INSTITUTO FEDERAL
Catarinense
Campus Blumenau

# Geometria Analítica

Fabricio Alves Oliveira
fabricio.oliveira@ifc.edu.br

# Apresentação da Disciplina

# Apresentação da Disciplina e do Cronograma de Ensino

**Disciplina:** Geometria Analítica
**Carga Horária:** 60 horas

**Professor:** Fabricio Alves Oliveira (fabricio.oliveira@ifc.edu.br)

## Conteúdo Programático

1. Vetores no plano e no espaço
2. Produto de vetores
3. Retas
4. Planos
5. Distâncias
6. Cônicas: parábola, elipse e hipérbole
7. Superfícies Quádricas

# Apresentação da Disciplina

## Bibliografia Básica

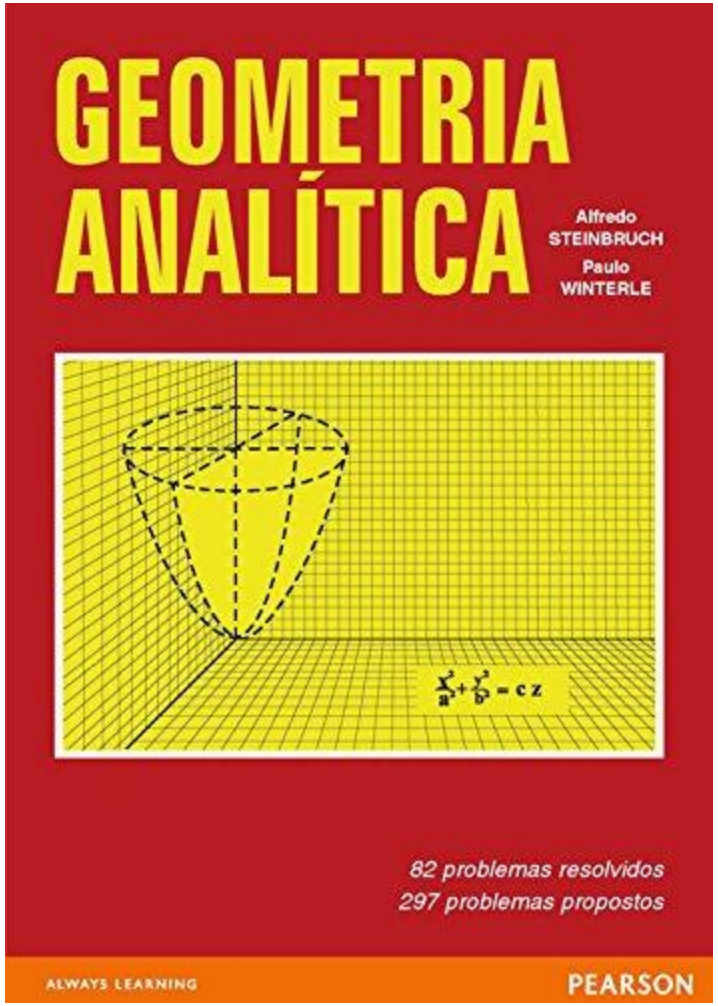

1. CAMARGO, Ivan de; BOULOS, Paulo. Geometria analítica: um tratamento vetorial. 3. ed. São Paulo: Pearson, 2005.
2. STEINBRUCH, Alfredo; WINTERLE, Paulo. Geometria analítica. 2. ed. São Paulo: Pearson Education, 1987.
3. LIMA, Elon Lages. Geometria analítica e álgebra linear. 2. ed. Rio de Janeiro: IMPA, 2013.

