2. DETERMINANTES

1 Definição e regras práticas

Seja *A* uma matriz *quadrada* de ordem *n*. Chama-se *determinante* da matriz *A*, e se indica por det A, o número obtido a partir de operações entre os elementos de *A*, de modo que:

▶ **1º** Se *A* é de ordem n = 1, então det A é o único elemento de *A*:

$$A = (3) \Rightarrow \det A = 3 \qquad B = (-8) \Rightarrow \det B = -8$$

▶ **2º** Se *A* é de ordem n = 2, então det A é dado pela diferença entre o produto dos elementos da diagonal principal de *A* e o produto dos elementos de sua diagonal secundária:

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 5 \end{pmatrix} \Rightarrow \det A = 2 \cdot 5 - 1 \cdot 3 = 10 - 3 = 7$$

$$B = \begin{pmatrix} 4 & 1 \\ -1 & -3 \end{pmatrix} \Rightarrow \det B = 4 \cdot (-3) - 1 \cdot (-1) = -12 + 1 = -11$$

Podemos também indicar o determinante de uma matriz colocando uma barra vertical em cada um de seus lados.

Assim:

$$\begin{vmatrix} 3 & 1 \\ 5 & 10 \end{vmatrix} = 30 - 5 = 25 \qquad \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 2 & 8 \end{vmatrix} = 0 - 2 = -2$$

3º Se *A* é de ordem n = 3, utilizaremos o seguinte procedimento para obter o valor de det A:

a) copiamos ao lado da matriz *A* as suas duas primeiras colunas;

b) multiplicamos os elementos da diagonal principal de *A*. Segundo a direção da diagonal principal, multiplicamos, separadamente, os elementos das outras duas "diagonais";

c) multiplicamos os elementos da diagonal secundária de *A*, trocando o sinal do produto obtido. Segundo a direção da diagonal secundária, multiplicamos, separadamente, os elementos das outras duas diagonais, também trocando o sinal dos produtos;

d) somamos todos os produtos obtidos nos itens *b* e *c*.

Esse procedimento é conhecido como *Regra de Sarrus*.

Observação

A utilidade dos determinantes será explicada no próximo capítulo. Neste capítulo, o objetivo é apresentar as regras práticas de cálculo de determinante de matrizes 2 × 2 e 3 × 3, e também o teorema de Laplace, que pode ser usado em matrizes de qualquer ordem.

Exemplo 1

Vamos calcular o valor do determinante da matriz $A = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 5 \\ 1 & -1 & 2 \\ 3 & 4 & 3 \end{pmatrix}$.

$$\left|\begin{matrix} 2 & 3 & 5 \\ 1 & -1 & 2 \\ 3 & 4 & 3 \end{matrix}\right| \begin{matrix} 2 & 3 \\ 1 & -1 \\ 3 & 4 \end{matrix}$$

$$+15 \quad -16 \quad -9 \qquad -6 \quad 18 \quad 20 \Longrightarrow$$

$\Longrightarrow$ Assim, $\det A = 15 - 16 - 9 - 6 + 18 + 20 = 22$

Exemplo 2

Calculemos o valor do determinante $\begin{vmatrix} 4 & 5 & -3 \\ 2 & 1 & 0 \\ 3 & -1 & 1 \end{vmatrix}$.

$$\left|\begin{matrix} 4 & 5 & -3 \\ 2 & 1 & 0 \\ 3 & -1 & 1 \end{matrix}\right| \begin{matrix} 4 & 5 \\ 2 & 1 \\ 3 & -1 \end{matrix}$$

$$+9 \quad 0 \quad -10 \qquad 4 \quad 0 \quad 6$$

O valor do determinante é $9 - 10 + 4 + 6 = 9$.

~~**4**~~ Resolva, em $\mathbb{R}$, a equação $\begin{vmatrix} x & 3 \\ x+1 & x-1 \end{vmatrix} = 2.$

$$\begin{vmatrix} x & 3 \\ x+1 & x-1 \end{vmatrix} = 2$$

$-$ $\quad$ $+$

$x(x-1)-(3)(x+1)=2$

$x^2-x-3x-3-2=0$

$x^2-4x-5=0$

$(x-2)^2-4-5=0$

$(x-2)^2=9$

$x-2=\pm\sqrt{9}$

$x-2=\pm 3$

$x=2\pm 3$

$\boxed{x_1=5}$ $\boxed{x_2=-1}$

Verificação:

Se $x=5$

$$\begin{vmatrix} 5 & 3 \\ 6 & 4 \end{vmatrix} =$$

$5\cdot 4-3\cdot 6=$

$20-18=2$ ok

Se $x=-1$

$$\begin{vmatrix} -1 & 3 \\ 0 & -2 \end{vmatrix} =$$

$(-1)(-2)\cancel{-(3)(0)}=+2$

ok

$\boxed{S: x=5 \text{ ou } x=-1}$

CUIDADO, ODS PROCEDIMENTOS VISTOS ATÉ AGORA NÃO PODEM SER APLICADOS EM DETERMINANTES OM ORDEM MAIOR QUE 3.

Exemplos

a) Sendo $A = \begin{bmatrix} 3 & -1 & 0 \\ 2 & 1 & -5 \\ 7 & -3 & 4 \end{bmatrix}$, então, eliminando-se a 1ª linha e a 3ª coluna,

obtemos: $A_{13} = (-1)^{1+3} \cdot \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 7 & -3 \end{vmatrix} \Rightarrow A_{13} = -13$ é o cofator do elemento a_{13}.

Exemplos

a) Sendo $A = \begin{bmatrix} 3 & -1 & 0 \\ 2 & 1 & -5 \\ 7 & -3 & 4 \end{bmatrix}$, então, eliminando-se a 1ª linha e a 3ª coluna,

obtemos: $A_{13} = (-1)^{1+3} \cdot \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 7 & -3 \end{vmatrix} \Rightarrow A_{13} = -13$ é o cofator do elemento a_{13}.

5 Resolva, em $\mathbb{R}$, a desigualdade $\dfrac{\begin{vmatrix} x & -3 \\ -3 & x \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} x & 1 \\ 3 & 1 \end{vmatrix}} \geqslant \begin{vmatrix} 2x & 3 \\ -2 & 5 \end{vmatrix}$.

5)

$$\frac{\begin{vmatrix} x & -3 \\ -3 & x \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} x & 1 \\ 3 & 1 \end{vmatrix}} \geq \begin{vmatrix} 2x & 3 \\ -2 & 5 \end{vmatrix}$$

$$\frac{x \cdot x - (-3)(-3)}{x \cdot 1 - 1 \cdot 3} \geq 2x \cdot 5 - 3 \cdot (-2)$$

$$\frac{x^2 - 9}{x - 3} \geq 10x + 6$$

Desigualdade, não pode usar regra de três e não pode simplificar.

