Combinação linear (ou combinação de vetores)

Exemplo ①

$V = \mathbb{R}^3 \quad u = (-1, 5, 3) \quad v = (2, -3, 3)$

Calcule $2u - 7v = w$

$w = 2u - 7v = 2 \cdot (-1, 5, 3) - 7(2, -3, 3)$

$w = (-2, 10, 6) + (-14, +21, -21)$

$w = (-16, 31, -15)$

w é Combinação linear (C.L) de u e v pois w foi obtido da soma de múltiplos de u e v.

2.13. Verifique se o vetor $v = (10, 2, -1)$ é combinação linear dos vetores $v_1 = (1, -2, 1)$ e $v_2 = (3, 3, 2)$.

Se v for (C.L) de v_1 e v_2; então

$v = a v_1 + b v_2$, com $a, b \in \mathbb{R}$

$v = a v_1 + b v_2$

$(10, 2, -1) = a(1, -2, 1) + b(3, 3, 2)$

ou

$$\begin{pmatrix} 10 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix} = a \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix} + b \begin{pmatrix} 3 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix}$$

$$\begin{cases} a + 3b = 10 \\ -2a + 3b = 2 \\ a + 2b = -1 \end{cases} \qquad \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 3 & 10 \\ -2 & 3 & 2 \\ 1 & 2 & -1 \end{array}\right) \xrightarrow[L_3 = L_3 - L_1]{L_2 = L_2 + 2L_1}$$

$$\left(\begin{array}{cc|c} 1 & 3 & 10 \\ 0 & 9 & 22 \\ 0 & 1 & -11 \end{array}\right) \xrightarrow{L_3 = 9L_3 - L_2} \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 3 & 10 \\ 0 & 9 & 22 \\ 0 & 0 & -77 \end{array}\right)$$

$0 = -77$

S.I.

Não há solução,

$\therefore$ V NÃO é C.L de V_1 e V_2

De maneira geral, define-se a combinação linear de vetores como:

Seja V um espaço vetorial e sejam $v_1, v_2, \ldots, v_n \in V$ e $a_1, a_2, \ldots, a_n \in \mathbb{R}$. Qualquer vetor $v \in V$[2], da forma $v = a_1v_1 + a_2v_2 + \ldots + a_nv_n$, é uma combinação linear dos vetores $v_1, v_2, \ldots, v_n$.

2.14. Mostre que o vetor $v = (0, 7, 11)$ é combinação linear dos vetores $v_1 = (1, 4, 5)$ e $v_2 = (2, 1, -1)$.

$V = aV_1 + bV_2$

$$\begin{pmatrix} 0 \\ 7 \\ 11 \end{pmatrix} = a\begin{pmatrix} 1 \\ 4 \\ 5 \end{pmatrix} + b\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{cases} a + 2b = 0 \\ 4a + b = 7 \\ 5a - b = 11 \end{cases} \longrightarrow$$

$$\left(\begin{array}{cc|c} 1 & 2 & 0 \\ 4 & 1 & 7 \\ 5 & -1 & 11 \end{array}\right) \xrightarrow[L_3 = L_3 - 5L_1]{L_2 = L_2 - 4L_1} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & -7 & 7 \\ 0 & -11 & 11 \end{pmatrix} \xrightarrow[L_3 = -\frac{1}{11}L_3]{L_1 = -\frac{1}{7}L_2}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix} \xrightarrow{L_3 = L_3 - L_2} \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ \cancel{0} & \cancel{0} & \cancel{0} \end{array}\right) \xrightarrow{L_1 = L_1 - 2L_2}$$

$$\left(\begin{array}{cc|c} 1 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & -1 \end{array}\right) \longrightarrow \begin{matrix} a = -2 \\ b = -1 \end{matrix} \qquad \begin{pmatrix} a = -2 \\ b = -1 \end{pmatrix}$$

$\therefore V = 2V_1 + (-1)V_2$

$V = 2V_1 - V_2$

V é C.L. de V_1 e V_2.

2.15. Mostre que o vetor $v = (-1, 2, 3)$, pode ser escrito de infinitas maneiras como combinação linear dos vetores $v_1 = (1, 0, 0)$, $v_2 = (0, 1, 0)$, $v_3 = (0, 0, 1)$ e $v_4 = (1, 1, -1)$.

$$V = aV_1 + bV_2 + cV_3 + dV_4$$

$$\begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} = a\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + b\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + c\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + d\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{cases} a+d=-1 \\ b+d=2 \\ c-d=3 \end{cases}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c|c} 1 & 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 3 \end{array}\right) \xrightarrow[L_2 = L_2 + L_3]{L_1 = L_1 + L_3}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 5 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 3 \end{pmatrix} \quad \begin{array}{l} a=2 \\ b=5 \\ c-d=3 \end{array}$$

S.P.I. infinitas soluções.