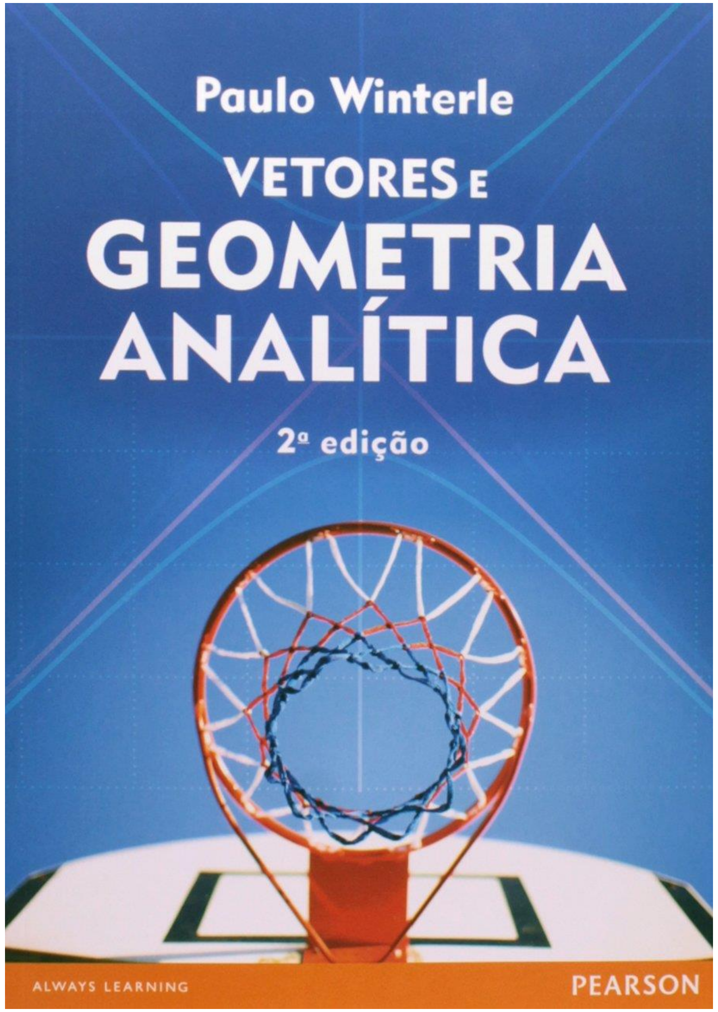

## Bibliografia Complementar

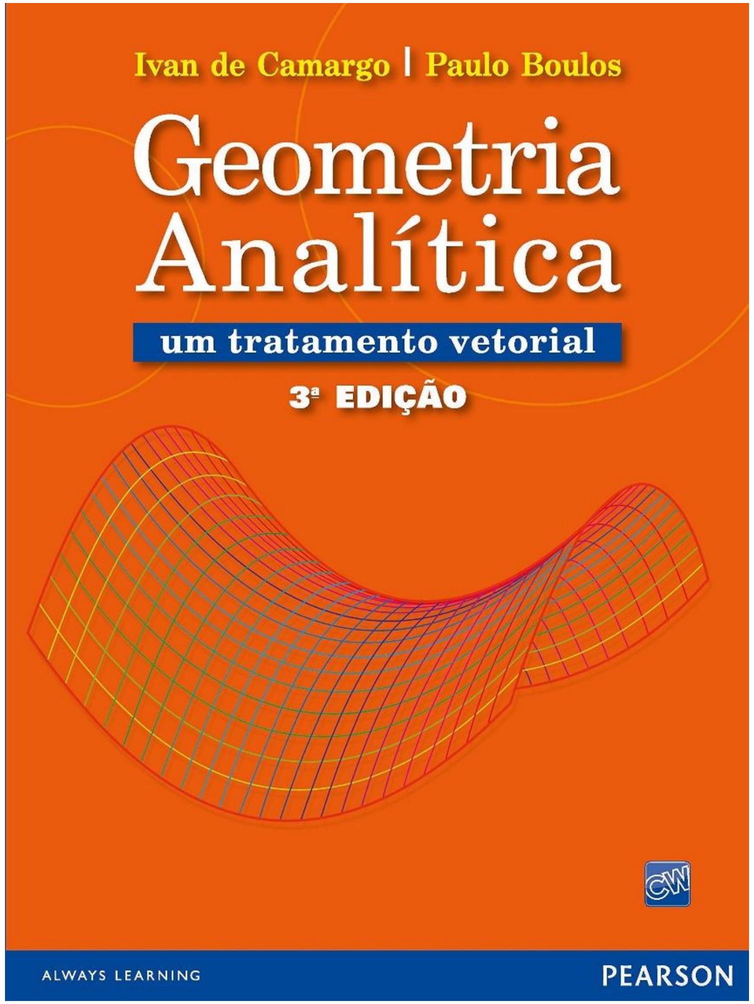

1. IEZZI, Gelson. Fundamentos de matemática elementar 3: trigonometria. 9. ed. São Paulo: Atual, 2013.
2. SMOLE, Kátia Stocco; DINIZ, Maria Inez de Souza Vieira. Matemática: ensino médio, 1. 9. ed. São Paulo: Saraiva, 2013.
3. SEBASTIANI, Marcos. Introdução à geometria analítica complexa. 2. ed. Rio de Janeiro: IMPA, 2010.
4. SANTOS, Fabiano José dos; FERREIRA, Silvimar Fábio. Geometria analítica. Porto Alegre: Bookman, 2009.
5. LEITHOLD, Louis. O cálculo com geometria analítica. 3. ed. São Paulo: HARBRA, 1994.

# Apresentação da Disciplina

## Livros



# Apresentação da Disciplina

## Materiais de Apoio

- Slides/PDF do professor e listas de exercícios compartilhados no sistema acadêmico (SIGAA).

- *Software* livre de geometria dinâmica e cálculo simbólico GeoGebra, disponível em: https://www.geogebra.org/download (GeoGebra Clássico 5).

## Avaliação

**Três provas** individuais, sem consulta e dissertativas:

- $\mathbf{P_1}$ (10 pontos) a ser realizada no dia **28/08/2023.**

- $\mathbf{P_2}$ (10 pontos) a ser realizada no dia **09/10/2023.**

- $\mathbf{P_3}$ (10 pontos) a ser realizada no dia **27/11/2023.**

**Listas de Exercícios (LE)** (10 pontos no total)

# Apresentação da Disciplina

## Média Semestral

- Será utilizada a **média ponderada das três provas e das listas de exercícios** para gerar a média semestral (MS), considerando peso igual a 3 (três) para cada prova e peso igual a 1 (um) para as listas de exercícios.

- Desse modo, a média semestral é calculada por

$$MS = \frac{3P_1 + 3P_2 + 3P_3 + LE}{10}.$$

**Observações:**

- As provas e as listas de exercícios irão avaliar interpretação e resolução de problemas, aplicação de conceitos e propriedades.

- A segunda chamada de prova deverá ser solicitada na secretária acadêmica, respeitando regras e prazos estipulados no PPC do curso.

# Apresentação da Disciplina

## Aprovação

Será considerado aprovado o discente que:

- tiver frequência igual ou superior a 75% (setenta e cinco por cento); e
- média semestral (MS) igual ou superior a 7,0 (sete), **com a oferta de exame final.**

**Exame Final:** 18/12/2023

**Observação:** A média final para aprovação, **na ocasião da realização do exame final** será igual a divisão por 2 da soma das média do período com a nota obtida no exame final. Para considerar aprovação, a nota final deverá ser superior ou igual a 5,0, ou seja,

$$\text{Média Final} = \frac{\text{Média do Período} + \text{Nota do Exame Final}}{2} \geq 5{,}0.$$

# Apresentação da Disciplina

## Horário de Atendimento Docente

- **Dias e horários:**
  - Segunda e Quinta: 17:00 às 18:30
- **Sala:** 13.

# 1- Vetores no Plano e no Espaço

# Vetores: Abordagem Geométrica

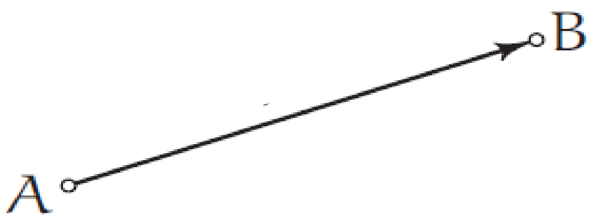
## Reta Orientada - Eixo

Uma **reta orientada** ou um **eixo** é uma reta na qual se fixou um sentido de percurso, considerado positivo e indicado por uma seta (o sentido oposto é negativo).

## Segmento Orientado

Um **segmento orientado** é determinado por um par ordenado de pontos, o primeiro chamado **origem** do segmento, o segundo chamado **extremidade**.

O segmento orientado de origem A e extremidade B será representado por AB e, geometricamente, indicado por uma seta que caracteriza visualmente o sentido do segmento.



**Segmento Nulo:** É aquele cuja extremidade coincide com a origem.

**Segmentos Opostos:** Se AB é um segmento orientado, o segmento orientado BA é oposto de AB.

## Características de um segmento orientado

- **Medida de um segmento:** Fixada uma unidade de comprimento, a medida de um segmento orientado é a medida do segmento em relação àquela unidade. A medida de um segmento orientado também é chamada de **comprimento** ou **módulo**.

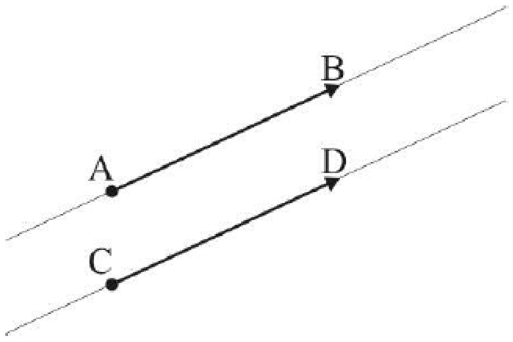
- **Direção:** A direção de um segmento orientado pode ser entendida como o ângulo que este segmento faz com o eixo horizontal.

- **Sentido:** O sentido do segmento orientado AB é de A para B. Assim o sentido de um segmento tem relação com a sua origem e a sua extremidade.

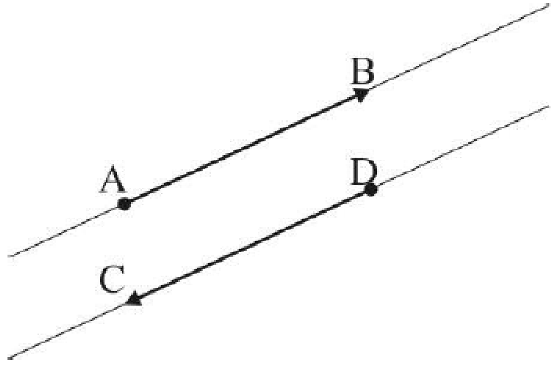
## Observações:

**(1)** Dois segmentos orientados não nulos AB e CD têm a mesma direção quando as retas suportes desses segmentos são paralelas ou coincidentes.

