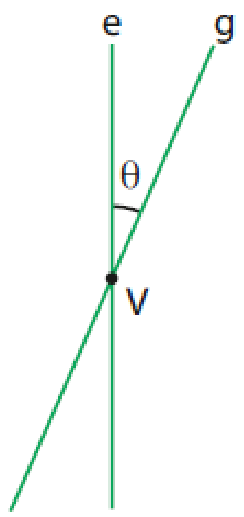
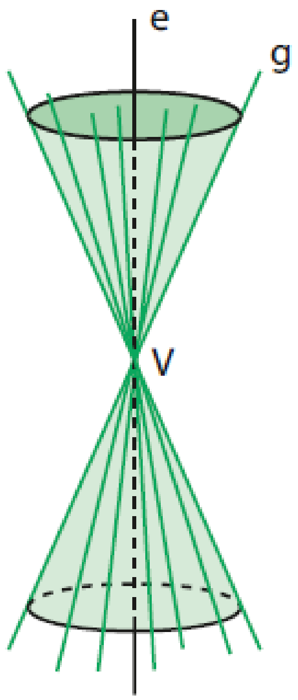
5- Cônicas

Cônicas

Consideremos duas retas **e** e **g** concorrentes em **V** e não perpendiculares.

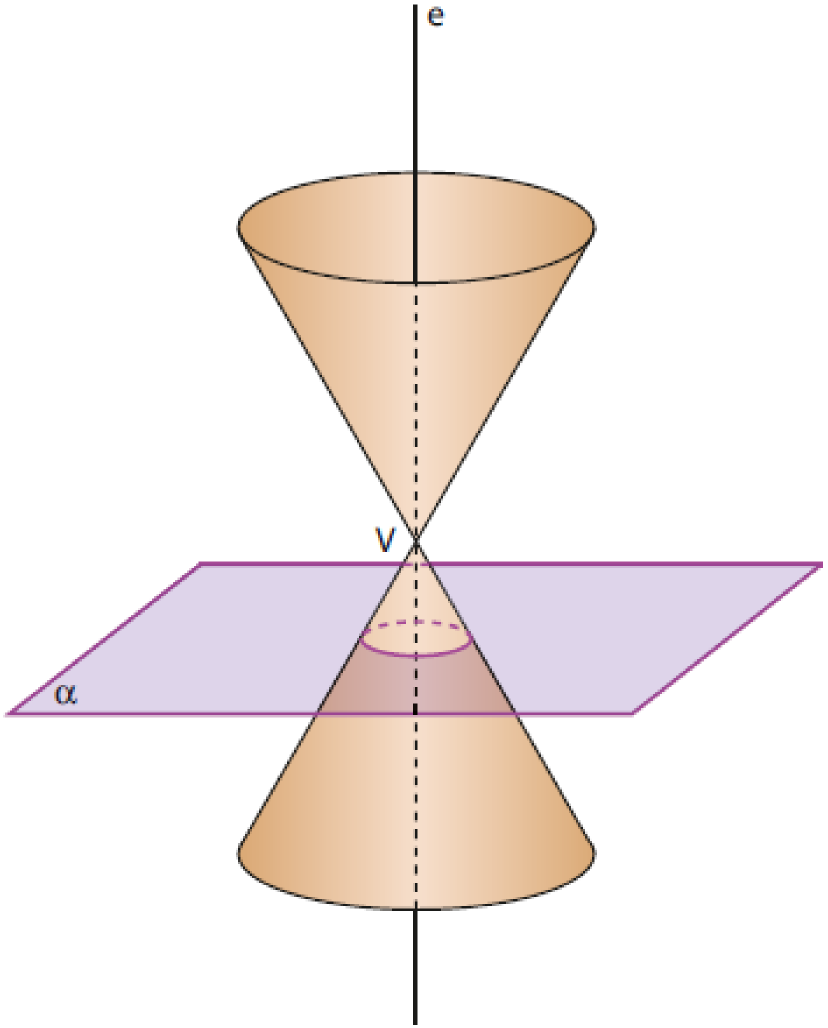
Com a reta **e** fixa, pelo ponto **V** façamos **g** girar 360° em torno de **e**, mantendo constante o ângulo de medida θ formado por elas. A reta **g** gera uma superfície denominada **superfície cônica de duas folhas**. A reta **g** é chamada **geratriz** dessa superfície.



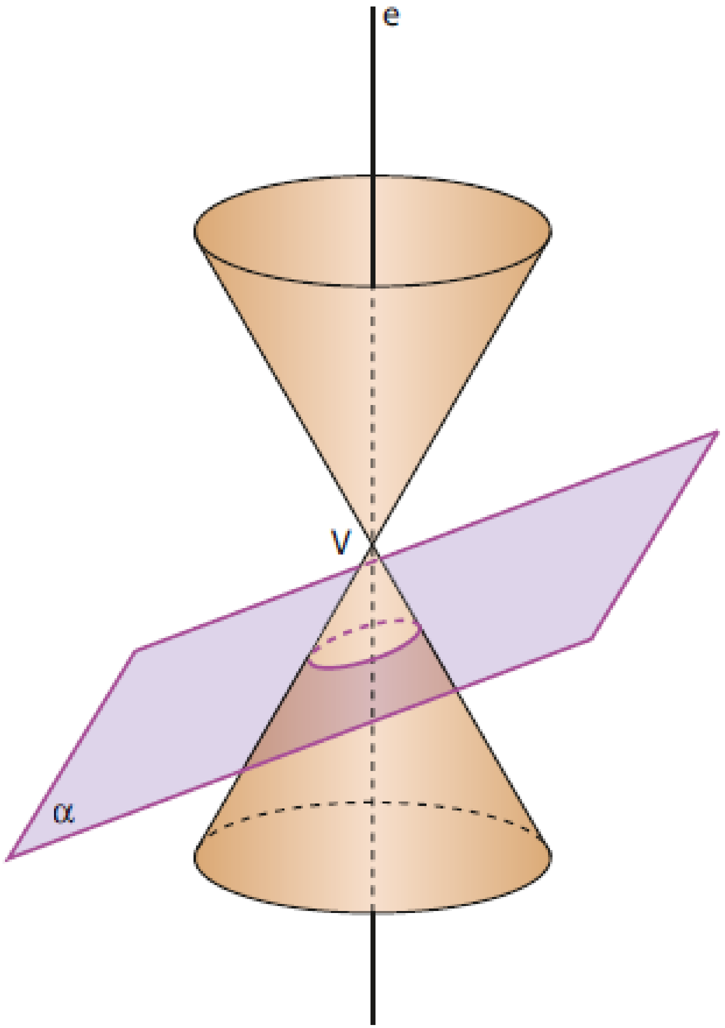


Apolônio de Perga, cerca de 200 a.C., iniciou o estudo das curvas obtidas quando se seciona uma superfície cônica por um plano α. Dependendo da posição desse plano α, diferentes seções podem ser obtidas.

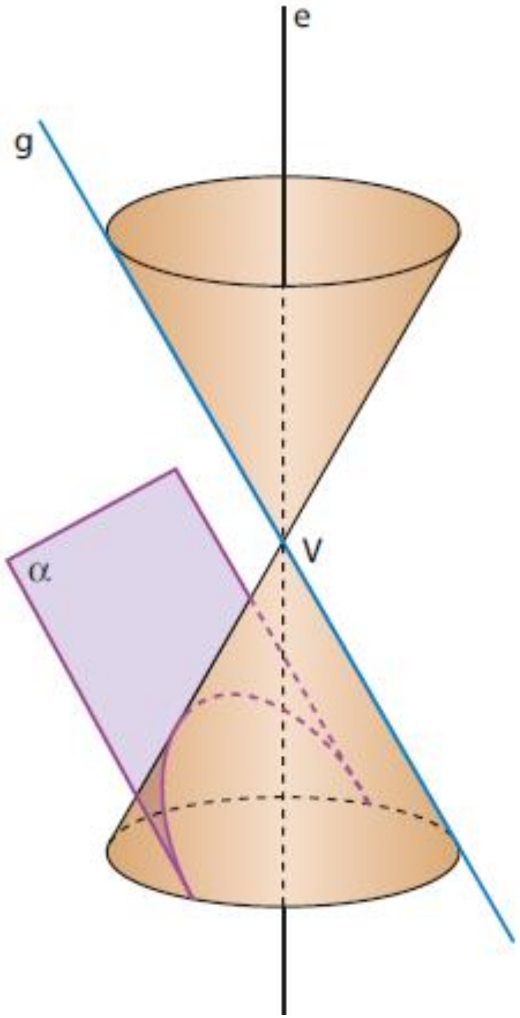
Se o plano α é perpendicular à reta **e**, a seção obtida é uma **circunferência**. Em particular, se α passa por **V**, a seção obtida é um ponto.



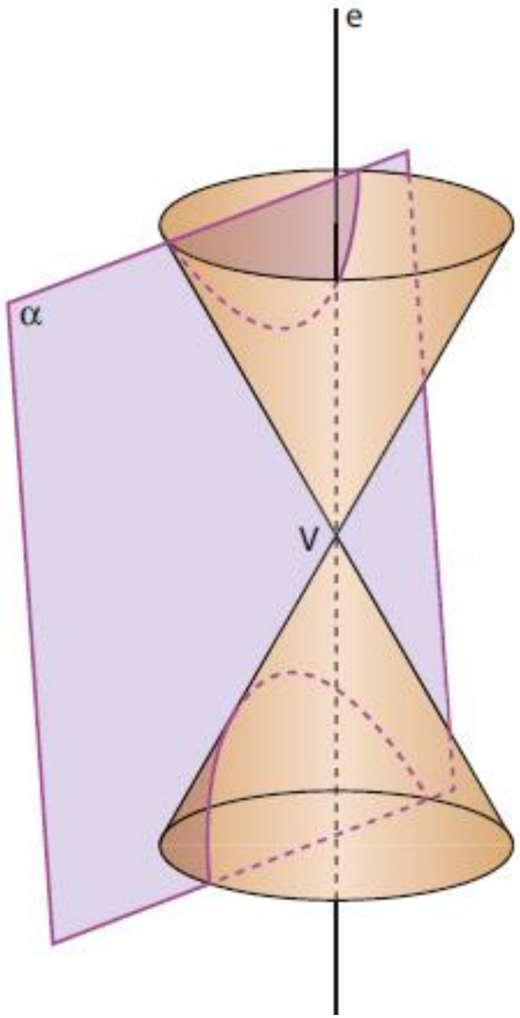
Se o plano α é oblíquo à reta **e**, mas corta apenas uma das folhas da superfície cônica, a seção obtida é uma **elipse**.



Se o plano **α** é paralelo a uma geratriz **g** da superfície cônica, a seção obtida é uma **parábola**.



Se o plano **α** é oblíquo à reta **e** e corta as duas folhas da superfície cônica, a seção obtida é uma **hipérbole**.



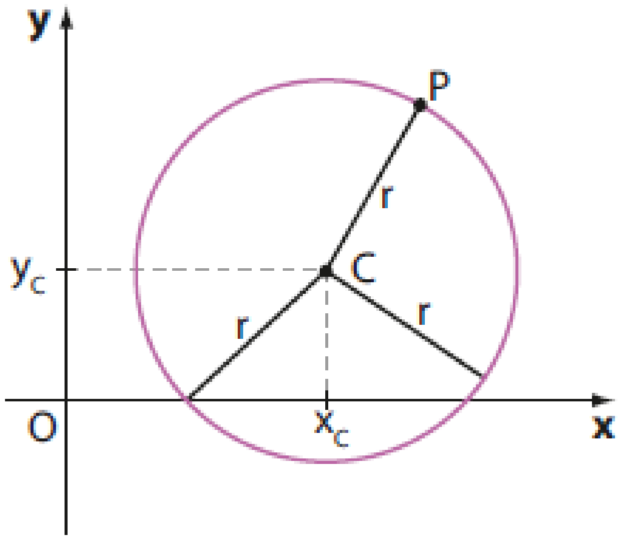
Faremos um estudo inicial da elipse, da hipérbole e da parábola, denominadas, juntamente com a circunferência, **seções cônicas**.

A Circunferência

Equação Reduzida da Circunferência

Uma circunferência λ com centro $C(x_C, y_C)$ e raio de medida **r** é o conjunto de todos os pontos P(x, y) do plano que distam **r** de **C**:

$$d_{PC} = \sqrt{(x - x_C)^2 + (y - y_C)^2} = r$$



Elevando membro a membro ao quadrado, temos:

$$(x - x_C)^2 + (y - y_C)^2 = r^2$$

chamada **equação reduzida da circunferência**, em que:

- $\mathbf{x_C}$ e $\mathbf{y_C}$ são as **coordenadas do centro C** da circunferência;
- **r** é a medida do **raio** da circunferência;
- **x** e **y** são as **coordenadas do ponto genérico P** — um ponto que pode ocupar o lugar de qualquer ponto da circunferência, sempre distando **r** de **C**.

Exemplos:

1) A equação reduzida da circunferência de centro C(3, 4) e raio de medida 5 é $(x - 3)^2 + (y - 4)^2 = 25$.

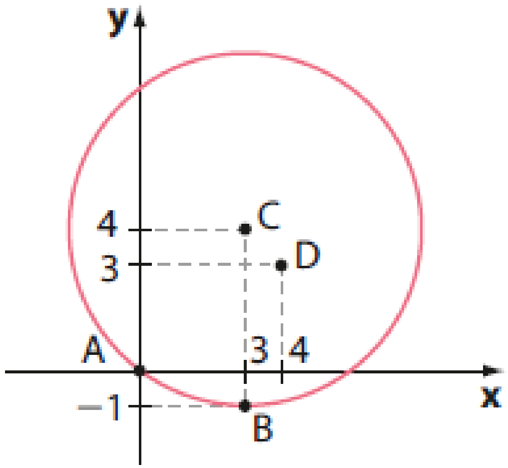
Note que os pontos A(0, 0) e B(3, −1) pertencem a essa circunferência, pois:

$$(0 - 3)^2 + (0 - 4)^2 = 25$$

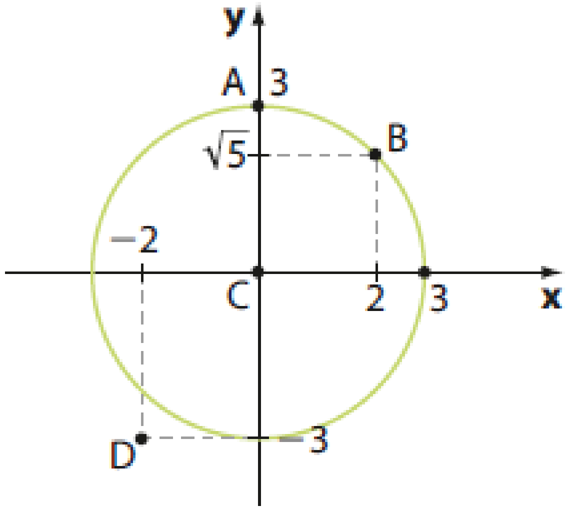
e

$$(3 - 3)^2 + (-1 - 4)^2 = 25$$

O ponto D(4, 3) não pertence, pois $(4 - 3)^2 + (3 - 4)^2 \neq 25$.



2) A equação reduzida da circunferência de centro C(0, 0) e raio de medida 3 é $(x - 0)^2 + (y - 0)^2 = 3^2$, isto é, $x^2 + y^2 = 9$.



Note que o ponto A(0, 3) pertence a essa circunferência, pois $(0 - 0)^2 + (3 - 0)^2 = 9$.
Da mesma forma, o ponto $B\left(2, \sqrt{5}\right)$ também pertence, pois $2^2 + \left(\sqrt{5}\right)^2 = 9$.
Já o ponto D(−2, −3) não pertence à circunferência, pois $(-2)^2 + (-3)^2 = 13 \neq 9$.

Exercícios

1) Escreva a equação reduzida de cada circunferência descrita abaixo:

a) centro na origem e raio de medida 4.

b) centro C(−2, 5) e raio de medida 3.

c) centro C(3, −2) e raio de medida $\sqrt{7}$.

d) com diâmetro $\overline{AB}$, sendo A(2, −2) e B(6, 2).

2) Qual é a equação reduzida da circunferência que tem raio de medida 3, tangencia o eixo das abscissas no ponto $A(4,0)$ e está contida no quarto quadrante?

3) As retas $r: y = 2x - 1$ e $s: 3x + 2y - 5 = 0$ intersectam-se em um ponto P da circunferência λ, de centro $(2,4)$. Qual é o ponto diametralmente oposto a P?

Equação Geral da Circunferência

A partir da equação reduzida de uma circunferência, $(x - x_C)^2 + (y - y_C)^2 = r^2$, podemos desenvolver os produtos notáveis e obter uma equação equivalente. Temos:

$$x^2 - 2xx_C + x_C^2 + y^2 - 2yy_C + y_C^2 = r^2$$

Agrupando os termos convenientemente, obtemos:

$$x^2 + y^2 - 2x_C x - 2y_C y + (x_C^2 + y_C^2 - r^2) = 0$$

A equação destacada é conhecida como **forma geral da equação da circunferência** ou **equação geral da circunferência**, com centro (x_C, y_C) e raio de medida **r**.

Exemplo: Determinar a equação geral da circunferência de centro $C(-1, 3)$ e raio $r = 4$.

Dada a equação geral de uma circunferência, como podemos determinar seu centro e a medida de seu raio? Para isso vamos utilizar a estratégia de **completar quadrados**.

Exemplos: 1) Determinar o centro e o raio das circunferências dadas a seguir.

(a) $x^2 + y^2 - 6x - 4y - 23 = 0$

(b) $x^2 + y^2 + 2x - 6y - 6 = 0$

Dica Importante!

Antes de completar quadrados para verificar se uma dada equação representa uma circunferência, verifique inicialmente se:

(i) Os coeficientes de x^2 e y^2 são iguais;

(ii) Se a equação não possui termo misto, ou seja, a equação não possui termo xy.

Se alguma dessas condições for verdadeira, então a equação **não representa uma circunferência.**

2) Verifique se as equações a seguir representam uma circunferência.

(a) $x^2 + y^2 + 8x - 6y - 11 = 0$

Para conferir, vamos agora usar o método de completamento de quadrados:

$$x^2 + 8x + \blacksquare + y^2 - 6y + \blacksquare = 11 + \blacksquare + \blacksquare$$

$$x^2 + 8x + 16 + y^2 - 6y + 9 = 11 + 16 + 9$$

$$(x + 4)^2 + (y - 3)^2 = 36$$

Então, $(x + 4)^2 + (y - 3)^2 = 36$ é a equação reduzida da circunferência de centro $(-4, 3)$ e raio de medida 6.

(b) $x^2 + y^2 - 4x + 10y + 31 = 0$

Aplicando o método de completar quadrados, obtemos;

$$x^2 - 4x + \blacksquare + y^2 + 10y + \blacksquare = -31 + \blacksquare + \blacksquare$$

$$x^2 - 4x + 4 + y^2 + 10y + 25 = -31 + 4 + 25$$

$$(x - 2)^2 + (y + 5)^2 = -2 \quad (*)$$

o que é impossível, pois o primeiro membro de (*) é uma soma de quadrados de dois números reais.

Assim, a equação $x^2 + y^2 - 4x + 10y + 31 = 0$ representa o conjunto vazio.

Exercícios

1) Verifique se as equações abaixo representam circunferências. Em caso afirmativo, forneça o centro e a medida do raio da circunferência que cada uma representa.

a) $x^2 + y^2 - 10x - 2y + 17 = 0$

b) $x^2 + y^2 + 12x - 12y + 73 = 0$

c) $x^2 + y^2 + 2x + 6y = 0$

d) $x^2 + 2y^2 + 4x + 18y - 100 = 0$

e) $x^2 + 3y^2 - 4 = 0$

f) $x^2 + y^2 + 4x - 4y - 17 = 0$

g) $x^2 + y^2 - 20x + 99 = 0$

h) $(x - 1)^2 + (y + 3)^2 + 3 = 0$

2) Escreva a equação geral da circunferência que passa pela origem e tem centro no ponto $C(-1, -4)$.

