SEÇÃO 1 – Noção intuitiva de limite

Para entender a definição de limite de uma função, você precisa, num primeiro momento, trabalhar com uma noção mais intuitiva deste objeto matemático, imprescindível para a definição de ferramentas futuras como a derivada.

A idéia de limite é um conceito simples: escolhemos um ponto *a* de uma função *y = f(x)* e analisamos o que acontece com os valores de *f(x)* quando *x* se aproxima de *a*.

O que significa x tende para *a*?

Para responder esta pergunta, veja as seguintes seqüências numéricas:

- $1, \frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{1}{8}, \frac{1}{16}, \frac{1}{32}, \ldots$ Note nesta seqüência que os números aproximam-se cada vez mais de zero. Dizemos que *x* tende a zero e escrevemos $x \to 0$.
- 1, 2, 3, 4, 5, 6, ... Nesta seqüência, os números crescem sem limitação, dizemos então que a seqüência tende ao infinito e escrevemos $x \to +\infty$.

Exemplos

Para entender melhor o assunto observe os exemplos a seguir!

Exemplo 1: Seja $f(x) = x^2 - x + 1$. O que acontece com os valores de *f(x)* quando *x* aproxima-se de 2?

Veja as tabelas a seguir:

x	y
1,5	1,75
1,9	2,71
1,95	2,8525
1,99	2,9701
1,999	2,997001

Note que estamos tomando valores a esquerda de 2, ou seja, valores menores que 2.

x	y
2,5	4,75
2,1	3,31
2,01	3,0301
2,001	3,003001
2,0001	3,00030001

Note que estamos tomando valores a direita de 2, ou seja, valores maiores que 2.

Fica claro, por uma simples análise das tabelas, que, quando x **aproxima-se de 2, tanto pela direita, quanto pela esquerda, os valores de *f(x)* ficam mais próximos de 3**.

Dizemos que o limite de $x^2 - x + 1$ é 3, quando x tende a 2 e denotamos por

$$\lim_{x \to 2}(x^2 - x + 1) = 3 \ .$$

Na Figura 2.1 você pode visualizar este limite calculado, que neste caso específico coincide com a imagem do ponto.

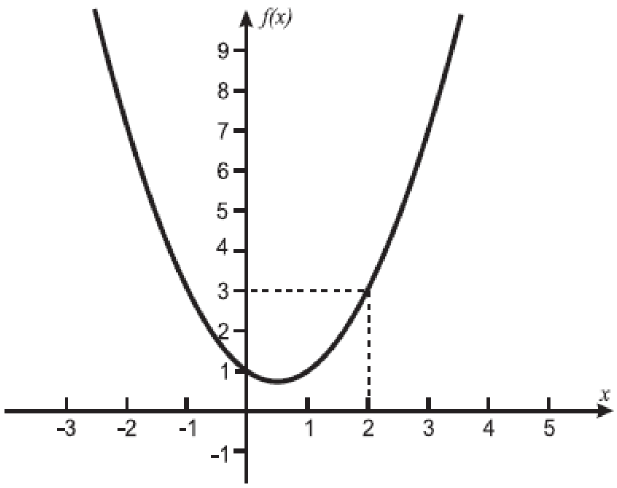

Figura 2.1 – Gráfico da função $f(x) = x^2 - x + 1$

Olhando o futuro!

Para facilitar a construção das tabelas de valores, você pode utilizar uma calculadora ou algum software. O Graph pode fazer os gráficos e ainda possui uma ferramenta para fazer a montagem da tabela. Veja menu Calc e submenu ***Table***.

Exemplo 2: Considerando a mesma função do item anterior $f(x) = x^2 - x + 1$, agora vamos analisar o que acontece com os valores de *f(x)*, quando *x* cresce indefinidamente?

Analise a tabela de valores que segue:

x	y
1	1
2	3
5	21
10	91
100	9.901
1000	999.001

Note que a medida que os valores de x crescem, os valores de *f(x)* , crescem cada vez mais.

Dizemos, então, que quando *x* tende ao infinito, os valores de *f(x)* também tendem ao infinito, e escrevemos:

$$\lim_{x \to +\infty} (x^2 - x + 1) = +\infty.$$

Veja o gráfico da Figura 2.1 e perceba a validade do resultado.

Exemplo 3: Analise o comportamento da função $f(x) = \dfrac{1}{x-1}$ próximo de *x=1*.

Veja a análise pela tabela:

x	y
0,1	-1,11
0,5	-2
0,9	-10
0,99	-100
0,999	-1000

Note que quando x tende a 1 pela **esquerda** os valores de *f(x)* **decrescem** indefinidamente

x	y
1,5	2
1,1	10
1,01	100
1,001	1000
1,0001	10000

Note que quando x tende a 1 pela **direita** os valores de *f(x)* **crescem** indefinidamente.

Neste caso é possível dizer que

$$\lim_{x \to 1^-} \frac{1}{x-1} = -\infty \text{ e } \lim_{x \to 1^+} \frac{1}{x-1} = +\infty .$$

Pare! Observe!

Perceba que quando x tende a 1 pela esquerda escrevemos $x \to 1^-$ e que quando x tende a 1 pela direita escrevemos $x \to 1^+$. Estes limites são **chamados limites laterais**, e serão estudados mais detalhadamente na seção 3.

Esta análise pode ser visualizada na Figura 2.2.

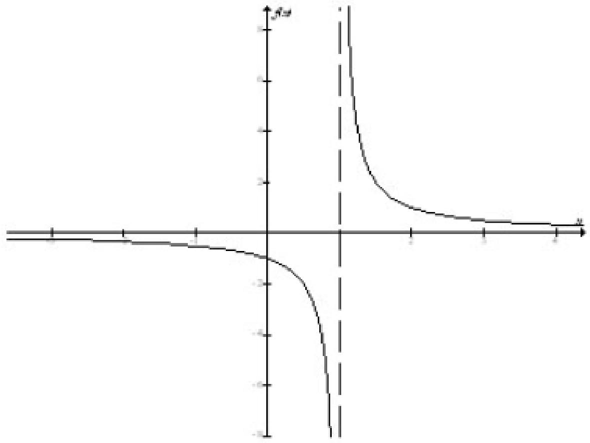

Figura 2.2 – Gráfico da função $f(x) = \dfrac{1}{x-1}$.

Exemplo 4: Analisar o comportamento de $f(x) = \dfrac{1}{x-1}$, quando $x \to +\infty$ e $x \to -\infty$.

Fazendo uso das tabelas de valores temos:

x	y
0	-1
-5	-0,16
-10	-0,0909
-100	-0,009009
-1000	-0,00090009

Note que a medida que x **decresce** indefinidamente os valores de *f(x)* tendem a **zero**.

x	y
2	1
5	0,25
10	0,111
100	0,0101
1000	0,001001

Note que a medida que x **cresce** indefinidamente os valores de *f(x)* tendem a **zero**.

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{1}{x-1} = 0 \text{ e } \lim_{x \to -\infty} \frac{1}{x-1} = 0$$

Veja a Figura 2.2 e visualize esses resultados.

Para finalizar esta seção, veja a definição formal de limite de uma função.

Seja *f(x)* definida em um intervalo I, contendo *a*, exceto possivelmente no próprio *a*. Dizemos que o limite de *f(x)* quando *x* aproxima-se de *a* é L e escrevemos

$$\lim_{x \to a} f(x) = L$$

se para todo $\varepsilon > 0$, existe um $\delta > 0$, tal que $|f(x) - L| < \varepsilon$ sempre que $0 < |x - a| < \delta$.

Em outras palavras, pode-se fazer *f(x)* tão próximos de L quanto se deseja, desde que tome-se *x* suficientemente próximos de *a*.

Nesta disciplina você não irá utilizar esta definição formal para calcular o limite de uma função. O cálculo será intuitivo ou a partir de propriedades, que serão apresentadas na próxima seção.

Agora é a sua vez!

Use folhas adicionais para realizar seus cálculos.

Use folhas adicionais para realizar seus cálculos.