$d = \lambda$ $\quad c-d=3$

$c = d+3$

$c = \lambda+3$

$\therefore (a, b, c, d) = (2, 5, \lambda+3, \lambda)$ $\quad \lambda \in \mathbb{R}$

$\therefore$ V pode se escrito como

$$\boxed{V = 2V_1 + 5V_2 + (\lambda+3)V_3 + \lambda V_4}$$ com $\lambda \in \mathbb{R}$.

ou seja, infinitas formas

Por exemplo

$\lambda=0$; $V = 2V_1 + 5V_2 + 3V_3$

$\lambda=1$; $V = 2V_1 + 5V_2 + 4V_3 + V_4$

$\lambda=-3$; $V = 2V_1 + 5V_2 - 3V_4$

$\lambda=-7$; $V = 2V_1 + 5V_2 - 4V_3 - 7V_4$

$\vdots$

Perceba pelos exemplos anteriormente citados que, quando queremos verificar se um dado vetor v é combinação de um conjunto de vetores v_1, v_2, ..., v_n, basta verificar a compatibilidade do sistema:

a) incompatível – não há combinação;
b) compatível e determinado – uma única maneira de combinar;
c) compatível e indeterminado – infinitas maneiras de combinar.

2.16. Sejam os vetores $u = (-1, 3, -1)$ e $v = (1, -2, 4)$. Encontre o valor de k, para que o vetor $w = (k, -13, 11)$ seja combinação linear de u e v.

$w = au + bv$

$$\begin{pmatrix} k \\ -13 \\ 11 \end{pmatrix} = a\begin{pmatrix} -1 \\ 3 \\ -1 \end{pmatrix} + b\begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 4 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{cases} -a + b = k \\ 3a - 2b = -13 \\ -a + 4b = 11 \end{cases}$$

$$\left(\begin{array}{cc|c} -1 & 1 & k \\ 3 & -2 & -13 \\ -1 & 4 & 11 \end{array}\right) \xrightarrow[\substack{L_2 = L_2 + 3L_1 \\ L_3 = L_3 - L_1}]{L_1 = -L_1} \left(\begin{array}{cc|c} 1 & -1 & -k \\ 0 & 1 & -13+3k \\ 0 & 3 & 11-k \end{array}\right) \xrightarrow{L_3 = L_3 - 3L_2}$$

$L_3 - 3L_2$

$(11-k) - 3(-13+3k)$

$11 - k + 39 - 9k$

$-10k + 50$

$$\left(\begin{array}{cc|c} 1 & -1 & -k \\ 0 & 1 & -13+3k \\ 0 & 0 & -10k+50 \end{array}\right)$$

$-10k + 50 = 0$

$-10k = -50$

$\boxed{k = +5}$

Se $k = 5$

$-10k + 50 =$

$-10(5) + 50$

$-50 + 50$

0

$$\left(\begin{array}{cc|c} 1 & -1 & -5 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \xrightarrow{L_1 = L_1 + L_2} \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 0 & -3 \\ 0 & 1 & 2 \end{array}\right) \rightarrow \begin{array}{l} a = -3 \\ b = 2 \end{array}$$

Se $k = 5$

então $w = -3a + 2b$

2.17. Que condições devem satisfazer x, y e z para que o vetor (x, y, z) seja combinação linear dos vetores $u = (-1, 3, -1)$ e $v = (1, -2, 4)$?

$W = (x, y, z)$ $\qquad W = a u + b V$

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = a\begin{pmatrix} -1 \\ 3 \\ -1 \end{pmatrix} + b\begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 4 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{cases} -a + b = x \\ 3a - 2b = y \\ -a + 4b = z \end{cases}$$

$$\left[\begin{array}{cc|c} -1 & 1 & x \\ 3 & -2 & y \\ -1 & 4 & z \end{array}\right] \xrightarrow[L_3 = L_3 - L_1]{L_1 = -L_1,\ L_2 = L_2 + 3L_1} \left[\begin{array}{cc|c} 1 & -1 & -x \\ 0 & 1 & 3x+y \\ 0 & 3 & -x+z \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow[L_3 = L_3 - 3L_2]{L_1 = L_1 - L_2} \left[\begin{array}{cc|c} 1 & 0 & -4x+y \\ 0 & 1 & 3x+y \\ 0 & 0 & -10x-3y+z \end{array}\right]$$

$-10x - 3y + z = 0 \rightarrow$ Pois w é C.L. de

$z = 10x + 3y$ $\qquad \lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}$

$z = 10\lambda_1 + 3\lambda_2$, $x = \lambda_1$, $y = \lambda_2$;

$$\boxed{\therefore\ W = (\lambda_1, \lambda_2, 10\lambda_1 + 3\lambda_2)\ \forall \lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}}$$

ainda, $a = -4x + y$ e $b = 3x + y$

$a = -4\lambda_1 + \lambda_2$ $\qquad b = 3\lambda_1 + \lambda_2$

ainda: Temos soluções particulares

se $\lambda_1 = \lambda_2 = 1$; $W = (1, 1, 13)$

se $\lambda_1 = 2$ e $\lambda_2 = 3$, $W = (2, 3, 29)$

5) Sejam os vetores $v_1 = (-3, 4, 5)$ e $v_2 = (1, 2, -1)$.

a) Escreva o vetor $w = (-13, -6, 17)$ como combinação dos vetores v_1 e v_2.

