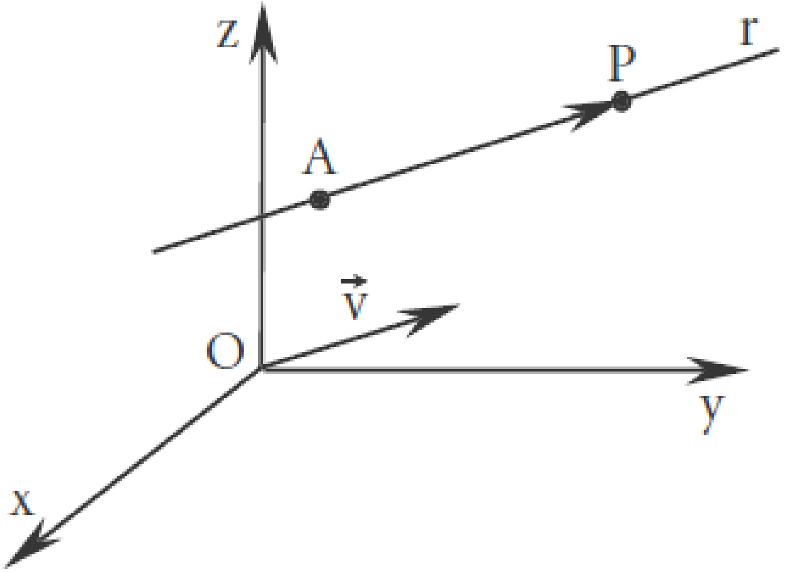
# 2- Retas no Espaço

# Retas no Espaço

## Equação Vetorial de uma Reta

Dado um ponto $A$ e um vetor não nulo $\vec{v}$, existe uma única reta $r$ que passa por $A$ e tem a direção de $\vec{v}$.
Um ponto $P$ pertence a $r$ se, e somente se, o vetor $\overrightarrow{AP}$ é paralelo a $\vec{v}$, ou seja,

$$\overrightarrow{AP} = t\vec{v}, \text{ para algum } t \in \mathbb{R}.$$




Isso equivale a $P - A = t\vec{v}$, isto é,

$$\boxed{P = A + t\vec{v}.}$$

Essa equação é chamada **equação vetorial da reta $r$**.
O vetor $\vec{v}$ é chamado **vetor diretor** da reta $r$ e $t$ é denominado **parâmetro**.

Se $P(x, y, z), A(x_0, y_0, z_0)$ e $\vec{v} = (a, b, c)$, então podemos escrever a equação vetorial da reta $r$ usando coordenadas:

$$\boxed{(x, y, z) = (x_0, y_0, z_0) + t(a, b, c), \ t \in \mathbb{R}.}$$

## Observações:

**(1)** A cada número real $t$ fica associado um ponto $P \in r$ e, reciprocamente, se $P$ é um ponto de $r$, existe um $t$ satisfazendo a equação vetorial de $r$.

**(2)** Dada uma reta $r$, sua equação vetorial não é única, pois temos liberdade para escolher $A \in r$ e $\vec{v} \neq \vec{0}$ com a mesma direção de $r$.

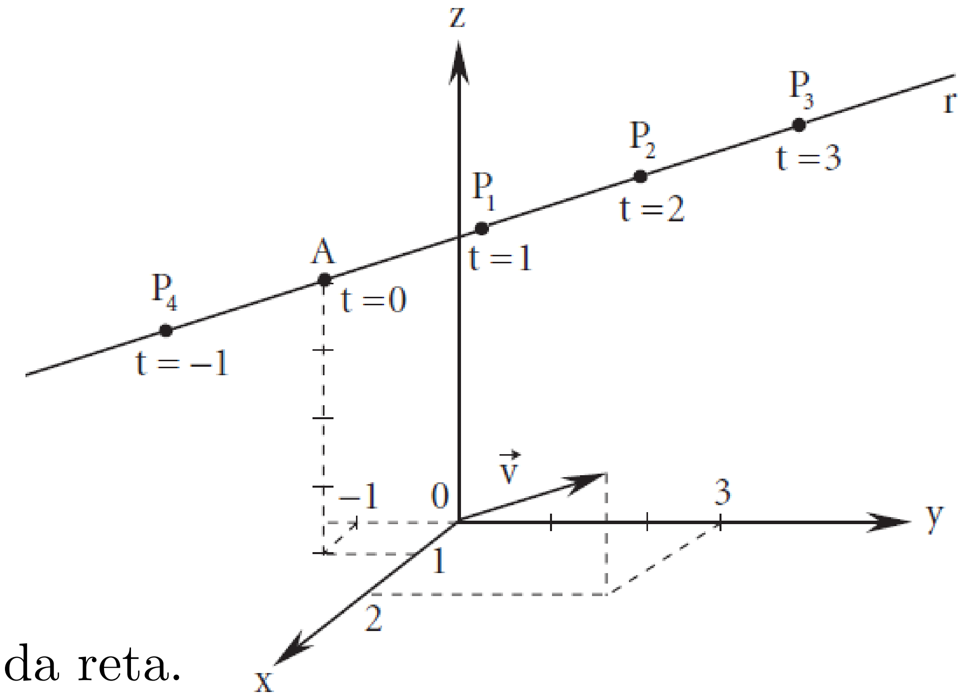
**Exemplo:** A equação vetorial da reta $r$ que passa por $A(1,-1,4)$ e tem a direção de $\vec{v} = (2,3,2)$ é dada por

$$r\colon (x,y,z) = (1,-1,4) + t(2,3,2),\ \ t \in \mathbb{R},$$

em que $(x,y,z)$ representa um ponto qualquer de $r$.

Se desejarmos obter pontos da reta $r$, basta atribuir valores para $t$:

- $t = 0 \Rightarrow A(1,-1,4)$
- $t = 1 \Rightarrow P_1(3,2,6)$
- $t = 2 \Rightarrow P_2(5,5,8)$
- $t = 3 \Rightarrow P_3(7,8,10)$
- $t = -1 \Rightarrow P_4(-1,-4,2)$




Se $t$ assumir todos os valores reais, teremos todos os pontos da reta.

# Equações Paramétricas de uma Reta

Seja $r$ uma reta de equação vetorial $(x, y, z) = (x_0, y_0, z_0) + t(a, b, c),\ \ t \in \mathbb{R}$.
Então, podemos escrever

$$(x, y, z) = (x_0 + at, y_0 + bt, z_0 + ct),$$

ou seja,

$$\boxed{\begin{cases} x = x_0 + at \\ y = y_0 + bt \\ z = z_0 + ct \end{cases},\ \ t \in \mathbb{R}.}$$

Essas equações são chamadas de **equações paramétricas da reta $r$.**

Observe que $x_0, y_0$, e $z_0$ formam as coordenadas de um ponto de $r$, ou seja, $A(x_0, y_0, z_0) \in r$. E, $a, b$ e $c$ formam as coordenadas de um vetor diretor $\vec{v} = (a, b, c)$ de $r$.

