Desafio

a) Se **A** é ortogonal, $A^{-1} = A^t$;
temos: $A \cdot A^{-1} = I_3 \Rightarrow A \cdot A^t = I_3 \Rightarrow$

$$\Rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} \\ x & y & z \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 & x \\ 0 & \frac{\sqrt{2}}{2} & y \\ 0 & \frac{\sqrt{2}}{2} & z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & x \\ 0 & \frac{1}{2} + \frac{1}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2}(y + z) \\ x & \frac{\sqrt{2}}{2}(y + z) & x^2 + y^2 + z^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{cases} x = 0 & 1 \\ \frac{\sqrt{2}}{2}(y + z) = 0 \Rightarrow y = -z & 2 \\ x^2 + y^2 + z^2 = 1 & 3 \end{cases}$$

Substituindo 1 e 2 em 3, temos:

$0^2 + (-z)^2 + z^2 = 1 \Rightarrow 2z^2 = 1 \Rightarrow z^2 = \frac{1}{2} \Rightarrow z = \pm\frac{\sqrt{2}}{2}$;

- Se $z = \frac{\sqrt{2}}{2}$, em 2, temos que $y = -\frac{\sqrt{2}}{2}$ e uma possível solução é $x = 0$, $y = -\frac{\sqrt{2}}{2}$ e $z = \frac{\sqrt{2}}{2}$.
- Se $z = -\frac{\sqrt{2}}{2}$, em 2, obtemos $y = \frac{\sqrt{2}}{2}$ e a solução é $x = 0$, $y = \frac{\sqrt{2}}{2}$ e $z = -\frac{\sqrt{2}}{2}$.

b) Suponhamos que $\begin{pmatrix} \sqrt{2} & x \\ y & \sqrt{2} \end{pmatrix}$ fosse ortogonal.

Teríamos: $\begin{pmatrix} \sqrt{2} & x \\ y & \sqrt{2} \end{pmatrix} \cdot \underbrace{\begin{pmatrix} \sqrt{2} & y \\ x & \sqrt{2} \end{pmatrix}}_{\text{é a transposta da matriz dada}} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

$$\begin{pmatrix} 2 + x^2 & \sqrt{2}(x + y) \\ \sqrt{2}(x + y) & y^2 + 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{cases} 2 + x^2 = 1 & 1 \\ \sqrt{2} \cdot (x + y) = 0 & 2 \\ 2 + y^2 = 1 & 3 \end{cases}$$

De 1, temos: $x^2 = -1 \Rightarrow x \notin \mathbb{R}$

De 3, temos: $y^2 = -1 \Rightarrow y \notin \mathbb{R}$

CAPÍTULO 6 Sistemas lineares

Exercícios

1. São lineares as equações representadas nos itens *a*, *c*, *f* e *h*.

2. **a)** $2 \cdot 2 - (-3) = 4 + 3 = 7$; $(2, -3)$ é solução.
b) $2 \cdot 2 - 7 = 4 - 7 = -3 \neq 7$; $(2, 7)$ não é solução.
c) $2 \cdot 5 - 3 = 10 - 3 = 7$; $(5, 3)$ é solução.

3. **a)** $-1 + 2 \cdot 3 + 4 \cdot (-1) = -1 + 6 - 4 = 1$;
$(-1, 3, -1)$ é solução.
b) $0 + 2 \cdot (-4) + 4 \cdot (-1) = 0 - 8 - 4 = -12 \neq 1$;
$(0, -4, -1)$ não é solução.
c) $1 + 2 \cdot 1 + 4 \cdot 1 = 1 + 2 + 4 = 7 \neq 1$;
$(1, 1, 1)$ não é solução.
d) $0 + 2 \cdot 0 + 4 \cdot \frac{1}{4} = 1$; $\left(0, 0, \frac{1}{4}\right)$ é solução.

4. $3 \cdot 1 - 2 \cdot (-3) + m = 1 \Rightarrow 3 + 6 + m = 1 \Rightarrow m = -8$

5. **a)** $80x + 120y = 25\,200$ ou $8x + 12y = 2\,520$ ou $2x + 3y = 630$
b) Se $x = 45$, então: $90 + 3y = 630 \Rightarrow y = 180$ e o par $(45, 180)$ é solução da equação linear; sim, é possível.
Se $x = 65$, temos: $130 + 3y = 630 \Rightarrow y = \frac{500}{3} \notin \mathbb{N}$; não é possível.
c) Se $y = 3x$, então: $2x + 3 \cdot 3x = 630 \Rightarrow 11x = 630 \Rightarrow$
$\Rightarrow x \notin \mathbb{N}$; não é possível.
Se $y = \frac{x}{2}$ temos: $2x + 3 \cdot \frac{x}{2} = 630 \Rightarrow x = 180$ e $y = 90$; o par $(180, 90)$ é solução da equação linear; sim.

6. $3 \cdot m - 11 \cdot (2m + 1) = 4 \Rightarrow 3m - 22m - 11 = 4 \Rightarrow$
$\Rightarrow m = -\frac{15}{19}$

7. **a)** $x_1 = 0 \Rightarrow 4 \cdot 0 + 3x_2 = -5 \Rightarrow x_2 = -\frac{5}{3}$;
$\left(0, -\frac{5}{3}\right)$ é solução.
$x_2 = 1 \Rightarrow 4x_1 + 3 \cdot 1 = -5 \Rightarrow 4x_1 = -8 \Rightarrow x_1 = -2$;
$(-2, 1)$ é solução.
b) $x = 0$ e $y = 1 \Rightarrow 0 + 1 - z = 0 \Rightarrow z = 1$;
$(0, 1, 1)$ é solução.
$x = 1$ e $z = 2 \Rightarrow 1 + y - 2 = 0 \Rightarrow y = 1$;
$(1, 1, 2)$ é solução.
c) $(0, 2)$; $(1, 1)$; $(-5, 7)$; $\left(\frac{1}{3}, \frac{5}{3}\right)$, ...
d) $x_1 = x_2 = 0 \Rightarrow 0 + 0 + 5x_3 = 16 \Rightarrow x_3 = \frac{16}{5}$;
$\left(0, 0, \frac{16}{5}\right)$ é solução.
$x_1 = x_2 = 2 \Rightarrow 2 + 4 + 5x_3 = 16 \Rightarrow x_3 = 2$;
$(2, 2, 2)$ é solução.

8. Sejam $\begin{cases} \mathbf{x} \text{ o número de moedas de R\$ 1,00} \\ \mathbf{y} \text{ o número de notas de R\$ 5,00} \end{cases}$

$x + 5y = 35 \Rightarrow y = \frac{35 - x}{5}$

Para que **y** resulte inteiro, o numerador deve ser múltiplo de 5, então atribuímos a **x** os valores 0, 5, 10, 15, 20, 25, 30 e 35, obtendo, respectivamente, os resultados: (0, 7); (5, 6); (10, 5); (15, 4); (20, 3); (25, 2); (30,1) e (35, 0), ou seja, poderá fazer o pagamento de 8 formas diferentes.

