Respostas e comentários das atividades "Agora é a sua vez" e das Atividades de auto-avaliação

Unidade 1

Agora é a sua vez da seção 1 (Conjuntos numéricos)

1)

a) $\frac{2}{3}$ é racional

b) 0,35 é racional

c) $\sqrt{5}$ é irracional

d) 0,03030303.... é racional

d) $-\sqrt{25}$ é inteiro e racional

e) 5,0000000 é inteiro e racional

2) Como dados dos problemas, temos que que $T_c = 36^o$. Assim, é possível utilizar a fórmula de conversão de temperaturas:

$$T_C = \frac{5}{9}(T_F - 32)$$

$$36 = \frac{5}{9}(T_F - 32)$$

$$\frac{9}{5} \cdot 36 = T_F - 32$$

$$T_F = \frac{324}{5} + 32$$

$$T_F = \frac{484}{5} = 96,8F$$

Agora é a sua vez da seção 2 (Intervalos)

1) Como o lucro mínimo é de R$1.000.000,00 e o máximo é sem limitação segue que $x \in [1.000.000, +\infty)$.

2)

a) [-3,6]

b) (4,+∞)

c) [0,5)

3)

a) $-1 < x \leqslant 7$ então $x \in (-1, 7]$

b) $x > 5$ então $x \in (5, +\infty)$

c) $x \leqslant \pi$ então $x \in (-\infty, \pi]$

Agora é a sua vez da seção 2 (Equações e inequações)

1)

a) $5x - 27 = 2x + 48$

$5x - 2x = 48 + 27$

$3x = 75$

$x = \dfrac{75}{3} = 25$

b) $\dfrac{2x-8}{3} = \dfrac{5-2x}{1}$

$2x - 8 = 3(5 - 2x)$

$2x - 8 = 15 - 6x$

$2x + 6x = 15 + 8$

$8x = 23$

$x = \dfrac{23}{8}$

c) $2x^2 - 5x - 12 = 0$

$$x = \frac{-(-5) \pm \sqrt{25 - 4.2.(-12)}}{4} = \frac{5 \pm \sqrt{121}}{4} = \frac{5 \pm 11}{4}$$

$$x_1 = \frac{5+11}{4} = 4$$

$$x_2 = \frac{5-11}{4} = \frac{-3}{2}.$$

d) $$\frac{3x+4}{x-1} = \frac{1}{3x}$$

$$3x(3x+4) = x-1$$

$$9x^2 + 12x - x + 1 = 0$$

$$9x^2 + 11x + 1 = 0$$

$$x = \frac{-11 \pm \sqrt{121-36}}{18} = \frac{-11 \pm \sqrt{85}}{18}$$

$$x_1 = \frac{-11+\sqrt{85}}{18}$$

$$x_1 = \frac{-11-\sqrt{85}}{18}$$

2) $3 - 6x \leqslant 2x + 8$

$$-6x - 2x \leqslant 8 - 3$$

$$-8x \leqslant 5 \left(\text{multiplique por } -1\right)$$

$$8x \geqslant -5$$

$$x \geqslant -\frac{5}{8} \text{ ou } x \in \left[-\frac{5}{8}, +\infty\right)$$

3) $$\frac{3x+1}{x-3} < 1$$

$$\frac{3x+1}{x-3} - 1 < 0$$

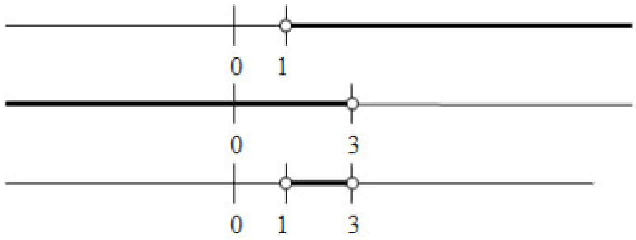
$$\frac{3x+1-(x+3)}{x-3} < 0$$

$$\frac{2x-2}{x-3} < 0$$

A divisão de dois números é negativa, quando o numerador é positivo e o denominador é negativo ou vice-versa.

1° Caso: 2x-2>0 e x-3<0

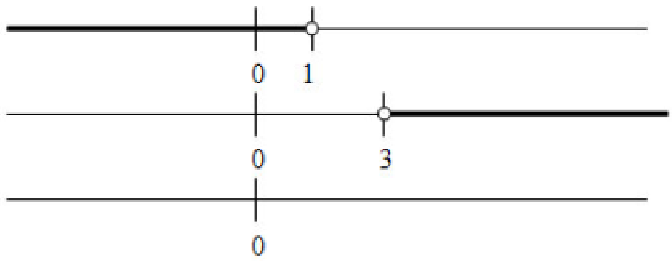
Ou seja x>1 e x<3, graficamente temos:



A intersecção destes dois intervalos, nos dá a seguinte solução $x \in (1,3)$ e portanto tem-se que $S_1 = (1,3)$.