**Exemplo:** As equações paramétricas da reta $r$, que passa pelo ponto $A(3, -4, 2)$ e é paralela ao vetor $\vec{v} = (2, 1, -3)$ é dada por

$$r: \begin{cases} x = 3 + 2t \\ y = -4 + t \\ z = 2 - 3t \end{cases},\ \ t \in \mathbb{R}.$$

# Reta definida por dois pontos

A reta definida pelos pontos $A(x_1, y_1, z_1)$ e $B(x_2, y_2, z_2)$ é a reta que passa pelo ponto $A$ (ou $B$) e tem a direção do vetor $\vec{v} = \overrightarrow{AB} = (x_2 - x_1, y_2 - y_1, z_2 - z_1)$.

**Exemplo:** A reta $r$, determinada pelos pontos $A(1, -2, -3)$ e $B(3, 1, -4)$, tem a direção do vetor $\vec{v} = \overrightarrow{AB} = (2, 3, -1)$ e as equações paramétricas

$$\begin{cases} x = 1 + 2t \\ y = -2 + 3t \, , \; t \in \mathbb{R} \\ z = -3 - t \end{cases}$$

representam a reta $r$ passando pelo ponto $A$ e tem a direção do vetor $\vec{v} = \overrightarrow{AB}$.

Analogamente, as equações paramétricas

$$\begin{cases} x = 3 + 2t \\ y = 1 + 3t \, , \; t \in \mathbb{R} \\ z = -4 - t \end{cases}$$

representam a mesma reta $r$, passando pelo ponto $B$, com a direção do vetor $\vec{v} = \overrightarrow{AB}$

**Observações:**

**(1)** Embora os sistemas do exemplo anterior sejam diferentes, eles permitem encontrar todos os pontos da mesma reta, fazendo $t$ variar de $-\infty$ a $+\infty$.

**(2)** Assim como o vetor $\vec{v} = (2, 3, -1)$ é um vetor diretor desta reta, qualquer vetor $\alpha\vec{v}$, $\alpha \neq 0$ também é um vetor diretor para esta reta.

## Exercícios:

(**1**) Dado o ponto $A(2,3,-4)$ e o vetor $\vec{v}=(1,-2,3)$, pede-se:

(**a**) Escrever equações paramétricas da reta $r$ que passa por $A$ e tem a direção de $\vec{v}$.

(**b**) Determinar os pontos $B$ e $C$ da reta $r$, de parâmetros $t=1$ e $t=-2$, respectivamente.

(**c**) Verificar se os pontos $D(4,-1,2)$ e $E(5,-4,3)$ pertencem a reta $r$.

(**d**) Escrever equações paramétricas da reta $s$ que passa por $F(5,2,-4)$ e é paralela a $r$.

(**e**) Escrever equações paramétricas da reta $t$ que passa por $A$ e é paralela ao eixo $y$.

**(2)** Os pontos $A(3,6,-7), B=(-5,2,3)$ e $C(4,-7,-6)$ são vértices de um triângulo. Determine as equações paramétricas da reta suporte da mediana do triângulo $ABC$ relativa ao vértice $C$.

**(3)** Determinar $m$ e $n$ para que o ponto $P(3, m, n)$ pertença à reta

$$s: \begin{cases} x = 1 - 2t \\ y = -3 - 3t \\ z = -4 + t \end{cases}, \ t \in \mathbb{R}.$$

# Equações Simétricas de uma Reta

Seja $r$ uma reta de equações paramétricas $\begin{cases} x = x_0 + at \\ y = y_0 + bt \\ z = z_0 + ct \end{cases}$, $t \in \mathbb{R}$.

Se $abc \neq 0$, isto é, se nenhuma das coordenadas do vetor diretor de $r$ é nula, então podemos isolar $t$ em cada uma das equações acima, de modo que $t = \frac{x-x_0}{a}$ , $t = \frac{y-y_0}{b}$ e $t = \frac{z-z_0}{c}$. Portanto,

$$\boxed{\frac{x-x_0}{a} = \frac{y-y_0}{b} = \frac{z-z_0}{c}.}$$

Essas equações são chamadas **equações simétricas da reta $r$.**

Observe que nas equações simétricas da reta $r$, temos que $x_0, y_0$ e $z_0$ formam as coordenadas de um ponto de $r$, ou seja, $A(x_0, y_0, z_0) \in r$. Já os denominadores $a, b$ e $c$ formam as coordenadas do vetor diretor $\vec{v} = (a, b, c)$ de $r$.

**Exemplo:** As equações simétricas da reta $r$, que passa pelo ponto $A(3,0,-5)$ e tem a direção do vetor $\vec{v} = (2, 4, -1)$ é dada por

$$r: \frac{x-3}{2} = \frac{y}{4} = \frac{z+5}{-1}.$$

# Equações Reduzidas de uma Reta

Seja $r$ uma reta de equações paramétricas $\begin{cases} x = x_0 + at \\ y = y_0 + bt \\ z = z_0 + ct \end{cases}$, $t \in \mathbb{R}$, e suponha que $a \neq 0$.

Então, podemos isolar $t$ na primeira equação e substituir na segunda:

$$y = y_0 + b\left(\frac{x - x_0}{a}\right) \Rightarrow y = \frac{b}{a}x + y_0 - \frac{x_0}{a}b.$$

Escrevendo $m = \frac{b}{a}$ e $n = y_0 - \frac{x_0}{a}b$, obtemos $\boxed{y = mx + n.}$

Analogamente, podemos isolar $t$ na primeira equação e substituir na terceira:

$$z = z_0 + c\left(\frac{x - x_0}{a}\right) \Rightarrow z = \frac{c}{a}x + z_0 - \frac{x_0}{a}c.$$

Escrevendo $p = \frac{c}{a}$ e $q = z_0 - \frac{x_0}{a}c$, obtemos $\boxed{z = px + q.}$

As equações

$$\boxed{\begin{cases} y = mx + n \\ z = px + q \end{cases}}$$

são chamadas de **equações reduzidas da reta $r$ na variável $x$.**

É claro que, com um procedimento similar, podemos obter as **equações reduzidas de $r$ na variável $y$** (desde que $b \neq 0$) e as **equações reduzidas de $r$ na variável $z$** (desde que $c \neq 0$), que são dadas genericamente por

$$\boxed{\begin{cases} x = my + n \\ z = py + q \end{cases}} \quad \text{e} \quad \boxed{\begin{cases} x = mz + n \\ y = pz + q \end{cases}.}$$

**Exemplo:** Seja $r$ a reta definida pelo ponto $A(2, -4, -3)$ e pelo vetor diretor $\vec{v} = (1, 2, -3)$. Vamos determinar as equações reduzidas de $r$ na variável $x$, na variável $y$ e na variável $z$.