9. **a)** **x**: número de moedas de R$ 1,00
y: número de notas de R$ 2,00
$x + 2y = 35 \Rightarrow y = \frac{35 - x}{2}$

Para que **y** resulte inteiro, o numerador tem que ser par.
Logo, $x \in \{1, 3, 5, 7, ..., 33, 35\}$.
Existem 18 possibilidades distintas.

b) **x**: número de notas de R\$ 2,00
y: número de notas de R\$ 5,00
z: número de notas de R\$ 10,00

$$2x + \underbrace{5y + 10z}_{\text{múltiplo de 5}} = 35$$

2x deve ser múltiplo de 5 (e **x** deve ser natural).
Podemos ter:

- $2x = 0 \Rightarrow x = 0 \Rightarrow y + 2z = 7$

x	y	z
0	7	0
0	5	1
0	3	2
0	1	3

- $2x = 10 \Rightarrow x = 5 \Rightarrow y + 2z = 5$

x	y	z
5	1	2
5	3	1
5	5	0

- $2x = 20 \Rightarrow x = 10 \Rightarrow y + 2z = 3$

x	y	z
10	1	1
10	3	0

- $2x = 30 \Rightarrow x = 15 \Rightarrow y + 2z = 1$

x	y	z
15	1	0

Temos, ao todo, 10 possibilidades.

10. Sejam $\{a, b, c\} \subset \mathbb{R}$ e **x** e **y** as incógnitas:

a) $ax + by = c$ *

$$\begin{cases} a \cdot 1 + b \cdot 1 = c \\ -2a - 3b = c \end{cases} \Rightarrow a + b = -2a - 3b \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 3a = -4b \Rightarrow a = -\frac{4b}{3}$$

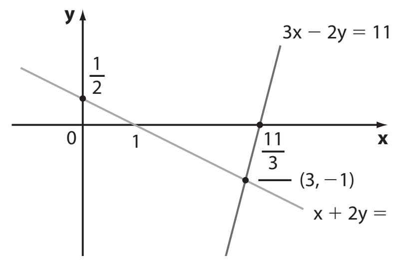
Escolhendo-se, por exemplo, $b = 3$, temos: $a = -4$ e, na 1ª equação, obtemos $-4 \cdot 1 + 3 \cdot 1 = c \Rightarrow c = -1$.
Em *, temos: $-4x + 3y = -1$
Escolhendo-se $b = 6$, obtemos $a = -8$ e $c = -2$ e a equação é: $-8x + 6y = -2$; em geral, sendo $k \in \mathbb{R}^*$, segue a equação: $k \cdot (-4x + 3y) = -k$.

b) $x = 0 \Rightarrow y = -\frac{1}{3} \Rightarrow \left(0, -\frac{1}{3}\right)$ é solução.

$y = 0 \Rightarrow x = \frac{1}{4} \Rightarrow \left(\frac{1}{4}, 0\right)$ é solução.

$x = \frac{3}{4} \Rightarrow y = \frac{2}{3} \Rightarrow \left(\frac{3}{4}, \frac{2}{3}\right)$ é solução.

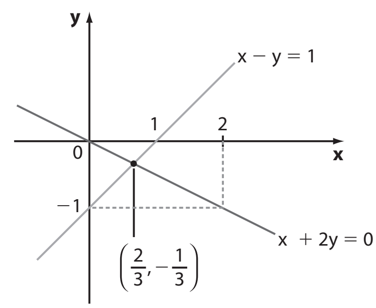
11. **a)**
$$\begin{cases} x + \cancel{2y} = 1 \\ 3x - \cancel{2y} = 11 \end{cases} \oplus$$
$$4x = 12$$
$$x = 3 \Rightarrow y = -1$$
$S = \{(3, -1)\}$; S.P.D.



b) $\begin{cases} x - y = 1 & \cdot (2) \\ x + 2y = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 2x - \cancel{2y} = 2 \\ x + \cancel{2y} = 0 \end{cases} \oplus$

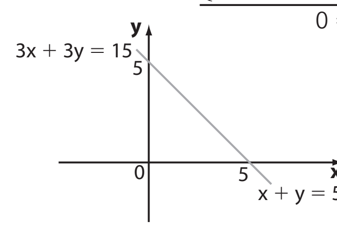
$$3x = 2 \Rightarrow x = \frac{2}{3} \Rightarrow y = -\frac{1}{3}$$

$S = \left\{\left(\frac{2}{3}, -\frac{1}{3}\right)\right\}$; S.P.D.



c) $\begin{cases} x + y = 5 & \cdot (-3) \\ 3x + 3y = 15 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \cancel{-3x} - \cancel{3y} = \cancel{-15} \\ \cancel{3x} + \cancel{3y} = \cancel{15} \end{cases} \oplus$

$$0 = 0$$

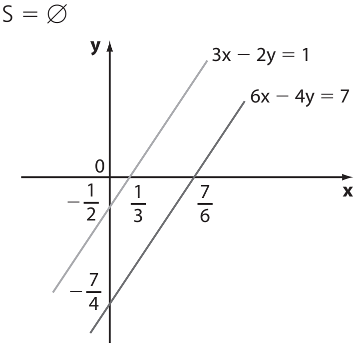


As duas equações são equivalentes e o sistema se reduz a $x + y = 5$.
Fazendo $x = 5 - y$, qualquer par ordenado da forma $(5 - y, y)$, em que $y \in \mathbb{R}$, é solução. Tomando $y = 5 - x$, temos que qualquer par ordenado da forma $(x, 5 - x)$, em que $x \in \mathbb{R}$, também é solução.
$S = \{(5 - y, y);\ y \in \mathbb{R}\}$;
ou $S = \{(x, 5 - x);\ x \in \mathbb{R}\}$; S.P.I.

d) $\begin{cases} 3x - 2y = 1 & \cdot (-2) \\ 6x - 4y = 7 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \cancel{-6x} + \cancel{4y} = -2 \\ \cancel{6x} - \cancel{4y} = 7 \end{cases} \oplus$

$$0 = 5 \text{ (Falso)}$$

S.I.; $S = \varnothing$



12. **x**: número de unidades de 2 L
y: número de unidades de 1,5 L $\begin{cases} x + y = 72 & \cdot(-2) \\ 2x + 1{,}5y = 129 \end{cases} \Rightarrow$

$\Rightarrow \begin{cases} -\cancel{2x} - 2y = -144 \\ \cancel{2x} + 1{,}5y = 129 \end{cases} \oplus$

$-0{,}5y = -15 \Rightarrow y = 30 \text{ e } x = 42$

Foram compradas 30 unidades de 1,5 L.

