha, 45°$ e $60°$ são ângulos diretores de um vetor, então

$$\cos^2\alpha + \cos^2(45°) + \cos^2(60°) = 1.$$

Substituindo os valores de $\cos(45°) = \frac{\sqrt{2}}{2}$ e $\cos(60°) = \frac{1}{2}$, obtemos:

$$\begin{aligned}\cos^2\alpha + \left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2 + \left(\frac{1}{2}\right)^2 = 1 &\Rightarrow \cos^2\alpha = 1 - \frac{1}{2} - \frac{1}{4}\\ &\Rightarrow \cos^2\alpha = \frac{1}{4}\\ &\Rightarrow \cos\alpha = \pm\frac{1}{2}\\ &\Rightarrow \alpha = 60° \text{ ou } \alpha = 120°.\end{aligned}$$

(3) Obter o vetor $\vec{v}$, sabendo que $\|\vec{v}\| = 4$, $\vec{v}$ é ortogonal ao eixo Oz, forma ângulo de $60°$ com o vetor $\vec{i}$ e ângulo obtuso com $\vec{j}$.

Solução: Como $\vec{v}$ é ortogonal ao eixo Oz, então ele é paralelo ao plano xOy e possui a forma

$$\vec{v} = (x, y, 0).$$

De $\|\vec{v}\| = 4$, segue que $\sqrt{x^2 + y^2 + 0^2} = 4 \Rightarrow \sqrt{x^2 + y^2} = 4$.

Como ele forma um ângulo de $60°$ com o vetor $\vec{i}$, então

$$\cos 60° = \frac{x}{\|\vec{v}\|} \Rightarrow \frac{1}{2} = \frac{x}{4} \Rightarrow x = 2\,.$$

Logo,

$$\sqrt{x^2 + y^2} = 4 \Rightarrow \sqrt{2^2 + y^2} = 4 \Rightarrow 4 + y^2 = 16 \Rightarrow y^2 = 12 \Rightarrow y = \pm 2\sqrt{3}.$$

Tendo em vista que β (ângulo de $\vec{v}$ com $\vec{j}$) é obtuso ($90° < \beta < 180°$), na igualdade $\cos\beta = \frac{y}{\|\vec{v}\|}$, o valor de y é negativo. Portanto,

$$\vec{v} = \left(2, -2\sqrt{3}, 0\right).$$

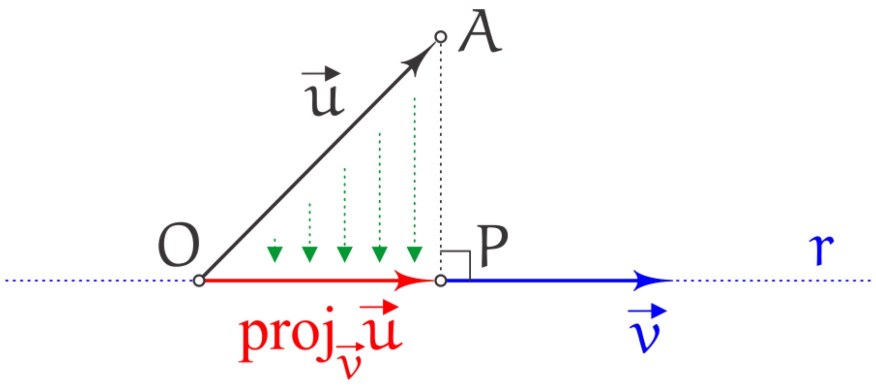
Projeção Ortogonal de um Vetor sobre Outro

Considere dois vetores $\vec{u}$ e $\vec{v}$ no espaço, sendo $\vec{v} \neq \vec{0}$. Tome ambos os vetores com a mesma origem O.

Sejam $\vec{u} = \overrightarrow{OA}$ e r a reta suporte de $\vec{v}$ passando por O (ou seja, r é a reta paralela a $\vec{v}$ passando por O).

Seja P a projeção ortogonal do ponto A na reta r, isto é, P é o pé da perpendicular baixada de A até a reta r.

