Transformações lineares e matrizes

Já vimos alguns exemplos de transformações lineares representadas por matrizes. Veremos, nesta seção, a relação entre matrizes e transformações lineares e como as matrizes podem nos auxiliar no estudo dessas funções. Assim, poderemos também verificar que, uma vez fixadas as bases do domínio e do contradomínio de uma transformação linear, a matriz associada a essa transformação é única. Matrizes associadas a transformações lineares permitem calcular imagens de vetores usando multiplicação matricial – fundamental para calcular autovalores e autovetores.

$T: V \longrightarrow W$

$T: \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^m$

$v \longmapsto w$

$\beta = \{v_1, v_2, \dots, v_n\}$ = Base de V (Domínio)

$\beta' = \{w_1, w_2, \dots, w_m\}$ = ~~Base~~ Base de W (contra-dom).

$x_1, x_2, \dots, x_n, y_1, y_2, \dots y_m \in \mathbb{R}$.

Combinação linear de $v \in V$:

$V = x_1 v_1 + x_2 v_2 + \dots + x_n v_n$

Com imagem C.L. de β'

$T(V) = y_1 w_1 + y_2 w_2 + \dots + y_m w_m$

e podemos usar a MATRIZ CANONICA:

$T(v_1)_{\beta'} = a_{11} w_1 + a_{21} w_2 + \dots + a_{m1} w_m$

$T(v_2)_{\beta'} = a_{12} w_1 + a_{22} w_2 + \dots + a_{m2} w_m$

$\vdots$

(Note que é por colunas da matriz canonica)

$$\begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_m \end{bmatrix} = \underbrace{\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1N} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2N} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mN} \end{bmatrix}}_{\text{TRANSIÇÃO}} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_N \end{bmatrix}$$

matriz $\underline{T}$ em relação as bases β e β'

$\longrightarrow [T]^{\beta}_{\beta'}$

Observações:

1) Se $T : R^n \to R^m$ é uma transformação linear, supondo que a matriz $[T]_{\beta'}^{\beta}$ é de ordem $m \times n$.

2) As colunas da matriz $[T]_{\beta'}^{\beta}$ são as componentes das imagens dos vetores da base β em relação à base β'. Veja a seguinte representação:

$$[T]_{\beta'}^{\beta} = \begin{array}{c} \begin{array}{cccc} T(v_1)_{\beta'} & T(v_2)_{\beta'} & & T(v_n)_{\beta'} \\ \downarrow & \downarrow & & \downarrow \end{array} \\ \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix} \end{array}$$

3) Uma transformação linear poderá ser representada por uma infinidade de matrizes. Mas se for fixada uma base β do domínio e uma base β' do contradomínio, a matriz $[T]_{\beta'}^{\beta}$ é única. Portanto, a matriz $[T]_{\beta'}^{\beta}$ pode ser considerada como uma transformação linear $T : R^n \to R^m$ em relação às bases β e β' de R^n e R^m respectivamente.

4) Se β e β' são bases canônicas de R^n e R^m respectivamente, a matriz de notação [T] é a matriz canônica da transformação T, cuja dimensão é $(m \times n)$ – número de linhas igual à dimensão do contradomínio, e número de colunas igual à dimensão do contradomínio. Logo, a matriz canônica é dada pelos coeficientes dos elementos de cada termo da transformação linear.

Exemplos

3.25. Se $T_1 : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$, $T_1(x, y, z) = (2y + z, x - 4y, 3x)$

Determine a representação matricial de T_1 em relação à base canônica $\{1, 0, 0), (0, 1, 0), (0, 0, 1)\} \subset \mathbb{R}^3$.

Relembrando:

$$a(1,0,0) + b(0,1,0) + c(0,0,1) = (2y+z,\ x-4y,\ 3x)$$

$a = 2y + z$ | $b = x - 4y$ | $c = (3x)$

$a = 0x + 2y + 1z$ | $b = 1x - 4y + 0z$ | $c = 3x + 0y + 0z$

$$\therefore\ [T_1] = \begin{bmatrix} 0 & 2 & 1 \\ 1 & -4 & 0 \\ 3 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

ok, FECHOU AQUI!