13. **c**: preço do café
p: preço do minipão de queijo

$\Rightarrow \begin{cases} 2c + 5p = 14{,}20 & \cdot(-3) \\ 3c + 7p = 20{,}60 & \cdot(2) \end{cases} \Rightarrow$

$\Rightarrow \begin{cases} -6c - 15p = -42{,}60 \\ 6c + 14p = 41{,}20 \end{cases} \Rightarrow -p = -1{,}40 \Rightarrow$

$\Rightarrow p = 1{,}40 \text{ e } c = 3{,}60$

$4c + 10p = 4 \cdot 3{,}60 + 10 \cdot 1{,}40 = 14{,}40 + 14 = 28{,}40$
(28,40 reais)

14. $\begin{cases} M - 40 = L + 40 \\ L - 30 = \dfrac{M}{2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} M - L = 80 \\ -M + 2L = 60 \end{cases}$

Adicionando as duas equações, temos:
$L = 140 \text{ e } M = 220 \Rightarrow$
$\Rightarrow L + M = 140 + 220 = 360$ (360 reais)

15. **a)** $13 \cdot 5 - 7 \cdot 2 = 65 - 14 = 51$ (51 pontos)

b) **x**: números de acertos
y: números de erros

$\begin{cases} x + y = 20 \\ 5x - 2y = 23 \end{cases} \Rightarrow x = 9 \text{ e } y = 11$

Amanda errou 11 questões.

c) $\begin{cases} x + y = 20 & \cdot(2) \\ 5x - 2y = 17 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 2x + \cancel{2y} = 40 \\ 5x - \cancel{2y} = 17 \end{cases} \oplus$

$7x = 57 \Rightarrow x \notin \mathbb{N}$

Não é possível.

16. Se as retas não se intersectam, o sistema não tem solução.

$\begin{cases} x + y = m \\ 2x + 2y = 5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x + y = m \\ x + y = \dfrac{5}{2} \end{cases}$

Se $m \neq \dfrac{5}{2}$, as equações do sistema ficam incompatíveis e ele não apresenta solução.

17. (3, 5) é solução do sistema $\begin{cases} x - y = -2 \\ 2x + y = m \end{cases}$

Daí, na 2ª equação, temos: $2 \cdot 3 + 5 = m \Rightarrow m = 11$

18. Para que a solução gráfica do sistema $\begin{cases} 2x - y = 3 \\ mx + ny = -6 \end{cases}$ seja formada por infinitos pontos, as retas correspondentes às equações dadas devem ser coincidentes.

Multiplicando a 1ª equação por (-2), obtemos:

$\begin{cases} -4x + 2y = -6 \\ mx + ny = -6 \end{cases} \Rightarrow m = -4 \text{ e } n = 2$

19. **a)** $\begin{cases} 3 + (-2) = 1 \textbf{ (V)} \\ 2 \cdot 3 + 3 \cdot (-2) = 0 \textbf{ (V)} \end{cases} \Rightarrow (3, -2)$ é solução.

$\begin{cases} -\dfrac{1}{3} + \dfrac{4}{3} = 1 \textbf{ (V)} \\ 2 \cdot \left(-\dfrac{1}{3}\right) + 3 \cdot \dfrac{4}{3} = 0 \textbf{ (F)} \end{cases} \Rightarrow \left(-\dfrac{1}{3}, \dfrac{4}{3}\right)$ não é solução.

b) $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$

20. **a)** (2, 1, 3) não satisfaz a 3ª equação:
$-2 + 1 + 2 \cdot 3 = -2 + 7 = 5 \neq -5$
Logo, (2, 1, 3) não é solução.

b) 1ª equação: $2 - \dfrac{7}{3} + \dfrac{1}{3} = 0$ **(V)**

2ª equação: $2 + \dfrac{7}{3} - \dfrac{1}{3} = 2 + 2 = 4$ **(V)**

3ª equação: $-2 - \dfrac{7}{3} - \dfrac{2}{3} = -2 - 3 = -5$ **(V)**

Logo, $\left(2, -\dfrac{7}{3}, -\dfrac{1}{3}\right)$ é solução.

c) $(-1, 1, 0)$ não é solução, pois não satisfaz a 2ª equação: $-1 - 1 + 0 = -2 \neq 4$

21. **a)** $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$ e $B = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 7 \\ 1 & 0 & 1 & 8 \\ 0 & 1 & 1 & 9 \end{bmatrix}$

b) $A = \begin{bmatrix} 4 & -1 & 1 \\ 1 & 2 & -1 \\ 1 & 0 & -1 \end{bmatrix}$ e $B = \begin{bmatrix} 4 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & 2 & -1 & -2 \\ 1 & 0 & -1 & -5 \end{bmatrix}$

c) $A = \begin{bmatrix} 3 & 2 \\ 1 & -1 \\ 4 & 1 \end{bmatrix}$ e $B = \begin{bmatrix} 3 & 2 & -4 \\ 1 & -1 & -7 \\ 4 & 1 & 2 \end{bmatrix}$

d) $A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 3 \\ -1 & 1 & 10 \end{bmatrix}$ e $B = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 3 & -13 \\ -1 & 1 & 10 & 4 \end{bmatrix}$

22. **a)** $\begin{cases} 3x + 2y = 0 \\ 2x + 5y = 2 \end{cases}$

b) $\begin{cases} 5x + 7y - 2z = 11 \\ x - y + 3z = 13 \end{cases}$

c) $\begin{cases} x + y + z = 3 \\ 2x - 4y + 3z = 11 \\ -3x - 3y - 3z = 10 \end{cases}$

23. **a)** $(2, -1, 3)$ satisfaz as duas primeiras equações; na 3ª equação, temos: $2 \cdot 2 + m \cdot (-1) - 3 = 0 \Rightarrow$
$\Rightarrow 4 - m - 3 = 0 \Rightarrow m = 1$

b) Na 1ª equação, temos: $5 + m = 8 \Rightarrow m = 3$;
(5, 3) satisfaz a 2ª equação.

c) Na 1ª equação, temos: $m + 0 - (-2) = 5 \Rightarrow$
$\Rightarrow m + 2 = 5 \Rightarrow m = 3$; $(3, 0, -2)$ satisfaz a 2ª equação.

24. **a)** $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 3 & -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \\ 0 \end{pmatrix}$

b) $(-5, 4, 2)$ é solução, pois:
$-5 + 8 + 2 = 5$
$-10 + 12 - 2 = 0$
(1, 1, 1) não satisfaz a 1ª equação: $1 + 2 + 1 = 4 \neq 5$

c) 1ª equação:
$-15 + 5z + 2 \cdot (10 - 3z) + z =$
$= -15 + \cancel{5z} + 20 - \cancel{6z} + \cancel{z} = 5$
2ª equação:
$2 \cdot (-15 + 5z) + 3 \cdot (10 - 3z) - z =$
$= \cancel{-30} + 10z + \cancel{30} - 9z - z = 0$

d) Pelo item *c*, temos:
$p = -15 + 5 \cdot (-2) \Rightarrow$
$\Rightarrow p = -15 - 10 = -25$

25. *a* e *c* estão escalonados.

