Seção 1 – Equações lineares

Inicialmente, vamos retomar a definição de equação linear e solução de equação linear.

Uma **equação linear** é uma equação que pode ser colocada na forma padrão:

$$a_1x_1 + a_2x_2 + a_2x_2 + \ldots + a_nx_n = b$$

Em que:

$x_1, x_2, x_3, \ldots, x_n$ são as incógnitas ou variáveis;
$a_1, a_2, a_3, \ldots, a_n$ são números reais chamados coeficientes; e
b é um número real chamado termo independente.

Exemplos:

1.1. A equação $2x + y = 2$ é uma equação linear com duas variáveis (x e y).

1.2. A equação $x^2 - 5x + 6 = 0$ não é uma equação linear, pois não pode ser escrita na forma padrão, já que apresenta o termo x^2.

1.3. A equação $x + xy - 7 = 0$ também não é uma equação linear, pois apresenta o termo xy, o que impede a colocação na forma padrão.

Uma **solução de uma equação linear**, com n incógnitas, é um conjunto de valores das incógnitas que satisfazem a equação. Estes valores são denominados **raízes** da equação linear e podem ser representados por uma *n-upla* ordenada de números reais $(k_1, k_2, k_3, \ldots, k_n)$ que verifica a igualdade de

$a_1x_1 + a_2x_2 + a_3x_3 + \ldots + a_nx_n = b$, ou seja,

$a_1k_1 + a_2k_2 + a_3k_3 + \ldots + a_nk_n = b$

Exemplos:

1.4 A equação $2x + y = 2$ tem uma solução dada pelo par ordenado (0, 2), pois $2(0) + 2 = 2$, mas o par (1, 3) não é solução da equação, pois $2(1) + 3 = 5 \neq 2$.

1.5 A equação $x + 2y - 4z + t = 3$ tem uma solução (3, 2 ,1, 0), mas (1, 2, 4, 5) não é solução da equação linear.

Como encontrar soluções de uma equação linear?

- Uma equação linear $ax = b$, com uma incógnita x e coeficientes a e $b \in \mathbb{R}$, pode apresentar como solução uma das três possibilidades:

  I. Se $a \neq 0$, a equação possui solução única $x = \frac{b}{a}$;
  II. Se $a = 0$, mas $b \neq 0$, a equação não tem solução;
  III. Se $a = 0$ e $b = 0$, a equação apresenta infinitas soluções.

- Uma solução de uma equação linear na forma

$$a_1x_1 + a_2x_2 + a_2x_2 + \ldots + a_nx_n = b,$$

com n incógnitas, coeficientes a_i, $i = 1, \ldots, n$, não todos nulos e b um número real, pode ser obtida isolando uma das incógnitas (com coeficiente diferente de zero) e substituindo quaisquer valores para as demais incógnitas, agora chamadas de **variáveis livres**.

- Uma equação linear, com n incógnitas, na forma

$$0x_1 + 0x_2 + 0x_2 + \ldots + 0x_n = b,$$

é chamada de equação degenerada.

Teorema 1.1: uma equação degenerada $0x_1 + 0x_2 + 0x_2 + \ldots + 0x_n = b$, com n incógnitas e b um número real:

I. Não tem solução, se $b \neq 0$;
II. Tem infinitas soluções, se $b = 0$.

Demonstração

Dada a equação degenerada $0x_1 + 0x_2 + 0x_2 + \ldots + 0x_n = b$, e $s = (k_1, k_2, k_3, \ldots, k_n)$ uma *n-upla* ordenada qualquer de números reais.

I. Se b $\neq$ 0, suponha que s é solução da equação, ou seja:

$$0k_1 + 0k_2 + 0k_2 + \ldots + 0k_n = b$$
$$0 + 0 + 0 + \ldots + 0 = b$$
$0 = b$, que é um absurdo, já que, por hipótese, $b \neq 0$.

Logo, nenhuma *n-upla* ordenada é solução da equação anterior.

II. Se $b = 0$, suponha novamente que s é solução da equação:

$$0k_1 + 0k_2 + 0k_2 + \ldots + 0k_n = 0$$
$$0 + 0 + 0 + \ldots + 0 = 0$$
$$0 = 0, \text{ ou seja,}$$

qualquer *n-upla* ordenada é solução da equação.

Logo, a equação possui infinitas soluções.

Exemplos

1.6. A equação $3x + 1 = x + 7$ tem uma solução:

$$3x - x = 7 - 1$$
$$2x = 6$$
$$x = 3$$

(Somente esse valor de x satisfaz a equação).

1.7. A equação $x + 2 = x + 5$ não tem solução, pois:

$$x - x = 5 - 2$$
$$0x = 3$$

(Observe que não existe $\underline{x}$ tal que a igualdade seja verdadeira).

1.8. A equação $2x + 4 = 2x + 4$ tem infinitas soluções, pois:

$$2x - 2x = 4 - 4$$
$$0x = 0$$

(Observe que para qualquer valor de x, a igualdade é satisfeita).

1.9. A equação $2x - 3y + z = 5$ tem infinitas soluções, pois, se isolarmos uma das incógnitas, obtemos duas variáveis livres que podem assumir quaisquer valores.

$$z = 5 - 2x + 3y$$

Por exemplo:

- Fazendo $x = 1$ e $y = 1$, temos como solução a tripla ordenada (1, 1, 6).
- Fazendo $x = 0$ e $y = 3$, temos como solução a tripla ordenada (0, 3, 14).

1.10. A equação $2x - y + 2z + 4 = 3 + 2x - y + 2z + 1$ tem infinitas soluções, pois:

$$2x - y + 2z - 2x + y - 2z = 3 + 1 - 4$$
$$0x + 0y + 0z = 0$$

Agora é a sua vez!

Faça os exercícios 1, 2 e 3 das atividades de autoavaliação.

Seção 2 – Sistemas de equações lineares

Muitas técnicas para resolver sistemas de equações lineares têm sido aplicadas e atualizadas ao longo dos anos. Tais atualizações se devem ao avanço da informática, que, através de diversos *softwares*, é capaz de realizar um grande número de operações algébricas com enorme rapidez.

Esses *softwares* trabalham com a representação matricial do sistema. Nesta unidade, vamos mostrar a relação entre sistemas e matrizes.

Um **sistema de m equações lineares e n incógnitas** é um conjunto finito de equações lineares representado na forma padrão:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \vdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots + a_{mn}x_n = b_m \end{cases}$$

Em que:

$x_1, x_2, x_3, \ldots, x_n$ são incógnitas ou variáveis;

a_{ij} com $i \in \{1, 2, \ldots, m\}$ e $j \in \{1, 2, \ldots, n\}$ são os coeficientes das incógnitas; e

$b_1, b_2, b_3, \ldots, b_m$ são os termos independentes.

Se você observar bem, verá que podemos representar o sistema acima por meio de matrizes. Ou seja:

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{bmatrix}$$

Essas matrizes recebem nomes especiais:

1. Matriz de coeficientes: matriz formada pelos coeficientes das incógnitas;	$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix}$
2. Matriz (vetor) das incógnitas: matriz coluna formada pelas incógnitas do sistema;	$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}$
3. Matriz (vetor) dos termos independentes: matriz coluna formada pelos termos independentes do sistema;	$\begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{bmatrix}$
4. Matriz aumentada: formada pelos coeficientes das incógnitas e pelos termos independentes.	$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} & b_2 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} & b_n \end{bmatrix}$

Se chamarmos:

A = Matriz dos coeficientes;
X = Vetor das incógnitas;
B = Vetor de termos independentes.

Um sistema de equações lineares pode ser representado na notação matricial AX = B.

> Quando todos os elementos do vetor de termos independentes do sistema linear forem iguais a zero, o sistema é dito homogêneo.

Exemplos

1.11. Dado o sistema:

$$\begin{cases} 2x_1 + 4x_2 - 6x_3 = 10 \\ 4x_1 + 2x_2 + 2x_3 = 16 \\ 2x_1 + 8x_2 - 4x_3 = 24 \end{cases}$$

Temos:

$$\begin{bmatrix} 2 & 4 & -6 \\ 4 & 2 & 2 \\ 2 & 8 & -4 \end{bmatrix} \qquad \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} \qquad \begin{bmatrix} 10 \\ 16 \\ 24 \end{bmatrix} \qquad \begin{bmatrix} 2 & 4 & -6 & 10 \\ 4 & 2 & 2 & 16 \\ 2 & 8 & -4 & 24 \end{bmatrix}$$

Matriz de coeficientes — Matriz (vetor) das incógnitas — Matriz (vetor) dos termos independentes — Matriz aumentada

Representação matricial:

$$\begin{bmatrix} 2 & 4 & -6 \\ 4 & 2 & 2 \\ 2 & 8 & -4 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 10 \\ 16 \\ 24 \end{bmatrix}$$

1.12. Um sistema e sua representação matricial:

$$\begin{cases} x_1 + 4x_2 - 3x_3 + 2x_4 = 5 \\ x_3 - 4x_4 = 2 \end{cases} \quad \blacktriangleright \quad \begin{bmatrix} 1 & 4 & -3 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & -4 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 \\ 2 \end{bmatrix}$$

1.13. Um sistema homogêneo e sua representação matricial:

$$\begin{cases} 3x_1 - 2x_2 = 0 \\ 6x_1 - 4x_2 = 0 \end{cases} \quad \blacktriangleright \quad \begin{bmatrix} 3 & -2 \\ 6 & -4 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Solução de um sistema de equações lineares são valores das incógnitas ou variáveis que satisfazem simultaneamente todas as equações do sistema, ou seja, dado um sistema, com m equações lineares e n incógnitas, representado na forma padrão, a *n-upla* ordenada $(k_1, k_2, \ldots, k_n)$ é solução se:

$$\begin{cases} a_{11}k_1 + a_{12}k_2 + \ldots + a_{1n}k_n = b_1 \\ a_{21}k_1 + a_{22}k_2 + \ldots + a_{2n}k_n = b_2 \\ \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\vdots \\ a_{m1}k_1 + a_{m2}k_2 + \ldots + a_{mn}k_n = b_m \end{cases}$$

Ou ainda, se chamarmos essa *n-upla* de vetor solução e a representarmos como uma matriz coluna, ao substituirmos o vetor de incógnitas pelo vetor solução, teremos que o produto da matriz dos coeficientes pelo vetor solução é igual ao vetor de termos independentes, isto é:

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} k_1 \\ k_2 \\ \vdots \\ k_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{bmatrix}$$

Os valores da *n-upla* também podem ser chamados de **raízes** do sistema de equações lineares.

Exemplos

1.14. Dado o sistema:

$$S1: \begin{cases} 2x + y = 5 \\ x - y = -2 \end{cases}$$

Observe que a primeira equação do sistema S1 possui, entre suas soluções, os pares ordenados:

$(-1, 7), (0, 5), \mathbf{(1, 3)}$;

A segunda equação tem, entre as suas soluções:

$(5, 7), (2, 4), \mathbf{(1, 3)}$.

Note que o par $\mathbf{(1, 3)}$ satisfaz as duas equações do sistema, então ele é uma solução do sistema S1.

1.15. A tripla ordenada (–2, –1, 4) é solução do sistema:

$$S2: \begin{cases} x_1 - x_2 + 2x_3 = 7 \\ 3x_1 + x_2 + 3x_3 = 5 \\ x_1 + x_2 + x_3 = 1 \end{cases}$$

pois satisfaz as três equações.

Na forma matricial:

$$\begin{bmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 3 & 1 & 3 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} -2 \\ -1 \\ 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1\cdot(-2) & + & (-1)\cdot(-1) & + & 2\cdot 4 \\ 3\cdot(-2) & + & 1\cdot(-1) & + & 3\cdot 4 \\ 1\cdot(-2) & + & 1\cdot(-1) & + & 1\cdot 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 7 \\ 5 \\ 1 \end{bmatrix}$$

1.16. Uma solução do sistema

$$\begin{cases} x_1 - 4x_2 - 3x_3 = 0 \\ 4x_1 - x_2 + 2x_3 = 0 \\ 3x_1 + x_2 - x_3 = 0 \end{cases}$$

é a solução trivial

$x_1 = 0$, $x_2 = 0$ e $x_3 = 0$.

Lembre-se de que um sistema de equações lineares pode ser:

I. sistema possível ou compatível e determinado: admite-se solução única;
II. sistema possível ou compatível e indeterminado: admitem-se infinitas soluções;
III. sistema impossível ou incompatível: se não tem solução.

Observação 1.1: um sistema homogêneo é sempre possível, pois admite pelo menos a solução trivial.

Mas como encontrar soluções de um sistema de equações lineares?

Você já estudou a resolução de sistemas de equações lineares pela Regra de Cramer e também a interpretação gráfica da solução de sistemas lineares. Vamos agora analisar novas situações e conhecer outros métodos de resolução de sistemas.

Um sistema de **equações lineares está na forma escalonada** se apresenta a seguinte forma:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 + a_{14}x_4 + \ldots + a_{1n}x_n = b_1 \\ \qquad\qquad a_{2j_2}x_{j_2} + a_{2j_{2+1}}x_{j_{2+1}} + \ldots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \qquad\qquad\qquad \vdots \\ \qquad\qquad a_{rj_r}x_{j_r} + a_{rj_{r+1}}x_{j_{r+1}} + \cdots + a_{rn}x_n = b_r \end{cases}$$

Em que:

$1 < j_2 < \ldots < j_r$

$a_{11} \neq 0,\ a_{2j_2} \neq 0,\ \ldots,\ a_{r_j} \neq 0$, com $r \leq n$

Teorema 1.2: se um sistema na forma escalonada apresentar a equação degenerada $0x_1 + 0x_2 + 0x_2 + \ldots + 0x_n = b$, então:

I. Se $b = 0$, essa equação pode ser omitida do sistema sem modificar o conjunto solução;

II. Se $b \neq 0$, o sistema não tem solução.

Se o sistema tiver o número de equações igual ao número de variáveis, a forma escalonada tem um nome especial:

Um sistema de equações lineares está na **forma triangular** se o número de equações é igual ao número de incógnitas e se tem a seguinte forma:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n = b_1 \\ \qquad a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \qquad\qquad \vdots \\ \qquad\qquad a_{mn}x_n = b_m \end{cases}$$

Em que: $a_{ij} \neq 0,\ \forall\ i = j$

Você pode observar que a matriz dos coeficientes é uma matriz triangular superior.

Teorema 1.3: um sistema na forma escalonada pode apresentar:

I. solução única se o número de variáveis for igual ao número de equações;

II. infinitas soluções se o número de equações for menor que o número de variáveis. Nesse caso, teremos variáveis livres.

