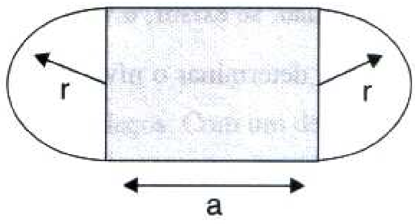


22. Um cilindro circular reto está inscrito num cone circular reto de altura $H = 6$ m e raio da base $R = 3{,}5$ m. Determinar a altura e o raio da base do cilindro de volume máximo.

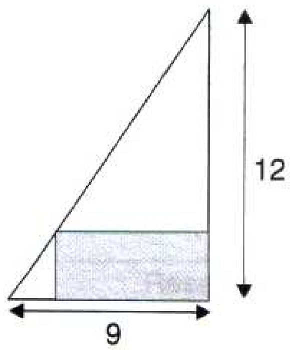
23. Uma fábrica produz x milhares de unidades mensais de um determinado artigo. Se o custo de produção é dado por $C = 2x^3 + 6x^2 + 18x + 60$ e o valor obtido na venda é dado por $R = 60x - 12x^2$, determinar o número ótimo de unidades mensais que maximiza o lucro $L = R - C$.

24. Um cilindro reto é inscrito numa esfera de raio R. Determinar esse cilindro, de forma que seu volume seja máximo.

25. Um fazendeiro deve cercar dois pastos retangulares, de dimensões a e b, com um lado comum a. Se cada pasto deve medir 400 m^2 de área, determinar as dimensões a e b, de forma que o comprimento da cerca seja mínimo.

26. Um fabricante, ao comprar caixas de embalagens retangulares exige que o comprimento de cada caixa seja 2 m e o volume 3 m^3. Para gastar a menor quantidade de material possível na fabricação de caixas, quais devem ser suas dimensões.

27. Um retângulo é inscrito num triângulo retângulo de catetos que mede 9 cm e 12 cm. Encontrar as dimensões do retângulo com maior área, supondo que sua posição é dada na figura a seguir.



5.13 Regras de L'Hôpital

Nesta seção apresentaremos um método geral para levantar indeterminações do tipo 0/0 ou ∞/∞. Esse método é dado pelas regras de L'Hospital, cuja demonstração necessita da seguinte proposição.

5.13.1 Proposição (Fórmula de Cauchy) Se f e g são duas funções contínuas em $[a, b]$, deriváveis em (a, b) e se $g'(x) \neq 0$ para todo $x \in (a, b)$, então existe um número $z \in (a, b)$ tal que:

$$\frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)} = \frac{f'(z)}{g'(z)}.$$

Prova: Provemos primeiro que $g(b) - g(a) \neq 0$. Como g é contínua em $[a, b]$ e derivável em (a, b), pelo teorema do valor médio, existe c e (a, b) tal que:

$$g'(c) = \frac{g(b) - g(a)}{b - a}. \tag{1}$$

Como, por hipótese, $g'(x) \neq 0$ para todo $x \in (a, b)$, temos $g'(c) \neq 0$ e, assim, pela igualdade (1), $g(b) - g(a) \neq 0$.

Consideremos a função

$$h(x) = f(x) - f(a) - \left[\frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)}\right][g(x) - g(a)].$$

A função h satisfaz as hipóteses do teorema de Rolle em $[a, b]$, pois:

(i) Como f e g são contínuas em $[a, b]$, h é contínua em $[a, b]$;

(ii) Como f e g são deriváveis em (a, b), h é derivável em (a, b);

(iii) $h(a) = h(b) = 0$.

Portanto, existe $z \in (a, b)$ tal que $h'(z) = 0$.