Temos que as equações paramétricas de $r$ são dadas por

$$r\colon \begin{cases} x = 2 + t \\ y = -4 + 2t \\ z = -3 - 3t \end{cases}, \ t \in \mathbb{R}.$$

**Equações reduzidas de $r$ na variável $x$:**

Da primeira equação, temos que $x = 2 + t \Rightarrow t = x - 2$.
Logo,

$$\begin{aligned} y &= -4 + 2t = -4 + 2(x - 2) = 2x - 8 \\ z &= -3 - 3t = -3 - 3(x - 2) = -3x + 3 \end{aligned} \quad \Rightarrow r\colon \begin{cases} y = 2x - 8 \\ z = -3x + 3 \end{cases}$$

**Equações reduzidas de $\boldsymbol{r}$ na variável $\boldsymbol{y}$:**

Da segunda equação temos que $y = -4 + 2t \Rightarrow t = \frac{y+4}{2}$.

Logo,

$$x = 2 + t = 2 + \frac{y+4}{2} = \frac{1}{2}y + 4$$

$$z = -3 - 3t = -3 - 3\left(\frac{y+4}{2}\right) = -\frac{3}{2}y - 9$$

$$\Rightarrow r: \begin{cases} x = \frac{1}{2}y + 4 \\ z = -\frac{3}{2}y - 9 \end{cases}$$

**Equações reduzidas de $\boldsymbol{r}$ na variável $\boldsymbol{z}$:**

Da terceira equação temos que $z = -3 - 3t \Rightarrow t = \frac{-z-3}{3}$.

Logo,

$$x = 2 + t = 2 + \frac{-z-3}{3} = -\frac{1}{3}z + 1$$

$$y = -4 + 2t = -4 + 2\left(\frac{-z-3}{3}\right) = -\frac{2}{3}z - 6$$

$$\Rightarrow r: \begin{cases} x = -\frac{1}{3}z + 1 \\ y = -\frac{2}{3}z - 6 \end{cases}$$

# Exercícios:

**(1)** Seja $r$ a reta determinada pelos pontos $A(1,0,1)$ e $B(3,-2,3)$.

(a) Obtenha equações de $r$ nas formas vetorial, paramétrica e simétrica.

(b) Verifique se o ponto $P(-9,10,-9)$ pertence a $r$.

**(2)** Considere a reta $r$: $\begin{cases} y = -2x - 1 \\ z = x + 2 \end{cases}$.

(a) Determine as equações paramétricas e um vetor diretor de $r$.

(b) Determine as equações simétricas de $r$.

**(3)** Qual deve ser o valor de $m$ para que os pontos $A(3, m, 1), B(1, 1, -1)$ e $C(-2, 10, -4)$ pertençam a mesma reta?

(4) Citar um ponto e um vetor diretor de cada uma das seguintes retas:

a) $\begin{cases} \dfrac{x+1}{3} = \dfrac{z-3}{4} \\ y = 1 \end{cases}$

d) $\begin{cases} y = 3 \\ z = -1 \end{cases}$

b) $\begin{cases} x = 2y \\ z = 3 \end{cases}$

e) $\begin{cases} y = -x \\ z = 3 + x \end{cases}$

c) $\begin{cases} x = 2t \\ y = -1 \\ z = 2 - t \end{cases}$

f) $x = y = z$

**(5)** Estabelecer as equações reduzidas na variável $x$ da reta determinada pelos pontos $A(1,-2,3)$ e $B(3,-1,-1)$.

# Casos Particulares de Retas no Espaço

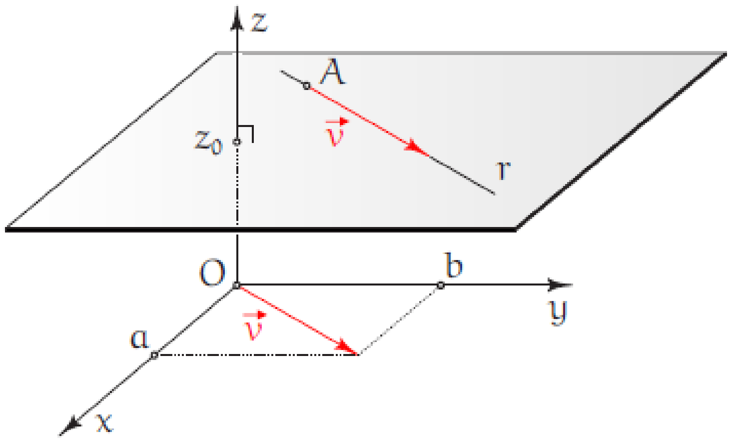
## Retas Paralelas aos Planos Coordenados

### (1) *r* é paralela ao plano *xOy*:

Seus vetores diretores devem ser da forma $\vec{v} = (a, b, 0)$.
Logo, se $r$ passa por $A(x_0, y_0, z_0)$, então suas equações paramétricas são da forma

$$\boxed{r\colon \begin{cases} x = x_0 + at \\ y = y_0 + bt \\ z = z_0 \end{cases},\ t \in \mathbb{R},}$$

ou seja, $z$ é sempre constante.

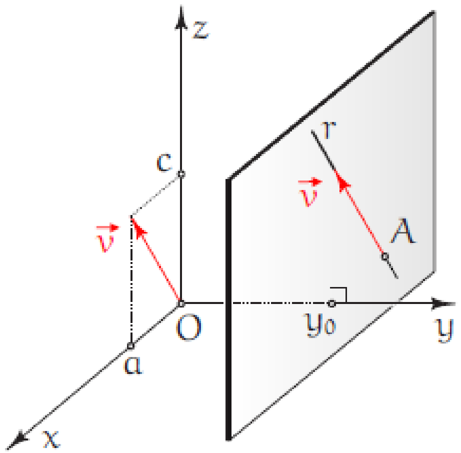



### (2) *r* é paralela ao plano *xOz*:

Seus vetores diretores devem ser da forma $\vec{v} = (a, 0, c)$.
Logo, se $r$ passa por $A(x_0, y_0, z_0)$, então suas equações paramétricas são da forma

$$\boxed{r\colon \begin{cases} x = x_0 + at \\ y = y_0 \\ z = z_0 + ct \end{cases},\ t \in \mathbb{R},}$$

ou seja, $y$ é sempre constante.

