Integração envolvendo as Funções Trigonométricas

1- Integrais de Produtos de Seno e Cosseno

$$\int \operatorname{sen}(ax)\cos(bx)\,dx\,,\ \int \cos(ax)\cos(bx)\,dx \ \text{ e } \ \int \operatorname{sen}(ax)\operatorname{sen}(bx)\,dx\,, \text{onde } a, b \text{ são inteiros positivos}$$

Usamos as seguintes identidades trigonométricas:

$$\operatorname{sen} a \cos b = \frac{1}{2}\left[\operatorname{sen}(a+b) + \operatorname{sen}(a-b)\right]$$

$$\cos a \cos b = \frac{1}{2}\left[\cos(a+b) + \cos(a-b)\right]$$

$$\operatorname{sen} a \operatorname{sen} b = \frac{1}{2}\left[\cos(a-b) - \cos(a+b)\right]$$

Exemplo: Calcule a integral $\int sen\, 2x \cos 7x\, dx$.

2- Integrais de Potências de Seno e Cosseno

$$\int \text{sen}^n x\, dx, \int \cos^n x\, dx, \text{onde } n \text{ é um inteiro positivo}$$

Vamos aplicar as seguintes regras:

$$\int \text{sen}^n x\, dx$$

- Se n for ímpar: use $sen^2 x = 1 - \cos^2 x$ e faça $u = \cos x$
- Se n for par: use $sen^2 x = \frac{1}{2} - \frac{\cos 2x}{2}$

$$\int \cos^n x\, dx$$

- Se n for ímpar: use $\cos^2 x = 1 - \text{sen}^2 x$ e faça $u = \text{sen}\, x$
- Se n for par: use $\cos^2 x = \frac{1}{2} + \frac{\cos 2x}{2}$

Exemplo: Calcule as integrais:

(a) $\int \cos^3 x\, dx$ (b) $\int \text{sen}^4(2x)\, dx$ (c) $\int \text{sen}^5 x\, dx$

Observação: Para o cálculo de $\int \operatorname{sen}^n x\,dx$ e $\int \cos^n x\,dx$, com $n \geq 5$, utilizamos as **Fórmulas de Recorrência:**

$$\boxed{\int \operatorname{sen}^n x dx = -\frac{1}{n}\operatorname{sen}^{n-1} x \cos x + \frac{n-1}{n}\int \operatorname{sen}^{n-2} x dx.}$$

$$\boxed{\int \cos^n x dx = \frac{1}{n}\cos^{n-1} x \operatorname{sen} x + \frac{n-1}{n}\int \cos^{n-2} x dx.}$$

Exemplo: Calcule a integral $\int \operatorname{sen}^5 x\,dx$.

3- Integrais de Produtos de Potências de Seno e Cosseno

$$\boxed{\int \operatorname{sen}^m x \cos^n x \; dx \text{, onde } m \text{ e } n \text{ são inteiros positivos}}$$

Vamos aplicar as seguintes regras:

- Se m for ímpar: use $sen^2 x = 1 - \cos^2 x$ e faça $u = \cos x$
- Se n for ímpar: use $\cos^2 x = 1 - \operatorname{sen}^2 x$ e faça $u = \operatorname{sen} x$
- Se m e n forem pares simultaneamente: use $sen^2 x = \frac{1}{2} - \frac{\cos 2x}{2}$ e $\cos^2 x = \frac{1}{2} + \frac{\cos 2x}{2}$

Exemplo: Calcule as integrais:

(a) $\int sen^3 x \cos^2 x \, dx$

(b) $\int \operatorname{sen}^2 x \cos^5 x \, dx$

(c) $\int \operatorname{sen}^2 x \cos^4 x \, dx$

4- Integrais de Potências de Secante, Tangente, Cossecante e Cotangente

$\int sec^n\, x\, dx\,, \int tg^n\, x\, dx\,, \int cossec^n\, x\, dx \int cotg^n\, x\, dx$, onde n é um inteiro positivo

Nessas integrais, usamos as identidades:

- $1 + \mathrm{tg}^2\, x = \sec^2 x$
- $1 + cotg^2\, x = cossec^2\, x$
- Para $\sec x$ e $cossec\ x$ com n ímpar: aplicar integração por partes

Lembre que:

- $(\mathrm{tg}\, x)' = \sec^2 x$
- $(cotg\ x)' = -cossec^2 x$
- $(\sec x)' = \sec x\, \mathrm{tg}\, x$
- $(cossec\ x)' = -cossec\ x\ cotg\ x$
- $\int tg\ x\ dx = -\ln|\cos x| + k$
- $\int cotg\ x\ dx = \ln|sen\ x| + k$
- $\int \sec x\ dx = \ln|\sec x + tg\ x| + k$
- $\int cossec\ x\ dx = \ln|cossec\ x - cotg\ x| + k$

Exemplo: Calcule as integrais:

(a) $\displaystyle\int \sec^6 x\, dx$ (b) $\displaystyle\int \mathrm{tg}^3(3x)\, dx$ (c) $\displaystyle\int \mathrm{cotg}^4(2x)\, dx$ (d) $\displaystyle\int \mathrm{cossec}^n\, x\, dx$

5- Integrais de Produtos de Potências de Tangente e Secante

$$\int tg^m\, x \sec^n x \; dx \text{, onde } m \text{ e } n \text{ são números inteiros positivos}$$

Vamos aplicar as seguintes regras:

- Se n é par:
  - Separe um fator de $\sec^2 x$
  - Use $\sec^2 x = 1 + \operatorname{tg}^2 x$
  - Faça $u = \operatorname{tg} x$
- Se m é ímpar:
  - Separe um fator de $\sec x \operatorname{tg} x$
  - Use $\operatorname{tg}^2 x = \sec^2 x - 1$
  - Faça $u = \sec x$
- Se n é ímpar e m par:
  - Use $\operatorname{tg}^2 x = \sec^2 x - 1$ para obter uma integral com potências de secante