Como $h'(x) = f'(x) - \left[\dfrac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)}\right] g'(x)$, temos:

$$f'(z) - \left[\frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)}\right] \cdot g'(z) = 0. \tag{2}$$

Mas $g'(z) \neq 0$. Logo, podemos escrever (2) na forma:

$$\frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)} = \frac{f'(z)}{g'(z)}.$$

5.13.2 Proposição (Regras de L'Hospital)

Sejam f e g funções deriváveis num intervalo aberto I, exceto, possivelmente, em um ponto $a \in I$. Suponhamos que $g'(x) \neq 0$ para todo $x \neq a$ em I.

(i) Se $\lim\limits_{x \to a} f(x) = \lim\limits_{x \to a} g(x) = 0$ e $\lim\limits_{x \to a} \dfrac{f'(x)}{g'(x)} = L$, então $\lim\limits_{x \to a} \dfrac{f(x)}{g(x)} = \lim\limits_{x \to a} \dfrac{f'(x)}{g'(x)} = L$;

(ii) Se $\lim\limits_{x \to a} f(x) = \lim\limits_{x \to a} g(x) = \infty$ e $\lim\limits_{x \to a} \dfrac{f'(x)}{g'(x)} = L$, então $\lim\limits_{x \to a} \dfrac{f(x)}{g(x)} = \lim\limits_{x \to a} \dfrac{f'(x)}{g'(x)} = L$.

Prova do item (i): Suponhamos que $\lim\limits_{x \to a} \dfrac{f(x)}{g(x)}$ tome a forma indeterminada 0/0 e que $\lim\limits_{x \to a} \dfrac{f'(x)}{g'(x)} = L$. Queremos provar que $\lim\limits_{x \to a} \dfrac{f(x)}{g(x)} = L$.

Consideremos as duas funções F e G tais que:

$$F(x) = \begin{cases} f(x), & \text{se } x \neq a \\ 0, & \text{se } x = a \end{cases} \quad e \quad G(x) = \begin{cases} g(x), & \text{se } x \neq a \\ 0, & \text{se } x = a. \end{cases}$$

Então,

$$\lim_{x \to a} F(x) = \lim_{x \to a} f(x) = 0 = F(a)$$

e

$$\lim_{x \to a} G(x) = \lim_{x \to a} g(x) = 0 = G(a).$$

Assim, as funções F e G são contínuas no ponto a e, portanto, em todo intervalo I.

Seja $x \in I$, $x \neq a$. Como para todo $x \neq a$ em I, f e g são deriváveis e $g'(x) \neq 0$, as funções F e G satisfazem as hipóteses da fórmula de Cauchy no intervalo $[x, a]$ ou $[a, x]$. Segue que existe um número z entre a e x tal que

$$\frac{F(x) - F(a)}{G(x) - G(a)} = \frac{F'(z)}{G'(z)}.$$

Como $F(x) = f(x)$, $G(x) = g(x)$, $F(a) = G(a) = 0$, $F'(z) = f'(z)$ e $G'(z) = g'(z)$, vem:

$$\frac{f(x)}{g(x)} = \frac{f'(z)}{g'(z)}.$$

Como z está entre a e x, quando $x \to a$ temos que $z \to a$. Logo,

$$\lim_{x \to a} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \to a} \frac{f'(z)}{g'(z)} = \lim_{z \to a} \frac{f'(z)}{g'(z)} = L.$$

Observamos que se

$$\lim_{x \to a} f(x) = \lim_{x \to a} g(x) = 0 \text{ ou } \lim_{x \to a} f(x) = \lim_{x \to a} g(x) = \infty,$$

e $\lim\limits_{x \to a} \dfrac{f'(x)}{g'(x)} = \infty$, a regra de L'Hospital continua válida, isto é,

$$\lim_{x \to a} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \to a} \frac{f'(x)}{g'(x)} = \infty.$$

Ela também é válida para os limites laterais e para os limites no infinito.

A seguir apresentaremos vários exemplos, ilustrando como muitos limites que tomam formas indeterminadas podem ser resolvidos com o auxílio da regra de L'Hospital.