3) Determine o perímetro do quadrado inscrito na circunferência de equação

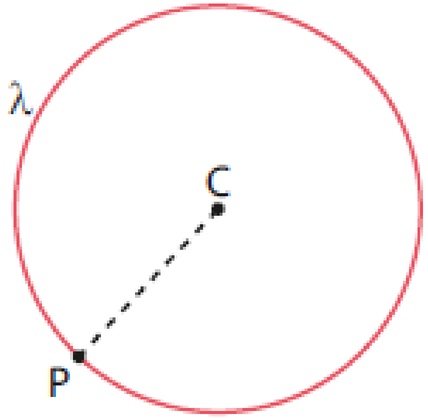
$$(x - 1)^2 + (y - 3)^2 = 32.$$

Posições relativas entre ponto e circunferência

Para uma circunferência λ de centro $C(x_C, y_C)$, raio de medida **r** e um ponto **P** qualquer do plano, distinto de **C**, compararemos d_{PC} com **r**.

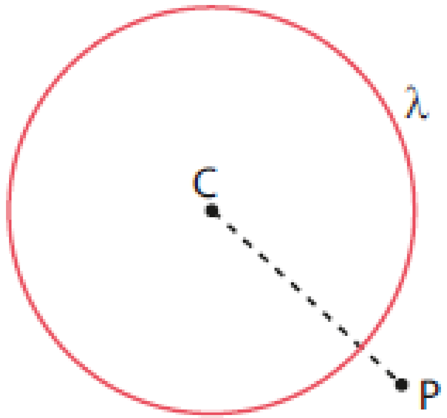
Há três possibilidades:

- Se $d_{PC} = r$, então **P** pertence à circunferência.



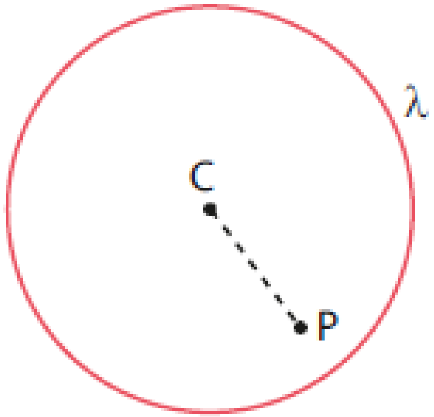
$d_{PC} = r \Rightarrow P \in \lambda$

- Se $d_{PC} > r$, então **P** é externo à circunferência.



$d_{PC} > r \Rightarrow$ **P** é externo a λ

- Se $d_{PC} < r$, então **P** é interno à circunferência.



$d_{PC} < r \Rightarrow$ **P** é interno a λ

Exemplo: Em relação à circunferência $\lambda: (x+2)^2 + (y+1)^2 = 9$, dê a posição dos pontos $A(-2,2)$, $B(-5,1)$, $D(-1,2)$, $E(0,1)$ e $F(-5,-1)$.

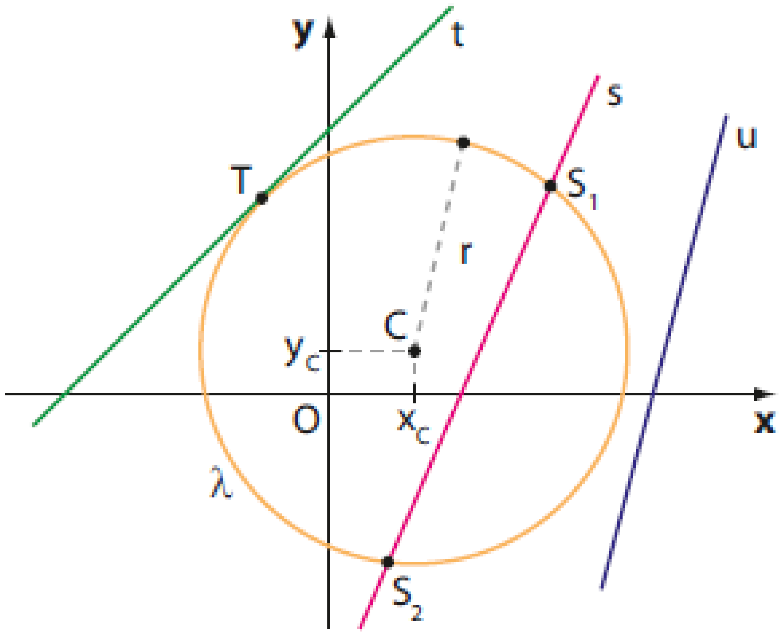
Posições relativas entre reta e circunferência

Seja uma circunferência λ de centro $C(x_C, y_C)$ e raio **r**. No plano existem retas que intersectam a circunferência em dois pontos, retas que tocam a circunferência em apenas um ponto e outras que não intersectam a circunferência em ponto algum.

Essas retas são chamadas, respectivamente, **secantes**, **tangentes** e **externas à circunferência**.

Na figura:

- $s \cap \lambda = \{S_1, S_2\}$, e **s** é secante à circunferência.
- $t \cap \lambda = \{T\}$, e **t** é tangente à circunferência.
- $u \cap \lambda = \varnothing$, e **u** é externa à circunferência.



Exemplo: Determine a posição relativa entre a reta e a circunferência:

a) $r: x - y + 4 = 0$ e $\lambda: x^2 + y^2 - 2x - 4y - 4 = 0$

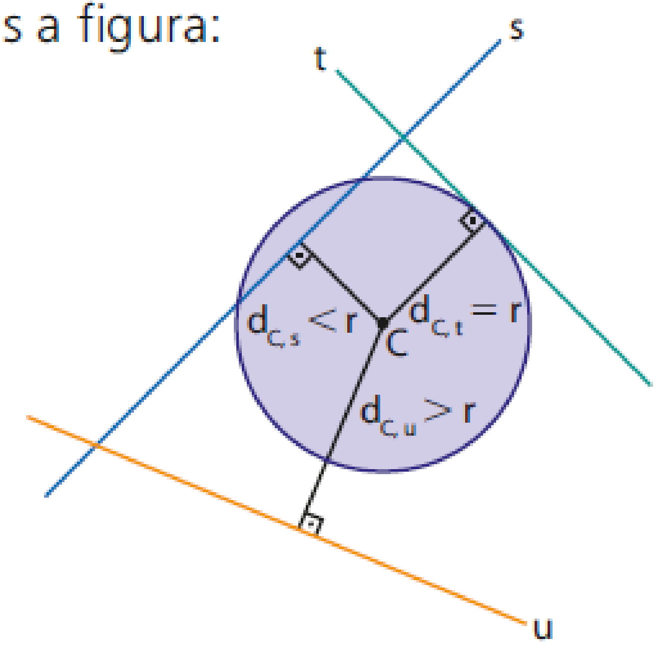
b) $r: 2x + y + 2 = 0$ e $\lambda: (x - 1)^2 + (y - 1)^2 = 5$

c) $r: x - y - 3 = 0$ e $\lambda: x^2 + (y - 1)^2 = 4$

Observação (Método alternativo):

Existe outro processo, geralmente menos trabalhoso, para determinar a posição relativa de uma reta e uma circunferência. Por meio desse processo, uma vez conhecidos o centro e a medida do raio da circunferência, bem como a equação da reta, calcula-se a distância entre o centro da circunferência e a reta, comparando-a, em seguida, com a medida do raio.

Observemos a figura:



- $d_{C,s} < r \Leftrightarrow$ **s** é secante a λ.
- $d_{C,t} = r \Leftrightarrow$ **t** é tangente a λ.
- $d_{C,u} > r \Leftrightarrow$ **u** é externa a λ.

Exercícios

1) Dê a posição dos pontos $A(-1,2)$, $B(3,6)$, $O(0,0)$, $D(-1,-4)$ e $E(3,0)$ em relação à circunferência $\lambda: x^2 + y^2 - 6x + 8y = 0$.

2) O ponto $(3,-3)$ pertence à circunferência de equação $x^2 + y^2 - 2x - 4y + k = 0$. Determine o valor de k.

3) Em cada caso, dê a posição relativa entre a reta r e a circunferência λ. Determine os pontos de intersecção, caso existam.

a) $r: x - y = 0$ e $\lambda: x^2 + y^2 + 2x - 2y + 1 = 0$

b) $r: x - y + 1 = 0$ e $\lambda: (x + 1)^2 + (y - 2)^2 = 5$

c) $r: x + y - 2 = 0$ e $\lambda: x^2 + y^2 - 4x - 4y + 6 = 0$

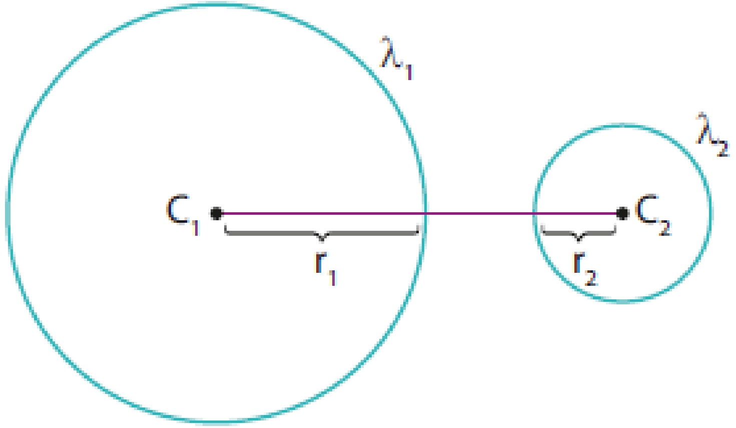
d) $r: 2x - y - 1 = 0$ e $\lambda: (x - 3)^2 + (y + 1)^2 = 16$

Posições relativas de duas circunferências

A posição relativa das circunferências λ_1 (com centro $\mathbf{C_1}$ e raio de medida $\mathbf{r_1}$) e λ_2 (com centro $\mathbf{C_2}$ e raio de medida $\mathbf{r_2}$) pode ser determinada comparando-se a distância C_1C_2 entre os centros com a soma $r_1 + r_2$ ou com o módulo da diferença $|r_1 - r_2|$ das medidas dos raios.

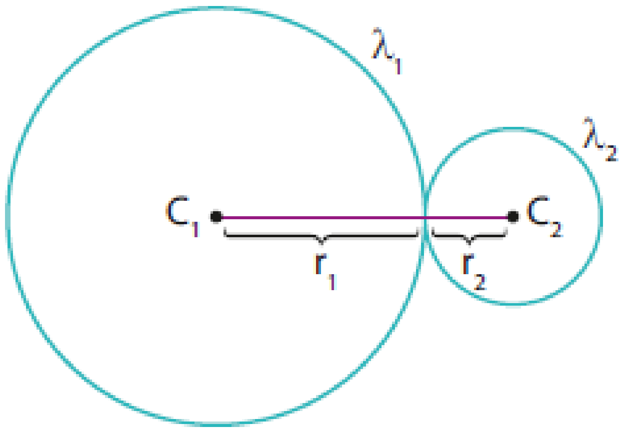
De acordo com a Geometria Plana, são possíveis cinco casos distintos:

- **1º caso: $\boldsymbol{\lambda_1}$** e **$\boldsymbol{\lambda_2}$** exteriores



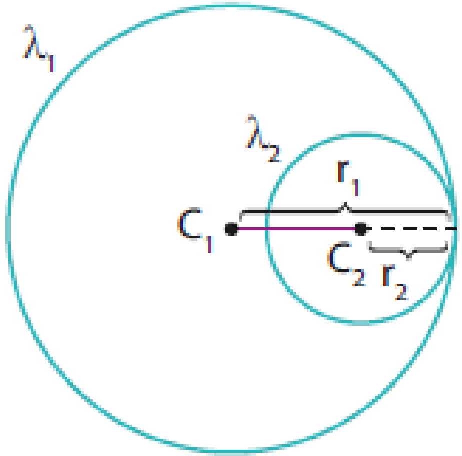
$$C_1C_2 > r_1 + r_2$$

- **2º caso:** $\boldsymbol{\lambda_1}$ e $\boldsymbol{\lambda_2}$ tangentes exteriores



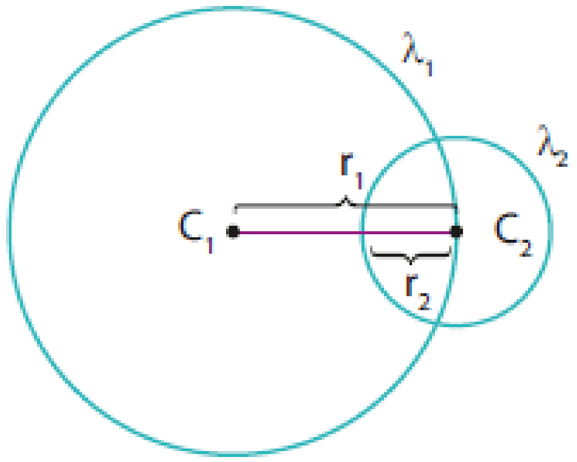
$$\boxed{C_1C_2 = r_1 + r_2}$$

- **3º caso:** $\boldsymbol{\lambda_1}$ e $\boldsymbol{\lambda_2}$ tangentes interiores



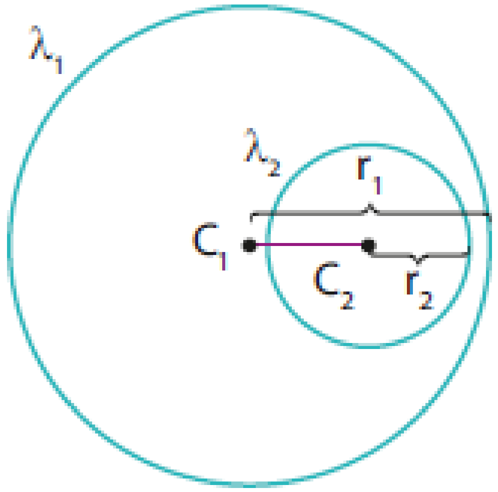
$$\boxed{C_1C_2 = |r_1 - r_2|}$$

- **4º caso: $\boldsymbol{\lambda_1}$** e **$\boldsymbol{\lambda_2}$** secantes



$$|r_1 - r_2| < C_1C_2 < r_1 + r_2$$

- **5º caso: $\boldsymbol{\lambda_1}$** e **$\boldsymbol{\lambda_2}$** uma interna à outra



$$0 \leqslant C_1C_2 < |r_1 - r_2|$$

PARÁBOLA

Definição

Parábola é o conjunto de todos os pontos de um plano eqüidistantes de um ponto fixo e de uma reta fixa desse plano.

Consideremos uma reta *d* e um ponto F não pertencente a *d*.

Na Figura 8.5 estão assinalados cinco pontos (P_1, P_2, V, P_3 e P) que são eqüidistantes do ponto F e da reta *d*.

Elementos

Foco: é o ponto F.

Diretriz: é a reta *d*.

Eixo: é a reta *e* que passa por F e é perpendicular a *d*.

Vértice: é o ponto V de interseção da parábola com o seu eixo.

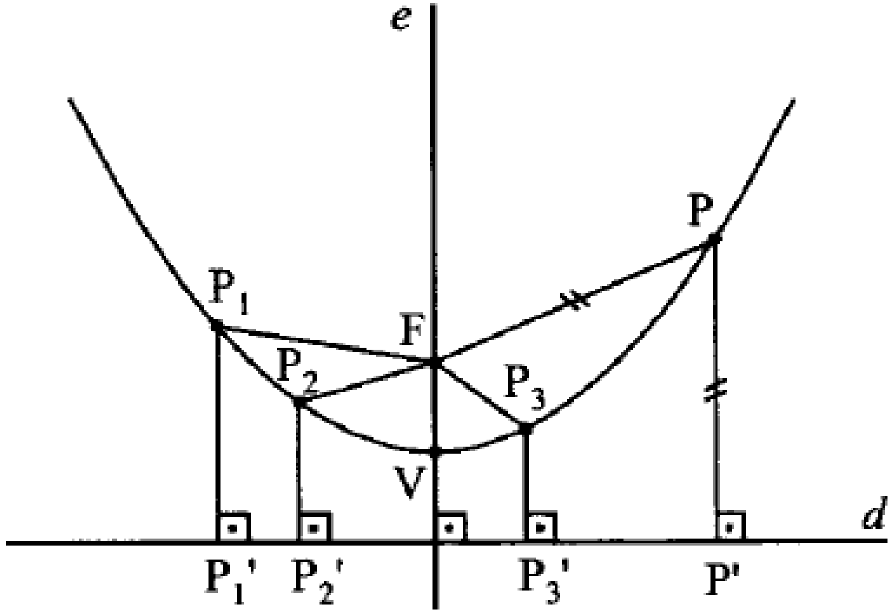


Figura 8.5

Então, um ponto P qualquer pertencente à parábola, se e somente se,

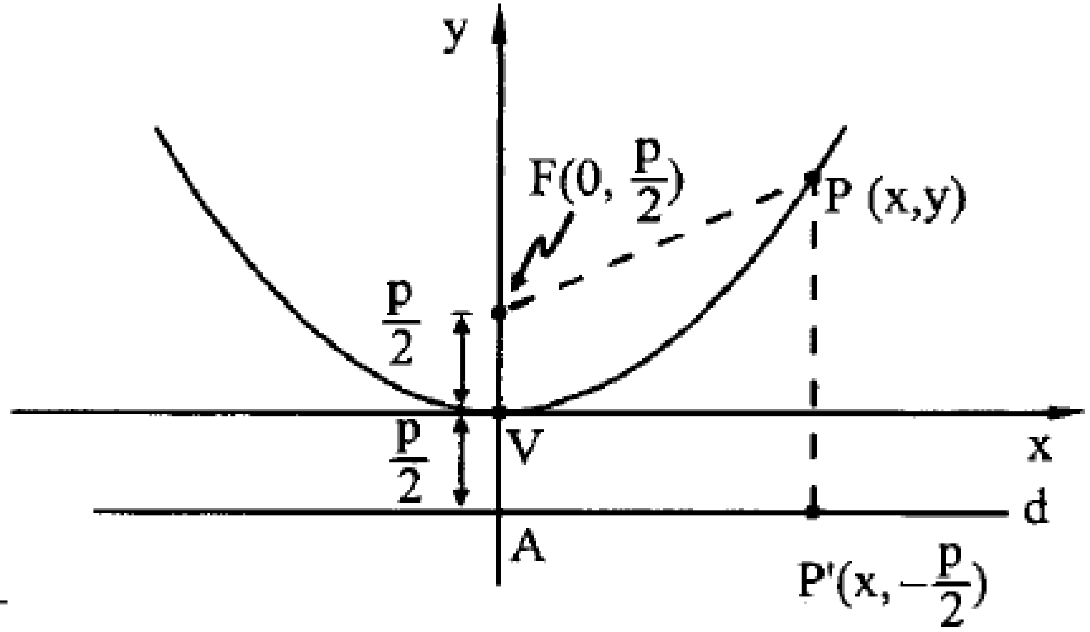
$$\boxed{d(P, F) = d(P, d)}$$

Equações reduzidas

Seja a parábola de vértice V(0,0). Consideremos dois casos:

1º) *O eixo da parábola é o eixo dos y*

Seja P(x,y) um ponto qualquer da parábola (Figura 8.6) de foco $F(0,\frac{p}{2})$ e diretriz de equação $y = -\frac{p}{2}$.



P pertence a parábola se, e somente, se

$$d(P, F) = d(P, P')$$

$$\sqrt{(x-0)^2+(y-\frac{p}{2})^2} = \sqrt{(x-x)^2+(y+\frac{p}{2})^2}$$

Elevando ambos os membros ao quadrado, obtemos

$$(x-0)^2+(y-\frac{p}{2})^2=(x-x)^2+(y+\frac{p}{2})^2 \Rightarrow x^2+y^2-py+\frac{p^2}{4}=y^2+py+\frac{p^2}{4}$$

$$\Rightarrow \boxed{x^2=2py}$$

que é a equação *reduzida* para este caso.

Observações

a) O número real $p \neq 0$ é chamado parâmetro da parábola.