26. **a)** $y = 7 \Rightarrow 3x + 14 = 5 \Rightarrow x = -3$;
$S = \{(-3, 7)\}$; S.P.D.

b) $z = -4 \Rightarrow y - 4 = -1 \Rightarrow y = 3 \Rightarrow$
$\Rightarrow x + 3 - 4 = 2 \Rightarrow x = 3$; $S = \{(3, 3, -4)\}$; S.P.D.

c) 2ª equação: $y = 2 + 3z$
1ª equação: $x - (2 + 3z) + 2z = 5 \Rightarrow x = 7 + z$
Se $z = \alpha$, $\alpha \in \mathbb{R}$, a solução é dada por:
$S = \{(7 + \alpha, 2 + 3\alpha, \alpha);\ \alpha \in \mathbb{R}\}$; S.P.I.

d) $w = 2 \Rightarrow z = 3 \Rightarrow y = 0 \Rightarrow x = 6$
A solução é $S = \{(6, 0, 3, 2)\}$; S.P.D.

e) A terceira equação não é satisfeita qualquer que seja **z** real, pois o 1º membro é sempre nulo. $S = \varnothing$; S.I.

27. 3ª equação: $3 \cdot (-2) = \gamma \Rightarrow \gamma = -6$
2ª equação: $2 \cdot 2 + (-2) = \beta \Rightarrow \beta = 2$
1ª equação: $-1 + 2 - (-2) = \alpha \Rightarrow \alpha = 3$

28. **a)** A equação linear $x - y = 8$ "traduz" o problema.

b) (10, 2); (8, 0); (0, −8); (12, 4); ...

c) S.P.I.; $x = 8 + y$; se $y = \alpha$, $\alpha \in \mathbb{R}$, a solução é dada por $S = \{(8 + \alpha, \alpha);\ \alpha \in \mathbb{R}\}$

29. Como (1, −1, 0) é solução, na 2ª equação obtemos:
$-1 - 2 \cdot 0 = m \Rightarrow m = -1$. Temos:

$$\begin{cases} x - y + z = 2 \\ y - 2z = -1 \end{cases}$$

Da 2ª equação, $y = -1 + 2z$
Na 1ª equação: $x - (-1 + 2z) + z = 2 \Rightarrow x + 1 - z = 2 \Rightarrow$
$\Rightarrow x = 1 + z$
Para um valor real qualquer α atribuído a **z**, segue a solução:
$S = \{(1 + \alpha, -1 + 2\alpha, \alpha);\ \alpha \in \mathbb{R}\}$

30. **a)**

$$\begin{cases} x + 2y + z = 9 \\ 2x + y - z = 3 \\ 3x - y - 2z = -4 \end{cases} \sim$$

$$\sim \begin{cases} x + 2y + z = 9 \\ -3y - 3z = -15 & \leftarrow (-2)\cdot(1^a\text{ eq.}) + (2^a\text{ eq.}) \\ -7y - 5z = -31 & \leftarrow (-3)\cdot(1^a\text{ eq.}) + (3^a\text{ eq.}) \end{cases} \sim$$

$$\sim \begin{cases} x + 2y + z = 9 \\ y + z = 5 \\ -7y - 5z = -31 \end{cases} \sim$$

$$\sim \begin{cases} x + 2y + z = 9 \\ y + z = 5 \\ 2z = 4 & \leftarrow 7\cdot(2^a\text{ eq.}) + (3^a\text{ eq.}) \end{cases}$$

Daí, $z = 2 \Rightarrow y = 3 \Rightarrow x = 1$; $S = \{(1, 3, 2)\}$; S.P.D.

b)

$$\begin{cases} x - y - 2z = 1 \\ -x + y + z = 2 \\ x - 2y + z = -2 \end{cases} \sim \begin{cases} x - y - 2z = 1 \\ -z = 3 \\ -y + 3z = -3 \end{cases}$$

Como $z = -3$, obtemos, na 3ª equação:
$-y + 3 \cdot (-3) = -3 \Rightarrow y = -6$, e, na 1ª equação:
$x + 6 + 6 = 1 \Rightarrow x = -11$; $S = \{(-11, -6, -3)\}$; S.P.D.

c)

$$\begin{cases} x + 3y + 2z = 2 \\ 3x + 5y + 4z = 4 \\ 5x + 3y + 4z = -10 \end{cases} \sim$$

$$\sim \begin{cases} x + 3y + 2z = 2 \\ -4y - 2z = -2 & \leftarrow (-3)\cdot(1^a\text{ eq.}) + (2^a\text{ eq.}) \\ -12y - 6z = -20 & \leftarrow (-5)\cdot(1^a\text{ eq.}) + (3^a\text{ eq.}) \end{cases} \sim$$

$$\sim \begin{cases} x + 3y + 2z = 2 \\ 2y + z = 1 \\ 6y + 3z = 10 \end{cases} \sim$$

$$\sim \begin{cases} x + 3y + 2z = 2 \\ 2y + z = 1 \\ 0 = 7 & \leftarrow (-3)\cdot(2^a\text{ eq.}) + (3^a\text{ eq.}) \end{cases}$$

(F); $S = \varnothing$; S. I.

d)

$$\begin{cases} x + y + z = 2 \\ 2x - z = -1 \\ 3x + y = 1 \end{cases} \sim$$

$$\sim \begin{cases} x + y + z = 2 \\ -2y - 3z = -5 & \leftarrow (-2)\cdot(1^a\text{ eq.}) + (2^a\text{ eq.}) \\ -2y - 3z = -5 & \leftarrow (-3)\cdot(1^a\text{ eq.}) + (3^a\text{ eq.}) \end{cases} \sim$$

$$\sim \begin{cases} x + y + z = 2 \\ 2y + 3z = 5 \end{cases}$$

Na 2ª equação: $y = \dfrac{5 - 3z}{2}$

1ª equação: $x + \dfrac{5 - 3z}{2} + z = 2 \Rightarrow$

$2x + 5 - 3z + 2z = 4 \Rightarrow 2x = -1 + z \Rightarrow$

$x = \dfrac{-1 + z}{2}$; $S = \left\{\left(\dfrac{-1 + \alpha}{2}, \dfrac{5 - 3\alpha}{2}, \alpha\right);\ \alpha \in \mathbb{R}\right\}$; S.P.I.

31. **a)**

$$\begin{cases} x + 8y - 3z = 7 \\ -x + 3y - 2z = 1 \\ 3x + 2y + z = 5 \end{cases} \sim$$

$$\sim \begin{cases} x + 8y - 3z = 7 \\ 11y - 5z = 8 & \leftarrow (1^a\text{ eq.}) + (2^a\text{ eq.}) \\ -22y + 10z = -16 & \leftarrow (-3)\cdot(1^a\text{ eq.}) + (3^a\text{ eq.}) \end{cases} \sim$$

$$\sim \begin{cases} x + 8y - 3z = 7 \\ 11y - 5z = 8 \\ 11y - 5z = 8 & \leftarrow \left(-\frac{1}{2}\right)\cdot(3^a\text{ eq.}) \end{cases} \sim$$

$$\sim \begin{cases} x + 8y - 3z = 7 \\ 11y - 5z = 8 \end{cases}$$

Assim, para $z = \alpha$, $\alpha \in \mathbb{R}$, temos:

$$S = \left\{\left(\frac{-7\alpha + 13}{11}, \frac{8 + 5\alpha}{11}, \alpha\right); \alpha \in \mathbb{R}\right\}$$

b) $\begin{cases} x + y = 3 \\ x + z = 4 \\ y + z = -3 \end{cases} \sim \begin{cases} x + y = 3 \\ -y + z = 1 \\ y + z = -3 \end{cases} \sim$

$$\sim \begin{cases} x + y = 3 \\ -y + z = 1 \\ 2z = -2 \end{cases} \Rightarrow z = -1,\ y = -2 \text{ e } x = 5;$$