Para encontrar a solução de um sistema nessa forma escalonada, seguimos um processo chamado de retro-substituição, que consiste em partir da última equação para determinar a n-ésima incógnita e substituir na $(n-1)$-ésima equação e assim sucessivamente até obter a solução do sistema.

Exemplos

1.17. Para encontrar a solução do sistema na forma triangular

$$\begin{cases} 2x + 4y - z = 11 \\ \quad 5y + z = 2 \\ \qquad 3z = -9 \end{cases}$$

começamos com $3z = -9 \Rightarrow z = -3$, substituindo o valor de z na segunda equação:

$$5y + (-3) = 2 \Rightarrow 5y = 5 \Rightarrow y = 1,$$

substituindo z e y na primeira equação:

$$2x + 4 \cdot 1 - (-3) = 11 \Rightarrow 2x = 4 \Rightarrow x = 2,$$

solução do sistema $(2, 1, -3)$.

1.18. O sistema na forma escalonada

$$\begin{cases} x_1 + 4x_2 - 3x_3 + 2x_4 = 5 \\ \qquad\qquad x_3 - 4x_4 = 2 \end{cases}$$

admite infinitas soluções, pois podemos representar as variáveis como:

$$x_3 = 2 + 4x_4 \text{ e } x_1 = 5 - 4x_2 + 3x_3 - 2x_4$$

Substituindo x_3 em x_1:

$$x_1 = 5 - 4x_2 + 3(2 + 4x_4) - 2x_4 = 11 - 4x_2 + 10x_4$$

Nesse caso, temos x_3 em função de x_4 e x_1 em função de x_2 e x_4, ou seja, as variáveis x_2 e x_4 são variáveis livres que podem assumir valores arbitrários, obtendo assim infinitas soluções para o sistema.

E quando o sistema não estiver na forma escalonada?

Agora é a sua vez!

Resolva os exercícios de autoavaliação de 4 a 6.

Seção 3 – Sistemas equivalentes

Apesar de encontrarmos *softwares* que resolvem sistemas de equações lineares, nosso interesse está em estudar esses sistemas e até conhecer os métodos utilizados por esses *softwares*. Para isso, precisamos de algumas definições importantes.

Dois sistemas de equações lineares são ditos **equivalentes** quando as equações envolvem as mesmas variáveis e admitem a mesma solução, ou seja, toda solução do primeiro é também solução do segundo e vice-versa.

Exemplos

1.19. Os sistemas S1 e S2 abaixo são equivalentes, já que possuem a mesma solução (10, 2)

$$S1 = \begin{cases} 3x_1 + 6x_2 = 42 \\ 2x_1 - 4x_2 = 12 \end{cases} \quad \text{e} \quad S2 = \begin{cases} x_1 + 2x_2 = 14 \\ x_1 - 2x_2 = 6 \end{cases}$$

Pois:

$$S1 = \begin{cases} 3 \cdot 10 + 6 \cdot 2 = 30 + 12 = 42 \\ 2 \cdot 10 - 4 \cdot 2 = 20 - 8 = 12 \end{cases} \quad \text{e} \quad S2 = \begin{cases} 10 + 2 \cdot 2 = 10 + 4 = 14 \\ 10 - 2 \cdot 2 = 10 - 4 = 6 \end{cases}$$

1.20. Considere os sistemas abaixo:

$$S3 = \begin{cases} 3x_1 + 2x_2 - x_3 = 0 \\ \qquad\quad x_2 \qquad\quad = 4 \\ \qquad\qquad\quad 2x_3 = 4 \end{cases} \quad \text{e} \quad S4 = \begin{cases} 3x_1 + 2x_2 - x_3 = 0 \\ -3x_1 - x_2 + x_3 = 4 \\ 3x_1 + 2x_2 + x_3 = 4 \end{cases}$$

Observe que S3 está na forma triangular, se partirmos da última equação teremos o valor da variável $x_3 = 2$. Da segunda equação temos $x_2 = 4$, substituindo na primeira equação, obtemos:

$$3x_1 + 2 \cdot 4 - 2 = 0$$

$$3x_1 = -6 \Rightarrow x_1 = -2, \text{ solução } (-2, 4, 2)$$

Apesar do sistema S4 aparentar ser mais difícil de resolver, observe que, se somarmos a primeira equação com a segunda, obtemos:

$$\begin{array}{rrrl} 3x_1 & + 2x_2 & - x_3 & = 0 \\ -3x_1 & - x_2 & + x_3 & = 4 \\ \hline & x_2 & & = 4 \end{array}$$

Analogamente, subtraindo a terceira equação da primeira:

$$\begin{array}{rrrl} 3x_1 & + 2x_2 & + x_3 & = 0 \\ -3x_1 & - 2x_2 & + x_3 & = 4 \\ \hline & & x_3 & = 4 \end{array}$$

Então $x_3 = 2$, substituindo o valor de x_2 e x_3 em qualquer uma das equações de S4, obtemos $x_1 = -2$.

Ou seja, os sistemas S3 e S4 são equivalentes.

Um sistema de m equações lineares E_i, $i = 1, \ldots, m$ se transforma em um sistema equivalente quando se efetuam as seguintes operações elementares:

I. Permutação de duas equações: $E_i \leftrightarrow E_j$, $i = 1, \ldots, m$ e $j = 1, \ldots, m$;

II. Multiplicação de uma equação por um número real k diferente de zero: $E_i = kE_i$, $i = 1, \ldots, m$;

III. Substituição de uma equação por sua soma com outra previamente multiplicada por um número real k diferente de zero: $E_i = E_i + kE_j$, $i = 1, \ldots, m$ e $j = 1, \ldots, m$.

Exemplos

1.21. Dado o sistema:

$$S = \begin{cases} 2x_1 + 4x_2 - 6x_3 = 10 \\ 4x_1 + 2x_2 + 2x_3 = 16 \\ 2x_1 + 8x_2 - 4x_3 = 24 \end{cases}$$

cuja solução é (2, 3, 1).

Vamos realizar algumas operações elementares nesse sistema e observar que os sistemas obtidos a partir dessas operações são equivalentes entre si. Para isso, chamaremos as equações 1, 2 e 3 de E_1, E_2 e E_3 respectivamente.

I. Permutar a segunda equação pela terceira equação do sistema: $(E_2 \leftrightarrow E_3)$

$$S1 = \begin{cases} 2x_1 + 4x_2 - 6x_3 = 10 \\ 2x_1 + 8x_2 - 4x_3 = 24 \\ 4x_1 + 2x_2 + 2x_3 = 16 \end{cases}$$

II. Multiplicar a primeira equação do sistema por $(\frac{1}{2})$:

$E_1 = \frac{1}{2}E_1$

$$S2 = \begin{cases} x_1 + 2x_2 - 3x_3 = 5 \\ 2x_1 + 8x_2 - 4x_3 = 24 \\ 4x_1 + 2x_2 + 2x_3 = 16 \end{cases}$$

III. Substituir a terceira equação pela soma dela com a primeira equação previamente multiplicada por (–4):

$E_3 = E_3 + (-4) \cdot E_1$

$$S3 = \begin{cases} x_1 + 2x_2 - 3x_3 = 5 \\ 2x_1 + 8x_2 - 4x_3 = 24 \\ 0x_1 - 6x_2 + 14x_3 = -4 \end{cases}$$

Observe que a solução (2, 3, 1) é solução dos sistemas S, S1, S2 e S3, ou seja, os sistemas são equivalentes.

As operações que transformam um sistema em outro equivalente a ele são as três apresentadas.

Agora é a sua vez!

Resolva os exercícios 7 e 8 das atividades de autoavaliação.

Seção 4 – Resolução de sistemas de equações lineares

Nesta seção, você vai estudar alguns métodos clássicos utilizados para a resolução de sistemas de equações lineares. Todos eles consistem em transformar o sistema inicial em um sistema equivalente por meio de operações elementares. Para tanto, utilizam a forma matricial do sistema e trabalham as operações sobre as linhas dessa matriz em vez de trabalhar com equações. Assim, podemos reescrever as operações elementares:

Operações elementares sobre as linhas de uma matriz

I. Permutação de duas linhas: $L_i \leftrightarrow L_j$, $i = 1, \ldots, m$ e $j = 1, \ldots, m$;

II. Multiplicação de uma linha por um número real k diferente de zero: $L_i = kL_i$, $i = 1, \ldots, m$;

III. Substituição de uma linha por sua soma com outra previamente multiplicada por um número real k diferente de zero: $L_i = L_i + kL_j$, $i = 1, \ldots, m$ e $j = 1, \ldots, m$.

A matriz dos coeficientes do sistema na forma escalonada também se apresenta na forma escalonada.

Uma matriz $A = (a_{ij})_{m \times n}$ **está na forma escalonada** se:

1. Toda linha nula somente aparece abaixo de todas as linhas não nulas (ou seja, daquelas que possuem pelo menos um elemento não nulo – chamado pivô);

2. Cada pivô está à direita do elemento pivô da próxima linha.

Observação 1.2: se uma matriz satisfaz as condições 1, 2 e além disso:

- todos os pivôs são iguais a 1;
- toda coluna que contém o pivô em alguma linha tem todos os seus outros elementos iguais a zero.

Dizemos que ela está na forma **reduzida por linha**.

Exemplos

1.22. São matrizes na forma escalonada reduzida por linha:

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 1 & -3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \text{ e } \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 2 \end{bmatrix}$$

1.23. São matrizes na forma escalonada:

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 1 & -3 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 3 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \text{ e } \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 3 & 1 \\ 0 & -4 & 0 & 7 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 2 \end{bmatrix}$$

Um pouco de história

Johann Carl Friedrich Gauss (1777-1855) nasceu na Alemanha e foi considerado por muitos como o maior gênio da história da Matemática. Menino prodígio aos sete anos, surpreendeu um professor ao calcular correta e rapidamente a soma de todos os números inteiros de 1 a 100, sem apresentar nenhum cálculo por escrito. (Veja no EVA qual o raciocínio utilizado por Gauss). Durante sua vida, dedicou se a diversas áreas da Matemática e da Física. Superou toda a matemática até então estudada ao propor rigor nas demonstrações e por conta disso, o estudo da Matemática e da Astronomia progrediram e estas se tornaram áreas caracterizadas pela precisão. Aos 24 anos, publicou sua obra-prima *Disquisi-tiones Arithmeticae*, na qual sintetizou o estudo da Teoria dos Números e por isso foi considerada por muitos como uma das maiores realizações matemáticas.

Fonte: Anton e Rorres (2001).

Método de eliminação de Gauss

O método utiliza operações elementares com as linhas da matriz dos coeficientes do sistema, a fim de transformá-la numa matriz escalonada e encontrar a solução do sistema através de retro-substituição das variáveis.

Dado um sistema linear na forma matricial **AX = B**, podemos descrever o método de eliminação de Gauss através das seguintes etapas:

Etapa 1: determinação da matriz aumentada do sistema [A|B];

Etapa 2: transformação da matriz dos coeficientes A numa matriz escalonada, aplicando as operações elementares na matriz aumentada. Para isso, seguiremos as seguintes fases:

- *Fase 1*: localizar a coluna mais à esquerda que não seja toda constituída de *zeros*, coluna r;
- *Fase 2*: permutar as linhas de maneira a obter um elemento não zero na primeira linha da coluna r, por exemplo, de modo que $a_{1r} \neq 0$. Chamá-lo de pivô e a linha 1 de linha pivô;
- *Fase 3*: utilizar o pivô para zerar todos os elementos abaixo dele, ou seja, para cada $i > 1$, determinar multiplicadores:

  $m_{ir} = \dfrac{a_{ir}}{a_{1r}}$ para realizar as operações $L_i = L_i + (-m_{ir})L_1$

- *Fase 4*: repetir as fases 2 e 3 na submatriz formada por todas as linhas, exceto a primeira;
- *Fase 5*: continuar o processo até que a matriz esteja na forma escalonada.

Etapa 3: resolver o novo sistema obtido na etapa 2 por retro-substituição.

Sem perda por generalidade, iremos apresentar esse método resolvendo exemplos.

Exemplos

1.24. Encontre a solução do sistema abaixo, utilizando eliminação de Gauss.

$$\begin{cases} 2x_1 + x_2 + 3x_3 = 8 \\ 4x_1 + 2x_2 + 2x_3 = 4 \\ 2x_1 + 5x_2 + 3x_3 = -12 \end{cases}$$

Etapa 1: Escrever a matriz aumentada do sistema:

$$[A \mid B] = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 3 & 8 \\ 4 & 2 & 2 & 4 \\ 2 & 5 & 3 & -12 \end{bmatrix}$$

Etapa 2: transformar a matriz dos coeficientes em uma matriz na forma escalonada, através de operações com linhas na matriz aumentada:

- *Fase 1*: Identificar o elemento pivô (primeiro elemento diferente de zero da coluna 1); nesse exemplo, o elemento $a_{11} = 2$.

$$\begin{array}{cc} & \text{Pivô} \\ [A \mid B] = & \begin{bmatrix} 2 & 1 & 3 & 8 \\ 4 & 2 & 2 & 4 \\ 2 & 5 & 3 & -12 \end{bmatrix} \begin{array}{l} \to \text{Linha Pivô} \\ \\ \\ \end{array} \end{array}$$

Utilizar o pivô para zerar todos os elementos da primeira coluna abaixo dele.

Para isso, definimos os seguintes multiplicadores:

$$m_{21} = \frac{a_{21}}{a_{11}} = \frac{4}{2} = 2 \ \text{ e } \ m_{31} = \frac{a_{31}}{a_{11}} = \frac{2}{2} = 1$$

E as operações:

$$L_2 = L_2 + (-m_{21})L_1 \ \text{ e } \ L_3 = L_3 + (-m_{31})L_1$$

$$L_2 = L_2 + (-2)L_1 \ \text{ e } \ L_3 = L_3 + (-1)L_1$$

$$\begin{array}{rrrrr} L_2: & 4 & 2 & 2 & 4 \\ (-2)L_1: & -4 & -2 & -6 & -16 \\ \hline L_2: & 0 & 0 & -4 & -12 \end{array} \qquad \begin{array}{rrrrr} L_3: & 2 & 5 & 3 & -12 \\ (-1)L_1: & -2 & -1 & -3 & -8 \\ \hline L_2: & 0 & 4 & 0 & -20 \end{array}$$

Que nos leva à seguinte matriz:

$$[A \mid B] = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 3 & 8 \\ 0 & 0 & -4 & -12 \\ 0 & 4 & 0 & -20 \end{bmatrix}$$

■ *Fase 2*: deixar de lado a primeira linha dessa nova matriz e recomeçar o processo aplicado na fase 1 à submatriz resultante. Observe que o próximo elemento não nulo da segunda coluna é o elemento a_{32}.

$$[A \mid B] = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 3 & 8 \\ 0 & 0 & -4 & -12 \\ \boxed{0 \quad 4 \quad 0 \quad -20} \end{bmatrix}$$

Pivô

Nesse caso, a operação a ser realizada é: $L_2 \leftrightarrow L_3$, para levá-lo à diagonal principal.

$$[A \mid B] = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 3 & 8 \\ 0 & 4 & 0 & -20 \\ 0 & 0 & -4 & -12 \end{bmatrix}$$

Como o elemento abaixo do pivô $a_{22} = 4$ é zero, já temos a matriz dos coeficientes do sistema na forma escalonada.

