Integrais Impróprias

São integrais cujo integrando está definido em intervalos não limitados do tipo $[a, +\infty)$, $(-\infty, b]$ ou mesmo $(-\infty, +\infty)$.

Integrais Impróprias do Tipo I

1. Quando $f : [a, +\infty) \to \mathbb{R}$ é integrável em $[a, t]$ para qualquer $t \geq a$, definimos:

$$\int_a^{+\infty} f(x)\,\mathrm{d}x = \lim_{t \to +\infty} \int_a^t f(x)\,\mathrm{d}x$$

2. Quando $f : (-\infty, b] \to \mathbb{R}$ é integrável em $[t, b]$ oara qualquer $t \leq b$, definimos:

$$\int_{-\infty}^b f(x)\,\mathrm{d}x = \lim_{t \to -\infty} \int_t^b f(x)\,\mathrm{d}x$$

Quando o resultado for finito, as integrais **convergem**. Quando o limite não existir ou for $\pm\infty$, as integrais **divergem**.

3. Quando as integrais

$$\int_{-\infty}^c f(x)\,\mathrm{d}x \quad \text{e} \quad \int_c^{+\infty} f(x)\,\mathrm{d}x$$

convergem, para algum $c \in \mathbb{R}$, então definimos

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\,\mathrm{d}x = \int_{-\infty}^c f(x)\,\mathrm{d}x + \int_c^{+\infty} f(x)\,\mathrm{d}x$$

Observações:

1. A escolha de c não altera o valor da integral.
2. Se pelo menos uma das integrais $\int_{-\infty}^c f(x)\,\mathrm{d}x$, $\int_c^{+\infty} f(x)\,\mathrm{d}x$ diverge, então $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\,\mathrm{d}x$ diverge.
3. $$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\,\mathrm{d}x \neq \lim_{t \to +\infty} \int_{-t}^t f(x)\,\mathrm{d}x$$

Integrais Impróprias do Tipo II

4. Quando $f : [a, b) \to \mathbb{R}$ não está definida no ponto b e é integrável no intervalo $[a, t]$ para qualquer $a \leq t < b$ definimos

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = \lim_{t \to b^-} \int_a^t f(x)\,\mathrm{d}x$$

5. Quando $f : (a, b] \to \mathbb{R}$ não está definida no ponto a e é integrável no intervalo $[t, b]$ para qualquer $a < t \leq b$ definimos

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = \lim_{t \to a^+} \int_t^b f(x)\,\mathrm{d}x$$

6. Quando $f : [a, c) \cup (c, b] \to \mathbb{R}$ é continua em e as integrais $\int_a^c f(x)\,\mathrm{d}x$ e $\int_c^b f(x)\,\mathrm{d}x$ forem convergentes, então $\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$ é convergente e

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = \int_a^c f(x)\,\mathrm{d}x + \int_c^b f(x)\,\mathrm{d}x$$

Teste da Comparação

Quando não for possível calcular o valor exato de uma integral imprópria, podemos usar o teste da comparação para descobrir sua convergência.

Sejam f e g funções integráveis em $[a, +\infty)$ tais que $0 < f(x) \leq g(x)$ para todo $x \geq a$.

1. Se $\int_a^{+\infty} g(x)\,\mathrm{d}x$ converge, então $\int_a^{+\infty} f(x)\,\mathrm{d}x$ converge.
2. Se $\int_a^{+\infty} f(x)\,\mathrm{d}x$ diverge, então $\int_a^{+\infty} g(x)\,\mathrm{d}x$ diverge.