7 DETERMINANTES

1 Definição e regras práticas

Seja A uma matriz *quadrada* de ordem n. Chama-se *determinante* da matriz A, e se indica por det A, o número obtido a partir de operações entre os elementos de A, de modo que:

- **1º** Se A é de ordem $n = 1$, então det A é o único elemento de A:

$$A = (3) \Rightarrow \det A = 3 \qquad B = (-8) \Rightarrow \det B = -8$$

- **2º** Se A é de ordem $n = 2$, então det A é dado pela diferença entre o produto dos elementos da diagonal principal de A e o produto dos elementos de sua diagonal secundária:

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 5 \end{pmatrix} \Rightarrow \det A = 2 \cdot 5 - 1 \cdot 3 = 10 - 3 = 7$$

$$B = \begin{pmatrix} 4 & 1 \\ -1 & -3 \end{pmatrix} \Rightarrow \det B = 4 \cdot (-3) - 1 \cdot (-1) = -12 + 1 = -11$$

Podemos também indicar o determinante de uma matriz colocando uma barra vertical em cada um de seus lados.
Assim:

$$\begin{vmatrix} 3 & 1 \\ 5 & 10 \end{vmatrix} = 30 - 5 = 25 \qquad \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 2 & 8 \end{vmatrix} = 0 - 2 = -2$$

- **3º** Se A é de ordem $n = 3$, utilizaremos o seguinte procedimento para obter o valor de det A:

a) copiamos ao lado da matriz A as suas duas primeiras colunas;
b) multiplicamos os elementos da diagonal principal de A. Segundo a direção da diagonal principal, multiplicamos, separadamente, os elementos das outras duas "diagonais";
c) multiplicamos os elementos da diagonal secundária de A, trocando o sinal do produto obtido. Segundo a direção da diagonal secundária, multiplicamos, separadamente, os elementos das outras duas diagonais, também trocando o sinal dos produtos;
d) somamos todos os produtos obtidos nos itens b e c.

Esse procedimento é conhecido como *Regra de Sarrus*.

Observação

A utilidade dos determinantes será explicada no próximo capítulo. Neste capítulo, o objetivo é apresentar as regras práticas de cálculo de determinante de matrizes 2×2 e 3×3, e também o teorema de Laplace, que pode ser usado em matrizes de qualquer ordem.

Exemplo 1

Vamos calcular o valor do determinante da matriz $A = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 5 \\ 1 & -1 & 2 \\ 3 & 4 & 3 \end{pmatrix}$.

$$\left|\begin{matrix} 2 & 3 & 5 \\ 1 & -1 & 2 \\ 3 & 4 & 3 \end{matrix}\right| \begin{matrix} 2 & 3 \\ 1 & -1 \\ 3 & 4 \end{matrix}$$

$$+15 \quad -16 \quad -9 \qquad -6 \quad 18 \quad 20 \implies$$

$\implies$ Assim, $\det A = 15 - 16 - 9 - 6 + 18 + 20 = 22$

Exemplo 2

Calculemos o valor do determinante $\begin{vmatrix} 4 & 5 & -3 \\ 2 & 1 & 0 \\ 3 & -1 & 1 \end{vmatrix}$

$$\left|\begin{matrix} 4 & 5 & -3 \\ 2 & 1 & 0 \\ 3 & -1 & 1 \end{matrix}\right| \begin{matrix} 4 & 5 \\ 2 & 1 \\ 3 & -1 \end{matrix}$$

$$+9 \quad 0 \quad -10 \qquad 4 \quad 0 \quad 6$$

O valor do determinante é $9 - 10 + 4 + 6 = 9$.

EXERCÍCIOS

1 Calcule:

a) $|3|$

b) $\left|-\dfrac{1}{5}\right|$

c) $\begin{vmatrix} 2 & 5 \\ 3 & 8 \end{vmatrix}$

d) $\begin{vmatrix} 4 & 3 \\ 2 & -1 \end{vmatrix}$

e) $\begin{vmatrix} -3 & -2 \\ -5 & -1 \end{vmatrix}$

2 Calcule o valor de $y = \begin{vmatrix} 11 & 7 \\ 3 & 2 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 4 & -5 \\ 2 & -3 \end{vmatrix}$.

3 Resolva, em $\mathbb{R}$, a equação $\begin{vmatrix} x & x+2 \\ 4 & 3 \end{vmatrix} = x$.

4 Resolva, em $\mathbb{R}$, a equação $\begin{vmatrix} x & 3 \\ x+1 & x-1 \end{vmatrix} = 2$.

5 Resolva, em $\mathbb{R}$, a desigualdade $\dfrac{\begin{vmatrix} x & -3 \\ -3 & x \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} x & 1 \\ 3 & 1 \end{vmatrix}} \geqslant \begin{vmatrix} 2x & 3 \\ -2 & 5 \end{vmatrix}$.

6 Calcule o valor de cada um dos seguintes determinantes:

a) $\begin{vmatrix} 3 & -7 & 2 \\ 4 & 1 & -1 \\ -2 & 2 & 3 \end{vmatrix}$

b) $\begin{vmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 2 & 1 & -1 \\ 4 & 3 & -3 \end{vmatrix}$

7 Qual o valor de cada um dos determinantes abaixo?

a) $\begin{vmatrix} 0 & 1 & 3 \\ -4 & 2 & 5 \\ -3 & 0 & -1 \end{vmatrix}$

b) $\begin{vmatrix} a & 1 & 1 \\ a & -1 & -a \\ a^2 & 1 & a \end{vmatrix}$

8 Sejam as matrizes $A = (a_{ij})_{3 \times 3}$, em que $a_{ij} = \begin{cases} 1, \text{ se } i \geqslant j \\ 2, \text{ se } 1 < j \end{cases}$, e $B = (b_{ij})_{3 \times 3}$, em que $b_{ij} = \begin{cases} -1, \text{ se } i \geqslant j \\ 1, \text{ se } i < j \end{cases}$. Qual o valor de det A + det B?

9 Resolva, em $\mathbb{R}$, a desigualdade $\begin{vmatrix} 6 & 1 & -5 \\ x & 0 & 1 \\ 1 & -3 & 2 \end{vmatrix} > \begin{vmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 0 & x & 4 \\ 0 & 0 & -6 \end{vmatrix}$.

10 (U. F. Ouro Preto-MG) Sejam as matrizes $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix}$ e $C = (5 \quad -1)$.

Pede-se:

a) Calcular $BC + 2A$ e CB.

b) Determinar λ de maneira que $\det(A - \lambda I) = 0$, em que I é a matriz identidade de ordem 2×2.

11 Resolva, em $\mathbb{R}$, as seguintes equações:

a) $\begin{vmatrix} 1 & 2 & x \\ -1 & x & x+1 \\ 3 & 2 & x \end{vmatrix} = 6$ b) $\begin{vmatrix} x & 0 & 1 \\ 2x & x & 2 \\ 3 & 2x & x \end{vmatrix} = 0$

12 (Unirio-RJ) Seja a matriz $A = \begin{bmatrix} -1 & c & 0 \\ 2 & 1 & -1 \\ a & b & -2 \end{bmatrix}$. Sabendo-se que $A^t = A$, calcule o determinante da matriz $A - A^2 + I_3^2$, sendo I_3 a matriz identidade de ordem 3.

(Unifor-CE) *Para resolver as questões de números 13 e 14, considere a matriz* $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 3 & k \\ 1 & 0 & k \end{pmatrix}$.

13 Determine k para o qual o determinante da matriz A é nulo.

14 Na matriz A, faça $k = 0$ e resolva a equação matricial $A \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ \frac{1}{2} \end{pmatrix}$. Dê o valor de $x - y - z$.

15 Resolva, em $\mathbb{R}$, a equação $\begin{vmatrix} x & 4 & -2 \\ x-1 & x & 1 \\ 1 & x+1 & 3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} x & 3 \\ 2 & 1 \end{vmatrix}$.

16 (Unicap-PE) Calcule o valor de x, a fim de que o determinante da matriz A seja nulo.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 4 & 9 & 4 \\ 6 & x & x-7 \end{pmatrix}$$

17 (UFF-RJ) Considere a matriz $M = \begin{bmatrix} -3 & 0 \\ 4 & 5 \end{bmatrix}$. Quais os valores de k que tornam nulo o determinante da matriz $M - kI$, sendo I a matriz identidade?