Etapa 3: reescrevendo o sistema e utilizando a retrossubstituição, obtemos:

$$\begin{cases} 2x_1 + x_2 + 3x_3 = 8 \\ \quad 4x_2 \quad\quad = -20 \\ \quad\quad -4x_3 = -12 \end{cases}$$

cuja solução é (2, –5, 3)

1.25. Resolva o sistema:

$$\begin{cases} 1x_1 + 2x_2 - 5x_3 + 3x_4 + 6x_5 = 14 \\ \quad\quad -2x_3 \quad\quad + 7x_5 = 12 \\ 2x_1 + 4x_2 - 5x_3 + 6x_4 - 5x_5 = -1 \end{cases}$$

Etapa 1:

$$[A \mid B] = \begin{bmatrix} 1 & 2 & -5 & 3 & 6 & 14 \\ 0 & 0 & -2 & 0 & 7 & 12 \\ 2 & 4 & -5 & 6 & -5 & -1 \end{bmatrix}$$

Etapa 2:

Pivô

$$[A \mid B] = \begin{bmatrix} 1 & 2 & -5 & 3 & 6 & 14 \\ 0 & 0 & -2 & 0 & 7 & 12 \\ 2 & 4 & -5 & 6 & -5 & -1 \end{bmatrix} \begin{array}{l} \rightarrow \text{Linha Pivô} \\ \\ \\ \end{array}$$

Devemos utilizar a linha 1 para zerar o elemento $a_{31} = 1$ através da seguinte operação:

$L_3 = L_3 + (-2)L_1$

$$\begin{array}{rrrrrrr} L_3: & 2 & 4 & -5 & 6 & -5 & -1 \\ (-2)L_1: & -2 & -4 & 10 & -6 & -12 & -28 \\ \hline L_3: & 0 & 0 & 5 & 0 & -17 & -29 \end{array}$$

$$[A \mid B] = \begin{bmatrix} 1 & 2 & -5 & 3 & 6 & 14 \\ 0 & 0 & -2 & 0 & 7 & 12 \\ 0 & 0 & 5 & 0 & -17 & -29 \end{bmatrix}$$

Observando a submatriz resultante, recomeçamos o processo determinando o próximo pivô:

Pivô

$$[A \mid B] = \begin{bmatrix} 1 & 2 & -5 & 3 & 6 & 14 \\ 0 & 0 & -2 & 0 & 7 & 12 \\ 0 & 0 & 5 & 0 & -17 & -29 \end{bmatrix} \begin{array}{l} \\ \rightarrow \text{Linha Pivô} \\ \\ \end{array}$$

A linha 2 é a linha pivô e o elemento $a_{23} = -2$, o elemento pivô, utilizado para zerar o elemento a_{33} com a operação:

$$L_3 = L_3 + \left(\frac{5}{2}\right)L_2$$

L_3 :	0	0	5	0	–17	–29
$(5/2)L_2$:	0	0	–5	0	$\frac{35}{2}$	30
L_3 :	0	0	0	0	$\frac{1}{2}$	1

$$[A \mid B] = \begin{bmatrix} 1 & 2 & -5 & 3 & 6 & 14 \\ 0 & 0 & -2 & 0 & 7 & 12 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{2} & 1 \end{bmatrix}$$

Como a matriz já está na forma escalonada, podemos reescrever o sistema:

Etapa 3:

$$\begin{cases} 1x_1 + 2x_2 - 5x_3 + 3x_4 + 6x_5 = 14 \\ \qquad\qquad -2x_3 \qquad\quad + 7x_5 = 12 \\ \qquad\qquad\qquad\qquad\quad \frac{1}{2}x_5 = -1 \end{cases}$$

Utilizando a retrossubstituição: $x_5 = \dfrac{1}{1/2} = 2$,

$-2x_3 = 12 - 7 \cdot 2 = -2 \Rightarrow x_3 = 1$

$x_1 = 14 - 2x_2 + 5 \cdot 1 - 3x_4 - 6 \cdot 2 \Rightarrow x_1 = 7 - 2x_2 - 3x_4$.

Observe que o sistema apresenta duas variáveis livres, logo, possui infinitas soluções.

1.26. Resolva o sistema:

$$\begin{cases} \quad\quad -x_2 - x_3 + x_4 = 0 \\ x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 6 \\ 2x_1 + 4x_2 + x_3 - 2x_4 = -1 \\ 4x_1 - x_2 - 3x_3 + 3x_4 = 6 \end{cases}$$

Etapa 1:

$$[A \mid B] = \begin{bmatrix} 0 & -1 & -1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 6 \\ 2 & 4 & 1 & -2 & -1 \\ 4 & -1 & -3 & 3 & 6 \end{bmatrix}$$

Etapa 2:

Como o elemento a_{11}, que seria o pivô, é igual a zero, temos que procurar outro elemento na primeira coluna e permutar linhas. De preferência, escolha o número 1 para pivô, assim os multiplicadores ficam mais simples. Veja que o elemento a_{21} é igual a 1, assim podemos realizar a seguinte permutação:

$L_1 \leftrightarrow L_2$

$$[A \mid B] = \begin{array}{ll} \text{Pivô} & \\ \left[\begin{array}{ccccc} 1 & 1 & 1 & 1 & 6 \\ 0 & -1 & -1 & 1 & 0 \\ 2 & 4 & 1 & -2 & -1 \\ 4 & -1 & -3 & 3 & 6 \end{array}\right] & \begin{array}{l} \text{Linha Pivô} \\ \\ \\ \\ \end{array} \end{array}$$

Devemos utilizar a linha 1 para zerar os elementos a_{31} e a_{41} com as seguintes operações:

$L_3 = L_3 + (-2)L_1$ e $L_4 = L_4 + (-4)L_1$

$$[A \mid B] = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 6 \\ 0 & -1 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & -1 & -4 & -13 \\ 0 & -5 & -7 & -1 & -18 \end{bmatrix}$$

Sob a submatriz resultante, recomeçamos o processo determinando o próximo pivô:

$$\begin{array}{rl} & \quad\quad\ \text{Pivô} \\ [A \mid B] = & \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 6 \\ 0 & -1 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & -1 & -4 & -13 \\ 0 & -5 & -7 & -1 & -18 \end{bmatrix} \begin{array}{l} \\ \rightarrow \text{Linha Pivô} \\ \\ \\ \end{array} \end{array}$$

A linha 2 é a linha pivô e o elemento $a_{22} = -1$ é o elemento pivô, utilizado para zerar os elementos a_{32} e a_{42} através das seguintes operações:

$L_3 = L_3 + (2)L_2$ e $L_4 = L_4 + (-5)L_2$

$$[A \mid B] = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 6 \\ 0 & -1 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -3 & -2 & -13 \\ 0 & 0 & -2 & -6 & -18 \end{bmatrix}$$

O pivô da próxima submatriz é o elemento $a_{33} = -3$:

$$\begin{array}{rl} [A \mid B] = & \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 6 \\ 0 & -1 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -3 & -2 & -13 \\ 0 & 0 & -2 & -6 & -18 \end{bmatrix} \begin{array}{l} \\ \\ \rightarrow \text{Linha Pivô} \\ \\ \end{array} \\ & \quad\quad\quad\quad \text{Pivô} \end{array}$$

Para zerar elementos a_{43}, realizamos a operação:

$L_4 = L_4 + (-\frac{2}{3})L_3$

$$[A \mid B] = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 6 \\ 0 & -1 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -3 & -2 & -13 \\ 0 & 0 & 0 & -\frac{14}{3} & -\frac{28}{3} \end{bmatrix}$$

Reescrevendo o sistema:

Etapa 3:

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 6 \\ \quad - x_2 - x_3 + x_4 = 0 \\ \qquad -3x_3 - 2x_4 = -13 \\ \qquad\qquad -\dfrac{14}{3}x_4 = -\dfrac{28}{3} \end{cases}$$

Utilizando retrossubstituição: $x_4 = 2$, $x_3 = 3$, $x_2 = -1$ e $x_1 = -4$

1.27. Analise a solução do sistema abaixo, utilizando eliminação de Gauss.

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 - 3x_3 = 0 \\ 2x_1 + 4x_2 - 2x_3 = 2 \\ 3x_1 + 6x_2 - 4x_3 = 3 \end{cases}$$

A partir desse exemplo, vamos representar o método juntamente com a sequência de operações:

$$[A \mid B] = \begin{bmatrix} 1 & 2 & -3 & 0 \\ 2 & 4 & -2 & 2 \\ 3 & 6 & -4 & 3 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{matrix} L_2 = L_2 + (-2)L_1 \\ L_3 = L_3 + (-3)L_1 \end{matrix}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & 4 & 2 \\ 0 & 0 & 5 & 3 \end{bmatrix} \rightarrow L_3 = L_3 + (-\frac{5}{4})L_2$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & 4 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{2} \end{bmatrix}$$

Reescrevendo o sistema:

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 - 3x_3 = 0 \\ \qquad\qquad 4x_3 = 2 \\ 0x_1 + 0x_2 + 0x_3 = \dfrac{1}{2} \end{cases}$$

Observe que a última equação é uma equação degenerada com $b \neq 0$. Neste caso, o sistema não possui solução.

1.28. Resolva o sistema:

$$\begin{cases} 2x_1 - 5x_2 + 3x_3 = 1 \\ x_1 + 3x_2 - x_3 = 2 \\ 11x_2 - 5x_3 = 3 \\ 4x_1 + x_2 + x_3 = 5 \end{cases}$$

$$[A \mid B] = \begin{bmatrix} 2 & -5 & 3 & 1 \\ 1 & 3 & -1 & 2 \\ 0 & 11 & -5 & 3 \\ 4 & 1 & 1 & 5 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{matrix} L_2 = L_2 + (-\frac{1}{2})L_1 \\ L_4 = L_4 + (-2)L_1 \end{matrix}$$

$$\begin{bmatrix} 2 & -5 & 3 & 1 \\ 0 & \frac{11}{2} & -\frac{5}{2} & \frac{3}{2} \\ 0 & 11 & -5 & 3 \\ 0 & 11 & -5 & 3 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{matrix} L_3 = L_3 + (-2)L_2 \\ L_4 = L_4 + (-2)L_2 \end{matrix}$$

$$\begin{bmatrix} 2 & -5 & 3 & 1 \\ 0 & \frac{11}{2} & -\frac{5}{2} & \frac{3}{2} \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Como a matriz na forma escalonada apresenta duas equações degeneradas com $b = 0$, elas podem ser eliminadas do sistema sem alterar a solução. A linha 2 pode ser multiplicada por 2, para simplificar as frações.

Portanto, temos o seguinte sistema:

$$\begin{cases} 2x_1 - 5x_2 + 3x_3 = 1 \\ \quad\;\; 11x_2 - 5x_3 = 3 \end{cases}$$

que admite infinitas soluções, já que apresenta uma variável livre.

1.29. Utilize o método de eliminação de Gauss para determinar os valores de *k*, para que o sistema

$$\begin{cases} x_1 + x_2 - x_3 = 1 \\ 2x_1 + 3x_2 + kx_3 = 3 \\ x_1 + kx_2 + 3x_3 = 2 \end{cases}$$

seja:

a) possível e determinado;
b) possível e indeterminado;
c) impossível.

Escrevendo a matriz aumentada e realizando as operações descritas:

$$[\mathrm{A} \mid \mathrm{B}] = \begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 & 1 \\ 2 & 3 & k & 3 \\ 1 & k & 3 & 2 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{matrix} \mathrm{L}_2 = \mathrm{L}_2 + (-2)\mathrm{L}_1 \\ \mathrm{L}_3 = \mathrm{L}_3 + (-1)\mathrm{L}_1 \end{matrix}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & (2+k) & 1 \\ 0 & (k-1) & 4 & 1 \end{bmatrix} \rightarrow \mathrm{L}_3 = \mathrm{L}_3 + (-k+1)\mathrm{L}_2$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & (2+k) & 1 \\ \hat{Y}\hat{Y}\hat{Y}\hat{Y}\hat{Y}\hat{Y}-k+ & & +k \;+ & -k+ \quad + \end{bmatrix} =$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & (2+k) & 1 \\ 0 & 0 & (-k^2 - k + 6) & (-k+2) \end{bmatrix}$$

Reescrevendo o sistema:

$$\begin{cases} x_1 + x_2 - x_3 = 1 \\ x_2 + (2+k)x_3 = 1 \\ (-k^2 - k + 6)x_3 = (-k+2) \end{cases}$$

Da última equação: $(k+3)(k-2)x_3 = (-k+2)$ temos:

a) O sistema é possível e determinado se $-(k+3)(k-2) \neq 0$, ou seja, $k \neq -3$ e $k \neq 2$.

b) O sistema é possível e indeterminado se $-(k+3)(k-2) = 0$, e $(-k+2) = 0$, ou seja, se ($k = -3$ ou $k = 2$) e $k = 2$, concluindo: se $k = 2$.

c) O sistema é impossível se $-(k+3)(k-2) = 0$ e $(-k+2) \neq 0$, ou seja, ($k = -3$ ou $k = 2$) e $k \neq 2$. Concluindo: se $k = -3$.

Observação 1.3: quando transformamos uma matriz dos coeficientes de um sistema na forma escalonada reduzida por linha, estamos aplicando o método chamado eliminação de Gauss-Jordan.

Um pouco de história

Wilhem Jordan (1842-1899) nasceu na Alemanha e, em 1888, publicou o livro *Handbuch der Vermessungskunde*, sua contribuição à resolução de sistemas lineares. Foi engenheiro e se especializou em Geodésia.