1) Calcular os seguintes limites, usando uma tabela de valores. Na tabela deve constar pelo menos 6 valores para *x*. Se necessário escolha valores para a tendência tanto pela direita como pela esquerda.

a) $\lim_{x \to 0} (3 - 7x - 5x^2)$ 3

b) $\lim_{x \to -1} (-3x + 7)$ 10

c) $\lim_{x \to 1} \frac{x^2 - 1}{x - 1}$ $= \frac{(x+1)\cancel{(x-1)}}{\cancel{(x-1)}}$ 1+1 2

d) $\lim_{x \to 1^+} \frac{x+1}{x^3 - 1}$ L $+\infty$

e) $\lim_{x \to 1^-} \frac{x+1}{x^3 - 1}$ $-\infty$

f) $\lim_{x \to +\infty} (3x^2 - 7x + 2)$ $= \infty$

2) Considere o gráfico apresentado na Figura 2.3 da seguinte função

$$f(x) = \begin{cases} x^2 + 1 & x < 2 \\ 2 & x = 2 \\ 9 - x^2 & x > 2 \end{cases}$$

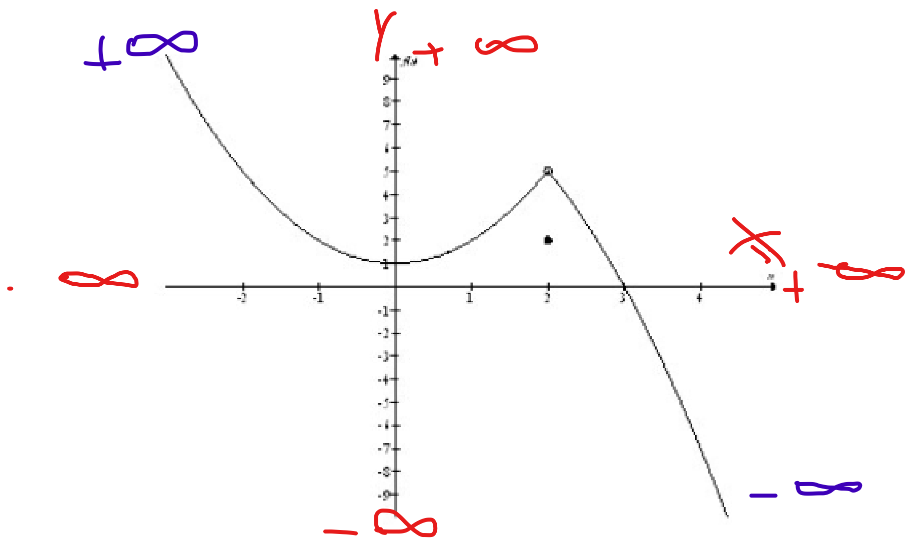

Figura 2.3 – Gráfico da função *f(x)*

Analisando o gráfico resolva os seguintes limites:

a) $\lim\limits_{x \to 2^+} f(x)$ 5

b) $\lim\limits_{x \to 2^-} f(x)$ 5

c) $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x)$ $-\infty$

d) $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x)$ $+\infty$

Parada recreativa

Você já ouviu falar do paradoxo de Zenão?

Imagine Aquiles, o maior corredor da Antigüidade
1 apostando uma corrida com uma tartaruga. É claro que ele deu uma chance posicionando-se um pouco atrás. A regra da corrida era que cada um iria caminhar em cada momento a metade do caminho que falta para atingir o objetivo situado ao final de uma linha reta.

Por incrível que parece Aquiles nunca vai alcançar a tartaruga. Veja como podemos mostrar essa situação matematicamente.

Considerando que a distância pode ser estabelecida como uma unidade de medida de comprimento e que a distância percorrida em cada passo é dada por $d_1, d_2, \ldots, d_n$, então

$$d_1 = \frac{1}{2} = 0,5$$

$$d_2 = \frac{1}{2} + \frac{1}{4} = 0,75$$

$$d_3 = \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} = 0,875$$

$$d_4 = \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \frac{1}{16} = 0,9375$$

$$d_5 = \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \frac{1}{16} + \frac{1}{32} = 0,96875$$

$$d_6 = \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \frac{1}{16} + \frac{1}{32} + \frac{1}{64} = 0,984375$$

Perceba que se continuarmos calculando as distâncias d, o valor se aproximará de 1 medida de comprimento, que é a distância total a ser percorrida.

Diz-se então que se o número de passos n, cresce muito ou tende ao infinito e que a distância entre Aquiles e a tartaruga vai tender para zero mas nunca será zerada.

SEÇÃO 2 – Cálculo de limites usando propriedades

Na seção anterior, você estudou o comportamento de uma função próximo de um ponto *a*. Para tal, foram utilizadas representações da função a partir de tabelas e gráficos, com o intuito de facilitar a visualização e, conseqüentemente, a análise do comportamento da função.

No entanto, você deve ter percebido que a montagem de uma tabela ou de um gráfico de uma função pode ser extremamente trabalhosa, principalmente sem o uso de um recurso computacional. Sendo assim, nesta seção você vai estudar as propriedades operatórias de limite, que simplificarão os cálculos de limites sem o uso das ferramentas da seção anterior.

Para cada propriedade será apresentado um exemplo que lhe auxiliará na compreensão de sua validade.

O primeiro resultado a ser apresentado, é o teorema da unicidade, cuja demonstração será omitida.

Teorema da Unicidade

Se $\lim_{x \to a} f(x) = L_1$ e $\lim_{x \to a} f(x) = L_2$, então $L_1 = L_2$

Em outras palavras, este resultado nos diz que o valor do limite de uma função *f(x)*, quando *x* tende a *a* é único, isto é, não existem dois valores para um mesmo limite.

Propriedade 1

Sejam α, β e *a* números reais, então

$$\lim_{x \to a} \alpha \cdot x + \beta = \alpha \cdot a + \beta$$

Exemplo

Calcular $\lim_{x \to 3}(5x+6)$.

Usando a propriedade 1 temos que:

$$\lim_{x \to 3}(5x+6) = 5 \cdot 3 + 6 = 21$$

Leitura Opcional!

Se você curte demonstrações matemáticas, não perca!

Vamos demonstrar a propriedade 1.

1° Caso: $\alpha \neq 0$

Usando a definição, dado $\varepsilon > 0$, deve-se encontrar $\delta > 0$, tal que $|(\alpha \cdot x + \beta) - (\alpha \cdot a + \beta)| < \varepsilon$, sempre que $0 < |x - a| < \delta$.

Portanto,

$$|(\alpha \cdot x + \beta) - (\alpha \cdot a + \beta)| < \varepsilon$$

$$|\alpha \cdot x - \alpha \cdot a| < \varepsilon$$

$$|\alpha||x - a| < \varepsilon$$

$$|x - a| < \frac{\varepsilon}{|\alpha|} = \delta$$

De fato, se $\delta = \frac{\varepsilon}{|\alpha|}$, tem-se

$$|(\alpha \cdot x + \beta) - (\alpha \cdot a + \beta)| = |\alpha| \cdot |x - a| < |\alpha| \cdot \frac{\varepsilon}{|\alpha|} = \varepsilon$$

Sempre que $0 < |x - a| < \delta = \frac{\varepsilon}{|\alpha|}$

Logo $\lim_{x \to a}(\alpha \cdot x + \beta) = \alpha \cdot a + \beta$

2° Caso: $\alpha = 0$

Neste caso, tem-se que $|(\alpha \cdot x + \beta) - (\alpha \cdot a + \beta)| = 0 < \varepsilon$, logo qualquer $\delta > 0$, satisfaz a definição de limite.

Propriedade 2

Seja c um número real, então temos que

$\lim_{x\to a} c = c$ e $\lim_{x\to a} x = a$.

Pare! Observe!

A propriedade 2 é conseqüência imediata da propriedade 1. O primeiro limite segue da propriedade 1 , quando $\alpha = 0$ e $\beta = c$. O segundo decorre quando $\alpha = 1$ e $\beta = 0$.

Para as próximas propriedades, considere que $\lim_{x\to a} f(x)$ e $\lim_{x\to a} g(x)$ existem e c é um número real qualquer.

Propriedade 3

$$\lim_{x\to a}[f(x) \pm g(x)] = \lim_{x\to a} f(x) \pm \lim_{x\to a} g(x) .$$

Isto quer dizer que o limite da soma (diferença) é igual a soma (diferença) dos limites. Esta propriedade é válida também para um soma (diferença) de duas ou mais funções.

Propriedade 4

$$\lim_{x\to a} cf(x) = c \lim_{x\to a} f(x) .$$

Exemplo

Calcular $\lim_{x\to 0}(3x+5)$.

Usando as propriedades 3 e 4, temos:

$$\lim_{x\to 0}(3x+5) = \lim_{x\to 0} 3x + \lim_{x\to 0} 5 = 3\lim_{x\to 0} x + \lim_{x\to 0} 5 = 3\cdot 0 + 5 = 5$$

Pare! Observe!

Note que poderíamos ter usado diretamente a propriedade 1.

Propriedade 5

$$\lim_{x \to a} f(x) \cdot g(x) = \lim_{x \to a} f(x) \cdot \lim_{x \to a} g(x).$$

Esta propriedade coloca que o limite do produto é o produto dos limites. Ela é válida também se tivermos o produto de duas ou mais funções.

Exemplo

Calcular $\lim_{x \to -2} x(x-6)$.

Usando a propriedade 5, temos:

$$\lim_{x \to -2} x(x-6) = \lim_{x \to -2} x \cdot \lim_{x \to -2} (x-6) = -2 \cdot (-2-6) = 16$$

Propriedade 6

$$\lim_{x \to a} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{\lim_{x \to a} f(x)}{\lim_{x \to a} g(x)}, \text{ sempre que } \lim_{x \to a} g(x) \neq 0.$$

Dizemos que o limite do quociente é o quociente dos limites.

Exemplo

Calcular $\lim_{x \to 2} \frac{x+5}{x-1}$.