$W = au + bV$

$$\begin{pmatrix} -13 \\ -6 \\ 17 \end{pmatrix} = a\begin{pmatrix} -3 \\ 4 \\ 5 \end{pmatrix} + b\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{cases} -3a + b = -13 \\ 4a + 2b = -6 \\ 5a - b = 17 \end{cases} \rightarrow$$

$$\begin{array}{ccc} \begin{pmatrix} -3 & 1 & -13 \\ 4 & 2 & -6 \\ 5 & -1 & 17 \end{pmatrix} \\ \;a \quad\; b \end{array} \xrightarrow[(a \leftrightarrow b)]{C_1 \leftrightarrow C_2} \begin{array}{c} \begin{pmatrix} 1 & -3 & -13 \\ 2 & 4 & -6 \\ -1 & 5 & 17 \end{pmatrix} \\ b \quad\; a \end{array} \xrightarrow[L_3 = L_3 + L_1]{L_2 = L_2 - 2L_1}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & -3 & -13 \\ 0 & 10 & 20 \\ 0 & 2 & 4 \end{pmatrix} \xrightarrow[L_3 = 5L_3 - L_2]{L_2 = \frac{1}{10}L_2} \begin{pmatrix} 1 & -3 & -13 \\ 0 & 1 & 2 \\ \cancel{0} & \cancel{0} & \cancel{0} \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow{L_1 = L_1 + 3L_2} \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 0 & -7 \\ 0 & 1 & 2 \end{array}\right) \rightarrow \begin{array}{l} b = -7 \\ a = 2 \end{array}$$

$$\therefore W = 2u + (-7)V$$

$$\boxed{\begin{pmatrix} -13 \\ -6 \\ 17 \end{pmatrix} = 2\begin{pmatrix} -3 \\ 4 \\ 5 \end{pmatrix} - 7\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}}$$

5) Sejam os vetores $v_1 = (-3, 4, 5)$ e $v_2 = (1, 2, -1)$.

b) Para que valor dê k, o vetor $(k, 0, -7)$ é combinação dos vetores v_1 e v_2.

$$\begin{pmatrix} k \\ 0 \\ -7 \end{pmatrix} = a\begin{pmatrix} -3 \\ 4 \\ 5 \end{pmatrix} + b\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{array}{cc} b & a & \\ \end{array}$$

$$\left(\begin{array}{cc|c} 1 & -3 & k \\ 2 & 4 & 0 \\ -1 & 5 & -7 \end{array}\right) \xrightarrow[L_3 = L_3 + L_1]{L_2 = L_2 - 2L_1} \begin{pmatrix} 1 & -3 & k \\ 0 & 10 & -2k \\ 0 & 2 & -7+k \end{pmatrix} \xrightarrow[L_2 = \frac{1}{2} L_2]{\substack{L_3 = -5L_3 + L_2 \\ \cancel{L_3 = L_3 - 5L_2}}}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & -3 & k \\ 0 & 5 & -k \\ 0 & 0 & -7k+35 \end{pmatrix} \xrightarrow[L_2 = \frac{1}{5} L_2]{L_1 = L_1 + \frac{3}{5} L_2}$$

$-5L_3 + L_2 =$
$-5(-7+k) + (-2k)$
$+35 - 5k - 2k$
$+35 - 7k$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & \frac{2}{5}k \\ 0 & 1 & -\frac{1}{5}k \\ 0 & 0 & -7k+35 \end{pmatrix}$$

Para ser C.L. o S.L. tem que ser Possivel.

$0 = 0$

$\therefore -7k + 35 = 0$

$-7k = -35$

$\boxed{k = +5}$

$a = -\frac{1}{5}k$ e $b = \frac{2}{5}k$

$\boxed{a = -1}$ $\boxed{b = 2}$

Para $k = 5$, $(k, 0, -7)$ é C.L. de V_1 e V_2.

De fato;

$$\begin{pmatrix} 5 \\ 0 \\ -7 \end{pmatrix} = -\begin{pmatrix} -3 \\ 4 \\ 5 \end{pmatrix} + 2\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}$$

$\boxed{\text{Resposta: } k = +5}$

6) Escreva o vetor (2, 5, 9, 17) $\in R^4$ como combinação dos vetores $a = (1, 1, 1, 1)$, $b = (0, -1, 1, 0)$ e $c = (0, 0, 2, 3)$.

$$\begin{pmatrix} 2 \\ 5 \\ 9 \\ 17 \end{pmatrix} = a \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + b \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + c \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$$

$$\begin{cases} a = 2 & (1) \\ a - b = 5 & (2) \\ a + b + 2c = 9 & (3) \\ a + 3c = 17 & (4) \end{cases}$$

(1) $\boxed{a = 2}$

(2)
$a - b = 5$
$2 - b = 5$
$b = -3$

(4)
$a + 3c = 17$
$2 + 3c = 17$
$3c = 15$
$c = 5$

(3)
CONFERIR SE FECHA NA (3)
$a + b + 2c =$
$2 - 3 + 10 = 9$
ok!