Fonte: Anton e Rorres (2001)

Exemplos

1.30. Encontre a solução do sistema, pelo método de Gauss-Jordan.

$$\begin{cases} 2x_1 + x_2 + 3x_3 = 8 \\ 4x_1 + 2x_2 + 2x_3 = 4 \\ 2x_1 + 5x_2 + 3x_3 = -12 \end{cases}$$

Como já aplicamos o método de eliminação de Gauss nesse exemplo, veja exemplo 1.24, precisamos apenas continuar o processo para transformar a matriz escalonada em uma matriz escalonada reduzida por linha.

$$[A \mid B] = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 3 & 8 \\ 0 & 4 & 0 & -20 \\ 0 & 0 & -4 & -12 \end{bmatrix}$$

Para que essa matriz esteja na forma desejada:

1. Todos os pivôs devem ser iguais a 1.

Assim, realizamos as seguintes operações:

$$L_1 = (\frac{1}{2})L_1,\ \ L_2 = (\frac{1}{4})L_2 \ \text{ e } \ L_3 = (-\frac{1}{4})L_3$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 1/2 & 3/2 & 4 \\ 0 & 1 & 0 & -5 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \end{bmatrix}$$

2. Toda coluna que contém o pivô em alguma linha tem todos os seus outros elementos iguais a zero. Para isso, aplicamos as operações:

$$L_1 = L_1 + (\frac{1}{2})L_2$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 3/2 & 13/2 \\ 0 & 1 & 0 & -5 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \end{bmatrix}$$

$$L_1 = L_1 + (-\frac{3}{2})L_3$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & -5 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \end{bmatrix}$$

Observe que, por esse método, a solução do sistema está pronta no vetor de termos independentes. Portanto, ao reescrever o sistema, não precisamos utilizar retrossubstituição para encontrá-la.

$$\begin{cases} x_1 \qquad\qquad = 2 \\ \qquad x_2 \qquad = -5 \\ \qquad\qquad x_3 = 3 \end{cases}$$

Métodos de eliminação de Gauss e Gauss-Jordan para resolver sistemas homogêneos

Podemos aplicar os métodos de eliminação de Gauss e Gauss-Jordan para resolver sistemas lineares homogêneos. Mas, nesse caso, nenhuma das operações elementares sobre as linhas altera a coluna dos termos independentes, já que é formada de zeros. Consequentemente, o sistema de equações correspondente à forma escalonada da matriz aumentada também deve ser um sistema homogêneo.

Com isso, a forma escalonada da matriz dos coeficientes de um sistema homogêneo garante que:

I. se o número de linhas não nulas for igual ao número de variáveis, o sistema tem apenas a solução trivial;

II. se o número de linhas não nulas for menor que o número de variáveis, o sistema tem outras soluções além da trivial.

Teorema 1.4: um sistema de equações lineares homogêneo com mais variáveis que equações tem infinitas soluções, já que terá variáveis livres.

Quando o sistema homogêneo tiver o número de equações iguais ao número de variáveis, uma ferramenta que pode ser utilizada na análise da sua solução é o determinante da matriz dos coeficientes.

- Se det A ≠ 0, então o sistema é compatível e determinado (só admite a solução trivial);
- Se det A = 0, então o sistema é compatível e indeterminado (admite a solução trivial e outras próprias).

(Em que: det A é o determinante da matriz dos coeficientes do sistema).

Exemplos:

Analise a solução dos seguintes sistemas homogêneos:

1.31. $\begin{cases} x_1 + 2x_2 - 3x_3 + x_4 = 0 \\ x_1 - 3x_2 + x_3 - 2x_4 = 0 \\ 2x_1 - x_2 - 2x_3 + 5x_4 = 0 \end{cases}$

Como o número de variáveis é maior que o número de equações, concluímos que o sistema apresenta outras soluções além da solução trivial ($x_1 = 0$, $x_2 = 0$, $x_3 = 0$).

1.32. $\begin{cases} x_1 + x_2 - x_3 = 0 \\ 2x_1 + 4x_2 - x_3 = 0 \\ 3x_1 + 2x_2 + 2x_3 = 0 \end{cases}$

Como o número de equações é igual ao número de variáveis, podemos analisar a solução do sistema de duas formas:

I. Encontrar a matriz dos coeficientes escalonada:

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 2 & 4 & -1 \\ 3 & 2 & 2 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{matrix} L_2 = L_2 + (-2)L_1 \\ L_3 = L_3 + (-3)L_1 \end{matrix}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & -1 & 5 \end{bmatrix} \rightarrow L_3 = L_3 + (\frac{1}{2})L_2$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 11/2 \end{bmatrix}$$

como o número de linhas não nulas é igual ao número de variáveis, o sistema possui apenas a solução trivial.

Veja que, se reescrevermos o sistema:

$$\begin{cases} x_1 + x_2 - x_3 = 0 \\ \quad 2x_2 + x_3 = 0 \\ \qquad \dfrac{11}{2}x_3 = 0 \end{cases}$$

teremos apenas a solução trivial ($x_1 = 0$, $x_2 = 0$, $x_3 = 0$).

II. Utilizar o determinante da matriz dos coeficientes:

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 2 & 4 & -1 \\ 3 & 2 & 2 \end{vmatrix} = 1\cdot4\cdot2 + 1\cdot(-1)\cdot3 + (-1)\cdot2\cdot2 - 3\cdot4\cdot(-1) - 1\cdot2\cdot(-1) - 2\cdot1\cdot2$$

$$= 8 - 3 - 4 + 12 + 2 - 4 = 11 \neq 0$$

Segundo o teorema 1.4, o sistema apresenta apenas a solução trivial ($x_1 = 0$, $x_2 = 0$, $x_3 = 0$).

1.33. $\begin{cases} x_1 + x_2 - x_3 = 0 \\ 2x_1 - 3x_2 + x_3 = 0 \\ x_1 - 4x_2 + 2x_3 = 0 \end{cases}$

Também podemos analisar o sistema utilizando qualquer um dos dois métodos:

I. Encontrar a matriz escalonada da matriz dos coeficientes:

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 2 & -3 & 1 \\ 1 & -4 & 2 \end{bmatrix} \to \begin{matrix} L_2 = L_2 + (-2)L_1 \\ L_3 = L_3 + (-1)L_1 \end{matrix}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 0 & -5 & 3 \\ 0 & -5 & 3 \end{bmatrix} \to L_3 = L_3 + (-1)L_2 \to \begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 0 & -5 & 3 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

como a matriz dos coeficientes do sistema de 3 equações e 3 variáveis na forma escalonada apresenta uma linha nula, concluímos que o sistema homogêneo apresenta solução não trivial.

Reescrevendo o sistema:

$$\begin{cases} x_1 + x_2 - x_3 = 0 \\ -5x_2 + 3x_3 = 0 \end{cases}$$

obtemos as soluções: $x_2 = \frac{2}{5}x_3$, $x_1 = x_3 - x_2 = x_3 - \frac{3}{5}x_3 = \frac{2}{5}x_3$, dessa forma, x_3 é variável livre, fazendo $x_3 = 0$, encontramos a solução trivial: ($x_1 = 0$, $x_2 = 0$, $x_3 = 0$). Mas como x_3 pode assumir qualquer valor, o sistema possui infinitas soluções.

II. Utilizando o determinante da matriz dos coeficientes:

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 2 & -3 & 1 \\ 1 & -4 & 2 \end{vmatrix} = 1\cdot(-3)\cdot 2 + 1\cdot 1\cdot 1 + (-1)\cdot 2\cdot(-4) - 1\cdot(-3)\cdot(-1) - (-4)\cdot 1\cdot 1 - 2\cdot 2\cdot 1$$

$$= -6 + 1 + 8 - 3 + 4 - 4 = 0$$

Portanto, o sistema homogêneo apresenta solução não trivial.

Matemática e informática

As aplicações de resolução de sistemas geralmente apresentam sistemas muito grandes. Para isso, são usados *softwares* que, na maioria das vezes, utilizam algoritmos baseados nos métodos de eliminação de Gauss ou de Gauss-Jordan.

Agora é a sua vez!

Resolva as atividades de autoavaliação de 9 a 12.

Seção 5 – Matriz inversa e sistemas lineares

Nesta seção, você vai estudar mais um método utilizado para encontrar solução de sistemas lineares cujo número de variáveis é igual ao número de equações: o Método da Matriz Inversa.

Antes de falarmos sobre esse método, vamos rever um pouco a álgebra dos números reais. Dados dois números reais a e b, vimos que $ab = ba$, ou seja, o produto de números reais satisfaz a propriedade comutativa. Mas, para produto de matrizes, essa propriedade nem sempre é satisfeita.

Exemplos:

1.34. Dadas as matrizes:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 4 \\ 5 & 2 \end{bmatrix}_{(3\times 2)} \quad B = \begin{bmatrix} -1 & 3 & 0 \\ 2 & 1 & -2 \end{bmatrix}_{(2\times 3)} \quad C = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & -2 \end{bmatrix}_{(2\times 2)} \quad D = \begin{bmatrix} 3 & -3 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}_{(2\times 2)}$$

Você pode ver que os produtos AB, AC, CB, CD, DC, AD, DA, DB e BA são possíveis, já os produtos BC, BD, DA e CA não são possíveis, por causa das ordens das matrizes.

Veja, também, que:

$$AB = \begin{bmatrix} 5 & 6 & -6 \\ 6 & 10 & -8 \\ -1 & 17 & -4 \end{bmatrix}_{(3\times 3)} \quad AC = \begin{bmatrix} 10 & -4 \\ 14 & -4 \\ 11 & 6 \end{bmatrix}_{(3\times 2)} \quad CB = \begin{bmatrix} 3 & 5 & -4 \\ -7 & 7 & 4 \end{bmatrix}_{(2\times 3)}$$

$$BA = \begin{bmatrix} 5 & 9 \\ -6 & -6 \end{bmatrix}_{(2\times 2)} \quad CD = \begin{bmatrix} 3 & -1 \\ 9 & -11 \end{bmatrix}_{(2\times 2)} \quad DC = \begin{bmatrix} -6 & 0 \\ 3 & -2 \end{bmatrix}_{(2\times 2)}$$

$$DB = \begin{bmatrix} -9 & 6 & 6 \\ 2 & 1 & -2 \end{bmatrix}_{(2\times 3)}$$

Conclusões:

1. O fato do produto AC ser possível não garante que o produto CA seja possível;
2. Apesar de os produtos AB e BA serem possíveis, as ordens das matrizes resultantes são diferentes.
3. Apesar dos produtos CD e DC serem possíveis e as matrizes resultantes apresentarem mesma ordem, isso não garante que esses produtos sejam iguais.

O exemplo acima ilustra o fato de que a comutatividade, apesar de ser uma lei válida para a álgebra dos números reais, não obrigatoriamente é válida para o conjunto das matrizes. Você viu, em Geometria Analítica, as propriedades válidas para a adição de matrizes. Vejamos, agora, quais propriedades são válidas para o produto de matrizes.

Propriedades da multiplicação de matrizes

Suponha que as ordens das matrizes são tais que as operações indicadas podem ser efetuadas.

- Associativa: $A(BC) = (AB)C$
- Distributiva à esquerda: $A(B + C) = AB + AC$
- Distributiva à direita: $(A + B)C = AC + BC$
- Existência do elemento neutro: $AI = IA = A$

Apesar de a comutatividade não ser uma lei sempre válida na multiplicação de matrizes, existe um caso especial no qual essa validade se verifica.

Dada uma matriz quadrada **A** de ordem *n*, se pudermos encontrar uma matriz **B** também de ordem *n*, tal que $A \cdot B = B \cdot A = I_n$, então dizemos que **A** é invertível e que **B** é a inversa de **A**. Caso não exista a inversa, dizemos que **A** é não invertível. A inversa de matriz **A** é denotada por A^{-1}.

Em que: I_n é a matriz identidade de ordem *n*.

Para determinar se uma matriz quadrada é invertível, ou seja, se admite inversa, deve-se verificar se seu determinante é diferente de zero. A matriz só é invertível se seu determinante for diferente de zero. Se a matriz não for quadrada, não admite inversa.

Propriedades da matriz inversa

Se A é uma matriz quadrada invertível, as seguintes propriedades são satisfeitas:

1. Sua matriz inversa é única: se B e C são ambas matrizes inversas da matriz A, então B = C.
2. Sua matriz inversa A^{-1} é também invertível, e a inversa dessa inversa $(A^{-1})^{-1}$ é igual à própria matriz A: $(A^{-1})^{-1} = A$.
3. A inversa de sua transposta é também invertível e é igual à transporta da inversa: $(A^T)^{-1} = (A^{-1})^T$.
4. O produto de sua inversa por sua transposta é também invertível: existe $(A^{-1}A^T)^{-1}$.
5. A inversa de seu produto por um número (diferente de zero) é igual ao produto do inverso desse número pela sua matriz inversa: $(nA)^{-1} = n^{-1}A^{-1}$.
6. Seu determinante é diferente de zero: $\det A \neq 0$.
7. A matriz inversa do produto de matrizes invertíveis é igual ao produto das inversas dessas matrizes com a ordem trocada. $(A_1 \cdot A_2 \cdot A_3 \cdot \ldots \cdot A_n)^{-1} = A_n^{-1} \cdot \ldots \cdot A_3^{-1} \cdot A_2^{-1} \cdot A_1^{-1}$.
8. A matriz inversa de uma matriz identidade de ordem n, (I_n), é a própria matriz identidade de ordem n: $(I_n)^{-1} = I_n$.

Você pode estar pensando: mas como determinar a matriz inversa de uma matriz quadrada?

Em Geometria Analítica, você viu como determinar a matriz inversa de uma matriz quadrada de *ordem* 2. Veremos, agora, outro método para determinar a matriz inversa de uma matriz quadrada de qualquer ordem.

Determinação da matriz inversa através de operações elementares

Uma matriz M é chamada de **matriz elementar** se pode ser obtida da matriz identidade I_n através de uma única operação elementar sobre linhas.

Teorema 1.5: se A é uma matriz quadrada, o resultado da aplicação de uma operação com as linhas de A é o mesmo que o resultado da multiplicação da matriz A pela matriz elementar M correspondente à mesma operação com linhas realizada na matriz identidade de mesma ordem de A.

Exemplo

1.35. Dada a matriz

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 4 \\ 3 & 1 & -2 \\ -1 & 5 & 3 \end{bmatrix}$$

Aplicando a operação $L_1 = \frac{1}{2} L_1$, obtemos:

$$A_1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 3 & 1 & -2 \\ -1 & 5 & 3 \end{bmatrix}$$

Por outro lado, dada a matriz elementar:

$$M_1 = \begin{bmatrix} 1/2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

obtida pelo produto da linha 1 da matriz identidade, multiplicada pela constante $\frac{1}{2}$.