$S = \{(5, -2, -1)\}$

c) $\begin{cases} 2x - y + z = 3 \\ x + y - 3z = 1 \\ 3x - 2z = 3 \end{cases} \sim$

$$\sim \begin{cases} 2x - y + z = 3 \\ -3y + 7z = 1 & \leftarrow (1^a \text{ eq.}) + (-2) \cdot (2^a \text{ eq.}) \\ 3y - 7z = -3 & \leftarrow (1^a \text{ eq.}) \cdot (-3) + (3^a \text{ eq.}) \cdot 2 \end{cases}$$

$$\sim \begin{cases} 2x - y + z = 3 \\ -3y + 7z = 1 \\ -3y + 7z = 3 \end{cases} \text{ equações incompatíveis;}$$

$S = \varnothing$

d) $\begin{cases} a - b - c = -1 \\ a - b + c = 1 \\ a + b - c = 1 \end{cases} \sim$

$$\sim \begin{cases} a - b - c = -1 & \Rightarrow a = 1 \\ 2c = 2 & \leftarrow (-1) \cdot (1^a \text{ eq.}) + (2^a \text{ eq.}) \Rightarrow c = 1 \\ 2b = 2 & \leftarrow (-1) \cdot (1^a \text{ eq.}) + (3^a \text{ eq.}) \Rightarrow b = 1 \end{cases}$$

$S = \{(1, 1, 1)\}$;

32. Sejam **x**, **y** e **z**, respectivamente, os preços unitários do quibe, esfirra e suco.

$$\begin{cases} 2x + 5y + 2z = 32 \\ 3x + 6y + 3z = 44{,}70 \\ 2x + 10y + 3z = 49 \end{cases} \sim$$

$$\sim \begin{cases} 2x + 5y + 2z = 32 \\ -3y = -6{,}60 \\ 5y + z = 17 \end{cases}$$

Da 2ª equação, temos $y = 2{,}20$

Na 3ª equação temos: $5 \cdot 2{,}20 + z = 17 \Rightarrow z = 6$

Na 1ª equação: $2x + 5 \cdot 2{,}20 + 2 \cdot 6 = 32 \Rightarrow x = 4{,}50$

Logo, os preços unitários do quibe, da esfirra e do suco são, respectivamente, R\$ 4,50, R\$ 2,20 e R\$ 6,00.

33. Sejam **x**, **y** e **z** os preços, em reais, da calça, da camisa e do par de meias, respectivamente.

$$\begin{cases} x + 2y + 3z = 287 \\ 2x + 5y + 7z = 674 \\ 2x + 3y + 4z = 462 \end{cases} \sim$$

$$\sim \begin{cases} x + 2y + 3z = 287 \\ y + z = 100 \\ -y - 2z = -112 \end{cases} \sim$$

$$\sim \begin{cases} x + 2y + 3z = 287 \\ y + z = 100 \\ -z = -12 \Rightarrow z = 12 \Rightarrow y = 88 \Rightarrow x = 75 \end{cases}$$

Cada camisa custou R\$ 88,00.

34. **x**: número de acertos

y: número de erros

$$\begin{cases} x + y = 25 \\ 500 + 200x - 150y = 600 \end{cases} \sim \begin{cases} x + y = 25 \\ 20x - 15y = 10 \end{cases}$$

$x = 11$ e $y = 14$

Logo, errou 14 questões.

35. a) $\begin{cases} x + y = 10 \\ x - y = 4 \\ 2x - 5y = -1 \end{cases} \sim$

$$\sim \begin{cases} x + y = 10 \\ -2y = -6 & \leftarrow (-1) \cdot (1^a \text{ eq.}) + (2^a \text{ eq.}) \\ -7y = -21 & \leftarrow (-2) \cdot (1^a \text{ eq.}) + (3^a \text{ eq.}) \end{cases} \sim$$

$$\sim \begin{cases} x + y = 10 \\ y = 3 \Rightarrow x = 7;\ S = \{(7, 3)\} \\ y = 3 \end{cases}$$

b) $\begin{cases} -x + 3y - z = 1 \\ x + y + z = 7 \end{cases} \sim \begin{cases} -x + 3y - z = 1 \\ 4y = 8 \end{cases} \sim$

$$\sim \begin{cases} -x + 3y - z = 1 \\ y = 2 \end{cases} \sim \begin{cases} -x - z = -5 \\ y = 2 \end{cases} \Rightarrow$$

$\Rightarrow x = 5 - z$. Para $\alpha \in \mathbb{R}$, a solução é dada por $S = \{(5 - \alpha, 2, \alpha); \alpha \in \mathbb{R}\}$

c) $\begin{cases} x + y = 3 \\ x - y = 1 \\ 3x + 7y = 11 \end{cases} \sim$

$$\sim \begin{cases} x + y = 3 \\ -2y = -2 & \leftarrow (-1) \cdot (1^a \text{ eq.}) + (2^a \text{ eq.}) \\ 4y = 2 & \leftarrow (-3) \cdot (1^a \text{ eq.}) + (3^a \text{ eq.}) \end{cases} \sim$$

$$\sim \begin{cases} x + y = 3 \\ y = 1 \Rightarrow S = \varnothing \\ y = 0{,}5 \end{cases}$$

d) $\begin{cases} x - 2y = 8 \\ 3x - y = 9 \\ x + y = 1 \\ 5x + 7y = -10 \end{cases} \sim$

$$\sim \begin{cases} x - 2y = 8 \\ 5y = -15 \\ 3y = -7 \\ 17y = -50 \end{cases} \text{ equações incompatíveis; } S = \varnothing$$

e) $\begin{cases} x + 2y = 11 \\ x + 3y = 16 \\ 2x + 5y = 27 \end{cases} \sim$

$\sim \begin{cases} x + 2y = 11 \\ y = 5 \leftarrow (-1) \cdot (1^{\text{a}} \text{ eq.}) + (2^{\text{a}} \text{ eq.}) \Rightarrow x = 1 \\ y = 5 \leftarrow (-2) \cdot (1^{\text{a}} \text{ eq.}) + (3^{\text{a}} \text{ eq.}) \end{cases}$

$S = \{(1, 5)\}$

f) $\begin{cases} x + y + z = 4 \\ 2x - z + w = -4 \\ y - z - w = -2 \\ x - z + 2w = -2 \end{cases} \sim \begin{cases} x + y + z = 4 \\ -2y - 3z + w = -12 \\ y - z - w = -2 \\ -y - 2z + 2w = -6 \end{cases} \sim$

$\sim \begin{cases} x + y + z = 4 \\ -2y - 3z + w = -12 \\ -5z - w = -16 \\ z - 3w = 0 \end{cases} \sim$

