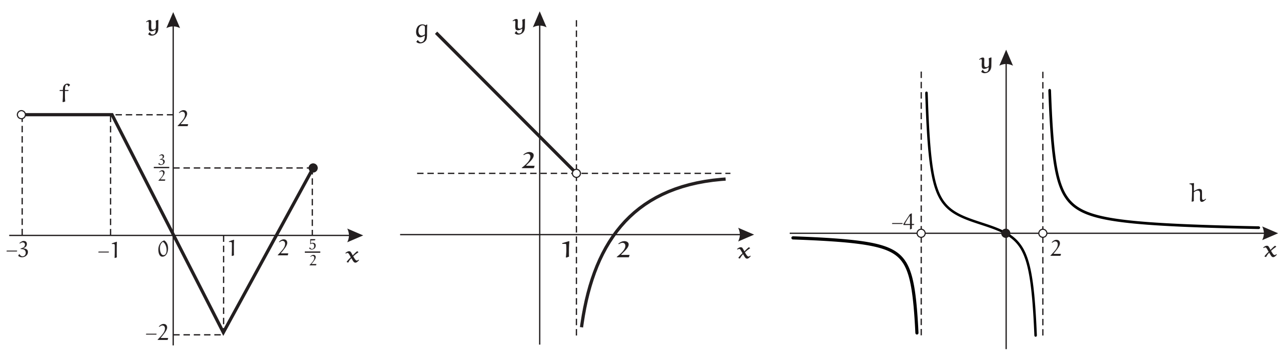
INSTITUTO FEDERAL
Catarinense
Campus Blumenau

Assunto: Funções e suas propriedades
Professor: Fabricio Alves Oliveira

Essa lista deverá ser entregue resolvida no dia da primeira prova.

(**1**) A figura abaixo mostra o gráfico de três funções f, g e h.



(i) Determine, para cada uma das funções:
  (a) O domínio;
  (b) A imagem;
  (c) As raízes;
  (d) Os intervalos em que a função é positiva e os intervalos em que a função é negativa;
  (e) Os intervalos em que a função é crescente, decrescente ou constante.

(ii) Determine, caso estejam definidos, os valores de $f(-3), f(-1), f(0)$ e $f\left(\frac{5}{2}\right)$.

(iii) Determine, caso estejam definidos, os valores de $g(1)$ e $g(2)$.

(iv) Determine, caso estejam definidos, os valores de $h(-4), h(0)$ e $h(2)$.

(v) O que ocorre com o valor de $g(x)$ quando x é muito pequeno? E quando o valor de x é muito grande?

(vi) O que ocorre com o valor de $g(x)$ quando x se aproxima de 1?

(**2**) Considere a função real $f(x) = \frac{x+2}{x^2+1}$. Determine:

(a) $f(0)$ (b) $f(-1)$ (c) $f(2)$ (d) $f(2a)$ (e) $f(x^2+1)$ (f) $f(a+2b)$

(**3**) Determine o domínio das seguintes funções:

(a) $f(x) = 4x^4 - 2x^3 + 2$ (b) $f(x) = \dfrac{4}{x-1}$ (c) $f(x) = \dfrac{x}{x+2}$ (d) $f(x) = \sqrt{x-2}$

(e) $f(x) = \sqrt[3]{x^2 - x}$ (f) $f(x) = \dfrac{3x+1}{\sqrt{x-3}}$ (g) $f(x) = \dfrac{\sqrt{x+1}}{x}$ (h) $f(x) = \dfrac{3x-4}{x^2+6}$

(i) $f(x) = \dfrac{2}{x^3+4x}$ (j) $f(x) = \sqrt{x-1} + \sqrt{3-x}$ (k) $f(x) = \sqrt{1-\sqrt{x}}$ (l) $f(x) = \sqrt{x^2+5}$

(**4**) Considere a função $f : \mathbb{R} - \{2\} \to \mathbb{R}$, definida por $f(x) = 5 + \frac{3}{x+2}$. Determine:

(a) $f(-5)$
(b) $f(1)$
(c) O elemento do domínio cuja imagem é igual a -1.

(**5**) Seja f uma função definida por $f(x) = \frac{x+a}{4x+b}$, sendo a e b constantes reais. Sabendo que $f(0) = -3$ e $f(1) = \frac{4}{3}$, determine:

(a) Os valores de a e b;
(b) O domínio da função;
(c) O elemento do domínio cuja imagem vale $-\frac{2}{5}$.

(**6**) Determine o "maior"conjunto domínio $D(f)$ de modo que $Im(f) \subset D(g)$. Em seguida determine a função composta $g \circ f$ nos seguintes casos:

(a) $f(x) = x + 3$ e $g(x) = \dfrac{2}{x+2}$ (b) $f(x) = x^2$ e $g(x) = \sqrt{x-1}$

(**7**) Nas funções reais f e g, definidas por $f(x) = x^2 + 2$ e $g(x) = x - 3$, obtenha as leis que definem:

(a) $f \circ g$ (b) $g \circ f$ (c) $f \circ f$ (d) $g \circ g$

(**8**) (a) Considere as funções $f(x) = 3x - 5$ e $(f \circ g)(x) = x^2 - 3$. Determine a lei da função g.