18 (F. Porto-Alegrense-RS) Seja a matriz $A = \begin{pmatrix} x & y \\ z & t \end{pmatrix}$, na qual x, y, z e $t \in \mathbb{R}$. Se os números x, y, z e t, nessa ordem, constituem uma P.G. de razão $\frac{1}{2}$, qual é o valor do determinante dessa matriz?

19 (UF-PA) O determinante da matriz $A = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 1 \\ -1 & y & 0 \\ 1 & 2 & 2y \end{pmatrix}$ é igual a -2. Se B e C são as matrizes obtidas, respectivamente, pela substituição em A do menor e do maior valor de y encontrados, calcule a matriz transposta do produto de B por C.

20 (UF-MG) Dadas as matrizes: $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 3 & 2 \\ 4 & 7 & 5 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 5 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 3 \\ -4 & 0 & -6 \end{pmatrix}$ e $C = \begin{pmatrix} x & 0 & 0 \\ 0 & x & 0 \\ 0 & 0 & x \end{pmatrix}$, determine todos os números reais x tais que o determinante da matriz $(C - AB)$ seja positivo.

2 Cofator

Se A é de ordem $n \geqslant 3$, vamos inicialmente apresentar o *cofator* de um elemento a_{ij} qualquer de A, que será indicado por A_{ij} $(1 \leqslant i, j \leqslant n)$.

Definimos:

$A_{ij} = (-1)^{i+j} \cdot D_{ij}$, em que D_{ij} é o determinante da matriz que se obtém de A, eliminando sua i–ésima linha e j–ésima coluna.

Exemplos

a) Sendo $A = \begin{bmatrix} 3 & -1 & 0 \\ 2 & 1 & -5 \\ 7 & -3 & 4 \end{bmatrix}$, então, eliminando-se a 1ª linha e a 3ª coluna,

obtemos: $A_{13} = (-1)^{1+3} \cdot \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 7 & -3 \end{vmatrix} \Rightarrow A_{13} = -13$ é o cofator do elemento a_{13}.

b) Sendo $B = \begin{bmatrix} 1 & 2 & -3 & 7 \\ 11 & -9 & 1 & -1 \\ 4 & 3 & -5 & 3 \\ 8 & -1 & 0 & 3 \end{bmatrix}$ e eliminando-se a 3ª linha e a 2ª coluna,

obtemos: $B_{32} = (-1)^{3+2} \cdot \begin{vmatrix} 1 & -3 & 7 \\ 11 & 1 & -1 \\ 8 & 0 & 3 \end{vmatrix} \Rightarrow B_{32} = -70$ é o cofator do elemento b_{32}.

3 Teorema de Laplace

Para calcular o determinante de uma matriz quadrada de ordem n, escolhemos arbitrariamente uma de suas filas (linha ou coluna) e somamos os produtos dos elementos dessa fila pelos respectivos cofatores.

Omitiremos, nesta obra, a demonstração desse teorema, bem como a demonstração de que o valor do determinante *não* depende da fila escolhida.

O Teorema de Laplace se aplica a toda matriz quadrada de ordem n; entretanto, para os casos n = 2 e n = 3 é mais simples, em geral, utilizar as regras práticas que foram vistas páginas atrás.

Exemplo 1

Vamos calcular $D = \begin{vmatrix} 3 & 1 & -2 & 1 \\ 5 & 2 & 2 & 3 \\ 7 & 4 & -5 & 0 \\ 1 & -1 & 11 & 2 \end{vmatrix}$

Escolhemos a linha 3 de D. Pelo Teorema de Laplace vem:

$$D = 7 \cdot A_{31} + 4 \cdot A_{32} + (-5) \cdot A_{33} + 0 \cdot A_{34} \ (*)$$

Temos:

$$A_{31} = (-1)^4 \cdot \begin{vmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 2 & 2 & 3 \\ -1 & 11 & 2 \end{vmatrix} = 9, \quad A_{32} = (-1)^5 \cdot \begin{vmatrix} 3 & -2 & 1 \\ 5 & 2 & 3 \\ 1 & 11 & 2 \end{vmatrix} = 20 \text{ e } A_{33} = (-1)^6 \cdot \begin{vmatrix} 3 & 1 & 1 \\ 5 & 2 & 3 \\ 1 & -1 & 2 \end{vmatrix} = 7$$

Observe que não é necessário calcular A_{34}.

Daí, em (*), temos que:

$$D = 7 \cdot 9 + 4 \cdot 20 + (-5) \cdot 7 = 108$$

Exemplo 2

Qual é o valor de $D = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 10 & 0 \\ 3 & -2 & 1 & -1 \\ 5 & 0 & -3 & -2 \\ -9 & 0 & 4 & 7 \end{vmatrix}$?

Embora a escolha seja arbitrária, devemos optar pela fila com maior número de zeros a fim de simplificar os cálculos. Escolhemos, dessa forma, desenvolver pelos elementos da 2ª coluna. Temos:

$$D = \underbrace{0 \cdot A_{12}}_{0} + (-2) \cdot A_{22} + \underbrace{0 \cdot A_{32}}_{0} + \underbrace{0 \cdot A_{42}}_{0} = -2 \cdot A_{22}.$$

Assim, basta calcular A_{22}.

Como $A_{22} = (-1)^{2+2} \cdot \begin{vmatrix} 1 & 10 & 0 \\ 5 & -3 & -2 \\ -9 & 4 & 7 \end{vmatrix} = -183$, segue que $D = (-2) \cdot (-183) = 366$.

EXERCÍCIOS

21 Calcule os seguintes determinantes:

a) $\begin{vmatrix} 3 & 4 & 2 & 1 \\ 5 & 0 & -1 & -2 \\ 0 & 0 & 4 & 0 \\ -1 & 0 & 3 & 3 \end{vmatrix}$ b) $\begin{vmatrix} -2 & 3 & 1 & 7 \\ 0 & -1 & 2 & 0 \\ 3 & -4 & 5 & 1 \\ 1 & 0 & -2 & -1 \end{vmatrix}$ c) $\begin{vmatrix} 1 & -1 & 5 & 1 \\ 0 & 3 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 7 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 4 \end{vmatrix}$

22 Calcule os seguintes determinantes:

a) $\begin{vmatrix} 0 & 5 & -3 & 4 \\ 11 & -1 & 2 & 7 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 4 & -3 & 2 & -1 \end{vmatrix}$ b) $\begin{vmatrix} 0 & a & b & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ a & a & 0 & b \\ 1 & b & a & 0 \end{vmatrix}$ c) $\begin{vmatrix} -x & y & 1 & 0 \\ -y & 0 & -1 & x \\ 0 & 0 & 0 & 2 \\ 1 & -1 & x & y \end{vmatrix}$

23 Resolva, em $\mathbb{R}$, a equação: $\begin{vmatrix} x & 0 & 0 & 3 \\ -1 & x & 0 & 0 \\ 0 & -1 & x & 1 \\ 0 & 0 & -1 & -2 \end{vmatrix} = 3.$

24 Resolva, em $\mathbb{R}$, a equação: $\begin{vmatrix} 2^x & 0 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 1 & -3 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \\ -3 & -1 & 2 & 0 \end{vmatrix} = -79.$

25 Calcule: $\begin{vmatrix} 2 & 2 & 3 & -4 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & -5 & 5 & 1 & 4 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & 2 \end{vmatrix}.$

4 Propriedades dos determinantes

Em alguns casos, o cálculo de determinantes pode ser simplificado com o auxílio de algumas propriedades. Vamos passar a estudá-las, lembrando sempre que, ao nos referirmos a uma *fila* da matriz, estaremos pensando, indiferentemente, em uma linha ou em uma coluna. Além disso, estaremos supondo que A é uma matriz quadrada de ordem n.

I. Fila nula

Se A possui uma fila na qual todos os elementos são iguais a zero, então det A = 0.

A justificativa para tal fato é que, desenvolvendo o determinante por essa fila, por meio do Teorema de Laplace, obtemos uma soma de zeros, pois o produto de um elemento dessa fila pelo respectivo cofator é sempre igual a zero.

Acompanhe essa idéia para o caso n = 4:

$$M = \begin{bmatrix} a & b & 0 & c \\ d & e & 0 & f \\ g & h & 0 & i \\ j & k & 0 & l \end{bmatrix} \xrightarrow[\text{pela 3ª coluna}]{\text{desenvolvendo}} \det M = 0 \cdot M_{13} + 0 \cdot M_{23} + 0 \cdot M_{33} + 0 \cdot M_{43} = 0$$

II. Troca de filas paralelas

Vamos trocar a posição de duas filas paralelas de A, obtendo uma outra matriz A'. Vale sempre a relação: det A' = –det A.