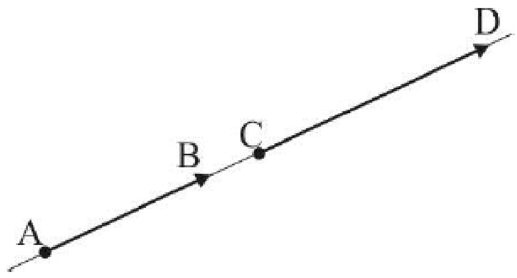
**(2)** Só se pode comparar os sentidos de dois segmentos orientados se eles têm a mesma direção.



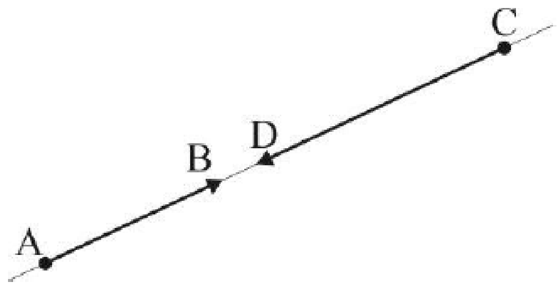

$AB$ e $CD$ tem a mesma direção e sentido




$AB$ e $DC$ tem mesma direção e sentidos opostos




$AB$ e $CD$ tem a mesma direção e sentido

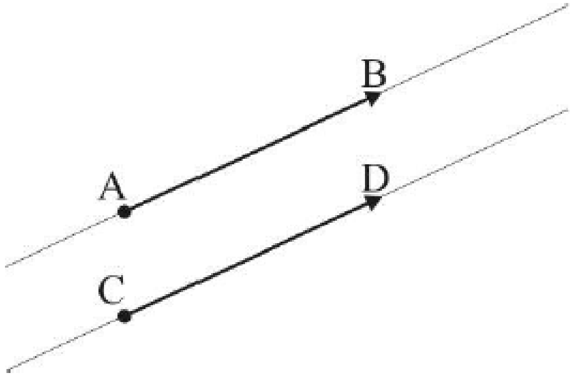



$AB$ e $CD$ tem mesma direção e sentidos opostos

# Segmentos Equipolentes

Dois segmentos orientados AB e CD são **equipolentes** quando têm a mesma direção, o mesmo sentido e o mesmo comprimento.

A equipolência entre AB e CD é representada por AB ~ CD.




AB é equipolente a CD

- Consideramos que um segmento orientado é equipolente a ele próprio.
- Dois segmentos nulos são sempre equipolentes.

# Propriedades da Equipolência

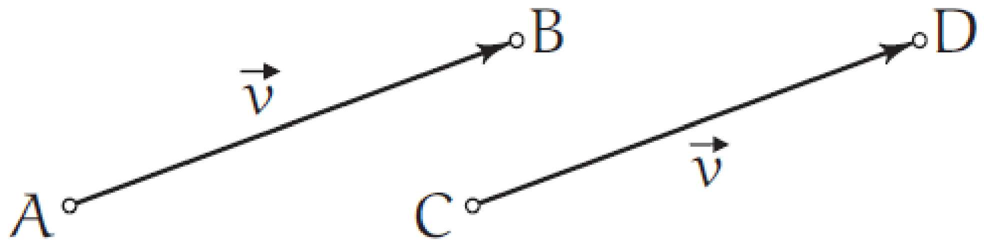
I) $AB \sim AB$ (reflexiva)
II) Se $AB \sim CD$, então $CD \sim AB$ (simétrica)
III) Se $AB \sim CD$ e $CD \sim EF$, então $AB \sim EF$ (transitiva)
IV) Dado um segmento orientado $AB$ e um ponto $C$, existe um único ponto D tal que $AB \sim CD$.

Por (I), (II) e (III), segue que a relação de equipolência é uma **relação de equivalência**.

# Vetor

**Definição:** Seja AB um segmento orientado. Ao conjunto de todos os segmentos orientados equipolentes a AB chamamos de **vetor** com origem em A e extremidade em B e indicamos por $\overrightarrow{AB}$.

- Dizemos que o segmento orientado AB é um **representante** do vetor $\overrightarrow{AB}$.
- Qualquer segmento orientado CD equipolente a AB pode ser um representante do vetor $\overrightarrow{AB}$, ou seja, $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CD}$.




$$\vec{v} = \overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CD}$$

Note que, pela forma como foi definido, um vetor **não depende de sua posição no espaço**, ou seja, **um determinado vetor pode ter um representante com origem em qualquer ponto do espaço.**

## Observação:

- As características de um vetor $\vec{v}$ são as mesmas de qualquer um de seus representantes, isto é: o **módulo**, a **direção** e o **sentido** do vetor são o módulo, a direção e o sentido de qualquer um de seus representantes.

- O **comprimento** de $\vec{v}$ é indicado por $||\vec{v}||$ ou $|\vec{v}|$. O comprimento de um vetor também é chamado de **módulo** ou **norma**.

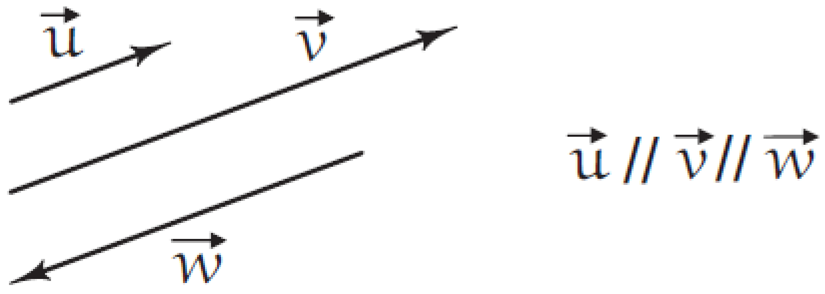
## Definições Complementares

**1)** Um vetor cuja extremidade coincide com a origem é chamado **vetor nulo**, e é indicado por $\vec{v} = \vec{0}$.

- O vetor nulo não determina direção e, portanto, também não determina sentido.
- O vetor nulo possui comprimento nulo, ou seja, $\|\vec{0}\| = 0$.

**2)** Os vetores não nulos $\vec{u}$ e $\vec{v}$ são **paralelos** quando segmentos orientados que os representam são paralelos ou colineares. Indicamos por $\vec{u} // \vec{v}$.