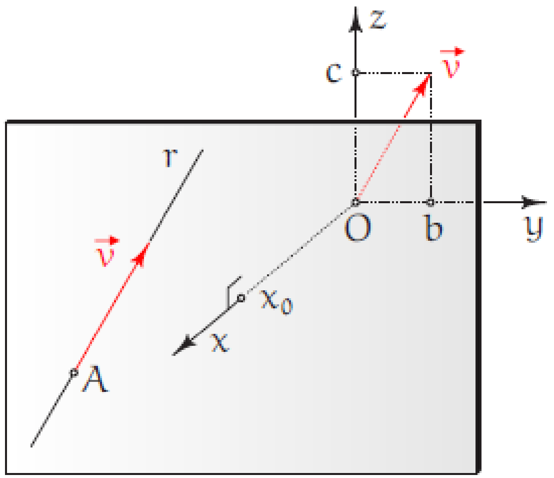



### (3) *r* é paralela ao plano *yOz*:

Seus vetores diretores devem ser da forma $\vec{v} = (0, b, c)$.
Logo, se $r$ passa por $A(x_0, y_0, z_0)$, então suas equações paramétricas são da forma

$$\boxed{r\colon \begin{cases} x = x_0 \\ y = y_0 + bt \\ z = z_0 + ct \end{cases},\ t \in \mathbb{R},}$$

ou seja, $x$ é sempre constante.



# Retas Paralelas aos Eixos Coordenados

**(1) $r$ é paralela ao eixo $Ox$:** Seus vetores diretores devem ser da forma $\vec{v} = (a, 0, 0)$.
Logo, se $r$ passa por $A(x_0, y_0, z_0)$, então:

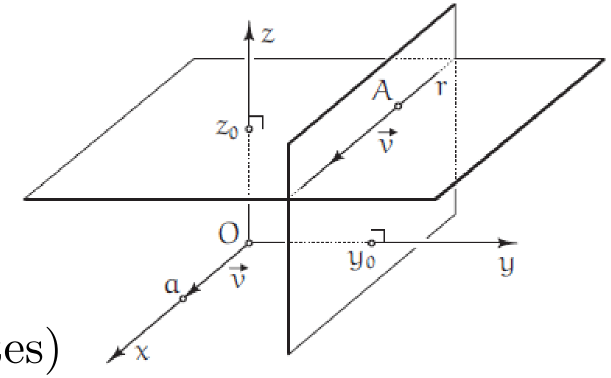
**Equações paramétricas**

$$r: \begin{cases} x = x_0 + at \\ y = y_0 \\ z = z_0 \end{cases}, \ t \in \mathbb{R}$$

**Equações reduzidas na variável $x$**

$$r: \begin{cases} y = y_0 \\ z = z_0 \end{cases}$$

($y$ e $z$ constantes)




---

**(2) $r$ é paralela ao eixo $Oy$:** Seus vetores diretores devem ser da forma $\vec{v} = (0, b, 0)$.
Logo, se $r$ passa por $A(x_0, y_0, z_0)$, então:

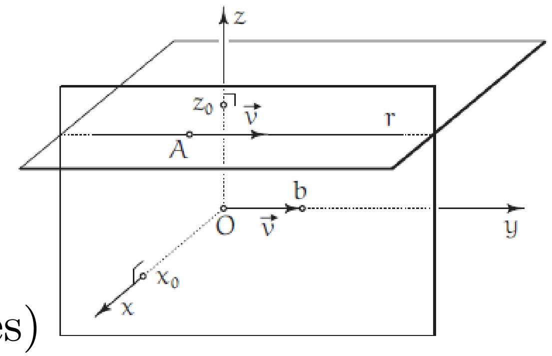
**Equações paramétricas**

$$r: \begin{cases} x = x_0 \\ y = y_0 + bt \\ z = z_0 \end{cases}, \ t \in \mathbb{R}$$

**Equações reduzidas na variável $y$**

$$r: \begin{cases} x = x_0 \\ z = z_0 \end{cases}$$

($x$ e $z$ constantes)




---

**(3) $r$ é paralela ao eixo $Oz$:** Seus vetores diretores devem ser da forma $\vec{v} = (0, 0, c)$.
Logo, se $r$ passa por $A(x_0, y_0, z_0)$, então:

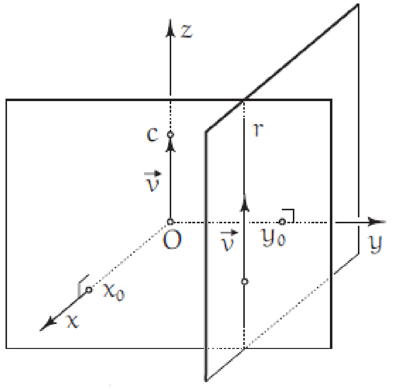
**Equações paramétricas**

$$r: \begin{cases} x = x_0 \\ y = y_0 \\ z = z_0 + ct \end{cases}, \ t \in \mathbb{R}$$

**Equações reduzidas na variável $z$**

$$r: \begin{cases} x = x_0 \\ y = y_0 \end{cases}$$

($x$ e $y$ constantes)



**Exemplo:** Descreva as retas de equações:

(**a**) $r_1: \begin{cases} x = 1 - t \\ y = 2 + t\,, t \in \mathbb{R} \\ z = 3 \end{cases} \Rightarrow$ reta paralela ao plano $xOy$ e que passa por $A_1(1, 2, 3)$

(**b**) $r_2: \begin{cases} x = -2 \\ y = 1 + 2t\,, t \in \mathbb{R} \\ z = 4 - 5t \end{cases} \Rightarrow$ reta paralela ao plano $yOz$ e que passa por $A_2(-2, 1, 4)$

(**c**) $r_3: \begin{cases} x = 1 \\ y = -4 \end{cases} \Rightarrow$ reta paralela ao eixo $Oz$ e que passa por $A_3(1, -4, 0)$ ($z$ pode assumir qualquer valor)