$\sim \begin{cases} x + y + z = 4 \\ -2y - 3z + w = -12 \\ -5z - w = -16 \\ -16w = -16 \end{cases} \Rightarrow$

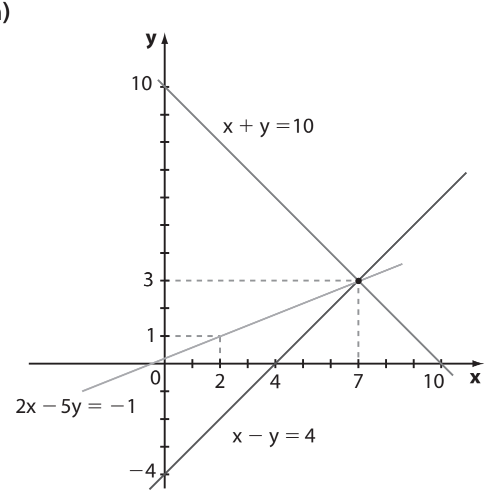
$\Rightarrow w = 1; -5z - 1 = -16 \Rightarrow z = 3;$

$-2y - 9 + 1 = -12 \Rightarrow y = 2;$

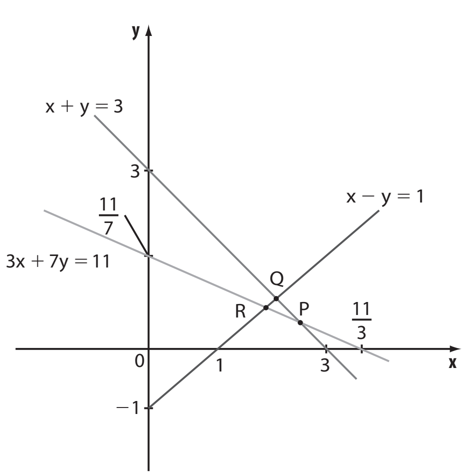
$x + 2 + 3 = 4 \Rightarrow x = -1$

$S = \{(-1, 2, 3, 1)\}$

36. a)



c)



37. Sejam **a**, **b** e **c** as quantias de Ana, Bia e Carol, respectivamente. Temos:

$\begin{cases} a + b + c = 340 \\ a - 10 = 2b \\ \dfrac{3}{5}a = c - 9 \end{cases}$

$\left(\text{observe que 40\% de } \mathbf{a} \text{ é igual a } \dfrac{2}{5}a \text{ e o que sobra é } \dfrac{3}{5}a\right)$

$\begin{cases} a + b + c = 340 \\ a - 2b = 10 \\ 3a - 5c = -45 \end{cases} \sim \begin{cases} a + b + c = 340 \\ -3b - c = -330 \\ -3b - 8c = -1\,065 \end{cases} \sim$

$\sim \begin{cases} a + b + c = 340 \\ 3b + c = 330 \\ -7c = -735 \end{cases} \Rightarrow$

$\Rightarrow c = 105$; na 2ª equação temos $b = 75$ e na 1ª equação obtemos $a = 160$.

38. $\begin{cases} 4c + 3l + 6b = 37{,}20 \\ 2c + 2l + 3b = 20{,}60 \end{cases} \sim \begin{cases} 4c + 3l + 6b = 37{,}20 \\ -l = -4 \end{cases}$

$(1^{\text{a}} \text{ eq.}) + (-2) \cdot (2^{\text{a}} \text{ eq.})$

O sistema é indeterminado, com $l = 4$;

$4c = 37{,}20 - 6b - 12 \Rightarrow 4c = 25{,}20 - 6b \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow 2c + 3b = 12{,}60$ *

a) R$ 4,00

b) Não é possível determinar.

c) Por *, $2c + 3b = 12{,}60$; então: $12{,}60 + 5 \cdot 4{,}00 = 12{,}60 + 20{,}00 = 32{,}60$ (32,60 reais)

d) Não é possível determinar.

39. Sejam **x**, **y** e **z** os preços dos ingressos para arquibancada, numerada descoberta e numerada coberta, respectivamente.

$\left.\begin{array}{l} \text{(I) } z = x + y \\ \text{(II) } 60\% \cdot 40\,000 = 24\,000 \\ \quad 25\% \cdot 40\,000 = 10\,000 \\ \quad 15\% \cdot 40\,000 = 6\,000 \end{array}\right\} \Rightarrow$

$\Rightarrow 24\,000x + 10\,000y + 6\,000z = 4\,320\,000 \Rightarrow$

$\Rightarrow 24x + 10y + 6z = 4\,320$

(III) $\dfrac{y}{z} = \dfrac{3}{5} \Rightarrow 5y - 3z = 0$

$\begin{cases} x + y - z = 0 \\ 5y - 3z = 0 \\ 24x + 10y + 6z = 4\,320 \end{cases} \sim$

$\sim \begin{cases} x + y - z = 0 \\ 5y - 3z = 0 \\ -14y + 30z = 4\,320 \leftarrow (-24) \cdot (1^{\text{a}} \text{ eq.}) + (3^{\text{a}} \text{ eq.}) \end{cases} \sim$

$\sim \begin{cases} x + y - z = 0 \\ 5y - 3z = 0 \\ 108z = 21\,600 \leftarrow (14) \cdot (2^{\text{a}} \text{ eq.}) + (5) \cdot (3^{\text{a}} \text{ eq.}) \end{cases} \Rightarrow$

$\Rightarrow z = 200$, $y = 120$ e $x = 80$

Logo, os preços da arquibancada, numerada descoberta e numerada coberta são R$ 80,00, R$ 120,00 e R$ 200,00, respectivamente.

40. Sejam $\mathbf{c_1}$, $\mathbf{c_2}$ e $\mathbf{c_3}$ as quantidades de colchões do tipo $\mathbf{c_1}$, $\mathbf{c_2}$ e $\mathbf{c_3}$ produzidas. Temos:

$$\begin{cases} 96 \cdot c_1 + 144 \cdot c_2 + 240 \cdot c_3 = 19\,200 & (\div 48) \\ 96 \cdot c_1 + 48 \cdot c_2 + 24 \cdot c_3 = 10\,080 & (\div 24) \sim \\ 96 \cdot c_1 + 96 \cdot c_2 + 24 \cdot c_3 = 12\,480 & (\div 24) \end{cases}$$

$$\sim \begin{cases} 2c_1 + 3c_2 + 5c_3 = 400 \\ 4c_1 + 2c_2 + c_3 = 420 \\ 4c_1 + 4c_2 + c_3 = 520 \end{cases} \sim$$

$$\sim \begin{cases} 2c_1 + 3c_2 + 5c_3 = 400 \\ -4c_2 - 9c_3 = -380 \\ -2c_2 - 9c_3 = -280 \end{cases} \sim$$

$$\sim \begin{cases} 2c_1 + 3c_2 + 5c_3 = 400 \\ -4c_2 - 9c_3 = -380 \\ 9c_3 = 180 \Rightarrow c_3 = 20 \end{cases}$$

Na 2ª equação: $-4c_2 - 180 = -380 \Rightarrow c_2 = 50$
Na 1ª equação: $2c_1 + 3 \cdot 50 + 5 \cdot 20 = 400 \Rightarrow c_1 = 75$
A soma pedida é $75 + 50 + 20 = 145$.