2° Caso: 2x-2<0 e x-3>0

Ou seja x<1 e x>3



A intersecção destes dois intervalos nos dá uma solução vazia, ou seja, $S_2 = \varnothing$

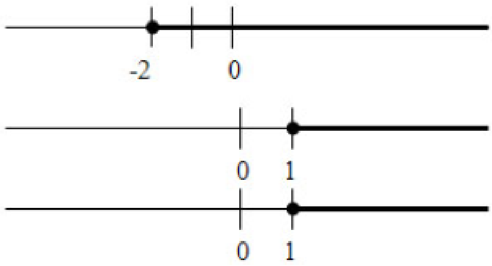
A solução final é a união dos dois casos, isto é,

$$S = (1,3) \cup \varnothing = (1,3)$$

4) Os valores de x nos quais a inequação se anula são x=-2 e x=1, logo podemos reescrever a inequação como uma fatoração de suas raízes, ou seja, resolver $x^2 + x - 2 \geqslant 0$, é o mesmo que $(x+2)\cdot(x-1) \geqslant 0$ Devemos dividir a resolução em dois casos, já que o produto de dois números é positivo, quando ambos são positivos ou ambos são negativos:

1° Caso: $x + 2 \geqslant 0$ e $x - 1 \geqslant 0$

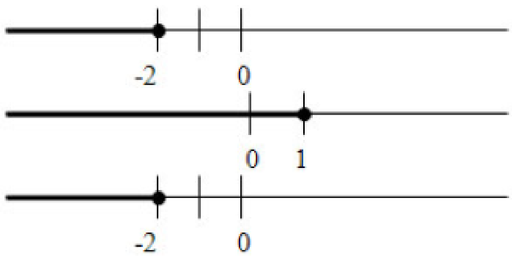
Neste caso temos $x \geqslant -2$ e $x \geqslant 1$, que graficamente são representadas por:



Logo $S_1=[1,+\infty)$

2° Caso: $x+2\leqslant 0$ e $x-1\leqslant 0$

Neste caso temos $x\leqslant -2$ e $x\leqslant 1$. Graficamente temos



Logo $S_2=(-\infty,-2]$

A solução final é dada pela união dos dois caso, portanto:

$$S=(-\infty,-2]\cup[1,+\infty)$$

Agora é a sua vez da seção 2 (Valor absoluto)

1) Dois números de mesmo valor absoluto ou são iguais x-3=3x+4 ou diferem pelo sinal x-3=-(3x+4)

1° Caso: $x-3=3x+4$

$$x-3x=4+3$$

$$-2x=7$$

$$x=-\frac{7}{2}$$

2° Caso: $x-3=-(3x+4)$

$$x+3x=-4+3$$

$$4x=-1$$

$$x=-\frac{1}{4}$$

Assim a equação dada tem soluções $x=-\frac{7}{2}$ e $x=-\frac{1}{4}$.

2) Usando a propriedade 2a) de módulos, temos que

-3<3x-4<3 (Somando 4)

1<3x<7 (Multiplica-se por $\frac{1}{3}$)

$\frac{1}{3} < x < \frac{7}{3}$ ou seja $S = \left(\frac{1}{3}, \frac{7}{3}\right)$

Agora é a sua vez da seção 3 (Funções)

1)

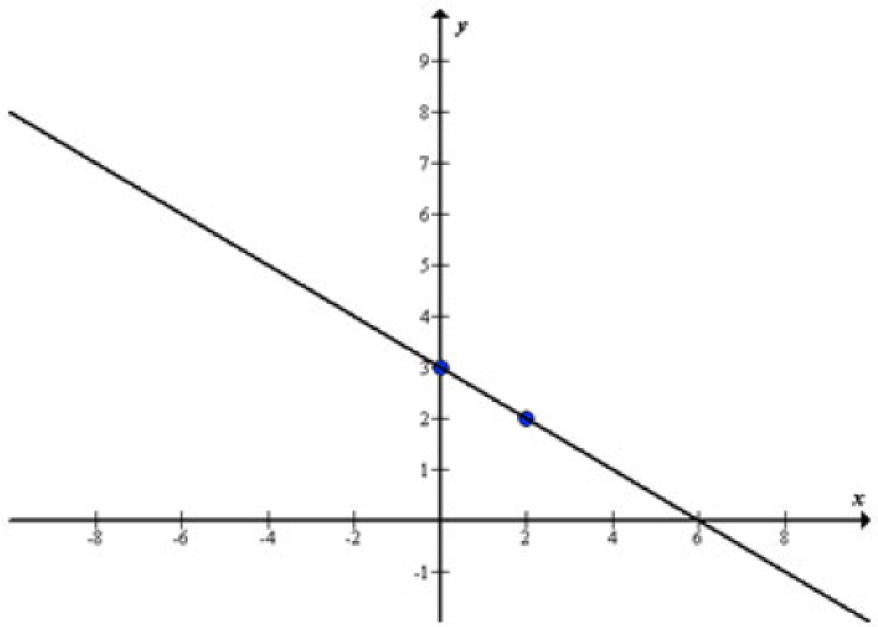
a) O domínio são todos os reais. E qualquer valor de x, sempre retorna um valor para y possível, logo a imagem e o contra-domínio também são todos os reais.