Vamos ver como fica em outras bases:

Se $\beta = \{v_1, v_2, v_3\} = \{(1,1,1), (1,1,0), (1,0,0)\}$

e $\beta' = \{w_1, w_2, w_3\} = \{(1,-1,-2), (-1,1,-1), (0,1,1)\}$

Com o mesmo $T_1 : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$

$$(x,y,z) \mapsto (2y+z,\ x-4y,\ 3x)$$

Como $T_1 : R^3 \rightarrow R^3$, a matriz $[T]^{\beta}_{\beta'}$ tem a seguinte forma:

$$[T_1]^{\beta}_{\beta'} = \begin{array}{c} \begin{array}{ccc} T_1(v_1)_{\beta'} & T_1(v_2)_{\beta'} & T_1(v_2)_{\beta'} \\ \downarrow & \downarrow & \downarrow \end{array} \\ \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix} \end{array}$$

Sabemos que:

$$T(v_1)_{\beta'} = a_{1i}w_1 + a_{2i}w_2 + \ldots + a_{mi}w_m \text{ para todo } i = 1, 2, \ldots, n.$$

$T_1(x,y,z) = (2x+z,\ x-4y,\ 3x)$

$T_1(v_1)_{B'} = T(1,1,1)_{B'} = (3, -3, 3)$

$T_2(v_1)_{B'} = T(1,1,0)_{B'} = (2, -3, 3)$

$T_3(v_1)_{B'} = T(1,0,0)_{B'} = (2, 1, 3)$

Fazer C.L. de C_1 com $T_1(v_1)$

C_2 com $T_1(v_2)$

C_3 com $T_1(v_3)$

Calcular cada resultado para definir a matriz $[T]^{B}_{B'}$

Fazer C.L. de $C_1 = \begin{pmatrix} a_{11} \\ a_{21} \\ a_{31} \end{pmatrix}$ e B'; $T_1(V_1)_{B'}$

$T_1(V_1)_{B'} = T_1(1,1,1) = (3,-3,3)$

$a_{11}(1,-1,-2) + a_{21}(-1,1,-1) + a_{31}(0,1,2) = (3,-3,3)$

$$\begin{array}{c} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & | & 3 \\ -1 & 1 & 1 & | & -3 \\ -2 & -1 & 2 & | & 3 \end{pmatrix} \\ \begin{array}{cccc} a_{11} & a_{21} & a_{31} & | \; R \end{array} \end{array} \xrightarrow[L_3 = L_3 + 2L_1]{L_2 = L_2 + L_1} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & | & 3 \\ 0 & 0 & 1 & | & 0 \\ 0 & -3 & 2 & | & 9 \end{pmatrix}$$

L_2: $\boxed{a_{31} = 0}$; L_3: $-3a_{21} + \underbrace{\cancel{2a_{31}}}_{0} = 9$; L_1: $a_{11} - \underbrace{\cancel{a_{21}}}_{0} = 3$

$\boxed{a_{21} = -3}$ $\qquad \boxed{a_{11} = 3}$

(esta questã tem um erro no material completo)

Fazer C.L. de $C_2 = \begin{pmatrix} a_{12} \\ a_{22} \\ a_{32} \end{pmatrix}$ com $T_1(V_2)_{B'}$

$T_1(V_2)_{B'} = T(1,1,1) = (2,-3,3)$

$a_{12}(1,-1,-2) + a_{22}(-1,+1,-1) + a_{32}(0,1,2) = (2,-3,3)$

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & | & 2 \\ -1 & +1 & 1 & | & -3 \\ -2 & -1 & 2 & | & 3 \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{array}{c} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & -3 & 2 & 7 \end{pmatrix} \\ \begin{array}{cccc} a_{12} & a_{22} & a_{32} & R \end{array} \end{array}$$

$\boxed{a_{32} = -1}$; $-3a_{22} + 2a_{32} = 7$; $-3a_{22} - 2 = 7$; $\boxed{a_{22} = -5/7}$

$\left\{ \begin{array}{l} a_{12} - a_{22} = 2 \\ a_{12} + 5/7 = 2 \\ \boxed{a_{12} = 9/7} \end{array} \right.$