Podemos usar a propriedade 6, pois o limite do denominador é diferente de zero.

$$\lim_{x \to 2} \frac{x+5}{x-1} = \frac{\lim_{x \to 2}(x+5)}{\lim_{x \to 2}(x-1)} = \frac{2+5}{2-1} = 7$$

Propriedade 7

$$\lim_{x \to a} [f(x)]^n = \left[\lim_{x \to a} f(x)\right]^n.$$

Exemplo 1: Calcular $\lim\limits_{x\to 1}(x^3 - 3x^2 + 6x - 1)$.

Aqui vamos usar as propriedades 2, 3, 4 e 7.

$$\lim_{x\to 1}(x^3 - 3x^2 + 6x - 1) = \lim_{x\to 1} x^3 - 3\lim_{x\to 1} x^2 + 6\lim_{x\to 1} x - \lim_{x\to 1} 1 = 1^3 - 3\cdot 1^2 + 6\cdot 1 - 1 = 3$$

Exemplo 2: Calcular $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x-1}{x^2-1}$.

Note que aqui não podemos usar a propriedade do quociente, pois $\lim\limits_{x\to 1}(x^2 - 1) = 0$, neste caso, fazemos uma fatoração do denominador.

$$\lim_{x\to 1}\frac{x-1}{x^2-1} = \lim_{x\to 1}\frac{x-1}{(x-1)\cdot(x+1)} = \lim_{x\to 1}\frac{1}{x+1} = \frac{\lim\limits_{x\to 1} 1}{\lim\limits_{x\to 1}(x+1)} = \frac{1}{1+1} = \frac{1}{2}$$

Propriedade 8

$\lim\limits_{x\to a}\sqrt[n]{f(x)} = \sqrt[n]{\lim\limits_{x\to a} f(x)}$, se $\lim\limits_{x\to a} f(x) > 0$ e n inteiro ou $\lim\limits_{x\to a} f(x) < 0$ e n inteiro impar.

Exemplo

Calcular $\lim\limits_{x\to 3}\sqrt{x^2 - 2x + 1}$.

$$\lim_{x\to 3}\sqrt{x^2 - 2x + 1} = \sqrt{\lim_{x\to 3}(x^2 - 2x + 1)} = \sqrt{9 - 6 + 1} = \sqrt{4} = 2$$

Propriedade 9

$\lim\limits_{x\to a} \ln[f(x)] = \ln\left[\lim\limits_{x\to a} f(x)\right]$, se $\lim\limits_{x\to a} f(x) > 0$.

Pare! Revise!

Lembre-se que $\ln(x)$ representa o logaritmo de x na base e (número neperiano), isto é, $\ln(x) = \log_e(x)$.

Exemplo

Calcular $\lim_{x \to 0} \ln(x^2 + 2x + 1)$.

$$\lim_{x \to 0} \ln(x^2 + 2x + 1) = \ln\left[\lim_{x \to 0}(x^2 + 2x + 1)\right] = \ln(0^2 + 2 \cdot 0 + 1) = \ln 1 = 0$$

Propriedade 10

$$\lim_{x \to a} e^{f(x)} = e^{\lim_{x \to a} f(x)}$$

Exemplos

Para entender melhor o assunto observe os exemplos a seguir!

Exemplo 1:

Calcular $\lim_{x \to -1} e^{x^3 + 2x^2 - x + 3}$.

$$\lim_{x \to -1} e^{x^3 + 2x^2 - x + 3} = e^{\lim_{x \to -1} x^3 + 2x^2 - x + 3} = e^{(-1)^3 + 2(-1)^2 - (-1) + 3} = e^{-1+2+1+3} = e^5$$

Pare! Observe!

Note que todos os limites dos exemplos anteriores podem ser calculados diretamente sem a necessidade de usar todo o detalhamento das propriedades. Para determinar os limites dados basta calcular a imagem da função. Isto deve ser feito com alguns cuidados, pois precisamos respeitar as condições da aplicabilidade das propriedades. Na seção 6 você vai estudar sobre as funções contínuas para depois voltar ao estudo desse tema.

Exemplo 2: Calcular os seguintes limites:

a) $\lim_{x \to -2} \sqrt{x^2 - 2x + 1} = \sqrt{(-2)^2 - 2 \cdot (-2) + 1} = \sqrt{9} = 3$.

b) $\lim_{x \to -3} (5 - x + x^2) = 5 - (-3) + (-3)^2 = 17$.

c) $\lim_{x \to \frac{1}{3}} (7x - 8) = (7 \cdot \frac{1}{3} - 8) = (\frac{7}{3} - 8) = \frac{-17}{3}$.

Olhando o presente!

A trajetória de um carro que se move em uma estrada pode ser descrita pela função $s(t)=t^2$. Qual é a sua velocidade instantânea no tempo *t=2* segundos?

O problema de cálculo de velocidade instantânea é um exemplo muito utilizado quando se quer tratar sobre taxas de variação, que são definidas a partir do limite de uma função.

Pare! Observe!

A velocidade média é calculada a partir da definição de dois instantes de tempo. Por exemplo, a velocidade média entre os pontos e pode ser calculada fazendo-se

$$V_M=\frac{\Delta s}{\Delta t}=\frac{s(5)-s(4)}{5-4}=\frac{(5)^2-(4)^2}{5-4}=\frac{25-16}{1}=9m/seg$$

A velocidade instantânea é uma taxa de variação entre o espaço percorrido e o tempo, quando fazemos a variação de tempo tender à zero. Fazer uma variável tender a algum valor é calcular o seu limite. Então acompanhe:

$$V=\lim_{\Delta t\to 0}\frac{s(t+\Delta t)-s(t)}{\Delta t}.$$

O problema solicita esta velocidade no instante *t=2*, ou seja, *V(2)*:

$$V(2)=\lim_{\Delta t\to 0}\frac{s(2+\Delta t)-s(2)}{\Delta t}.$$

Se a trajetória da função é descrita por $s(t)=t^2$, então:

$$s(2+\Delta t)=(2+\Delta t)^2=4+4\Delta t+(\Delta t)^2$$

$$s(2)=(2)^2=4.$$

Substituindo as expressões em *V(2)*:

$$
\begin{aligned}
V(2) &= \lim_{\Delta t \to 0} \frac{4 + 4\Delta t + (\Delta t)^2 - 4}{\Delta t} \\
&= \lim_{\Delta t \to 0} \frac{4\Delta t + (\Delta t)^2}{\Delta t} \\
&= \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta t \cdot (4 + \Delta t)}{\Delta t} \\
&= \lim_{\Delta t \to 0} (4 + \Delta t) = 4 + 0 = 4m / seg.
\end{aligned}
$$

Portanto, a velocidade instantânea em 2 segundos é igual a 4 metros por segundo. Perceba que esta é a velocidade que o motorista observaria no velocímetro de seu carro se pudesse olhar exatamente neste instante de tempo.

Agora é a sua vez!

Use folhas adicionais para realizar seus cálculos.

Use folhas adicionais para realizar seus cálculos.

Calcular os seguintes limites:

a) $\lim_{x \to -3} (x^2 + 6x + 1)$ → 28

b) $\lim_{x \to 4} \frac{x^2 - 16}{x - 4} = x + 4 = 8$

c) $\lim_{x \to 0} (x+5)^{2/5} = \left[\lim(x+5)\right]^{2/5} = [5]^{2/5} = \sqrt[5]{5^2} = \sqrt[5]{25}$

d) $\lim_{x \to 2} (x^2 - 1)^5 (x-3)^3 = [L(x^2 - 1)]^5 \cdot [\lim(x-3)]^3 = 3^5 \cdot (-1)^3 = -243$

e) $\lim_{x \to 2} \frac{x^2 - 5x + 6}{x - 2} = \frac{\cancel{(x-2)}(x-3)}{\cancel{x-2}} = 2 - 3 = -1$

f) $\lim_{x \to 0} (e^x + 1) = 1 + 1 = 2$

g) $\lim_{x \to \frac{1}{3}} (7x - 8) = \frac{7}{3} - \frac{8}{1} = \frac{7 - 24}{3} = \frac{-17}{3}$

h) $\lim_{x \to 3} \sqrt[3]{x^2 - 1} = \sqrt[3]{\lim(x^2 - 1)} = \sqrt[3]{8} = 2$

i) $\lim_{x \to 5} \frac{x^2 - 5}{x + 7} = \frac{\lim(x^2 - 5)}{\lim(x + 7)} = \frac{20}{12} = \frac{10}{6} = \frac{5}{3}$

SEÇÃO 3 – Limites laterais e indeterminações

Limites laterais

Para iniciar esta seção, é importante lembrar o que foi abordado na seção 1 quando tratamos do cálculo de limites de maneira intuitiva. Nos exemplos que foram apresentados, já realizamos observações sobre limites laterais.

Você lembra dos limites à esquerda e à direita de um ponto *a*?

Estes limites à esquerda e à direita são os limites laterais. Assim, $x \to a^+$, significa *x* tendendo a *a* pela direita, ou seja, tomamos valores de *x* maiores que *a*, e $x \to a^-$, significa *x* tendendo a *a* pela esquerda, ou seja, toma-se valores de *x* menores que *a*.