b) $f(3) = 2 \cdot 3 + 3 = 9$

c) $f(-1) = 2 \cdot (-1) + 3 = 1$

Agora é a sua vez da seção 4 (Função polinomial do primeiro grau)

1) Como trata-se de uma função do primeiro grau, o gráfico desta função é uma reta, portanto basta dois pontos para determinar esta reta, por exemplo, quando x=0 temos que y=3 e quando x=2 tem-se que y=2, basta desenhar a reta que passa pelos pontos (0,3) e (2,2). Veja:



2) Uma reta é dada por y=ax+b

Esta reta passa pelo ponto $\left(\frac{1}{2},1\right)$, e portanto

$$1=\frac{1}{2}a+b$$

e passa também por (-1,3) e então

$$3=-a+b$$

Assim devemos resolver o sistema:

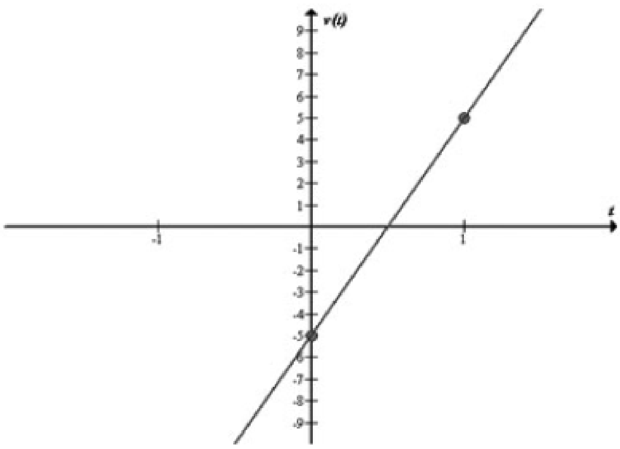
$$\begin{cases}\frac{1}{2}a+b=1\\ -a+b=3\end{cases}$$

Resolvendo o sistema tem-se que $a=-\frac{4}{3}$ e $b=\frac{5}{3}$, logo a reta procurada é dada por:

$$y=-\frac{4}{3}x+\frac{5}{3}$$

Agora é a sua vez da seção 4 (Função polinomial do primeiro grau)

a) Como temos uma função do primeiro grau, necessitamos de apenas dois pontos, por exemplo, quando t=0 , então v=-5 e quando t=1, v=5. Então esboçamos a reta que passa por (0,-5) e (1,5).



b) Como temos uma função do primeiro grau, segue que tanto o domínio quanto a imagem são todos os reais.

D(f)=R Im(f)=R

c) Como o coeficiente angular é 10 e portanto um número positivo, segue que a função v(t) é uma função crescente.

d)

- v(t)>0, então -5+10t>0, ou seja, $t > \frac{1}{2}$
- v(t)<0, então -5+10t<0, ou seja, $t < \frac{1}{2}$

Agora é a sua vez da seção 4 (Função polinomial do segndo grau)

1)

a) Como a=-1, ou seja é negativo, segue que a concavidade é voltada para baixo.

Agora $\Delta = b^2 - 4ac = (-1)^2 - 4(-1)(-1) = 1 - 4 = -3$

Assim, como a<0 e $\Delta<0$, então não temos raízes reais e portanto f não possui valores positivos, logo a função é negativa para todo x real.

b) a=2>0, concavidade para cima.

Δ = 9-8=1, então as raízes podem ser calculadas como:

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-3 \pm \sqrt{1}}{2 \cdot 2} = \frac{-3 \pm 1}{4}$$
$$x_1 = \frac{-3+1}{4} = \frac{-3+1}{4} = \frac{-2}{4} = \frac{-1}{2}$$
$$x_2 = \frac{-3-1}{4} = \frac{-4}{4} = -1$$

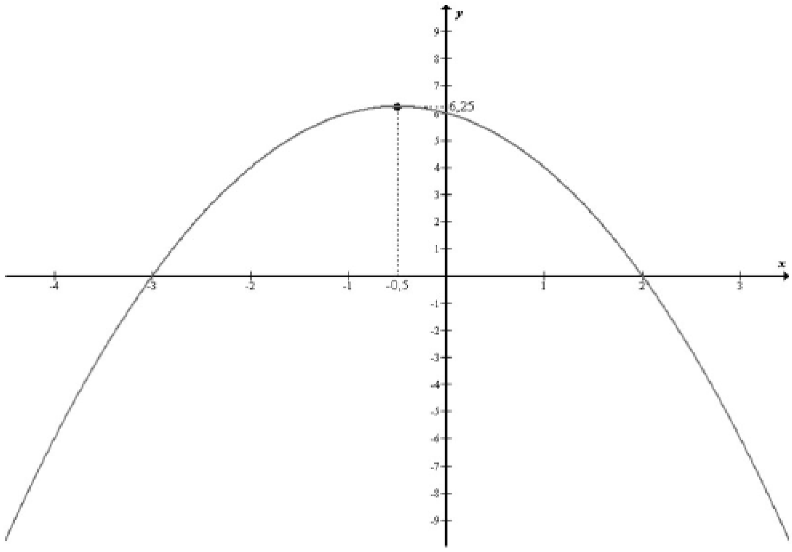
Temos duas raízes reais, $x_1 = -1$ e $x_2 = -\frac{1}{2}$.