Agora, C.L. de $C_3 = \begin{pmatrix} a_{13} \\ a_{23} \\ a_{33} \end{pmatrix}$ com $T_1(v_3)_{B'}$

$$T_1(v_3)_{B'} = (2,1,3) = T(1,0,0)$$

$$a_{13}(1,-1,-2) + a_{23}(-1,1,-1) + a_{33}(0,1,2) = (2,1,3)$$

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & 2 \\ -1 & 1 & 1 & 1 \\ -2 & -1 & 2 & 3 \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{array}{c} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \\ 0 & -3 & 2 & 7 \end{pmatrix} \\ \begin{array}{cccc} a_{13} & a_{23} & a_{33} & R \end{array} \end{array}$$

$$\boxed{a_{33} = 3} \quad \left| \quad \begin{aligned} -3a_{23} + 2a_{33} &= 7 \\ -3a_{23} + 6 &= 7 \\ \boxed{a_{23} = -1/3} \end{aligned} \right\} \quad \begin{aligned} a_{13} - a_{23} &= 2 \\ a_{13} + 1/3 &= 2 \\ \boxed{a_{13} = 3/2} \end{aligned}$$

$$\therefore \left[T_1\right]_{B'}^{B} = \begin{array}{c} \begin{pmatrix} 3 & 9/7 & 3/2 \\ -3 & -5/7 & -1/3 \\ 0 & -1 & 3 \end{pmatrix} \\ \begin{array}{ccc} \uparrow & \uparrow & \uparrow \\ T_1(v_1)_{B'} & T_1(v_2)_{B'} & T_1(v_3)_{B'} \end{array} \end{array}$$

3.26. Determine a matriz $[T]^{\beta}_{\beta'}$ que representa a transformação linear $T : R^2 \to R^3$, $T(x, y) = (x, 9y - 10x, 3y - 4x)$, se:

$\beta' = \{(0, 3, 0), (-1, 0, 0), (0, 1, 1)\}$

$\beta = \{(1, 1), (0, 1)\}$

$T_1(v_1)_{B'} = T(1,1) = (1,-1,-1)$

C.L. de $T(1,1)$ com $C_1 = (a_{11}, a_{21}, a_{31})$

$a_{11}(0,3,0) + a_{21}(-1,0,0) + a_{31}(0,1,1) = (1,-1,-1)$

$-a_{21} = 1 \quad 3a_{11} + a_{31} = -1 \quad \boxed{a_{31} = -1}$

$\boxed{a_{21} = -1} \quad 3a_{11} - 1 = -1$

$\boxed{a_{11} = 0}$

C.L. de $T(v_2)$ com C_2 $\quad T(0,1) = (0,9,3)$

$a_{12}(0,3,0) + a_{22}(-1,0,0) + a_{32}(0,1,1) = (0,9,3)$

$-a_{22} = 0 \quad 3a_{12} + a_{32} = 9 \quad \boxed{a_{32} = 3}$

$\boxed{a_{22} = 0} \quad 3a_{12} + 3 = 9$

$\boxed{a_{12} = 2}$

Como $T: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$

em $[T]^B_{B'}$ é de ordem 3×2

Logo; $[T]^B_{B'} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{pmatrix}_{3\times 2}$

$[T]^B_{B'} = \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ -1 & 0 \\ -1 & 3 \end{pmatrix}$

3.27. Dadas as bases $\beta = \{(1, 1, 1), (1, 1, 0), (1, 0, 0)\}$ e $\beta' = \{(1, 3), (1, 4)\}$, determine a transformação linear $T : R^3 \to R^2$ cuja matriz é:

$$[T]_{\beta'}^{\beta} = \begin{bmatrix} 3 & 11 & 5 \\ -1 & -8 & -3 \end{bmatrix}$$

$$[T]_{\beta'}^{\beta} = \begin{pmatrix} 3 & 11 & 5 \\ -1 & -8 & -3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \end{pmatrix}_{2 \times 3}$$