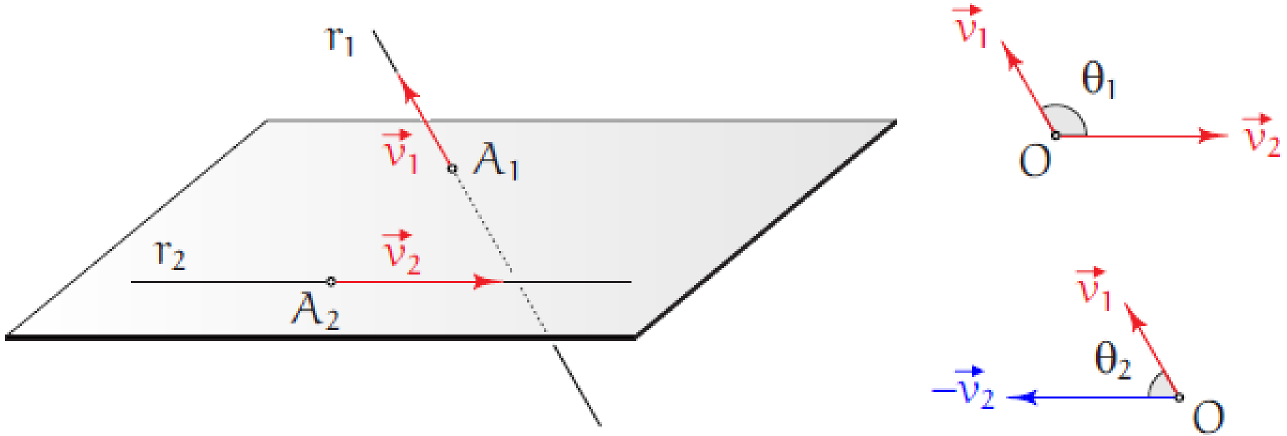
(**d**) $r_4: \begin{cases} y = 0 \\ z = 0 \end{cases} \Rightarrow$ eixo $Ox$

(**e**) $r_5: \begin{cases} x = 0 \\ z = 0 \end{cases} \Rightarrow$ eixo $Oy$

(**f**) $r_6: \begin{cases} x = 0 \\ y = 0 \end{cases} \Rightarrow$ eixo $Oz$

## Ângulo entre Duas Retas

Sejam $r_1$ e $r_2$ retas no espaço com vetores diretores $\vec{v}_1$ e $\vec{v}_2$.
Considere os ângulos formados pelos vetores $\vec{v}_1$ e $\vec{v}_2$ e pelos vetores $\vec{v}_1$ e $-\vec{v}_2$. O menor desses dois ângulos é chamado de **ângulo** entre as retas $r_1$ e $r_2$.




Como consequência, retas poderão formar ângulo nulo, agudo ou reto, mas nunca obtuso.

**Proposição:** Se $r_1$ e $r_2$ são retas no espaço com vetores diretores $\vec{v}_1$ e $\vec{v}_2$, então a medida $\theta$ do ângulo formado pelas retas $r_1$ e $r_2$ é tal que

$$\boxed{\cos\theta = \frac{|\vec{v}_1 \cdot \vec{v}_2|}{\|\vec{v}_1\|\|\vec{v}_2\|},} \quad \text{com } 0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{2}.$$

**Exemplo:** Calcular o ângulo entre as retas

$$r_1 : \begin{cases} x = 3 + t \\ y = t \\ z = -1 - 2t \end{cases}, t \in \mathbb{R} \quad \text{e} \quad r_2 : \frac{x+2}{-2} = y - 3 = z.$$

**Solução:** Os vetores diretores de $r_1$ e $r_2$ são, respectivamente $\vec{v}_1 = (1, 1, -2)$ e $\vec{v}_2 = (-2, 1, 1)$. Logo,

$$\cos\theta = \frac{|\vec{v}_1 \cdot \vec{v}_2|}{\|\vec{v}_1\|\|\vec{v}_2\|} = \frac{|(1,1,-2)\cdot(-2,1,1)|}{\sqrt{1^2 + 1^2 + (-2)^2}\sqrt{(-2)^2 + 1^2 + 1^2}} = \frac{|-3|}{\sqrt{6}\sqrt{6}} = \frac{3}{6} = \frac{1}{2}.$$

Como $\cos\theta = \frac{1}{2}$, então $\theta = \arccos\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{\pi}{3}$ radianos (ou $60°$).

## Posições Relativas de Duas Retas no Espaço

Duas retas $r_1$ e $r_2$, no espaço, podem ser:

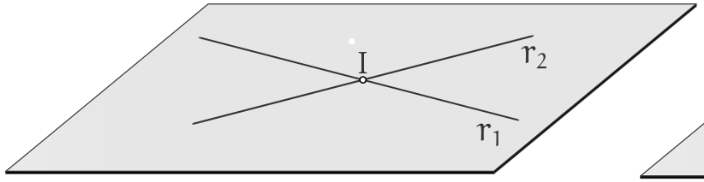
(a) **coplanares**, isto é, situadas no mesmo plano.

Nesse caso, as retas poderão ser:

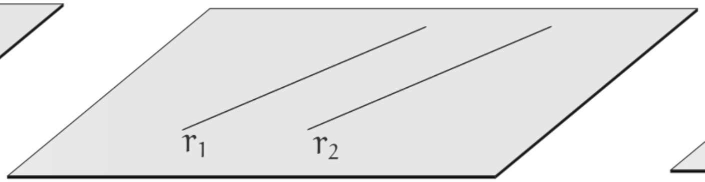
(i) **concorrentes:** $r_1 \cap r_2 = \{I\}$, $I$ é o ponto de intersecção das retas $r_1$ e $r_2$

(ii) **paralelas:** $r_1 \cap r_2 = \emptyset$

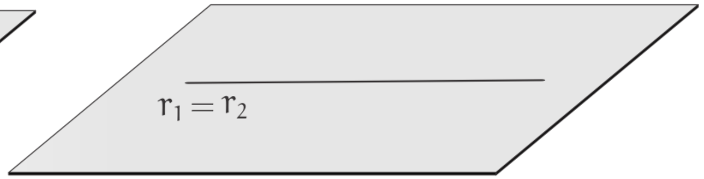
(iii) **coincidentes:** $r_1 = r_2$




concorrentes

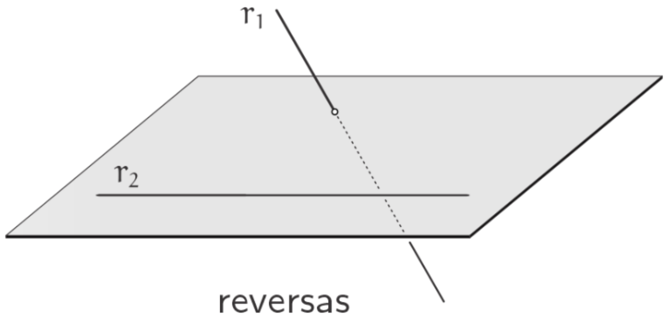



paralelas




coincidentes

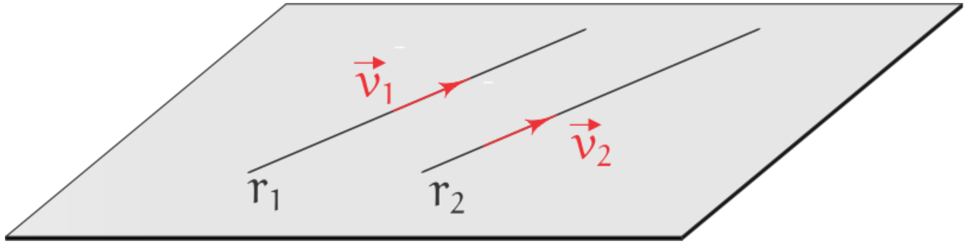
(b) **reversas**, isto é, não situadas no mesmo plano. Nesse caso, $r_1 \cap r_2 = \emptyset$.