Como Δ >0 e a>0, segue que f é positiva em $(-\infty, -1) \cup \left(-\frac{1}{2}, +\infty\right)$ e f é negativa em $\left(-1, -\frac{1}{2}\right)$.

2) y-(2-x)(x+3)=-x²-x+6

- a raízes são *x=2* e *x=-3*
- *a=-1<0*, logo a concavidade é voltada para baixo.
- Δ *=25>0* e *a<0*, segue então que f é positiva quando $x \in (-3, 2)$ e f é negativa quando $x \in (-\infty, -3) \cup (2, +\infty)$.

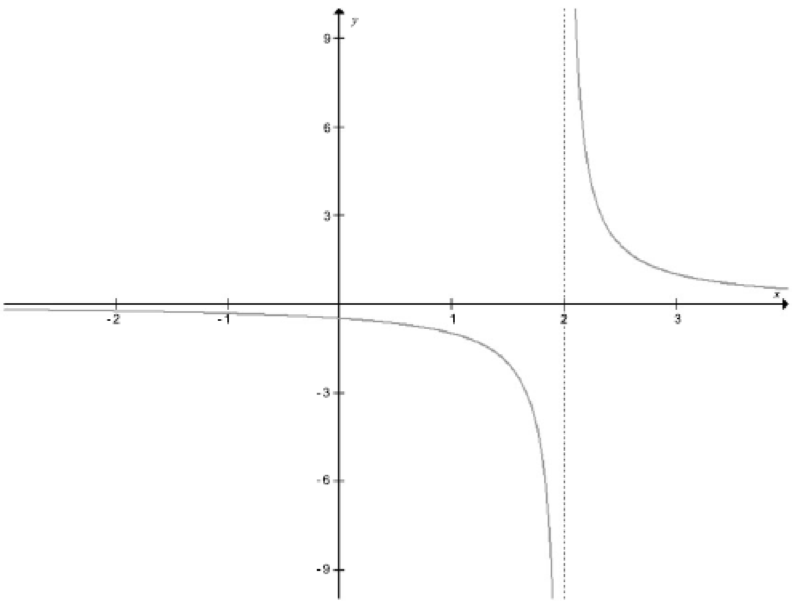
- O vértice é dado por $V = \left(-\frac{b}{2a}, -\frac{\Delta}{4a}\right) = \left(-\frac{1}{2}, \frac{25}{4}\right)$.
- Como $a < 0$ e $x_v = -\frac{1}{2}$, segue que f é crescente quando $x \in \left(-\infty, -\frac{1}{2}\right)$ e decrescente quando $x \in \left(-\frac{1}{2}, +\infty\right)$.
- A visualização do gráfico é dada abaixo:



Agora é a sua vez da seção 4 (Função racional)

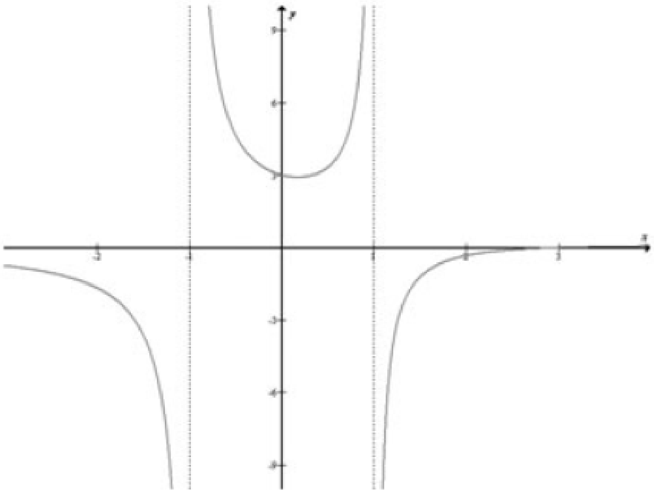
1)

a) Utilizando um recurso computacional para desenhar o gráfico, temos:



Analisando o gráfico da função notamos que a função f não está definida para x=2 , logo D(f)=R-{2}. O conjunto imagem é dada por $\mathrm{Im}(f) = R - \{0\}$. As duas partes da função são decrescentes.

b) O gráfico desta função é dado por:



Analisando detalhadamente o gráfico percebe-se que esta função não está definida para x=-1 e x=1e portanto $D(f) = R - \{-1,1\}$

Agora é a sua vez da seção 5 (Funções exponenciais e logarítmicas)