Justifiquemos tal fato para o caso n = 3:

$$\text{Se } A = \begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{pmatrix} \xrightarrow[\text{da 1ª e 3ª linhas}]{\text{trocamos a posição}} A' = \begin{pmatrix} g & h & i \\ d & e & f \\ a & b & c \end{pmatrix}$$

- Usando Laplace, vamos desenvolver det A pela 1ª linha:

$$\det A = a \cdot A_{11} + b \cdot A_{12} + c \cdot A_{13} = a \cdot (-1)^2 \cdot \begin{vmatrix} e & f \\ h & i \end{vmatrix} + b \cdot (-1)^3 \cdot \begin{vmatrix} d & f \\ g & i \end{vmatrix} +$$

$$+ c \cdot (-1)^4 \cdot \begin{vmatrix} d & e \\ g & h \end{vmatrix} = a \cdot (ei - fh) - b \cdot (di - fg) + c \cdot (dh - ge) \quad (1)$$

- Usando Laplace, vamos desenvolver det A' pela 3ª linha:

$$\det A' = a \cdot A'_{31} + b \cdot A'_{32} + c \cdot A'_{33} = a \cdot (-1)^4 \cdot \begin{vmatrix} h & i \\ e & f \end{vmatrix} + b \cdot (-1)^5 \cdot \begin{vmatrix} g & i \\ d & f \end{vmatrix} +$$

$$+ c \cdot (-1)^6 \cdot \begin{vmatrix} g & h \\ d & e \end{vmatrix} = a \cdot (fh - ei) - b \cdot (fg - di) + c \cdot (ge - dh) \quad (2)$$

De 1 e 2, segue que det A' = −det A.

Assim, por exemplo:

- Se $\begin{vmatrix} 2 & 3 \\ -1 & 4 \end{vmatrix} = 11$, então $\begin{vmatrix} -1 & 4 \\ 2 & 3 \end{vmatrix} = -11$.

- Se $\begin{vmatrix} 1 & 2 & x \\ -4 & 5 & y \\ -3 & 7 & z \end{vmatrix} = 8$, então $\begin{vmatrix} x & 2 & 1 \\ y & 5 & -4 \\ z & 7 & -3 \end{vmatrix} = -8$.

III. Multiplicação de uma fila por um número real

Quando os elementos de uma fila de *A* são multiplicados por um número real *k*, $k \neq 0$, obtemos uma nova matriz *A'*.

Vale sempre: det A' = k · det A.

Saiba o porquê disso no caso n = 3:

$$\text{Seja } A = \begin{bmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{bmatrix} \xrightarrow{\text{multiplicamos por } k \text{ os elementos da 2ª linha}} A' = \begin{bmatrix} a & b & c \\ kd & ke & kf \\ g & h & i \end{bmatrix}$$

- Por Laplace, aplicado à 2ª linha de *A*, vem:

$$\det A = d \cdot A_{21} + e \cdot A_{22} + f \cdot A_{23} \qquad 1$$

- Desenvolvendo det A', pela 2ª linha, obtemos:

$$\det A' = kd \cdot A'_{21} + k \cdot e \cdot A'_{22} + kfA'_{23} = k \cdot (d \cdot A'_{21} + e \cdot A'_{22} + f \cdot A'_{23}) \qquad 2$$

Como as demais linhas permaneceram inalteradas, é fácil notar que $A_{21} = A'_{21}$, $A_{22} = A'_{22}$ e $A_{23} = A'_{23}$. Assim, em 2 vem:

$$\det A' = k \cdot \underbrace{(d \cdot A_{21} + e \cdot A_{22} + f \cdot A_{23})}_{\text{por } 1} = k \cdot \det A$$

Exemplo 1

Seja $M = \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 4 & 3 \end{bmatrix}$, det M = 10. Vamos multiplicar por 4 a 2ª coluna de *M*, obtendo $M' = \begin{bmatrix} 2 & -4 \\ 4 & 12 \end{bmatrix}$. Temos:

$$\det M' = 40, \text{ isto é, } \det M' = 4 \cdot \det M$$

Exemplo 2

Considere $P = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$.

- Vamos, em primeiro lugar, multiplicar a 1ª linha de P por 2, obtendo $P' = \begin{bmatrix} 2a & 2b \\ c & d \end{bmatrix}$.
Sabemos, por essa propriedade, que $\det P' = 2 \cdot \det P$.
- Agora, vamos dividir por 3 $\left(\text{ou multiplicar por } \frac{1}{3}\right)$ a 2ª linha de P', obtendo

$$P'' = \begin{bmatrix} 2a & 2b \\ \frac{1}{3}c & \frac{1}{3}d \end{bmatrix}$$

Sabemos que $\det P'' = \frac{1}{3} \cdot \det P' = \frac{1}{3} \cdot 2 \cdot \det P = \frac{2}{3} \cdot \det P$.

Exemplo 3

Se R é uma matriz quadrada de ordem 3 e $\det R = x$, quanto vale $\det (4R)$?

Se $R = \begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{pmatrix}$, então $4 \cdot R = \begin{pmatrix} 4a & 4b & 4c \\ 4d & 4e & 4f \\ 4g & 4h & 4i \end{pmatrix}$.

Observemos que, para obter a matriz $4R$, multiplicamos por 4 a 1ª, 2ª e 3ª linhas de R. Aplicando sucessivamente a propriedade III, concluímos que $\det (4R) = 4 \cdot 4 \cdot 4 \cdot \det R = 4^3 \cdot \det R = 64x$.

EXERCÍCIOS

26 Sem desenvolver o determinante, calcule:

a) $\begin{vmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 5 & 3 & 11 \end{vmatrix}$

b) $\begin{vmatrix} 1 & 3 & 0 & -2 \\ 5 & -7 & 0 & 4 \\ 11 & 2 & 0 & 5 \\ 0 & 6 & 0 & 9 \end{vmatrix}$

27 Sabendo que $\begin{vmatrix} x & y \\ z & w \end{vmatrix} = 4$, calcule, sem desenvolver o determinante:

a) $\begin{vmatrix} z & w \\ x & y \end{vmatrix}$

b) $\begin{vmatrix} 5x & 5y \\ z & w \end{vmatrix}$

c) $\begin{vmatrix} x & y \\ 5z & 5w \end{vmatrix}$

d) $\begin{vmatrix} 5x & 5y \\ 5z & 5w \end{vmatrix}$

28 Se $\begin{vmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{vmatrix} = -10$, qual é o valor de:

a) $\begin{vmatrix} a & b & c \\ 2d & 2e & 2f \\ 3g & 3h & 3i \end{vmatrix}$

b) $\begin{vmatrix} b & a & 4c \\ e & d & 4f \\ h & g & 4i \end{vmatrix}$

29 Se A é uma matriz quadrada de ordem 2 e det A = 5, qual é o valor de det (3A)?

30 P é uma matriz quadrada de ordem 3, det P = 7. Determine o valor de x, sabendo que det (2P) = 2x + 6.

31 A é uma matriz quadrada de ordem 6 e det A = x. Qual é o valor do determinante da matriz obtida a partir de A quando suas duas primeiras linhas são multiplicadas por 2, as duas linhas seguintes são multiplicadas por 3 e as duas últimas são divididas por 6?

32 Considere uma matriz quadrada A de ordem 4 e multiplique cada uma de suas colunas por m ($m > 0$), obtendo a matriz $m \cdot A$. Se det (mA) = 243 e det A = 3:

a) Encontre o valor de m.

b) Multiplicando as duas primeiras colunas de A por 2m e as duas últimas por $\frac{1}{m}$, qual é o valor do determinante da matriz assim construída?

IV. Filas paralelas iguais ou proporcionais

Quando A possui filas paralelas iguais (ou proporcionais), então det A = 0 .