41. **a)** $4 - 6 = -2$
b) $14 - 27 = -13$
c) $2 - (-2) = 4$
d) 6
e) $4 \cdot \frac{1}{2} - 3 \cdot \frac{1}{3} = 1$
f) $-a^2 - a^2 = -2a^2$
g) $1 \cdot (-1) - 0 \cdot 1 = -1$
h) $\text{sen}^2\, 8° + \cos^2 8° = 1$

42. **a)** $-4 \cdot 2 - 1 \cdot 3 = -8 - 3 = -11$
b) $1 \cdot 3 - 0 \cdot (-1) = 3$
c) $A + B = \begin{bmatrix} -3 & 3 \\ 0 & 5 \end{bmatrix}$; $\det(A + B) = -15$
d) $A - B = \begin{bmatrix} -5 & 3 \\ 2 & -1 \end{bmatrix}$; $\det(A - B) = 5 - 6 = -1$
e) $A + 2B = \begin{bmatrix} -4 & 3 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ -2 & 6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2 & 3 \\ -1 & 8 \end{bmatrix}$;
$\det(A + 2B) = -16 + 3 = -13$
f) $A \cdot B = \begin{bmatrix} -4 & 3 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -7 & 9 \\ -1 & 6 \end{bmatrix}$;
$\det(A \cdot B) = -42 + 9 = -33$
g) $A + I_2 = \begin{bmatrix} -3 & 3 \\ 1 & 3 \end{bmatrix} \Rightarrow \det\left(A + I_2\right) = -12$

43. $A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ 5 & 2 \end{bmatrix}$; $\det A = 2 - (-10) = 12$

44. **a)** $0 + 10 - 1 - 2 + 15 + 0 = 22$
b) $7 + 4 + 0 - 14 + 0 + 5 = 2$
c) $0 - 15 + 0 + 18 + 0 - 4 = -1$
d) -15

45. **a)** $A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0^2 & (-1)^2 & (-2)^2 \\ 1^2 & 0^2 & (-1)^2 \\ 2^2 & 1^2 & 0^2 \end{bmatrix} =$

$= \begin{bmatrix} 0 & 1 & 4 \\ 1 & 0 & 1 \\ 4 & 1 & 0 \end{bmatrix}$; $\det A = 0 + 4 + 4 - 0 - 0 - 0 = 8$

b) $A^t = A$; assim $\det A^t = \det A = 8$

46. $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 1 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$; $B = \begin{bmatrix} -1 & 1 & 1 \\ -1 & -1 & 1 \\ -1 & -1 & -1 \end{bmatrix}$;

$\det A = 1$ e $\det B = -4$

$A + B = \begin{bmatrix} 0 & 3 & 3 \\ 0 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$; $\det(A + B) = 0$

$A \cdot B = \begin{bmatrix} -5 & -3 & 1 \\ -4 & -2 & 0 \\ -3 & -1 & 1 \end{bmatrix}$; $\det(A \cdot B) = 10 + 4 - 6 - 12 = -4$

47. **a)** $x(x - 2) - (-3) \cdot (x + 2) = 8 \Rightarrow$
$\Rightarrow x^2 - 2x + 3x + 6 = 8 \Rightarrow x^2 + x - 2 = 0 \Rightarrow x = 1$ ou $x = -2 \Rightarrow S = \{1, -2\}$

b)

$$\left|\begin{matrix} x & 0 & 1 \\ 2x & x & 2 \\ 3 & 2x & x \end{matrix}\right|\begin{matrix} x & 0 \\ 2x & x \\ 3 & 2x \end{matrix}$$

$$-3x \quad -4x^2 \quad 0 \qquad\qquad x^3 \quad 0 \quad 4x^2$$

Logo, a equação é:
$-3x - 4x^2 + x^3 + 4x^2 = 0 \Rightarrow x^3 - 3x = 0 \Rightarrow x(x^2 - 3) = 0 \Rightarrow$
$\Rightarrow x = 0$ ou $x^2 - 3 = 0$, isto é, $x = \pm\sqrt{3}$
$S = \left\{0, -\sqrt{3}, \sqrt{3}\right\}$

c)

$$\left|\begin{matrix} 1 & 2 & x \\ -1 & x & x+1 \\ 3 & 2 & x \end{matrix}\right|\begin{matrix} 1 & 2 \\ -1 & x \\ 3 & 2 \end{matrix}$$

$$-3x^2 \quad -2(x+1) \quad 2x \qquad\qquad x^2 \quad 6(x+1) \quad -2x$$

Obtemos, assim, a equação:
$-3x^2 - 2(x + 1) + 2x + x^2 + 6(x + 1) - 2x = 6 \Rightarrow$
$\Rightarrow -2x^2 + 4x - 2 = 0 \Rightarrow x^2 - 2x + 1 = 0 \Rightarrow$
$\Rightarrow (x - 1)^2 = 0 \Rightarrow x = 1$
$S = \{1\}$

48. **a)** $3x - 4(x + 2) \leqslant x \Rightarrow$
$\Rightarrow 3x - 4x - 8 \leqslant x \Rightarrow$
$\Rightarrow -2x \leqslant 8 \Rightarrow$
$\Rightarrow x \geqslant -4 \Rightarrow$
$S = \{x \in \mathbb{R} \mid x \geqslant -4\}$

b)

$$\left|\begin{matrix} 6 & 1 & -5 \\ x & 0 & 1 \\ 1 & -3 & 2 \end{matrix}\right|\begin{matrix} 6 & 1 \\ x & 0 \\ 1 & -3 \end{matrix} \qquad \text{e} \qquad \left|\begin{matrix} 1 & 2 & 21 \\ 0 & x & 4 \\ 0 & 0 & -6 \end{matrix}\right|\begin{matrix} 1 & 2 \\ 0 & x \\ 0 & 0 \end{matrix}$$

$$0 \quad +18 \quad -2x \qquad 0 \quad 1 \quad 15x \qquad\qquad 0 \quad 0 \quad 0 \quad -6x \quad 0 \quad 0$$

Logo, obtemos a desigualdade:
$18 - 2x + 1 + 15x > -6x \Rightarrow 19x > -19 \Rightarrow x > -1$
$S = \{x \in \mathbb{R} \mid x > -1\}$

49. $D = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 2 & m \end{vmatrix} = m - 2$

a) Devemos ter $D \neq 0$, isto é, $m \neq 2$.

b) A condição $D = 0$, ou seja, $m = 2$, é necessária, porém não suficiente.

Se $m = 2$:

$$\begin{cases} x + y = 3 \\ 2x + 2y = 2 \end{cases} \sim \begin{cases} x + y = 3 \\ x + y = 1 \end{cases} \text{ equações incompatíveis}$$

Assim, não existe $m \in \mathbb{R}$ para o qual o sistema possui infinitas soluções.

c) $m = 2$, pelo item anterior.