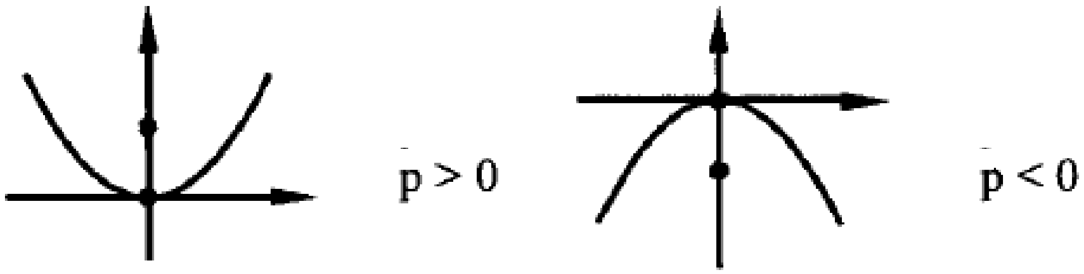


Figura 8.7

b) Da equação (2) conclui-se: como $py \geq 0$, o parâmetro p e a ordenada y de P têm sinais iguais ($py = 0$ se $y = 0$) e, conseqüentemente, se $p > 0$ a parábola tem abertura para cima e, se $p < 0$, para baixo (Figura 8.7).

c) O gráfico da equação (2) é simétrico em relação ao eixo dos y pois substituindo-se x por -x a equação não se altera, isto é, se o ponto (x, y) pertence ao gráfico, o ponto (-x, y) também pertence.

2º) O eixo da parábola é o eixo dos x

Sendo P(x, y) um ponto qualquer da parábola (Figura 8.8) de foco $F(\frac{p}{2}, 0)$ e diretriz $x = -\frac{p}{2}$ obteremos, de forma análoga ao 1º caso, a equação reduzida

$$y^2 = 2px \qquad (3)$$

Da análise da equação (3) conclui-se imediatamente: se $p > 0$, a parábola tem abertura para a direita e se $p < 0$, para a esquerda (Figura 8.9 a seguir).

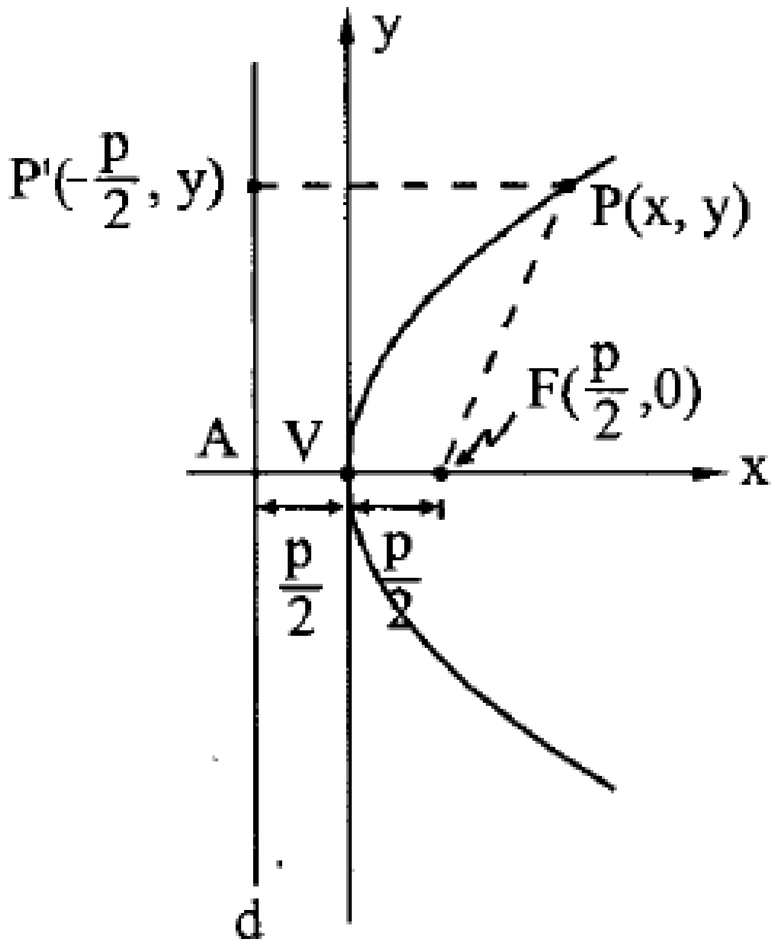


Figura 8.8

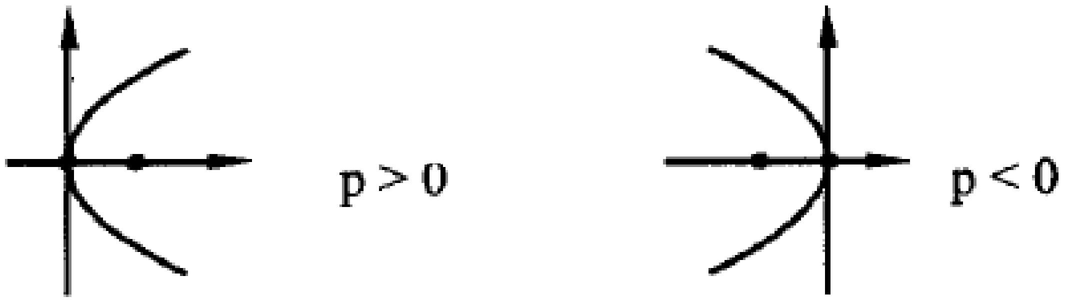


Figura 8.9

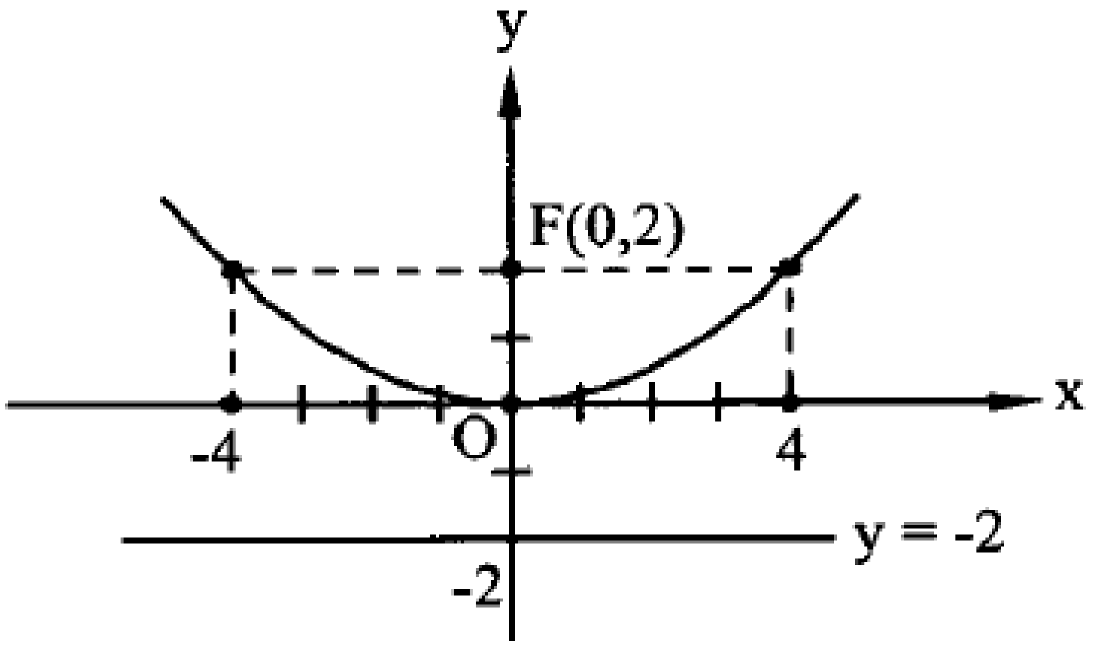
Exemplos

1) Para cada uma das parábolas $x^2 = 8y$ e $x = -\frac{1}{2}y^2$, construir o gráfico e encontrar o foco e uma equação da diretriz.

Solução

a) $x^2 = 8y$

Observemos que nesta equação, a cada valor de y, por exemplo, 2, correspondem dois valores de x simétricos, no caso, 4 e -4. Logo, os pontos (4, 2) e (-4, 2) pertencem à parábola (Figura 8.10).



Como a equação é da forma

$x^2 = 2py$, tem-se

$2p = 8$

$p = 4$

$\frac{p}{2} = 2$

Portanto,

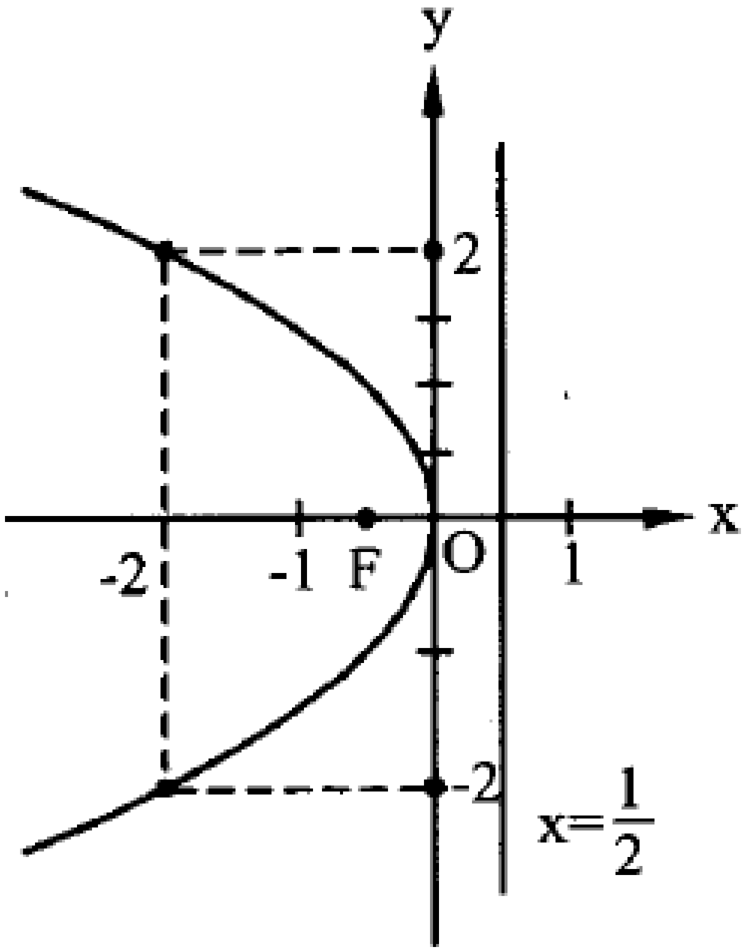
foco: F(0,2)

diretriz: $y = -2$

b) A equação reduzida de $x = -\frac{1}{2}y^2$ é

$$y^2 = -2x$$

Observemos que nesta equação, a cada valor de x, por exemplo, -2, correspondem dois valores de y simétricos, no caso, 2 e -2. Logo, os pontos (-2, 2) e (-2, -2) pertencem à parábola (Figura 8.11).



Como a equação é da forma $y^2 = 2px$, tem-se

$$2p = -2$$
$$p = -1$$
$$\frac{p}{2} = -\frac{1}{2}$$

Portanto,

foco: $F(-\frac{1}{2}, 0)$

diretriz: $x = \frac{1}{2}$

2) Traçar um esboço do gráfico e obter uma equação da parábola que satisfaça as condições:

   a) vértice V(0, 0) e foco F(1, 0)

Solução

a) A equação é da forma

$$y^2 = 2px \quad \text{(Figura 8.12 - o eixo da parábola é Ox)}$$

Mas,

$$\frac{p}{2} = 1 \quad \text{ou} \quad p = 2$$

ou

$$2p = 4$$

Substituindo este valor de 2p na equação acima, obtemos

$$y^2 = 4x$$

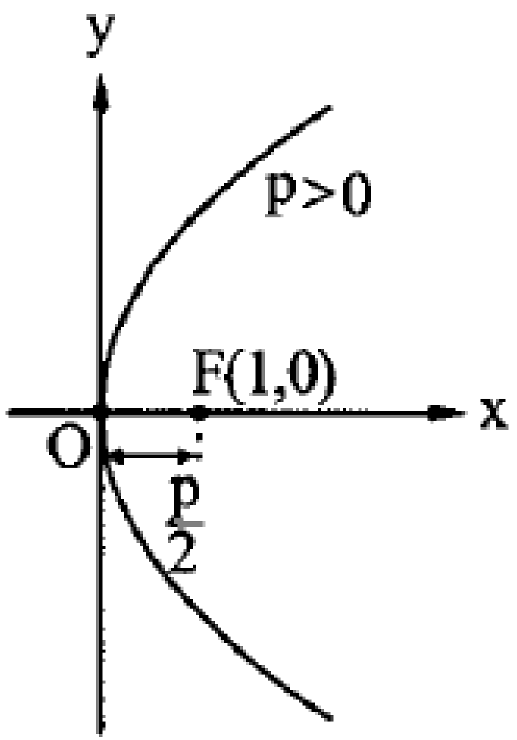


Figura 8.12

b) vértice V(0, 0) e diretriz y = 3

Solução

b) A equação é da forma

$$x^2 = 2py \quad \text{(Figura 8.13 - o eixo da parábola é Oy)}$$

Mas

$$\frac{p}{2} = -3 \quad \text{ou} \quad 2p = -12$$

Logo, a equação é

$$x^2 = -12y$$

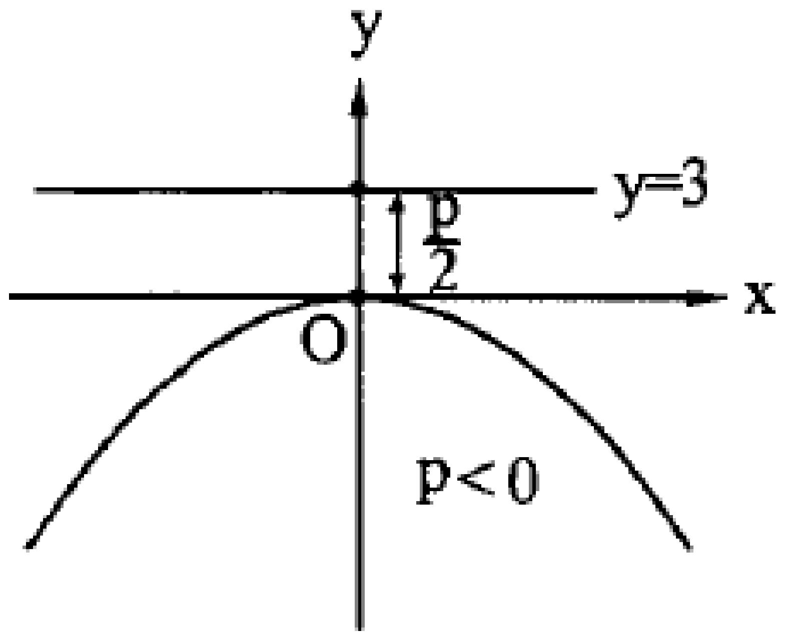


Figura 8.13

c) vértice V(0, 0), passa pelo ponto P(-2, 5) e concavidade voltada para cima.

Solução

c) A equação é da forma

$$x^2 = 2py \quad \text{(Figura 8.14 – o eixo da parábola é Oy)}$$

Como P pertence à parábola, o ponto (-2, 5) é uma solução da equação, isto é, a afirmação

$$(-2)^2 = 2p(5)$$

é verdadeira. Daí vem

$$2p = \frac{4}{5}$$

e, portanto, a equação desejada é

$$x^2 = \frac{4}{5}y$$

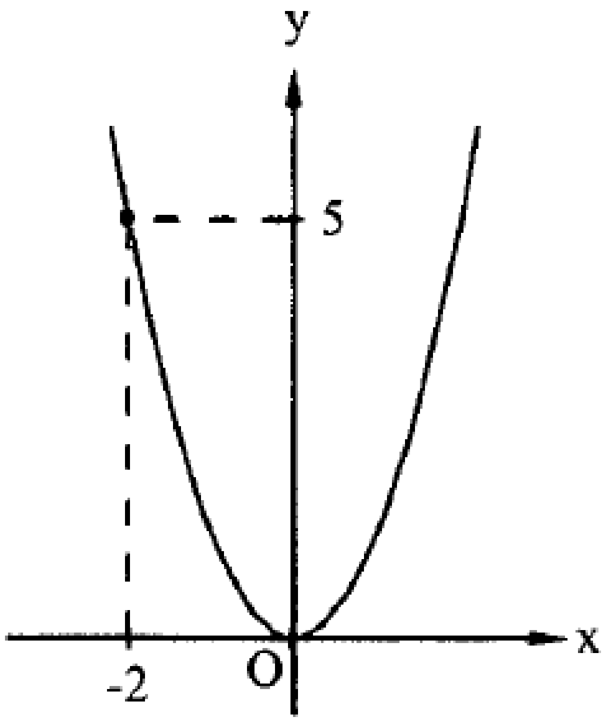


Figura 8.14

Translação de Eixos

Consideremos no plano cartesiano xOy um ponto O'(h,k), arbitrário. Vamos introduzir um novo sistema x'O'y' tal que os eixos O'x' e O'y' tenham a mesma unidade de medida, a mesma direção e o mesmo sentido dos eixos Ox e Oy. Assim, todo ponto P do plano tem duas representações: P(x,y) no sistema xOy e P(x', y') no sistema x'O'y' (Figura 8.15)

Desta figura obtém-se

$$x = x' + h \quad \text{e} \quad y = y' + k$$

ou $\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad$ (4)

$$x' = x - h \quad \text{e} \quad y' = y - k$$

que são as *fórmulas de translação.*

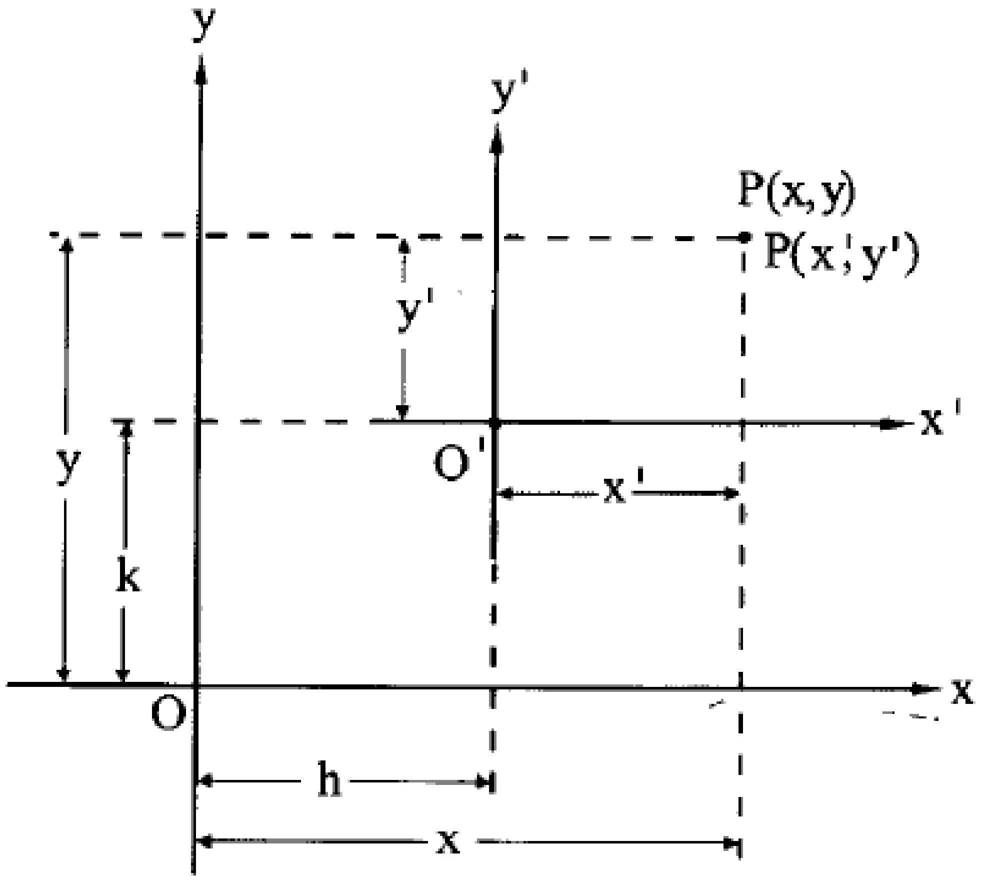
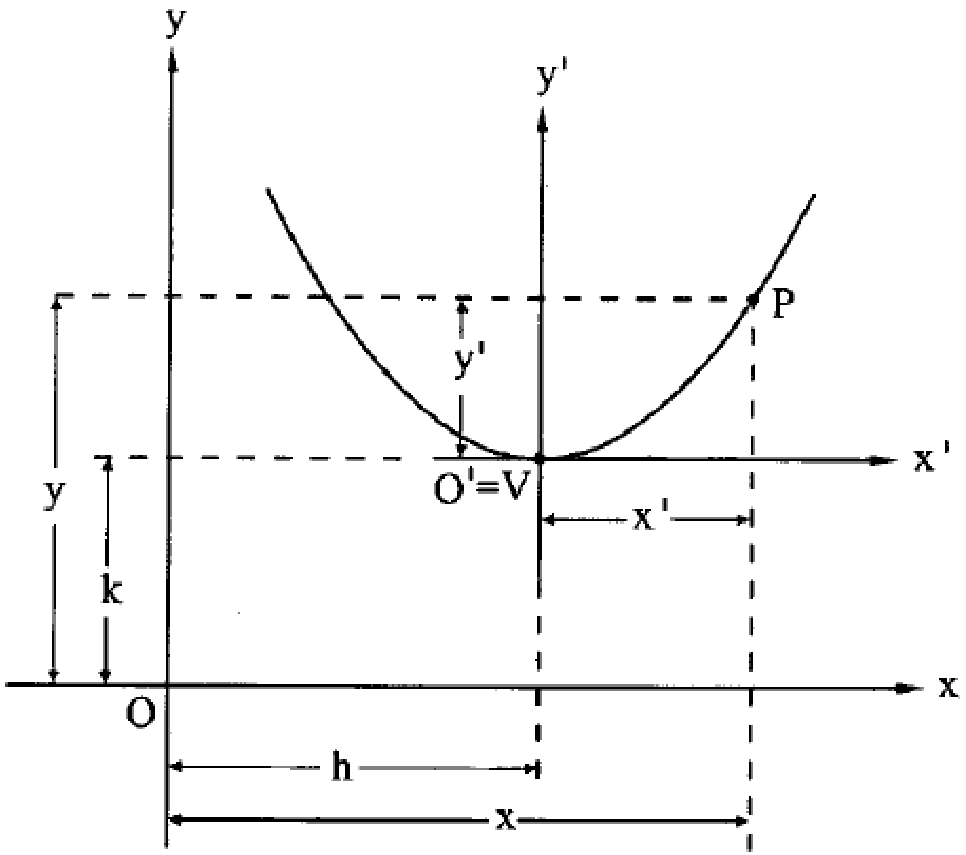


Figura 8.15

Outras Formas da Equação de Parábola

Seja uma parábola de vértice $V(h, k) \neq (0, 0)$. Consideraremos somente os casos de o eixo da parábola ser paralelo a um dos eixos coordenados.