Vejamos, no caso abaixo, por que isso ocorre:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -3 & 4 & 5 \\ a & b & c & d \\ 7 & 11 & 1 & 0 \\ a & b & c & d \end{bmatrix} \xRightarrow{\text{troca}} A' = \begin{bmatrix} 1 & -3 & 4 & 5 \\ a & b & c & d \\ 7 & 11 & 1 & 0 \\ a & b & c & d \end{bmatrix}$$

Pela propriedade II, det A' = –det A. Ora, A = A' e assim det A' = det A. Daí, vem:

$$\det A = -\det A \Rightarrow 2\det A = 0 \Rightarrow \det A = 0$$

No caso de as filas serem proporcionais, temos:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -3 & 4 & 5 \\ a & b & c & d \\ 7 & 11 & 1 & 0 \\ 5a & 5b & 5c & 5d \end{bmatrix} \underset{\text{troca}}{\Longrightarrow} A' = \begin{bmatrix} 1 & -3 & 4 & 5 \\ 5a & 5b & 5c & 5d \\ 7 & 11 & 1 & 0 \\ a & b & c & d \end{bmatrix}$$

Pela propriedade II, det A' = −det A. (*)

Porém, *A'* pode ser vista como a matriz que se obtém de *A* multiplicando-se a 2ª linha por 5 e a 4ª linha por $\frac{1}{5}$.

Pela propriedade III, temos que det $A' = 5 \cdot \frac{1}{5} \cdot$ det A, isto é, det A' = det A e, em (*), concluímos que det A = 0.

Exemplos

$$\begin{matrix} \longrightarrow \\ \\ \longrightarrow \end{matrix} \begin{vmatrix} 2 & 3 & 1 \\ 4 & 5 & -2 \\ 2 & 3 & 1 \end{vmatrix} = 0 \qquad \begin{array}{c} \begin{vmatrix} 1 & 7 & 1 & 11 \\ 2 & \sqrt{2} & 2 & 1 \\ 4 & 0 & 4 & 3 \\ 3 & -1 & 3 & 7 \end{vmatrix} = 0 \\ \uparrow \qquad\quad \uparrow \end{array} \qquad \begin{matrix} \longrightarrow \\ \\ \longrightarrow \end{matrix} \begin{vmatrix} 3 & -1 & 2 \\ 5 & 4 & 1 \\ 18 & -6 & 12 \end{vmatrix} = 0$$

V. Matriz transposta

A e A^t são matrizes cujos determinantes coincidem, isto é, det A^t = det A.

Verifiquemos tal fato quando n = 2:

$$A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}, \text{ det } A = ad - bc; \quad A^t = \begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix} \text{ e det } A^t = ad - bc$$

Assim, por exemplo:

$$\begin{vmatrix} x & y \\ 3 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} x & 3 \\ y & 1 \end{vmatrix} \qquad \begin{vmatrix} 3 & 1 & 5 \\ 4 & 0 & 2 \\ 1 & -1 & 3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 3 & 4 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \\ 5 & 2 & 3 \end{vmatrix}$$

VI. Teorema de Binet

Sejam $A = \begin{pmatrix} 6 & 2 \\ -1 & 4 \end{pmatrix}$ e $B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -3 & 2 \end{pmatrix}$. Sabemos que det A = 26 e det B = 2.

Construímos agora a matriz produto $A \cdot B = \begin{pmatrix} 6 & 2 \\ -1 & 4 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -3 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 4 \\ -13 & 8 \end{pmatrix}$.

Temos que $\det (A \cdot B) = 0 - (-52) = 52 = \underbrace{\det A}_{26} \cdot \underbrace{\det B}_{2}$.

Pode-se mostrar que, se *A* e *B* são matrizes quadradas de mesma ordem, vale a relação:

$$\det (A \cdot B) = (\det A) \cdot (\det B)$$

EXERCÍCIOS

33 Se $\begin{vmatrix} x & y \\ z & w \end{vmatrix} = \frac{1}{2}$, qual é o valor de:

a) $\begin{vmatrix} x & z \\ y & w \end{vmatrix}$ b) $\begin{vmatrix} 2x & z \\ 2y & w \end{vmatrix}$ c) $\begin{vmatrix} x & y \\ z & w \end{vmatrix}$, quando z = x e y = w?

34 Sem desenvolver os determinantes, calcule o valor de:

$$y = \begin{vmatrix} 2 & 5 \\ 6 & 15 \end{vmatrix} + 2 \cdot \begin{vmatrix} 4 & -1 & 2 & 5 \\ 1 & 3 & 7 & 9 \\ 0 & -1 & 4 & 5 \\ 2 & 6 & 14 & 18 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 3 & -2 & 3 \\ 5 & 0 & 5 \\ 1 & \sqrt{3} & 1 \end{vmatrix}$$

35 Se $\begin{vmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{vmatrix} = -3$, qual é o valor de $\begin{vmatrix} 6a & 6d & 6g \\ 6b & 6e & 6h \\ 6c & 6f & 6i \end{vmatrix}$?

36 Sabendo-se que *A* e *B* são matrizes quadradas de ordem 2, det A = 20, det $B^t = -5$, qual é o valor de det (A · B)?

37 Sejam *A* e *B* matrizes quadradas de ordem 3, det A = 5 e det B = 3. Qual é o valor de:

a) det (A · B) b) det $(B^t \cdot A^t)$ c) det $(2 \cdot A^t)$

38 Admita que *P* é uma matriz quadrada inversível. Usando o Teorema de Binet, mostre que det P · det $P^{-1} = 1$.

5 Abaixamento da ordem de um determinante

O objetivo deste item é apresentar um método prático e rápido para se calcularem determinantes (de ordem maior ou igual a 3).

Comecemos estudando a seguinte propriedade:

> Quando substituímos a fila de uma matriz quadrada *A* pela soma dos elementos dela com os elementos de outra fila paralela previamente multiplicada por um número real (não nulo), obtemos uma outra matriz *A'*.
>
> Temos que det A' = det A.

Exemplo 1

Sendo $A = \begin{pmatrix} 5 & 11 \\ -4 & 3 \end{pmatrix}$, det A = 59. Vamos substituir a 2ª linha de *A* pela soma dela com a 1ª multiplicada por −2 e obter:

$$A' = \begin{pmatrix} 5 & 11 \\ \underset{-4+(-2)\cdot 5}{-14} & \underset{3+(-2)\cdot 11}{-19} \end{pmatrix}$$

Temos que det A' = −95 + 154 = 59.

Exemplo 2

Seja $B = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 3 \\ 4 & -2 & 1 \\ 3 & 1 & -7 \end{bmatrix}$, det B = 25. Substituímos a 2ª coluna de *B* pela soma dela com a 1ª multiplicada por 3, obtendo:

$$B' = \begin{bmatrix} 2 & \overset{-1+3\cdot 2}{5} & 3 \\ 4 & \overset{-2+3\cdot 4}{10} & 1 \\ 3 & \overset{1+3\cdot 3}{10} & -7 \end{bmatrix} \qquad \det B' = 25$$

Essa propriedade é conhecida como *Teorema de Jacobi*.

Exemplo 3

Seja, agora, $A = \begin{bmatrix} 1 & a & b \\ c & d & e \\ f & g & h \end{bmatrix}$. Vamos aplicar o Teorema de Jacobi duas vezes, a fim de obter "zeros" nas posições a_{12} e a_{13} da matriz A; isto é, com exceção do 1, vamos "zerar" a primeira linha de A. Temos:

substituímos a 3ª coluna de *A* pela soma dela com a 1ª coluna multiplicada por $-b$

$$A = \begin{bmatrix} 1 & a & b \\ c & d & e \\ f & g & h \end{bmatrix} \longrightarrow A' = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ c & d-ac & e-bc \\ f & g-af & h-bf \end{bmatrix}$$

substituímos a 2ª coluna de *A* pela soma dela com a 1ª coluna multiplicada por $-a$

Pelo Teorema de Jacobi, det A = det A'.

Para calcular det A', aplicamos o Teorema de Laplace, pois já conseguimos dois zeros na 1ª linha de A'. De fato:

$$\det A' = 1 \cdot A'_{11} + 0 \cdot A'_{12} + 0 \cdot A'_{13} = A'_{11} = (-1)^2 \cdot \begin{vmatrix} d-ac & e-bc \\ g-af & h-bf \end{vmatrix}, \text{ isto é,}$$

$$\det A = \det A' = \begin{vmatrix} d-ac & e-bc \\ g-af & h-bf \end{vmatrix}. \quad (*)$$

Em resumo, construímos as seguintes etapas:

- Aplicamos o Teorema de Jacobi à matriz A (3×3) e obtivemos a matriz A' (3×3).
- Ao calcularmos det A = det A', verificamos que este último coincide com o determinante de uma matriz (2×2), como mostra (*).
- Conseguimos, assim, *abaixar* a ordem do determinante de *A*.

