

3.7 Exercícios

1 - Seja $f(x) = \frac{4x^2 - 11x + 6}{x - 2}$. Para cada ε dado, determine δ tal que $|f(x) - 5| < \varepsilon$ sempre que $0 < |x - 2| < \delta$.

- a) $\varepsilon = 4$ b) $\varepsilon = 2$
c) $\varepsilon = 1$ d) $\varepsilon = 0,08$

Sugestão: Simplificar a fração que define f por $x - 2$, para $x \neq 2$.

2 - Calcule os limites.

- a) $\lim_{x \rightarrow -1} (3x^2 - 7x - 4)$ b) $\lim_{x \rightarrow 6} \frac{x^2 - 12x + 36}{x - 5}$
c) $\lim_{x \rightarrow -2} \sqrt{5x^2 + 3x + 2}$ d) $\lim_{x \rightarrow -3} \log(x^4 - 3x + 10)$
e) $\lim_{x \rightarrow \pi} \cos x \cdot \sin(x + \pi)$ f) $\lim_{x \rightarrow -\pi} e^{\sin x}$

3 - Para cada função a seguir, calcule $\lim_{x \rightarrow a^+} f(x)$, $\lim_{x \rightarrow a^-} f(x)$ e $\lim_{x \rightarrow a} f(x)$ caso este exista.

- a) $f(x) = \begin{cases} 3 - x^2 & \text{se } x < 0 \\ 2x & \text{se } x \geq 0 \end{cases}$ b) $f(x) = \frac{x^2 - 3x - 4}{x - 4}$
 $a=0$ $a=4$
c) $f(x) = \begin{cases} x^2 - 4x - 1 & \text{se } x < 2 \\ 2 - x & \text{se } x > 2 \end{cases}$ d) $f(x) = \begin{cases} 2x + 3 & \text{se } x < -1 \\ -x & \text{se } x > -1 \\ 0 & \text{se } x = -1 \end{cases}$
 $a=2$ $a=-1$

4 - Calcule os limites.

- a) $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2 + 5x - 14}{x - 2}$ b) $\lim_{x \rightarrow 3} \frac{x^2 - 6x + 9}{x - 3}$
c) $\lim_{x \rightarrow -2} \frac{2x^2 + x - 6}{x + 2}$ d) $\lim_{x \rightarrow -3} \frac{5x^3 + 23x^2 + 24x}{x^2 - x - 12}$
e) $\lim_{x \rightarrow -1} \frac{x^3 + 65x^2 + 63x - 1}{x + 1}$ f) $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^4 - 3x^2 - 4}{x - 2}$
g) $\lim_{x \rightarrow 4} \frac{2x^3 - 13x^2 + 17x + 12}{x^2 - 6x + 8}$ h) $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^5 - x^3 - 5x^2 + 5}{x^2 + x - 2}$
i) $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{(a+h)^2 - a^2}{h}$ j) $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{(a+h)^3 - a^3}{h}$
k) $\lim_{t \rightarrow 1} \frac{t^4 - 1}{t - 1}$ l) $\lim_{t \rightarrow 1} \frac{t^5 - 1}{t - 1}$
m) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{16 - x} - 4}{x}$ n) $\lim_{x \rightarrow 27} \frac{\sqrt[3]{x} - 3}{x - 27}$
o) $\lim_{x \rightarrow 9} \frac{x^2 - 9x}{\sqrt{x} - 3}$ p) $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt[3]{x} - 1}{\sqrt{x} - 1}$
q) $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt[4]{x^3} - 1}{\sqrt[6]{x} - 1}$ r) $\lim_{x \rightarrow 32} \frac{\sqrt[5]{x} - 2}{x - 32}$
s) $\lim_{x \rightarrow 5} \frac{\sqrt{2(x-3)} - 2}{x - 5}$ t) $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{h}{a - \sqrt{a^2 + h}}$, ($a > 0$)
u) $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{\sqrt{a+h} - \sqrt{a}}{h}$ ($a > 0$) v) $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{\sqrt[3]{a+h} - \sqrt[3]{a}}{h}$

5 - Seja $f(x) = \frac{x+1}{x}$.