1º) *O eixo da parábola é paralelo ao eixo dos y*

Com origem no ponto V, tracemos o sistema x'O'y' (O'=V) nas condições do que foi visto no item anterior (Figura 8.16).

A parábola em relação a este sistema tem vértice na origem e, portanto, sua equação reduzida é

$$x'^2 = 2py' \qquad (5)$$

Como para todo ponto P da parábola, por (4) temos

$$x' = x - h \quad \text{e} \quad y' = y - k$$

e pela substituição em (5) resulta a equação

$$\boxed{(x - h)^2 = 2p(y - k)}$$

que é a *forma padrão* para este caso e referida ao sistema xOy.

As observações feitas anteriormente com relação ao parâmetro p continuam válidas: se $p > 0$, a parábola está voltada para cima e, estará para baixo, se $p < 0$.

2º) *O eixo da parábola é paralelo ao eixo dos x*

De modo análogo temos

$$\boxed{(y - k)^2 = 2p(x - h)}$$

Exemplos

1) Determinar uma equação da parábola de vértice V(3, -2), eixo paralelo ao dos y e parâmetro $p = 1$.

Solução

Como o eixo da parábola é paralelo ao eixo dos y, sua equação é da forma

$$(x - h)^2 = 2p(y - k)$$

e, neste caso, temos

$$(x - 3)^2 = 2(1)(y + 2)$$

ou

$$(x - 3)^2 = 2(y + 2)$$

e cujo gráfico é o da Figura 8.17.

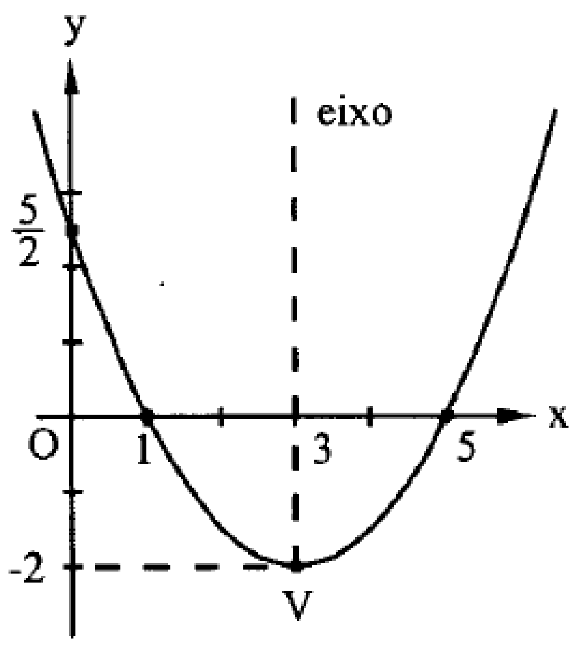


Figura 8.17

OBSERVAÇÃO

Veja que:

$$(x-3)^2 = 2(y+2) \Rightarrow x^2 - 6x + 9 = 2y + 4$$

$$\Rightarrow x^2 - 6x - 2y + 5 = 0$$

que é a *Equação Geral* desta parábola.

Isolando o *y*, obtemos a *Equação Explícita* desta parábola:

$$y = \frac{1}{2}x^2 - 3x + \frac{5}{2}$$

RESUMO EQUAÇÕES PARÁBOLA:

Equações Reduzidas:

- parábola de vértice (0,0) e cujo eixo é o eixo *y*: $x^2 = 2py$

- parábola de vértice (0,0) e cujo eixo é o eixo *x*: $y^2 = 2px$

- parábola de vértice (h, k) e cujo eixo é paralelo ao eixo *y*: $(x - h)^2 = 2p(y - k)$

- parábola de vértice (h, k) e cujo eixo é paralelo ao eixo *x*: $(y - k)^2 = 2p(x - h)$

Equação Geral:

$\boxed{ax^2 + cx + dy + f = 0}$ $a \neq 0$ $\boxed{by^2 + cx + dy + f = 0}$ $b \neq 0$

Equação Explícita:

$\boxed{y = ax^2 + bx + c}$ $a \neq 0$ $\boxed{x = ay^2 + by + c}$ $a \neq 0$

2) Seja a parábola de vértice $V(4, 2)$ e foco $F(1, 2)$. Traçar um esboço do gráfico e determinar sua equação geral.

Solução

a) Um esboço do gráfico: Figura 8.18.

b) Tendo em vista que o eixo da parábola é paralelo ao eixo dos x, sua equação na forma padrão é

$$(y - k)^2 = 2p(x - h)$$

e como

$$h = 4,\ k = 2,\ \frac{p}{2} = -3\ \therefore\ 2p = -12,$$

a equação acima fica

$$(y - 2)^2 = -12(x - 4)$$

Efetuando as operações indicadas e ordenando, vem

$$y^2 - 4y + 4 = -12x + 48$$

ou

$$y^2 + 12x - 4y - 44 = 0$$

que é uma equação geral desta parábola.

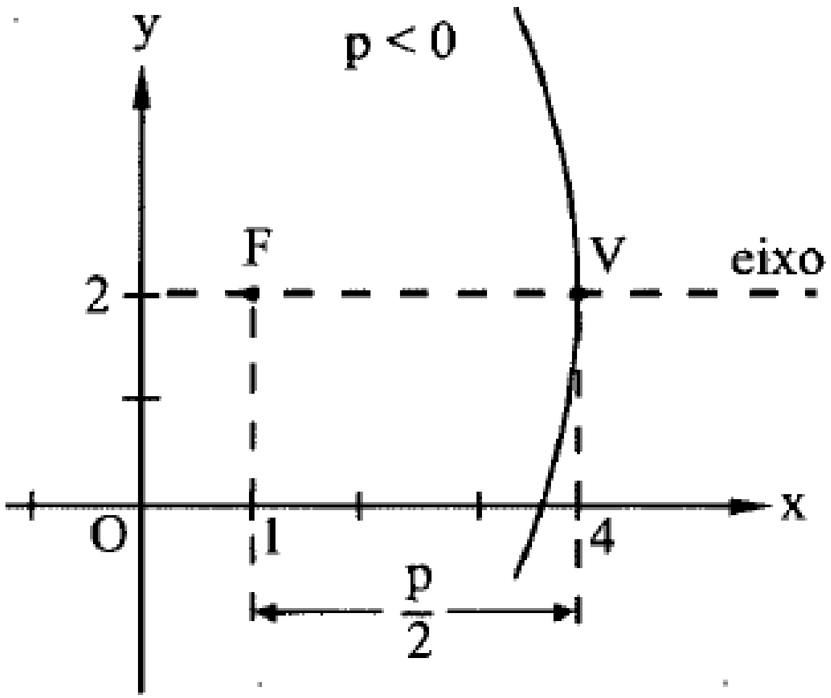


Figura 8.18

3) Determinar uma equação da parábola da Figura 8.19.

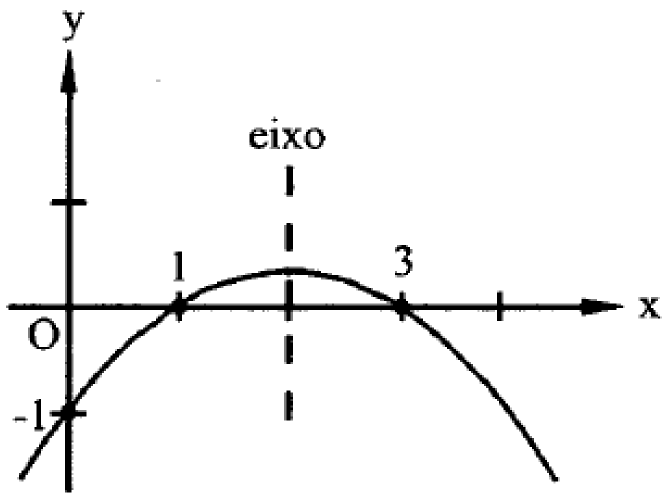


Figura 8.19

Solução

Entre a equação na forma padrão e a explícita, a segunda é mais simples para este problema.

Então, como o eixo desta parábola é paralelo ao dos y, sua equação é da forma

$$y = ax^2 + bx + c$$

Ora, sendo (0, -1), (1, 0) e (3, 0) pontos da parábola, suas coordenadas devem satisfazer esta equação, isto é,

$$\begin{cases} -1 = a(0)^2 + b(0) + c \\ 0 = a(1)^2 + b(1) + c \\ 0 = a(3)^2 + b(3) + c \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} c = -1 \\ a + b + c = 0 \\ 9a + 3b + c = 0 \end{cases}$$

sistema cuja solução é $a = -\frac{1}{3}$, $b = \frac{4}{3}$ e $c = -1$

Logo, a equação da parábola é

$$y = -\frac{1}{3}x^2 + \frac{4}{3}x - 1$$

4) Dada a parábola de equação $y^2 + 6y - 8x + 17 = 0$, determinar

a) sua equação reduzida;
b) o vértice;
c) um esboço do gráfico;
d) o foco e uma equação da diretriz;
e) uma equação do eixo.

Solução

a) Iniciemos escrevendo a equação na forma

$$y^2 + 6y = 8x - 17$$

Completemos o quadrado do primeiro membro:

$$y^2 + 6y + 9 = 8x - 17 + 9$$

Como adicionamos 9 ao primeiro membro, devemos fazer o mesmo com o membro da direita. A última equação pode ser escrita

$$(y + 3)^2 = 8(x - 1) \qquad (10)$$

b) Como a equação (10) é da forma padrão

$$(y - k)^2 = 2p(x - h) \qquad (11)$$

onde *h* e *k* são as coordenadas do vértice, vem imediatamente: V(1, -3).

c) Um esboço do gráfico: Figura 8.20.

d) Confrontando (10) e (11) concluímos:

$$2p = 8,\ p = 4,\ \frac{p}{2} = 2$$

e pelo gráfico tem-se

foco: F(3, -3)

diretriz: x = -1

e) Eixo: y = -3

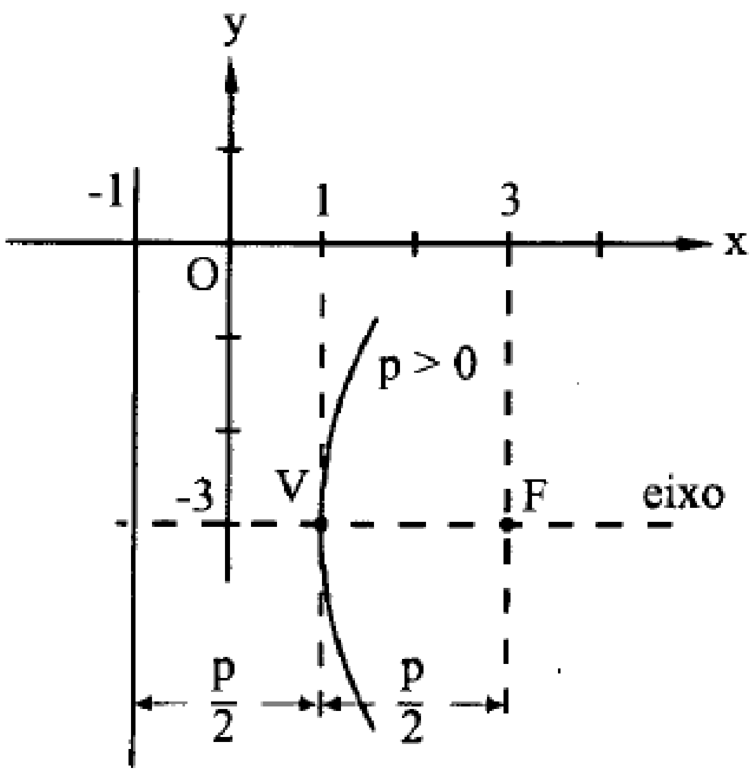
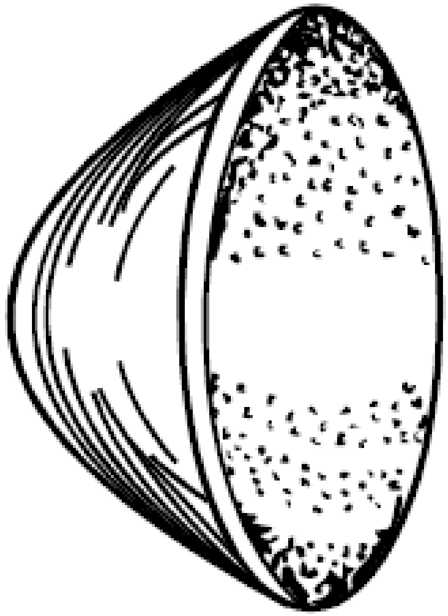


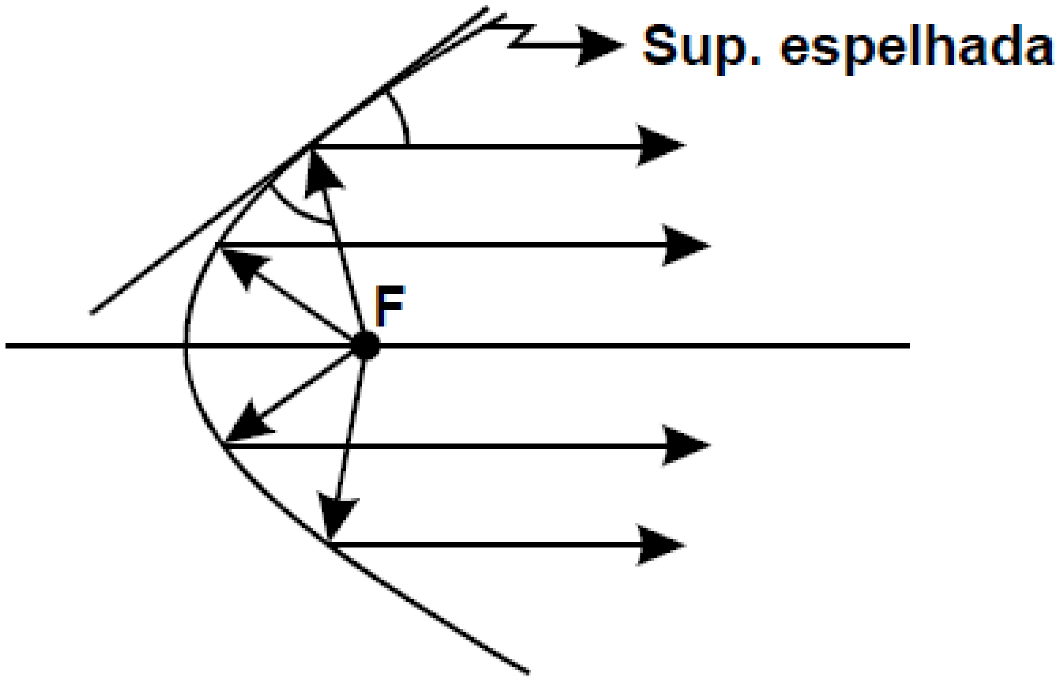
Figura 8.20

Aplicações da Parábola

a) A secção de um farol de automóvel tem o formato de uma parábola (a superfície espelhada é um parabolóide). A lâmpada situada no foco, quando acesa, emite raios luminosos que após incidirem sobre a parábola serão refletidos numa mesma direção segundo retas paralelas ao eixo da parábola.



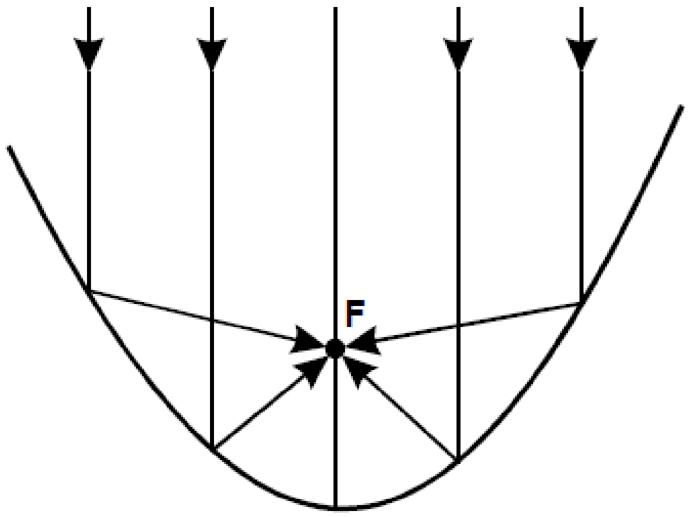
Farol de um automóvel



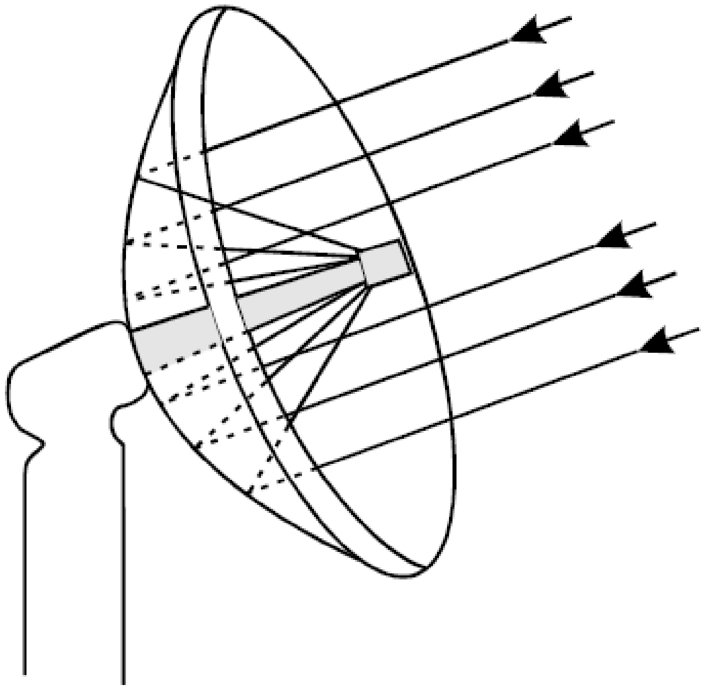
Secção de um farol

b) Se umespelho parabólico é apontado para o Sol, os raios de luz (paralelos ao eixo da parábola) serão refletidos para o mesmo ponto (foco). Pela grande quantidade de calor produzido nesta fonte, procede o nome <u>foco</u> (em latim *focus* significa **fogo**).