1)

a) $\log_3 27 = x \Leftrightarrow 3^x = 27$. Então,

$$3^x = 3^3$$
$$x = 3$$

b) $\log_3\left(\frac{1}{243}\right) = x \Leftrightarrow 3^x = \frac{1}{243}$. Então,

$$3^x = \frac{1}{3^5}$$
$$3^x = 3^{-5}$$
$$x = -5$$

c) $\log_{10} 100 = x \Leftrightarrow 10^x = 100$. Então,

$$10^x = 10^2$$
$$x = 2$$

d) $\log_{81} \sqrt[4]{3} = x \Leftrightarrow 81^x = \sqrt[4]{3}$. Então,

$$(3^4)^x = 3^{1/4}$$
$$4x = \frac{1}{4}$$
$$x = \frac{1}{16}$$

Atividade de auto-avaliação

1)

a) (1-x)(3-x)=0

O produto de dois números é zero se um número ou outro for zero, logo 1-x=0 ou 3-x=0, ou seja, x=1 ou x=3.

b) $x^3 - \frac{3}{2}x^2 + \frac{1}{2} = 0$

Percebe-se facilmente que x=1 é uma raiz. A outras duas utilizamos o método de Briot-Rufinni.

$$\begin{array}{c|cccc} & 1 & -\frac{3}{2} & 0 & \frac{1}{2} \\ \hline 1 & & 1 & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ \hline & 1 & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & 0 \end{array}$$

Assim a equação $x^3 - \frac{3}{2}x^2 + \frac{1}{2} = 0$, pode ser reescrita como $(x-1)\cdot\left(x^2 - \frac{1}{2}x - \frac{1}{2}\right) = 0$, portanto temos que x-1=0 ou $x^2 - \frac{1}{2}x - \frac{1}{2} = 0$, ou seja, x=1 ou x=1 ou $x = -\frac{1}{2}$.

Observe que podemos aplicar a fórmula de Bháskara para achar as duas últimas raízes.

c) $|2x+3| = \frac{4}{3}$

Pela definição de módulo tem-se que $2x+3 = \frac{4}{3}$ ou $2x+3 = -\frac{4}{3}$

Resolvendo ambas a equações, obtém-se $x = -\frac{5}{6}$ e $x = -\frac{13}{6}$.

2)

a) $4 - x \geqslant 6 - 2x$

$x \geqslant 2$

b) $\dfrac{x+2}{x-3} > 4$ então $\dfrac{x+2}{x-3} - 4 > 0$ e tirando o mínimo, tem-se
$\dfrac{-3x+14}{x-3} > 0$

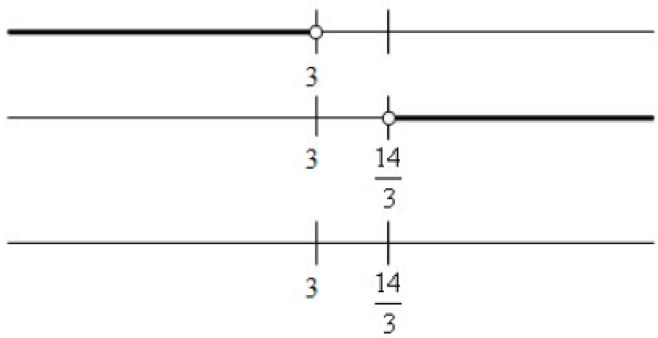
1° Caso: -3x+14>0 e x-3>0

Logo $x < \dfrac{14}{3}$ e $x > 3$. Graficamente temos

A intersecção dos intervalos nos dá a solução $S_1 = \left(3, \dfrac{14}{3}\right)$

2° Caso: -3x+14<0 e x-3<0

Logo $x > \dfrac{14}{3}$ e $x < 3$



A intersecção dos intervalos nos dá a solução vazia, ou seja, $S_2 = \varnothing$.

A união dos dois casos nos dá a solução final

$$S = \left(3, \frac{14}{3}\right) \cup \varnothing = \left(3, \frac{14}{3}\right)$$

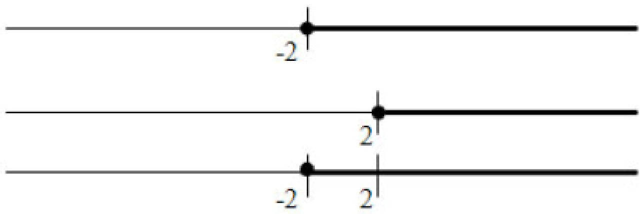
c) $(x^2-4)(x+3)\leqslant 0$

1° Caso: - $x^2-4\geqslant 0$ e $x+3\leqslant 0$

Para resolver $x^2-4\geq 0$, devemos dividir em dois casos, pois $x^2-4\geqslant 0$ é o mesmo que $(x-2)(x+2)\geqslant 0$, ou seja

Caso 1: $x-2\geqslant 0$ e $x+2\geqslant 0$

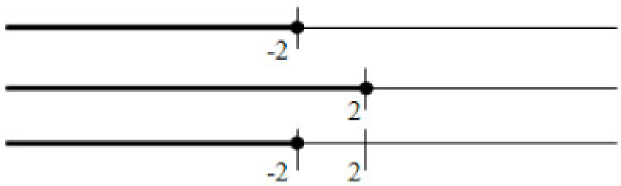
Resolvendo ambas temos que $x\geqslant 2$ e $x\geqslant -2$, que graficamente são representadas por