Observe o esquema seguinte:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & a & b \\ c & d & e \\ f & g & h \end{bmatrix} \xrightarrow[\text{T. Laplace}]{\text{T. Jacobi} \; +} B = \begin{bmatrix} d-ac & e-bc \\ g-af & h-bf \end{bmatrix},$$

e det A = det B

Confira agora os passos para obter B a partir de A, *diretamente*:

- Em primeiro lugar, "isolamos" a 1ª linha e a 1ª coluna de A (passaremos a chamar tais filas de *margens*), obtendo assim uma matriz A^*, do tipo 2×2, conforme indicado abaixo:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & a & b \\ c & d & e \\ f & g & h \end{bmatrix}$$

margem

margem

matriz A^*

- Construímos a partir da matriz A^* uma outra matriz 2×2, em que cada um de seus elementos é dado pela diferença entre um elemento de A^* e o produto das respectivas margens. Chegamos, enfim, à matriz B.

$$A = \begin{bmatrix} 1 & a & b \\ c & d & e \\ f & g & h \end{bmatrix} \longrightarrow B = \begin{bmatrix} d - ac & e - bc \\ g - af & h - bf \end{bmatrix}$$

Esse processo é conhecido como *Regra de Chió*, e convém observar que tal regra só pode ser aplicada se o elemento a_{11} de A (elemento que se encontra na 1ª linha e 1ª coluna) for igual a 1.

Exemplo 4

Vamos calcular:

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 0 \\ 2 & 5 & 1 & -3 \\ -3 & 1 & 2 & 5 \\ -4 & -6 & 7 & 2 \end{vmatrix} \overset{\text{Chió}}{=} \begin{vmatrix} 5 - 2 \cdot 2 & 1 - 2 \cdot 3 & -3 - 2 \cdot 0 \\ 1 - 2(-3) & 2 - 3 \cdot (-3) & 5 - 0 \cdot (-3) \\ -6 - 2 \cdot (-4) & 7 - 3 \cdot (-4) & 2 - 0 \cdot (-4) \end{vmatrix} =$$

$$= \begin{vmatrix} 1 & -5 & -3 \\ 7 & 11 & 5 \\ 2 & 19 & 2 \end{vmatrix} \overset{\text{Chió}}{=} \begin{vmatrix} 11 - 7 \cdot (-5) & 5 - 7 \cdot (-3) \\ 19 - 2(-5) & 2 - 2 \cdot (-3) \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 46 & 26 \\ 29 & 8 \end{vmatrix} = -386$$

Exemplo 5

Se quisermos desenvolver $\begin{vmatrix} 3 & 7 & 4 \\ 1 & 2 & -1 \\ 0 & 3 & 2 \end{vmatrix}$ usando a Regra de Chió, precisamos trocar as posições da 1ª e 2ª linhas, a fim de que se tenha $a_{11} = 1$. Pela propriedade II, vem:

$$\begin{vmatrix} 3 & 7 & 4 \\ 1 & 2 & -1 \\ 0 & 3 & 2 \end{vmatrix} = -\begin{vmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 3 & 7 & 4 \\ 0 & 3 & 2 \end{vmatrix} \overset{\text{Chió}}{=} -\begin{vmatrix} 1 & 7 \\ 3 & 2 \end{vmatrix} = -(-19) = 19$$

Exemplo 6

Calculemos $D = \begin{vmatrix} 2 & 2 & 2 & 2 \\ 2 & 2 & 2 & 3 \\ 2 & 2 & 3 & 3 \\ 2 & 3 & 3 & 3 \end{vmatrix}$ usando a Regra de Chió.

A fim de obter $a_{11} = 1$, dividimos por 2 (multiplicamos por $\frac{1}{2}$) os elementos da 1ª coluna. Pela propriedade III, temos:

$$\frac{1}{2} \cdot \underbrace{\begin{vmatrix} 2 & 2 & 2 & 2 \\ 2 & 2 & 2 & 3 \\ 2 & 2 & 3 & 3 \\ 2 & 3 & 3 & 3 \end{vmatrix}}_{D} = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 2 & 2 \\ 1 & 2 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 3 & 3 \\ 1 & 3 & 3 & 3 \end{vmatrix} \overset{\text{Chió}}{=} \begin{vmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = -1$$

Logo, $\frac{1}{2}D = -1 \Rightarrow D = -2$.

EXERCÍCIOS

39 Calcule, usando Chió:

a) $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -1 & 4 & 7 \\ 0 & 3 & 2 \end{vmatrix}$

b) $\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 5 & 4 & 3 & 2 \\ 1 & -3 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \end{vmatrix}$

c) $\begin{vmatrix} 0 & 1 & 3 & 0 \\ 3 & 5 & 1 & -1 \\ 1 & -4 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & 1 \end{vmatrix}$

amos trocar as po-

de II, vem:

elementos da 1ª

$$\begin{matrix} 3 & 0 \\ 1 & -1 \\ 0 & 0 \\ 1 & 1 \end{matrix}\Bigg|$$

40 Calcule, usando Chió:

a) $\begin{vmatrix} 3 & 3 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ -1 & 0 & 2 \end{vmatrix}$ b) $\begin{vmatrix} 5 & -3 & 2 & 0 \\ 0 & 2 & 4 & 6 \\ 2 & 4 & -2 & 8 \\ 2 & 0 & 3 & 0 \end{vmatrix}$ c) $\begin{vmatrix} 4 & 2 & 11 \\ -6 & 3 & 9 \\ 7 & 1 & 5 \end{vmatrix}$

41 Mostre que $\begin{vmatrix} a & a & a & a \\ a & b & b & b \\ a & b & c & c \\ a & b & c & d \end{vmatrix} = a(b - a)\,(c - b)\,(d - c)$.

42 Resolva a equação $\begin{vmatrix} x & 2 & 2 & 2 \\ 2 & x & 2 & 2 \\ 2 & 2 & x & 2 \\ 2 & 2 & 2 & x \end{vmatrix} = 0$.

43 Resolva a equação $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 \\ x & x^2 & 0 \\ 3 & 7 & 4 \end{vmatrix} = 2$.

44 a) Calcule $D = \begin{vmatrix} x & x & x & x \\ x & y & y & y \\ y & x & y & x \\ y & y & x & x \end{vmatrix}$, supondo $x \neq 0$ e $y \neq 0$.

b) Mostre que, quando $y = 0$, tem-se que $D > 0$.

TESTES de VESTIBULARES

1 (Unifor-CE) Considere a matriz A, de ordem 3, na qual os elementos são dados por $a_{ij} = i + j - 1$.

O determinante dessa matriz é:

a) -7 c) -3 e) 0
b) -5 d) -1

2 (UF-RN) Sendo $a = \dfrac{2^x + 2^{-x}}{2}$ e $b = \dfrac{2^x - 2^{-x}}{2}$, o determinante da matriz $\begin{bmatrix} a & b \\ b & a \end{bmatrix}$ é igual a:

a) $\dfrac{1}{4}$ b) 4 c) 1 d) $\dfrac{1}{2}$

3 (Unificado-RJ) O valor de

$\begin{vmatrix} \cos a & -\operatorname{sen} a & 0 \\ \operatorname{sen} a & \cos a & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{vmatrix}$ é:

a) $4(\cos a + \operatorname{sen} a)$ d) 2
b) 4 e) 0
c) $2(\cos^2 a - \operatorname{sen} a)$

4 (Ucsal-BA) O determinante da matriz $A = (a_{ij})_{3\times3}$ em que $a_{ij} = \begin{cases} i - j \text{ se } i \leq j \\ 2ij \text{ se } i > j \end{cases}$ é igual a

a) -96 c) -90 e) 96
b) -92 d) 92

7 DETERMINANTES

Exercícios

10 b) $A - \lambda \cdot I = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} - \lambda \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1-\lambda & 2 \\ 1 & -\lambda \end{pmatrix}$

Então $\det(A - \lambda \cdot I) = 0$ equivale a $\begin{vmatrix} 1-\lambda & 2 \\ 1 & -\lambda \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow \lambda^2 - \lambda - 2 = 0 \Rightarrow \lambda = -1$ ou $\lambda = 2$

12 De $A^t = A$ vem: $\begin{bmatrix} -1 & 2 & a \\ c & 1 & b \\ 0 & -1 & -2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & c & 0 \\ 2 & 1 & -1 \\ a & b & -2 \end{bmatrix} \Rightarrow a = 0,\ b = -1$ e $c = 2$.