Aplica-se o mesmo princípio na construção de espelhos para telescópios, antenas de radar e antenas parabólicas (as ondas paralelas ao eixo da parábola, se refletem na antena e confluem para o retransmissor).



(espelho parabólico)



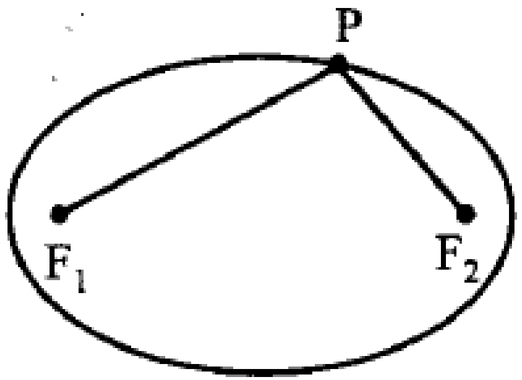
(antena parabólica)

ELIPSE

Definição

Elipse é o conjunto de todos os pontos de um plano cuja *soma das distâncias* a dois pontos fixos desse plano é constante.

Consideremos no plano dois pontos distintos, F_1 e F_2, tal que a distância $d(F_1, F_2) = 2c$, e um número real positivo *a* com $2a > 2c$.



Chamando de 2a a constante da definição, um ponto P pertence à elipse (Figura 8.22) se, e somente se,

$$\boxed{d(P, F_1) + d(P, F_2) = 2a} \qquad (1)$$

Elementos

Com base na Figura 8.24, tem-se:

Focos: são os pontos F_1 e F_2.

Distância focal: é a distância 2c entre os focos.

Centro: é o ponto médio C do segmento $F_1 F_2$.

Eixo maior: é o segmento A_1A_2 de comprimento 2a (este segmento contém os focos).

Eixo menor: é o segmento B_1B_2 de comprimento 2b e perpendicular a A_1A_2 no seu ponto médio.

Vértices: são os pontos A_1, A_2, B_1 e B_2.

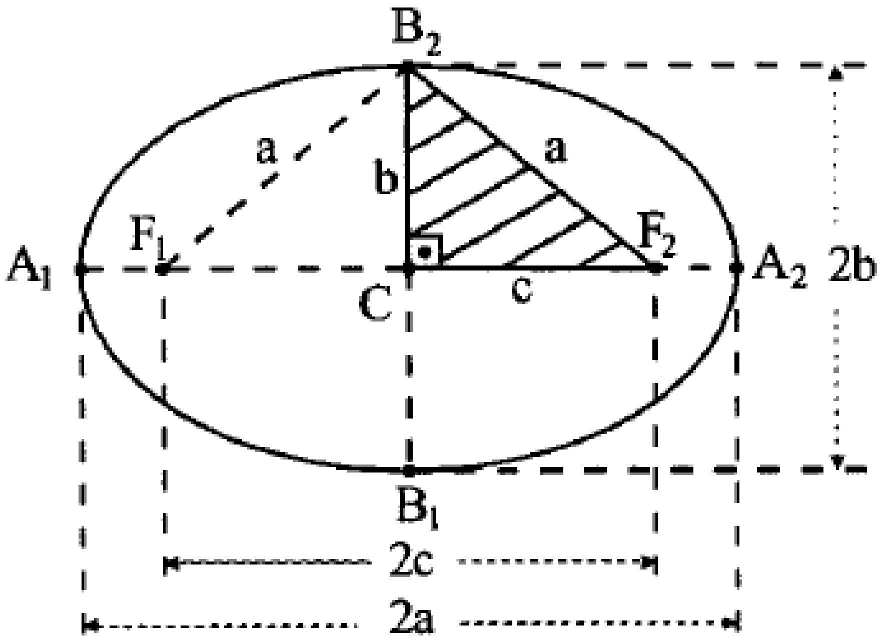


Figura 8.24

Pela Figura 8.24 é imediato que $B_2F_2 = a$ pois $B_2F_1 + B_2F_2 = 2a$ (definição de elipse) e $B_2F_1 = B_2F_2$. Logo, do triângulo retângulo B_2CF_2 vem

$$\boxed{a^2 = b^2 + c^2} \qquad (2)$$

Esta igualdade mostra que $b < a$ e $c < a$.

Excentricidade da elipse é o número real

$$e = \frac{c}{a} \qquad (0 < e < 1)$$

CURIOSIDADE!

A 1º lei do astrônomo alemão Johannes Kepler (1571-1630) é expressa por: "*qualquer planeta gira em torno do Sol, descrevendo uma órbita elíptica, da qual o Sol ocupa um dos focos*". A maioria dos planetas tem órbitas aproximadamente circulares, o que significa dizer que suas excentricidades estão perto de zero. Por exemplo, a órbita da Terra tem excentricidade 0,02, a de Júpiter 0,05, a de Marte 0,09, para citar apenas algumas. Mercúrio e Plutão, cujas órbitas elípticas têm excentricidades bem maiores, 0,21 e 0,25, respectivamente, constituem uma exceção à maioria dos planetas. O "campeão" de excentricidade no sistema solar parece ser o Cometa de Halley com e = 0,967 (quase 1) e ele leva aproximadamente 76 anos (período de revolução) para dar uma volta em torno do Sol. A Figura 8.25 dá uma idéia das trajetórias da Terra e de Halley com o Sol num dos focos.

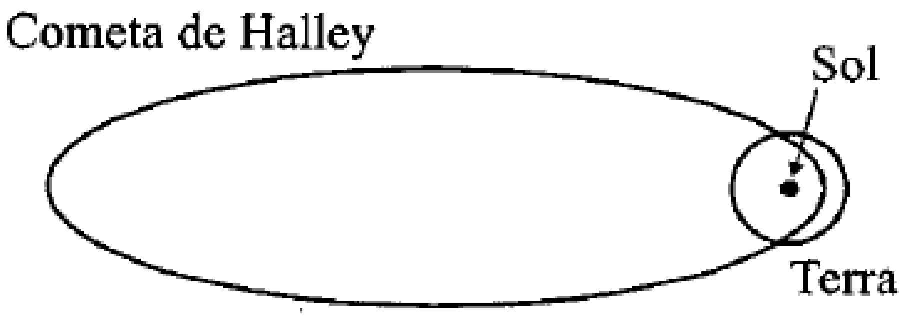


Figura 8.25

Equações Reduzidas

Seja a elipse de centro C(0, 0). Consideraremos dois casos:

1º) *O eixo maior está sobre o eixo dos x*

Seja P(x, y) um ponto qualquer de uma elipse (Figura 8.26) de focos $F_1(-c, 0)$ e $F_2(c, 0)$.

Pela definição em (1), tem-se

$$d(P, F_1) + d(P, F_2) = 2a$$

ou

$$|\overrightarrow{F_1P}| + |\overrightarrow{F_2P}| = 2a$$

ou, em coordenadas

$$|(x + c, y - 0)| + |(x - c, y - 0)| = 2a$$

$$\sqrt{(x + c)^2 + y^2} + \sqrt{(x - c)^2 + y^2} = 2a$$

$$\sqrt{x^2 + y^2 + 2cx + c^2} = 2a - \sqrt{x^2 + y^2 - 2cx + c^2}$$

$$(\sqrt{x^2 + y^2 + 2cx + c^2})^2 = (2a - \sqrt{x^2 + y^2 - 2cx + c^2})^2$$

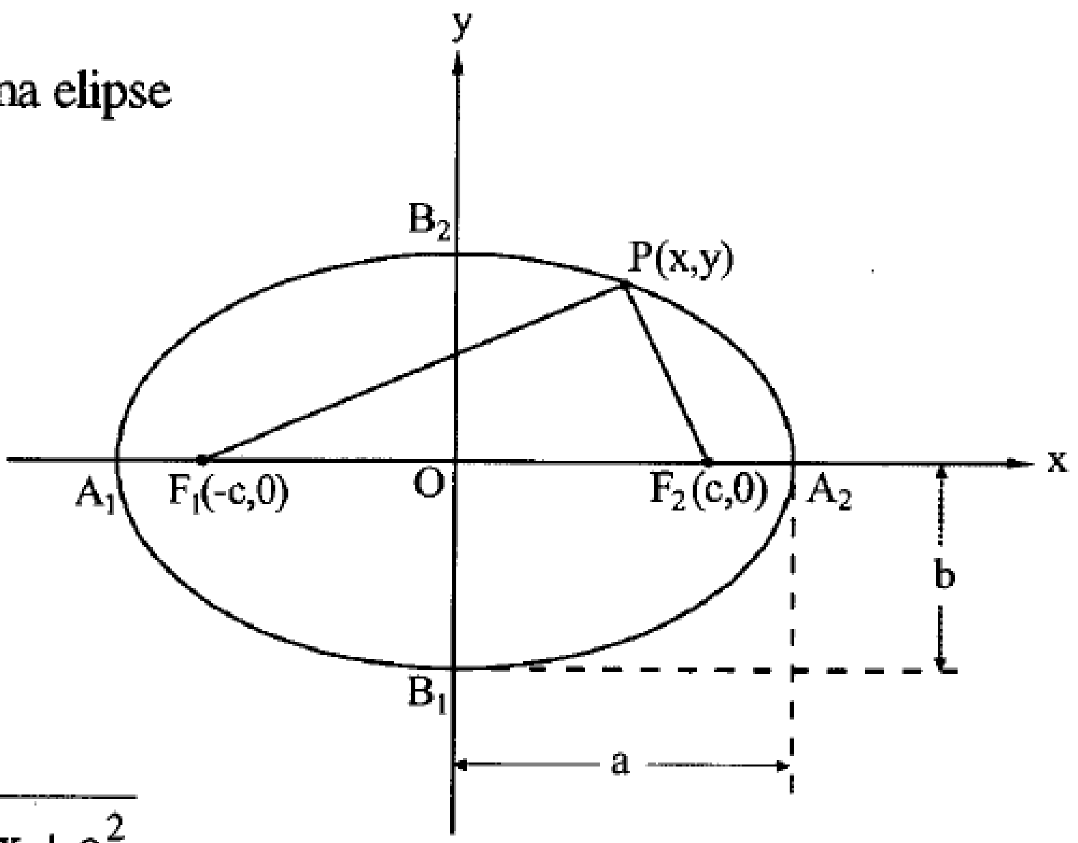


Figura 8.26

$$x^2+y^2+2cx+c^2=4a^2-4a\sqrt{x^2+y^2-2cx+c^2}+x^2+y^2-2cx+c^2$$

$$a\sqrt{x^2+y^2-2cx+c^2}=a^2-cx$$

$$a^2(x^2+y^2-2cx+c^2)=a^4-2a^2cx+c^2x^2$$

$$a^2x^2+a^2y^2-2a^2cx+a^2c^2=a^4-2a^2cx+c^2x^2$$

$$a^2x^2-c^2x^2+a^2y^2=a^4-a^2c^2$$

$$(a^2-c^2)x^2+a^2y^2=a^2(a^2-c^2)$$

Como por (2) tem-se $a^2-c^2=b^2$, resulta

$$b^2x^2+a^2y^2=a^2b^2$$

Dividindo ambos os membros da equação por a^2b^2. vem

$$\boxed{\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1}$$

que é a *equação reduzida* para este caso.

2º) *O eixo maior está sobre o eixo dos y*

Observando a Figura 8.27, com procedimento análogo ao 1º caso, obteremos a equação reduzida

$$\boxed{\frac{x^2}{b^2}+\frac{y^2}{a^2}=1}$$

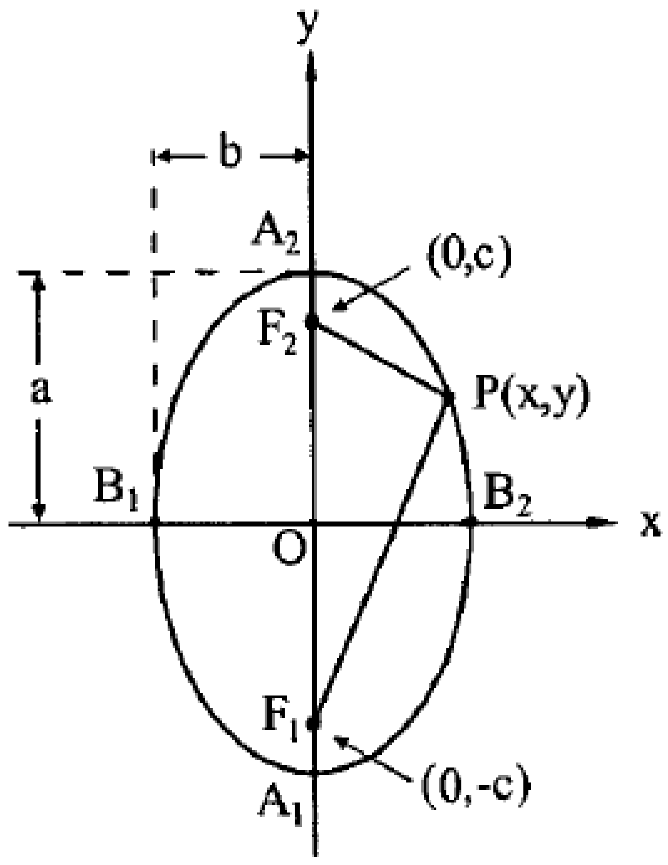


Figura 8.27

Observação

Como em toda elipse tem-se a > b (ou $a^2 > b^2$), para saber se a elipse tem seu eixo maior sobre Ox ou sobre Oy, basta *observar onde está o maior denominador* (a^2) na sua equação reduzida. Se esse for denominador de x^2, o eixo maior está sobre Ox. Caso contrário, estará sobre Oy.

Por exemplo, na equação reduzida

$$\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{9}=1$$

o maior denominador é 9. Como ele é denominar de y^2, o eixo maior da elipse está sobre o eixo dos y (Figura 8.28). No caso, temos

$$a^2=9 \quad \therefore \quad a=3$$

$$b^2=4 \quad \therefore \quad b=2$$

e, portanto, as interseções com os eixos são os quatro pontos $(0, \pm 3)$ e $(\pm 2, 0)$.

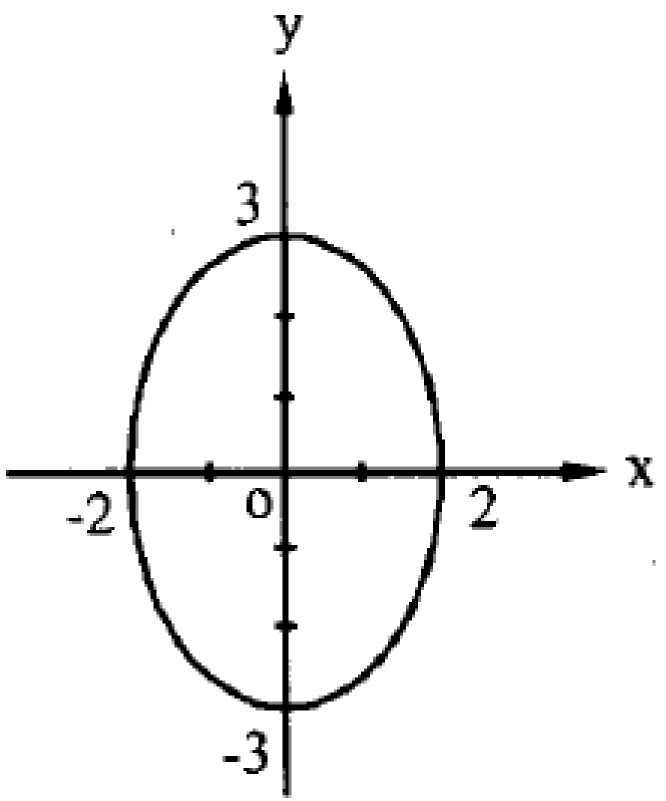


Figura 8.28

Exemplos

Nos problemas de 1 a 3, para cada uma das elipses, determinar

a) a medida dos semi-eixos;

b) um esboço do gráfico;

c) os focos;

d) a excentricidade.

1) $9x^2 + 25y^2 = 225$

2) $4x^2 + y^2 - 16 = 0$

3) $x^2 + y^2 - 9 = 0$

1) $9x^2 + 25y^2 = 225$

Solução

a) Para expressar a equação na forma reduzida, dividimos ambos os membros da equação por 225:

$$\frac{9x^2}{225} + \frac{25y^2}{225} = \frac{225}{225}$$

ou

$$\frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{9} = 1$$

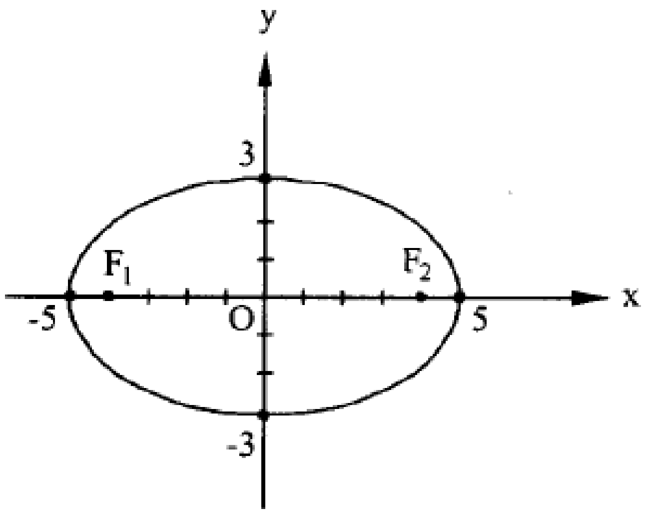
Maior denominador: 25. Logo, $a^2 = 25$ e o eixo maior da elipse está sobre o eixo dos x porque 25 é denominador de x^2.

Então,

$$a^2 = 25 \quad \therefore \quad a = 5$$

$$b^2 = 9 \quad \therefore \quad b = 3$$

b) Gráfico: Figura 8.29



c) $a^2 = b^2 + c^2$

$$25 = 9 + c^2$$

$$c^2 = 16 \quad \therefore \quad c = 4$$

Logo, os focos são $F_1(-4, 0)$ e $F_2(4, 0)$

d) $e = \dfrac{c}{a} = \dfrac{4}{5}$

2) $4x^2 + y^2 - 16 = 0$

Solução

a) Conduzindo a equação para a forma reduzida, vem

$$4x^2 + y^2 = 16 \quad \text{ou} \quad \frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{16} = 1$$

Maior denominador: 16 (denominador de y^2)

Logo,

$$a^2 = 16 \quad \therefore \quad a = 4$$

$$b^2 = 4 \quad \therefore \quad b = 2$$

b) Gráfico: Figura 8.30.