Para tratar sobre os limites laterais, já tendo claro a notação que foi apresentada na seção 1, é importante que você acompanhe alguns exemplos.

Exemplos

Para entender melhor o assunto observe os exemplos a seguir!

Exemplo 1: Calcular, se possível $\lim_{x \to 4^+} f(x)$ e $\lim_{x \to 4^-} f(x)$, sendo f(x) a função dada por:

$$f(x) = \begin{cases} x^2 & ; \quad x \leq 4 \\ 20 - x & ; \quad x > 4 \end{cases}$$

O limite quando x tende a 4 pela esquerda deve ser calculado utilizando-se a parte da função em que $x \leq 4$:

$$\lim x^2 = 4^2 = 16$$

Pela direita, utiliza-se a função quando $x > 4$:

$$\lim_{x \to 4^+} (20 - x) = 20 - 4 = 16 \, .$$

Pare! Observe!

Perceba que a noção de direita e esquerda de um número está relacionada com o seu posicionamento na reta dos números reais. Sendo assim, números maiores do que 4 estão à sua direita e, por outro lado, números menores do que 4 estão à sua esquerda.

Para auxiliar os cálculos e o entendimento dos limites laterais neste exemplo, veja o gráfico da função na Figura 2.4.

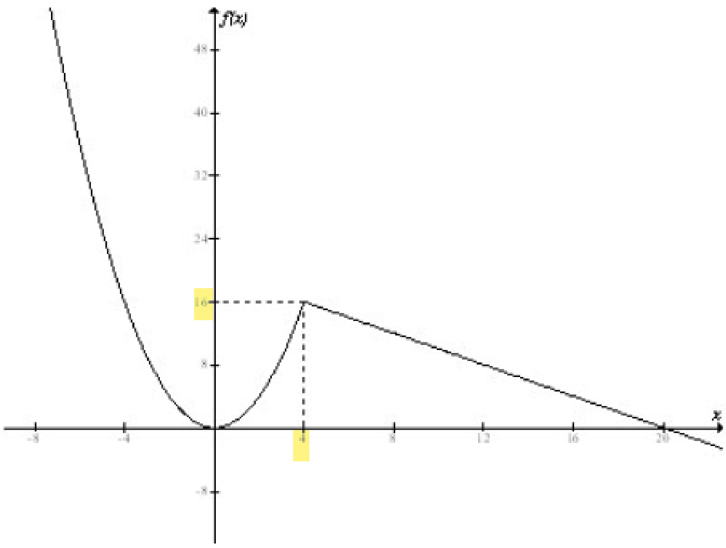

Figura 2.4 – Gráfico da função *f(x)*.

Exemplo 2: Seja $f(x) = \sqrt{x-2}$, determinar se possível $\lim_{x \to 2^+} f(x)$ e $\lim_{x \to 2^-} f(x)$.

Calcule, inicialmente $\lim_{x \to 2^+} f(x)$:

$$\lim_{x \to 2^+} \sqrt{x-2} = \sqrt{2-2} = 0$$

Já o $\lim_{x \to 2^-} \sqrt{x-2}$, não é possível calcular pois $f(x) = \sqrt{x-2}$, não está definida para $x < 2$.

Pare! Revise!

O domínio da função $f(x)=\sqrt{x-2}$ é dado por valores de x tais que $(x-2)\geqslant 0$, já que não existem raízes quadradas de números negativos. Assim, formalmente escrevemos: $D=\{x\in R | x\geqslant 2\}$.

Exemplo 3: Seja $f(x)=|x|$. Determine $\lim\limits_{x\to 0^+} f(x)$ e $\lim\limits_{x\to 0^-} f(x)$

Pare! Revise!

Lembre-se que $|x| = \begin{cases} x & ; \quad x\geqslant 0 \\ -x & ; \quad x<0 \end{cases}$

Os limites laterais solicitados serão calculados reescrevendo-se a função modular:

$$\lim_{x\to 0^+} |x| = \lim_{x\to 0^+} x = 0$$

$$\lim_{x\to 0^-} |x| = \lim_{x\to 0^-} -x = 0$$

Os limites laterais são importantes na definição do limite de uma função. Veja o teorema a seguir.

Teorema (Limites Laterais)

O limite de uma função existe em um ponto *a*, se e somente se, existirem os limites laterais no mesmo ponto *a* e tiverem o mesmo valor, ou seja

$\lim\limits_{x\to a} f(x)=L$, se e somente se,

$$\lim_{x\to a^+} f(x)=\lim_{x\to a^-} f(x)=L$$

Analisando os exemplos anteriores, de acordo com o teorema dos limites laterais, pode-se concluir que:

- No exemplo 1 o limite $\lim_{x \to 4} f(x)$ existe e é igual a 16, pois $\lim_{x \to 4^-} f(x) = \lim_{x \to 4^+} f(x) = 16$.
- No exemplo 2 o limite $\lim_{x \to 2} \sqrt{x-2}$ não existe, pois o $\lim_{x \to 2^-} \sqrt{x-2}$ não pode ser calculado.
- No exemplo 3 o limite $\lim_{x \to 0} |x|$ existe e é igual a zero, pois $\lim_{x \to 0^+} |x| = \lim_{x \to 0^-} |x| = 0$.

Exemplos

Seja $f(x) = \begin{cases} x^2 & ; \quad x \leqslant 0 \\ x+2 & ; \quad x > 0 \end{cases}$. Verificar se existe $\lim_{x \to 0} f(x)$

Para resolver este exercício necessitamos calcular $\lim_{x \to 0^+} f(x)$ e $\lim_{x \to 0^-} f(x)$.

Se $x \to 0^-$, então $x < 0$ e portanto $f(x) = x^2$, logo $\lim_{x \to 0^-} f(x) = \lim_{x \to 0^-} x^2 = 0^2 = 0$.

Se $x \to 0^+$, então $x > 0$ e portanto $f(x) = x + 2$, logo $\lim_{x \to 0^+} f(x) = \lim_{x \to 0^+} (x+2) = 0 + 2 = 2$.

Como os limites laterais são diferentes, segue pelo teorema dos limites laterais que $\lim_{x \to 0} f(x)$ não existe.

Olhando o presente!

Um comerciante vende um produto por unidade e, para pedidos de até 100 unidades o preço unitário é de R$ 1,00. Para pedidos com mais de 100 unidades, o preço unitário passa a ser de R$0,80. Como analisar o comportamento da função custo total quando o número de unidades solicitadas tenderem a 100 unidades?

Para resolver o problema proposto, é importante determinar a função custo. Esta função será definida por duas sentenças, visto que há um preço para mais de 100 unidades e outro para menos de 100 unidades. Se *C(x)* representa o custo total e *x* o número de unidades solicitadas, então a função será dada por:

$$C(x)=\begin{cases} x & ; \quad 0\leqslant x\leqslant 100 \\ 0,80\cdot x & ; \quad x>100 \end{cases}$$

Para fazer a análise do comportamento da função custo total quando o número de unidades tendem a 100 unidades, é preciso calcular o limite da função quando $x \to 100$.

- Para $x \to 100^-$, então $x < 100$ e portanto $C(x) = x$, logo $\lim\limits_{x\to 100^-} C(x) = \lim\limits_{x\to 100^-} x = 100$.
- Para $x \to 100^+$, então $x > 100$ e portanto $C(x) = 0,80 \cdot x$, logo $\lim\limits_{x\to 100^+} C(x) = \lim\limits_{x\to 100^+} 0,80\cdot x = 0,80\cdot 100 = 80$.

Veja que este limite não existe, pois os resultados foram diferentes à direita e à esquerda de 100. Isto representa um "ponto de quebra" na função custo, ou seja, 100 é um número que deve ser analisado com cuidado para esta função. Na seção 6 vamos retornar com problemas deste tipo, discutindo estas quebras nas funções.

Indeterminações

No cálculo de limites é usual ficarmos diante de indeterminações.

Mas afinal, o que é uma indeterminação?

Considere $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^2-1}{x-1}$, qual o resultado?

Usando as propriedades, tem-se: $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^2-1}{x-1}=\dfrac{1^2-1}{1-1}=\dfrac{0}{0}$.

A primeira dedução que se tira precipitadamente é que $\dfrac{0}{0}=0$, o que pode não ser verdade.

Neste caso apresentado, a substituição direta não deve ser feita, pois de acordo como a propriedade 6 de limites, o limite do denominador deve ser diferente de zero. Necessitamos, neste caso fazer a fatoração. Veja:

$$\lim_{x\to 1}\frac{x^2-1}{x-1}=\lim_{x\to 1}\frac{(x-1)(x+1)}{x-1}=\lim_{x\to 1}(x+1)=1+1=2$$

Pare! Revise!