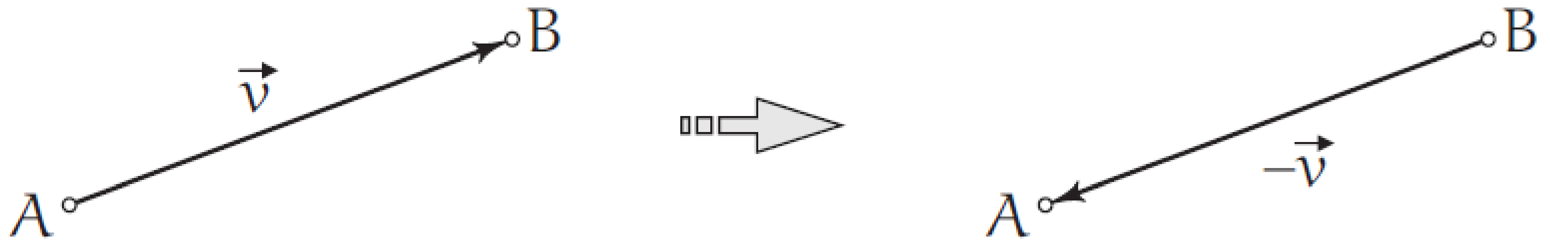
- Convencionamos que o vetor nulo é paralelo a qualquer outro vetor



**3)** Dois vetores não nulos $\vec{u}$ e $\vec{v}$ paralelos possuem **mesmo sentido** quando possuem segmentos orientados que os representem com mesmo sentido, caso contrário, $\vec{u}$ e $\vec{v}$ possuem **sentidos opostos.**

**4)** Dois vetores não nulos $\vec{u}$ e $\vec{v}$ são **vetores iguais** quando segmentos orientados que os representam possuem mesmo comprimento, direção e sentido. Neste caso escrevemos $\vec{u} = \vec{v}$.

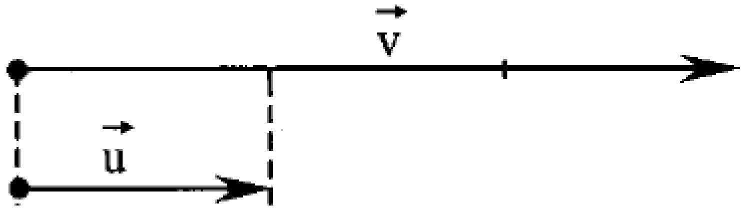
**5)** O **vetor oposto** de um vetor não nulo $\vec{v}$ é o vetor paralelo e de mesmo comprimento de $\vec{v}$ mas que possui sentido oposto ao sentido de $\vec{v}$. Indicamos o vetor oposto de $\vec{v}$ por $-\vec{v}$.




$$-\vec{v} = -\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{BA}$$

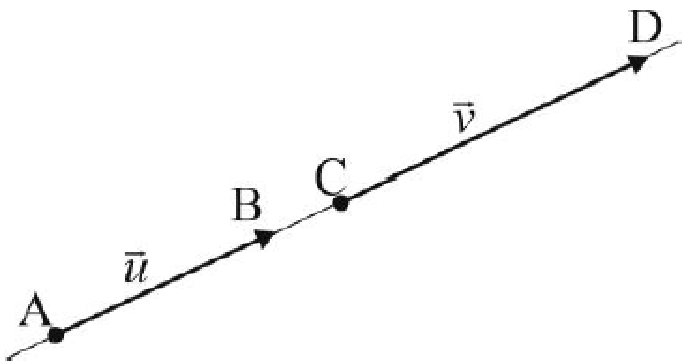
**6)** Um vetor $\vec{v}$ é dito **vetor unitário** quando $\|\vec{v}\| = 1$.

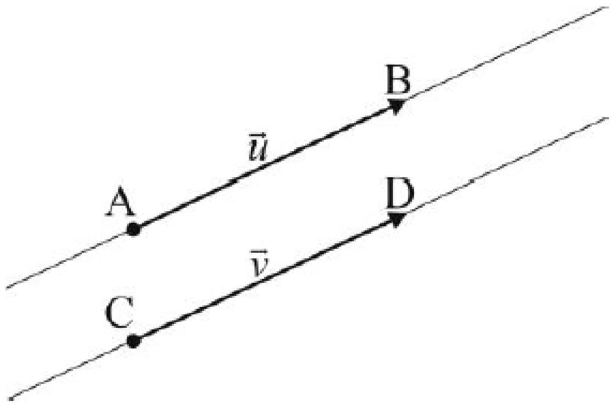
**7)** O **versor** de um vetor não nulo $\vec{v}$ é o vetor unitário que possui a mesma direção e sentido de $\vec{v}$.



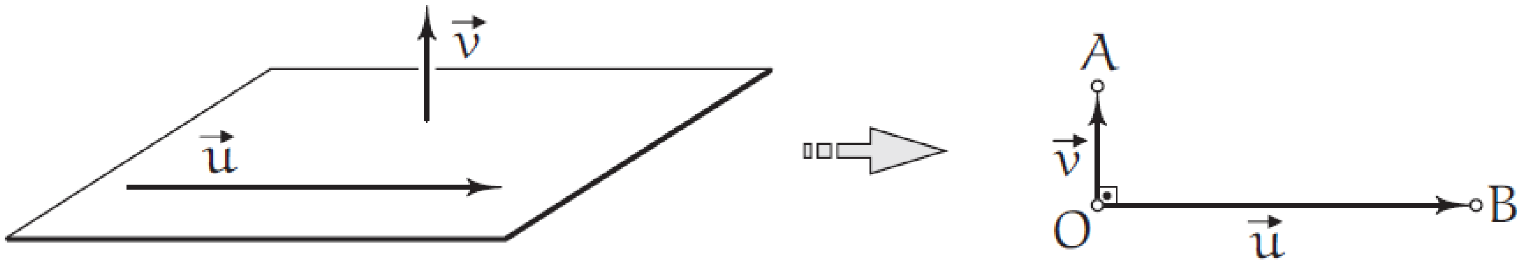

$\vec{u}$ é o versor de $\vec{v}$

**8)** Dois vetores $\vec{u}$ e $\vec{v}$ são **vetores colineares** quando tiverem a mesma direção, ou seja, quando tiverem representantes AB e CD pertencentes a uma mesma reta ou a retas paralelas.



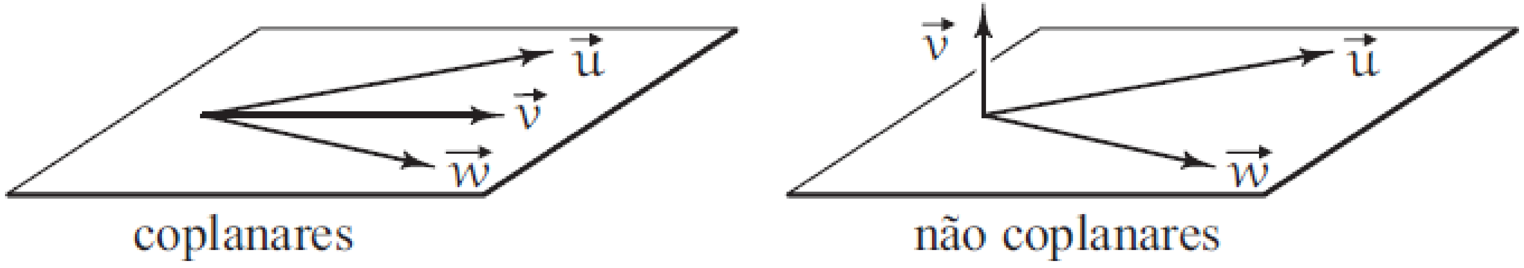



**9)** Dois vetores não nulos $\vec{u}$ e $\vec{v}$ são **vetores ortogonais** quando possuem segmentos orientados que os representem que sejam perpendiculares. Indicamos por $\vec{u} \perp \vec{v}$.