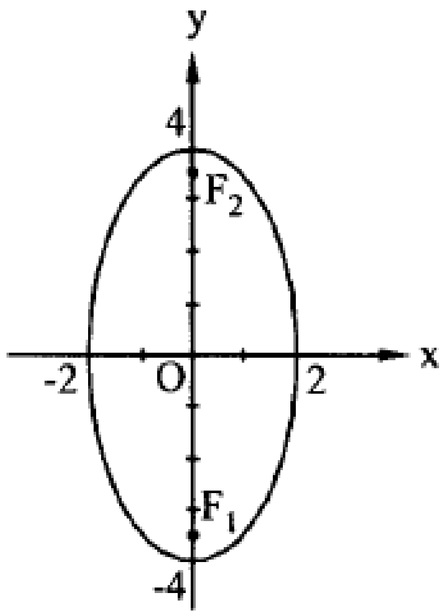


Figura 8.30

c) $a^2 = b^2 + c^2$

$16 = 4 + c^2$

$c^2 = 12 \quad \text{e} \quad c = \sqrt{12}$

Logo, os focos são $F_1(0, -\sqrt{12})$ e $F_2(0, \sqrt{12})$

d) $e = \frac{c}{a} = \frac{\sqrt{12}}{4} = \frac{2\sqrt{3}}{4} = \frac{\sqrt{3}}{2}$

3) $x^2 + y^2 - 9 = 0$

Solução

a) A forma reduzida desta equação é

$$\frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{9} = 1$$

Neste caso, tem-se $a^2 = b^2 = 9$ e, portanto, $a = b = 3$

Trata-se de uma circunferência de raio 3.

b) Gráfico: Figura 8.31.

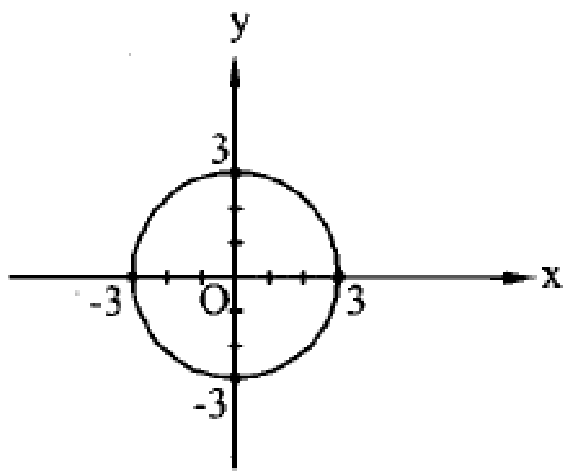


Figura 8.31

c) $a^2 = b^2 + c^2$

$$9 = 9 + c^2$$
$$c = 0$$

Portanto, os dois focos coincidem com o centro da circunferência.

d) $e = \frac{c}{a} = \frac{0}{3} = 0$

4) Uma elipse de centro na origem tem um foco no ponto (3, 0) e a medida do eixo maior é 8. Determinar sua equação.

Solução

Como o foco é ponto do eixo do x, a equação desta elipse é da forma

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$$

Precisamos determinar a e b. Como o eixo maior mede 8, isto é,

$$2a=8 \quad \therefore \quad a=4$$

Tendo em vista que o centro da elipse é (0, 0) e um dos focos é (3, 0), conclui-se que $c=3$.

Mas

$$a^2=b^2+c^2$$

ou

$$16=b^2+9 \quad \therefore \quad b^2=7$$

Logo, a equação procurada é

$$\frac{x^2}{16}+\frac{y^2}{7}=1$$

Outras Formas da Equação da Elipse

Seja uma elipse de centro $C(h, k) \neq (0, 0)$. Consideraremos somente os casos de os eixos da elipse serem paralelos aos eixos coordenados.

1º) *O eixo maior é paralelo ao eixo dos x*

Utilizando uma conveniente translação de eixos, obtemos um novo sistema $x'O'y'$ (Figura 8.32) em relação ao qual a elipse tem centro na origem e eixo maior sobre o eixo $O'x'$. Logo, sua equação reduzida é

$$\boxed{\frac{x'^2}{a^2} + \frac{y'^2}{b^2} = 1} \qquad (3)$$

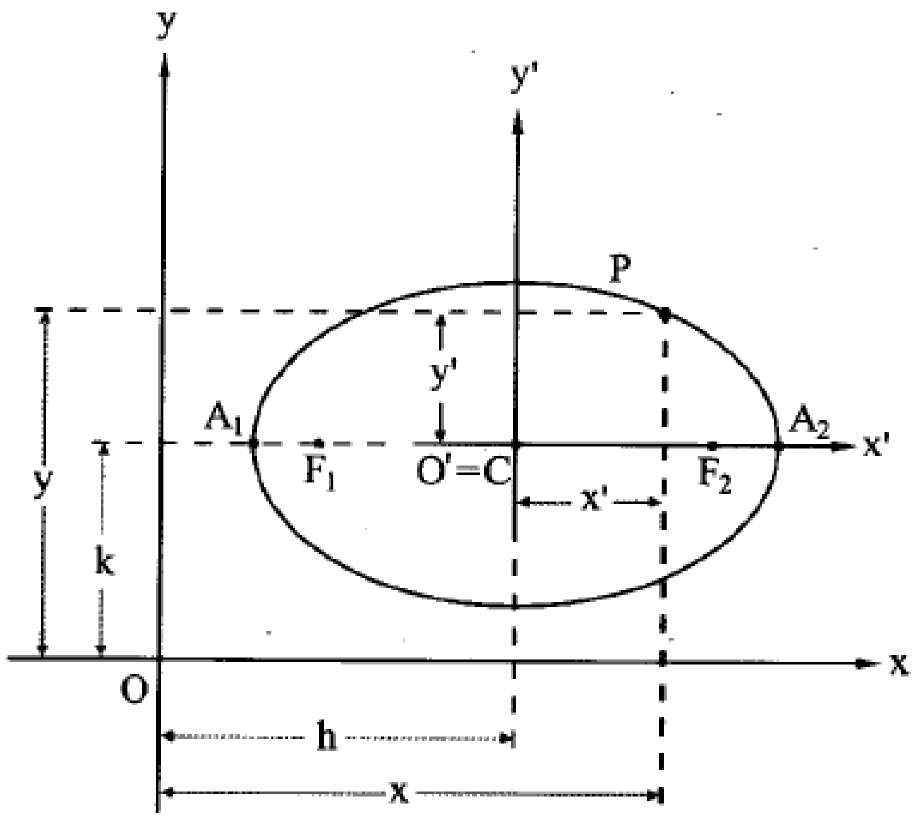


Figura 8.32

Para expressá-la em relação ao sistema original xOy, utilizamos as fórmulas de translação

$$x' = x - h \quad \text{e} \quad y' = y - k,$$

que substituídas em (3) resulta

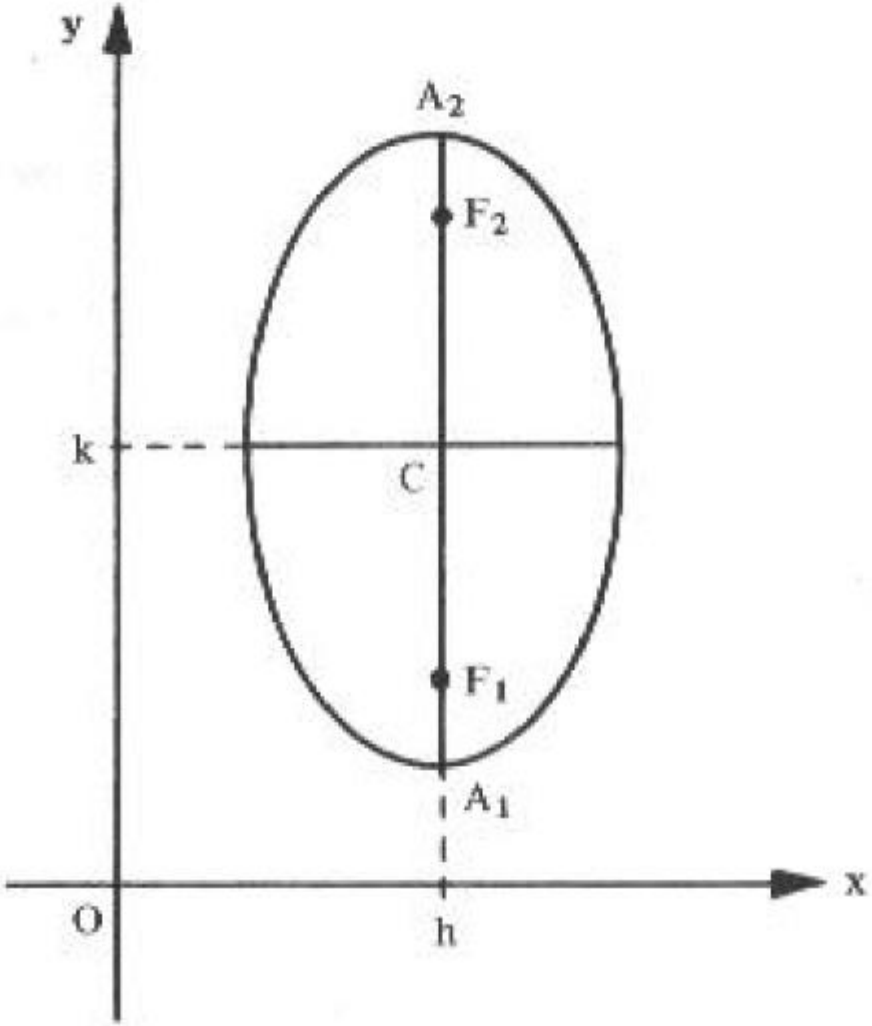
$$\boxed{\frac{(x-h)^2}{a^2} + \frac{(y-k)^2}{b^2} = 1}$$

que é a *forma padrão* para este caso.

2º) *O eixo maior é paralelo ao eixo dos y*

De modo análogo ao 1º caso, temos

$$\boxed{\frac{(x-h)^2}{b^2}+\frac{(y-k)^2}{a^2}=1}$$



Exemplos

1) Uma elipse, cujo eixo maior é paralelo ao eixo dos y, tem centro C(4, -2), excentricidade $e = \frac{1}{2}$ e eixo menor de medida 6. Obter uma equação desta elipse.

Solução

Como o eixo maior da elipse é paralelo ao eixo dos y, sua equação é da forma

$$\frac{(x - h)^2}{b^2} + \frac{(y - k)^2}{a^2} = 1$$

com h = 4 e k = -2.

Precisamos determinar a e b.

Mas

$$2b = 6 \quad \therefore \quad b = 3$$

Sendo

$$e = \frac{c}{a} = \frac{1}{2}, \text{ vem } c = \frac{a}{2}$$

De

$$a^2 = b^2 + c^2$$

resulta

$$a^2 = 3^2 + (\frac{a}{2})^2$$

ou

$$a^2 = 9 + \frac{a^2}{4}, \text{ donde } a^2 = 12$$

Logo, a equação da elipse é

$$\frac{(x - 4)^2}{9} + \frac{(y + 2)^2}{12} = 1$$

OBSERVAÇÃO:

$$\frac{(x-4)^2}{9}+\frac{(y+2)^2}{12}=1$$

Se eliminarmos os denominadores, desenvolvermos os quadrados e ordenarmos os termos, obteremos outra forma da equação da elipse:

$$4(x^2-8x+16)+3(y^2+4y+4)=36$$

ou

$$4x^2-32x+64+3y^2+12y+12-36=0$$

ou

$$4x^2+3y^2-32x+12y+40=0$$

que é uma *equação geral* desta elipse.

Assim, qualquer elipse cujos eixos estão sobre os eixos coordenados ou são paralelos a eles, sempre pode ser representada por uma *equação geral* que terá a forma

$$\boxed{ax^2+by^2+cx+dy+f=0}$$

com a e b de mesmo sinal. Em particular, quando a = b esta equação poderá representar uma circunferência.

2) Dada a elipse de equação $4x^2+9y^2-8x-36y+4=0$, determinar:

a) sua equação reduzida;
b) o centro;
c) o gráfico;
d) os vértices;
e) os focos;
f) a excentricidade.

Solução

a) Iniciemos escrevendo a equação na forma

$$(4x^2-8x)+(9y^2-36y)=-4$$

ou

$$4(x^2-2x)+9(y^2-4y)=-4$$

onde agrupamos os termos de mesma variável e evidenciamos os fatores 4 e 9 para facilitar a construção dos trinômios quadrados nestes dois parênteses. Então temos

$$4(x^2-2x+1)+9(y^2-4y+4)=-4+4(1)+9(4)$$

ou

$$4(x-1)^2+9(y-2)^2=36$$

e dividindo ambos os membros por 36, resulta

$$\frac{(x-1)^2}{9}+\frac{(y-2)^2}{4}=1$$

que é a forma padrão da elipse de eixo maior paralelo ao eixo dos x.

b) Como a equação (4) é da forma padrão

$$\frac{(x - h)^2}{a^2} + \frac{(y - k)^2}{b^2} = 1$$

onde h e k são coordenadas do centro,
vem imediatamente: C(1, 2).

c) O gráfico: Figura 8.33.

d) Confrontando (4) e (5), concluímos:

$$a^2 = 9 \quad \therefore \quad a = 3$$

$$b^2 = 4 \quad \therefore \quad b = 2$$

e pelo gráfico tem-se:

$A_1(-2, 2)$ e $A_2(4, 2)$

$B_1(1, 0)$ e $B_2(1, 4)$

e) Para determinar os focos precisamos do valor de c.

De $a^2 = b^2 + c^2$

ou $9 = 4 + c^2$, vem $c = \sqrt{5}$ e, portanto, os focos são:

$F_1(1 - \sqrt{5}, 2)$ e $F_2(1 + \sqrt{5}, 2)$

f) Excentricidade: $e = \dfrac{c}{a} = \dfrac{\sqrt{5}}{3}$

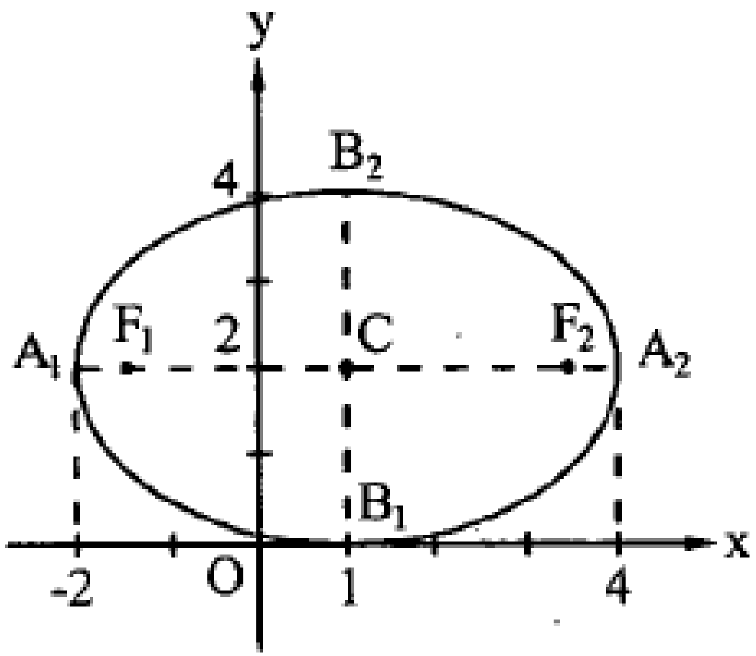


Figura 8.33

Resumo Equações Elipse:

Equações Reduzidas:

- elipse de centro (0,0) e cujo eixo maior é o eixo *x:*

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$$

- elipse de centro (0,0) e cujo eixo maior é o eixo *y:*

$$\frac{x^2}{b^2}+\frac{y^2}{a^2}=1$$

- elipse de centro (h,k) e cujo eixo maior é paralelo ao eixo *x:*

$$\frac{(x-h)^2}{a^2}+\frac{(y-k)^2}{b^2}=1$$

- elipse de centro (h,k) e cujo eixo maior é paralelo ao eixo y:

$$\frac{(x-h)^2}{b^2}+\frac{(y-k)^2}{a^2}=1$$

Equação Geral:

$ax^2+by^2+cx+dy+f=0$ com a e b de mesmo sinal.

Aplicações da Elipse

A propriedade da reflexão na elipse é análoga à da parábola. Se t é a tangente no ponto P de uma elipse de focos F_1 e F_2, são iguais os ângulos α e β formados pela reta tangente e os raios focais F_1P e F_2P, respectivamente (Figura 8.51).

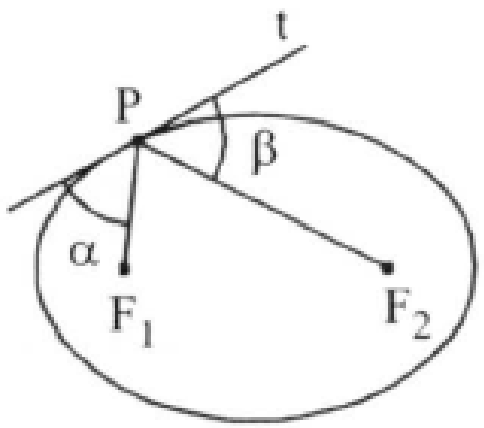


Figura 8.51

Imaginando uma superfície obtida girando-se a elipse em torno do eixo maior (a superfície é um elipsóide), e admitindo espelhada a parte interna, se uma fonte de luz for colocada num dos focos, digamos F_1, os raios que esta fonte irradia serão refletidos todos no outro foco F_2 (Figura 8.52).

Se ao invés de uma fonte luminosa tivéssemos uma fonte sonora, o som emitido de F_1 se refletiria nas paredes do elipsóide, convergindo em F_2.

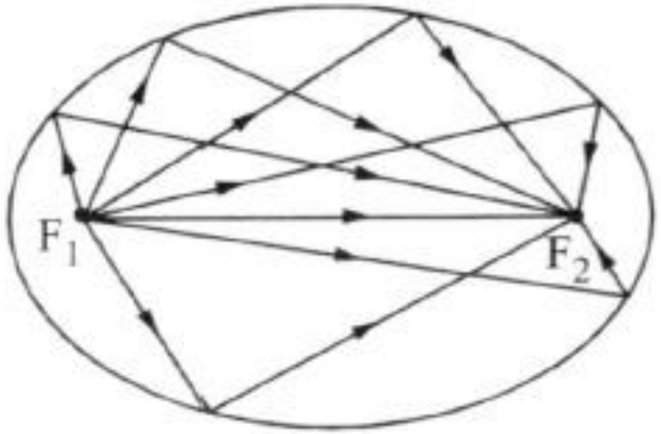


Figura 8.52

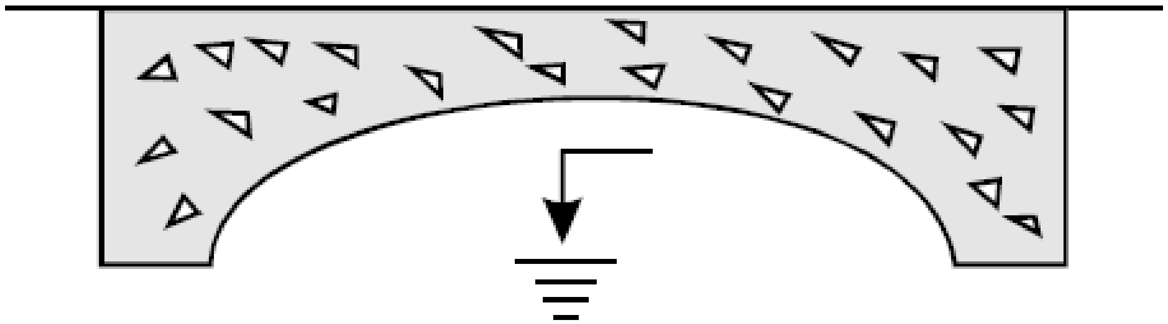
a) A trajetória dos planetas ao redor do Sol não é circular e sim elíptica (não considerando o deslocamento do sistema solar). Foi Kepler (1571-1630) quem desenvolveu esta teoria. No caso da Terra os semi-eixos são a = 153.493.000 km e b = 153.454.000 km. Donde podemos obter a excentricidade da órbita da Terra:

$$\varepsilon = \frac{c}{a} = 0{,}0167 \text{ (quase uma circunferência)}$$

O eixo maior apresenta dois pontos: o periélio (janeiro) e o afélio (julho), que correspondem às distâncias mínimas e máxima da Terra ao Sol, respectivamente.

Ademais, no globo terrestre (geóide) o equador tem aproximadamente a forma de uma circunferência e o meridiano de uma elipse.

b) Arcos emforma de semi-elipse sãomuito empregados na construção de pontes de concreto e de pedras (desde os antigos romanos).