A fatoração de um polinômio é feita a partir do cálculo de suas raízes. Veja algumas das formas mais usadas:

$$\left(a^2-b^2\right)=\left(a+b\right)\cdot\left(a-b\right)$$

$$a^2\pm 2ab+b^2=\left(a\pm b\right)^2$$

$ax^2+bx+c=a\left(x-x_1\right)\left(x-x_2\right)$, sendo x_1 e x_2 as raízes da equação $ax^2+bx+c=0$.

Perceba que a indeterminação $\dfrac{0}{0}$ pode ser qualquer valor não determinado. Neste caso específico valeu 2. A seguir alguns exemplos mostram outras situações.

Exemplos

Para entender melhor o assunto observe os exemplos a seguir!

Exemplo 1: Calcular $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^3-4x^2-7x+10}{x^2+2x-3}$

Ao substituir o valor de x=1 na função, é possível perceber que se chega em uma indeterminação do tipo $\dfrac{0}{0}$. Será necessário realizar uma fatoração tanto do numerador, quanto do denominador.

$$\lim_{x\to 1}\frac{x^3-4x^2-7x+10}{x^2+2x-3}=\lim_{x\to 1}\frac{(x-1)(x^2-3x-10)}{(x-1)(x+3)}=\lim_{x\to 1}\frac{x^2-3x-10}{x+3}=\frac{1-3-10}{4}=-\frac{12}{4}=-3$$

Pare! Observe!

Sempre que você estiver diante de um limite com $x \to a$, que resulte a indeterminação 0/0 e a função dada é do tipo racional ($f(x) = \dfrac{P(x)}{Q(x)}$ com P(x) e Q(x) polinômios em x) é possível fazer uma simplificação, pois os polinômios serão divisíveis por *x-a*.

Exemplo 2: Calcular $\lim\limits_{x \to 4} \dfrac{\sqrt{x+12}-4}{x-4}$.

Novamente tem-se uma indeterminação do tipo $\dfrac{0}{0}$. Para este exemplo, usa-se a racionalização do numerador, ou seja, multiplica-se o numerador e o denominador pelo conjugado.

Pare! Revise!

O conjugado de uma expressão do tipo $\sqrt{x+a}+b$ é dado por $\sqrt{x+a}-b$.

Assim, o conjugado de $\sqrt{x+12}-4$ é $\sqrt{x+12}+4$.

$$\lim_{x \to 4} \frac{\sqrt{x+12}-4}{x-4} = \lim_{x \to 4} \frac{(\sqrt{x+12}-4)(\sqrt{x+12}+4)}{(x-4)(\sqrt{x+12}+4)} = \lim_{x \to 4} \frac{(\sqrt{x+12})^2-4^2}{(x-4)(\sqrt{x+12}+4)} =$$

$$= \lim_{x \to 4} \frac{x+12-16}{(x-4)(\sqrt{x+12}+4)} = \lim_{x \to 4} \frac{x-4}{(x-4)(\sqrt{x+12}+4)} =$$

$$= \lim_{x \to 4} \frac{1}{\sqrt{x+12}+4} = \frac{1}{\sqrt{4+12}+4} = \frac{1}{\sqrt{16}+4} = \frac{1}{8}.$$

Exemplo 3: Calcular $\lim_{x \to 0} \frac{(x+2)^2 - 4}{x}$.

Mais uma vez aparece uma indeterminação do tipo $\frac{0}{0}$. Neste caso é possível desenvolver o produto notável para simplificar a expressão:

$$\lim_{x \to 0} \frac{(x+2)^2 - 4}{x} = \lim_{x \to 0} \frac{x^2 + 4x + 4 - 4}{x} = \lim_{x \to 0} \frac{x^2 + 4x}{x} = \lim_{x \to 0} \frac{x(x+4)}{x} = \lim_{x \to 0}(x+4) = 0 + 4 = 4.$$

Agora é a sua vez!

Use folhas adicionais para realizar seus cálculos.

1) Calcular $\lim_{x \to 3} f(x)$, para $f(x) = \begin{cases} x^2 - 5 & x \leqslant 3 \\ \sqrt{x+13} & x > 3 \end{cases}$

2) Seja $f(x) = \begin{cases} \frac{|x|}{x} & x \neq 0 \\ 0 & x = 0 \end{cases}$

Calcular $\lim_{x \to 0^+} f(x)$, $\lim_{x \to 0^-} f(x)$ e $\lim_{x \to 0} f(x)$ se existirem.

3) Calcular os seguintes limites.

a) $\lim_{x \to -2} \frac{x^3 + 8}{x + 2}$

b) $\lim_{x \to 3} \frac{x^2 - x - 6}{x - 3}$

c) $\lim_{x \to 1} \frac{\sqrt{x+1} - \sqrt{2}}{x - 1}$

d) $\lim_{x \to 2} \frac{x^2 - 5x + 6}{x^2 - 12x + 20}$

e) $\lim_{x \to 5} \frac{\sqrt{2x-1} - 3}{x - 5}$

f) $\lim_{x \to 0} \frac{(x+3)^2 - 9}{x}$

g) $\lim_{x \to 5} \frac{x^2 - 8x + 15}{x(x-5)}$

h) $\lim_{x \to 0} \frac{(x+1)^4 - 1}{x}$

SEÇÃO 4 – Limites no infinito e limites infinitos

Limite no Infinito

Quando você quiser estudar o comportamento de uma função para valores de x que crescem indefinidamente ou decrescem indefinidamente, seu olhar deve recair no contexto dos **limites no infinito**.

Veja uma situação prática em que esta análise é importante.

Olhando o presente!

A função $R(x)=\dfrac{-10}{x+5}+10$ descreve a receita de uma empresa, sendo x o valor que a empresa investe em propaganda. Numa situação como esta, é importante que o dono da empresa saiba o comportamento da receita. Por exemplo, o que acontece com a receita quando os valores investidos em propaganda aumentam indefinidamente?

Veja a Figura 2.5 que representa graficamente a função receita do problema enunciado.

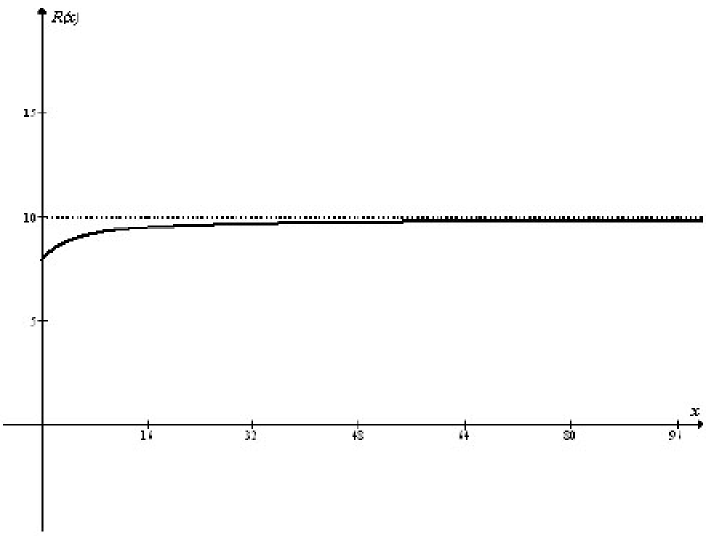

Figura 2.5 – Gráfico da função *R(x)*.

Quando os valores de x tendem ao infinito, ou seja, quando os valores investidos em propaganda aumentam indefinidamente, a função receita tende para o valor 10. Numa situação prática, o empresário deve dimensionar que o retorno de receita ficará praticamente constante e, portanto, deve dimensionar o aumento do investimento em propaganda.

O que é um limite no infinito?

Quando o limite de uma função $y = f(x)$ tende para o mais ou menos infinito, temos um limite no infinito.

Podemos ter: $\lim\limits_{x \to +\infty} = L$ ou $\lim\limits_{x \to -\infty} = L$.

Para calcular esse tipo de limite você pode usar propriedades similares às enunciadas na seção 2. Por facilidade, neste material utilizamos uma linguagem informal com o infinito que auxilia na interpretação dos resultados. Observe essa consideração nos exemplos que seguem.

Exemplos

1) $\lim\limits_{x \to +\infty} x^2 = (+\infty)^2 = +\infty$

2) $\lim\limits_{x \to -\infty} x^2 = (-\infty)^2 = +\infty$

3) $\lim\limits_{x \to -\infty} x^3 = (-\infty)^3 = -\infty$

4) $\lim\limits_{x \to +\infty} (2x^2 + 1) = 2(+\infty)^2 + 1 = +\infty$

O teorema que segue é fundamental na resolução de limites no infinito.

Teorema: Se n é um numero inteiro positivo, então

a) $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{1}{x^n} = 0$

b) $\lim\limits_{x \to -\infty} \dfrac{1}{x^n} = 0$

Pare! Observe!

Intuitivamente é fácil perceber que 1 dividido por outro número muito grande tem como resultado um número muito próximo de zero. Verifique isto usando uma calculadora, faça $\dfrac{1}{100000000}$.