A solução é dada pela intersecção dos intervalos, ou seja, $S_1=[2,+\infty)$

Caso 2: $x\leqslant 2$ e $x\leqslant -2$

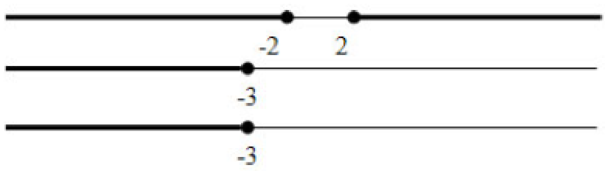
Que tem como solução $x\leqslant 2$ e $x\leqslant -2$. Graficamente os intervalos são representados por



A intersecção dos intervalos tem como solução $S_2=(-\infty,-2]$

A união do caso 1 como o caso 2 nos dá $S=(-\infty,-2]\cup[2,+\infty)$

Mas o primeiro caso é a intersecção da solução $S=(-\infty,-2]\cup[2,+\infty)$, com $x+3\leqslant 0$, que em termos de representação gráfica de intervalos é dada por:



Assim temos que a solução é dada por $S_3=(-\infty,-3]$.

2º Caso: $x^2-4\leqslant 0$ e $x+3\geqslant 0$

Novamente para resolver a primeira desigualdade devemos dividir em dois casos, que de maneira análoga nos leva a solução S_4=[-2,2] e juntamente com o fato de $x\geqslant -3$, nos dá a solução S_5=[-2,2].

A união dos dois casos nos dá a solução final

$$S_F=S_3\cup S_5=(-\infty,-3]\cup[-2,2]$$

d) $|\,3x-4\,|\ \leqslant 1$, usando a propriedade 2a) de valor absoluto, temos que

Solução

$-1\leqslant 3x-4\leqslant 1$ (Somando 4)

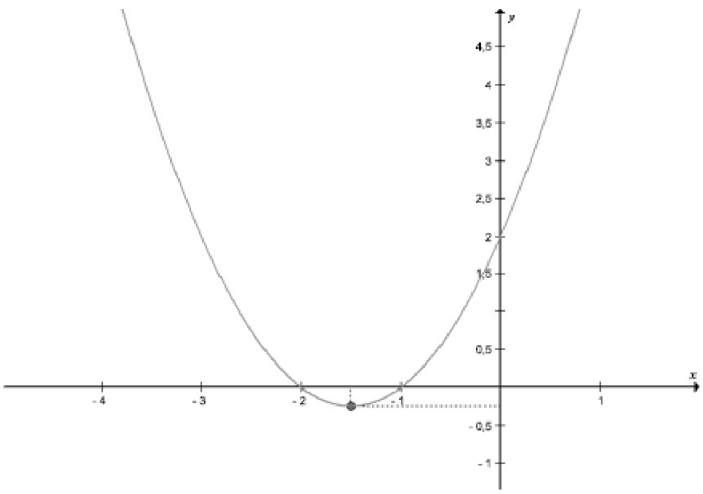
$3\leqslant 3x\leqslant 5$ (Multiplicando por $\frac{1}{3}$)

$1\leqslant x\leqslant \frac{5}{3}$, ou seja, $x\in\left[1,\frac{5}{3}\right]$

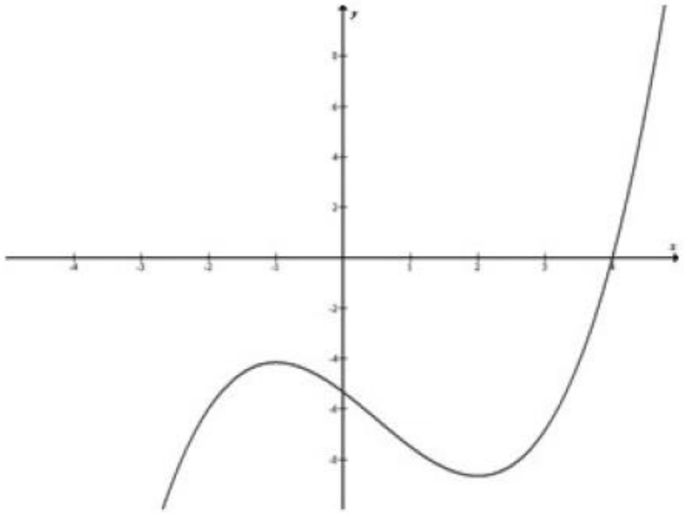
3)

a) $y=x^2+3x+2$

- $a=1>0$, concavidade para cima.
- $\Delta=1>0$, duas raízes reais e diferentes, x=-1 e x=-2.
- Vértice $V=\left(-\frac{3}{2},-\frac{1}{4}\right)$
- $a>0$ e $\Delta>0$, então f é positiva em $(-\infty,-2)\cup(-1,+\infty)$ e f é negativa em (-2,-1).
- Como $a>0$ e $x_V=-\frac{3}{2}$, segue que f é decrescente quando $x\in\left(-\infty,-\frac{3}{2}\right)$ e f é crescente quando $x\in\left(-\frac{3}{2},+\infty\right)$