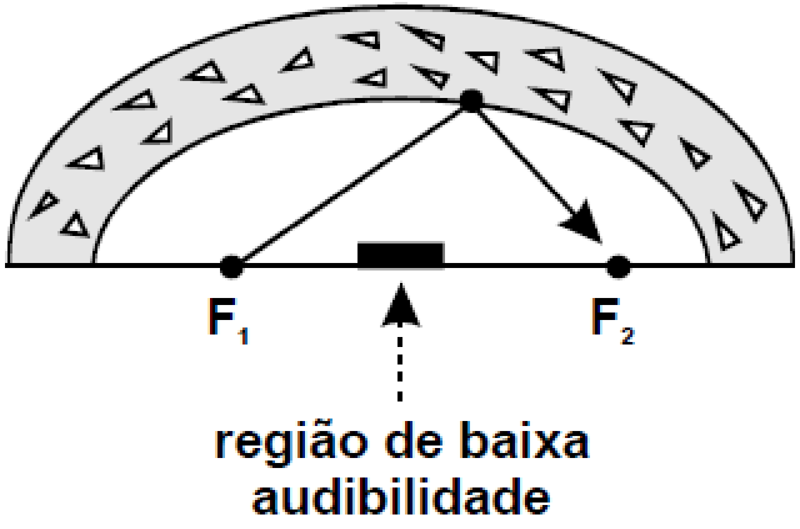


c) Engenharia Civil: em Resistência dos Materiais é muito empregada a elipse de inércia.

Engenharia Elétrica: conjuntos de elipses homofocais (elipses de mesmo foco) são utilizadas na teoria de correntes elétricas estacionárias.

Engenharia Mecânica: são usadas engrenagens elípticas (excêntricos).

d) Sob uma abóboda elíptica os sons emitidos em um foco têm melhor audibilidade nos pontos próximos ao outro foco, não obstante serem praticamente inaudíveis na região intermediária aos dois focos.



HIPÉRBOLE

Definição

Hipérbole é o conjunto de todos os pontos de um plano cuja *diferença das distâncias*, em valor absoluto, a dois pontos fixos desse plano é constante.

Consideremos no plano dois pontos distintos F_1 e F_2 tal que a distância $d(F_1, F_2) = 2c$ e um número real positivo a de modo que $2a < 2c$.

Chamando de 2a a constante da definição, um ponto P pertence à hipérbole (Figura 8.35) se, e somente se,

$$\boxed{|d(P,F_1) - d(P,F_2)| = 2a} \qquad (1)$$

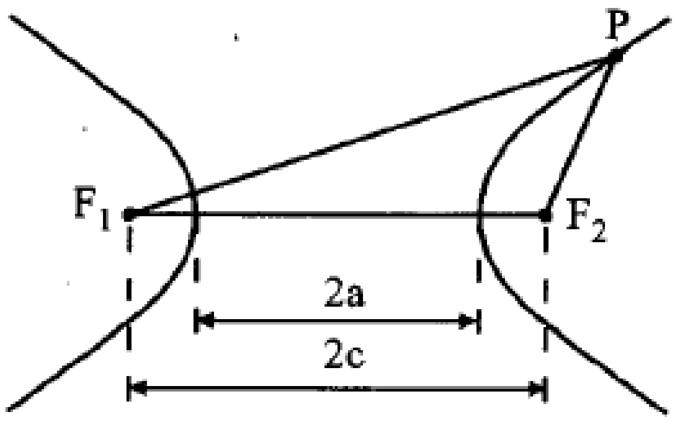
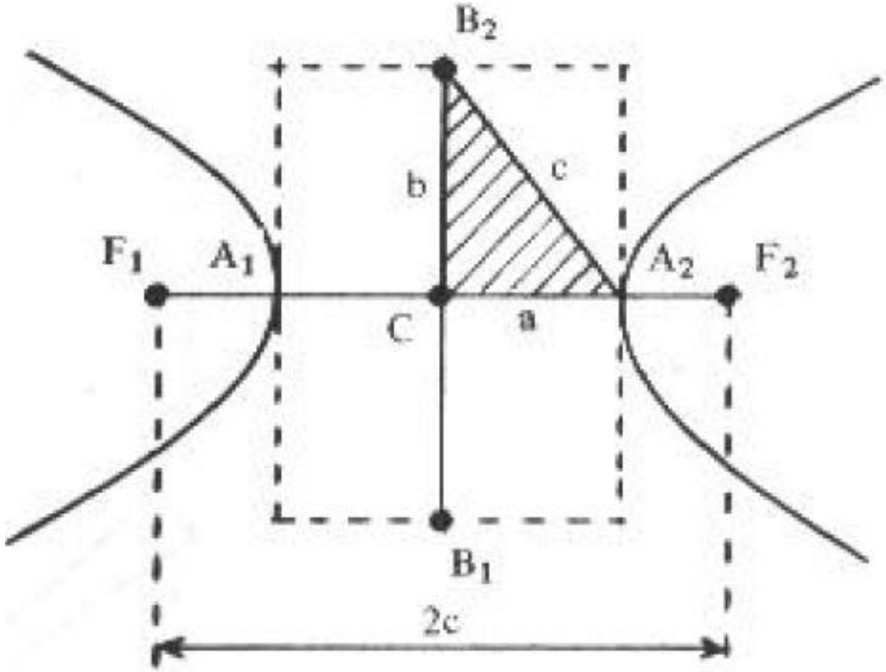


Figura 8.35

Como se vê, a hipérbole é uma curva com dois ramos. Na verdade, pela equação (1), um ponto P está na hipérbole se, e somente se,

$$d(P,F_1) - d(P,F_2) = \pm 2a$$

Elementos



Focos: são os pontos F_1 e F_2.

Distância focal: é a distância 2c entre os focos.

Centro: é o ponto médio C do segmento F_1F_2.

Vértices: são os pontos A_1 e A_2.

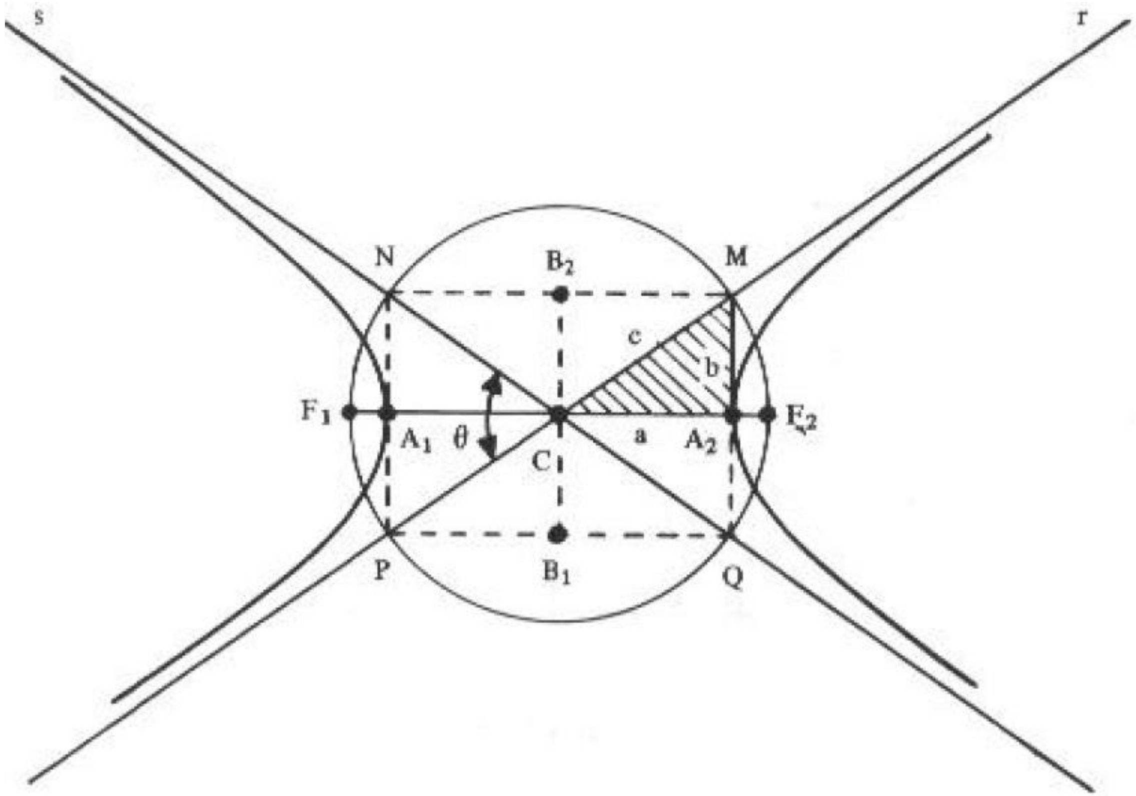
Eixo real ou transverso: é o segmento A_1A_2 de comprimento 2a.

Eixo imaginário ou conjugado: é o segmento B_1B_2 de comprimento 2b

O valor de b é definido através da relação:

$c^2 = a^2 + b^2$

Considere a figura:



Assíntotas: são as retas r e s.

As assíntotas são retas das quais a hipérbole se aproxima cada vez mais à medida que os pontos se afastam dos vértices. Esta aproximação é "contínua" e "lenta" de forma que a tendência da hipérbole é tangenciar suas assíntotas no infinito. Naturalmente, esta particularidade das assíntotas constitui um excelente guia para traçar o esboço do gráfico.

O ângulo θ assinalado na figura é chamado *abertura* da hipérbole.

Chama-se *excentricidade* da hipérbole o número

$$e = \frac{c}{a} \qquad \text{e por ser } c > a, \text{ tem-se } e > 1.$$

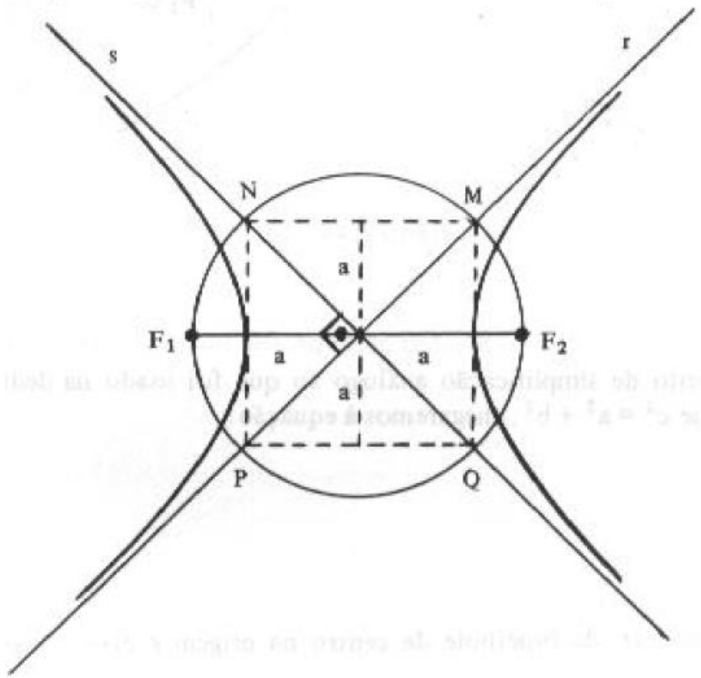
A excentricidade da hipérbole está intimamente relacionada com a sua abertura.

De fato: se na Figura 8.36 tivéssemos tomado um valor para "a" menor do que o anterior, o novo retângulo MNPQ seria mais "estreito" e, em conseqüência, a abertura θ seria maior.

Ora, diminuir o valor de "a" (mantendo *c* fixo) signifca aumentar o valor de $e = \dfrac{c}{a}$.

Assim, quanto maior a excentricidade, maior será a abertura, ou seja, mais "abertos" estarão os ramos da hipérbole.

Quando a = b, o retângulo MNPQ se transforma num quadrado e as assíntotas serão perpendiculares (θ = 90°). A hipérbole, neste caso é denominada "*hipérbole eqüilátera*".



Equações reduzidas

Seja a hipérbole de centro C(0, 0). Consideraremos dois casos:

1º) *O eixo real está sobre o eixo dos x.*

Seja P(x, y) um ponto qualquer de uma hipérbole (Figura 8.37) de focos $F_1(-c, 0)$ e $F_2(c, 0)$.

Pela definição em (1), tem-se

$$|d(P,F_1) - d(P,F_2)| = 2a$$

ou, em coordenadas

$$\left|\sqrt{(x+c)^2+(y-0)^2} - \sqrt{(x-c)^2+(y-0)^2}\right| = 2a$$

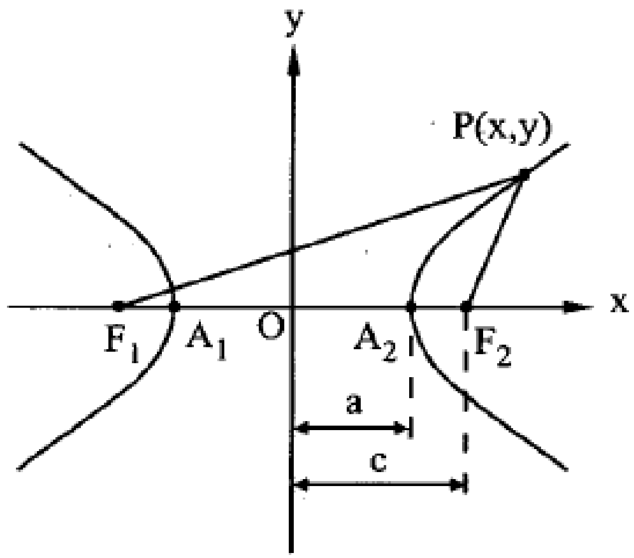


Figura 8.37

Com procedimento de simplificação análogo ao que foi usado na dedução da equação da elipse, e lembrando que $c^2 = a^2 + b^2$, chegamos à equação

$$\boxed{\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1}$$

que é a *equação reduzida* para este caso.

2º) *O eixo real está sobre o eixo dos y*

Observando a Figura 8.38, com procedimento análogo ao 1º caso, obtemos a equação reduzida

$$\boxed{\frac{y^2}{a^2} - \frac{x^2}{b^2} = 1}$$

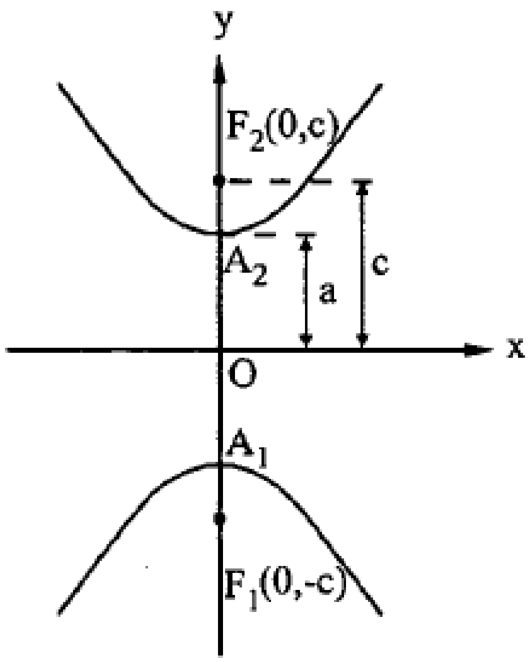
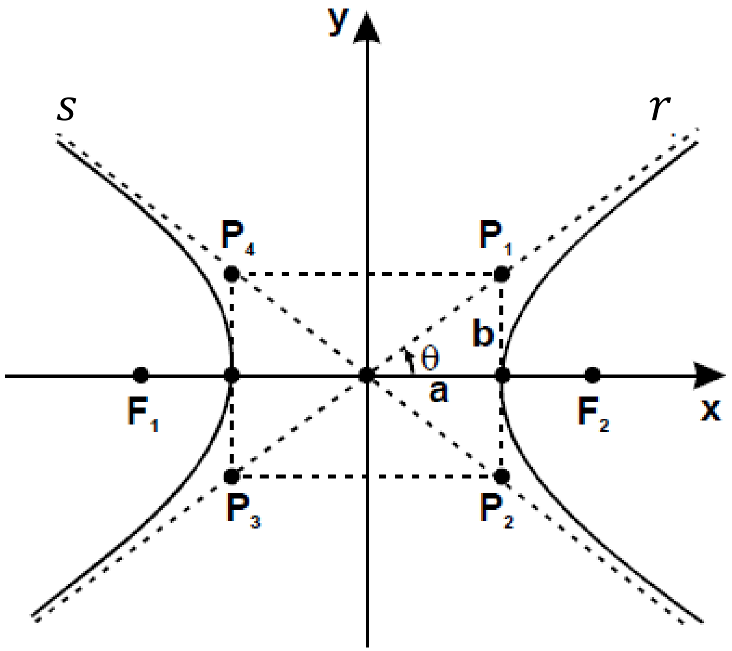


Figura 8.38

COMO OBTER AS EQUAÇÕES DAS ASSÍNTOTAS DA HIPÉRBOLE?

$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1 \quad \Rightarrow$ as equações de r e s são: $y = \pm\frac{b}{a}x$



Como as duas assíntotas acima figuradas passam pela origem, são retas do tipo:

$y = \pm mx$

mas $\quad m = \operatorname{tg}\theta = \frac{b}{a}$

donde:

$$y = \pm\frac{b}{a}x$$

$\frac{y^2}{a^2} - \frac{x^2}{b^2} = 1 \quad \Rightarrow$ as equações de r e s são: $y = \pm\frac{a}{b}x$

Exemplos

Nos problemas 1 e 2, determinar, para cada uma das hipérboles:

a) a medida dos semi-eixos;
b) um esboço do gráfico;
c) os vértices;
d) os focos;
e) a excentricidade;
f) as equações das assíntotas;

1) $x^2 - 4y^2 + 16 = 0$

2) $x^2 - y^2 = 4$

1) $x^2 - 4y^2 + 16 = 0$

Solução

a) Passando esta equação para forma reduzida, obtém-se

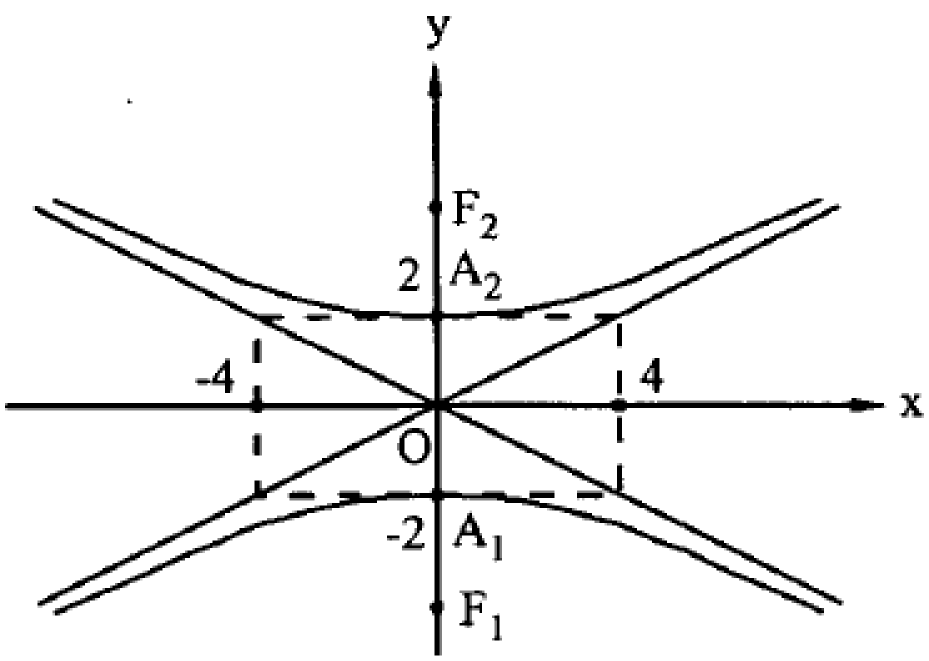
$$x^2 - 4y^2 = -16 \text{ ou } \frac{y^2}{4} - \frac{x^2}{16} = 1$$

que representa uma hipérbole com eixo real sobre Oy.