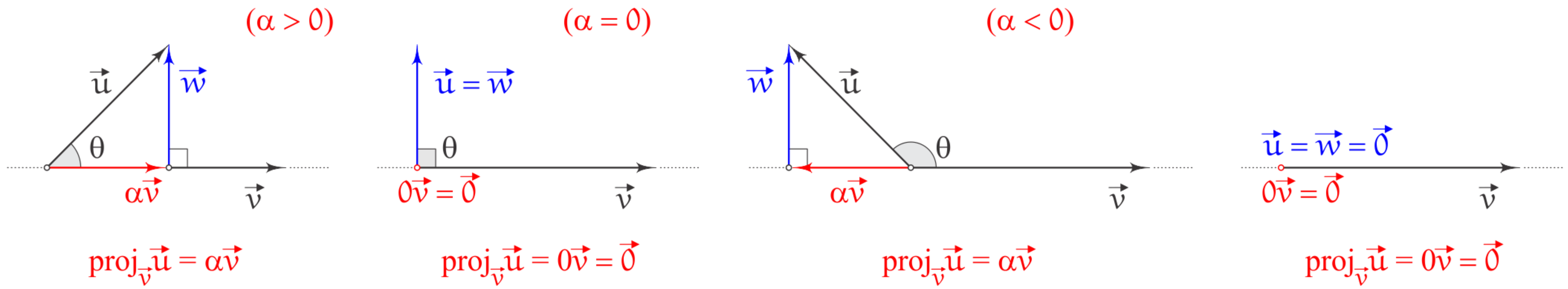
O vetor $\overrightarrow{OP}$ é a **projeção ortogonal de $\vec{u}$ na direção de $\vec{v}$** e é denotado por $proj_{\vec{v}}\,\vec{u}$.



Proposição (projeção ortogonal): Sejam $\vec{u}$ vetor qualquer e $\vec{v} \neq \vec{0}$. Então, a projeção ortogonal de $\vec{u}$ na direção de $\vec{v}$ é o vetor dado por

$$proj_{\vec{v}}\,\vec{u} = \frac{\vec{u}\cdot\vec{v}}{\|\vec{v}\|^2}\,\vec{v}.$$

Demonstração: Como a $proj_{\vec{v}}\,\vec{u}$ é um vetor paralelo a $\vec{v}$, então existe $\alpha \in \mathbb{R}$ tal que $proj_{\vec{v}}\,\vec{u} = \alpha\vec{v}$.



Seja $\vec{w} = \vec{u} - \alpha\vec{v}$. Temos que $\vec{w} \perp \vec{v}$, logo

$$\vec{w}\cdot\vec{v} = 0 \Rightarrow (\vec{u} - \alpha\vec{v})\cdot\vec{v} = 0 \Rightarrow \vec{u}\cdot\vec{v} - \alpha\,(\vec{v}\cdot\vec{v}) = 0 \Rightarrow \alpha = \frac{\vec{u}\cdot\vec{v}}{\|\vec{v}\|^2}\,.$$

Portanto, $proj_{\vec{v}}\,\vec{u} = \frac{\vec{u}\cdot\vec{v}}{\|\vec{v}\|^2}\,\vec{v}$.

$\square$

Exemplos:

(1) Calcule a projeção ortogonal de $\vec{u} = (1, -1, 2)$ na direção de $\vec{v} = (3, -1, 1)$.

Solução: Temos que

$$proj_{\vec{v}}\,\vec{u} = \frac{\vec{u} \cdot \vec{v}}{\|\vec{v}\|^2}\,\vec{v}$$

$$= \frac{(1,-1,2)\cdot(3,-1,1)}{\left(\sqrt{3^2+(-1)^2+1^2}\right)^2}\,(3, -1, 1)$$