$$\frac{x^2 - 9}{x - 3} - 10x - 6 \geq 0$$

$$\frac{x^2 - 9 - 10x(x-3) - 6(x-3)}{x - 3} \geq 0$$

$$\frac{x^2 - 9 - 10x^2 + 30x - 6x + 18}{x - 3} \geq 0$$

$$\frac{-9x^2 + 24x + 9}{x - 3} \geq 0$$

$$① \ \frac{-9x^2 + 24x + 9}{x - 3} \geq 0.$$

②

① $(-9x^2+24x+9=0):(-3)$

$3x^2-8x-3=0$

$\Delta=(-8)^2-4(3)(-3)$

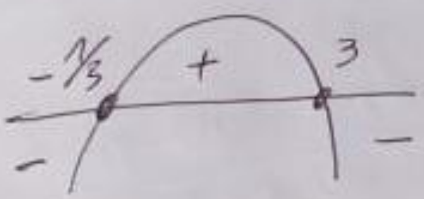
$\Delta=64+36$

$\Delta=100$

$x=\dfrac{(8\pm10):2}{(6):2}$

$x=\dfrac{4\pm5}{3}$

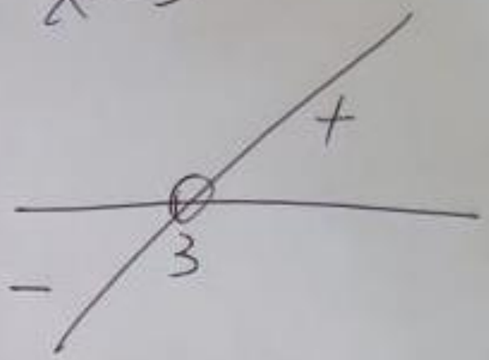
$x_1=3$ e $x_2=-\frac{1}{3}$

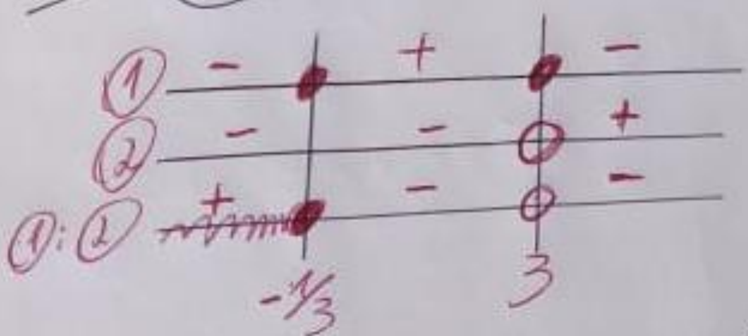


②

$x-3=0$

$x=3$





≥ 0

$S:\{x\in\mathbb{R}/\ x\leq-\frac{1}{3}\}$

ou

$S:]-\infty, -\frac{1}{3}]$.

6 Calcule o valor de cada um dos seguintes determinantes:

a) $\begin{vmatrix} 3 & -7 & 2 \\ 4 & 1 & -1 \\ -2 & 2 & 3 \end{vmatrix}$

6a)

$$\left|\begin{array}{ccc|cc} 3 & -7 & 2 & 3 & -7 \\ 4 & 1 & -1 & 4 & 1 \\ -2 & 2 & 3 & -2 & 2 \end{array}\right.$$

$$det = (3)(1)(3) + (-7)(-1)(-2) + (2)(4)(2) - (2)(1)(-2) - (3)(-1)(2) - (-7)(4)(3)$$

$$det = 9 - 14 + 16 + 4 + 6 + 84$$

$$det = +105$$

15 Resolva, em $\mathbb{R}$, a equação $\begin{vmatrix} x & 4 & -2 \\ x-1 & x & 1 \\ 1 & x+1 & 3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} x & 3 \\ 2 & 1 \end{vmatrix}$.

15)

$$\begin{vmatrix} x & 4 & -2 \\ x-1 & x & 1 \\ 1 & x+1 & 3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} x & 3 \\ 2 & 1 \end{vmatrix}$$

$$X\cdot X\cdot 3 + 4\cdot 1\cdot 1 + (-2)(X-1)(X+1) - (-2)(X)(1) - 1(X+1)(X)$$

$$- 3(4)(X-1) = X\cdot 1 - 3\cdot 2$$

$$\cancel{3X^2} + \cancel{4} - \cancel{2X^2} + 2 + \cancel{2X} - \cancel{X^2} - \cancel{X} - \cancel{12X} + 12 = \cancel{X} - 6$$

$$\cancel{3X^2} - \cancel{2X^2} - \cancel{X^2} + \cancel{2X} - \cancel{X} - 12X - \cancel{X} + 4 + 2 + 12 + 6 = 0$$

$$-12X = -18$$

$$X = \frac{-18}{-12}$$

$$\boxed{X = +\frac{3}{2}}$$

20 (UF-MG) Dadas as matrizes: $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 3 & 2 \\ 4 & 7 & 5 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 5 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 3 \\ -4 & 0 & -6 \end{pmatrix}$ e $C = \begin{pmatrix} x & 0 & 0 \\ 0 & x & 0 \\ 0 & 0 & x \end{pmatrix}$, determine todos os números reais x tais que o determinante da matriz $(C - AB)$ seja positivo.

20)

$$AB = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 3 & 2 \\ 4 & 7 & 5 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 5 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 3 \\ -4 & 0 & -6 \end{pmatrix}$$

$$AB = \begin{pmatrix} 5+0-4 & 0+0+0 & 2+3-6 \\ 10+0-8 & 0+0+0 & 4+9-12 \\ 20+0-20 & 0+0+0 & 8+21-30 \end{pmatrix}$$

$$AB = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 2 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

$$C - AB = \begin{pmatrix} X & 0 & 0 \\ 0 & X & 0 \\ 0 & 0 & X \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 2 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$C - AB = \begin{pmatrix} X-1 & 0 & 1 \\ -2 & X & -1 \\ 0 & 0 & X-1 \end{pmatrix}$$

$$\text{Det}(C-AB) = \left| \begin{matrix} (x-1) & 0 & 1 \\ -2 & x & -1 \\ 0 & 0 & (x-1) \end{matrix} \right| \begin{matrix} (x-1) & 0 \\ -2 & x \\ 0 & 0 \end{matrix} =$$

$$= (x-1)X(x-1) + 0 + 0 - 0 - 0 - 0 =$$

$$= X(X-1)^2 > 0$$

ser positivo!

$(X-1)^2$ é sempre positivo.

∴ ~~Bas~~ Si $X \in \mathbb{R}^*_+$, ou seja, basta ter $x > 0$.

2 Cofator

Se A é de ordem $n \geqslant 3$, vamos inicialmente apresentar o *cofator* de um elemento a_{ij} qualquer de A, que será indicado por A_{ij} $(1 \leqslant i, j \leqslant n)$.

Definimos:

> $A_{ij} = (-1)^{i+j} \cdot D_{ij}$, em que D_{ij} é o determinante da matriz que se obtém de A, eliminando sua i–ésima linha e j–ésima coluna.

Exemplos

a) Sendo $A = \begin{bmatrix} 3 & -1 & 0 \\ 2 & 1 & -5 \\ 7 & -3 & 4 \end{bmatrix}$, então, eliminando-se a 1ª linha e a 3ª coluna,

obtemos: $A_{13} = (-1)^{1+3} \cdot \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 7 & -3 \end{vmatrix} \Rightarrow A_{13} = -13$ é o cofator do elemento a_{13}.

Podemos obter, neste caso, nove cofatores.