Ao multiplicar a matriz elementar M_1 pela matriz A dada, obtém-se:

$$\underset{M_1}{\begin{bmatrix} 1/2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}} \cdot \underset{A}{\begin{bmatrix} 2 & 0 & 4 \\ 3 & 1 & -2 \\ -1 & 5 & 3 \end{bmatrix}} = \underset{A_1}{\begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 3 & 1 & -2 \\ -1 & 5 & 3 \end{bmatrix}}$$

Se aplicarmos, sobre a matriz A_1 obtida, as seguintes operações:

$$\begin{matrix} L_2 = L_2 + (-3)L_1 \\ L_3 = L_3 + L_1 \end{matrix} \rightarrow A_3 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & -8 \\ 0 & 5 & 5 \end{bmatrix}$$

Por outro lado, aplicando cada uma das operações acima na matriz identidade, obtemos as seguintes matrizes elementares:

$$M_2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -3 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad \text{e} \quad M_3 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Multiplicando M_2 por A_1, oobtemos A_2:

$$\underset{M_2}{\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -3 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}} \cdot \underset{A_1}{\begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 3 & 1 & -2 \\ -1 & 5 & 3 \end{bmatrix}} = \underset{A_2}{\begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & -8 \\ -1 & 5 & 3 \end{bmatrix}}$$

Agora, se multiplicarmos A_2 por M_3:

$$\underset{M_3}{\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}} \cdot \underset{A_2}{\begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & -8 \\ -1 & 5 & 3 \end{bmatrix}} = \underset{A_3}{\begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & -8 \\ 0 & 5 & 5 \end{bmatrix}}$$

Portanto, podemos concluir que realizar operações elementares com uma matriz e multiplicar a mesma matriz por matrizes elementares obtidas da matriz identidade sob a qual foram efetuadas as mesmas operações, obtemos a mesma matriz resultante. Nesse exemplo, a matriz:

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & -8 \\ 0 & 5 & 5 \end{bmatrix}$$

Os próximos teoremas são de extrema importância para o método que iremos apresentar.

Teorema 1.6: qualquer matriz elementar é invertível e sua inversa é a matriz elementar que corresponde à operação inversa da efetuada pela primeira matriz elementar.

Teorema 1.7: se A é uma matriz invertível de ordem n, então sua matriz escalonada reduzida por linhas é a matriz identidade I_n.

Teorema 1.8: se a matriz escalonada reduzida por linhas de uma matriz A é a matriz identidade I_n. Como, a cada operação com linhas, corresponde uma multiplicação da matriz por uma matriz elementar M_i, teremos:

$$I = M_k \cdot M_{k-1} \cdot \ldots \cdot M_2 \cdot M_1 \cdot A = (M_k \cdot M_{k-1} \cdot \ldots \cdot M_2 \cdot M_1 \cdot I) \cdot A$$

Logo:

$$A^{-1} = M_k \cdot M_{k-1} \cdot \ldots \cdot M_2 \cdot M_1 \cdot I$$

Em outras palavras: se uma matriz é reduzida à matriz identidade através de uma sequência de operações elementares com linhas, então A é invertível e a matriz inversa de A é obtida aplicando-se, à matriz identidade, a mesma sequência de operações com linhas.

Método prático para determinar a matriz inversa de uma matriz A

Como o objetivo do processo é aplicar simultaneamente operações elementares na matriz *A*, a fim de transformá-la na matriz identidade I_n, e, na matriz identidade I_n, para transformá-la na matriz A^{-1}, podemos operá-las simultaneamente. Para isso, escrevemos uma matriz na forma $[A \mid I_n]_{(n\times 2n)}$ e, ao final da aplicação das operações elementares, até que o lado esquerdo esteja reduzido a I_n; o lado direito será A^{-1}.

Exemplos:

1.36. Encontre a inversa da matriz dada:

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

Processo:

$$\left[A \mid I_3\right] = \left[\begin{array}{cccccc} 2 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \to L_1 \leftrightarrow L_2$$

$$\left[\begin{array}{cccccc} 2 & 0 & -1 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \to L_2 = L_2 + (-2)L_1$$

$$\left[\begin{array}{cccccc} 1 & 0 & -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 1 & -2 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \to L_3 = L_3 + (-1)L_2$$

$$\left[\begin{array}{cccccc} 1 & 0 & -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 1 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & -1 & 2 & 1 \end{array}\right] \to L_3 = (-1)L_3$$

$$\left[\begin{array}{cccccc} 1 & 0 & -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 1 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & -2 & -1 \end{array}\right] \to \begin{array}{l} L_1 = L_1 + L_3 \\ L_2 = L_2 + (-2)L_3 \end{array}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 & -1 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & -2 & -1 \end{bmatrix} = \left[I_3 \mid A^{-1}\right]$$

Como a matriz dos coeficientes foi transformada na matriz identidade, a matriz ao lado é a inversa A^{-1} da matriz A. Ou seja:

$$A^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & -1 & -1 \\ -1 & 2 & 2 \\ 1 & -2 & -1 \end{bmatrix}$$

Veja que, se A^{-1} é inversa de A, então o produto $A \cdot A^{-1} = A^{-1} \cdot A = I$, de fato:

$$\begin{array}{ccccc} A & \times & A^{-1} & = & I \\ \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} & \times & \begin{bmatrix} 1 & -1 & -1 \\ -1 & 2 & 2 \\ 1 & -2 & -1 \end{bmatrix} & = & \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \end{array}$$

1.37. Encontre a inversa da matriz B:

$$B = \begin{bmatrix} 1 & 2 & -4 \\ -1 & -1 & 5 \\ 2 & 7 & -3 \end{bmatrix}$$

Processo:

$$\left[B \mid I_3\right] = \begin{bmatrix} 1 & 2 & -4 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & -1 & 5 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & 7 & -3 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{matrix} L_2 = L_2 + L_1 \\ L_3 = L_3 + (-2)L_1 \end{matrix}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & -4 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & 5 & -2 & 0 & 1 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{matrix} L_1 = L_1 + (-2)L_2 \\ L_3 = L_3 + (-3)L_2 \end{matrix}$$

$$\left[\begin{array}{cccccc}1 & 0 & -6 & -1 & -2 & 0\\ 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 2 & -5 & -3 & 1\end{array}\right] \rightarrow L_3 = (\frac{1}{2})L_3$$

$$\left[\begin{array}{cccccc}1 & 0 & -6 & -1 & -2 & 0\\ 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1 & -5/2 & -3/2 & 1/2\end{array}\right] \rightarrow \begin{array}{l} L_1 = L_1 + 6L_3 \\ L_2 = L_2 + (-1)L_3 \end{array}$$

$$\left[\begin{array}{cccccc}1 & 0 & 0 & -16 & -11 & 3\\ 0 & 1 & 0 & 7/2 & 5/2 & -1/2\\ 0 & 0 & 1 & -5/2 & -3/2 & 1/2\end{array}\right] = \left[I_3 \mid B^{-1}\right]$$

Logo, a matriz B^{-1} inversa da matriz B é:

$$B^{-1} = \begin{bmatrix}-16 & -11 & 3\\ 7/2 & 5/2 & -1/2\\ -5/2 & -3/2 & 1/2\end{bmatrix}$$

Efetuando o produto $B \cdot B^{-1}$:

$$\begin{array}{ccccc} B & \times & B^{-1} & = & I \\ \begin{bmatrix}1 & 2 & -4\\ -1 & -1 & 5\\ 2 & 7 & -3\end{bmatrix} & \times & \begin{bmatrix}-16 & -11 & 3\\ 7/2 & 5/2 & -1/2\\ -5/2 & -3/2 & 1/2\end{bmatrix} & = & \begin{bmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{bmatrix}\end{array}$$

1.38. Determine M^{-1} se M é dada por:

$$M = \begin{bmatrix}2 & 1 & 0 & 0\\ 1 & 0 & -1 & 1\\ 0 & 1 & 1 & 1\\ -1 & 0 & 0 & 3\end{bmatrix}$$

Processo:

$$[M \mid I_4] = \left[\begin{array}{cccccccc} 2 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & -1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 3 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \to L_2 \leftrightarrow L_1$$

$$\left[\begin{array}{cccccccc} 1 & 0 & -1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 3 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \to \begin{array}{l} L_2 = L_2 + (-2)L_1 \\ L_4 = L_4 + L_1 \end{array}$$

$$\left[\begin{array}{cccccccc} 1 & 0 & -1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & -2 & 1 & -2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 4 & 0 & 1 & 0 & 1 \end{array}\right] \to L_3 = L_3 + (-1)L_2$$

$$\left[\begin{array}{cccccccc} 1 & 0 & -1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & -2 & 1 & -2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 3 & -1 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 4 & 0 & 1 & 0 & 1 \end{array}\right] \to L_3 = (-1)L_3$$

$$\left[\begin{array}{cccccccc} 1 & 0 & -1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & -2 & 1 & -2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -3 & 1 & -2 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 4 & 0 & 1 & 0 & 1 \end{array}\right] \to \begin{array}{l} L_1 = L_1 + L_3 \\ L_2 = L_2 + (-2)L_3 \\ L_4 = L_4 + L_3 \end{array}$$

$$\left[\begin{array}{cccccccc} 1 & 0 & 0 & -2 & 1 & -1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 4 & -1 & 2 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -3 & 1 & -2 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & -1 & -1 & 1 \end{array}\right] \to \begin{array}{l} L_1 = L_1 + 2L_4 \\ L_2 = L_2 + (-4)L_4 \\ L_3 = L_3 + 3L_4 \end{array}$$

$$\left[\begin{array}{cccccccc} 1 & 0 & 0 & 0 & 3 & -3 & -3 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & -5 & 6 & 6 & -4 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 4 & -5 & -4 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & -1 & -1 & 1 \end{array}\right] = [I_4 \mid M^{-1}]$$

Portanto, a matriz M^{-1} é:

$$M^{-1} = \begin{bmatrix} 3 & -3 & -3 & 2 \\ -5 & 6 & 6 & -4 \\ 4 & -5 & -4 & 3 \\ 1 & -1 & -1 & 1 \end{bmatrix}$$

Resolução de sistemas e matriz inversa

Dado um sistema de equações lineares com n equações e n variáveis, na forma matricial, cuja matriz dos coeficientes A é invertível, o método consiste em resolver a equação matricial $AX = B$, utilizando a inversa A^{-1} da matriz A dos coeficientes.

Ou seja:

Se $AX = B$, multiplicando ambos os lados da igualdade pela matriz A^{-1} inversa de A:

$$\begin{aligned} A^{-1}AX &= A^{-1}B \\ I_nX &= A^{-1}B \\ X &= A^{-1}B \end{aligned}$$

Ou seja, a solução do sistema, será obtida pelo produto da matriz A^{-1} inversa de A, pelo vetor de termos independentes B.

Exemplos

1.39. Resolva o seguinte sistema pelo método da matriz inversa:

$$S = \begin{cases} 2x_1 + x_2 = 8 \\ x_1 - x_3 = 4 \\ x_2 + x_3 = 1 \end{cases}$$

Escrevendo na forma matricial

$$\begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} . \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 8 \\ 4 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Para resolver o sistema pelo método da matriz inversa, precisamos encontrar a matriz inversa da matriz dos coeficientes.Mas observe que:

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

é a matriz cuja matriz inversa foi determinada no exemplo 1.36 anterior, ou seja:

$$A^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & -1 & -1 \\ -1 & 2 & 2 \\ 1 & -2 & -1 \end{bmatrix}$$

Assim, a solução do sistema é dada por:

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & -1 & -1 \\ -1 & 2 & 2 \\ 1 & -2 & -1 \end{bmatrix} . \begin{bmatrix} 8 \\ 4 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 \\ 2 \\ -1 \end{bmatrix}$$

Logo: $x_1 = 3$, $x_2 = 2$ e $x_3 = -1$.

Qual a vantagem de se aplicar o método da matriz inversa, já que encontrar a inversa de uma matriz para depois encontrar a solução do sistema pode ser mais trabalhoso do que aplicar o método de Gauss?

A conveniência de se aplicar esse método está relacionada ao problema que se quer resolver por meio da solução do sistema. O caso mais importante é quando se tem um conjunto de sistemas, tais que as matrizes dos coeficientes sejam todas iguais, variando apenas os termos independentes, pois, assim, basta calcular a inversa de uma única matriz, com a qual se resolverão todos os sistemas.

Exemplos

1.40. Resolva os sistemas

$$\begin{cases} 2x_1 + x_2 + 7x_3 = b_1 \\ x_1 + 3x_2 + 2x_3 = b_2 \\ 5x_1 + 3x_2 + 4x_3 = b_3 \end{cases}$$

1) Para $b_1 = 16$; $b_2 = -5$; $b_3 = 11$ e para $b_1 = 3$; $b_2 = 5$; $b_3 = -5$ pelo método da matriz inversa:

A matriz dos coeficientes do sistema é:

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 7 \\ 1 & 3 & 2 \\ 5 & 3 & 4 \end{bmatrix}$$

Determinação da inversa A^{-1}.

$$[A \mid I_3] = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 7 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 3 & 2 & 0 & 1 & 0 \\ 5 & 3 & 4 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \to L_1 \leftrightarrow L_2$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 3 & 2 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 7 & 1 & 0 & 0 \\ 5 & 3 & 4 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \to \begin{matrix} L_2 = L_2 + (-2)L_1 \\ L_3 = L_3 + (-5)L_1 \end{matrix}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 3 & 2 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -5 & 3 & 1 & -2 & 0 \\ 0 & -12 & -6 & 0 & -5 & 1 \end{bmatrix} \to L_2 = (-\frac{1}{5})L_2$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 3 & 2 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -3/5 & -1/5 & 2/5 & 0 \\ 0 & -12 & -6 & 0 & -5 & 1 \end{bmatrix} \to \begin{matrix} L_1 = L_1 + (-3)L_2 \\ L_3 = L_3 + 12L_2 \end{matrix}$$

$$\left[\begin{array}{cccccc}1 & 0 & 19/5 & 3/5 & -1/5 & 0\\ 0 & 1 & -3/5 & -1/5 & 2/5 & 0\\ 0 & 0 & -66/5 & -12/5 & -1/5 & 1\end{array}\right] \rightarrow L_3 = (-\frac{5}{66})L_3$$

$$\left[\begin{array}{cccccc}1 & 0 & 19/5 & 3/5 & -1/5 & 0\\ 0 & 1 & -3/5 & -1/5 & 2/5 & 0\\ 0 & 0 & 1 & 2/11 & 1/66 & -5/66\end{array}\right] \rightarrow \begin{array}{l} L_1 = L_1 + (-\frac{19}{5})L_3 \\ L_2 = L_2 + \frac{3}{5}L_3 \end{array}$$

$$\left[\begin{array}{cccccc}1 & 0 & 0 & -1/11 & -17/66 & 19/66\\ 0 & 1 & 0 & -1/11 & 27/66 & -1/22\\ 0 & 0 & 1 & 2/11 & 1/66 & -5/66\end{array}\right] = \left[I_3 \mid A^{-1}\right]$$

Observe que a matriz A^{-1}

$$A^{-1} = \begin{bmatrix} -1/11 & -17/66 & 19/66\\ -1/11 & 27/66 & -1/22\\ 2/11 & 1/66 & -5/66\end{bmatrix}$$

será utilizada para determinar a solução do sistema para cada um dos vetores independentes.