5.13.3 Exemplos

(i) Determinar $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{2x}{e^x - 1}$.

Quando $x \to 0$, o quociente $\dfrac{2x}{e^x - 1}$ toma a forma indeterminada 0/0. Aplicando a regra L'Hospital, vem:

$$\lim_{x \to 0} \frac{2x}{e^x - 1} = \lim_{x \to 0} \frac{2}{e^x} = \frac{2}{e^0} = 2.$$

(ii) Determinar $\lim\limits_{x \to 2} \dfrac{x^2 + x - 6}{x^2 - 3x + 2}$.

O limite toma a forma indeterminada 0/0. Aplicando a regra de L'Hospital, temos:

$$\lim_{x \to 2} \frac{x^2 + x - 6}{x^2 - 3x + 2} = \lim_{x \to 2} \frac{2x + 1}{2x - 3} = \frac{2 \cdot 2 + 1}{2 \cdot 2 - 3} = 5.$$

(iii) Determinar $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\operatorname{sen} x - x}{e^x + e^{-x} - 2}$.

Neste caso, temos uma indeterminação do tipo 0/0. Aplicando a regra de L'Hospital uma vez, temos:

$$\lim_{x \to 0} \frac{\operatorname{sen} x - x}{e^x + e^{-x} - 2} = \lim_{x \to 0} \frac{\cos x - 1}{e^x - e^{-x}}.$$

Como o último limite ainda toma a forma indeterminada 0/0, podemos aplicar novamente a regra de L'Hospital. Temos:

$$\lim_{x\to 0} \frac{\cos x - 1}{e^x - e^{-x}} = \lim_{x\to 0} \frac{-\text{sen}\, x}{e^x + e^{-x}} = \frac{-0}{2} = 0.$$

Logo, $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\text{sen}\, x - x}{e^x + e^{-x} - 2} = 0.$

(iv) Determinar $\lim\limits_{x\to +\infty} \dfrac{e^x - 1}{x^3 + 4x}$.

Neste caso, temos uma indeterminação do tipo ∞/∞. Aplicando a regra de L'Hospital sucessivas vezes, temos

$$\begin{aligned}\lim_{x\to +\infty} \frac{e^x - 1}{x^3 + 4x} &= \lim_{x\to +\infty} \frac{e^x}{3x^2 + 4}\\ &= \lim_{x\to +\infty} \frac{e^x}{6x}\\ &= \lim_{x\to +\infty} \frac{e^x}{6}\\ &= +\infty.\end{aligned}$$

(v) Determinar $\lim\limits_{x\to +\infty} (3x + 9)^{1/x}$.

Neste caso, temos uma indeterminação do tipo ∞^0. Vamos transformá-la numa indeterminação do tipo ∞/∞ com o auxílio de logaritmos e em seguida aplicar a regra de L'Hospital.

Seja $L = \lim\limits_{x\to +\infty} (3x + 9)^{1/x}$. Então, $\ln L = \ln\left[\lim\limits_{x\to +\infty} (3x + 9)^{1/x}\right]$.

Aplicando a Proposição 3.5.2(g) e as propriedades de logaritmo, vem:

$$\begin{aligned}\ln L &= \lim_{x\to +\infty} \ln\, (3x + 9)^{1/x}\\ &= \lim_{x\to +\infty} \frac{1}{x} \ln\, (3x + 9)\\ &= \lim_{x\to +\infty} \frac{\ln\, (3x + 9)}{x}.\end{aligned}$$

Temos agora uma indeterminação do tipo ∞/∞. Aplicando a regra de L'Hospital, obtemos

$$\ln L = \lim_{x\to +\infty} \frac{3/(3x + 9)}{1} = \lim_{x\to \infty} \frac{3}{3x + 9} = 0.$$

Como $\ln L = 0$, temos $L = 1$ e, dessa forma,

$$\lim_{x\to +\infty} (3x + 9)^{1/x} = 1.$$

(iv) Determinar $\lim\limits_{x\to +\infty} x \cdot \text{sen}\, 1/x$.