$T(v_1) = a_{11}w_1 + a_{21}w_2$

$T(1,1,1) = a_{11}w_1 + a_{21}w_2$

$T(1,1,1) = 3(1,3) - 1(+1,4) = (2,5)$

$\boxed{T(1,1,1) = (2,5)}$

$\cancel{T(1,1,0)}$ $T(v_2) = a_{12}w_1 + a_{22}w_2$

$T(1,1,0) = 11(1,3) + (-8)(+1,4)$

$\boxed{T(1,1,0) = (3,1)}$

$T(v_3) = a_{13}w_1 + a_{23}w_2$

$T(1,0,0) = 5(1,3) - 3(1,4)$

$\boxed{T(1,0,0) = (2,3)}$

DEFINIR $T(x,y,z) \Rightarrow$ Fazer C.L. de β com (x,y,z)

$$aV_1 + bV_2 + cV_3 = (x,y,z)$$

$$a(1,1,1) + b(1,1,0) + c(1,0,0) = (x,y,z)$$

$a+b+c=x$	$a+b=y$	$a=z$
$\cancel{z}+y-\cancel{z}+c=x$	$z+b=y$	
$c=x-y$	$b=y-z$	

$$\therefore (x,y,z) = z(1,1,1) + (y-z)(1,1,0) + (x-y)(1,0,0)$$

Distribuir T

$$T(x,y,z) = z\underbrace{T(1,1,1)}_{(2,5)} + (y-z)\underbrace{T(1,1,0)}_{(3,1)} + (x-y)\underbrace{T(1,0,0)}_{(2,3)}$$

$$T(x,y,z) = z(2,5) + (y-z)(3,1) + (x-y)(2,3)$$

$$T(x,y,z) = (2z + 3y - 3z + 2x - 2y,\ 5z + y - z + 3x - 3y)$$

$$T(x,y,z) = (2x + y - z,\ 3x - 2y + 4z)$$

Teorema 3.4: sejam V e W espaços vetoriais, com bases respectivamente β e β' e $T : V \rightarrow W$ uma transformação linear. Então, $\forall\ v \in V$, temos:

$$[T(v)]_{\beta'} = [T]^{\beta}_{\beta'} \cdot [v]_{\beta}$$

Ou seja, qualquer transformação linear pode ser escrita através do produto da matriz da transformação linear em relação às bases β e β' pelo vetor v em relação à base β.

E, assim, a matriz $[T]^{\beta}_{\beta'}$ pode ser utilizada para calcular a imagem de um vetor $v \in V$ por T em relação à base β.

Operações com transformações lineares

1. Adição

Dadas duas transformações lineares $T_1 : V \rightarrow W$ e $T_2 : V \rightarrow W$. A transformação linear soma de T_1 e T_2 é dada por:

$$\begin{aligned} (T_1 + T_2) : V &\rightarrow W \\ v &\mapsto (T_1 + T_2)(v) = T_1(v) + T_2(v) \end{aligned}$$

Se β e β' são bases dos espaços vetoriais V e W respectivamente. Devido ao teorema 3.4, essa operação pode ser realizada também pelas matrizes associadas a essas transformações lineares, ou seja:

$$[T_1 + T_2]^{\beta}_{\beta'} = [T_1]^{\beta}_{\beta'} + [T_2]^{\beta}_{\beta'}$$

2. Multiplicação por escalar

O produto de uma transformação linear $T : V \rightarrow W$ por um escalar $\alpha \in R$ é uma transformação linear αT:

$$
\begin{aligned}
(\alpha T) : V &\rightarrow W \\
v &\mapsto (\alpha T)(v) = \alpha T(v)
\end{aligned}
$$