$\therefore$

$$\boxed{\begin{pmatrix} 2 \\ 5 \\ 9 \\ 17 \end{pmatrix} = 2 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} - 3 \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + 5 \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}}$$

OBS

Todo vetor $\vec{v} \in \mathbb{R}^n$ é C.L. de sua base Canônica.

ex: $\mathbb{R}^2$

$(3,4) \in \mathbb{R}^2$

$(3,4) = 3\hat{i} + 4\hat{j} = 3(1,0) + 4(0,1)$

ex $\mathbb{R}^3$

$(-7, \frac{1}{2}, \pi) = -7\hat{i} + \frac{1}{2}\hat{j} + \pi\hat{k}$

$= -7\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix} + \frac{1}{2}\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix} + \pi\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}$

$\mathbb{R}^4$ $(-10, e, \sqrt{2}, -\frac{1}{5}) =$

$-10\hat{i} + e\hat{j} + \sqrt{2}\hat{k} - \frac{1}{5}\hat{l} =$

$-10\begin{pmatrix}1\\0\\0\\0\end{pmatrix} + e\begin{pmatrix}0\\1\\0\\0\end{pmatrix} + \sqrt{2}\begin{pmatrix}0\\0\\1\\0\end{pmatrix} - \frac{1}{5}\begin{pmatrix}0\\0\\0\\1\end{pmatrix}$

Obs 2; o determinante é nulo se uma linha for C.L. de outras linhas.

Seção 4 – Subespaço gerado

Nesta seção, você estudará um subespaço vetorial especial, que é o subespaço das combinações lineares de um conjunto de vetores pertencentes a um espaço vetorial V, o qual é chamado de subespaço gerado. Então, mãos à obra!

Sejam $v_1, v_2, \ldots, v_n$ vetores pertencentes a um espaço vetorial V. Denotemos por A o conjunto cujos elementos são os vetores anteriormente citados, ou seja, $A = \{v_1, v_2, \ldots, v_n\}$, onde $A \neq \emptyset$. Agora tome o conjunto W composto de todas as combinações lineares dos vetores de A, ou seja:

$$W = \{v \in V;\ v = a_1v_1 + a_2v_2 + \ldots + a_nv_n;\ a_i \in \mathbb{R}\}$$

Teorema 2.2: O conjunto W definido anteriormente é um subespaço vetorial.

De fato, seja $u \in W$ e $v \in W$. Devemos mostrar que $u + v \in W$ $\alpha \cdot u \in W$.

a) Como $u \in W$, segue pela propriedade do conjunto que u é combinação dos vetores de A, isto é,

$$u = a_1v_1 + a_2v_2 + \ldots + a_nv_n.$$

Do mesmo modo como $v \in W$, segue que

$$v = b_1v_1 + b_2v_2 + \ldots + b_nv_n.$$

Então,

$$u + v = a_1v_1 + a_2v_2 + \ldots + a_nv_n + b_1v_1 + b_2v_2 + \ldots + b_nv_n$$
$$= (a_1 + b_1)v_1 + (a_2 + b_2)v_2 + \ldots + (a_n + b_n)v_n$$

Chamamos de $c_i = a_i + b_i$, em que $i = 1, 2, \ldots, n$, assim,

$$u + v = c_1v_1 + c_2v_2 + \ldots + c_nv_n$$

Portanto, $u + v \in W$, pois é uma combinação linear de $v_1, v_2, \ldots, v_n$.

b) Analogamente, temos:

$$\alpha \cdot u = \alpha \cdot (a_1v_1 + a_2v_2 + \ldots + a_nv_n)$$
$$= (\alpha a_1) \cdot v_1 + (\alpha a_2) \cdot v_2 + \ldots + (\alpha a_n) \cdot v_n$$

Chamamos de $d_i = \alpha a_i$, em que $i = 1, 2, \ldots, n$, assim,

$$\alpha \cdot u = d_1v_1 + d_2v_2 + \ldots + d_nv_n$$

Portanto, $\alpha \cdot u \in W$, pois é uma combinação linear de $v_1, v_2, \ldots, v_n$.

Logo, W é um subespaço vetorial.

O conjunto W é dito gerado pelos vetores $v_1, v_2, \ldots, v_n$, ou gerado pelo conjunto A, e representamos por W = G(A) (subespaço gerado por A). Assim, os vetores $v_1, v_2, \ldots, v_n$ são chamados de geradores do subespaço W e A é chamado de conjunto gerador de W.

Observação 2.6: o conjunto vazio gera apenas o zero, ou seja, $[\varnothing] = \{0\}$. E todo conjunto A de vetores que está contido em V gera um subespaço vetorial de V em alguns casos, pode ocorrer que G(A) = V.

Um bom exemplo de subespaço gerado é o exemplo 2.17

RECORDANDO:

2.17. Que condições devem satisfazer x, y e z para que o vetor (x, y, z) seja combinação linear dos vetores $u = (-1, 3, -1)$ e $v = (1, -2, 4)$?