Neste caso, temos uma indeterminação do tipo $\infty \cdot 0$. Reescrevendo o limite dado na forma

$$\lim_{x\to +\infty} x \cdot \text{sen}\, 1/x = \lim_{x\to +\infty} \frac{\text{sen}\, 1/x}{1/x},$$

temos uma indeterminação do tipo 0/0.

Aplicando a regra de L'Hospital, vem:

$$\lim_{x\to+\infty} x \operatorname{sen} 1/x = \lim_{x\to+\infty} \frac{\operatorname{sen} 1/x}{1/x}$$

$$= \lim_{x\to+\infty} \frac{\dfrac{-1}{x^2}\cos\dfrac{1}{x}}{\dfrac{-1}{x^2}}$$

$$= \lim_{x\to+\infty} \cos 1/x$$

$$= \cos 0$$

$$= 1.$$

(vii) Determinar $\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{1}{x^2+x} - \dfrac{1}{\cos x - 1}\right)$.

Neste caso, temos uma indeterminação do tipo $\infty - \infty$. Reescrevendo o limite dado, temos:

$$\lim_{x\to 0}\left(\frac{1}{x^2+x} - \frac{1}{\cos x - 1}\right) = \lim_{x\to 0}\frac{\cos x - 1 - x^2 - x}{(x^2+x)(\cos x - 1)}.$$

Temos, então, uma indeterminação do tipo 0/0. Aplicando a regra de L'Hospital, vem:

$$\lim_{x\to 0}\left(\frac{1}{x^2+x} - \frac{1}{\cos x - 1}\right) = \lim_{x\to 0}\frac{\cos x - 1 - x^2 - x}{(x^2+x)(\cos x - 1)}.$$

$$= \lim_{x\to 0}\frac{-\operatorname{sen} x - 2x - 1}{(x^2+x)\cdot(-\operatorname{sen} x) + (\cos x - 1)(2x+1)}$$

$$= \frac{-1}{0}$$

$$= \infty.$$

(viii) Determinar $\lim\limits_{x\to 0^+}(2x^2+x)^x$.

Neste caso, temos uma indeterminação do tipo 0^0. Com o auxílio de logaritmos, vamos transformá-la numa indeterminação da forma ∞/∞.

Seja $L = \lim\limits_{x\to 0^+}(2x^2+x)^x$. Então,

$$\ln L = \ln\left[\lim_{x\to 0^+}(2x^2+x)^x\right]$$

$$= \lim_{x\to 0^+}\left[\ln(2x^2+x)^x\right]$$

$$= \lim_{x\to 0^+} x\cdot\ln(2x^2+x)$$

$$= \lim_{x\to 0^+}\frac{\ln(2x^2+x)}{1/x}.$$

Temos agora uma indeterminação do tipo ∞/∞. Aplicando a regra de L'Hospital, vem:

$$\ln L = \lim_{x\to 0^+} \frac{\dfrac{4x+1}{2x^2+x}}{\dfrac{-1}{x^2}}$$

$$= \lim_{x\to 0^+}\left(-\frac{4x^3+x^2}{2x^2+x}\right).$$

Aplicando novamente a regra de L'Hospital, obtemos:

$$\ln L = \lim_{x\to 0^+}\left(-\frac{12x^2+2x}{4x+1}\right)$$

$$= \frac{0}{1}$$

$$= 0.$$

Como $\ln L = 0$, temos $L = 1$. Logo,

$$\lim_{x\to 0^+}(2x^2+x)^x = 1.$$

(ix) Calcular $\displaystyle\lim_{x\to+\infty}\left(1+\frac{1}{2x}\right)^x$.

Neste caso, temos uma indeterminação do tipo 1^∞. Usando logaritmos, vamos transformá-la numa indeterminação da forma 0/0.