Exemplo: Calcule as integrais:

(a) $\displaystyle\int \operatorname{tg}^3 x sec^4 x \, dx$ (b) $\displaystyle\int \operatorname{tg}^7 x \sec^5 x \, dx$ (c) $\displaystyle\int \operatorname{tg}^2 x \sec^3 x \, dx$

6- Integrais de Produtos de Potências de Cotangente e Cossecante

$$\int cotg^m\, x\, cossec^n\, x\ \ dx\text{, onde } m \text{ e } n \text{ são números inteiros positivos}$$

Vamos aplicar as seguintes regras:

- Se n é par:
  - Separe um fator de $\operatorname{cossec}^2 x$
  - Use $\operatorname{cossec}^2 x = 1 + \operatorname{cotg}^2 x$
  - Faça $u = \operatorname{cotg} x$
- Se m é ímpar:
  - Separe um fator de $\operatorname{cossec} x \operatorname{cotg} x$
  - Use $\operatorname{cotg}^2 x = \operatorname{cossec}^2 x - 1$
  - Faça $u = \operatorname{cossec} x$
- Se n é ímpar e m par:
  - Use $\operatorname{cotg}^2 x = \operatorname{cossec}^2 x - 1$ para obter uma integral com potências de cossecante

Exemplo: Calcule as integrais:

(a) $\displaystyle\int cotg^2\, x\, cossec^4\, xdx$ (b) $\displaystyle\int cotg\, x\, cossec^3\, xdx$

Observação: Para o cálculo da integral de potências de secante, tangente, cossecante e cotangente, com $n \geq 2$, pode-se utilizar as seguintes **Fórmulas de Recorrência:**

$$\int \sec^n x\,dx = \frac{\sec^{n-2} x \operatorname{tg} x}{n-1} + \frac{n-2}{n-1}\int \sec^{n-2} x\,dx$$

$$\int \operatorname{tg}^n x\,dx = \frac{\operatorname{tg}^{n-1} x}{n-1} - \int \operatorname{tg}^{n-2} x\,dx$$

$$\int \operatorname{cosec}^n x\,dx = -\frac{\operatorname{cosec}^{n-2} x \operatorname{cotg} x}{n-1} + \frac{n-2}{n-1}\int \operatorname{cosec}^{n-2} x\,dx$$

$$\int \operatorname{cotg}^n x\,dx = -\frac{\operatorname{cotg}^{n-1} x}{n-1} - \int \operatorname{cotg}^{n-2} x\,dx$$

Integração de funções racionais de seno e cosseno: substituição universal: $u = tg\frac{x}{2}$

Quando o integrando é uma expressão racional envolvendo $sen\,x$ e $\cos x$, a substituição $u = \operatorname{tg}\frac{x}{2}$, com $x \in (-\pi, \pi)$, fornece

$$\boxed{sen\,x = \frac{2u}{1+u^2}} \qquad \boxed{\cos x = \frac{1-u^2}{1+u^2}} \qquad \boxed{dx = \frac{2}{1+u^2}du}$$

e transforma o integrando em uma função racional de u.

Demonstração: Temos que

$$sen\,x = 2sen\frac{x}{2}\cos\frac{x}{2} = 2sen\frac{x}{2}\cos\frac{x}{2}\,\frac{\cos\frac{x}{2}}{\cos\frac{x}{2}} = 2\operatorname{tg}\frac{x}{2}\cos^2\frac{x}{2} = 2\operatorname{tg}\frac{x}{2}\,\frac{1}{\sec^2\frac{x}{2}} = \frac{2\operatorname{tg}\frac{x}{2}}{1+\operatorname{tg}^2\frac{x}{2}} = \frac{2u}{1+u^2}$$

$$\cos x = \cos^2\frac{x}{2} - sen^2\frac{x}{2} = 1 - sen^2\frac{x}{2} - sen^2\frac{x}{2} = 1 - 2sen^2\frac{x}{2} = \frac{\cos^2\frac{x}{2}}{\cos^2\frac{x}{2}}\left(1 - 2sen^2\frac{x}{2}\right) = \cos^2\frac{x}{2}\left(\frac{1}{\cos^2\frac{x}{2}} - \frac{2sen^2\frac{x}{2}}{\cos^2\frac{x}{2}}\right)$$

$$= \cos^2\frac{x}{2}\left(\sec^2\frac{x}{2} - 2\operatorname{tg}^2\frac{x}{2}\right) = \cos^2\frac{x}{2}\left(1 + \operatorname{tg}^2\frac{x}{2} - 2\operatorname{tg}^2\frac{x}{2}\right) = \frac{1}{\sec^2\frac{x}{2}}\left(1 - \operatorname{tg}^2\frac{x}{2}\right) = \frac{1-\operatorname{tg}^2\frac{x}{2}}{1+\operatorname{tg}^2\frac{x}{2}} = \frac{1-u^2}{1+u^2}$$

De $u = \operatorname{tg}\frac{x}{2}$, temos que $\frac{x}{2} = \operatorname{arctg} u \Rightarrow x = 2 \operatorname{arctg} u$. Derivando, obtemos:

$$\frac{dx}{du} = 2\frac{1}{1+u^2} \Rightarrow dx = \frac{2}{1+u^2}\, du$$

Exemplo: Calcule as integrais:

(a) $\displaystyle\int \frac{1 + sen\, x}{1 + \cos x} dx$

(b) $\displaystyle\int \frac{\operatorname{tg} x}{1 + sen\, x} dx$