No problema apresentado no início desta seção, é possível analisar o comportamento da receita quando os valores investidos em propaganda aumentam indefinidamente calculando algebricamente o limite usando o Teorema enunciado. Veja:

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{-10}{x+5} + 10 = \lim_{x \to +\infty} \frac{-10}{+\infty} + 10 = 0 + 10 = 10\,.$$

Nos exemplos que seguem, veja outras aplicações deste teorema, além da resolução de situações com um outro tipo de indeterminação: $\dfrac{\infty}{\infty}$.

Exemplos

Para entender melhor o assunto observe os exemplos a seguir!

Exemplo 1: Calcular $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{2x^5 - 6x + 3}{4x^5 - 7}$.

Note que se você substituir os valores de x por um número muito grande, já que $x \to +\infty$, você terá um número muito grande tanto no numerador quanto no denominador, o que leva a um outro tipo de indeterminação, do tipo $\dfrac{\infty}{\infty}$. Então tem-se:

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{2x^5 - 6x + 3}{4x^5 - 7} = \frac{\infty}{\infty} \quad \text{(indeterminação).}$$

Neste tipo de indeterminação dividimos cada termo do numerador e do denominador pelo termo de maior grau, neste caso x^5, e em seguida usa-se o teorema dos limites no infinito. Então:

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{2x^5 - 6x + 3}{4x^5 - 7} = \lim_{x \to +\infty} \frac{2 - \frac{6}{x^4} + \frac{3}{x^5}}{4 - \frac{7}{x^5}} = \frac{\lim\limits_{x \to +\infty} 2 - \lim\limits_{x \to +\infty} \frac{6}{x^4} + \lim\limits_{x \to +\infty} \frac{3}{x^5}}{\lim\limits_{x \to +\infty} 4 - \lim\limits_{x \to +\infty} \frac{7}{x^5}} = \frac{2 - 0 + 0}{4 - 0} = \frac{1}{2}$$

Exemplo 2: Calcular $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{x}{\sqrt{4x^2 - 1}}$.

Novamente trata-se de uma indeterminação do tipo $\dfrac{\infty}{\infty}$. Divide-se o numerador e o denominador pelo termo de maior grau que é x. Note que $x = \sqrt{x^2}$, fazemos isso pois temos um termo que é uma raiz quadrada (estamos diante de $x \to +\infty$ ou x assumindo valores positivos). Assim,

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{x}{\sqrt{4x^2 - 1}} = \lim_{x \to +\infty} \frac{x/x}{\sqrt{4x^2 - 1}\Big/\sqrt{x^2}} = \lim_{x \to +\infty} \frac{1}{\sqrt{\dfrac{4x^2 - 1}{x^2}}} = \frac{\lim\limits_{x \to +\infty} 1}{\lim\limits_{x \to +\infty} \sqrt{4 - 1/x^2}} = \frac{1}{\sqrt{\lim\limits_{x \to +\infty} (4 - 1/x^2)}} =$$

$$= \frac{1}{\sqrt{4 - 0}} = \frac{1}{2}.$$

Exemplo 3: Calcular $\lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{x}{\sqrt{4x^2-1}}$.

Aqui novamente há uma indeterminação do tipo $\dfrac{\infty}{\infty}$. Dividimos o numerador e o denominador por x. É necessário, no entanto, atentar com o detalhe de que, como $x \to -\infty$, os valores de x podem ser considerados negativos e, portanto, neste caso $x = -\sqrt{x^2}$. Assim,

$$\lim_{x\to-\infty} \frac{x}{\sqrt{4x^2-1}} = \lim_{x\to-\infty} \frac{x/x}{\sqrt{4x^2-1}\big/-\sqrt{x^2}} = \lim_{x\to-\infty} \frac{1}{-\sqrt{\dfrac{4x^2-1}{x^2}}} =$$

$$\frac{\lim\limits_{x\to-\infty} 1}{\lim\limits_{x\to-\infty} -\sqrt{4-1/x^2}} = \frac{1}{-\sqrt{\lim\limits_{x\to-\infty}(4-1/x^2)}} = \frac{1}{-(4-0)} = -\frac{1}{2}\,.$$

Um resultado geral interessante para ser usado no cálculo de limite com indeterminações do tipo $\dfrac{\infty}{\infty}$, no caso de funções racionais é

$$\lim_{x\to\pm\infty} \frac{P(x)}{Q(x)} = \lim_{x\to\pm\infty} \frac{a_0x^n + a_1x^{n-1} + \ldots + a_n}{b_0x^n + b_1x^{n-1} + \ldots + b_n}$$

$$= \lim_{x\to\pm\infty} \frac{a_0x^n}{b_0x^n}$$

Veja que basta trabalhar com os termos de maior grau.

Exemplos

Para entender melhor o assunto observe os exemplos a seguir!

Exemplo 1: $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{3x^2+6x+2}{4x^3-7x^2+2x+1} = \lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{3x^2}{4x^3} = \dfrac{3}{4}\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{1}{x} = \dfrac{3}{4}.0 = 0$.

Exemplo 2: $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{3x^2+6x+2}{7x^2+2x+1} = \lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{3x^2}{7x^2} = \dfrac{3}{7}\lim\limits_{x\to+\infty} 1 = \dfrac{3}{7}$.

Olhando o passado!

A história envolvendo limites é interessante. Em 1784 a academia de Ciências de Berlim ofereceu um prêmio para quem pudesse explicar uma teoria do infinito pequeno e do infinito grande, que pudesse ser usada no cálculo como um fundamento lógico e consistente.

O prêmio foi dado a Simon L´Huilier (1750-1840) por um trabalho que não foi considerado a solução para os problemas propostos.

Foi Lazare N. M. Carnot (1753-1823) quem propôs uma explicação para o papel do limite no cálculo como "a compensação dos erros". No entanto, não explicou como estes erros se balançariam sempre perfeitamente.

Limites Infinitos

Considere o gráfico de $f(x)=\dfrac{1}{x}$ da Figura 2.6.

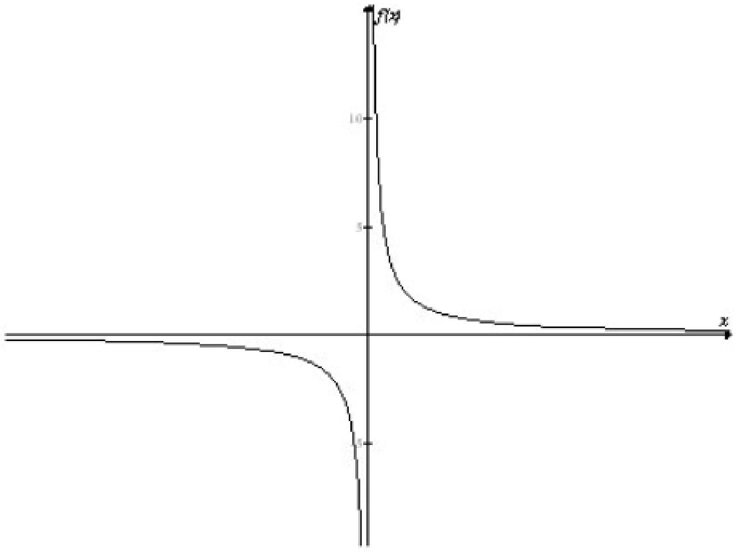

Figura 2.6 - Gráfico da função $f(x)=\dfrac{1}{x}$.

Graficamente é possível perceber que quando $x \to 0^+$, $f(x) \to +\infty$ e quando $x \to 0^-$, $f(x) \to -\infty$, ou seja, *f* cresce indefinidamente à direita do zero e decresce indefinidamente a esquerda do zero.

Este é um limite chamado de **limite infinito**.

Teorema: Se n é um número inteiro positivo qualquer, então:

a) $\lim_{x \to 0^+} \frac{1}{x^n} = +\infty$

b) $\lim_{x \to 0^-} \frac{1}{x^n} = \begin{cases} +\infty, & n\ par \\ -\infty, & n\ impar \end{cases}$

Pare! Observe!

Note que este resultado é fácil de verificar algebricamente. Basta dividir um número por outro muito próximo de zero, que você tem como resultado algo muito grande em módulo. Verifique usando uma calculadora, faça $\frac{1}{0,00000001}$.

Exemplos

Para entender melhor o assunto observe os exemplos a seguir!

Exemplo 1: $\lim_{x \to 0} \left(x + \frac{1}{x^3} - 7x \right) = 0 + \infty - 0 = +\infty$

Exemplo 2:

$$\lim_{x \to +\infty} \left(3x^3 - 6x^2 + 7x - 1\right) = \lim_{x \to +\infty} x^3 \left(3 - \frac{6}{x} + \frac{7}{x^2} - \frac{1}{x^3}\right) = +\infty\left(3 - 0 + 0 - 0\right) = +\infty$$

Exemplo 3: $\lim_{x \to 1^+} \frac{-x+2}{1-x} = \frac{1}{0^-} = -\infty$

Exemplo 4: Calcular $\lim_{x\to 6^+} \frac{3x-1}{x-6}$ e $\lim_{x\to 6^-} \frac{3x-1}{x-6}$

$$\lim_{x\to 6^+} \frac{3x-1}{x-6} = \frac{17}{0^+} = +\infty$$

0^+ indica que estamos tomando um número muito próximo de zero pela direita.

$$\lim_{x\to 6^-} \frac{3x-1}{x-6} = \frac{17}{0^-} = -\infty$$

0^- indica que estamos tomando um número muito próximo de zero pela esquerda.