Chamando $B_1 = \begin{bmatrix}16\\ -5\\ 11\end{bmatrix}$ e $B_2 = \begin{bmatrix}3\\ 5\\ -5\end{bmatrix}$

Logo:

$$\begin{array}{ccccc} A^{-1} & \times & B_1 & = & X_1 \\ \begin{bmatrix} -1/11 & -17/66 & 19/66\\ -1/11 & 27/66 & -1/22\\ 2/11 & 1/66 & -5/66\end{bmatrix} & \times & \begin{bmatrix}16\\ -5\\ 11\end{bmatrix} & = & \begin{bmatrix}3\\ -4\\ 2\end{bmatrix}\end{array}$$

$$
\begin{array}{ccccc}
A^{-1} & \times & B_2 & = & X_2 \\
\begin{bmatrix} -1/11 & -17/66 & 19/66 \\ -1/11 & 27/66 & -1/22 \\ 2/11 & 1/66 & -5/66 \end{bmatrix} & \times & \begin{bmatrix} 3 \\ 5 \\ -5 \end{bmatrix} & = & \begin{bmatrix} -3 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix}
\end{array}
$$

Portanto, para B_1, a solução é (3, –4, 2) e, para B_2, a solução é (–3, 2, 1).

Atividades de autoavaliação

Use folhas adicionais para os cálculos.

1. Determine quais das equações abaixo são lineares, justifique e indique as suas variáveis.

   a) $x_1 = -5x_2 + 4x_3 + x_4 = 9$

   b) $\text{sen}\, x - 2y + 4z = 0$

   c) $x - \sqrt{y} = 5$

   d) $x - 3y + z - 2t + 5 = 0$

2. Encontre uma solução para a equação linear $3x - 2y + z = 2$.

3. Determine o valor de m para que (1, 0, 2) seja solução da equação $2x + 3y + mz = 1$.

4. Escreva a matriz aumentada de cada um dos seguintes sistemas de equações lineares.

a) $\begin{cases} 3x_1 - 2x_2 = -1 \\ 5x_1 + x_2 = 7 \\ 4x_1 - x_2 = 2 \end{cases}$

b) $\begin{cases} x_1 + 3x_2 - x_3 = 3 \\ 2x_1 + x_2 + 3x_3 = 11 \\ 4x_1 + 3x_2 + 2x_3 = 9 \end{cases}$

5. Escreva o sistema de equações lineares que correspondem às seguintes matrizes aumentadas:

a) $\begin{bmatrix} 2 & 0 & 2 & 1 \\ 3 & -1 & 4 & 7 \\ 6 & 1 & -1 & 0 \end{bmatrix}$

b) $\begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 & -1 & 1 & 1 \\ 0 & 3 & 1 & 0 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 7 & 0 & 1 \end{bmatrix}$

6. Resolva os seguintes sistemas:

a) $\begin{cases} x_1 + 2x_2 - 4x_3 = 4 \\ x_2 + x_3 = 3 \\ 5x_3 = 5 \end{cases}$

c) $\begin{cases} x_1 + 2x_2 - 3x_3 = 1 \\ x_2 - 2x_3 = 2 \\ 2x_2 - 4x_3 = 4 \end{cases}$

b) $\begin{cases} 4x_1 + x_2 - 3x_3 + 2x_4 = 5 \\ x_3 - 4x_4 = 2 \end{cases}$

7. Verifique se os sistemas S1 e S2 são equivalentes:

$S1 = \begin{cases} 3x_1 + 6x_2 = 42 \\ 2x_1 - 4x_2 = 12 \end{cases}$ $\quad S2 = \begin{cases} x_1 + 2x_2 = 14 \\ x_1 - 2x_2 = 6 \end{cases}$

8. Calcule o valor de *a* e *b* sabendo-se que os sistemas S1 e S2 são equivalentes:

$S1 = \begin{cases} ax_1 + x_2 = 3a \\ x_1 - 2bx_2 = 5a \end{cases}$ $\quad S2 = \begin{cases} 5x_1 - 3x_2 = -1 \\ x_1 + 2x_2 = 5 \end{cases}$

9. Identifique quais das matrizes abaixo estão na forma escalonada reduzida por linhas. Justifique.

a) $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$ $\quad$ b) $\begin{bmatrix} 1 & 5 & 0 & 3 & 0 \\ 1 & 0 & -1 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$ $\quad$ c) $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 & -3 \\ 0 & 1 & 1 & 2 \end{bmatrix}$

10. Resolva os sistemas seguintes pelo método de eliminação de Gauss.

a) $\begin{cases} x_1 - 2x_2 + 4x_3 = 2 \\ 2x_1 - 3x_2 + 5x_3 = 3 \\ 3x_1 - 4x_2 + 6x_3 = 7 \end{cases}$

b) $\begin{cases} x_1 + x_2 + 2x_3 = 8 \\ -x_1 - 2x_2 + 3x_3 = 1 \\ 3x_1 - 7x_2 + 4x_3 = 10 \end{cases}$

c) $\begin{cases} x_1 - 3x_2 - 2x_3 + 4x_4 = 5 \\ 3x_1 - 8x_2 - 3x_3 + 8x_4 = 18 \\ 2x_1 - 3x_2 + 5x_3 - 4x_4 = 19 \end{cases}$

d) $\begin{cases} x_1 - x_2 + 2x_3 - x_4 = 4 \\ 2x_1 + x_2 + x_3 - x_4 = 1 \\ -x_1 + 2x_2 - 4x_3 + x_4 = -7 \\ 3x_1 \qquad\qquad - 2x_4 = -1 \end{cases}$

11. Resolva os sistemas do exercício 10 pelo método de Gauss-Jordan.

12. Resolva os sistemas homogêneos a seguir:

a) $\begin{cases} 2x_1 - x_2 - 3x_3 = 0 \\ -x_1 + 2x_2 \qquad = 0 \\ x_2 + x_3 = 0 \end{cases}$

b) $\begin{cases} 2x_1 + 4x_2 - 5x_3 + 3x_4 = 0 \\ 3x_1 + 6x_2 - 7x_3 + 4x_4 = 0 \\ 5x_1 + 10x_2 - 11x_3 + 6x_4 = 0 \end{cases}$

13. Dado o par de matrizes a seguir, encontre uma matriz elementar M tal que MA = B.

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 3 \\ -2 & 4 & 5 \\ 3 & 1 & 4 \end{bmatrix} \quad \text{e} \quad B = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 3 & 1 & 4 \\ -2 & 4 & 5 \end{bmatrix}$$

14. Dado o sistema: $\begin{cases} ax + by = 1 \\ cx + dy = 0 \end{cases}$, mostre que:

I. Se $ad - bc \neq 0$, o sistema tem a solução única

$$x = \frac{d}{(ad - bc)},\ y = -\frac{c}{(ad - bc)};$$

II. Se $ad - bc = 0$, $c \neq 0$ ou $d \neq 0$, o sistema não tem solução.

15. Utilize o determinante de cada matriz dada para verificar se ela é invertível:

a) $\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -3 \end{bmatrix}$ b) $\begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 3 & 7 \end{bmatrix}$ c) $\begin{bmatrix} 1 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & -2 & 3 \end{bmatrix}$

16. Determine todos os valores de a e b para que a matriz abaixo seja invertível.

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & b - a + 3 \end{bmatrix}$$

17. Determine a matriz inversa, pelo método prático de escalonamento, de cada uma das matrizes dadas.

a) $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & -1 & 0 \\ 1 & -1 & 1 \end{bmatrix}$ c) $C = \begin{bmatrix} 3 & -3 & -3 & 2 \\ -5 & 6 & 2 & -4 \\ 4 & -5 & -4 & 3 \\ 1 & -1 & -1 & 1 \end{bmatrix}$

b) $B = \begin{bmatrix} 3 & 4 & -1 \\ 1 & 0 & 3 \\ 2 & 5 & -4 \end{bmatrix}$

18. Resolva os seguintes sistemas pelo método da matriz inversa:

$$S1 = \begin{cases} 2x + y - z = a \\ 5x + 2y - 3z = b \\ y + 2z = c \end{cases}$$

para:

a) ($a = 1$, $b = 2$, $c = 3$)
b) ($a = 1$, $b = 0$, $c = -8$)

$$S2 = \begin{cases} x + 2y - z = 1 \\ y - 3z + w = -1 \\ x + 3y + z - 2w = 2 \\ x + 4y - 2z + 4w = 0 \end{cases}$$

Respostas e comentários das atividades de auto-avaliação

Unidade 1

1. Determine quais das equações abaixo são lineares, justifique e indique as suas variáveis.

a) $x_1 = -5x_2 + 4x_3 + x_4 = 9$

b) $\text{sen}\, x - 2y + 4z = 0$

c) $x - \sqrt{y} = 5$

d) $x - 3y + z - 2t + 5 = 0$

Solução

a) Sim, pois está na forma padrão de equação linear, variáveis: x_1, x_2, x_3 e x_4.

b) Não, pois apresenta o termo sen x.

c) Não, pois apresenta o termo $\sqrt{y}$.

d) Sim, variáveis x, y, z, t.

2. Encontre uma solução para a equação linear $3x - 2y + z = 2$.

Solução

Fazendo $x = 0$, $y = 0 \Rightarrow 3{\cdot}0 - 2{\cdot}0 + z \Rightarrow z = 2$ teremos a solução (0, 0, 2).

Assim, a equação possui infinitas soluções, pois apresenta duas variáveis livres. Basta admitir quaisquer valores para essas duas variáveis para determinar novas soluções. Veja algumas: (0, 1, 4), (1, 1, 1), (1, 0, –1), (2, 2, 0).

3. Determine o valor de m para que (1, 0, 2) seja solução da equação $2x + 3y + mz = 1$.

Solução

$$2\cdot 1 + 3\cdot 0 + 2m = 1 \Rightarrow m = -\frac{1}{2}$$

4. Escreva a matriz aumentada de cada um dos seguintes sistemas de equações lineares.

a) $\begin{cases} 3x_1 - 2x_2 = -1 \\ 5x_1 + x_2 = 7 \\ 4x_1 - x_2 = 2 \end{cases}$ b) $\begin{cases} x_1 + 3x_2 - x_3 = 3 \\ 2x_1 + x_2 + 3x_3 = 11 \\ 4x_1 + 3x_2 + 2x_3 = 9 \end{cases}$

Solução

a) $\begin{bmatrix} 3 & -2 & -1 \\ 5 & 1 & 7 \\ 4 & -1 & 2 \end{bmatrix}$ b) $\begin{bmatrix} 1 & 3 & -1 & 3 \\ 2 & 1 & 3 & 11 \\ 4 & 3 & 2 & 9 \end{bmatrix}$

5. Escreva o sistema de equações lineares que correspondem às seguintes matrizes aumentadas:

a) $\begin{bmatrix} 2 & 0 & 2 & 1 \\ 3 & -1 & 4 & 7 \\ 6 & 1 & -1 & 0 \end{bmatrix}$ b) $\begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 & -1 & 1 & 1 \\ 0 & 3 & 1 & 0 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 7 & 0 & 1 \end{bmatrix}$

Solução

a) Admitindo como variáveis x, y, z, o sistema é

$$\begin{cases} 2x + 2z = 1 \\ 3x - y + 4z = 7 \\ 6x + y - z = 0 \end{cases}$$

Mas se admitirmos as variáveis x_1, x_2, x_3,

$$\begin{cases} 2x_1 + 2x_3 = 1 \\ 3x_1 - x_2 + 4x_3 = 7 \\ 6x_1 + x_2 - x_3 = 0 \end{cases}$$

b) Admitido as variáveis x_1, x_2, x_3, x_4, x_5,

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 - x_4 + x_5 = 1 \\ 3x_2 + x_3 - x_5 = 2 \\ x_3 + 7x_4 = 1 \end{cases}$$

6. Resolva os seguintes sistemas:

a) $\begin{cases} x_1 + 2x_2 - 4x_3 = 4 \\ x_2 + x_3 = 3 \\ 5x_3 = 5 \end{cases}$

c) $\begin{cases} x_1 + 2x_2 - 3x_3 = 1 \\ x_2 - 2x_3 = 2 \\ 2x_2 - 4x_3 = 4 \end{cases}$

b) $\begin{cases} 4x_1 + x_2 - 3x_3 + 2x_4 = 5 \\ x_3 - 4x_4 = 2 \end{cases}$

Solução

a) Como o sistema está na forma triangular, podemos encontrar a solução por retrossubstituição, começando da terceira equação:

$$5x_3 = 5 \Rightarrow x_3 = 1$$

Substituindo na segunda equação:

$$x_2 + x_3 = 3 \Rightarrow x_2 + 1 = 3 \Rightarrow x_2 = 2$$

Substituindo na primeira equação:

$$x_1 + 2x_2 - 4x_3 = 4 \Rightarrow x_1 + 2{\cdot}2 - 4{\cdot}1 \Rightarrow x_1 = 4$$

Portanto, a solução é (4, 2, 1).

b) Partindo da segunda equação:

$$x_3 - 4x_4 = 2 \Rightarrow x_3 = 2 + 4x_4$$

Substituindo na primeira equação:

$$4x_1 + x_2 - 3(2 + 4x_4) = 5 \Rightarrow x_2 = 11 + 10x_4 - 4x_1$$

Observe que temos duas variáveis livres; no caso, escolhemos x_4, x_1 e, assim, o sistema apresenta infinitas soluções, que podem ser representadas por:

$$(x_1, 11 + 10x_4 - 4x_1, 2 + 4x_4, x_4)$$

c) Começando da terceira equação:

$$2x_2 - 4x_3 = 4 \Rightarrow x_2 = 2 + 2x_3$$

Substituindo na segunda equação:

$$2 + 2x_3 - 2x_3 = 2 \Rightarrow 0x_3 = 0,$$

equação degenerada com termo independente igual a zero. Nesse caso, x_3 admite qualquer valor. Ou seja, o sistema possui infinitas soluções, que podem ser escritas em função de x_3.

Substituindo na primeira e equação:

$$x_1 + 2x_2 - 3x_3 = 1 \Rightarrow x_1 = 1 - 2x_2 + 3x_3 \Rightarrow x_1 = 1 - 2(2 + 2x_3) + 3x_3$$
$$\Rightarrow x_1 = -3 - x_3$$

Portanto, a solução em função de x_3 é $(-3, - x_3, 2 + 2x_3, x_3)$.