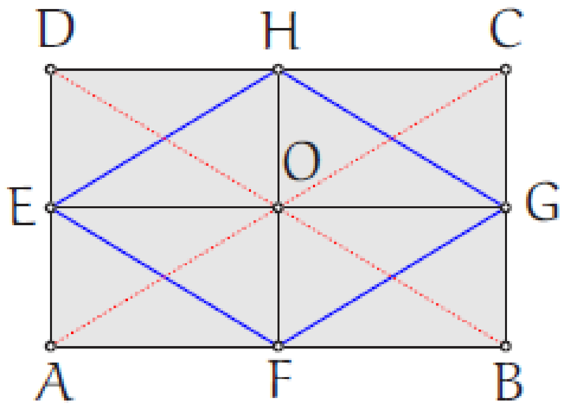

- Convencionamos que o vetor nulo é ortogonal a qualquer vetor.

**10)** Três ou mais vetores não nulos são **vetores coplanares** quando possuem segmentos orientados que os representem que sejam coplanares (que pertençam ao mesmo plano).




- Dois vetores não nulos são sempre coplanares.
- O vetor nulo é coplanar a qualquer conjunto de vetores coplanares.

**Exemplo:** Na figura abaixo temos o losango $EFGH$ inscrito no retângulo $ABCD$ (não quadrado), sendo $O$ o ponto de intersecção das diagonais do losango. Os pontos $E$, $F$, $G$ e $H$ são pontos médios dos lados $DA, AB, BC$ e $CD$, respectivamente.

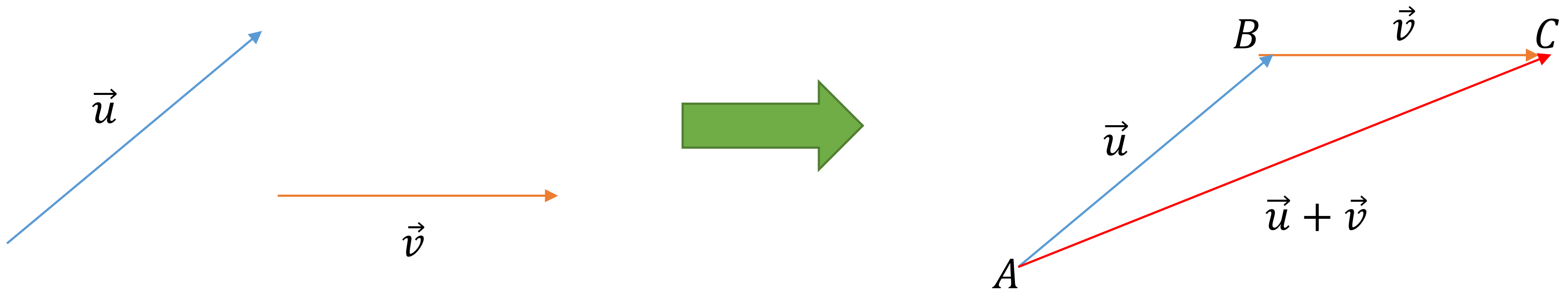



Classifique as afirmações a seguir em verdadeiras ou falsas.

**(a)** $\overrightarrow{EO} = \overrightarrow{OG}$
**(b)** $\overrightarrow{AF} = \overrightarrow{CH}$
**(c)** $\overrightarrow{DO} = \overrightarrow{HG}$
**(d)** $\|\overrightarrow{OC}\| = \|\overrightarrow{BO}\|$
**(e)** $\|\overrightarrow{OH}\| = \|\overrightarrow{DH}\|$
**(f)** $\overrightarrow{EH} = \overrightarrow{CO}$
**(g)** $\|\overrightarrow{AC}\| = \|\overrightarrow{BD}\|$
**(h)** $\|\overrightarrow{OA}\| = \|\overrightarrow{DB}\|/2$
**(i)** $\overrightarrow{AF} // \overrightarrow{CD}$
**(j)** $\overrightarrow{GF} // \overrightarrow{HG}$
**(k)** $\overrightarrow{AO} // \overrightarrow{OC}$
**(l)** $\overrightarrow{AB} \perp \overrightarrow{OH}$
**(m)** $\overrightarrow{EO} \perp \overrightarrow{CB}$
**(n)** $\overrightarrow{AO} \perp \overrightarrow{HF}$
**(o)** $\overrightarrow{OB} = -\overrightarrow{FE}$
**(p)** $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AC}$ e $\overrightarrow{AD}$ são coplanares

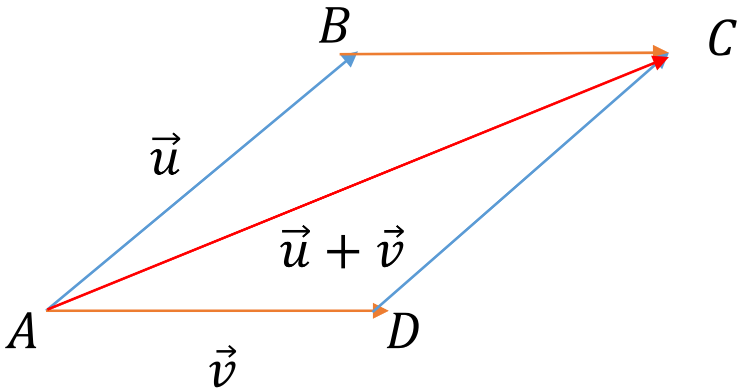
# Operações com Vetores

**Adição:** Sejam $\vec{u}$ e $\vec{v}$ vetores. Se $\vec{u} = \overrightarrow{AB}$ e $\vec{v} = \overrightarrow{BC}$, definimos o vetor **soma** $\vec{u} + \vec{v} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AC}$.




**Observação:**

- Poderíamos tomar $\vec{u} = \overrightarrow{AB}$ e $\vec{v} = \overrightarrow{AD}$. Logo $\vec{u} + \vec{v}$ poderia ser representado pela diagonal AC do paralelogramo ABCD.