- a) Encontre k tal que $|f(x) - 1| < 0,001$ para todo $x > k$.
b) Dado $\varepsilon > 0$ encontre $k < 0$ tal que $x < k \Rightarrow |f(x) - 1| < \varepsilon$.
c) Encontre o maior δ tal que $-\delta < x < 0 \Rightarrow f(x) < -100$.
d) Dado $M > 0$ encontre o maior δ , tal que $0 < x < \delta \Rightarrow f(x) > M$.

6 - Calcule os limites.

$$1) \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{4x^3 - 5x^2 + x}{x^4 + 7x^2}$$

$$3) \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x^5 + \operatorname{sen} x}{20x^4 + 3x^2 + x}$$

$$5) \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{10x^2 + 5 - 3\cos x^2}{2x^2 + 3x - 4}$$

$$7) \lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{x^3 + x - 3}{x - 1}$$

$$9) \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{\sqrt{x^2 + \sqrt{x^2 + 1}}}{x}$$

$$11) \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{\sqrt{1-x} + \sqrt{1-x}}{\sqrt{1-x}}$$

$$13) \lim_{x \rightarrow 4^+} \frac{4x+4}{16-x^2}$$

$$15) \lim_{x \rightarrow 2^+} \frac{x^2 - x - 2}{x^2 - 4x + 4}$$

$$17) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x}{\operatorname{tg} x}$$

$$19) \lim_{x \rightarrow 0^+} [7x(1 + \operatorname{ctg}^2 x)]^{-1}$$

$$21) \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(2 + \frac{1}{x}\right)^x$$

$$23) \lim_{x \rightarrow 0} (1 - 2x)^{\frac{1}{x}}$$

$$25) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{7^{x-1} - \frac{1}{7}}{x}$$

$$2) \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{3x^5 - x^4 + 7x}{6x^5 + 8x^4 + 20}$$

$$4) \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{4x^5 + 12x^2 + 5x}{x^3 + 4x^2 + 2}$$

$$6) \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{x^3 + x - 3}{x - 1}$$

$$8) \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\sqrt{x^2 - \sqrt{x}}}{\sqrt{x+1}}$$

$$10) \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\sqrt{x^2 + 1}}{\sqrt{x^2 + \sqrt{x^2 + 1}}}$$

$$12) \lim_{x \rightarrow 3} \frac{x^2 + 4}{x^2 - 6x + 9}$$

$$14) \lim_{x \rightarrow 4^-} \frac{4x+4}{16-x^2}$$

$$16) \lim_{x \rightarrow 2^-} \frac{x^2 - x - 2}{x^2 - 4x + 4}$$

$$18) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos^4 x}{x^2}$$

$$20) \lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{5}{x-1}\right)^{x+7}$$

$$22) \lim_{x \rightarrow 0} (1 + kx)^{\frac{1}{x}}$$

$$24) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{5^{x+2} - 25}{10x}$$

$$26) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(ab)^x - a^x}{ax}$$

$$27) \lim_{x \rightarrow 2^-} \frac{x^2 + 3x - 7}{2 - x}$$

$$28) \lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{2}{x+1}\right)^x$$

$$29) \lim_{x \rightarrow -1} (2+x)^{\frac{1}{x+1}}$$

$$30) \lim_{x \rightarrow 0} x^2 \operatorname{ctg}^2 x$$

$$31) \lim_{x \rightarrow +\infty} (\sqrt{x^3 - 3x} - x^2)$$

$$32) \lim_{x \rightarrow +\infty} (\sqrt{x^4 - 3x} - x^2)$$

$$33) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{tg} x}{x \cdot \sec x}$$

$$34) \lim_{x \rightarrow 0} (x \cdot \sec x \cdot \operatorname{cosec} x)$$

7 - Calcule $\lim_{t \rightarrow +\infty} m(t)$ e $\lim_{t \rightarrow +\infty} l(t)$ para as funções $m(t)$ e $l(t)$ obtidas nos exercícios 7 e 8 do capítulo 2. Explique o significado desses limites.