Agora é a sua vez!

Use folhas adicionais para realizar seus cálculos.

Calcular os seguintes limites

a) $\lim_{t\to -\infty} (x^2 + 6x + 7)$

b) $\lim_{x\to 8^+} \frac{2x-1}{2x-16}$

c) $\lim_{t\to +\infty} \frac{6x^4 - 7x^3 + 2x^2 + 6x + 10}{7x+1}$

d) $\lim_{t\to 2^-} \frac{x^2 + 3x + 1}{x^2 + x - 6}$

e) $\lim_{t\to -\infty} \frac{x^2 + 2x + 2}{x^3 - 1}$

f) $\lim_{t\to +\infty} \frac{3x^2 + x - 6}{6x^2 - 7x + 1}$

SEÇÃO 5 – Limites fundamentais

Alguns limites são difíceis de calcular pelos métodos apresentados nas seções anteriores. Existem dois deles que serão apresentados nesta seção e que aparecem em aplicações na área de Ciências Sociais Aplicadas.

Primeiro limite fundamental

$$\boxed{\lim_{x\to\pm\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^x = e}$$

Sendo e o número neperiano que vale e = 2,71828...

A demonstração será aqui omitida, pois requer o auxílio de séries numéricas.

Exemplos

Para entender melhor o assunto observe os exemplos a seguir!

Exemplo 1: Calcule $\lim_{x\to+\infty}\left(1+\frac{2}{x}\right)^x$

É necessário adaptar este limite ao limite fundamental.

Realize uma mudança de variável, fazendo a substituição $\frac{2}{x}=\frac{1}{u}$, ou $2u=x$, e portanto, se $x\to+\infty$, então $u\to+\infty$, logo

$$\lim_{x\to+\infty}\left(1+\frac{2}{x}\right)^x = \lim_{u\to+\infty}\left(1+\frac{1}{u}\right)^{2u} = \lim_{x\to+\infty}\left[\left(1+\frac{1}{u}\right)^u\right]^2 = \left[\lim_{u\to+\infty}\left(1+\frac{1}{u}\right)^u\right]^2 = e^2.$$

Exemplo 2: Calcular $\lim\limits_{x \to 0}(1+x)^{1/x}$.

Fazendo a substituição $x = \dfrac{1}{u}$, ou $u = \dfrac{1}{x}$, segue que se $x \to 0$, então $u \to +\infty$. Assim,

$$\lim_{x \to 0}(1+x)^{1/x} = \lim_{u \to +\infty}\left(1+\frac{1}{u}\right)^{u} = e \ .$$

Segundo limite fundamental

$$\boxed{\lim_{x \to 0}\frac{a^x - 1}{x} = \ln a}$$

Exemplos

Para entender melhor o assunto observe os exemplos a seguir!

Exemplo 1: Calcular $\lim\limits_{x \to 0}\dfrac{2^x - 3^x}{x}$

O artifício para este tipo de limite é colocar sempre o segundo termo do numerador em evidência, neste caso 3^x. Portanto,

$$\lim_{x \to 0}\frac{2^x - 3^x}{x} = \lim_{x \to 0}\frac{3^x\left(\dfrac{2^x}{3^x} - 1\right)}{x} = \lim_{x \to 0}3^x \cdot \lim_{x \to 0}\frac{\left(\dfrac{2}{3}\right)^x - 1}{x} = 3^0 \cdot \ln\frac{2}{3} = 1 \cdot \ln\frac{2}{3} = \ln\frac{2}{3} \ .$$

Exemplo 2: Calcular $\lim\limits_{x \to -3}\dfrac{2^{x+3} - 1}{x+3}$.

Neste caso é necessário fazer $u=x+3$ e quando $x \to -3$, segue que $u \to 0$, logo

$$\lim_{x \to -3}\frac{2^{x+3} - 1}{x+3} = \lim_{u \to 0}\frac{2^u - 1}{u} = \ln 2 \ .$$

Parada recreativa

Você quer conhecer o problema da minhoca?

Coitada, sofre muito!

Veja porque...

Considere a seguinte situação:

- Suponha que uma minhoca encontra-se na extremidade de uma corda de borracha, elástica, com 100m de comprimento.
- Suponha também que a minhoca rasteje a uma velocidade constante de 1cm/s. Passado o primeiro segundo, a corda estica, medindo agora 200m. No fim do segundo seguinte, estica mais 300m e assim sucessivamente.

E agora...

Será que a minhoca chega ao fim da corda?

Em quanto tempo?

Use a sua imaginação e tire suas conclusões.

SEÇÃO 6 – Continuidade

Nesta seção você estudará o conceito de continuidade de uma função. Perceba que o conceito de limite auxilia muito na análise do comportamento de funções. E ao definir continuidade, você verá que os limites também estarão envolvidos.

Considere as seguintes situações:

- Seja $f(x)=\dfrac{x^2-1}{x-1}$, traçada graficamente na Figura 2.7.

  Note que esta função não está definida para *x=1*. Graficamente percebemos a existência de um "buraco" no ponto *x=1*. Este "buraco" é um ponto de descontinuidade de f.

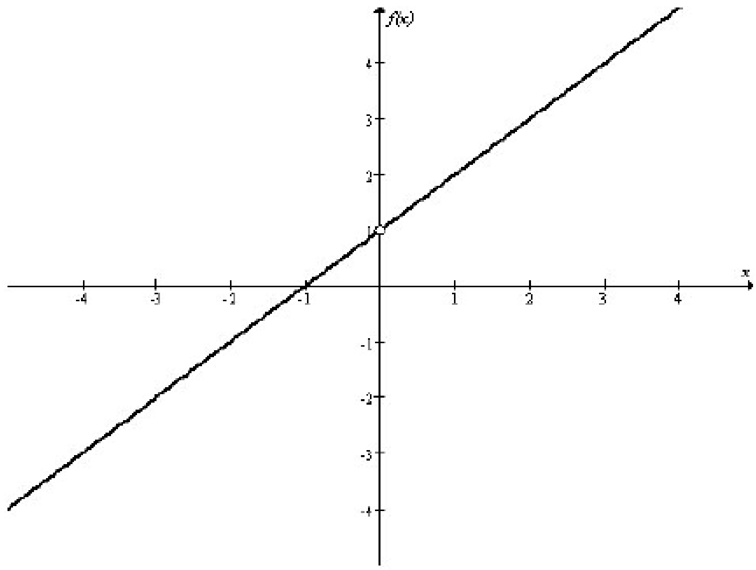

Figura 2.7 – Gráfico de $f(x)=\dfrac{x^2-1}{x-1}$.

Seja $f(x)=\begin{cases}-x+2 & ; \quad x\leqslant 0\\ 3x & ; \quad x>0\end{cases}$, cuja representação gráfica está na Figura 2.8.

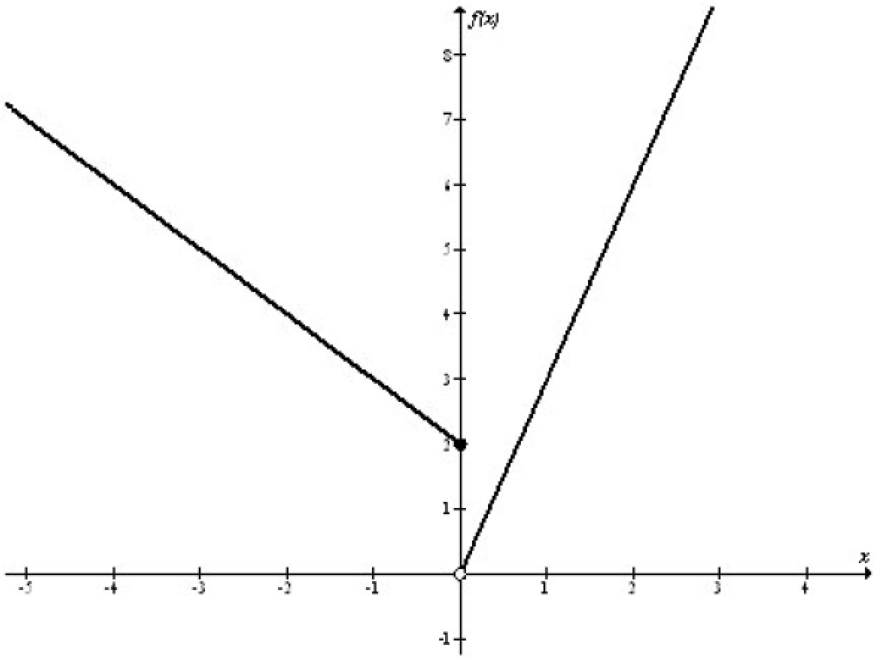

Figura 2.8 – Gráfico da função *f(x)*.