reversas

## Condição de Paralelismo de Duas Retas

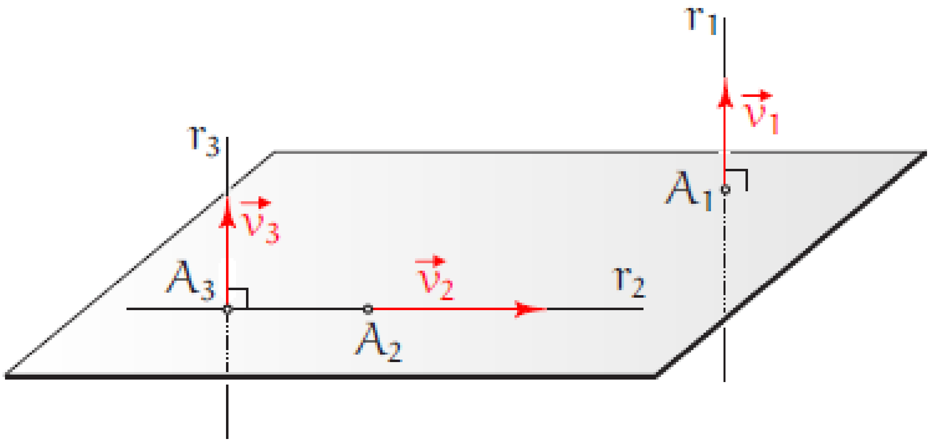
Duas retas são **paralelas** quando são distintas e possuem vetores diretores paralelos, isto é, quando as coordenadas dos vetores diretores das retas forem proporcionais.




$$\boxed{r_1 \,//\, r_2 \Leftrightarrow r_1 \neq r_2 \text{ e } \vec{v}_1 = \alpha \vec{v}_2}$$

## Condição de Ortogonalidade de Duas Retas

Duas retas são **ortogonais** quando possuem vetores diretores ortogonais, isto é, quando o produto escalar dos vetores diretores das retas for nulo.
Observe que duas retas podem ser ortogonais sem serem concorrentes, ou seja, podem ser ortogonais e reversas.

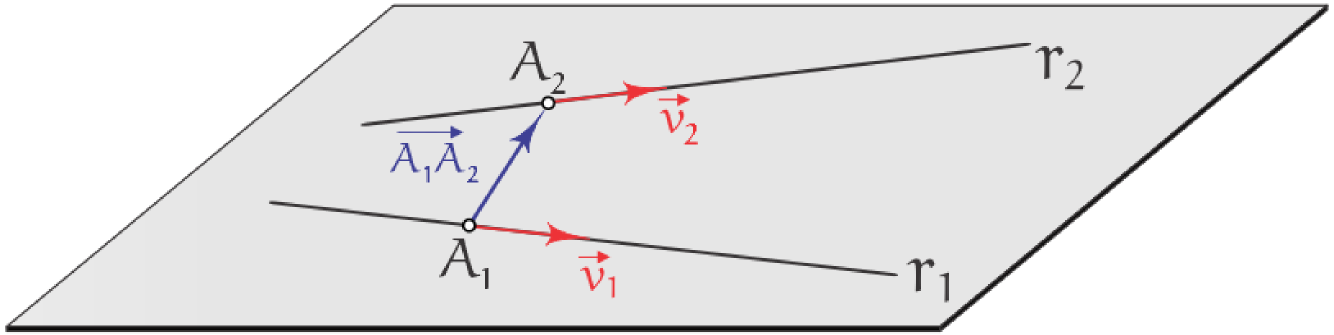



$$\boxed{r_1 \perp r_2 \Leftrightarrow \vec{v}_1 \cdot \vec{v}_2 = 0}$$

Quando duas retas são ortogonais e concorrentes, dizemos que elas são **perpendiculares**.

# Condição de Coplanaridade de Duas Retas

A reta $r_1$, que passa por um ponto $A_1(x_1, y_1, z_1)$ e tem a direção de um vetor $\vec{v}_1 = (a_1, b_1, c_1)$, e reta $r_2$, que passa por um ponto $A_2(x_2, y_2, z_2)$ e tem a direção de um vetor $\vec{v}_2 = (a_2, b_2, c_2)$, são **coplanares** quando os vetores $\vec{v}_1, \vec{v}_2$ e $\overrightarrow{A_1A_2}$ forem coplanares, isto é, quando o produto misto desses vetores for nulo.




$$r_1 \text{ e } r_2 \text{ são coplanares} \Leftrightarrow \left(\vec{v}_1, \vec{v}_2, \overrightarrow{A_1A_2}\right) = 0 \Leftrightarrow \det \begin{bmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ x_2 - x_1 & y_2 - y_1 & z_2 - z_1 \end{bmatrix} = 0$$

**Observações:** Sejam $r_1$ a reta que passa pelo ponto $A_1$ e tem a direção de $\vec{v}_1$ e $r_2$ a reta que passa pelo ponto $A_2$ e tem a direção de $\vec{v}_2$. Temos que:

**(1)** Se $r_1$ e $r_2$ forem paralelas, então elas serão coplanares e, portanto, $\left(\vec{v}_1, \vec{v}_2, \overrightarrow{A_1A_2}\right) = 0$.

**(2)** Se $r_1$ e $r_2$ não forem paralelas e $\left(\vec{v}_1, \vec{v}_2, \overrightarrow{A_1A_2}\right) = 0$, então elas são concorrentes.

**(3)** Se $\left(\vec{v}_1, \vec{v}_2, \overrightarrow{A_1A_2}\right) \neq 0$, então as retas $r_1$ e $r_2$ são reversas.