A_{11}: $\begin{vmatrix} 3 & -1 & 0 \\ 2 & 1 & -5 \\ 7 & -3 & 4 \end{vmatrix}$ Elimina linha 1
C1

$$A_{11} = (-1)^{1+1} \cdot \begin{vmatrix} 1 & -5 \\ -3 & 4 \end{vmatrix}$$

$$+1 \cdot (4 - 15) = -11$$

$\therefore A_{11} = -11$

Note que temos sempre $(-1)^{i+j}$ que multiplica o det.

$$(-1)^{i+j} = \begin{cases} -1 & \text{se } i+j \text{ é ÍMPAR} \\ +1 & \text{se } i+j \text{ é PAR} \end{cases}$$

∴ segue a ordem:

$$\begin{vmatrix} + & - & + & - & \cdots \\ - & + & - & + & \cdots \\ + & - & + & - & \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \end{vmatrix}$$

$$A_{12} = -\begin{vmatrix} 2 & -5 \\ 7 & 4 \end{vmatrix} = -[(8)-(-35)]$$

$$-[8+35] = -43$$

b) Sendo $B = \begin{bmatrix} 1 & 2 & -3 & 7 \\ 11 & -9 & 1 & -1 \\ 4 & 3 & -5 & 3 \\ 8 & -1 & 0 & 3 \end{bmatrix}$ e eliminando-se a 3ª linha e a 2ª coluna,

obtemos: $B_{32} = (-1)^{3+2} \cdot \begin{vmatrix} 1 & -3 & 7 \\ 11 & 1 & -1 \\ 8 & 0 & 3 \end{vmatrix} \Rightarrow B_{32} = -70$ é o cofator do elemento b_{32}.

3 Teorema de Laplace

Para calcular o determinante de uma matriz quadrada de ordem *n*, escolhemos arbitrariamente uma de suas filas (linha ou coluna) e somamos os produtos dos elementos dessa fila pelos respectivos cofatores.

Omitiremos, nesta obra, a demonstração desse teorema, bem como a demonstração de que o valor do determinante *não* depende da fila escolhida.

O Teorema de Laplace se aplica a toda matriz quadrada de ordem *n*; entretanto, para os casos n = 2 e n = 3 é mais simples, em geral, utilizar as regras práticas que foram vistas páginas atrás.

Exemplo 1

Vamos calcular $D = \begin{vmatrix} 3 & 1 & -2 & 1 \\ 5 & 2 & 2 & 3 \\ 7 & 4 & -5 & 0 \\ 1 & -1 & 11 & 2 \end{vmatrix}$

Escolhemos a linha 3 de *D*. Pelo Teorema de Laplace vem:

$$D = 7 \cdot A_{31} + 4 \cdot A_{32} + (-5) \cdot A_{33} + 0 \cdot A_{34} \ (*)$$

Temos:

$$A_{31} = (-1)^4 \cdot \begin{vmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 2 & 2 & 3 \\ -1 & 11 & 2 \end{vmatrix} = 9, \ A_{32} = (-1)^5 \cdot \begin{vmatrix} 3 & -2 & 1 \\ 5 & 2 & 3 \\ 1 & 11 & 2 \end{vmatrix} = 20 \text{ e } A_{33} = (-1)^6 \cdot \begin{vmatrix} 3 & 1 & 1 \\ 5 & 2 & 3 \\ 1 & -1 & 2 \end{vmatrix} = 7$$

Observe que não é necessário calcular A_{34}.

Daí, em (*), temos que:

$$D = 7 \cdot 9 + 4 \cdot 20 + (-5) \cdot 7 = 108$$

Exemplo 2

Qual é o valor de $D = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 10 & 0 \\ 3 & -2 & 1 & -1 \\ 5 & 0 & -3 & -2 \\ -9 & 0 & 4 & 7 \end{vmatrix}$?

Embora a escolha seja arbitrária, devemos optar pela fila com maior número de zeros a fim de simplificar os cálculos. Escolhemos, dessa forma, desenvolver pelos elementos da 2ª coluna. Temos:

$$D = \underbrace{0 \cdot A_{12}}_{0} + (-2) \cdot A_{22} + \underbrace{0 \cdot A_{32}}_{0} + \underbrace{0 \cdot A_{42}}_{0} = -2 \cdot A_{22}.$$

Assim, basta calcular A_{22}.

Como $A_{22} = (-1)^{2+2} \cdot \begin{vmatrix} 1 & 10 & 0 \\ 5 & -3 & -2 \\ -9 & 4 & 7 \end{vmatrix} = -183$, segue que $D = (-2) \cdot (-183) = 366$.

21 Calcule os seguintes determinantes:

b) $\begin{vmatrix} -2 & 3 & 1 & 7 \\ 0 & -1 & 2 & 0 \\ 3 & -4 & 5 & 1 \\ 1 & 0 & -2 & -1 \end{vmatrix}$

21) b)

$$\begin{vmatrix} -2_{+} & 3 & 1 & 7 \\ \cancel{0_{-}} & \cancel{-1_{+}} & \cancel{2_{-}} & \cancel{0} \\ 3 & -4 & 5 & 1 \\ 1 & 0 & -2 & -1 \end{vmatrix} \rightarrow$$ USAR O T. de L. pela L2

$$\boxed{det =} -1A_{22} + 2A_{23} = -1(-67) + 2(-32) = +67 - 32 = \boxed{+35}$$

$$A_{22} = +1 \cdot \begin{vmatrix} -2 & 1 & 7 \\ 3 & 5 & 1 \\ 1 & -2 & -1 \end{vmatrix} \begin{matrix} -2 & 1 \\ 3 & 5 \\ 1 & -2 \end{matrix} =$$

$$= +1 \cdot [-2 \cdot 5(-1) + 1 \cdot 1 \cdot 1 + 7 \cdot 3(-2) - 7 \cdot 5 \cdot 1 - (-2)1(-2) - 1 \cdot 3(-1)]$$

$$= +1 \cdot [10 + 1 - 42 - 35 - 4 + 3]$$

$$A_{22} = -67$$

$$A_{23} = -1 \cdot \begin{vmatrix} -2 & 3 & 7 \\ 3 & -4 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \end{vmatrix} \begin{matrix} -2 & 3 \\ 3 & -4 \\ 1 & 0 \end{matrix}$$

$$A_{23} = -1 \cdot [(-2)(-4)(-1) + 3 \cdot 1 \cdot 1 + \cancel{7 \cdot 3 \cdot 0} - 7(-4)1 - \cancel{(-2)1 \cdot 0} - 3 \cdot 3(-1)]$$

$$A_{23} = -1[-8 + 3 + 28 + 9] = -1[32]$$

$$A_{23} = -32$$

25 Calcule: $\begin{vmatrix} 2 & 2 & 3 & -4 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & -5 & 5 & 1 & 4 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & 2 \end{vmatrix}$.