$$= \frac{6}{11}\,(3, -1, 1)$$

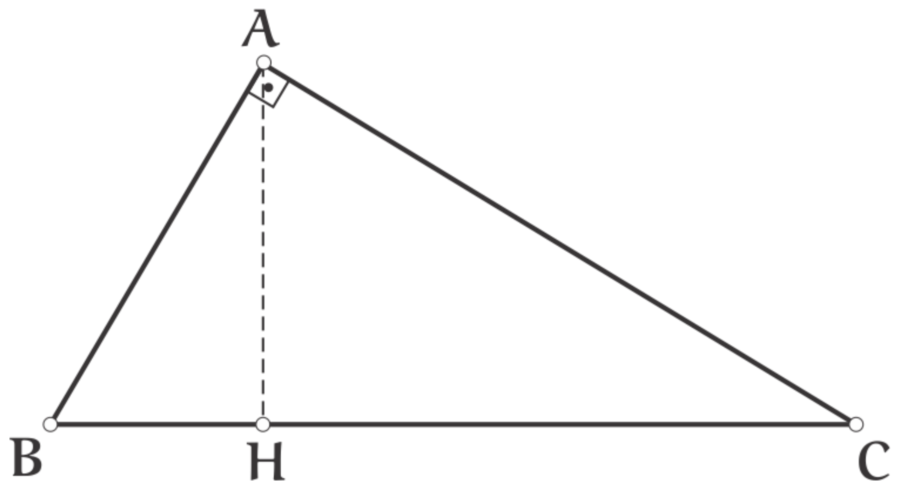
$$= \left(\frac{18}{11}, -\frac{6}{11}, \frac{6}{11}\right).$$

(**2**) Sejam os pontos $A(1,2,-1), B(-1,0,-1)$ e $C(2,1,2)$.

(**a**) Mostre que o triângulo ABC é retângulo em A.

(**b**) Determine o ponto H, pé da altura relativa ao vértice A.

Solução:



(**a**) Para mostrar que o ângulo em A é reto, basta mostrar que os vetores $\overrightarrow{AB}$ e $\overrightarrow{AC}$ são ortogonais. Como $\overrightarrow{AB} = (-2,-2,0)$ e $\overrightarrow{AC} = (1,-1,3)$, temos

$$\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = -2 + 2 + 0 = 0.$$

(**b**) Seja $H(x,y,z)$, então $\overrightarrow{BH} = proj_{\overrightarrow{BC}}\, \overrightarrow{BA}$.

Temos que:

$$\overrightarrow{BH} = (x+1, y, z+1) \ \text{ e } \ proj_{\overrightarrow{BC}}\, \overrightarrow{BA} = \frac{\overrightarrow{BA} \cdot \overrightarrow{BC}}{\|\overrightarrow{BC}\|^2} \overrightarrow{BC} = \frac{(2,2,0)\cdot(3,1,3)}{\left(\sqrt{3^2+1^2+3^2}\right)^2}(3,1,3) = \frac{8}{19}(3,1,3) = \left(\frac{24}{19}, \frac{8}{19}, \frac{24}{19}\right).$$

Logo, $(x+1, y, z+1) = \left(\frac{24}{19}, \frac{8}{19}, \frac{24}{19}\right) \Rightarrow x = \frac{5}{19}$, $y = \frac{8}{19}$ e $z = \frac{5}{19}$.

Portanto, $H\left(\frac{5}{19}, \frac{8}{19}, \frac{5}{19}\right)$.

Observação (produto escalar no plano): Todo o estudo feito em relação ao produto escalar com vetores no espaço é válido também com vetores no plano.

Considerando os vetores $\vec{u} = (x_1, y_1)$ e $\vec{v} = (x_2, y_2)$, temos:

(**a**) $\vec{u} \cdot \vec{v} = x_1 x_2 + y_1 y_2$;

(**b**) Validade das mesmas propriedades do produto escalar;

(**c**) Se θ é o ângulo entre $\vec{u} \neq 0$ e $\vec{v} \neq 0$, então $\cos\theta = \frac{\vec{u}\cdot\vec{v}}{\|\vec{u}\|\|\vec{v}\|}$;

(**d**) $\vec{u} \perp \vec{v}$ se, e somente se, $\vec{u} \cdot \vec{v} = 0$;

(**e**) $proj_{\vec{v}}\, \vec{u} = \frac{\vec{u}\cdot\vec{v}}{\|\vec{v}\|^2}\, \vec{v}$.