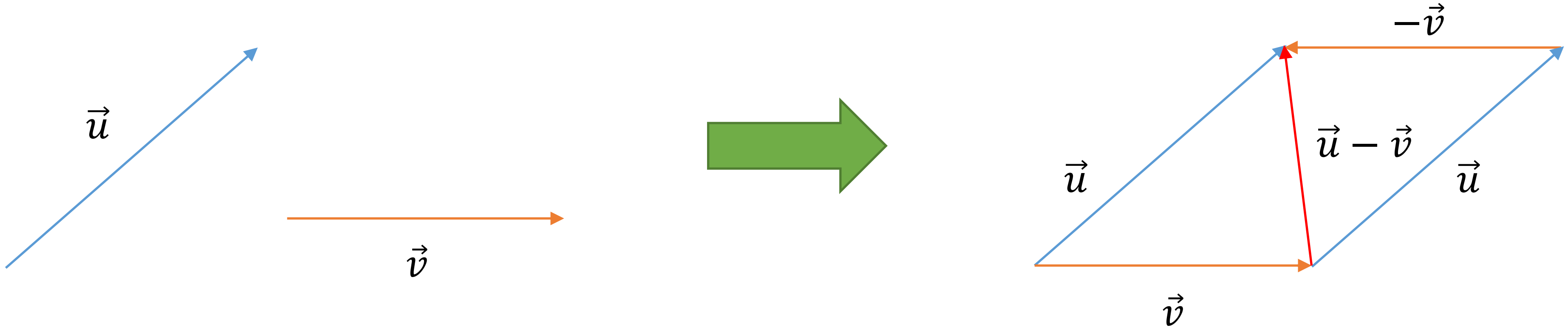



- A soma de três ou mais vetores processa-se de modo análogo. Por exemplo, se $\vec{u} = \overrightarrow{PQ}, \vec{v} = \overrightarrow{QR}$ e $\vec{w} = \overrightarrow{RS}$, então $\vec{u} + \vec{v} + \vec{w} = \overrightarrow{PS}$.

# Propriedades da Adição

Sejam $\vec{u}$, $\vec{v}$ e $\vec{w}$ vetores. Então, valem as seguintes propriedades:
(i) Comutativa: $\vec{u}+\vec{v}=\vec{v}+\vec{u}$;
(ii) Associativa: $(\vec{u}+\vec{v})+\vec{w}=\vec{u}+(\vec{v}+\vec{w})$;
(iii) O vetor nulo é elemento neutro aditivo: $\vec{u}+\vec{0}=\vec{u}$;
(iv) Todo vetor não nulo possui um elemento oposto: $\vec{u}+(-\vec{u})=\vec{0}$.

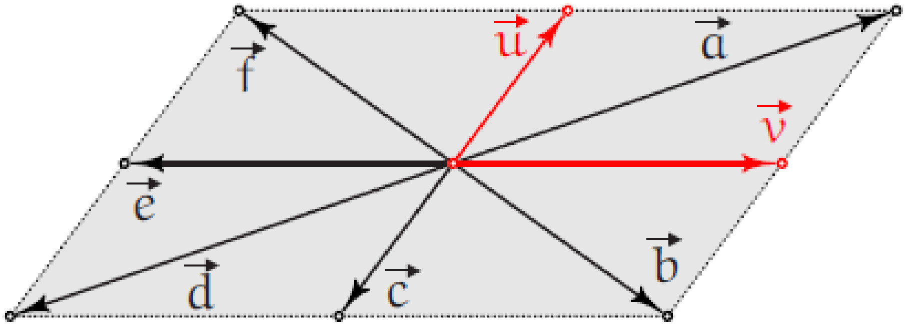
**Observação:** O vetor $\vec{u}$+(-$\vec{v}$) se escreve $\vec{u}-\vec{v}$ e é chamado **diferença** entre $\vec{u}$ e $\vec{v}$.




- Observe que o vetor $\vec{u}-\vec{v}$ possui um representante que forma uma das diagonais do paralelogramo baseado em representantes de $\vec{u}$ e $\vec{v}$.

# Exemplos

**(1)** Escreva os vetores da figura a seguir em função de $\vec{u}$ e $\vec{v}$.

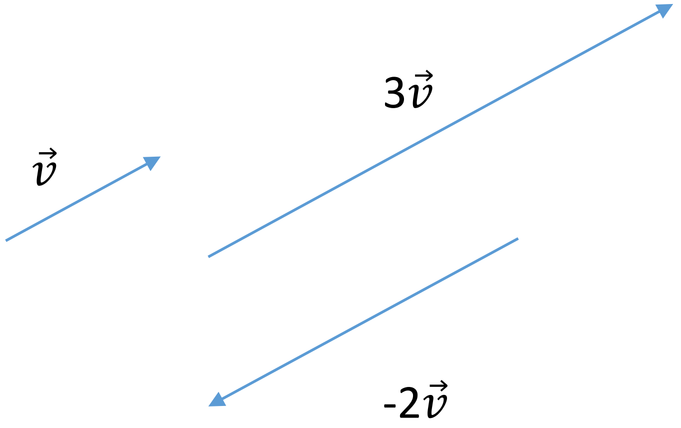



**(2)** Mostre que $\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AC} = \overrightarrow{CB}$.

# Multiplicação de número real por vetor (multiplicação por escalar)

Sejam $\alpha \in \mathbb{R}$ e $\vec{v}$ vetor. Definimos o vetor $\alpha\vec{v}$ de tal modo que:

- *comprimento:* o comprimento de $\alpha\vec{v}$ é $\|\alpha\vec{v}\| = |\alpha|\|\vec{v}\|$.
- *direção:*
  - quando $\alpha \neq 0$ e $\vec{v} \neq \vec{0}$, a direção de $\alpha\vec{v}$ é igual a direção de $\vec{v}$.
  - quando $\alpha = 0$ ou $\vec{v} = \vec{0}$, então $\alpha\vec{v}$ é o vetor nulo.
- *sentido:*
  - quando $\alpha > 0$, o sentido de $\alpha\vec{v}$ é o mesmo de $\vec{v}$.
  - quando $\alpha < 0$, o sentido de $\alpha\vec{v}$ é o oposto de $\vec{v}$.




# Propriedades da multiplicação de número real por vetor

Sejam $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ e $\vec{u}, \vec{v}$ vetores. Então, valem as seguintes propriedades:

(i) Associativa: $\alpha(\beta\vec{v}) = (\alpha\beta)\vec{v}$;

(ii) Distributiva em relação à soma de vetores: $\alpha(\vec{u} + \vec{v}) = \alpha\vec{u} + \alpha\vec{v}$;

(iii) Distributiva em relação à soma de números reais: $(\alpha + \beta)\vec{v} = \alpha\vec{v} + \beta\vec{v}$;

(iv) O número real 1 é elemento neutro multiplicativo: $1\vec{v} = \vec{v}$.

# Observações

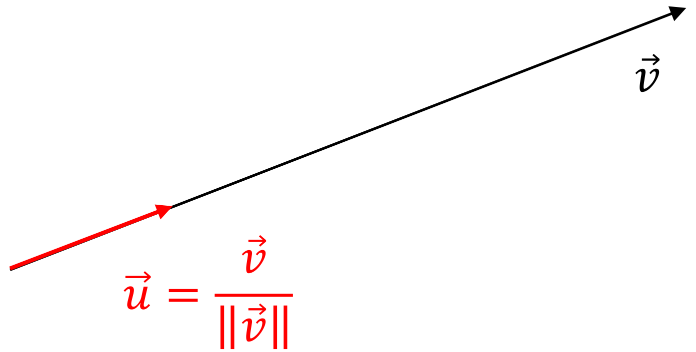
**1) (Condição de paralelismo entre vetores)** Dois vetores não nulos $\vec{u}$ e $\vec{v}$ são **paralelos** se, e somente se, existe $\alpha \in \mathbb{R}$ tal que $\vec{u} = \alpha\vec{v}$, ou seja,

$$\boxed{\vec{u} \,//\, \vec{v} \Leftrightarrow \exists\, \alpha \in \mathbb{R} \text{ tal que } \vec{u} = \alpha\vec{v}}$$


$\vec{u} = \alpha\vec{v}$ exprime algebricamente a noção geométrica de paralelismo entre vetores. É costume dizer que se dois vetores são paralelos, então eles são proporcionais.