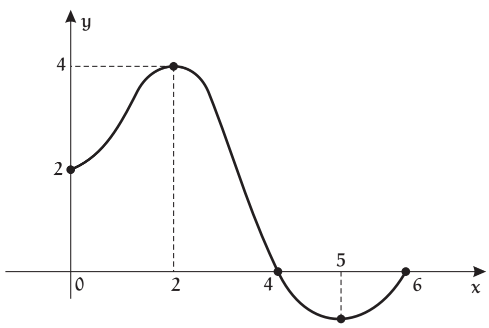
(b) Considere as funções $g(x) = 3x - 2$ e $(f \circ g)(x) = 9x^2 - 3x + 1$. Determine a lei da função f.

(**9**) Considere uma função que tem a propriedade $f(x+1) = 2f(x)+1$, para todo $x \in \mathbb{R}$. Sabendo que $f(1) = -5$, calcule:

(a) $f(0)$
(b) $f(2)$
(c) $f(4)$

(**10**) Para um número real fixo α, a função $f(x) = \alpha x - 2$ é tal que $f(f(1)) = -3$. Determine o valor de α.

(**11**) Considere o gráfico da função $f : [0, 6] \to \mathbb{R}$ representado abaixo.



Com base nesse gráfico, marque para as alternativas a seguir (**V**) Verdadeira ou (**F**) Falsa e justifique as falsas.
(   ) f é decrescente no intervalo $[2, 6]$.
(   ) O conjunto dos números $x \in [0, 6]$ tais que $f(x) \leq 0$ é o intervalo $[4, 6]$.
(   ) $(f \circ f \circ f)(2) = 2$.
(   ) O número real $1 + \sqrt{2}$ pertence ao conjunto imagem da função f.

(**12**) Determine, em cada caso, se a função é par, ímpar ou nenhuma das duas.

(a) $f(x) = 2x^4 - 3x^2 + 1$ (b) $f(x) = 5x^3 - 7x$ (c) $f(x) = |x|$ (d) $f(x) = \frac{x-3}{x^2+1}$

(**13**) Demonstre que se f e g são funções ímpares, então:

(a) $(f+g)$ e $(f-g)$ são também funções ímpares;
(b) $f \cdot g$ e $\frac{f}{g}$ são funções pares.

(**14**) Determine se cada função abaixo é injetora, sobrejetora, bijetora ou nenhuma delas.

(a) $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definida por $f(x) = 2x + 1$

(b) $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definida por $g(x) = x^2 - 9$

(c) $h : \mathbb{R} \to \mathbb{R}_+$ definida por $h(x) = |x - 1|$

(d) $s : \mathbb{R} - \{0\} \to \mathbb{R}$ definida por $s(x) = \dfrac{1}{x}$

(**15**) Os conjuntos A e B têm, respectivamente, m e n elementos. Considera-se uma função $f : A \to B$. Qual a condição sobre m e n para que f possa ser injetora? E para f ser sobrejetora? E bijetora?

(**16**) Prove que as funções abaixo são bijetoras e obtenha a função inversa. Em seguida represente o gráfico da função e da sua inversa em um mesmo plano cartesiano. (Utilize o *GeoGebra* para conferir os esboços dos gráficos.)

(a) $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, f(x) = 6x - 3$

(b) $q : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, q(x) = \dfrac{4x-1}{5}$

(c) $r : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, r(x) = \sqrt[3]{2x+4}$

(d) $p : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, p(x) = (x-4)^3 + 6$

(e) $g : \mathbb{R} - \{-1\} \to \mathbb{R} - \{2\}, g(x) = \dfrac{2x+3}{x+1}$

(f) $s : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}_+, s(x) = \sqrt{x}$

(**17**) A lei seguinte mostra a relação entre a projeção do valor (v), em reais, de um equipamento eletrônico e o seu tempo de uso (t), em anos:

$$v(t) = 1800\left(1 - \frac{t}{20}\right).$$

(a) Qual o valor desse equipamento novo?

(b) Qual é a desvalorização, em reais, do equipamento no seu primeiro ano de uso?

(c) Com quantos anos de uso o aparelho estará valendo R\$1260,00?

(**18**) Um terreno no formato de um triângulo retângulo isósceles será cercado. A cerca usada para cercar os lados adjacentes ao ângulo reto custam R\$20,00 o metro. Já a cerca usada para cercar o terceiro lado custa R\$50,00 o metro. Expresse o custo total da cerca em função do comprimento deste terceiro lado do terreno.

(**19**) Uma livraria consegue vender 300 livros de um determinado autor a R\$40,00 cada. Para cada R\$1,00 a mais no preço unitário há uma queda de 5 unidades na quantidade de livros vendida. Expresse o valor total vendido em função do número de reais a mais no preço original de cada livro.

(**20**) Uma lata cilíndrica deve ter um volume de 24π cm^3. O preço do material usado para o fundo e a tampa da lata é 3 centavos por centímetro quadrado e o preço do material usado para o lado é 2 centavos por centímetro quadrado. Expresse o custo do material necessário para construir uma lata em função do raio.