8 - Verifique se cada função a seguir é contínua no ponto a indicado.

$$a) f(x) = \begin{cases} x+3 & \text{se } x \leq 1 \\ 4 & \text{se } x > 1 \end{cases}, \quad a=1$$

$$b) f(x) = \begin{cases} 1-x^2 & \text{se } x < 2 \\ x-5 & \text{se } x > 2 \\ 0 & \text{se } x = 2 \end{cases}, \quad a=2$$

$$c) f(x) = \begin{cases} \frac{\operatorname{sen} x}{x} & \text{se } x < 0 \\ \frac{\operatorname{tg} x}{x} & \text{se } x > 0 \\ 1 & \text{se } x = 0 \end{cases}, \quad a=0$$

$$d) f(x) = \begin{cases} x \operatorname{sen} x & \text{se } x \neq 0 \\ 0 & \text{se } x = 0 \end{cases}, \quad a=0$$

$$e) f(x) = \begin{cases} x^2 - 8 & \text{se } x < 3 \\ \frac{\sin(x-3)}{x-3} & \text{se } x > 3 \\ 1 & \text{se } x = 3 \end{cases}, \quad a=3$$

$$f) f(x) = \begin{cases} x - x^2 & \text{se } x < -2 \\ x^3 + 2 & \text{se } x > -2 \\ 3 & \text{se } x = -2 \end{cases}, \quad a=-2$$

9 - Explique por que as seguintes funções são contínuas:

$$\begin{array}{ll} a) f(x) = \ln(1 + \sin^2 x) & b) g(x) = \cos(x^3 - 2x + 7) \\ c) h(x) = \sqrt{x^2 - 7x - 4} & d) r(x) = e^{x + \cos x} \end{array}$$

10 - Mostre que existe $x \in (-1, 0)$ tal que $e^x + x = 0$.

Sugestão: Use o T.V.I..

11 - Mostre que a função $f(x) = x^3 + x^2 - 2x - 2$ possui uma raiz no intervalo $(1, 2)$.

12 - Sejam $f(x) = e^x$ e $g(x) = -x^2 + 4$. Mostre que existe $x \in (0, 2)$ tal que $f(x) = g(x)$.

Sugestão: Considere $h(x) = f(x) - g(x) = e^x + x^2 - 4$ e use o T.V.I..

13- Seja $k \in \mathbb{R}$, $k \neq 0$. Dada $f(x) = e^{kx} + x^2 - 5$, verifique se existe $x \in (0, 2)$ tal que $f(x) = 0$.

Sugestão: Analise separadamente os casos $k > 0$ e $k < 0$.

Respostas

$$1) a) 1 \quad b) \frac{1}{2} \quad c) \frac{1}{4} \quad d) 0,02$$

$$2) a) 6 \quad b) 0 \quad c) 4 \quad d) 2 \quad e) 0 \quad f) 1$$

$$3) a) 0; 3; \text{ não existe} \quad b) 5; 5; 5 \quad c) 0; -5; \text{ não existe} \quad d) 1; 1; 1$$

$$4) a) 9 \quad b) 0 \quad c) -7 \quad d) -3 \quad e) -64 \quad f) 20$$

$$g) \frac{9}{2} \quad h) -\frac{8}{3} \quad i) 2a \quad j) 3a^2 \quad k) 4 \quad l) 5$$

$$m) -\frac{1}{8} \quad n) \frac{1}{27} \quad o) 54 \quad p) \frac{2}{3} \quad q) \frac{9}{2} \quad r) \frac{1}{80}$$

$$s) \frac{1}{2} \quad t) -2a \quad u) \frac{1}{2\sqrt{a}} \quad v) \frac{1}{3\sqrt[3]{a^2}}$$

$$5) a) k=1000 \text{ ou } k>1000 \quad b) k \leq -\frac{1}{e} \quad c) \frac{1}{101} \quad d) \frac{1}{M-1}$$

$$6) 1) 0 \quad 2) \frac{1}{2} \quad 3) -\infty \quad 4) +\infty \quad 5) 5 \quad 6) -\infty \quad 7) +\infty$$

$$8) +\infty \quad 9) -1 \quad 10) 1 \quad 11) 1 \quad 12) +\infty \quad 13) -\infty \quad 14) +\infty$$

$$15) +\infty \quad 16) -\infty \quad 17) 1 \quad 18) 2 \quad 19) 0 \quad 20) e^5$$

$$21) +\infty \quad 22) e^k \quad 23) e^{-2} \quad 24) \frac{5}{2} \ln 5 \quad 25) \frac{\ln 7}{7}$$

$$26) \frac{\ln b}{a} \quad 27) +\infty \quad 28) e^2 \quad 29) e \quad 30) 1$$

$$31) -\infty \quad 32) 0 \quad 33) 1 \quad 34) 1$$

7) 1030kg e 40cm

8) a) Contínua b) Descontínua c) Contínua
d) Contínua e) Contínua f) Descontínua