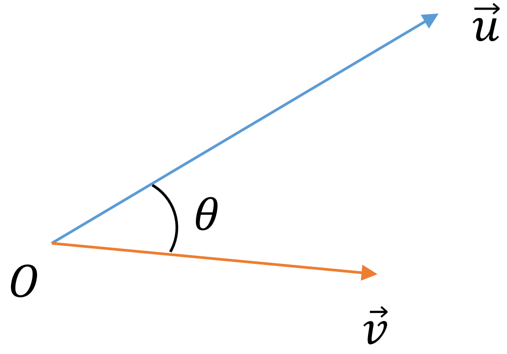
**2)** O **versor** de um vetor $\vec{v} \neq \vec{0}$ é dado por

$$\boxed{\vec{u} = \frac{\vec{v}}{\|\vec{v}\|}}$$



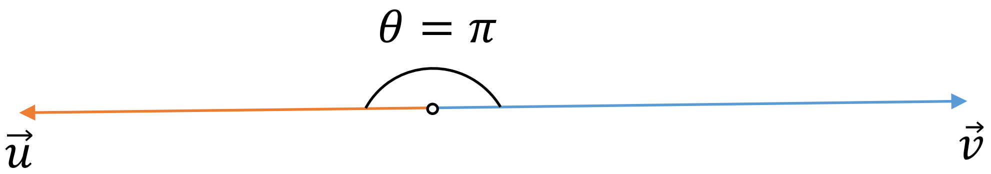
# Ângulo formado por vetores

O **ângulo** formado pelos vetores não nulos $\vec{u}$ e $\vec{v}$ é o ângulo $\theta$ formado por dois representantes de $\vec{u}$ e $\vec{v}$ tomados com a mesma origem e tal que $0 \leq \theta \leq \pi$ (radianos) ou $0° \leq \theta \leq 180°$ (graus).

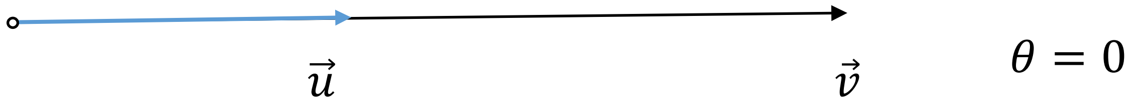



## Observações:

**1)** Se $\theta = \pi$, então $\vec{u}$ e $\vec{v}$ tem a mesma direção e sentidos opostos.




**2)** Se $\theta = 0$, então $\vec{u}$ e $\vec{v}$ tem a mesma direção e mesmo sentido.



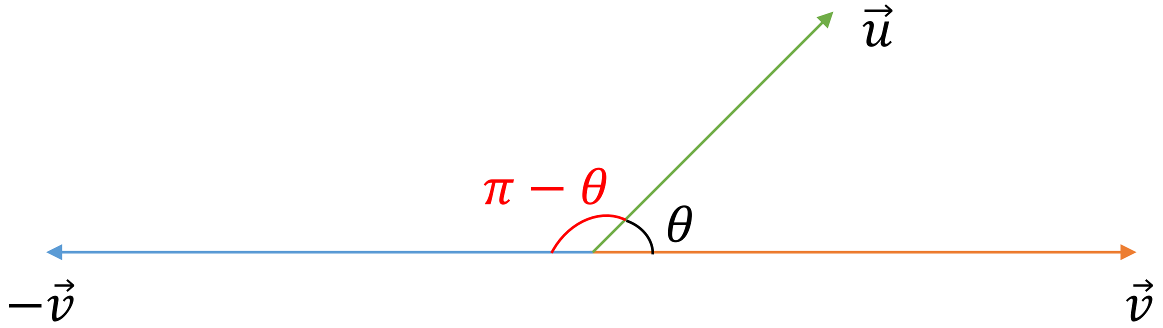
**3)** Se $\theta = \frac{\pi}{2}$, então $\vec{u}$ e $\vec{v}$ são ortogonais. O vetor nulo é considerado ortogonal a qualquer vetor.


$\vec{u} \perp \vec{v}$

O vetor nulo é considerado ortogonal a qualquer vetor.

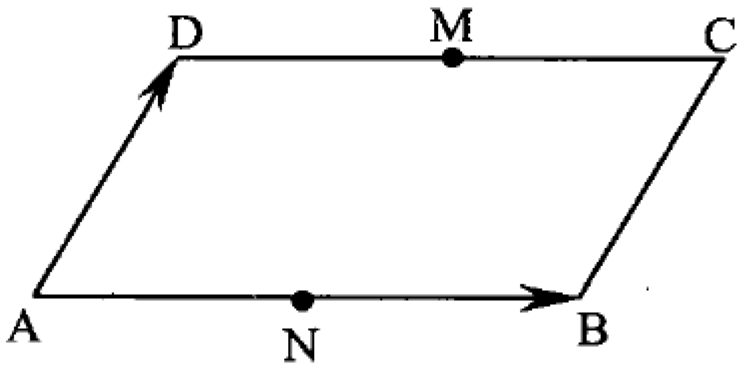
**4)** Se $\vec{u}$ é ortogonal a $\vec{v}$ e $\alpha \in \mathbb{R}$, então $\vec{u}$ é ortogonal a $\alpha\vec{v}$.

**5)** O ângulo formado pelos vetores $\vec{u}$ e $-\vec{v}$ é o suplemento do ângulo formado entre $\vec{u}$ e $\vec{v}$.



## Exercícios

**(1)** O paralelogramo ABCD abaixo é determinado pelos vetores $\overrightarrow{AB}$ e $\overrightarrow{AD}$, sendo M e N pontos médios dos lados DC e AB, respectivamente. Determine:




a) $\overrightarrow{AD} + \overrightarrow{AB} = \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{DC} = \overrightarrow{AC}$

b) $\overrightarrow{BA} + \overrightarrow{DA} = \overrightarrow{CD} + \overrightarrow{DA} = \overrightarrow{CA}$

c) $\overrightarrow{AC} - \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{CB} = \overrightarrow{AB}$

d) $\overrightarrow{AN} + \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AN} + \overrightarrow{NM} = \overrightarrow{AM}$

e) $\overrightarrow{MD} + \overrightarrow{MB} = \overrightarrow{CM} + \overrightarrow{MB} = \overrightarrow{CB}$

f) $\overrightarrow{BM} - \frac{1}{2}\overrightarrow{DC} = \overrightarrow{BM} + \frac{1}{2}\overrightarrow{CD} = \overrightarrow{BM} + \overrightarrow{MD} = \overrightarrow{BD}$