25)

$$D = \begin{vmatrix} 2_+ & 2 & 3 & -4 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & -5 & 5 & 1 & 4 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & 2 \end{vmatrix}$$

→ T.L. pela C1

$$Det(D) = 2 \cdot A_{11}$$

$$Det(D) = 2 \cdot \begin{vmatrix} 1_+ & 0 & 0 & 0 \\ 4 & 0 & 2 & 1 \\ -5 & 5 & 1 & 4 \\ 1 & 0 & -1 & 2 \end{vmatrix}$$

→ T.L. pela L1

$$Det(D) = 2 \cdot 1 \cdot A_{11}'$$

$$Det(D) = 2 \cdot \begin{vmatrix} 0_+ & 2 & 1 \\ 5_- & 1 & 4 \\ 0 & -1 & 2 \end{vmatrix}$$

→ T.L pe C1

$$Det(D) = 2 \cdot (-1) \cdot \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 2 \end{vmatrix} =$$

$$-2(4-1) = -2(3) = \boxed{-6}$$

23 Resolva, em $\mathbb{R}$, a equação: $\begin{vmatrix} x & 0 & 0 & 3 \\ -1 & x & 0 & 0 \\ 0 & -1 & x & 1 \\ 0 & 0 & -1 & -2 \end{vmatrix} = 3.$

23)

$$\begin{vmatrix} x & 0 & 0 & 3 \\ -1 & x & 0 & 0 \\ 0 & -1 & x & 1 \\ 0 & 0 & -1 & -2 \end{vmatrix} = 3 \qquad x = ?$$

T. L. C_1

$$x(1)\begin{vmatrix} x & 0 & 0 \\ -1 & x & 1 \\ 0 & -1 & 2 \end{vmatrix} + (-1)\cdot(-1)\begin{vmatrix} 0 & 0 & 3 \\ -1 & x & 1 \\ 0 & -1 & -2 \end{vmatrix} = 3$$

$$x\,(2x^2 + x) + 1(+3) = 3$$

$$2x^3 + x^2 + \cancel{3} = \cancel{3}$$

$$2x^3 + x^2 = 0$$

$$x^2(2x+1) = 0$$

$x^2 = 0$ ou $2x + 1 = 0$

$\boxed{x = 0}$ $\qquad$ $\boxed{x = -\frac{1}{2}}$

S: $x = 0$ ou $x = -\frac{1}{2}$

24 Resolva, em $\mathbb{R}$, a equação: $\begin{vmatrix} 2^x & 0 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 1 & -3 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \\ -3 & -1 & 2 & 0 \end{vmatrix} = -79.$

24) $\begin{vmatrix} 2^x_{+} & 0 & 1 & 2 \\ 1_{-} & 2 & 1 & -3 \\ 0_{+} & 0_{-} & -1_{+} & 1_{-} \\ -3 & -1 & 2 & 0 \end{vmatrix} = -79 \rightarrow$ T.L. L3

$$-1 \cdot \begin{vmatrix} 2^x & 0 & 2 \\ 1 & 2 & -3 \\ -3 & -1 & 0 \end{vmatrix} \begin{matrix} 2^x & 0 & 2 \\ 1 & 2 & -3 \end{matrix} - 1 \begin{vmatrix} 2^x & 0 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ -3 & -1 & 2 \end{vmatrix} \begin{matrix} 2^x & 0 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \end{matrix} = -79$$

$$-1[-2-12-3\cdot 2^x] - 1\cdot[4\cdot 2^x - 1 - 6 + 2^x] = -79$$

$$-[-14-3\cdot 2^x] - [5\cdot 2^x - 7] = -79$$

$$14 + 3\cdot 2^x - 5\cdot 2^x + 7 + 79 = 0$$

$$-2\cdot 2^x + 100 = 0$$

$$-2\cdot 2^x = -100$$

$$2^x = \frac{-100}{-2}$$

$$2^x = +50$$

$$\boxed{x = \log_2 50}$$

ou $\boxed{x = \frac{\ln 50}{\ln 2}}$

$\log_a b = x \Leftrightarrow a^x = b$

$\log_c b = \frac{\log_a b}{\log_a c}$

$\log_e b = \ln b$

OU AINDA

$$50 = 2 \cdot 5^2$$

$$x = \frac{\ln 50}{\ln 2} = \frac{\ln(2 \cdot 5^2)}{\ln 2}$$

$$x = \frac{\ln 2 + \ln 5^2}{\ln 2}$$

$$x = \frac{\ln 2}{\ln 2} + \frac{2 \ln 5}{\ln 2}$$

$$\boxed{x = 1 + 2\frac{\ln 5}{\ln 2}}$$

$$\log_a b + \log_a c = \log_a (b \cdot c)$$

$$\log_a b^n = n \cdot \log_a b$$

$$\log_a b - \log_a c = \log_a (b/c)$$

$$\log_a 1 = 0 \Rightarrow \ln 1 = 0$$

$$\log_a a = 1 \Rightarrow \ln e = 1$$

$$a^{\log_a b} = b \Rightarrow e^{\ln b} = b$$

$$\log b = \log_{10} b$$

4 Propriedades dos determinantes

Em alguns casos, o cálculo de determinantes pode ser simplificado com o auxílio de algumas propriedades. Vamos passar a estudá-las, lembrando sempre que, ao nos referirmos a uma *fila* da matriz, estaremos pensando, indiferentemente, em uma linha ou em uma coluna. Além disso, estaremos supondo que *A* é uma matriz quadrada de ordem *n*.

I. Fila nula

Se *A* possui uma fila na qual todos os elementos são iguais a zero, então det A = 0.

A justificativa para tal fato é que, desenvolvendo o determinante por essa fila, por meio do Teorema de Laplace, obtemos uma soma de zeros, pois o produto de um elemento dessa fila pelo respectivo cofator é sempre igual a zero.

Acompanhe essa idéia para o caso n = 4:

$$M = \begin{bmatrix} a & b & 0 & c \\ d & e & 0 & f \\ g & h & 0 & i \\ j & k & 0 & l \end{bmatrix} \xRightarrow[\text{pela 3ª coluna}]{\text{desenvolvendo}} \det M = 0 \cdot M_{13} + 0 \cdot M_{23} + 0 \cdot M_{33} + 0 \cdot M_{43} = 0$$

II. Troca de filas paralelas

Vamos trocar a posição de duas filas paralelas de *A*, obtendo uma outra matriz *A'*. Vale sempre a relação: det A' = –det A.

Justifiquemos tal fato para o caso n = 3:

$$\text{Se } A = \begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{pmatrix} \xrightarrow[\text{da 1ª e 3ª linhas}]{\text{trocamos a posição}} A' = \begin{pmatrix} g & h & i \\ d & e & f \\ a & b & c \end{pmatrix}$$

- Usando Laplace, vamos desenvolver det A pela 1ª linha:

$$\det A = a \cdot A_{11} + b \cdot A_{12} + c \cdot A_{13} = a \cdot (-1)^2 \cdot \begin{vmatrix} e & f \\ h & i \end{vmatrix} + b \cdot (-1)^3 \cdot \begin{vmatrix} d & f \\ g & i \end{vmatrix} +$$
$$+ c \cdot (-1)^4 \cdot \begin{vmatrix} d & e \\ g & h \end{vmatrix} = a \cdot (ei - fh) - b \cdot (di - fg) + c \cdot (dh - ge) \qquad (1)$$

- Usando Laplace, vamos desenvolver det A' pela 3ª linha:

$$\det A' = a \cdot A'_{31} + b \cdot A'_{32} + c \cdot A'_{33} = a \cdot (-1)^4 \cdot \begin{vmatrix} h & i \\ e & f \end{vmatrix} + b \cdot (-1)^5 \cdot \begin{vmatrix} g & i \\ d & f \end{vmatrix} +$$
$$+ c \cdot (-1)^6 \cdot \begin{vmatrix} g & h \\ d & e \end{vmatrix} = a \cdot (fh - ei) - b \cdot (fg - di) + c \cdot (ge - dh) \qquad (2)$$

De 1 e 2 , segue que det A' = −det A.

Assim, por exemplo:

- Se $\begin{vmatrix} 2 & 3 \\ -1 & 4 \end{vmatrix} = 11$, então $\begin{vmatrix} -1 & 4 \\ 2 & 3 \end{vmatrix} = -11$.