Seja $L = \displaystyle\lim_{x\to+\infty}\left(1+\frac{1}{2x}\right)^x$. Então,

$$\ln L = \ln\left[\lim_{x\to+\infty}\left(1+\frac{1}{2x}\right)^x\right]$$

$$= \lim_{x\to+\infty}\left[\ln\left(1+\frac{1}{2x}\right)^x\right]$$

$$= \lim_{x\to+\infty} x\ln\left(1+\frac{1}{2x}\right)$$

$$= \lim_{x\to+\infty}\frac{\ln\left(1+\dfrac{1}{2x}\right)}{1/x}.$$

Temos agora uma indeterminação do tipo 0/0. Aplicando a regra de L'Hospital, obtemos:

$$\ln L = \lim_{x\to+\infty}\frac{\dfrac{-1}{2x^2}\Big/\left(1+\dfrac{1}{2x}\right)}{-1/x^2}$$

$$= \lim_{x\to+\infty}\frac{1/2}{1+\dfrac{1}{2x}}$$

$$= \frac{1/2}{1}$$
$$= 1/2.$$

Portanto, $\ln L = \dfrac{1}{2}$ e dessa forma $L = e^{1/2}$. Logo,

$$\lim_{x \to +\infty} \left(1 + \frac{1}{2x}\right)^x = e^{1/2}.$$

5.14 Exercícios

Determinar os seguintes limites com auxílio das regras de L'Hospital.

1. $\displaystyle\lim_{x \to 2} \frac{x^2 - 4x + 4}{x^2 - x - 2}$

2. $\displaystyle\lim_{x \to -1} \frac{x^2 - 1}{x^2 + 4x + 3}$

3. $\displaystyle\lim_{x \to 0} \frac{x^2 + 6x}{x^3 + 7x^2 + 5x}$

4. $\displaystyle\lim_{x \to 1/2} \frac{2x^2 + x - 1}{4x^2 - 4x + 1}$

5. $\displaystyle\lim_{x \to 3} \frac{6 - 2x + 3x^2 - x^3}{x^4 - 3x^3 - x + 3}$

6. $\displaystyle\lim_{x \to -1} \frac{x + 1}{2x^4 + 2x^3 + 3x^2 + 2x - 1}$

7. $\displaystyle\lim_{x \to +\infty} \frac{x^2 - 6x + 7}{x^3 + 7x - 1}$

8. $\displaystyle\lim_{x \to -\infty} \frac{5 - 5x^3}{2 - 2x^3}$

9. $\displaystyle\lim_{x \to +\infty} \frac{7x^5 - 6}{4x^2 - 2x + 4}$

10. $\displaystyle\lim_{x \to +\infty} \frac{5 - x + x^2}{2 - x - 2x^2}$

11. $\displaystyle\lim_{x \to +\infty} \frac{e^x}{x^2}$

12. $\displaystyle\lim_{x \to +\infty} \frac{x^{99}}{e^x}$

13. $\displaystyle\lim_{x \to 0} \frac{x}{e^x - \cos x}$

14. $\displaystyle\lim_{x \to +\infty} x^2(e^{1/x} - 1)$

15. $\displaystyle\lim_{x \to \pi/2} \frac{\cos x}{(x - \pi/2)^2}$

16. $\displaystyle\lim_{x \to +\infty} \frac{2^x}{2^x - 1}$

17. $\displaystyle\lim_{x \to 2} \left(\frac{1}{2x - 4} - \frac{1}{x - 2}\right)$

18. $\displaystyle\lim_{x \to +\infty} \left(\ln \frac{x}{x + 1}\right)$

19. $\displaystyle\lim_{x \to \pi/2} \left(\frac{x}{\operatorname{cotg} x} - \frac{\pi}{2\cos x}\right)$