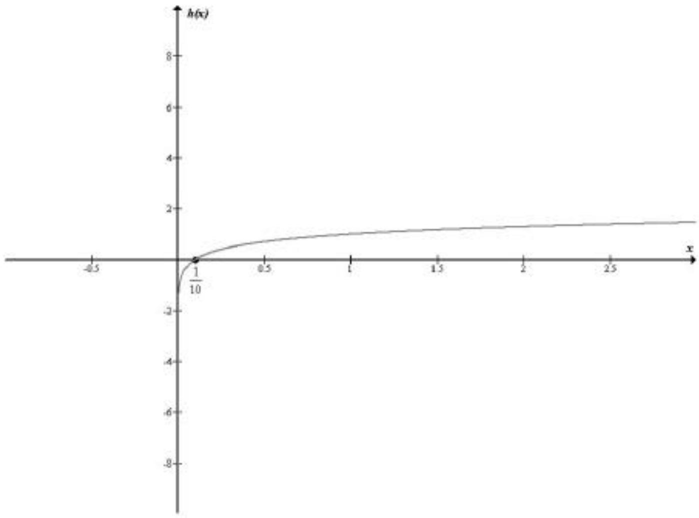
b) $y = \frac{1}{3}x^3 - \frac{1}{2}x^2 - 2x - \frac{16}{3}$



- Observa-se que a função tem uma raiz real igual a 4 (ponto que toca o eixo dos x) e possui intervalos de crescimento e decrescimento.

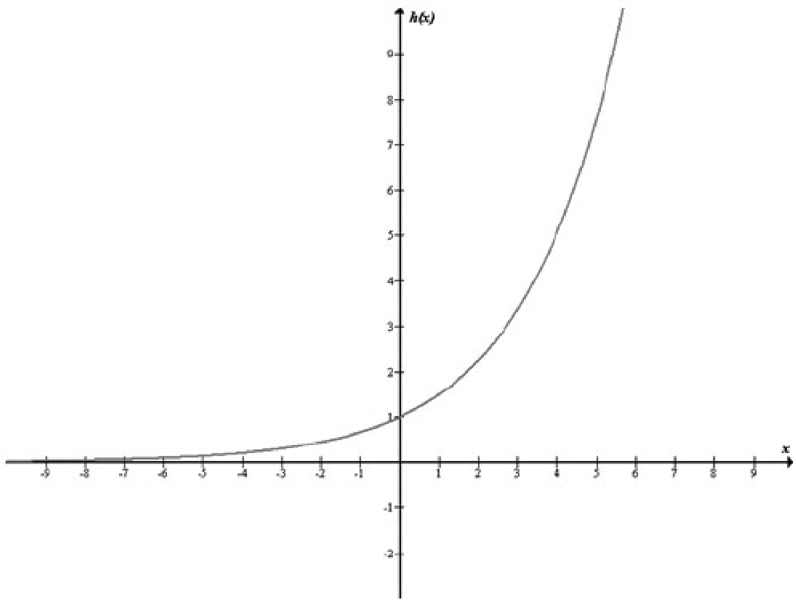
c) h(x)=1+log x

- O domínio são os valores de x tal que $x \in (0, +\infty)$.
- A imagem são todos os reais.
- A função é crescente pois a base é maior que 1.
- Corta o eixo x, no ponto onde 1+log x=0, ou seja, log x=-1 e portanto $x = 10^{-1} = \frac{1}{10}$.



d) $g(x)=\left(\dfrac{3}{2}\right)^x$

- Domínio é todos os reais.
- A imagem é dada por $\mathrm{Im}(f)=(0,+\infty)$.
- A função é crescente pois a base é um número maior que 1, neste caso $\dfrac{3}{2}=1,5$.



4) Verifique que a expressão $\dfrac{y-y_1}{x-x_1}=\dfrac{y_2-y_1}{x_2-x_1}$ pode ser usada para encontrar a equação de uma reta que passa por dois pontos.

Solução

A equação de uma reta é dada por y=ax+b. Suponha que esta reta passa por dois pontos (x_1,y_1) e (x_2,y_2), portanto,

$$\begin{cases} ax_1+b=y_1 \\ ax_2+b=y_2 \end{cases}$$

Subtraindo as duas equações obtém-se que $a(x_1-x_2)=y_1-y_2$, ou seja, $a=\dfrac{y_1-y_2}{x_1-x_2}$. Substituindo este valor em uma das equações, obtemos o valor de b, ou seja,

$$b=y_1-ax_1=y_1-\left(\frac{y_1-y_2}{x_1-x_2}\right)x_1$$

Então a equação da reta que passa por (x_1,y_1) e (x_2,y_2), pode ser escrita como