- Se $\begin{vmatrix} 1 & 2 & x \\ -4 & 5 & y \\ -3 & 7 & z \end{vmatrix} = 8$, então $\begin{vmatrix} x & 2 & 1 \\ y & 5 & -4 \\ z & 7 & -3 \end{vmatrix} = -8$.

III. Multiplicação de uma fila por um número real

Quando os elementos de uma fila de *A* são multiplicados por um número real *k*, $k \neq 0$, obtemos uma nova matriz *A'*.

Vale sempre: det A' = k · det A.

Saiba o porquê disso no caso n = 3:

$$\text{Seja } A = \begin{bmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{bmatrix} \xrightarrow[\text{elementos da 2ª linha}]{\text{multiplicamos por } k \text{ os}} A' = \begin{bmatrix} a & b & c \\ kd & ke & kf \\ g & h & i \end{bmatrix}$$

- Por Laplace, aplicado à 2ª linha de *A*, vem:

$$\det A = d \cdot A_{21} + e \cdot A_{22} + f \cdot A_{23} \qquad 1$$

- Desenvolvendo det A', pela 2ª linha, obtemos:

$$\det A' = kd \cdot A'_{21} + k \cdot e \cdot A'_{22} + kfA'_{23} = k \cdot (d \cdot A'_{21} + e \cdot A'_{22} + f \cdot A'_{23}) \qquad 2$$

Como as demais linhas permaneceram inalteradas, é fácil notar que $A_{21} = A'_{21}$, $A_{22} = A'_{22}$ e $A_{23} = A'_{23}$. Assim, em 2 vem:

$$\det A' = k \cdot \underbrace{(d \cdot A_{21} + e \cdot A_{22} + f \cdot A_{23})}_{\text{por } 1} = k \cdot \det A$$

RESUMINDO E INCREMENTANDO

2.4 Propriedades dos Determinantes

(i) Pela definição de determinante, existe um e apenas um elemento de cada linha, e um e somente um elemento de cada coluna da matriz, no desenvolvimento do determinante.

(ii) Se todos os elementos de uma linha ou coluna forem nulos, então $\det A = 0$, isto segue pela propriedade (i)

(iii) Se uma linha de uma matriz for multiplicada por *k*, então o determinante fica multiplicado por *k*.

(iv) Se trocarmos a posição de duas linhas, o determinante troca de sinal.

(v) O determinante de uma matriz que tem duas linhas(colunas) iguais é zero.

(vi) $\det(A \cdot B) = \det A \cdot \det B$

(vii) O determinante de uma matriz diagonal, triangular é igual ao termo principal, isto é, é igual ao produto dos elementos da diagonal principal.

por 1

Exemplo 1

Seja $M = \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 4 & 3 \end{bmatrix}$, det M = 10. Vamos multiplicar por 4 a 2ª coluna de *M*, obtendo $M' = \begin{bmatrix} 2 & -4 \\ 4 & 12 \end{bmatrix}$. Temos:

$$\det M' = 40, \text{ isto é, } \det M' = 4 \cdot \det M$$

Exemplo 2

Considere $P = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$.

- Vamos, em primeiro lugar, multiplicar a 1ª linha de P por 2, obtendo $P' = \begin{bmatrix} 2a & 2b \\ c & d \end{bmatrix}$.

  Sabemos, por essa propriedade, que $\det P' = 2 \cdot \det P$. 1

- Agora, vamos dividir por $3\left(\text{ou multiplicar por } \frac{1}{3}\right)$ a 2ª linha de P', obtendo

$$P'' = \begin{bmatrix} 2a & 2b \\ \frac{1}{3}c & \frac{1}{3}d \end{bmatrix}$$

  Sabemos que $\det P'' = \frac{1}{3} \cdot \det P' \underset{1}{=} \frac{1}{3} \cdot 2 \cdot \det P = \frac{2}{3} \cdot \det P$.

Exemplo 3

Se R é uma matriz quadrada de ordem 3 e $\det R = x$, quanto vale $\det(4R)$?

Se $R = \begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{pmatrix}$, então $4 \cdot R = \begin{pmatrix} 4a & 4b & 4c \\ 4d & 4e & 4f \\ 4g & 4h & 4i \end{pmatrix}$.

Observemos que, para obter a matriz $4R$, multiplicamos por 4 a 1ª, 2ª e 3ª linhas de R. Aplicando sucessivamente a propriedade III, concluímos que $\det(4R) = 4 \cdot 4 \cdot 4 \cdot \det R = 4^3 \cdot \det R = 64x$.

26 Sem desenvolver o determinante, calcule:

a) $\begin{vmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 5 & 3 & 11 \end{vmatrix}$

b) $\begin{vmatrix} 1 & 3 & 0 & -2 \\ 5 & -7 & 0 & 4 \\ 11 & 2 & 0 & 5 \\ 0 & 6 & 0 & 9 \end{vmatrix}$

27 Sabendo que $\begin{vmatrix} x & y \\ z & w \end{vmatrix} = 4$, calcule, sem desenvolver o determinante:

a) $\begin{vmatrix} z & w \\ x & y \end{vmatrix}$

b) $\begin{vmatrix} 5x & 5y \\ z & w \end{vmatrix}$

c) $\begin{vmatrix} x & y \\ 5z & 5w \end{vmatrix}$

d) $\begin{vmatrix} 5x & 5y \\ 5z & 5w \end{vmatrix}$

28 Se $\begin{vmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{vmatrix} = -10$, qual é o valor de:

a) $\begin{vmatrix} a & b & c \\ 2d & 2e & 2f \\ 3g & 3h & 3i \end{vmatrix}$

b) $\begin{vmatrix} b & a & 4c \\ e & d & 4f \\ h & g & 4i \end{vmatrix}$

29 Se A é uma matriz quadrada de ordem 2 e det A = 5, qual é o valor de det (3A)?

26 a) 0 b) 0

27 a) −4 b) 20 c) 20 d) 100

28 a) −60 b) 40

29 45

IV. Filas paralelas iguais ou proporcionais

Quando A possui filas paralelas iguais (ou proporcionais), então det A = 0 .

Vejamos, no caso abaixo, por que isso ocorre:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -3 & 4 & 5 \\ a & b & c & d \\ 7 & 11 & 1 & 0 \\ a & b & c & d \end{bmatrix} \underset{\text{troca}}{\Longrightarrow} A' = \begin{bmatrix} 1 & -3 & 4 & 5 \\ a & b & c & d \\ 7 & 11 & 1 & 0 \\ a & b & c & d \end{bmatrix}$$

Pela propriedade II, det A' = −det A. Ora, A = A' e assim det A' = det A. Daí, vem:

$$\det A = -\det A \Longrightarrow 2\det A = 0 \Longrightarrow \det A = 0$$

No caso de as filas serem proporcionais, temos:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -3 & 4 & 5 \\ a & b & c & d \\ 7 & 11 & 1 & 0 \\ 5a & 5b & 5c & 5d \end{bmatrix} \underset{\text{troca}}{\Rightarrow} A' = \begin{bmatrix} 1 & -3 & 4 & 5 \\ 5a & 5b & 5c & 5d \\ 7 & 11 & 1 & 0 \\ a & b & c & d \end{bmatrix}$$

Pela propriedade II, det A' = −det A. (*)

Porém, *A'* pode ser vista como a matriz que se obtém de *A* multiplicando-se a 2ª linha por 5 e a 4ª linha por $\frac{1}{5}$.