7. Verifique se os sistemas S1 e S2 são equivalentes:

$$S1 = \begin{cases} 3x_1 + 6x_2 = 42 \\ 2x_1 - 4x_2 = 12 \end{cases} \qquad S2 = \begin{cases} x_1 + 2x_2 = 14 \\ x_1 - 2x_2 = 6 \end{cases}$$

Solução

Resolvendo o primeiro sistema:

Solução de S1: (10, 2), substituindo no sistema S2: $\begin{cases} 10 + 2 \cdot 2 = 14 \\ 10 - 2 \cdot 2 = 6 \end{cases}$

Logo os sistemas são equivalentes.

8. Calcule o valor de *a* e *b* sabendo-se que os sistemas S1 e S2 são equivalentes:

$$S1 = \begin{cases} ax_1 + x_2 = 3a \\ x_1 - 2bx_2 = 5a \end{cases} \qquad S2 = \begin{cases} 5x_1 - 3x_2 = -1 \\ x_1 + 2x_2 = 5 \end{cases}$$

Solução

Como as incógnitas *a* e *b* estão no primeiro sistema, resolvemos inicialmente o segundo: Solução (1, 2), substituindo em S1:

$$\begin{cases} a \cdot 1 + 2 = 3 \cdot a \\ 1 - 2 \cdot b \cdot 2 = 5 \cdot a \end{cases}$$

Logo: $a = 1$ e $b = -1$.

9. Identifique quais das matrizes abaixo estão na forma escalonada reduzida por linhas. Justifique.

a) $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$ b) $\begin{bmatrix} 1 & 5 & 0 & 3 & 0 \\ 1 & 0 & -1 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$ c) $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 & -3 \\ 0 & 1 & 1 & 2 \end{bmatrix}$

Solução

a) Sim

b) Não

c) Sim

10. Resolva os sistemas seguintes pelo método de eliminação de Gauss.

a) $\begin{cases} x_1 - 2x_2 + 4x_3 = 2 \\ 2x_1 - 3x_2 + 5x_3 = 3 \\ 3x_1 - 4x_2 + 6x_3 = 7 \end{cases}$

c) $\begin{cases} x_1 - 3x_2 - 2x_3 + 4x_4 = 5 \\ 3x_1 - 8x_2 - 3x_3 + 8x_4 = 18 \\ 2x_1 - 3x_2 + 5x_3 - 4x_4 = 19 \end{cases}$

b) $\begin{cases} x_1 + x_2 + 2x_3 = 8 \\ -x_1 - 2x_2 + 3x_3 = 1 \\ 3x_1 - 7x_2 + 4x_3 = 10 \end{cases}$

d) $\begin{cases} x_1 - x_2 + 2x_3 - x_4 = 4 \\ 2x_1 + x_2 + x_3 - x_4 = 1 \\ -x_1 + 2x_2 - 4x_3 + x_4 = -7 \\ 3x_1 \qquad\qquad - 2x_4 = -1 \end{cases}$

Solução

a)

$$\begin{bmatrix} 1 & -2 & 4 & 2 \\ 2 & -3 & 5 & 3 \\ 3 & -4 & 6 & 7 \end{bmatrix} \to \begin{matrix} L_2 = L_2 - 2L_1 \\ L_3 = L_3 - 3L_1 \end{matrix}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & -2 & 4 & 2 \\ 0 & 1 & -3 & -1 \\ 0 & 2 & -6 & 1 \end{bmatrix} \to L_3 = L_3 - 2L_2$$

$$\begin{bmatrix} 1 & -2 & 4 & 2 \\ 0 & 1 & -3 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}$$

reescrevendo o sistema:

$$\begin{cases} 1x_1 - 2x_2 + 4x_3 = 2 \\ 0x_1 + 1x_2 - 3x_3 = -1 \\ 0x_1 + 0x_2 + 0x_3 = 3 \end{cases}$$

que apresenta uma equação degenerada com $b \neq 0$ e, portanto, o sistema é incompatível, ou seja, não possui solução.

b)

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 & 8 \\ -1 & -2 & 3 & 1 \\ 3 & -7 & 4 & 10 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{matrix} L_2 = L_2 + L_1 \\ L_3 = L_3 - 3L_1 \end{matrix}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 & 8 \\ 0 & -1 & 5 & 9 \\ 0 & -10 & -2 & -14 \end{bmatrix} \rightarrow L_2 = -L_2$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 & 8 \\ 0 & 1 & -5 & -9 \\ 0 & -10 & -2 & -14 \end{bmatrix} \rightarrow L_3 = L_3 + 10L_2$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 & 8 \\ 0 & 1 & -5 & -9 \\ 0 & 0 & -52 & -104 \end{bmatrix}$$

reescrevendo o sistema:

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + 2x_3 = 8 \\ \qquad x_2 - 5x_3 = -9 \\ \qquad\quad -52x_3 = -104 \end{cases}$$

cuja solução é (3, 1, 2).

c)

$$\begin{bmatrix} 1 & -3 & -2 & 4 & 5 \\ 3 & -8 & -3 & 8 & 18 \\ 2 & -3 & 5 & -4 & 19 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{matrix} L_2 = L_2 - 3L_1 \\ L_3 = L_3 - 2L_1 \end{matrix}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & -3 & -2 & 4 & 5 \\ 0 & 1 & 3 & -4 & 3 \\ 0 & 3 & 9 & -12 & 9 \end{bmatrix} \rightarrow L_3 = L_3 - 3L_2$$

$$\begin{bmatrix} 1 & -3 & -2 & 4 & 5 \\ 0 & 1 & 3 & -4 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

apresenta uma linha nula, pode ser eliminada do sistema. Assim:

$$\begin{cases} x_1 - 3x_2 - 2x_3 + 4x_4 = 5 \\ \qquad\quad x_2 + 3x_3 - 4x_4 = 3 \end{cases}$$

da segunda equação: $x_2 = 3 - 3x_3 + 4x_4$

Substituindo na primeira:

$$x_1 - 3(3 - 3x_3 + 4x_4) - 2x_3 + 4x_4 = 5$$

$$x_1 = 14 + 8x_4 - 7x_3$$

Duas variáveis livres, então o sistema apresenta infinitas soluções, que podem ser representadas por:

$$(14 + 8x_4 - 7x_3,\ 3 - 3x_3 + 4x_4,\ x_3,\ x_4).$$

d)

$$\begin{bmatrix} 1 & -1 & 2 & -1 & 4 \\ 2 & 1 & 1 & -1 & 1 \\ -1 & 2 & -4 & 1 & -7 \\ 3 & 0 & 0 & -2 & -1 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{matrix} L_2 = L_2 - 2L_1 \\ L_3 = L_3 + L_1 \\ L_4 = L_4 - 3L_1 \end{matrix}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & -1 & 2 & -1 & 4 \\ 0 & 3 & -3 & 1 & -7 \\ 0 & 1 & -2 & 0 & -3 \\ 0 & 3 & -6 & 1 & -13 \end{bmatrix} \rightarrow L_2 \leftrightarrow L_3$$

$$\begin{bmatrix} 1 & -1 & 2 & -1 & 4 \\ 0 & 1 & -2 & 0 & -3 \\ 0 & 3 & -3 & 1 & -7 \\ 0 & 3 & -6 & 1 & -13 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{matrix} L_3 = L_3 - 3L_2 \\ L_4 = L_4 - 3L_2 \end{matrix}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & -1 & 2 & -1 & 4 \\ 0 & 1 & -2 & 0 & -3 \\ 0 & 0 & 3 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -4 \end{bmatrix}$$

reescrevendo o sistema:

$$\begin{cases} x_1 - x_2 + 2x_3 - x_4 = 4 \\ x_2 - 2x_3 = -3 \\ 3x_3 + x_4 = 2 \\ x_4 = -4 \end{cases}$$

Cuja solução é: (–3, 1, 2, –4)

11. Resolva os sistemas do exercício 10 pelo método de Gauss-Jordan.

Solução

a) No exercício anterior, aplicamos o método de eliminação de Gauss e chegamos à seguinte matriz:

$$\begin{bmatrix} 1 & -2 & 4 & 2 \\ 0 & 1 & -3 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}$$

observe que nesse ponto já temos que o sistema é incompatível, assim não é necessário continuar o escalonamento.

b) No exercício anterior, aplicamos o método de eliminação de Gauss e chegamos à seguinte matriz:

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 & 8 \\ 0 & 1 & -5 & -9 \\ 0 & 0 & -52 & -104 \end{bmatrix}$$

Para aplicarmos o método de Gauss-Jordan, devemos continuar o processo, transformando a matriz dos coeficientes na matriz identidade, a partir dessa matriz:

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 & 8 \\ 0 & 1 & -5 & -9 \\ 0 & 0 & -52 & -104 \end{bmatrix} \to L_3 = (-\frac{1}{52})L_3$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 & 8 \\ 0 & 1 & -5 & -9 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \end{bmatrix} \to L_1 = L_1 - L_2$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 7 & 17 \\ 0 & 1 & -5 & -9 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \end{bmatrix} \to \begin{matrix} L_1 = L_1 - 7L_3 \\ L_2 = L_2 + 5L_3 \end{matrix}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \end{bmatrix}$$

reescrevendo o sistema: $\begin{cases} x_1 = 3 \\ x_2 = 1 \\ x_3 = 2 \end{cases}$ cuja solução é (3, 1, 2).

c)

$$\begin{bmatrix} 1 & -3 & -2 & 4 & 5 \\ 3 & -8 & -3 & 8 & 18 \\ 2 & -3 & 5 & -4 & 19 \end{bmatrix} \to \begin{matrix} L_2 = L_2 - 3L_1 \\ L_3 = L_3 - 2L_1 \end{matrix}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & -3 & -2 & 4 & 5 \\ 0 & 1 & 3 & -4 & 3 \\ 0 & 3 & 9 & -12 & 9 \end{bmatrix} \to L_3 = L_3 - 3L_2$$

$$\begin{bmatrix} 1 & -3 & -2 & 4 & 5 \\ 0 & 1 & 3 & -4 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \rightarrow L_1 = L_1 + 3L_2$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 7 & -8 & 14 \\ 0 & 1 & 3 & -4 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

apresenta uma linha nula que pode ser eliminada do sistema. Assim:

$$\begin{cases} x_1 + 7x_3 - 8x_4 = 14 \\ x_2 - 3x_3 - 4x_4 = 3 \end{cases}$$

da segunda equação: $x_2 = 3 + 3x_3 + 4x_4$

Substituindo na primeira: $x_1 = 14 - 7x_3 + 8x_4$

Duas variáveis livres, então o sistema apresenta infinitas soluções, que podem ser representadas por:

$(14 - 7x_3 + 8x_4 \text{ , } 3 + 3x_3 + 4x_4, \ x_3, \ x_4)$.

d) No exercício anterior chegamos à seguinte matriz triangular:

$$\begin{bmatrix} 1 & -1 & 2 & -1 & 4 \\ 0 & 1 & -2 & 0 & -3 \\ 0 & 0 & 3 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -4 \end{bmatrix} \rightarrow L_3 = \frac{1}{3}L_3$$

$$\begin{bmatrix} 1 & -1 & 2 & -1 & 4 \\ 0 & 1 & -2 & 0 & -3 \\ 0 & 0 & 1 & 1/3 & 2/3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -4 \end{bmatrix} \rightarrow L_1 = L_1 + L_2$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & -2 & 0 & -3 \\ 0 & 0 & 1 & 1/3 & 2/3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -4 \end{bmatrix} \rightarrow L_2 = L_2 + 2L_3$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 2/3 & 5/3 \\ 0 & 0 & 0 & 1/3 & 2/3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -4 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{matrix} L_1 = L_1 + L_4 \\ L_2 = L_2 - \frac{2}{3}L_4 \\ L_3 = L_3 - \frac{1}{3}L_4 \end{matrix}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & -3 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -4 \end{bmatrix}$$

Cuja solução é: (–3, 1, 2, –4)

12. Resolva os sistemas homogêneos a seguir:

a) $\begin{cases} 2x_1 - x_2 - 3x_3 = 0 \\ -x_1 + 2x_2 = 0 \\ x_2 + x_3 = 0 \end{cases}$　　b) $\begin{cases} 2x_1 + 4x_2 - 5x_3 + 3x_4 = 0 \\ 3x_1 + 6x_2 - 7x_3 + 4x_4 = 0 \\ 5x_1 + 10x_2 - 11x_3 + 6x_4 = 0 \end{cases}$

Solução

a)

$$\begin{cases} 2x_1 - x_2 - 3x_3 = 0 \\ -x_1 + 2x_2 = 0 \quad \Rightarrow \quad x_1 = 2x_2 \\ x_2 + x_3 = 0 \quad \Rightarrow \quad x_2 = -x_3 \end{cases}$$

Substituindo na primeira equação:

$$2(-2x_3) - (-x_3) - 3x_3 = 0 \Rightarrow -6x_3 = 0 \Rightarrow x_3 = 0$$

Logo: $x_1 = 0$, $x_2 = 0$, o sistema admite apenas a solução trivial.

b)

$$\begin{cases} 2x_1 + 4x_2 - 5x_3 + 3x_4 = 0 \\ 3x_1 + 6x_2 - 7x_3 + 4x_4 = 0 \\ 5x_1 + 10x_2 - 11x_3 + 6x_4 = 0 \end{cases}$$

$$\begin{bmatrix} 2 & 4 & -5 & 3 \\ 3 & 6 & -7 & 4 \\ 5 & 10 & -11 & 6 \end{bmatrix} \to L_1 = \frac{1}{2}L_1$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & -5/2 & 3/2 \\ 3 & 6 & -7 & 4 \\ 5 & 10 & -11 & 6 \end{bmatrix} \to \begin{matrix} L_2 = L_2 - 3L_1 \\ L_3 = L_3 - 5L_1 \end{matrix}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & -5/2 & 3/2 \\ 0 & 0 & 1/2 & -1/2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Reescrevendo o sistema:

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 - \frac{5}{2}x_3 + \frac{3}{2}x_4 = 0 \\ 0x_1 + 0x_2 + \frac{1}{2}x_3 - \frac{1}{2}x_4 = 0 \quad \Rightarrow \quad x_3 = x_4 \\ 0x_1 + 0x_2 + 0x_3 + 0x_4 = 0 \end{cases}$$

Substituindo x_3 na primeira equação:

$$x_1 + 2x_2 - \frac{5}{2}x_3 + \frac{3}{2}x_3 = 0 \quad \Rightarrow \quad x_3 = x_1 + 2x_2$$

Duas variáveis livres. O sistema admite outras soluções além da trivial, representadas por:

$(x_3 - 2x_2, x_2, x_3, x_3)$.