VIMOS QUE:

$\therefore\ W = (\lambda_1, \lambda_2, 10\lambda_1 + 3\lambda_2)\ \forall \lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}$

Então, $W = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \,/\, (x, y, z) = (\lambda_1, \lambda_2, 10\lambda_1 + 3\lambda_2)\ \forall \lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}\}$

é um subsespaço vetorial gerado pelos vetores u e v, ou seja,

$W = [(-1, 3, -1), (1, -2, 4)]$

2.18. Mostre que V = R^2 é gerado pelos vetores $e_1 = (1,0)$ e $e_2 = (0,1)$.

Fazer C.L. de $(x,y) \in \mathbb{R}$ com e_1 e e_2
e isolar $a, b, c, d, \ldots$

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = a\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + b\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{cases} x = a \\ y = b \end{cases} \Rightarrow \begin{matrix} a = x \\ b = y \end{matrix} \quad \therefore (x,y) = (a,b)$$

ou seja, tomando $x=a$ e $y=b$ reais,
R^2 é C.L. de e_1 e e_2.
ou seja; $\mathbb{R}^2 = [e_1, e_2]$
(ou $\mathbb{R}^2 = [\hat{i}, \hat{j}]$

2.19. Verifique se os vetores $u = (1, 1)$ e $v = (2, 0)$ geram $V = \mathbb{R}^2$.

Fazer C.L. de $(x,y) \in \mathbb{R}^2$ com u e v e isolar a e b.

$$(x,y) = au + bv$$

$$(x,y) = a(1,1) + b(2,0)$$

$$\begin{cases} a + 2b = x \\ a = y \end{cases} \qquad \begin{aligned} a + 2b &= x \\ y + 2b &= x \\ 2b &= x - y \\ b &= \frac{x-y}{2} \end{aligned}$$

$\therefore$ QQ vetor $(x,y) \in \mathbb{R}^2$ é C.L. de u e v, basta tomar $a = y$ e $b = \frac{x-y}{2}$

ou seja; $\mathbb{R}^2 = [\underbrace{(1,1)}_{u}, \underbrace{(2,0)}_{v}]$

2.20. Verifique se o conjunto $A = \{(1, 0), (0,1), (2, -3)\}$ gera $V = R^2$.

$$(x,y) = a(1,0) + b(0,1) + c(2,-3)$$

$$\begin{cases} a + 2c = x \\ b - 3c = y \end{cases} \qquad \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & x \\ 0 & 1 & -3 & y \end{pmatrix}$$

SPI; infinitas soluções

$c = \lambda$; $a + 2c = x$ $b - 3c = y$

$a + 2\lambda = x$ $b = y + 3\lambda$

$a = x - 2\lambda$

$\therefore$ tomando $a = x - 2\lambda$ e $b = y + 3\lambda$, $\lambda \in \mathbb{R}$

$\mathbb{R}^2$ é C.L. de $\vec{i}, \vec{j}, (2,-3)$

ou seja, $\mathbb{R}^2 = [\vec{i}, \vec{j}, (2,-3)]$

É possível gerar o R^2 com dois vetores?

Há necessidade de gerá-lo usando três, quatro ou mais vetores ainda?

Na verdade, não há necessidade. Veremos, no próximo resultado que existe um número mínimo de vetores a serem tomados para gerar um determinado espaço.

Teorema 2.3: S

RESUMIDAMENTE, TEMOS.

Um E.V. V é gerado por no mínimo n vetores se $V = R^n$.

Um E.V. vetorial é gerado por menos vetores.

Se acrescentarmos vetores a um espaço, continuamos gerando o mesmo espaço.

Como exemplo, tome o espaço R^2. Estudamos, nos exemplos anteriores, que este conjunto pode ser gerado por dois vetores, ou três vetores, pelo teorema 2.3. Na verdade, ele pode ser gerado por uma infinidade de vetores, mas sabemos que existe um número mínimo que, neste caso, é dois.

2.21. Seja $V = R^2$. Qual o subespaço gerado pelo vetor $u = (1, 2)$?

$(x,y) \in \mathbb{R}^2 \qquad u = (1,2)$

$(x,y) = a(1,2) = (a, 2a)$

$\therefore \; x = a$

$y = 2a$

$[u] = \{(x,y) \in \mathbb{R} \,/\, y = 2x\}$

ou seja, $[u]$ é um W de $\mathbb{R}^2$, reta em $\mathbb{R}^2$.

2.22. Mostre que os vetores $u = (1, 0, 0)$, $v = (1, 1, 0)$ e $w = (1, 1, 1)$ geram $V = \mathbb{R}^3$.

$(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$

Fazer C.L. de (x, y, z) com u, v e w

Isolar a, b, c em função de x, y e z

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = a\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + b\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + c\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$a + b + c = x \quad \{ \quad b + c = y \quad \} \quad z = c$

$a = x - b - c \leftarrow b = y - c \leftarrow c = z$

$a = x - y + \cancel{z} - \cancel{z} \qquad b = y - z$

$a = x - y$

$\therefore \mathbb{R}^3$ é C.L. de u, v e w, basta tomar $(x, y, z) \in \mathbb{R}$ e $a = x - y$, $b = y - z$ e $c = z$

Então, u, v e w geram $\mathbb{R}^3$.