## Exemplos:

**(1)** Estude a posição relativa das retas:

(**a**) $r_1\colon \begin{cases} y = 2x - 3 \\ z = -x \end{cases}$ e $r_2\colon \begin{cases} x = 1 - 3t \\ y = 4 - 6t\,, t \in \mathbb{R} \\ z = 3t \end{cases}$

**Solução:** Temos que

- vetor diretor de $r_1$: $\vec{v}_1 = (1,2,-1)$
- vetor diretor de $r_2$: $\vec{v}_2 = (-3,-6,3)$

Logo, $\vec{v}_2 = -3\vec{v}_1$. Assim, temos duas possibilidades: as retas são paralelas ou as retas são coincidentes.
Veja que o ponto $A(0-3,0)$ pertence a $r_1$ e não pertence a $r_2$, então elas são distintas.
Portanto, as retas são paralelas.

**(b)** $r_1: \frac{x}{2} = \frac{y-1}{-1} = z$ e $r_2: \begin{cases} x = 2 - 4t \\ y = 2t \\ z = -2t + 1 \end{cases}, t \in \mathbb{R}$

**Solução:** Temos que

- vetor diretor de $r_1$: $\vec{v}_1 = (2, -1, 1)$
- vetor diretor de $r_2$: $\vec{v}_2 = (-4, 2, -2)$

Como $\vec{v}_2 = -2\vec{v}_1$, então os vetores diretores são paralelos.
Desse modo, temos duas possibilidades: as retas são paralelas ou as retas são coincidentes.
Nesse caso, temos que $r_1 = r_2$ (basta ver que um ponto qualquer de $r_1$, por exemplo $A(0, 1, 0)$, também pertence a $r_2$).

**(c)** $r_1: \frac{x-2}{2} = \frac{y}{3} = \frac{z-5}{4}$ e $r_2: \begin{cases} x = 5 + t \\ y = 2 - t \\ z = 7 - 2t \end{cases}, t \in \mathbb{R}$

**Solução:** Temos que

- vetor diretor de $r_1$: $\vec{v}_1 = (2, 3, 4)$
- vetor diretor de $r_2$: $\vec{v}_2 = (1, -1, -2)$

Como $\vec{v}_1$ e $\vec{v}_2$ não são paralelos, segue que as retas $r_1$ e $r_2$ não são paralelas.

Sejam $A_1(2, 0, 5) \in r_1$ e $A_2(5, 2, 7) \in r_2$. Então, $\overrightarrow{A_1A_2} = (3, 2, 2)$.
Calculando o produto misto $\left(\vec{v}_1, \vec{v}_2, \overrightarrow{A_1A_2}\right)$, obtemos:

$$\left(\vec{v}_1, \vec{v}_2, \overrightarrow{A_1A_2}\right) = \det \begin{bmatrix} 2 & 3 & 4 \\ 1 & -1 & -2 \\ 3 & 2 & 2 \end{bmatrix} = 0\,.$$

Portanto, as retas são concorrentes.

(**d**) $r_1\colon \begin{cases} y = 3 \\ z = 2x \end{cases}$ e $r_2\colon x = y = z$

**Solução:** Temos que

- vetor diretor de $r_1$: $\vec{v}_1 = (1, 0, 2)$
- vetor diretor de $r_2$: $\vec{v}_2 = (1, 1, 1)$

Como as coordenadas dos vetores diretores não são proporcionais, segue que $\vec{v}_1$ e $\vec{v}_2$ não são paralelos. Logo, as retas $r_1$ e $r_2$ não são paralelas.

Sejam $A_1(0, 3, 0) \in r_1$ e $A_2(0, 0, 0) \in r_2$. Então, $\overrightarrow{A_1A_2} = (0, -3, 0)$.
Calculando o produto misto $\left(\vec{v}_1, \vec{v}_2, \overrightarrow{A_1A_2}\right)$, obtemos:

$$\left(\vec{v}_1, \vec{v}_2, \overrightarrow{A_1A_2}\right) = \det \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & -3 & 0 \end{bmatrix} = -3 \neq 0\,.$$

Isso significa que as retas $r_1$ e $r_2$ são reversas.

(**2**) Determine o ponto de intersecção entre as retas:

(**a**) $r_1$: $\frac{x-2}{2} = \frac{y}{3} = \frac{z-5}{4}$ e $r_2$: $\begin{cases} x = 5 + t \\ y = 2 - t \\ z = 7 - 2t \end{cases}, t \in \mathbb{R}$

**Solução:** Seja $I(x_0, y_0, z_0)$ o ponto de intersecção de $r_1$ e $r_2$. Então, $I$ satisfaz as equações das duas retas, ou seja,

$$\frac{x_0-2}{2} = \frac{y_0}{3} = \frac{z_0-5}{4} \quad \text{e} \quad \begin{cases} x_0 = 5 + t \\ y_0 = 2 - t \\ z_0 = 7 - 2t \end{cases}.$$

Logo,

$$\frac{(5+t)-2}{2} = \frac{2-t}{3} = \frac{(7-2t)-5}{4} \Rightarrow \frac{t+3}{2} = \frac{-t+2}{3} = \frac{-2t+2}{4}.$$

Usando qualquer uma das igualdades, obtemos $t = -1$.
(Por exemplo, de $\frac{t+3}{2} = \frac{-t+2}{3}$, temos que $3t + 9 = -2t + 4 \Rightarrow 5t = -5 \Rightarrow t = -1$.)

Substituindo $t = -1$, obtemos $\begin{cases} x_0 = 5 + t = 5 - 1 = 4 \\ y_0 = 2 - t = 2 + 1 = 3 \\ z_0 = 7 - 2t = 7 + 2 = 9 \end{cases}.$

Portanto, o ponto de intersecção de $r_1$ e $r_2$ é dado por $I(4, 3, 9)$.

(**b**) $r_1: \begin{cases} x = t \\ y = 2 - 3t \\ z = -1 + 3t \end{cases}, t \in \mathbb{R}$ e $r_2: \begin{cases} x = -h \\ y = 1 + 2h \\ z = -2h \end{cases}, h \in \mathbb{R}$

**Solução:** Seja $I(x_0, y_0, z_0)$ o ponto de intersecção de $r_1$ e $r_2$.
Então, $I$ satisfaz as equações das duas retas, ou seja,

$$\begin{cases} x_0 = t \\ y_0 = 2 - 3t \\ z_0 = -1 + 3t \end{cases} \quad \text{e} \quad \begin{cases} x_0 = -h \\ y_0 = 1 + 2h \\ z_0 = -2h \end{cases}.$$

Logo,

$$\begin{cases} t = -h \\ 2 - 3t = 1 + 2h \\ -1 + 3t = -2h \end{cases} \Rightarrow \quad t = 1 \text{ e } h = -1.$$

Portanto, o ponto de intersecção de $r_1$ e $r_2$ é dado por $I(1, -1, 2)$.