13. Dado o par de matrizes a seguir, encontre uma matriz elementar M tal que MA = B.

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 3 \\ -2 & 4 & 5 \\ 3 & 1 & 4 \end{bmatrix} \quad e \quad B = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 3 & 1 & 4 \\ -2 & 4 & 5 \end{bmatrix}$$

Solução

$$M = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

$$M \cdot A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 2 & 1 & 3 \\ -2 & 4 & 5 \\ 3 & 1 & 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 3 & 1 & 4 \\ -2 & 4 & 5 \end{bmatrix} = B$$

14. Dado o sistema: $\begin{cases} ax + by = 1 \\ cx + dy = 0 \end{cases}$, mostre que:

I. Se $ad - bc \neq 0$, o sistema tem a solução única

$$x = \frac{d}{(ad - bc)}, \; y = -\frac{c}{(ad - bc)};$$

II. Se $ad - bc = 0$, $c \neq 0$ ou $d \neq 0$, o sistema não tem solução.

Solução

$$\begin{cases} ax + by = 1 \\ cx + dy = 0 \end{cases}$$

$$\begin{bmatrix} a & b & 1 \\ c & d & 0 \end{bmatrix} \rightarrow L_2 = L_2 - \frac{c}{a}L_1 \rightarrow \begin{bmatrix} a & b & 1 \\ 0 & \dfrac{-cb + ad}{a} & -\dfrac{c}{a} \end{bmatrix}$$

Reescrevendo o sistema:

$$\begin{cases} ax + by = 1 \\ \left(\dfrac{-cb + ad}{a}\right) y = -\dfrac{c}{a} \end{cases}$$

I. Admite solução apenas quando $\dfrac{-cb+ad}{a} \neq 0 \;\Rightarrow\; ad - bc \neq 0$ e, nesse caso:

$$y = \frac{-c}{(ad - bc)} \Rightarrow x = \frac{d}{(ad - bc)}$$

II. Não admite solução se: $\dfrac{-cb+ad}{a} = 0$ e $-\dfrac{c}{a} \neq 0$, ou seja:

$ad - bc = 0$ e $c \neq 0$, $d \neq 0$.

15. Utilize o determinante de cada matriz dada para verificar se ela é invertível:

a) $\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -3 \end{bmatrix}$ b) $\begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 3 & 7 \end{bmatrix}$ c) $\begin{bmatrix} 1 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & -2 & 3 \end{bmatrix}$

Solução

a) $\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -3 \end{vmatrix} = -3 \neq 0$, logo, a matriz é invertível

b) $\begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 3 & 7 \end{vmatrix} = 14 + 3 \neq 0$, logo, a matriz é invertível

c) $\begin{vmatrix} 1 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & -2 & 3 \end{vmatrix}$ a matriz não é invertível, já que possui uma linha nula.

16. Determine todos os valores de a e b para que a matriz abaixo seja invertível.

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & b-a+3 \end{bmatrix}$$

Solução

Para que a matriz A seja invertível, $\begin{vmatrix} 2 & 0 \\ 0 & b-a+3 \end{vmatrix} \neq 0$

$$2b - 2a + 6 \neq 0 \;\Rightarrow\; b - a + 3 \neq 0 \;\Rightarrow\; b \neq a - 3$$

17. Determine a matriz inversa, pelo método prático de escalonamento, de cada uma das matrizes dadas.

a) $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & -1 & 0 \\ 1 & -1 & 1 \end{bmatrix}$

c) $C = \begin{bmatrix} 3 & -3 & -3 & 2 \\ -5 & 6 & 2 & -4 \\ 4 & -5 & -4 & 3 \\ 1 & -1 & -1 & 1 \end{bmatrix}$

b) $B = \begin{bmatrix} 3 & 4 & -1 \\ 1 & 0 & 3 \\ 2 & 5 & -4 \end{bmatrix}$

Solução

a)

$$[A \mid I_3] = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & -1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{matrix} L_2 = L_2 + L_1 \\ L_3 = L_3 - L_1 \end{matrix}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & -1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \rightarrow L_2 = -L_2$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & -1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \rightarrow L_3 = L_3 + L_2$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -2 & -1 & 1 \end{bmatrix}$$

Logo a matriz A^{-1} inversa da matriz A é:

$$A^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & -1 & 0 \\ -2 & -1 & 1 \end{bmatrix}$$

b)

$$[B \mid I_3] = \begin{bmatrix} 3 & 4 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 3 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & 5 & -4 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \rightarrow L_1 \leftrightarrow L_2$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 3 & 0 & 1 & 0 \\ 3 & 4 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 5 & -4 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{matrix} L_2 = L_2 - 3L_1 \\ L_3 = L_3 - 2L_1 \end{matrix}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 3 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 4 & -10 & 1 & -3 & 0 \\ 0 & 5 & -10 & 0 & -2 & 1 \end{bmatrix} \rightarrow L_2 = \frac{1}{4} L_2$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 3 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -10/4 & 1/4 & -3/4 & 0 \\ 0 & 5 & -10 & 0 & -2 & 1 \end{bmatrix} \rightarrow L_2 = \frac{1}{4} L_2$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 3 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -10/4 & 1/4 & -3/4 & 0 \\ 0 & 5 & -10 & 0 & -2 & 1 \end{bmatrix} \rightarrow L_3 = L_3 - 5L_2$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 3 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -10/4 & 1/4 & -3/4 & 0 \\ 0 & 0 & 10/4 & -5/4 & 7/4 & 1 \end{bmatrix} \rightarrow L_3 = \frac{4}{10} L_3$$

$$\left[\begin{array}{cccccc}1 & 0 & 3 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -10/4 & 1/4 & -3/4 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1/2 & 7/10 & 4/10\end{array}\right] \to L_3 = L_3 - 5L_2$$

$$\left[\begin{array}{cccccc}1 & 0 & 3 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -10/4 & 1/4 & -3/4 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1/2 & 7/10 & 4/10\end{array}\right] \to \begin{array}{l} L_1 = L_1 - 3L_3 \\ L_2 = L_2 + \frac{10}{4}L_3 \end{array}$$

$$\left[\begin{array}{cccccc}1 & 0 & 0 & 3/2 & -11/10 & -12/10 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -1/2 & 7/10 & 4/10\end{array}\right]$$

Logo a matriz B^{-1} inversa da matriz B é:

$$B^{-1} = \left[\begin{array}{ccc}3/2 & -11/10 & -12/10 \\ -1 & 1 & 1 \\ -1/2 & 7/10 & 4/10\end{array}\right]$$

c)

$$[C \mid I_4] = \left[\begin{array}{cccccccc}3 & -3 & -3 & 2 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ -5 & 6 & 2 & -4 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 4 & -5 & -4 & 3 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & -1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1\end{array}\right] \to L_1 \leftrightarrow L_4$$

$$\left[\begin{array}{cccccccc}1 & -1 & -1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ -5 & 6 & 2 & -4 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 4 & -5 & -4 & 3 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 3 & -3 & -3 & 2 & 1 & 0 & 0 & 0\end{array}\right] \to \begin{array}{l} L_2 = L_2 + 5L_1 \\ L_3 = L_3 - 4L_1 \\ L_4 = L_4 - 3L_1 \end{array}$$

$$\left[\begin{array}{cccccccc}1 & -1 & -1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -3 & 1 & 0 & 1 & 0 & 5 \\ 0 & -1 & 0 & -1 & 0 & 0 & 1 & -4 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 1 & 0 & 0 & -3\end{array}\right] \to \begin{array}{l} L_1 = L_1 + L_2 \\ L_3 = L_3 + L_2 \end{array}$$

$$\left[\begin{array}{cccccccc} 1 & 0 & -4 & 2 & 0 & 1 & 0 & 6 \\ 0 & 1 & -3 & 1 & 0 & 1 & 0 & 5 \\ 0 & 0 & -3 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 1 & 0 & 0 & -3 \end{array}\right] \rightarrow L_3 = -\frac{1}{3}L_3$$

$$\left[\begin{array}{cccccccc} 1 & 0 & -4 & 2 & 0 & 1 & 0 & 6 \\ 0 & 1 & -3 & 1 & 0 & 1 & 0 & 5 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & -1/3 & -1/3 & -1/3 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 1 & 0 & 0 & -3 \end{array}\right] \rightarrow \begin{array}{l} L_1 = L_1 + 4L_3 \\ L_2 = L_2 + 3L_3 \\ L_4 = -L_4 \end{array}$$

$$\left[\begin{array}{cccccccc} 1 & 0 & 0 & 2 & 0 & -1/3 & -4/3 & 14/3 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & -1 & 4 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & -1/3 & -1/3 & -1/3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & 0 & 3 \end{array}\right] \rightarrow \begin{array}{l} L_1 = L_1 - 2L_4 \\ L_2 = L_2 - L_4 \end{array}$$

$$\left[\begin{array}{cccccccc} 1 & 0 & 0 & 0 & 2 & -1/3 & -4/3 & -4/3 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & -1/3 & -1/3 & -1/3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & 0 & 3 \end{array}\right]$$

Logo a matriz C^{-1} inversa da matriz C é:

$$C^{-1} = \left[\left[\begin{array}{cccc} 2 & -1/3 & -4/3 & -4/3 \\ 1 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & -1/3 & -1/3 & -1/3 \\ -1 & 0 & 0 & 3 \end{array}\right]\right]$$

18. Resolva os seguintes sistemas pelo método da matriz inversa:

$$S1 = \begin{cases} 2x + y - z = a \\ 5x + 2y - 3z = b \\ y + 2z = c \end{cases}$$

para:

a) $(a = 1, b = 2, c = 3)$
b) $(a = 1, b = 0, c = -8)$

$$S2 = \begin{cases} x + 2y - z = 1 \\ y - 3z + w = -1 \\ x + 3y + z - 2w = 2 \\ x + 4y - 2z + 4w = 0 \end{cases}$$

Solução

Para resolver o sistema pelo método da matriz inversa, primeiro temos que determinar a matriz inversa da matriz dos coeficientes do sistema. Mas antes devemos verificar se essa matriz é invertível:

$$|S_1| = \begin{vmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 5 & 2 & -3 \\ 0 & 1 & 2 \end{vmatrix} = -1 \neq 0$$

ou seja, a matriz é invertível, então podemos resolver o sistema pelo método da matriz inversa.

$$S_1 : \begin{vmatrix} 2 & 1 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 5 & 2 & -3 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} \rightarrow L_2 = L_2 - \frac{5}{2} L_1$$

$$\begin{vmatrix} 2 & 1 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1/2 & -1/2 & -5/2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} \rightarrow L_2 = (-2) L_2$$

$$\begin{vmatrix} 2 & 0 & -2 & -4 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 5 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -5 & 2 & 1 \end{vmatrix} \rightarrow \begin{matrix} L_1 = L_1 - L_2 \\ L_3 = L_3 - L_2 \end{matrix}$$

$$\left|\begin{matrix} 1 & 0 & -1 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 5 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -5 & 2 & 1 \end{matrix}\right| \rightarrow L_1 = \frac{1}{2}L_1$$

$$\left|\begin{matrix} 1 & 0 & -1 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 5 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -5 & 2 & 1 \end{matrix}\right| \rightarrow \begin{matrix} L_1 = L_1 + L_3 \\ L_2 = L_2 - L_3 \end{matrix}$$

$$\left|\begin{matrix} 1 & 0 & 0 & -7 & 3 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 10 & -4 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & -5 & 2 & 1 \end{matrix}\right|$$

Logo a matriz B^{-1} inversa da matriz B é:

$$B^{-1} = \begin{bmatrix} -7 & 3 & 1 \\ 10 & -4 & -1 \\ -5 & 2 & 1 \end{bmatrix}$$

a) $(a = 1, b = 2, c = 3)$

$$\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -7 & 3 & 1 \\ 10 & -4 & -1 \\ -5 & 2 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ -1 \\ 2 \end{bmatrix}$$

Solução: (2, –1, 2)

b) $(a = 1, b = 0, c = -8)$

$$\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -7 & 3 & 1 \\ 10 & -4 & -1 \\ -5 & 2 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ -8 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -15 \\ 18 \\ -13 \end{bmatrix}$$

Solução: (–15, 18, –13)

$$
S2=\begin{cases} x+2y-z \qquad\quad =1 \\ \qquad y-3z+w=-1 \\ x+3y+z-2w=2 \\ x+4y-2z+4w=0 \end{cases}
$$

$$
\begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -3 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 3 & 1 & -2 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 4 & -2 & 4 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{array}{l} L_3=L_3-L_1 \\ L_4=L_4-L_1 \end{array}
$$

$$
\begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -3 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & -2 & -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & -1 & 4 & -1 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{array}{l} L_1=L_1-2L_2 \\ L_3=L_3-L_2 \\ L_4=L_4-2L_2 \end{array}
$$

$$
\begin{bmatrix} 1 & 0 & 5 & -2 & 1 & -2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -3 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 5 & -3 & -1 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 5 & 2 & -1 & -2 & 0 & 1 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{array}{l} L_1=L_1-L_3 \\ L_2=L_2+\frac{3}{5}L_3 \\ L_4=L_4-L_3 \end{array}
$$

$$
\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 & 2 & -1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -4/5 & -3/5 & 2/5 & 3/5 & 0 \\ 0 & 0 & 5 & -3 & -1 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 5 & 0 & -1 & -1 & 1 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{array}{l} L_3=\frac{1}{5}L_3 \\ L_4=\frac{1}{5}L_4 \end{array}
$$

$$
\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 & 2 & -1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -4/5 & -3/5 & 2/5 & 3/5 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -3/5 & -1/5 & -1/5 & 1/5 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & -1/5 & -1/5 & 1/5 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{array}{l} L_1=L_1-L_4 \\ L_2=L_2+\frac{4}{5}L_4 \\ L_3=L_3+\frac{3}{5}L_4 \end{array}
$$

$$
\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 2 & -4/5 & -4/5 & -1/5 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & -3/5 & 6/25 & 11/25 & 4/25 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -1/5 & -8/25 & 2/25 & 3/25 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & -1/5 & -1/5 & 1/5 \end{bmatrix}
$$

$$\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \\ w \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 2 & -4/5 & -4/5 & -1/5 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & -3/5 & 6/25 & 11/25 & 4/25 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -1/5 & -8/25 & 2/25 & 3/25 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & -1/5 & -1/5 & 1/5 \end{bmatrix} . \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 6/5 \\ 1/25 \\ 7/25 \\ -1/5 \end{bmatrix}$$

Solução: $(\frac{6}{5}, \frac{1}{25}, \frac{7}{25}, -\frac{1}{5})$