De fato:

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = (x-y)\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + (y-z)\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + z\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$x = (x-y)1 + (y-z)1 + z1 \quad \{ \quad y = (y-z)1 + z1$

$x = x - \cancel{y} + \cancel{y} - \cancel{z} + \cancel{z} \qquad y = y - \cancel{z} + \cancel{z}$

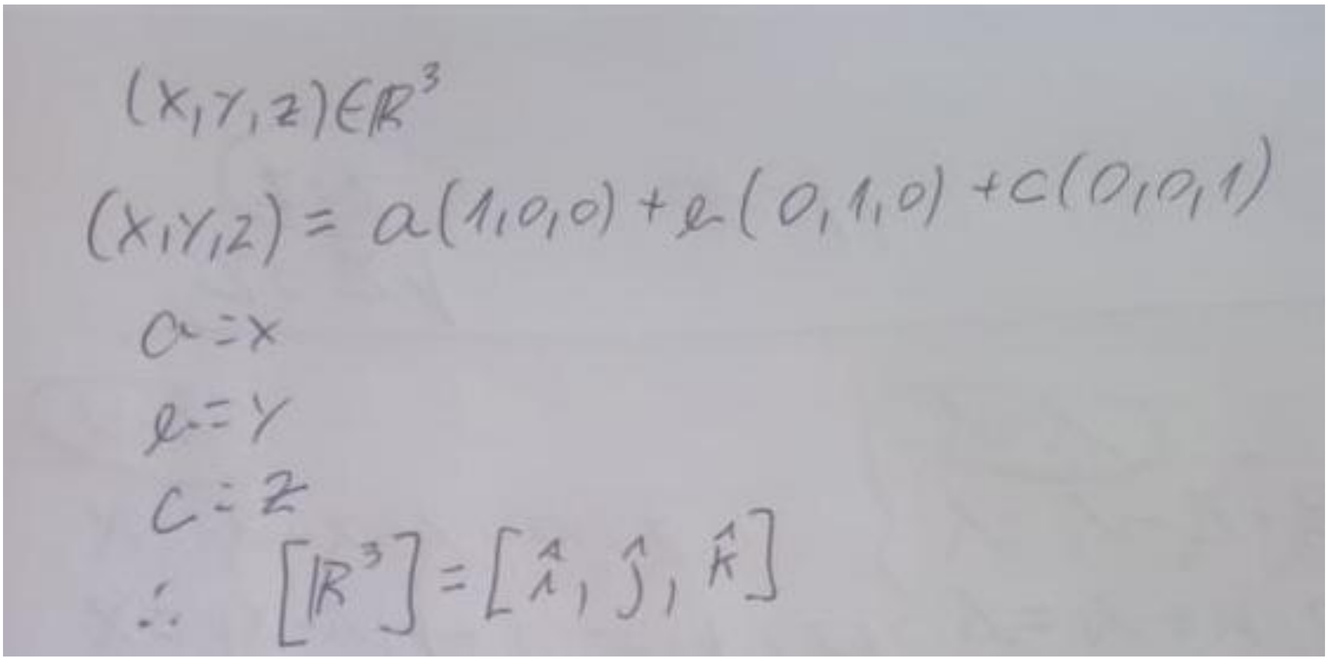
$x = x \qquad y = y$

$z = z1$

$z = z$

ok!!!

2.23. Os vetores $i = (1, 0, 0)$, $j = (0, 1, 0)$ e $k = (0, 0, 1)$ geram o R^3.



$(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$

$(x, y, z) = a(1,0,0) + b(0,1,0) + c(0,0,1)$

$a = x$

$b = y$

$c = z$

$\therefore \quad [\mathbb{R}^3] = [\hat{i}, \hat{j}, \hat{k}]$

Observação 2.7: observe que, quando trabalhamos com um conjunto de vetores do R^2, estes vetores podem gerar o próprio R^2 ou uma reta que passa pela origem. Já quando temos um conjunto de vetores do R^3, estes vetores podem gerar o próprio R^3, ou um plano que passa pela origem ou uma reta no espaço que passa pela origem. Em R^n, para $n > 3$, não temos mais a noção geométrica.

7) Seja

$$W = \left\{ \begin{bmatrix} a+b & 2a & 2a \\ a-b & -c & c \\ b & 0 & b \end{bmatrix}, a, b, c \in \mathbb{R} \right\} \qquad \text{a) } \begin{bmatrix} 7 & 4 & 4 \\ -3 & 1 & -1 \\ 5 & 0 & 5 \end{bmatrix} \in W?$$

$a_{11})$ $a+b=7$
$2+5=7$
ok!