Vamos construir a matriz $A - A^2 + I_3^2$. Temos:

$$A^2 = A \cdot A = \begin{bmatrix} -1 & 2 & 0 \\ 2 & 1 & -1 \\ 0 & -1 & -2 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} -1 & 2 & 0 \\ 2 & 1 & -1 \\ 0 & -1 & -2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 & 0 & -2 \\ 0 & 6 & 1 \\ -2 & 1 & 5 \end{bmatrix}$$

Como $I_3^2 = I_3$, vem: $A - A^2 + I_3^2 = \begin{bmatrix} -1 & 2 & 0 \\ 2 & 1 & -1 \\ 0 & -1 & -2 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 5 & 0 & -2 \\ 0 & 6 & 1 \\ -2 & 1 & 5 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -5 & 2 & 2 \\ 2 & -4 & -2 \\ 2 & -2 & -6 \end{bmatrix}$, cujo determinante é igual a -76.

14 Com $k = 0$, a equação proposta é: $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 3 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}_{3\times3} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}_{3\times1} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ \frac{1}{2} \end{pmatrix} \Rightarrow$

$\Rightarrow \begin{cases} x + y + z = 1 \\ 2x + 3y = 2 \\ x = \frac{1}{2} \end{cases}$; segue também que $y = \frac{1}{3}$ e $z = \frac{1}{6}$.

Assim, $x - y - z = \frac{1}{2} - \frac{1}{3} - \frac{1}{6} = 0$

17 Análogo ao 10b.

18 Se (x, y, z, t) é uma P.G. de razão $\frac{1}{2}$, podemos escrevê-la como:

$\left(x, x \cdot \frac{1}{2}, x \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^2, x \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^3\right)$, isto é, $\left(x, \frac{x}{2}, \frac{x}{4}, \frac{x}{8}\right)$.

Temos: $\det A = x\,t - z\,y = x \cdot \frac{x}{8} - \frac{x}{2} \cdot \frac{x}{4} = \frac{x^2}{8} - \frac{x^2}{8} = 0$

20 Vamos construir a matriz C – AB:

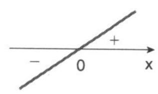
$$AB = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 3 & 2 \\ 4 & 7 & 5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 5 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 3 \\ -4 & 0 & -6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 2 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

$$C - AB = \begin{pmatrix} x & 0 & 0 \\ 0 & x & 0 \\ 0 & 0 & x \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 2 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x-1 & 0 & 1 \\ -2 & x & -1 \\ 0 & 0 & x+1 \end{pmatrix}.$$

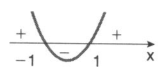
Calculemos: $\begin{vmatrix} x-1 & 0 & 1 \\ -2 & x & -1 \\ 0 & 0 & x+1 \end{vmatrix} = x\,(x^2-1).$

Devemos ter $\underbrace{x}_{y_1}\underbrace{(x^2-1)}_{y_2} . 0.$

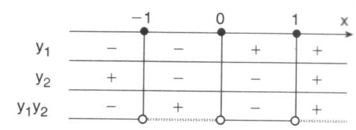
Sinal de y_1:
$x = 0$



Sinal de y_2:



Sinal de $y_1 \cdot y_2$:



$x^2 - 1 = 0 \Rightarrow x = \pm 1$
$S = \{x \in \mathbb{R} \mid -1 < x < 0 \text{ ou } x > 1\}$

23 Desenvolvendo pelos elementos da 1ª linha, obtemos:

$$D = x \cdot A_{11} + 3 \cdot A_{14} = x\,(-1)^2 \cdot \begin{vmatrix} x & 0 & 0 \\ -1 & x & 1 \\ 0 & -1 & -2 \end{vmatrix} + 3 \cdot (-1)^5 \cdot \begin{vmatrix} -1 & x & 0 \\ 0 & -1 & x \\ 0 & 0 & -1 \end{vmatrix} \Rightarrow$$

$\Rightarrow D = x \cdot (-2x^2 + x) -3 \cdot (-1)$

Devemos ter D = 3, isto é, $x\,(-2x^2 + x) + 3 = 3 \Rightarrow x(-2x^2 + x) = 0 \Rightarrow x = 0$ ou $x = \dfrac{1}{2}$.

24 Escolhemos a 3ª linha da matriz dada:

$$D = (-1) \cdot A_{33} + 1 \cdot A_{34} = (-1) \cdot (-1)^6 \cdot \begin{vmatrix} 2^x & 0 & 2 \\ 1 & 2 & -3 \\ -3 & -1 & 0 \end{vmatrix} + 1 \cdot (-1)^7 \cdot \begin{vmatrix} 2^x & 0 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ -3 & -1 & 2 \end{vmatrix} \Rightarrow$$

$\Rightarrow D = (-1) \cdot (-2 + 12 - 3 \cdot 2^x) - 1 \cdot (4 \cdot 2^x - 1 + 6 + 2^x)$. Como $D = -79$, temos:
$-(10 - 3 \cdot 2^x) - (5 \cdot 2^x + 5) = -79 \Rightarrow -2 \cdot 2^x - 15 = -79 \Rightarrow 2 \cdot 2^x = 64 \Rightarrow 2^x = 32 \Rightarrow x = 5$

25 • Usando a primeira coluna temos:

$$D = 2 \cdot A_{11} = 2 \cdot (-1)^2 \cdot \underbrace{\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 4 & 0 & 2 & 1 \\ -5 & 5 & 1 & 4 \\ 1 & 0 & -1 & 2 \end{vmatrix}}_{D'} = 2\,D'\ (*)$$

• Calculemos agora $D' = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 4 & 0 & 2 & 1 \\ -5 & 5 & 1 & 4 \\ 1 & 0 & -1 & 2 \end{vmatrix}$, usando a primeira linha:

$$D' = 1 \cdot A'_{11} = 1 \cdot (-1)^2 \cdot \begin{vmatrix} 0 & 2 & 1 \\ 5 & 1 & 4 \\ 0 & -1 & 2 \end{vmatrix}, \text{ isto é, } D' = -5 - 20 = -25.$$

• Por fim, em (*), encontramos $D = 2\,(-25) = -50$.

31 Seja B a matriz obtida a partir de A como no enunciado. Temos:

$$\det B = 2 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 3 \cdot \frac{1}{6} \cdot \frac{1}{6} \cdot \det A \Rightarrow \det B = \det A = x.$$

32 a) $\det(m \cdot A) = \underbrace{m \cdot m \cdot m \cdot m}_{\text{pois são 4 colunas}} \cdot \det A$, ou seja, $\det(m \cdot A) = m^4 \cdot \det A \Rightarrow 243 = m^4 \cdot 3 \Rightarrow$

$\Rightarrow m^4 = 81 \underset{m > 0}{\Rightarrow} m = 3$

b) Seja B a matriz construída conforme o enunciado; $\det B = 2m \cdot 2m \cdot \dfrac{1}{m} \cdot \dfrac{1}{m} \det A \Rightarrow$

$\Rightarrow \det B = 4 \det A = 4 \cdot 3 = 12$

35 Para obter a matriz $B = \begin{pmatrix} 6a & 6d & 6g \\ 6b & 6e & 6h \\ 6c & 6f & 6i \end{pmatrix}$ é preciso multiplicar cada uma das linhas de $A = \begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{pmatrix}$

por 6 e, então, considerar a transposta da matriz obtida. Como $\det X = \det X^t$, temos:
$\det B = 6 \cdot 6 \cdot 6 \det A = 216 \cdot (-3) = -648$.

38 Seja P^{-1} a inversa de P; assim, $P \cdot P^{-1} = I$. Então $\det(P \cdot P^{-1}) = \det I \Rightarrow \det P \cdot \det P^{-1} = 1$.