Pela propriedade III, temos que det $A' = 5 \cdot \frac{1}{5} \cdot$ det A, isto é, det A' = det A e, em (*), concluímos que det A = 0.

Exemplos

$$\begin{array}{r} \longrightarrow \\ \\ \longrightarrow \end{array}\begin{vmatrix} 2 & 3 & 1 \\ 4 & 5 & -2 \\ 2 & 3 & 1 \end{vmatrix} = 0$$

$$\begin{array}{cccc} & & & \\ \begin{vmatrix} 1 & 7 & 1 & 11 \\ 2 & \sqrt{2} & 2 & 1 \\ 4 & 0 & 4 & 3 \\ 3 & -1 & 3 & 7 \end{vmatrix} = 0 \\ \uparrow \qquad\quad \uparrow \end{array}$$

$$\begin{array}{r} \longrightarrow \\ \\ \longrightarrow \end{array}\begin{vmatrix} 3 & -1 & 2 \\ 5 & 4 & 1 \\ 18 & -6 & 12 \end{vmatrix} = 0$$

V. Matriz transposta

A e A^t são matrizes cujos determinantes coincidem, isto é, $\det A^t = \det A$.

Verifiquemos tal fato quando n = 2:

$$A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}, \det A = ad - bc; \quad A^t = \begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix} \text{ e } \det A^t = ad - bc$$

Assim, por exemplo:

$$\begin{vmatrix} x & y \\ 3 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} x & 3 \\ y & 1 \end{vmatrix} \qquad \begin{vmatrix} 3 & 1 & 5 \\ 4 & 0 & 2 \\ 1 & -1 & 3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 3 & 4 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \\ 5 & 2 & 3 \end{vmatrix}$$

VI. Teorema de Binet

Sejam $A = \begin{pmatrix} 6 & 2 \\ -1 & 4 \end{pmatrix}$ e $B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -3 & 2 \end{pmatrix}$. Sabemos que det A = 26 e det B = 2.

Construímos agora a matriz produto $A \cdot B = \begin{pmatrix} 6 & 2 \\ -1 & 4 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -3 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 4 \\ -13 & 8 \end{pmatrix}$.

Temos que $\det (A \cdot B) = 0 - (-52) = 52 = \underbrace{\det A}_{26} \cdot \underbrace{\det B}_{2}$.

Pode-se mostrar que, se *A* e *B* são matrizes quadradas de mesma ordem, vale a relação:

$$\det (A \cdot B) = (\det A) \cdot (\det B)$$

34 Sem desenvolver os determinantes, calcule o valor de:

$$y = \begin{vmatrix} 2 & 5 \\ 6 & 15 \end{vmatrix} + 2 \cdot \begin{vmatrix} 4 & -1 & 2 & 5 \\ 1 & 3 & 7 & 9 \\ 0 & -1 & 4 & 5 \\ 2 & 6 & 14 & 18 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 3 & -2 & 3 \\ 5 & 0 & 5 \\ 1 & \sqrt{3} & 1 \end{vmatrix}$$

MUITO BOM - TEOREMA DE JACOBI

5 Abaixamento da ordem de um determinante

O objetivo deste item é apresentar um método prático e rápido para se calcularem determinantes (de ordem maior ou igual a 3).

Comecemos estudando a seguinte propriedade:

> Quando substituímos a fila de uma matriz quadrada *A* pela soma dos elementos dela com os elementos de outra fila paralela previamente multiplicada por um número real (não nulo), obtemos uma outra matriz *A'*.
>
> Temos que det A' = det A.

Exemplo 1

Sendo $A = \begin{pmatrix} 5 & 11 \\ -4 & 3 \end{pmatrix}$, det A = 59. Vamos substituir a 2ª linha de *A* pela soma dela com a 1ª multiplicada por −2 e obter:

$$A' = \begin{pmatrix} 5 & 11 \\ \underset{-4 + (-2) \cdot 5}{-14} & \underset{3 + (-2) \cdot 11}{-19} \end{pmatrix}$$

Temos que det A' = −95 + 154 = 59.

Exemplo 2

Seja $B = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 3 \\ 4 & -2 & 1 \\ 3 & 1 & -7 \end{bmatrix}$, det B = 25. Substituímos a 2ª coluna de *B* pela soma dela com a 1ª multiplicada por 3, obtendo:

$$B' = \begin{bmatrix} 2 & \overset{-1 + 3 \cdot 2}{5} & 3 \\ 4 & \underset{-2 + 3 \cdot 4}{10} & 1 \\ 3 & \underset{1 + 3 \cdot 3}{10} & -7 \end{bmatrix} \qquad \det B' = 25$$

Exemplo 3

Seja, agora, $A = \begin{bmatrix} 1 & a & b \\ c & d & e \\ f & g & h \end{bmatrix}$. Vamos aplicar o Teorema de Jacobi duas vezes, a fim de obter "zeros" nas posições a_{12} e a_{13} da matriz A; isto é, com exceção do 1, vamos "zerar" a primeira linha de A. Temos:

substituímos a 3ª coluna de A pela soma dela com a 1ª coluna multiplicada por $-b$

$$A = \begin{bmatrix} 1 & a & b \\ c & d & e \\ f & g & h \end{bmatrix} \longrightarrow A' = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ c & d - ac & e - bc \\ f & g - af & h - bf \end{bmatrix}$$

substituímos a 2ª coluna de A pela soma dela com a 1ª coluna multiplicada por $-a$

Pelo Teorema de Jacobi, det A = det A'.

Para calcular det A', aplicamos o Teorema de Laplace, pois já conseguimos dois zeros na 1ª linha de A'. De fato:

$$\det A' = 1 \cdot A'_{11} + 0 \cdot A'_{12} + 0 \cdot A'_{13} = A'_{11} = (-1)^2 \cdot \begin{vmatrix} d - ac & e - bc \\ g - af & h - bf \end{vmatrix}, \text{ isto é,}$$

$$\det A = \det A' = \begin{vmatrix} d - ac & e - bc \\ g - af & h - bf \end{vmatrix}. \quad (*)$$

Em resumo, construímos as seguintes etapas:

- Aplicamos o Teorema de Jacobi à matriz A (3× 3) e obtivemos a matriz A' (3 × 3).
- Ao calcularmos det A = det A', verificamos que este último coincide com o determinante de uma matriz (2 × 2), como mostra (*).
- Conseguimos, assim, *abaixar* a ordem do determinante de A.

Observe o esquema seguinte:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & a & b \\ c & d & e \\ f & g & h \end{bmatrix} \xrightarrow[\text{T. Laplace}]{\text{T. Jacobi} \, + } B = \begin{bmatrix} d - ac & e - bc \\ g - af & h - bf \end{bmatrix}.$$

e det A = det B

Confira agora os passos para obter B a partir de A, *diretamente*:

- Em primeiro lugar, "isolamos" a 1ª linha e a 1ª coluna de A (passaremos a chamar tais filas de *margens*), obtendo assim uma matriz A^*, do tipo 2×2, conforme indicado abaixo:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & a & b \\ c & d & e \\ f & g & h \end{bmatrix} \longleftarrow \text{margem}$$

margem — matriz A^*

- Construímos a partir da matriz A^* uma outra matriz 2×2, em que cada um de seus elementos é dado pela diferença entre um elemento de A^* e o produto das respectivas margens. Chegamos, enfim, à matriz B.

$$A = \begin{bmatrix} 1 & a & b \\ c & d & e \\ f & g & h \end{bmatrix} \longrightarrow B = \begin{bmatrix} d - ac & e - bc \\ g - af & h - bf \end{bmatrix}$$

Esse processo é conhecido como *Regra de Chió*, e convém observar que tal regra só pode ser aplicada se o elemento a_{11} de A (elemento que se encontra na 1ª linha e 1ª coluna) for igual a 1.