Respostas

(1)

(i)

Função f:
(a) $\left]-3, \frac{5}{2}\right]$
(b) $[-2, 2]$
(c) $x = 0$ e $x = 2$
(d) positiva: $]-3, 0[$ ou $\left]2, \frac{5}{2}\right]$
negativa: $]0, 2[$
(e) crescente: $\left[1, \frac{5}{2}\right]$
decrescente: $[-1, 1]$
constante: $]-3, -1]$

Função g:
(a) $\mathbb{R} - \{1\}$
(b) $\mathbb{R} - \{2\}$
(c) $x = 2$
(d) positiva: $]-\infty, 1[$ ou $]2, +\infty[$
negativa: $]1, 2[$
(e) crescente: $]1, +\infty[$
decrescente: $]-\infty, 1[$
constante: não possui

Função h:
(a) $\mathbb{R} - \{-4, 2\}$
(b) $\mathbb{R}$
(c) $x = 0$
(d) positiva: $]-4, 0[,]2, +\infty[$
negativa: $]-\infty, -4[,]0, 2[$
(e) crescente: não possui
decrescente: em todo seu domínio
constante: não possui

(ii) $f(-3) = \nexists, f(-1) = 2, f(0) = 0, f(\frac{5}{2}) = \frac{3}{2}$

(iii) $g(1) = \nexists, g(2) = 0$

(iv) $h(-4) = \nexists, h(0) = 0, h(2) = \nexists$

(v) Quando o valor de x é muito pequeno, o valor de $g(x)$ tende a $+\infty$.
Quando o valor de x é muito grande, o valor de $g(x)$ se aproxima de 2.

(vi) Quando x se aproxima de 1 por valores menores que 1, $g(x)$ se aproxima de 2.
Quando x se aproxima de 1 por valores maiores que 1, $g(x)$ tende a $-\infty$.

(2)

(a) 2 (b) $\frac{1}{2}$ (c) $\frac{4}{5}$ (d) $\frac{2a+2}{4a^2+1}$ (e) $\frac{x^2+3}{x^4+2x^2+2}$ (f) $\frac{a+2b+2}{a^2+4b^2+4ab+1}$

(3)

(a) $\mathbb{R}$
(b) $\{x \in \mathbb{R} \mid x \neq 1\}$
(c) $\{x \in \mathbb{R} \mid x \neq -2\}$
(d) $\{x \in \mathbb{R} \mid x \geq 2\}$
(e) $\mathbb{R}$
(f) $\{x \in \mathbb{R} \mid x > 3\}$
(g) $\{x \in \mathbb{R} \mid x \geq -1 \text{ e } x \neq 0\}$
(h) $\mathbb{R}$
(i) $\{x \in \mathbb{R} \mid x \neq 0\}$
(j) $\{x \in \mathbb{R} \mid 1 \leq x \leq 3\}$
(k) $\{x \in \mathbb{R} \mid 0 \leq x \leq 1\}$
(l) $\mathbb{R}$

(4) (a) 4 (b) 6 (c) $-\frac{5}{2}$

(5)
(a) $a = 3$ e $b = -1$
(b) $\{x \in \mathbb{R} \mid x \neq \frac{1}{4}\}$
(c) -1

(6)

(a) $D(f) = \{x \in \mathbb{R} \mid x \neq -5\}$ e $(g \circ f)(x) = \frac{2}{x+5}$

(b) $D(f) = \{x \in \mathbb{R} \mid x \leq -1$ ou $x \geq 1\}$ e $(g \circ f)(x) = \sqrt{x^2 - 1}$

(7) (a) $x^2 - 6x + 11$ (b) $x^2 - 1$ (c) $x^4 + 4x^2 + 6$ (d) $x - 6$

(8) (a) $g(x) = \frac{x^2+2}{3}$

(b) $f(x) = x^2 + 3x + 3$

(9) (a) -3 (b) -9 (c) -33

(10) 1

(11) F-V-V-V

(12)
(a) Par (b) Ímpar (c) Par (d) Não é par e não é ímpar

(14)

(a) bijetora
(b) nenhuma delas
(c) sobrejetora
(d) injetora

(15) injetora: $m \leq n$, sobrejetora: $m \geq n$, bijetora: $m = n$

(16)

(a) $f^{-1}(x) = \frac{x+3}{6}$
(b) $q^{-1}(x) = \frac{5x+1}{4}$
(c) $r^{-1}(x) = \frac{x^3}{2} - 2$
(d) $p^{-1}(x) = \sqrt[3]{x-6} + 4$
(e) $g^{-1}(x) = \frac{-x+3}{x-2}$
(f) $s^{-1}(x) = x^2$

(17) (a) 1800 reais (b) 90 reais (c) 6 anos

(18) $c(x) = (20\sqrt{2} + 50)x$

(19) $v(x) = -5x^2 + 100x + 12000$

(20) $c(r) = \frac{6\pi(r^3+16)}{r}$