39 c) Trocamos as posições da 1ª e 3ª linhas:

$$D = \begin{vmatrix} 0 & 1 & 3 & 0 \\ 3 & 5 & 1 & -1 \\ 1 & -4 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & 1 \end{vmatrix} = -\begin{vmatrix} 1 & -4 & 0 & 0 \\ 3 & 5 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 3 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & 1 \end{vmatrix} = -\begin{vmatrix} 17 & 1 & -1 \\ 1 & 3 & 0 \\ 2 & 1 & 1 \end{vmatrix} = -55$$

40 b) Vamos dividir por 2 os elementos da 3ª linha:

$$D = \begin{vmatrix} 5 & -3 & 2 & 0 \\ 0 & 2 & 4 & 6 \\ 2 & 4 & -2 & 8 \\ 2 & 0 & 3 & 0 \end{vmatrix}; \ \frac{1}{2} D = \begin{vmatrix} 5 & -3 & 2 & 0 \\ 0 & 2 & 4 & 6 \\ 1 & 2 & -1 & 4 \\ 2 & 0 & 3 & 0 \end{vmatrix} \ \text{troca} \Rightarrow -\frac{1}{2} D = \begin{vmatrix} 1 & 2 & -1 & 4 \\ 0 & 2 & 4 & 6 \\ 5 & -3 & 2 & 0 \\ 2 & 0 & 3 & 0 \end{vmatrix} \overset{\text{Chió}}{\Rightarrow}$$

$$\Rightarrow -\frac{1}{2} D = \begin{vmatrix} 2 & 4 & 6 \\ -13 & 7 & -20 \\ -4 & 5 & -8 \end{vmatrix} \Rightarrow -\frac{1}{2} D = -230 \Rightarrow D = 460.$$

41 $D = \begin{vmatrix} a & a & a & a \\ a & b & b & b \\ a & b & c & c \\ a & b & c & d \end{vmatrix}$. Vamos multiplicar por $\frac{1}{a}$ os elementos da 1ª coluna:

$$\frac{1}{a} \cdot D = \begin{vmatrix} 1 & a & a & a \\ 1 & b & b & b \\ 1 & b & c & c \\ 1 & b & c & d \end{vmatrix} \Rightarrow \frac{1}{a} \cdot D = \begin{vmatrix} b-a & b-a & b-a \\ b-a & c-a & c-a \\ b-a & c-a & d-a \end{vmatrix}.$$

Dividindo por b − a os elementos da 1ª coluna, vem:

$$\frac{1}{a} \cdot \frac{1}{b-a} \cdot D = \begin{vmatrix} 1 & b-a & b-a \\ 1 & c-a & c-a \\ 1 & c-a & d-a \end{vmatrix} \Rightarrow \frac{1}{a} \cdot \frac{1}{b-a} \cdot D = \begin{vmatrix} c-b & c-b \\ c-b & d-b \end{vmatrix} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{1}{a} \cdot \frac{1}{b-a} \cdot \frac{1}{c-b} \cdot D = \begin{vmatrix} 1 & c-b \\ 1 & d-b \end{vmatrix} \Rightarrow \frac{1}{a} \cdot \frac{1}{b-a} \cdot \frac{1}{c-b} \cdot D = d - c \Rightarrow$$

$$\Rightarrow D = a \cdot (b-a) \cdot (c-b) \cdot (d-c)$$

42 Uma sugestão é multiplicar por $\frac{1}{2}$ os elementos da 4ª linha e, em seguida, trocá-la com a 1ª linha. A partir daí, usa-se Chió.

44 Divida os elementos da 1ª linha por x ($x \neq 0$) e aplique Chió.

Testes de vestibulares

6 $3\sqrt{2} - \sqrt{m_1 m_2} = \frac{\sqrt{2}}{2} \Rightarrow \frac{5\sqrt{2}}{2} = \sqrt{m_1 m_2} \Rightarrow m_1 m_2 = \frac{25}{2}$

$$\begin{vmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 1 & m_1 - 1 & 2 \\ 1 & -1 & m_2 + 2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} m_1 & 0 \\ 0 & m_2 \end{vmatrix} = m_1 m_2 = \frac{25}{2}$$

Resposta: *d*.

12 $\underbrace{\text{Na face 5}}_{f=5}$ encontramos a matriz: $\begin{bmatrix} 7 & 2 \\ 1 & 9 \end{bmatrix}$, cujo determinante é 63 − 2 = 61.

Resposta: *b*.

18 $D_1 = \begin{vmatrix} 2^n & -1 & 0 \\ 1 & 2^n & 2 \\ 2^n & 0 & 1 \end{vmatrix} = 2^n \cdot 2^n - 2 \cdot 2^n + 1 = (2^n)^2 - 2 \cdot 2^n + 1 = (2^n - 1)^2$

$D_2 = 2^n \cdot 2^n - 1 = (2^n)^2 - 1^2 = (2^n + 1) \cdot (2^n - 1)$

Assim, $\frac{D_1}{D_2} = \frac{(2^n - 1)^2}{(2^n + 1) \cdot (2^n - 1)} = \frac{2^n - 1}{2^n + 1}$

Resposta: *c*.

20 $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2+2^x & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 3-2^x & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1-2^x \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow \begin{vmatrix} 1+2^x & 0 & 0 \\ 0 & 2-2^x & 0 \\ 0 & 0 & -2^x \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow$

$$\Rightarrow (1 + 2^x) \cdot (2 - 2^x) \cdot (-2^x) = 0 \Rightarrow \begin{cases} 1 + 2^x = 0 \Rightarrow 2^x = -1 \Rightarrow \nexists\, x \in \mathbb{R}, \text{ que satisfaz} \\ \text{ou} \\ 2 - 2^x = 0 \Rightarrow 2^x = 2 \\ \text{ou} \\ -2^x = 0 \Rightarrow \nexists\, x \in \mathbb{R}, \text{ que satisfaz.} \end{cases}$$

Logo, $2^x = 2$

Resposta: *c*.

23 $g(x) = 8x^2 + x + 3$; como $\Delta < 0$, não há raízes reais. Assim, o gráfico de g não intercepta o eixo x.

Resposta: *d*.

25 *1ª solução:* $A^2 = 2A \Rightarrow \det(A^2) = \det(2A) \Rightarrow \det(A \cdot A) = 2 \cdot 2 \cdot \det A \Rightarrow$

$\Rightarrow \det A \cdot \det A = 4 \cdot \det A \underset{\substack{\det A \neq 0, \\ \text{pois } A \text{ é} \\ \text{inversível}}}{\Rightarrow} \det A = 4$

2ª solução: $A^2 = 2 \cdot A \Rightarrow A \cdot A = 2 \cdot A$. Como A é inversível, multiplicamos, à direita, por A^{-1}:

$$A \cdot A \cdot A^{-1} = 2 \cdot \underbrace{A \cdot A^{-1}}_{I_2} \Rightarrow A = 2 \cdot I_2 = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}; \det A = 4$$

Resposta: *e*.

26 $A - \lambda \cdot I = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} \lambda & 0 & 0 \\ 0 & \lambda & 0 \\ 0 & 0 & \lambda \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1-\lambda & 0 & 1 \\ 1 & -\lambda & 1 \\ 0 & 1 & 1-\lambda \end{bmatrix}$

$\det(A - \lambda \cdot I) = 0 \Leftrightarrow -\lambda(1 - \lambda)^2 + 1 - (1 - \lambda) = 0 \Rightarrow -\lambda(1 - 2\lambda + \lambda^2) + \cancel{1} - \cancel{1} + \lambda = 0$

$2\lambda^2 - \lambda^3 = 0 \Rightarrow \lambda^2(2 - \lambda) = 0 \Rightarrow \lambda = 0$ ou $\lambda = 2$; a soma é 2

Resposta: *b*.

28 • $A = A^t$ equivale a $\begin{bmatrix} 2 & 2 \\ k & 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & k \\ 2 & 3 \end{bmatrix} \Rightarrow k = 2$

• $\det(k^2 \cdot A) = \det(4A) = 4^2 \cdot \det A = 16 \cdot 2 = 32$

Resposta: *b*.

Desafios

1 Desenvolvendo o determinante pelos elementos da 3ª linha, vem:

$D = 3 \cdot A_{33} = 3 \cdot (-1)^6 \cdot \begin{vmatrix} \log_3 x & \log_3 x^3 \\ 3^x & 9^x \end{vmatrix} = 0$, isto é, $3 \cdot \begin{vmatrix} \log_3 x & 3\log_3 x \\ 3^x & 9^x \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow$

$\Rightarrow \log_3 x \cdot 9^x - 3 \log_3 x \cdot 3^x = 0 \Rightarrow$

$\Rightarrow \log_3 x\,(9^x - 3 \cdot 3^x) = 0$
- $\log_3 x = 0 \Rightarrow 3^0 = x \Rightarrow x = 1$
- ou
- $9^x - 3 \cdot 3^x = 0 \Rightarrow 9^x = 3^{x+1} \Rightarrow 3^{2x} = 3^{x+1} \Rightarrow x = 1$

A única raiz é $x = 1$.