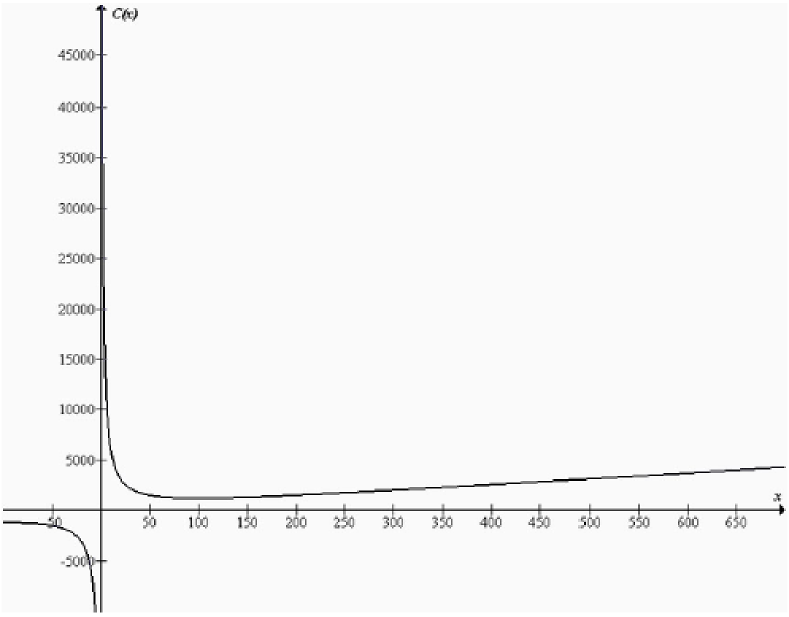
$$y = \left(\frac{y_1 - y_2}{x_1 - x_2}\right)x + y_1 - \left(\frac{y_1 - y_2}{x_1 - x_2}\right)x_1$$

$$y - y_1 = \left(\frac{y_1 - y_2}{x_1 - x_2}\right)(x - x_1)$$

$$\frac{y - y_1}{x - x_1} = \frac{y_1 - y_2}{x_1 - x_2} \text{ ou}$$

$$\frac{y - y_1}{x - x_1} = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$$

5) Para resolver este problema, vamos fazer o gráfico da função custo. Perceba que você pode utilizar um software matemático para lhe ajudar a traçar este gráfico.



De imediato podemos desconsiderar o lado esquerdo do gráfico, pois trata-se de valores negativos para o custo C(x), o que não faz sentido.

Perceba que até o valor de x aproximadamente igual a 100, a medida em que o número de unidades de matéria prima transportada aumenta, menor é o custo de obtenção e depósito.

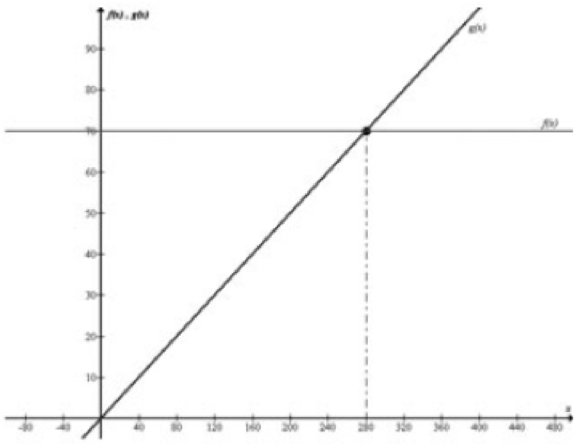
A partir disto, o custo novamente cresce conforme mostra o gráfico da função. Assim, podemos dizer que o custo ótimo está, aproximadamente, entre os valores de x=50 e x=85. Na unidade 4 você estudará como determinar valores de máximos e mínimos de funções e, portanto, poderá resolver este exercícios algebricamente, determinando o valor exato de x.

6) Temos duas situações a serem analisadas, se considerarmos o período de 1 dia:

<u>Situação 1</u>: A função é dada por f(x)=70.

<u>Situação 2</u>: $g(x) = 50 \cdot \frac{x}{200} = \frac{1}{4}x$, sendo x a quilometragem percorrida em 1 dia.

Para auxiliar a análise das situações apresentadas, veja o gráfico das funções f(x) e g(x):



Perceba que quando a quilometragem percorrida em um dia for igual a 280, temos o ponto em que as duas situações se igualam. Assim, se a quilometragem percorrida em um dia for exatamente igual a 280Km, as duas opções oferecidas pela agência locadora terão o mesmo custo.

Por outro lado, se em um dia a quilometragem for menor que 280Km a situação 2 é mais vantajosa, oferecendo um custo menor; se for maior que 280Km a situação 1 oferecerá um custo menor.

Assim, podemos modelar esta situação, escrevendo uma função da seguinte forma:

$$h(x) = \begin{cases} \frac{1}{4}x & , \quad x \leqslant 280 \\ 70 & , \quad x > 280 \end{cases}$$

Vale destacar que se considerarmos mais de um dia de aluguel, outras análises devem ser efetuadas.