**(2)** Sabendo que o ângulo entre os vetores $\vec{u}$ e $\vec{v}$ é de $60°$, determine o ângulo formado pelos vetores:

a) $\vec{u}$ e $-\vec{v}$ b) $-\vec{u}$ e $\vec{v}$ c) $-\vec{u}$ e $-\vec{v}$ d) $2\vec{u}$ e $3\vec{v}$

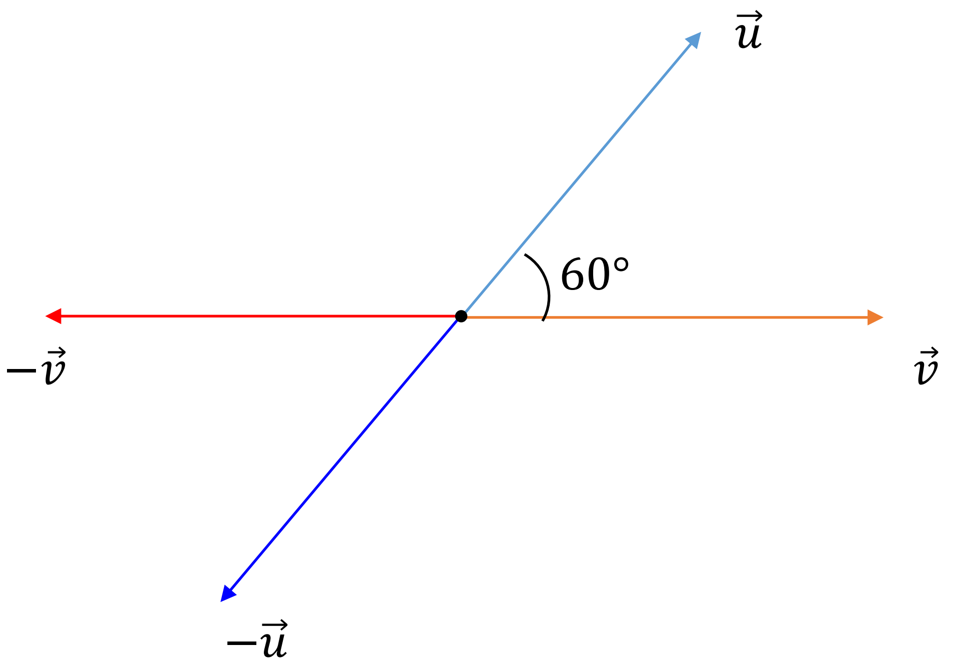
**Solução:**
De acordo com a figura ao lado, temos que:

a) $120°$

b) $120°$

c) $60°$

d) $60°$



## Aplicações

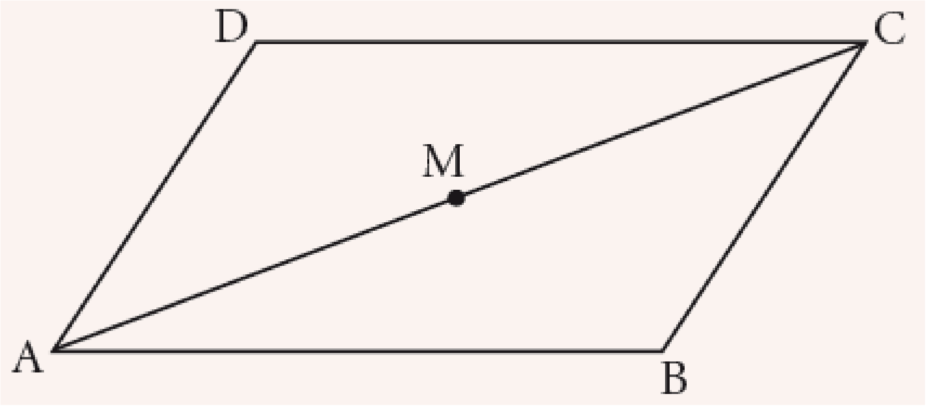
- Os vetores podem ser úteis nas demonstrações de alguns fatos da Geometria Euclidiana.
- A técnica vetorial pode simplificar bastante a resolução de problemas geométricos.

## Exemplos:

(1) Prove que as diagonais de um paralelogramo têm o mesmo ponto médio.

**Solução:** Considere o paralelogramo $ABCD$ de diagonais $AC$ e $BD$.
Seja $M$ o ponto médio de $AC$, isto é, $\overrightarrow{AM} = \overrightarrow{MC}$.
Vamos provar que $M$ também é ponto médio de $BD$.
Pela figura, temos que:

$$\begin{aligned}\overrightarrow{BM} &= \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{CM} \\ &= \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{MA} \\ &= \overrightarrow{MA} + \overrightarrow{AD} \\ &= \overrightarrow{MD}.\end{aligned}$$

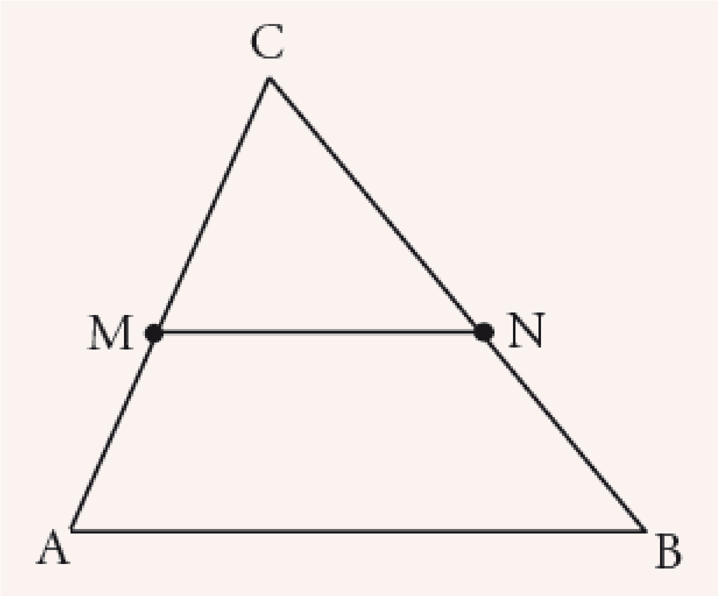



Como $\overrightarrow{BM} = \overrightarrow{MD}$, segue que $M$ é ponto médio de $\overrightarrow{BD}$.

**(2)** Mostre que o segmento cujos extremos são os pontos médios de dois lados de um triângulo é paralelo ao terceiro lado e igual à sua metade.

**Solução:** Seja o triângulo $ABC$ e $M$ e $N$ os pontos médios dos lados $CA$ e $CB$, respectivamente. Desse triângulo, temos que:

$$\begin{aligned}\overrightarrow{MN} &= \overrightarrow{MC} + \overrightarrow{CN} \\ &= \frac{1}{2}\overrightarrow{AC} + \frac{1}{2}\overrightarrow{CB} \\ &= \frac{1}{2}\left(\overrightarrow{AC} + \overrightarrow{CB}\right) \\ &= \frac{1}{2}\overrightarrow{AB}.\end{aligned}$$




Portanto, $\overrightarrow{MN}$ é paralelo a $\overrightarrow{AB}$ e $\|\overrightarrow{MN}\| = \frac{1}{2}\|\overrightarrow{AB}\|$.