50. $2b - 3 \cdot (a - 1) = 14 \Rightarrow 2b - 3a = 11$

$12b - 2a - 16 - 2b = 0 \Rightarrow 10b - 2a = 16$

$$\begin{cases} 2b - 3a = 11 \\ 10b - 2a = 16 \end{cases} \Rightarrow a = -3 \text{ e } b = 1$$

51. a) $$\begin{bmatrix} 2 & 0 \\ -3 & 5 \end{bmatrix} - k \cdot \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} =$$

$$= \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ -3 & 5 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} k & 0 \\ 0 & k \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2-k & 0 \\ -3 & 5-k \end{bmatrix}$$

b) $$\begin{vmatrix} 2-k & 0 \\ -3 & 5-k \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow (2 - k) \cdot (5 - k) = 0 \Rightarrow$$

$\Rightarrow k = 2$ ou $k = 5$

52. O sistema é: $\begin{cases} x + ky = -1 \\ (k + 1)x + 2y = 0 \end{cases}$

$$D = \begin{vmatrix} 1 & k \\ k+1 & 2 \end{vmatrix} = 2 - k(k + 1) = 2 - k^2 - k$$

Devemos ter $D \neq 0$, isto é:

$-k^2 - k + 2 \neq 0 \Rightarrow k \neq 1$ e $k \neq -2$

53. a) $$\begin{cases} x + 2y = 0 \\ 3x + 5y = 0 \end{cases} \sim$$

$$\sim \begin{cases} x + 2y = 0 \Rightarrow \\ -y = 0 \leftarrow (-3) \cdot (1^{\underline{a}} \text{ eq.}) + (2^{\underline{a}} \text{ eq.}) \end{cases}$$

$\Rightarrow y = 0$ e $x = 0$; $S = \{(0, 0)\} \Rightarrow$ S.P.D.

b) $$\begin{cases} -x + 2y = 0 \\ 7x - 14y = 0 \end{cases} \sim$$

$$\sim \begin{cases} -x + 2y = 0 \\ x - 2y = 0 \leftarrow \left(\frac{1}{7}\right) \cdot (2^{\underline{a}} \text{ eq.}) \end{cases}$$

Obtemos equações equivalentes e para $\alpha \in \mathbb{R}$ o sistema se reduz à equação linear $-x + 2y = 0 \Rightarrow x = 2y$; $S = \{(2\alpha, \alpha); \alpha \in \mathbb{R}\} \Rightarrow$ S.P.I.

c) $$\begin{cases} 2x + 3y - z = 0 \\ x - 4y + z = 0 \\ 3x + y - 2z = 0 \end{cases} \sim$$

$$\sim \begin{cases} 2x + 3y - z = 0 \\ 11y - 3z = 0 \leftarrow (1^{\underline{a}} \text{ eq.}) + (-2) \cdot (2^{\underline{a}} \text{ eq.}) \\ 7y + z = 0 \leftarrow (1^{\underline{a}} \text{ eq.}) \cdot 3 + (3^{\underline{a}} \text{ eq.}) \cdot (-2) \end{cases} \sim$$

$$\sim \begin{cases} 2x + 3y - z = 0 \\ 11y - 3z = 0 \\ -32z = 0 \leftarrow 7 \cdot (2^{\underline{a}} \text{ eq.}) + (-11) \cdot (3^{\underline{a}} \text{ eq.}) \end{cases} \Rightarrow$$

$\Rightarrow z = 0$, $y = 0$ e $x = 0$; $S = \{(0, 0, 0)\}$; S.P.D.

d) $$\begin{cases} x + 2y - z = 0 \\ 2x - y + 3z = 0 \\ 4x + 3y + z = 0 \end{cases} \sim$$

$$\sim \begin{cases} x + 2y - z = 0 \\ -5y + 5z = 0 \leftarrow (-2) \cdot (1^{\underline{a}} \text{ eq.}) + (2^{\underline{a}} \text{ eq.}) \\ -5y + 5z = 0 \leftarrow (-4) \cdot (1^{\underline{a}} \text{ eq.}) + (3^{\underline{a}} \text{ eq.}) \end{cases} \sim$$

$$\sim \begin{cases} x + 2y - z = 0 \\ -y + z = 0 \end{cases}$$

$2^{\underline{a}}$ equação: $y = z$

$1^{\underline{a}}$ equação: $x + 2z - z = 0 \Rightarrow x + z = 0 \Rightarrow x = -z$

Assim, para um valor α real qualquer de **z**, obtemos: $S = \{(-\alpha, \alpha, \alpha); \alpha \in \mathbb{R}\}$; S.P.I.

54. a) $m - 2 = 0 \Rightarrow m = 2$

b) $$\begin{cases} x - y + 4z = 0 \\ 2x + 3y - z = 0 \\ 6x - y + 15z = 0 \end{cases} \sim$$

$$\begin{cases} x - y + 4z = 0 \\ 5y - 9z = 0 \leftarrow (-2) \cdot (1^{\underline{a}} \text{ eq.}) + (2^{\underline{a}} \text{ eq.}) \\ 5y - 9z = 0 \leftarrow (-6) \cdot (1^{\underline{a}} \text{ eq.}) + (3^{\underline{a}} \text{ eq.}) \end{cases} \sim$$

$$\sim \begin{cases} x - y + 4z = 0 \\ 5y - 9z = 0 \end{cases}$$

De $5y - 9z = 0$, temos $y = \frac{9z}{5}$ e, na $1^{\underline{a}}$ equação: $x = \frac{-11z}{5}$. Se $z = \alpha$, escrevemos:

$S = \left\{\left(\frac{-11\alpha}{5}, \frac{9\alpha}{5}, \alpha\right), \alpha \in \mathbb{R}\right\}$ ou ainda, para um valor real α qualquer de **z**, podemos escrever, alternativamente, $S = \{(-11\alpha, 9\alpha, 5\alpha), \alpha \in \mathbb{R}\}$

55. $$\begin{cases} x - 3y = 0 \\ (m + 1) \cdot y = 0 \end{cases}$$

Se na $2^{\underline{a}}$ equação o coeficiente de **y** se anular, isto é, se $m = -1$, o sistema admitirá infinitas soluções.

Assim, se $m \neq -1$, teremos, como única solução, o par ordenado $(0, 0)$.

56. Como o sistema é homogêneo, a condição $D = 0$ é suficiente para garantir que o sistema seja indeterminado (e assim, admite soluções próprias).

a) $D = 0 \Rightarrow \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ -4 & m \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow m + 8 = 0 \Rightarrow m = -8$

b) Se $m = -8$, obtemos $\begin{cases} x + 2y = 0 \\ -4x - 8y = 0 \end{cases} \Rightarrow x + 2y = 0 \Rightarrow$

$\Rightarrow x = -2y$; solução geral: $S = \{(-2\alpha, \alpha); \alpha \in \mathbb{R}\}$

Algumas soluções próprias:

$\alpha = 1 \Rightarrow (-2, 1)$

$\alpha = 3 \Rightarrow (-6, 3)$

$\alpha = -4 \Rightarrow (8, -4)$

$\vdots \quad \vdots \quad \vdots \quad \vdots$