20. $\displaystyle\lim_{x \to +\infty} \operatorname{tgh} x$

21. $\displaystyle\lim_{x \to 0} \frac{\operatorname{senh} x}{\operatorname{sen} x}$

22. $\displaystyle\lim_{x \to +\infty} \frac{\ln x}{\sqrt[3]{x}}$

23. $\displaystyle\lim_{x \to \pi/4} \frac{\sec^2 x - 2 \operatorname{tg} x}{1 + \cos 4x}$

24. $\displaystyle\lim_{x \to 0} \frac{\cosh x - 1}{1 - \cos x}$

25. $\displaystyle\lim_{x \to 0} (1 - \cos x) \operatorname{cotg} x$

26. $\displaystyle\lim_{x \to 1} [\ln x \ln (x - 1)]$

27. $\lim_{x \to 1} \left[\frac{1}{2(1 - \sqrt{x})} - \frac{1}{3(1 - \sqrt[3]{x})} \right]$

28. $\lim_{x \to 0^+} x^{\frac{3}{x^4 + \ln x}}$

29. $\lim_{x \to 0^+} x^{\operatorname{sen} x}$

30. $\lim_{x \to 1} x^{\frac{1}{1 - x}}$

31. $\lim_{x \to 1^-} (1 - x)^{\cos \frac{\pi x}{2}}$

32. $\lim_{x \to +\infty} x \operatorname{sen} \pi/x$

33. $\lim_{x \to +\infty} \frac{x^{2/3}}{(x^2 + 2)^{1/3}}$

34. $\lim_{x \to +\infty} \frac{\operatorname{senh} x}{x}$

35. $\lim_{x \to +\infty} (2x - 1)^{2/x}$

36. $\lim_{x \to 0} (\cos 2x)^{3/x^2}$

37. $\lim_{x \to 0^+} \frac{\ln (\operatorname{sen} ax)}{\ln (\operatorname{sen} x)}$

38. $\lim_{x \to 3} \left(\frac{1}{x - 3} - \frac{5}{x^2 - x - 6} \right)$

39. $\lim_{x \to 0^+} x^{\frac{1}{\operatorname{tg} x}}$

40. $\lim_{x \to 0^+} x^{\frac{2}{2 + \ln x}}$

41. $\lim_{x \to \pi/4} (1 - \operatorname{tg} x) \sec 2x$

42. $\lim_{x \to +\infty} \frac{x \ln x}{x + \ln x}$

43. $\lim_{x \to 0} (e^x + x)^{1/x}$.

5.15 Fórmula de Taylor

A Fórmula de Taylor consiste num método de aproximação de uma função por um polinômio, com um erro possível de ser estimado.

5.15.1 Definição Seja $f: I \to \mathbb{R}$ uma função que admite derivadas até ordem n num ponto c do intervalo I. O *polinômio de Taylor* de ordem n de f no ponto c, que denotamos por $P_n(x)$, é dado por:

$$P_n(x) = f(c) + f'(c)(x - c) + \frac{f''(c)}{2!}(x - c)^2 + \ldots + \frac{f^{(n)}(c)}{n!}(x - c)^n.$$

Observamos que no ponto $x = c$, $P_n(c) = f(c)$.

5.15.2 Exemplo Determinar o polinômio de Taylor de ordem 4 da função $f(x) = e^x$ no ponto $c = 0$.

Temos, $f(x) = f'(x) = \ldots = f^{(iv)}(x) = e^x$ e assim

$f(0) = f'(0) = \ldots = f^{(iv)}(0) = e^0 = 1.$

Portanto,

$$P_4(x) = 1 + 1(x - 0) + \frac{1}{2!}(x - 0)^2 + \frac{1}{3!}(x - 0)^3 + \frac{1}{4!}(x - 0)^4$$

$$= 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^4}{4!},$$

é o polinômio de Taylor de grau 4 da função $f(x) = e^x$ no ponto $c = 0$.