Então, $a^2 = 4 \quad \therefore \quad a = 2$

$b^2 = 16 \quad \therefore \quad b = 4$

b) O gráfico com assíntotas: Figura 8.40.



c) Vértices: $A_1(0, -2)$ e $A_2(0, 2)$
ou $A(0, \pm 2)$.

d) Para determinar os focos, precisamos do valor de c:

$$c^2 = a^2 + b^2$$

$$c^2 = 4 + 16$$

$$c = \sqrt{20} = 2\sqrt{5}$$

Focos: $F_1(0, -2\sqrt{5})$ e $F_2(0, 2\sqrt{5})$.

e) Excentricidade: $e = \frac{c}{a} = \frac{2\sqrt{5}}{2} = \sqrt{5}$

f) Assíntotas: $y = \pm\frac{1}{2}x$ (pois $\frac{a}{b} = \frac{2}{4} = \frac{1}{2}$)

2) $x^2 - y^2 = 4$

Solução

a) Passando para a forma reduzida, obtém-se

$$\frac{x^2}{4} - \frac{y^2}{4} = 1$$

que representa uma hipérbole com eixo real sobre Ox.

Então, $a^2 = b^2 = 4 \quad \therefore \quad a = b = 2$ (hipérbole eqüilátera)

b) O gráfico com assíntotas: Figura 8.41.

c) Vértices: $A_1(-2, 0)$ e $A_2(2, 0)$

d) $c^2 = a^2 + b^2$

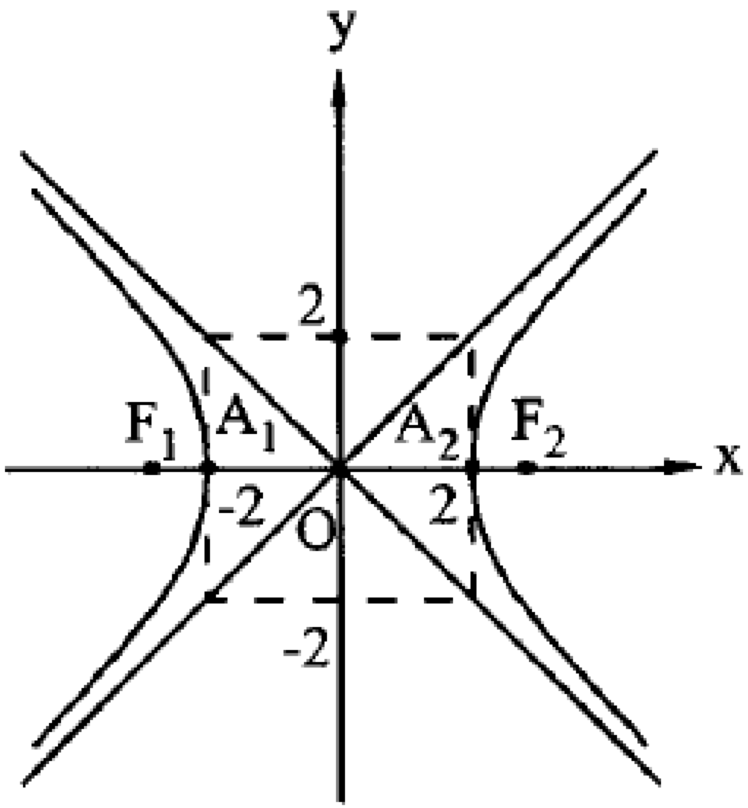
$c^2 = 4 + 4$

$c = \sqrt{8} = 2\sqrt{2}$

Focos: $F_1(-2\sqrt{2}, 0)$ e $F_2(2\sqrt{2}, 0)$.

e) Excentricidade: $e = \dfrac{c}{a} = \dfrac{2\sqrt{2}}{2} = \sqrt{2}$

f) Assíntotas: $y = \pm x$ (pois $\dfrac{b}{a} = \dfrac{2}{2} = 1$)



3) Uma hipérbole tem focos em $F_1(-5, 0)$ e $F_2(5, 0)$ e a medida do eixo real é 6. Determinar sua equação reduzida.

Solução

Tendo em vista que os focos são pontos do eixo dos x, a equação desta hipérbole é da forma

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$$

na qual precisamos determinar a e b.

De $F(\pm 5, 0)$, vem $c = 5$ (distância de cada foco ao centro).

O eixo real mede 6, isto é $2a = 6$. Logo, $a = 3$.

De $c^2 = a^2 + b^2$ ou $25 = 9 + b^2$, vem $b^2 = 16$.

Portanto, a equação procurada é

$$\frac{x^2}{9} - \frac{y^2}{16} = 1$$

Outras Formas da Equação da Hipérbole

Seja uma hipérbole de centro C(h, k) ≠ (0, 0). Consideraremos somente os casos de os eixos da hipérbole serem paralelos aos eixos coordenados.

1º) *O eixo real é paralelo ao eixo dos x*

Com procedimento análogo ao que foi visto para a elipse, resulta a equação

$$\boxed{\frac{(x-h)^2}{a^2} - \frac{(y-k)^2}{b^2} = 1}$$

que é a *forma padrão* para este caso (Figura 8.42).

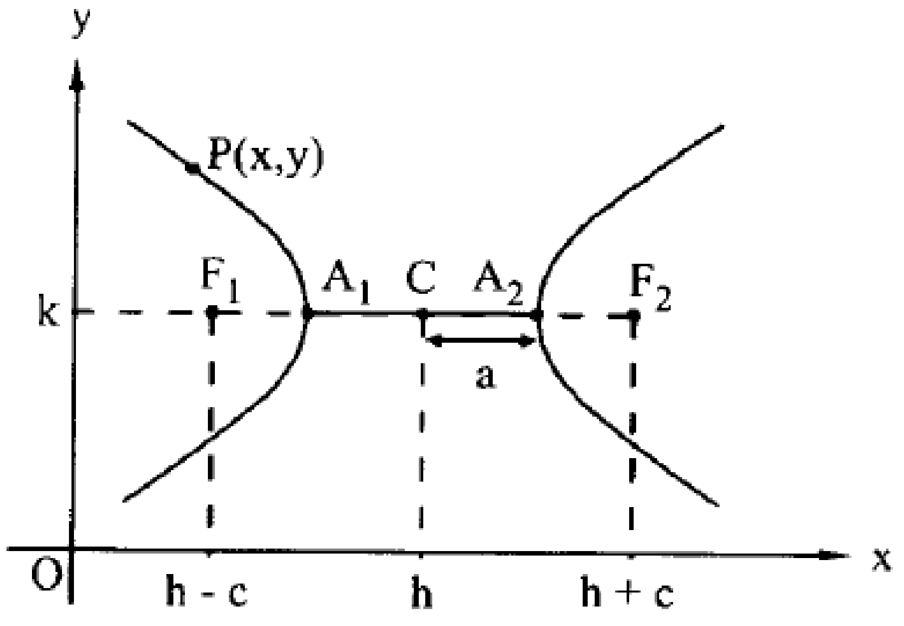


Figura 8.42

2º) *O eixo real é paralelo ao eixo dos y*

De igual modo ao 1º caso, temos

$$\boxed{\frac{(y-k)^2}{a^2} - \frac{(x-h)^2}{b^2} = 1}$$

Exemplos

1) Determinar uma equação da hipérbole de vértices $A_1(1, -2)$ e $A_2(5, -2)$, sabendo que $F(6, -2)$ é um de seus focos.

Solução

Em função dos dados do problema, esboçamos o gráfico desta hipérbole (Figura 8.43)

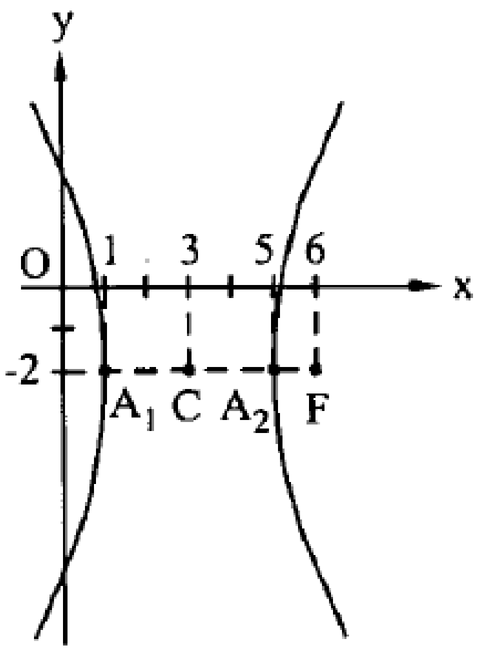


Figura 8.43

Sendo o eixo real A_1A_2 paralelo a Ox, a equação da hipérbole é da forma

$$\frac{(x - h)^2}{a^2} - \frac{(y - k)^2}{b^2} = 1$$

O centro é o ponto médio de A_1A_2 : $C(3, -2)$.

É imediato que: $a = d(C, A_1) = 2$ e $c = d(C, F) = 3$.

Da relação $c^2 = a^2 + b^2$ ou $9 = 4 + b^2$, vem $b^2 = 5$.

Logo, uma equação da hipérbole é

$$\frac{(x - 3)^2}{4} - \frac{(y + 2)^2}{5} = 1$$

OBSERVAÇÃO:

$$\frac{(x-3)^2}{4} - \frac{(y+2)^2}{5} = 1$$

Eliminando os denominadores, desenvolvendo os quadrados e ordenando os termos, encontramos

$$5(x^2 - 6x + 9) - 4(y^2 + 4y + 4) = 20$$

$$5x^2 - 30x + 45 - 4y^2 - 16y - 16 - 20 = 0$$

$$5x^2 - 4y^2 - 30x - 16y + 9 = 0$$

que é uma *equação geral* desta hipérbole.

Assim, qualquer hipérbole cujos eixos estejam sobre os eixos coordenados ou são paralelos a eles, sempre pode ser representada por uma *equação geral* que terá a forma

$$\boxed{ax^2 + by^2 + cx + dy + f = 0}$$

com *a* e *b* de sinais contrários.

2) Dada a hipérbole de equação $9x^2 - 4y^2 - 54x + 8y + 113 = 0$, determinar

a) sua equação reduzida;
b) o centro;
c) um esboço do gráfico;
d) os vértices;
e) os focos;
f) a excentricidade.

Solução

a) Iniciemos escrevendo a equação na forma

$$(9x^2 - 54x) - (4y^2 - 8y) = -113$$

ou

$$9(x^2 - 6x) - 4(y^2 - 2y) = -113$$

onde agrupamos os termos de mesma variável e evidenciamos os fatores 9 e 4 para facilitar a construção dos trinômios quadrados nestes dois parênteses. Então, temos

$$9(x^2 - 6x + 9) - 4(y^2 - 2y + 1) = -113 + 9(9) - 4(1)$$

ou

$$9(x - 3)^2 - 4(y - 1)^2 = -36$$

e dividindo ambos os membros por -36, resulta

$$\frac{(y - 1)^2}{9} - \frac{(x - 3)^2}{4} = 1 \qquad (3)$$

b) Como a equação (3) é da forma padrão

$$\frac{(y-k)^2}{a^2} - \frac{(x-h)^2}{b^2} = 1 \tag{4}$$

onde h e k são as coordenadas do centro, vem imediatamente: C(3, 1).

c) Um esboço do gráfico: Figura 8.44.

d) Confrontando (3) e (4), concluímos:

$$a^2 = 9 \quad \therefore \quad a = 3$$

$$b^2 = 4 \quad \therefore \quad b = 2$$

e pelo gráfico tem-se:

$$A_1(3, -2) \text{ e } A_2(3, 4)$$

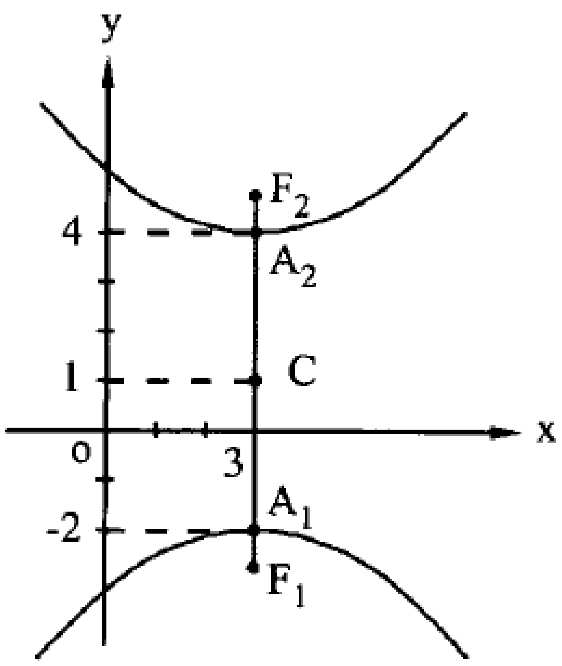


Figura 8.44

e) Para determinar os focos precisamos do valor de c.

Da relação

$$c^2 = a^2 + b^2 \text{ ou } c^2 = 9 + 4$$

vem $c = \sqrt{13}$ e, portanto, os focos são

$$F_1(3, 1 - \sqrt{13}) \text{ e } F_2(3, 1 + \sqrt{13})$$

f) Excentricidade: $e = \dfrac{c}{a} = \dfrac{\sqrt{13}}{3}$

RESUMO EQUAÇÕES HIPÉRBOLE:

Equações Reduzidas:

- hipérbole cujo eixo real é o eixo *x*:

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$$

- hipérbole cujo eixo real é o eixo *y*:

$$\frac{y^2}{a^2} - \frac{x^2}{b^2} = 1$$

- hipérbole de centro (h, k) e cujo eixo real é paralelo ao eixo *x*:

$$\frac{(x-h)^2}{a^2} - \frac{(y-k)^2}{b^2} = 1$$

- hipérbole de centro (h, k) e cujo eixo real é paralelo ao eixo y:

$$\frac{(y-k)^2}{a^2} - \frac{(x-h)^2}{b^2} = 1$$

Equação Geral:

$$ax^2 + by^2 + cx + dy + f = 0$$ com a e b de sinais contrários.

Aplicações da Hipérbole

A propriedade da reflexão na hipérbole é análoga à da elipse: a reta tangente t num ponto P da hipérbole é bissetriz do ângulo formado pelos raios focais F_1P e F_2P, isto é, $\alpha = \beta$ (Figura 8.53(a)).

Seja a superfície obtida girando-se uma hipérbole em torno da reta que contém seu eixo real (a superfície é um hiperbolóide de duas folhas), e admitindo-se espelhada a parte externa da superfície, todo raio de luz incidente à superfície na direção de um dos focos, é refletido na direção do outro foco (Figura 8.53(b)).

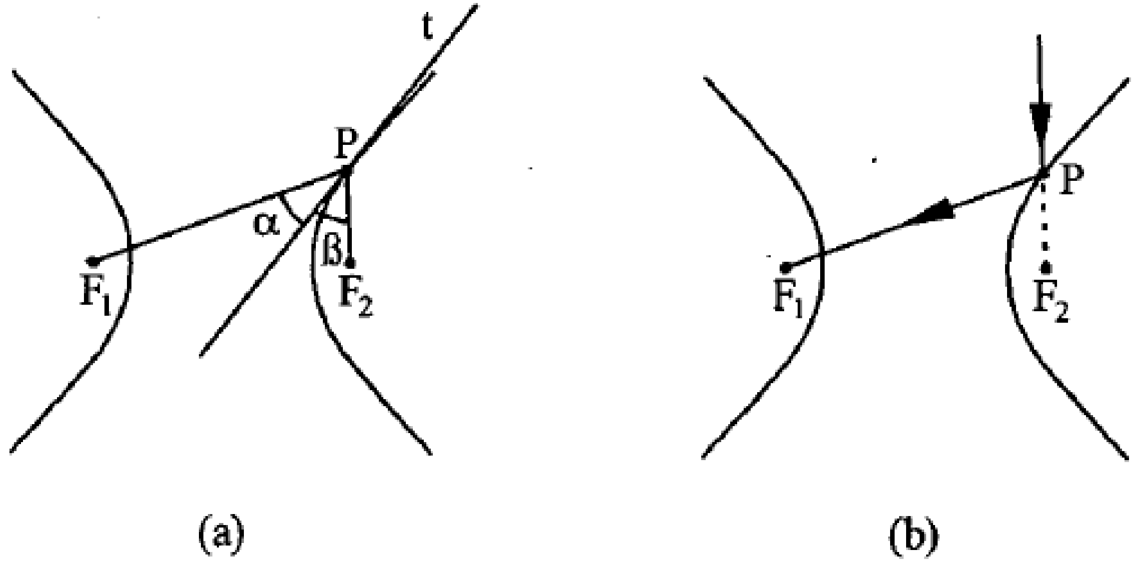
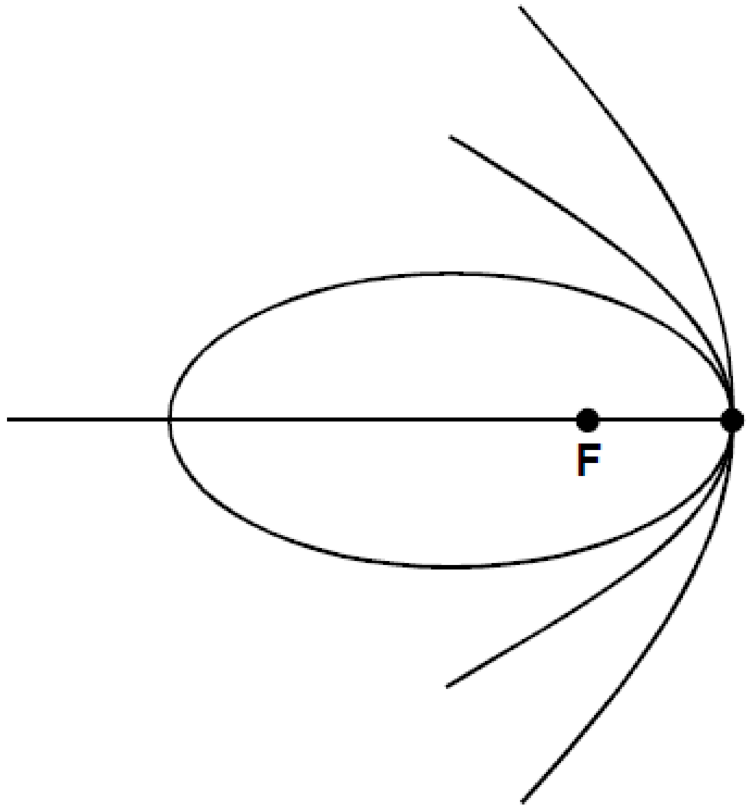


Figura 8.53



a) **Mecânica Celeste:** dependendo de sua velocidade, um cometa tem uma órbita elíptica, parabólica ou hiperbólica (o foco coincide com o Sol). Vide figura à esquerda.

b) Em Mecânica dos Fluidos e em alguns problemas referentes ao fluxo estacionário de eletricidade são utilizadas hipérboles homofocais (demesmofoco).

c) O sistema LORAN (longe range navigation) e o sistema DECCA de navegação aérea usam a hipérbole. Da Terra, concomitantemente são transmitidos sinais de rádio de dois pontos fixos F_1 e F_2 que são captados pelo aeroplano em P, ao longo de t_1 e t_2 segundos, respectivamente. A diferença entre t_1 e t_2 determina 2a e assim se obtém a característica da hipérbole na qual está P.

Igualmente na navegação marítima utilizam-se sistemas hiperbólicos: o sistema RADUX (de baixíssima freqüência) e o sistema LORAC (de ondas contínuas para observações de grande precisão).

Exercícios

Fazer os exercícios do livro ***"Vetores e Geometria Analítica" – Capítulo 8 (Cônicas)***

- Capítulo 8 (Cônicas)

PARÁBOLA - Problemas Propostos (começa na pág. 172)
1, 2, 6, 9, 11, 12, 15, 18, 20, 22, 23, 27, 28, 30, 37, 40

ELIPSE - Problemas Propostos (começa na pág. 189)
1, 2, 5, 10, 12, 13, 16, 20, 21, 22, 25, 26, 28, 30

HIPÉRBOLE- Problemas Propostos (começa na pág. 204)
1, 2, 5, 12, 14, 15, 18, 22, 24, 30, 33, 37, 38, 39, 41, 42, 57