Exemplo 4

Vamos calcular:

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 0 \\ 2 & 5 & 1 & -3 \\ -3 & 1 & 2 & 5 \\ -4 & -6 & 7 & 2 \end{vmatrix} \overset{\text{Chió}}{=} \begin{vmatrix} 5 - 2 \cdot 2 & 1 - 2 \cdot 3 & -3 - 2 \cdot 0 \\ 1 - 2(-3) & 2 - 3 \cdot (-3) & 5 - 0 \cdot (-3) \\ -6 - 2 \cdot (-4) & 7 - 3 \cdot (-4) & 2 - 0 \cdot (-4) \end{vmatrix} =$$

$$= \begin{vmatrix} 1 & -5 & -3 \\ 7 & 11 & 5 \\ 2 & 19 & 2 \end{vmatrix} \overset{\text{Chió}}{=} \begin{vmatrix} 11 - 7 \cdot (-5) & 5 - 7 \cdot (-3) \\ 19 - 2(-5) & 2 - 2 \cdot (-3) \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 46 & 26 \\ 29 & 8 \end{vmatrix} = -386$$

Exemplo 5

Se quisermos desenvolver $\begin{vmatrix} 3 & 7 & 4 \\ 1 & 2 & -1 \\ 0 & 3 & 2 \end{vmatrix}$ usando a Regra de Chió, precisamos trocar as posições da 1ª e 2ª linhas, a fim de que se tenha $a_{11} = 1$. Pela propriedade II, vem:

$$\begin{vmatrix} 3 & 7 & 4 \\ 1 & 2 & -1 \\ 0 & 3 & 2 \end{vmatrix} = -\begin{vmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 3 & 7 & 4 \\ 0 & 3 & 2 \end{vmatrix} \overset{\text{Chió}}{=} -\begin{vmatrix} 1 & 7 \\ 3 & 2 \end{vmatrix} = -(-19) = 19$$

Exemplo 6

Calculemos $D = \begin{vmatrix} 2 & 2 & 2 & 2 \\ 2 & 2 & 2 & 3 \\ 2 & 2 & 3 & 3 \\ 2 & 3 & 3 & 3 \end{vmatrix}$ usando a Regra de Chió.

A fim de obter $a_{11} = 1$, dividimos por 2 (multiplicamos por $\frac{1}{2}$) os elementos da 1ª coluna. Pela propriedade III, temos:

$$\frac{1}{2} \cdot \underbrace{\begin{vmatrix} 2 & 2 & 2 & 2 \\ 2 & 2 & 2 & 3 \\ 2 & 2 & 3 & 3 \\ 2 & 3 & 3 & 3 \end{vmatrix}}_{D} = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 2 & 2 \\ 1 & 2 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 3 & 3 \\ 1 & 3 & 3 & 3 \end{vmatrix} \overset{\text{Chió}}{=} \begin{vmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = -1$$

39 Calcule, usando Chió:

a) $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -1 & 4 & 7 \\ 0 & 3 & 2 \end{vmatrix}$

39A)

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -1 & 5 & 7 \\ 0 & 1 & 2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 5-(-1)(2) & 7-(-1)(3) \\ 1-(0)(2) & 2-(0)(3) \end{vmatrix} =$$

$$= \begin{vmatrix} 5+2 & 7+3 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 7 & 10 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} =$$

$$= 7(2) - 10(1) = 14 - 10 = 4.$$

b) $\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 5 & 4 & 3 & 2 \\ 1 & -3 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \end{vmatrix}$

39 B)

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 5 & 4 & 3 & 2 \\ 1 & -3 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 4-0 & 3-0 & 2-0 \\ -3-0 & 2-0 & 0-0 \\ 1-0 & 0-0 & -1-0 \end{vmatrix} =$$

$$= \begin{vmatrix} 4 & 3 & 2 \\ -3 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \end{vmatrix} = - \begin{vmatrix} 1 & 0 & -1 \\ -3 & 2 & 0 \\ 4 & 3 & 2 \end{vmatrix} =$$

$$- \begin{vmatrix} 2-0 & 0-(+3) \\ 3-0 & 2-(-4) \end{vmatrix} = - \begin{vmatrix} 2 & -3 \\ 3 & 6 \end{vmatrix} =$$

$$-(12+9) = -21$$

c) $\begin{vmatrix} 0 & 1 & 3 & 0 \\ 3 & 5 & 1 & -1 \\ 1 & -4 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & 1 \end{vmatrix}$

39) c)

$$\begin{vmatrix} 0 & 1 & 3 & 0 \\ 3 & 5 & 1 & -1 \\ 1 & -4 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & 1 \end{vmatrix} = - \begin{vmatrix} 1 & 0 & 3 & 0 \\ 5 & 3 & 1 & -1 \\ -4 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 1 & 1 \end{vmatrix} =$$

$$= - \begin{vmatrix} 3-0 & 1-15 & -1-0 \\ 1-0 & 0-(-12) & 0-0 \\ 0-0 & 1-6 & 1-0 \end{vmatrix} =$$

$$= - \begin{vmatrix} 3 & -14 & -1 \\ 1 & +12 & 0 \\ 0 & -5 & 1 \end{vmatrix} \begin{matrix} 3 & -14 \\ 1 & +12 \\ 0 & -5 \end{matrix}$$

$0 \quad 0 \quad +14 \qquad +36 \quad 0 \quad +5$

$- [+14 +36 +5] =$

$- [45] = -45$

40 Calcule, usando Chió:

a) $\begin{vmatrix} 3 & 3 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ -1 & 0 & 2 \end{vmatrix}$

40A)

$$\begin{vmatrix} 3 & 3 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ -1 & 0 & 2 \end{vmatrix} = 3 \cdot \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 4 & 5 & 6 \\ -1 & 0 & 2 \end{vmatrix} =$$

$$= 3 \begin{vmatrix} 5-4 & 6-(+4) \\ 0-(-1) & 2-(-1) \end{vmatrix} = 3 \cdot \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 3 \end{vmatrix} =$$

$$= 3(3-2) = 3(1) = 3$$

b) $\begin{vmatrix} 5 & -3 & 2 & 0 \\ 0 & 2 & 4 & 6 \\ 2 & 4 & -2 & 8 \\ 2 & 0 & 3 & 0 \end{vmatrix}$

40 B) $\begin{vmatrix} 5 & -3 & 2 & 0 \\ 0 & 2 & 4 & 6 \\ 2 & 4 & -2 & 8 \\ 2 & 0 & 3 & 0 \end{vmatrix} \underset{\frac{L_2}{2},\ \frac{L_4}{2}}{\overset{L_1 \leftrightarrow L_3}{=}} -4 \begin{vmatrix} \cancel{1} & \cancel{2} & \cancel{-1} & \cancel{4} \\ \cancel{0} & 1 & 2 & 3 \\ \cancel{5} & -3 & 2 & 0 \\ \cancel{2} & 0 & 3 & 0 \end{vmatrix} =$