2 Seja $D = \begin{vmatrix} bc & a & a^2 \\ ac & b & b^2 \\ ab & c & c^2 \end{vmatrix}$. Vamos multiplicar por *a* os elementos da 1ª linha:

$a \cdot D = \begin{vmatrix} abc & a^2 & a^3 \\ ac & b & b^2 \\ ab & c & c^2 \end{vmatrix}$; multipliquemos por *b* os elementos da 2ª linha:

$a \cdot b \cdot D = \begin{vmatrix} abc & a^2 & a^3 \\ abc & b^2 & b^3 \\ ab & c & c^2 \end{vmatrix}$ e multipliquemos por *c* os elementos da 3ª linha:

$a \cdot b \cdot c \cdot D = \begin{vmatrix} abc & a^2 & a^3 \\ abc & b^2 & b^3 \\ abc & c^2 & c^3 \end{vmatrix}$

Finalmente, vamos dividir por abc (multiplicar por $\frac{1}{abc}$) os elementos da 1ª coluna desta última matriz:

$$abc \cdot \frac{1}{abc} \cdot D = \begin{vmatrix} 1 & a^2 & a^3 \\ 1 & b^2 & b^3 \\ 1 & c^2 & c^3 \end{vmatrix} \Rightarrow D = \begin{vmatrix} 1 & a^2 & a^3 \\ 1 & b^2 & b^3 \\ 1 & c^2 & c^3 \end{vmatrix}$$

8 SISTEMAS LINEARES

Exercícios

8 De $3x + 4y = 61$ vem $x = \frac{61 - 4y}{3}$, em que *x* e *y* são naturais, pois representam o número de peixes "capturados" por cada irmão.
Para que *x* resulte natural, o numerador $61 - 4y$ deve ser múltiplo de 3 e, além disso, positivo, isto é, $61 - 4y > 0 \rightarrow y < \frac{61}{4} = 15{,}25$, $y \in \mathbb{N}$.

Verificando:
$y = 15 \rightarrow x \notin \mathbb{N}$; $y = 14 \rightarrow x \notin \mathbb{N}$; $y = 13 \rightarrow x = 3$ (16 peixes ao todo). Note, agora, que as possibilidades seguintes são obtidas para:
$y = 10 \rightarrow x = 7 \rightarrow$ 17 peixes ao todo;
$y = 7 \rightarrow x = 11 \rightarrow$ 18 peixes ao todo;
$y = 4 \rightarrow x = 15 \rightarrow$ 19 peixes ao todo;
$y = 1 \rightarrow x = 19 \rightarrow$ 20 peixes ao todo.

22 a) Há duas variáveis livres: *y* e *z*. Fazendo $z = \alpha$ e $y = \beta$, encontramos: $x + \beta - \alpha = 0 \Rightarrow x = \alpha - \beta$, e a solução geral é $(\alpha - \beta, \beta, \alpha)$; $\alpha \in \mathbb{R}$ e $\beta \in \mathbb{R}$.

$\begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$,

$x = 0$ ou $x = 2\pi$

V, pois $b_{23} = 1$

$\cdot B = 0$, mas $A \neq 0$

$\begin{pmatrix} 6 & -7 \\ -9 & 11 \end{pmatrix}$

$\begin{pmatrix} 98 & 0 \\ 0 & 98 \end{pmatrix}$

$\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \frac{1}{3} \end{pmatrix}$

71 $X^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

72 $x = -1$

73 $\frac{9}{11}$

74 $X = \begin{pmatrix} 3 & -4 \\ \frac{5}{2} & -\frac{3}{2} \end{pmatrix}$

75 a) $X = (C - A) \cdot B^{-1}$ b) $X = A \cdot B^{-1}$

Testes de vestibulares

1 a	**8** d	**15** e	**22** d
2 a	**9** b	**16** a	**23** a
3 c	**10** d	**17** d	**24** d
4 e	**11** c	**18** c	**25** a
5 d	**12** c	**19** b	**26** c
6 a	**13** a	**20** e	
7 a	**14** b	**21** e	

7 Determinantes

Exercícios

1 a) 3 b) $-\frac{1}{5}$ c) 1 d) -10 e) -7

2 -1

3 $S = \{-4\}$

4 $S = \{5, -1\}$

5 $S = \left\{x \in \mathbb{R} \mid x \leqslant -\frac{1}{3}\right\}$

6 a) 105 b) 0

7 a) -1 b) $a - a^3$

8 -3

9 $S = \{x \in \mathbb{R} \mid x > -1\}$

10 a) $\begin{pmatrix} 7 & 3 \\ -8 & 2 \end{pmatrix}$ e (7)
b) -1 ou 2

11 a) $S = \{1\}$ b) $S = \{0, -\sqrt{3}, \sqrt{3}\}$

12 -76

13 $\frac{3}{2}$

14 zero

15 $S = \{2\}$

16 $x = 13$

17 -3 e 5

18 zero

19 $\begin{pmatrix} 2 & -\frac{3}{4} & -\frac{5}{2} \\ 8 & -3 & -2 \\ 2 & -1 & 1 \end{pmatrix}$

20 $S = \{x \in \mathbb{R} \mid -1 < x < 0$ ou $x > 1\}$

21 a) -208 b) -3 c) 84

22 a) 0 b) $a^2 + b^2$ c) $-2x(1 + y^2)$

23 $S = \left\{0, \frac{1}{2}\right\}$

24 $S = \{5\}$

25 -50

26 a) 0 b) 0

27 a) -4 b) 20 c) 20 d) 100

28 a) -60 b) 40

29 45

30 25

31 x

32 a) $m = 3$ b) 12

33 a) $\frac{1}{2}$ b) 1 c) 0

34 zero

35 -648

36 -100

37 a) 15 b) 15 c) 40

38 Lembre que o determinante da matriz identidade vale 1.

39 a) -18 b) -21 c) -55

40 a) 3 b) 460 c) -87

41 Demonstração.

42 $S = \{2, -6\}$

43 $S = \{2, -1\}$

44 a) $x(x - y)^3$
b) $D = x^4 > 0,\ \forall x \in \mathbb{R}^*$

Testes de vestibulares

1 e	**9** a	**17** a	**25** e
2 c	**10** e	**18** c	**26** b
3 d	**11** b	**19** b	**27** b
4 c	**12** b	**20** c	**28** b
5 e	**13** d	**21** e	**29** a
6 d	**14** b	**22** c	
7 c	**15** b	**23** d	
8 d	**16** b	**24** e	

8 Sistemas lineares

Exercícios

1 sim

2 a) sim b) não c) não

3 a) não b) sim c) sim

4 $m = 7$

5 $m = 2$

6 Resposta pessoal.

7 Resposta pessoal.

8 20, 19, 18, 17 ou 16

9 sim

10 sim

11 não

12 a) (2, 1), (5, 4), (1, 0),
$(-5, -6), \left(\frac{3}{2}, \frac{1}{2}\right), \ldots$
b) SPI: possui infinitas soluções.

13 SI: as duas últimas equações são incompatíveis.

14 a) $A = \begin{pmatrix} \sqrt{3} & 4 \\ -\frac{1}{3} & 1 \end{pmatrix}$ e $B = \begin{pmatrix} \sqrt{3} & 4 & 2 \\ -\frac{1}{3} & 1 & 1 \end{pmatrix}$

b) $A = \begin{pmatrix} 4 & -1 & 1 \\ 1 & 2 & -1 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix}$ e

$B = \begin{pmatrix} 4 & -1 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}$

c) $A = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 1 & -1 \\ 4 & 1 \end{pmatrix}$ e $B = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 5 \\ 1 & -1 & 1 \\ 4 & 1 & 6 \end{pmatrix}$

15 a) $A = [-3 \quad 4 \quad -5 \quad 1]$ e
$B = [-3 \quad 4 \quad -5 \quad 1 \quad 1]$

b) $A = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 3 \\ -1 & -1 & 10 \end{bmatrix}$ e

$B = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 3 & 1 \\ -1 & -1 & 10 & 0 \end{bmatrix}$

16 a) $\begin{cases} 2x - y = 0 \\ 3x + y = 3 \end{cases}$

b) $\begin{cases} 4x + 2y + z = 8 \\ x - z = -3 \end{cases}$

c) $\begin{cases} -x + 3y + 5z = 1 \\ y - 2z = -2 \\ 4z = 3 \end{cases}$