$a_{12})$ $2a=4$
$a=2$

a_{13} $2a=4$
$a=2$

a_{21} $a-b=-3$
$a-5=-3$
$a=-3+5$
$a=+2$

$a_{22})$ $-c=1$
$c=-1$

a_{23} $c=-1$
$c=-1$

a_{31} $b=5$
$b=5$

a_{32} $0=0$

a_{33} $b=5$
$b=5$

$$\therefore \begin{pmatrix} 7 & 4 & 4 \\ -3 & 1 & -1 \\ 5 & 0 & 5 \end{pmatrix} \in W$$

Basta tomar: $(a, b, c) = (2, 5, -1)$

7) Seja

$$W = \left\{ \begin{bmatrix} a+b & 2a & 2a \\ a-b & -c & c \\ b & 0 & b \end{bmatrix}, a, b, c \in \mathbb{R} \right\}$$

b) $\begin{bmatrix} 2 & 2 & 2 \\ 0 & 3 & -3 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \in W$?

b) a_{11}

$a+b=2$
$1+b=2$
$b=1$

a_{12}

$2a=2$
$a=1$

a_{13}

$2a=2$
$a=1$
OK

a_{21}

$a-b=0$
$1-1=0$
OK

a_{22}

$-c=3$
$c=-3$

a_{23}

$c=-3$
OK

a_{31}

$b=1$

a_{32}

$0=1$
NÃO!

$\therefore \begin{pmatrix} 2 & 2 & 2 \\ 0 & 3 & -3 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \notin W$

Pois não há equivalencia em a_{32} $0=1$?

8) Encontre o subespaço gerado pelos conjuntos a seguir:

a) A = {(1, –4)}

$(x,y) \in \mathbb{R}^2$

$(x,y) = a(1, -4)$

$a = x \qquad y = -4a$

$-4a = y \qquad y = -4x$

$\therefore [u] = \{(x,y) \in \mathbb{R} / y = -4x\}$

ou seja, retas que passam por (0,0)

b) A = {(1, –1), (2, 3)}

$(x,y) \in \mathbb{R}^2$

$(x,y) = a(1,-1) + b(2,3)$

$$\begin{cases} a + 2b = x \\ -a + 3b = y \end{cases} \quad +$$

$5b = x + y$

$b = \dfrac{x+y}{5}$

$a + 2b = x$

$a = x - 2b$

$a = x - 2\left(\dfrac{x+y}{5}\right)$

$a = x - \frac{2}{5}x - \frac{2}{5}y$

$a = \frac{3}{5}x - \frac{2}{5}y$

$a = \dfrac{3x - 2y}{5}$

$\therefore (x,y) \in \mathbb{R}^2$ pode sel escrito como o

basta formar

C.L. de $(1,-1)$ e $(2,3)$,

$a = \dfrac{3x-2y}{5}$ e $b = \dfrac{x+y}{5}$,

$\therefore \mathbb{R}^2 = [(1,-1), (2,3)]$.

c) A = {(1, 5, 1), (2, 1, –1)}

$(x,y,z) \in \mathbb{R}^3$

$(x,y,z) = a(1,5,1) + b(2,1,-1)$

$$\begin{cases} a+2b=x \\ 5a+b=y \\ a-b=z \end{cases} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 2 & x \\ 5 & 1 & y \\ 1 & -1 & z \end{pmatrix} \xrightarrow[L_3=L_3-L_1]{L_2=L_2-5L_1}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & x \\ 0 & -9 & -5x+y \\ 0 & -3 & -y+z \end{pmatrix} \xrightarrow[L_2=-L_2]{L_3=3L_3-L_2} \begin{pmatrix} 1 & 2 & x \\ 0 & 9 & 5x-y \\ 0 & 0 & 2x-y+3z \end{pmatrix}$$

$3L_3 - L_2$

$3(-x+z)-(-5x+y)$

$-3x+3z+5x-y$

$2x-y+3z$

Para ser C.L. o S.L. de ser SP (neste caso SPI)

$\therefore$ temos que ter

$2x-y+3z=0$

$\therefore \quad G(A) = \{(x,y,z)\in\mathbb{R} \mid 2x-y+3z=0\}$

ou seja, comparando com o plano $\pi: ax+by+cz+d=0$, percebemos que são planos que passam por $(0,0,0)$, pois $d=0$ e tem $\vec{n}=(2,-1,3)$.

d) A = {(1, –1, 2, 2), (–2, 2, 3, 3)}

$(x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4$

$(x, y, z, t) = a(1, -1, 2, 2) + a(-2, 2, 3, 3)$

$$\left(\begin{array}{cc|c} 1 & -2 & x \\ -1 & 2 & y \\ 2 & 3 & z \\ 2 & 3 & t \end{array}\right) \xrightarrow[L_4 = L_4 - L_3]{L_2 = L_2 + L_1} \begin{pmatrix} 1 & -2 & x \\ 0 & 0 & x+y \\ 2 & 3 & z \\ 0 & 0 & -z+t \end{pmatrix} \xrightarrow[L_3 \leftrightarrow L_2]{L_3 = L_3 - 2L_1}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & -2 & x \\ 0 & 7 & -2x+z \\ 0 & 0 & x+y \\ 0 & 0 & -z+t \end{pmatrix}$$

queremos que seja C.L., portanto o S.L. deve ser possível.

$$\therefore \begin{cases} x+y=0 \\ -z+t=0 \end{cases} \Rightarrow x+y = -z+t$$

MAS, $x=-y$ e $-z=-t$

$z=t$

então

$x+y = -z+t$

$-y+y = -z-z$

$0=0$

ok!