$= -4 \begin{vmatrix} 1-0 & 2-0 & 3-0 \\ -3-10 & 2-(-5) & 0-20 \\ 0-4 & 3-(-2) & 0-8 \end{vmatrix} =$

$= -4 \begin{vmatrix} \cancel{1} & \cancel{2} & \cancel{3} \\ \cancel{-13} & 7 & -20 \\ \cancel{-4} & 5 & -8 \end{vmatrix} = -4 \cdot \begin{vmatrix} 7-(-26) & -20-(-39) \\ 5-(-8) & -8-(-12) \end{vmatrix}$

$= -4 \cdot \begin{vmatrix} 33 & -19 \\ 13 & 4 \end{vmatrix} = -4\left[33 \cdot 4 - (-19) \cdot 13\right] =$

$= -4\left[132 + 247\right] = 4 \cdot 379 = 1516$

41 Mostre que $\begin{vmatrix} a & a & a & a \\ a & b & b & b \\ a & b & c & c \\ a & b & c & d \end{vmatrix} = a(b - a)\,(c - b)\,(d - c).$

41)

$$\begin{vmatrix} a & a & a & a \\ a & b & b & b \\ a & b & c & c \\ a & b & c & d \end{vmatrix} =$$

$$a\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ a & b & b & b \\ a & b & c & c \\ a & b & c & d \end{vmatrix} = a\begin{vmatrix} b-a & b-a & b-a \\ b-a & c-a & c-a \\ b-a & c-a & d-a \end{vmatrix}$$

$$a(b-a)\begin{vmatrix} 1 & b-a & b-a \\ 1 & c-a & c-a \\ 1 & c-a & d-a \end{vmatrix} =$$

$$a(b-a)\begin{vmatrix} c-\cancel{a}-b+\cancel{a} & c-\cancel{a}-b+\cancel{a} \\ c-\cancel{a}-b+\cancel{a} & d-\cancel{a}-b+\cancel{a} \end{vmatrix} =$$

$$a(b-a)\begin{vmatrix} c-b & c-b \\ c-b & d-b \end{vmatrix} =$$

$$a(b-a)(c-b)\begin{vmatrix} 1 & c-b \\ 1 & d-b \end{vmatrix}$$

$$a(b-a)(c-b)(d-\cancel{b}-c+\cancel{b})$$

$$\boxed{a(b-a)(c-b)(d-c)}$$

2.5 Processo de Triangularização

Dada uma matriz quadrada A, o processo consiste em aplicar operações elementares entre as linhas de uma matriz de modo a transformar a matriz A em uma triangular superior(inferior), ao mesmo tempo que se efetuarão com o $\det A$ as necessárias compensações, quando for o caso, para manter inalterado seu valor, tudo de acordo com as propriedades de determinante já vistas na seção anterior, propriedades (iii) e (iv).

Assim ao tratar com a triangularização, sabemos que os elementos da diagonal principal devem ser sempre iguais a 1, se isto não acontecer, 3 hipóteses podem ocorrer:

1) O pivô é igual a zero, nesse caso deve-se proceder á operação de troca de linhas e multiplicar o $\det A$ por -1, como compensação, isto é, para que $\det A$ conserve o seu valor.

2) O pivô é igual a k. Neste caso devem-se multiplicar todos os elementos da linha por $\frac{1}{k}$, com que se obtém o número 1 como pivô dessa linha. Por outro lado, para compensar, isto é, para que $\det A$ mantenha o seu valor, deve-se multiplica-lo pelo inverso de $\frac{1}{k}$, isto é, por k.

3) O pivô é igual a 1. Nesse caso, nada a fazer no que diz respeito a diagonal principal.

Exercício 2.3: Calcule o determinante da matriz $C=\begin{bmatrix} -2 & -3 & -1 & -2 \\ -1 & 0 & 1 & -2 \\ -3 & -1 & -4 & 1 \\ -2 & 2 & -3 & -1 \end{bmatrix}$ por triangularização.

$$\begin{vmatrix} -2 & -3 & -1 & -2 \\ -1 & 0 & 1 & -2 \\ -3 & -1 & -4 & 1 \\ 2 & 2 & -3 & -1 \end{vmatrix} \quad \begin{aligned} L_1 &= -\tfrac{1}{2} L_1 \\ L_3 &= \tfrac{1}{3} L_3 \\ L_4 &= -\tfrac{1}{2} L_4 \end{aligned}$$

$$\underbrace{-2(3)(-2)}_{+12} \begin{vmatrix} 1 & 3/2 & 1/2 & 1 \\ -1 & 0 & 1 & -2 \\ -1 & -1/3 & -4/3 & 1/3 \\ -1 & -1 & 3/2 & 1/2 \end{vmatrix} \quad \begin{aligned} L_2 &= L_2 + L_1 \\ &\longrightarrow \\ L_3 &= L_3 + L_1 \\ L_4 &= L_4 + L_1 \end{aligned}$$

$$+12 \begin{vmatrix} 1 & 3/2 & 1/2 & 1 \\ 0 & 3/2 & 3/2 & -1 \\ 0 & 7/6 & -5/6 & 4/3 \\ 0 & 1/2 & 2 & 3/2 \end{vmatrix} \quad \begin{aligned} L_2 &= \tfrac{2}{3} L_2 \\ &\longrightarrow \\ L_3 &= \tfrac{-6}{7} L_3 \\ L_4 &= -2 L_4 \end{aligned}$$

$$\underbrace{\cancel{12} \cdot \left(\frac{3}{2}\right)\left(-\frac{7}{\cancel{6}}\right)\left(-\frac{1}{\cancel{2}}\right)}_{+\frac{21}{2}} \begin{vmatrix} 1 & 3/2 & 1/2 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & -2/3 \\ 0 & -1 & 5/7 & -8/7 \\ 0 & -1 & -4 & -3 \end{vmatrix} \quad \begin{aligned} L_3 &= L_3 + L_2 \\ &\longrightarrow \\ L_4 &= L_4 + L_2 \end{aligned}$$

$$+\frac{21}{2} \begin{vmatrix} 1 & 3/2 & 1/2 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & -2/3 \\ 0 & 0 & 12/7 & -38/21 \\ 0 & 0 & -3 & -11/3 \end{vmatrix} \quad \begin{aligned} L_3 &= \tfrac{7}{12} L_3 \\ &\longrightarrow \\ L_4 &= \tfrac{1}{3} L_4 \end{aligned}$$

$$\frac{\cancel{21}^{3}}{\cancel{2}_{1}}\cdot\frac{\cancel{12}^{6}}{\cancel{7}_{1}}\cdot\frac{3}{1}\begin{vmatrix} 1 & 3/2 & 1/2 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & -2/3 \\ 0 & 0 & 1 & -19/18 \\ 0 & 0 & -1 & -11/9 \end{vmatrix} \xrightarrow{L_4 = L_4 + L_3}$$

$$54\cdot\begin{vmatrix} 1 & 3/2 & 1/2 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & -2/3 \\ 0 & 0 & 1 & -19/18 \\ 0 & 0 & 0 & 41/18 \end{vmatrix} \xrightarrow{L_4 = \frac{18}{41} L_4}$$

$$\cancel{54}^{3}\cdot\frac{41}{\cancel{18}_{1}}\cdot\begin{vmatrix} 1 & 3/2 & 1/2 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & -2/3 \\ 0 & 0 & 1 & -19/18 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} =$$

$\to 1$

$$\boxed{123}$$