Note que $\lim_{x \to 0^+} f(x) = \lim_{x \to 0^+} 3x = 0$ e $\lim_{x \to 0^-} f(x) = \lim_{x \to 0^-} (-x+2) = 2$, ou seja, não existe o limite quando x se aproxima de 0, já que os limites laterais não são iguais.

Neste caso percebe-se que a função f deu um "salto", no ponto $x=0$, chamado de salto de descontinuidade.

Olhando o presente!

A Figura 2.9 representa a função *C(p)* que é o custo *(C)* para enviar uma encomenda pelo correio (via Sedex em um determinado trajeto), sendo *p* o peso do objeto em quilos.

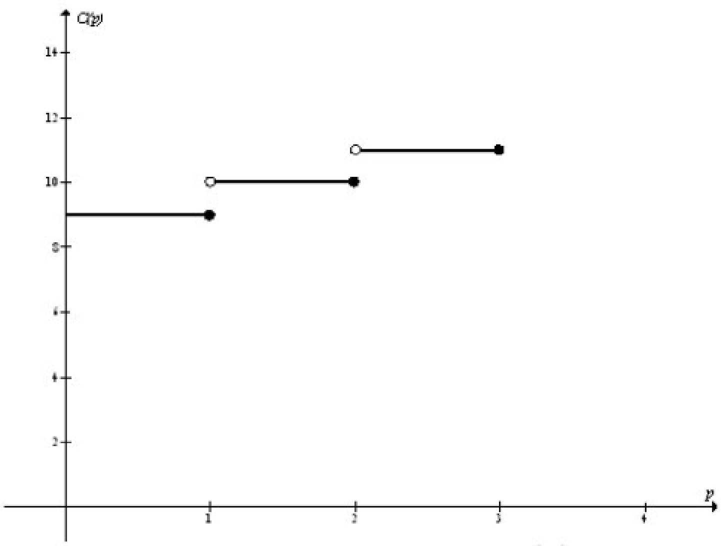

Figura 2.9 – Gráfico da função *C(p)*.

Perceba que há uma descontinuidade nesta função nos pontos em que p é igual a 1, 2 e 3 quilos. Uma pequena diferença no preço de uma encomenda pode levar a uma diferença significativa no custo de sua postagem.

Veja como é importante analisar pontos de descontinuidade em funções que representem situações reais. Pequenas diferenças na variável independente, neste caso representada por p, podem produzir grandes diferenças de custo, neste caso representado por C.

Diz-se que uma função f é contínua em um ponto a se as seguintes condições estiverem satisfeitas:

a) $f(a)$ está definida.

b) $\lim\limits_{x \to a} f(x)$ existe.

c) $\lim\limits_{x \to a} f(x) = f(a)$.

Em outras palavras, uma função f é contínua em um ponto a, quando o valor da função e o valor do limite quando x tende para a, são iguais.

Exemplos

Para entender melhor o assunto observe os exemplos a seguir!

Exemplo 1: Verificar se a função

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{x^2 - 4}{x - 2} & ; \quad x \neq 2 \\ 3 & ; \quad x = 2 \end{cases}$$ é contínua em $x=2$.

Note que f está definida em 2 e vale 3, isto é, $f(2)=3$.

Agora

$$\lim_{x \to 2} \frac{x^2 - 4}{x - 2} = \lim_{x \to 2} \frac{(x-2)(x+2)}{x-2} = \lim_{x \to 2} (x+2) = 4$$

Como o valor da função e o valor do limite diferem no ponto *x=2*, segue pela definição de continuidade que *f(x)* não é contínua em *x=2*.

Exemplo 2: Verificar se a função $h(x)=\begin{cases} x+2 & ; \quad x \geqslant 2 \\ -x+6 & ; \quad x<2 \end{cases}$ é contínua em *x=2*.

Facilmente verifica-se que *f(2)=4*. Agora para verificar o limite em *x=2*, é necessário verificar os limites laterais:

$$\lim_{x\to 2^+} f(x) = \lim_{x\to 2^+}(x+2) = 4$$

$$\lim_{x\to 2^-} f(x) = \lim_{x\to 2^-}(-x+6) = 4$$

Portanto $\lim_{x\to 2} f(x) = 4$. Como o valor da função e o valor do limite são iguais em *x=2*, então a função é contínua em *x=2*.

Algumas funções conhecidas são contínuas em todos os pontos:

- Toda função polinomial é contínua em todos os números reais.
- As funções *f(x)=sen x* e *g(x)=cos x* são contínuas para todo número real *x*.
- A função exponencial $f(x)=e^x$ é contínua para todo número real *x*.

Agora é a sua vez!

Use folhas adicionais para realizar seus cálculos.

1) Verificar se as seguintes funções são contínuas no ponto indicado.

a) $f(x)=\dfrac{x^2-5x+6}{x^2-9}$ em *x=3*

b) $g(x)=\begin{cases} \dfrac{x^2-9}{x^2-5x+6}; & x \neq 3 \\ 6 \qquad ; & x=3 \end{cases}$ em *x=3*

c) $h(x) = x^2 - 2x + 1$ em $x=1$

d) $f(x) = \begin{cases} x^2 & ; x \geqslant 0 \\ x+2 & ; x < 0 \end{cases}$ em $x=0$

2) Em cada item, encontre uma função f que satisfaça a condição proposta.

a) f é contínua em toda parte, exceto no ponto $x=1$.

b) f tem limite em $x=1$, mas não é contínua naquele ponto.

3) Ache o valor de k, para que a função f seja contínua.

$$f(x) = \begin{cases} 4x-3 & ; x \geqslant 3 \\ kx & ; x < 3 \end{cases}$$

4) Encontre os pontos de descontinuidade das seguintes funções:

a) $f(x) = \dfrac{x^3 - 8}{x^2 - 4}$

b) $g(x) = \dfrac{x}{|x|}$

c) $h(x) = \begin{cases} x^2 + 1 & ; x \neq 3 \\ 10 & ; x = 3 \end{cases}$

Atividades de auto-avaliação

Use folhas adicionais para realizar seus cálculos.

1) Calcule os limites das sentenças a seguir:

a) $\lim\limits_{x \to 2}(x^3 - 6x^2 + 7x - 1)$

b) $\lim\limits_{x \to 0} \sqrt[3]{x^2 + x + 64}$

c) $\lim\limits_{x \to \frac{1}{2}} \dfrac{x-1}{x+2}$

d) $\lim\limits_{x \to 1} e^{x^2 - 1}$

e) $\lim\limits_{x \to 2}(x^2 - 1)^5 (x-3)^3$

2) Calcule os limites abaixo:

a) $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{(x-3)^2 - 9}{x}$

b) $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\sqrt{x^2 + 16} - 4}{x^2}$

c) $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{x^3 - x}{x}$

d) $\lim\limits_{x \to -1} \dfrac{x^3 + 1}{x^2 - 1}$

e) $\lim\limits_{x \to 4} \dfrac{4 - x}{2 - \sqrt{x}}$

f) $\lim\limits_{x \to 5} \dfrac{x^2 - 2x - 15}{-5x + x^2}$

k) $\lim_{x \to -3} \frac{1}{(x+3)^4}$

l) $\lim_{x \to -3^-} \frac{2}{(x+3)^3}$

5) Resolver os seguintes limites fundamentais.

a) $\lim_{x \to +\infty} \left(1 + \frac{5}{x}\right)^x$

b) $\lim_{x \to +\infty} \left(\frac{x}{1+x}\right)^x$

c) $\lim_{x \to +\infty} \left(1 + \frac{5}{x}\right)^x$

d) $\lim_{x \to 2} \frac{5^{x-2} - 1}{x - 2}$

e) $\lim_{x \to +\infty} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^{x+3}$

f) $\lim_{x \to 3} \frac{6^{x-3} - 1}{x - 3}$

3) Calcular os seguintes limites no infinito.

a) $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{3x-6}{7x+1}$

b) $\lim\limits_{x \to -\infty} \dfrac{7x^2-2x+1}{3x^3+2x^2-x+7}$

c) $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{3x^4-7x}{2x^4-6x^3+2x^2-6x+1}$

d) $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{x-5}{\sqrt{3x^2-x+1}}$

4) Calcule os seguintes limites.

a) $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{1}{x^3}$

b) $\lim\limits_{x \to -\infty} \dfrac{1}{x^2}$

c) $\lim\limits_{x \to +\infty} (x^3-6x^2+x+1)$

d) $\lim\limits_{x \to +\infty} \left(\dfrac{1}{x}+x^2-\dfrac{1}{x^6}\right)$

e) $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{x^2+6x-1}{x^2+x-2}$

f) $\lim\limits_{x \to -\infty} \dfrac{3x^2+1}{5x+1}$

g) $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{5x^3-6x^2+x-1}{10x^4-1}$

h) $\lim\limits_{x \to -\infty} \dfrac{x-1}{\sqrt{x^2+1}}$

i) $\lim\limits_{x \to 2^-} \dfrac{x+2}{2-x}$

j) $\lim\limits_{x \to 2^+} \dfrac{x+2}{2-x}$