**(3)** Verifique se as retas $r$ e $s$ são ortogonais e, em caso afirmativo, se são também perpendiculares, sendo

$$r\colon (x, y, z) = (1, 2, 3) + t(1, 2, 1), \text{ com } t \in \mathbb{R};$$

$$\mathrm{s}\colon (x, y, z) = (2, 4, 4) + h(-1, 1, -1), \text{ com } h \in \mathbb{R}.$$

**Solução:** Temos que $\vec{v} = (1, 2,1)$ e $\vec{w} = (-1, 1, -1)$ são vetores diretores de $r$ e $s$, respectivamente. Calculando o produto escalar entre esses vetores, obtemos $\vec{v} \cdot \vec{w} = (1, 2,1) \cdot (-1, 1, -1) = 0$, ou seja, $\vec{v}$ é ortogonal a $\vec{w}$ e, portanto, $r$ é ortogonal a $s$.

Se $r$ for perpendicular a $s$, deverá existir um ponto $I(x_0, y_0, z_0)$ em comum a $r$ e $s$. Sejam $t_0$ e $h_0$ os parâmetros associados a $I$ em $r$ e $s$. Então, substituindo $(x_0, y_0, z_0)$ nas equações das retas, obtemos:

$$(x_0, y_0, z_0) = (1, 2, 3) + t_0(1, 2, 1) = (1 + t_o, 2 + 2t_o, 3 + t_0)$$
e
$$(x_0, y_0, z_0) = (2, 4, 4) + h_0(-1, 1, -1) = (2 - h_0, 4 + h_0, 4 - h_0).$$

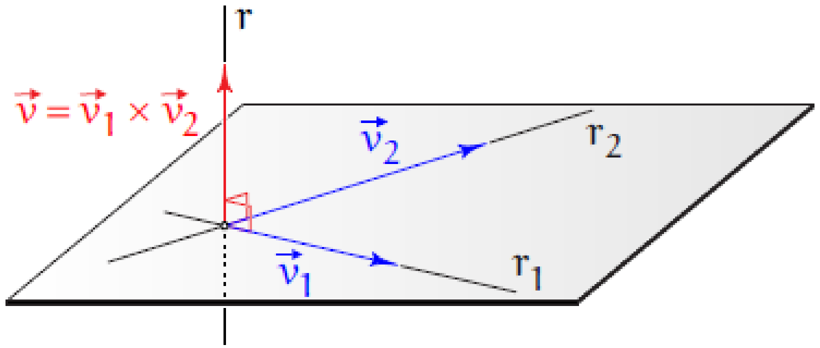
Logo,

$$\begin{cases} 1 + t_0 = 2 - h_0 \\ 2 + 2t_0 = 4 + h_0 \\ 3 + t_0 = 4 - h_0 \end{cases} \Rightarrow \; t_0 = 1 \text{ e } h_0 = 0.$$

Desse modo, $I(2, 4, 4)$ é o ponto de intersecção entre $r$ e $s$. Portanto, $r$ e $s$ são perpendiculares.

# Reta Ortogonal a Duas Retas Não Paralelas

Uma reta $r$ pode ser simultaneamente ortogonal a outras duas retas não paralelas $r_1$ e $r_2$.
Para encontrarmos um vetor diretor $\vec{v}$ de $r$, basta tomarmos o produto vetorial dos vetores diretores $\vec{v}_1$ e $\vec{v}_2$ das retas $r_1$ e $r_2$, respectivamente, ou seja, $\vec{v} = \vec{v}_1 \times \vec{v}_2$.




**Exemplo:** Dadas as retas $r_1$ e $r_2$ não paralelas

$$r_1: (x, y, z) = (0, 0, 1) + t(2, 3, -4), t \in \mathbb{R} \quad \text{e} \quad r_2: (x, y, z) = (5, 0, 1) + h(0, 1, -1), h \in \mathbb{R},$$

Determine uma equação vetorial da reta $r$ que passa por $A(3, 4, -1)$ e que seja ortogonal a $r_1$ e a $r_2$ simultaneamente.

**Solução:** Os vetores diretores de $r_1$ e $r_2$ são, respectivamente, $\vec{v}_1 = (2, 3, -4)$ e $\vec{v}_2 = (0, 1, -1)$.
Logo, um vetor diretor para $r$ é

$$\vec{v} = \vec{v}_1 \times \vec{v}_2 = \det \begin{bmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 2 & 3 & -4 \\ 0 & 1 & -1 \end{bmatrix} = \vec{i} + 2\vec{j} + 2\vec{k} = (1, 2, 2).$$

Portanto, a reta $r$ é dada por:

$$r: (x, y, z) = (3, 4, -1) + u(1, 2, 2), \text{ com } u \in \mathbb{R}.$$

## Exercícios:

(**1**) Determinar as equações das seguintes retas:

(**a**) Reta que passa por $A(1,-2,4)$ e é paralela ao eixo $\mathrm{O}x$;

(**b**) Reta que passa por $B(3,2,1)$ e é perpendicular ao plano $xOz$.

**(2)** Determinar o valor de $n$ para que seja de $30°$ o ângulo entre as retas

$$r: \frac{x-2}{4} = \frac{y+4}{5} = \frac{z}{3} \quad \text{e} \quad s: \begin{cases} y = nx + 5 \\ z = 2x - 2 \end{cases}.$$

**(3)** Quais as equações reduzidas da reta que passa pelo ponto $A(-2, 1, 0)$ e é paralela à reta

$$r\colon \frac{x+1}{1} = \frac{y}{4} = \frac{z}{-1} \ ?$$

**(4)** A reta

$$r: \begin{cases} y = mx + 3 \\ z = x - 1 \end{cases}$$

É ortogonal à reta determinada pelos pontos $A(1, 0, m)$ e $B(-2, 2m, 2m)$. Calcular o valor de $m$.

**(5)** Estabelecer as equações paramétricas da reta que passa pelo ponto de intersecção das retas

$$r: x - 2 = \frac{y+1}{2} = \frac{z}{3} \quad \text{e} \quad s: \begin{cases} x = 1 - y \\ z = 2 + 2y \end{cases}$$

e é, ao mesmo tempo, ortogonal a $r$ e $s$.

**(6)** Estude a posição relativa das retas $r$ e $s$ nos seguintes casos:

(i) $r : \frac{x+1}{2} = y = z + 12$ e $s : (x, y, z) = (0, 0, 0) + \lambda(1, 2, 0)$, com $\lambda \in \mathbb{R}$;

(ii) $r : \frac{x-1}{3} = \frac{y-5}{3} = \frac{z+2}{5}$ e $s : x = -y = \frac{z-1}{4}$.

*Respostas: reversas e concorrentes, respectivamente.*