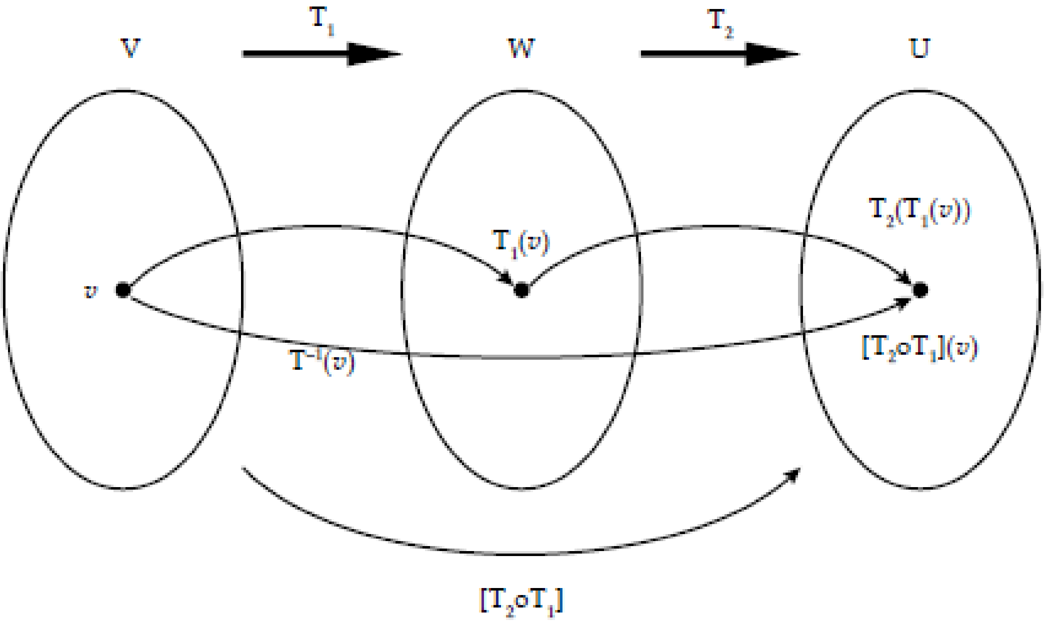
Se β é uma base de V e β', uma base de W, essa operação pode ser realizada também pelas matrizes associadas a essas transformações lineares, ou seja:

$$[\alpha T]_{\beta'}^{\beta} = \alpha [T]_{\beta'}^{\beta}$$

3. Composição

Dadas duas transformações lineares $T_1 : V \to W$ e $T_2 : W \to U$, chamamos transformação composta de T_1 por T_2 e denotamos por $T_2 o T_1$ a transformação:

$$(T_2 o T_1) : V \to W$$
$$v \mapsto (T_2 o T_2)(v) = T_2(T_1(v))$$



Supondo β, β' e β'' bases dos espaços vetoriais V, W e U, respectivamente, temos que:

$$[T_2 o T_1]^{\beta}_{\beta''} = [T_2]^{\beta'}_{\beta''} \times [T_1]^{\beta}_{\beta'}$$

Em outras palavras: a matriz $[T_2 o T_1]^{\beta}_{\beta''}$, que representa a transformação linear composta de T_1 por T_2, em relação às bases β e β'', é dada pelo produto das matrizes $[T_1]^{\beta}_{\beta'}$, associada à transformação linear T_1 em relação às bases β e β', pela a matriz$[T_2]^{\beta'}_{\beta''}$, associada à transformação linear em relação às bases β' e β''.

Observação:

- Somente é possível determinar $[T_2 o T_1]$ se o contradomínio de T_1 for igual ao domínio de T_2. Observe que, se $[T_2 o T_1]$ existir, então o domínio dessa função é igual ao domínio de T_1; já seu contradomínio é igual ao contradomínio de T_2.

- A composição de transformações lineares nem sempre é comutativa. Essa afirmação decorre do produto de matrizes. Como a composição de duas transformações pode ser obtida pelo produto de duas matrizes, e o produto de matrizes nem sempre é comutativo, então concluímos que não podemos garantir a comutatividade de composição de transformações lineares.

3.28. Dadas as transformações lineares $T_1 : R^2 \to R^3$ e $T_2 : R^2 \to R^3$ definidas por:

$$T_1(x, y) = (5x - 3y, -y, 2x + y) \text{ e } T_2(x, y) = (2y, 2x + y, -x),$$

determine as seguintes transformações lineares:

a) $T_1 + T_2$

b) $2T_1$

c) $2T_1 + 3T_2$

a) $T_1 + T_2$: Você pode determinar essa nova transformação de duas formas, (I) somando as transformações ou (II) somando as matrizes canônicas associadas a elas, isto é:

I. Somando as transformações

$$\begin{aligned}(T_1 + T_2)(x, y) &= T_1(x, y) + T_2(x, y)\\ &= (5x - 3y, -y, 2x + y) + (2y, 2x + y, -x)\\ &= (5x - y, 2x, x + y)\end{aligned}$$

II. Somando as matrizes canônicas associadas às transformações T_1 e T_2

$$[T_1] = \begin{bmatrix} 5 & -3 \\ 0 & -1 \\ 2 & 1 \end{bmatrix} \quad \text{e} \quad [T_2] = \begin{bmatrix} 0 & 2 \\ 2 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}$$

veja que

$$[T_1]+[T_2] = \begin{bmatrix} 5 & -3 \\ 0 & -1 \\ 2 & 1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 2 \\ 2 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 & -1 \\ 2 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$$

ou ainda:

$$(T_1 + T_2)(x, y) = (5x - y, 2x, x + y)$$

b) Para determinar $2T_1$, também podemos proceder de duas formas:

I.

$$\begin{aligned}(2T_1)(x, y) &= 2(T_1(x, y)) \\ &= 2(5x - 3y, -y, 2x + y) \\ &= (10x - 6y, -2y, 4x + 2y)\end{aligned}$$

II.

$$2[T_1] = 2\begin{bmatrix} 5 & -3 \\ 0 & -1 \\ 2 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 10 & -6 \\ 0 & -2 \\ 4 & 2 \end{bmatrix}$$

que representa a mesma transformação encontrada em (I).

c) Analogamente, para $2T_1 + 3T_2$:

I.

$$
\begin{aligned}
(2T_1 + 3T_2)(x, y) &= 2T_1(x, y) + 3T_2(x, y) \\
&= (10x - 6y, -2y, 4x + 2y) + (6y, 6x + 3y, -3x) \\
&= (10x - 12y, 6x - 5y, 7x + 2y)
\end{aligned}
$$

II.

$$
2[T_1] - 3[T_2] = 2\begin{bmatrix} 5 & -3 \\ 0 & -1 \\ 2 & 1 \end{bmatrix} - 3\begin{bmatrix} 0 & 2 \\ 2 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 10 & -12 \\ -6 & -5 \\ 7 & 2 \end{bmatrix}
$$

3.29. Dados os operadores lineares $T_1 : R^2 \to R^2$ e $T_2 : R^2 \to R^2$, definidos por:

$T_1(x, y) = (2x - y, 2y)$ e $T_2(x, y) = (x + 3y, -y)$,

determine as seguintes transformações lineares:

a) $T_1 o T_2$

a) $T_1 o T_2$

I. Pela definição de composição de funções:

$$
\begin{aligned}
(T_1 o T_2)(x, y) &= T_1(T_2(x, y)) \\
&= T_1(x + 3y, -y) \\
&= (2(x + 3y) - (-y), (-(2y)) \\
&= (2x + 7y, -2y)
\end{aligned}
$$

II. Utilizando matrizes canônicas:

$$(T_1 o T_2) = [T_1] \times [T_2] = \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 7 \\ 0 & -2 \end{bmatrix}$$

Logo:

$$(T_1 o T_2)(x, y) = (2x + 7y, -2y)$$

b) $T_2 o T_1$

I. Pela definição de composição de funções:

$$
\begin{aligned}
(T_2 o T_1)(x, y) &= T_2(T_1(x, y)) \\
&= T_2(2x - y, 2y) \\
&= (1(2x - y) + 3(2y), (2(-y)) \\
&= (2x + 5y, -2y)
\end{aligned}
$$

II. Utilizando matrizes canônicas:

$$(T_2 o T_1) = [T_2] \times [T_1] = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 5 \\ 0 & -2 \end{bmatrix}$$

Logo:

$$(T_2 o T_1)(x, y) = (2x + 5y, -2y)$$

$$(T_1 o T_2)(x, y) \neq (T_2 o T_1)(x, y)$$

AGORA, ESTUDE AS QUESTÕES DE 11 A 14 DO MATERIAL COMPLETO, QUE ESTÃO AO FINAL DO MATRIAL CCOMPLETO COM RESOLUÇÕES DEPOIS.