Basta fazer $y=-x$ e $z=t$

$G(A) = \{(x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4 / \ y=-x \wedge z=t\}$

ou $G(A) = \{(x, -x, z, z) / \ x, z \in \mathbb{R}\}$

9) Sejam os vetores $u = (1, 1, 0)$, $v = (0, -1, 1)$ e $w = (1, 1, 1)$.
Verifique se $[u, v, w] = \mathbb{R}^3$.

$(x,y,z) \in \mathbb{R}^3$ $\quad$ $(x,y,z) = au + bv + cw$

$(x,y,z) = a(1,1,0) + b(0,-1,1) + c(1,1,1)$

$$\begin{cases} a + c = x \\ a - b + c = y \\ b + c = z \end{cases} \Rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 1 & x \\ 1 & -1 & 1 & y \\ 0 & 1 & 1 & z \end{array}\right) \xrightarrow{L_2 = L_2 - L_1}$$

$$\left(\begin{array}{cccc} 1 & 0 & 1 & x \\ 0 & -1 & 0 & -x+y \\ 0 & 1 & 1 & z \end{array}\right) \xrightarrow[L_2 = -L_2]{L_3 = L_3 + L_2} \left(\begin{array}{cccc} 1 & 0 & 1 & x \\ 0 & 1 & 0 & x-y \\ 0 & 0 & 1 & -x+y+z \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow{L_1 = L_1 - L_3} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 2x-y-z \\ 0 & 1 & 0 & x-y \\ 0 & 0 & 1 & -x+y+z \end{array}\right)$$

$$\begin{cases} a = 2x - y - z \\ b = x - y \\ c = -x + y + z \end{cases}$$

$\therefore$ QQ $(x,y,z) \in \mathbb{R}$ é C.L. de u, v e w, basta tomar $(a,b,c) = (2x-y-z,\ x-y,\ -x+y+z)$

$\therefore [u,v,w] = \mathbb{R}^3$.

10) Seja A = {(1, 2, 3, 1), (1, –1, 0, 0), (0, 0, 0, 1)}.

a) encontre G(A).

b) encontre o valor de *k*, para que (1, *k*, 3, 4, –1) ∈ G(A).

$(x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4$

$(x, y, z, t) = a(1,2,3,1) + b(1,-1,0,0) + c(0,0,0,1)$

$$\begin{array}{c} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 0 & x \\ 2 & -1 & 0 & y \\ 3 & 0 & 0 & z \\ 1 & 0 & 1 & t \end{array}\right) \\ \begin{array}{ccc} a & b & c \end{array} \end{array} \xrightarrow[a \leftrightarrow b]{C_1 \leftrightarrow C_2} \begin{array}{c} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & x \\ -1 & 2 & 0 & y \\ 0 & 3 & 0 & z \\ 0 & 1 & 1 & t \end{pmatrix} \\ \begin{array}{ccc} b & a & c \end{array} \end{array} \xrightarrow[L_4 = 3L_4 - L_3]{L_2 = L_1 + L_1}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & X \\ 0 & 3 & 0 & X+Y \\ 0 & 3 & 0 & Z \\ 0 & 0 & 3 & -Z+3t \end{pmatrix} \xrightarrow{L_3 = L_3 - L_2}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & X \\ 0 & 3 & 0 & X+Y \\ 0 & 0 & 0 & -X-Y+Z \\ 0 & 0 & 3 & -Z+3t \end{pmatrix} \xrightarrow[L_4 = \frac{1}{3}L_4]{L_1 = 3L_1 - L_2}$$

$$\begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 & 2X-Y \\ 0 & 3 & 0 & X+Y \\ 0 & 0 & 0 & -X-Y+Z \\ 0 & 0 & 3 & -Z+3t \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & X - \frac{1}{2}Y \\ 0 & 1 & 0 & \frac{X+Y}{3} \\ 0 & 0 & 1 & -\frac{1}{3}Z + t \\ 0 & 0 & 0 & -X-Y+Z \end{pmatrix}$$

$-x-y+z=0 \longrightarrow$ ou $x+y-z=0$

$-x=y-z$

$\boxed{x=z-y}$

$G(A)=\{(x,y,z,t)\in\mathbb{R}^4 / x+y-z=0\}$

obs: $t\in\mathbb{R}$, pode ser qq. valor.

e-) ~~$(1,k,3,4,-1)\in GA.$~~

Tem erro no enunciado,
era para ser $(1,k,4,-1)\in G.A.$

do item (a) segue:

$x+y-z=0$ e $t\in\mathbb{R}$

$1+k-4=0$

$\boxed{k=3}$