Para início de estudo

Nesta unidade, continuaremos estudando as transformações lineares, mas apenas aquelas definidas de um espaço vetorial V no mesmo espaço vetorial V, ou seja, os operadores lineares. Sendo assim, se V é um espaço vetorial qualquer, estamos interessados apenas em transformações do tipo $T : V \to V$. Para estes operadores, queremos estudar os vetores de V que são levados em múltiplos de si próprios. De maneira geral e informal, se $v \in V$ e $T(v) = \lambda v$, em que $\lambda \in R$, então v é chamado de um autovetor de T e λ é chamado de um autovalor. Alguns livros usam as palavras vetor próprio e valor próprio, ou vetor e valor característico. No decorrer da unidade, usaremos os termos autovalor e autovetor.

Muitas são as aplicações de autovalores e autovetores, entre elas destaca-se o estudo de probabilidades, crescimento populacional e equações diferenciais.

Um pouco de história

Em inglês, usamos o termo *eigenvalue* para autovalor. O prefixo *eigen* é um adjetivo germânico que significa próprio. Por isso, em português também usamos a expressão **valor próprio** quando queremos nos referir aos autovalores. O mesmo vale para o termo **vetor próprio** ou **autovetor**.

Fonte: Anton e Rorres (2001).

Seção 1 – Autovalores e autovetores

Na introdução desta unidade, já tivemos contato com o conceito informal de autovalores e autovetores, agora vamos formalizá-los.

Seja $T : V \to V$ um operador linear. Dizemos que um vetor $v \in V$, com $v \neq 0$ é um autovetor de T, se existe $\lambda \in R$, tal que $T(v) = \lambda \cdot v$. A este número λ chamamos de autovalor de T, associado ao autovetor v.

Observação 4.1: geometricamente, se estivermos tratando de vetores no R^2 ou R^3, significa que a imagem de T pelo autovetor v é um múltiplo escalar de v, ou seja, v e $T(v)$ têm a mesma direção, porém os sentidos podem ser opostos, dependendo do sinal do autovalor λ.

Exemplos

4.1. Suponha o operador $T : R^2 \to R^2$, tal que

$$T(x, y) = (3x + y, x + 3y).$$

O vetor $v = (1, 2)$ é um autovetor de T. De fato,

$$T(1, 1) = (4, 4) = 4 \cdot (1, 1).$$

Ou seja, $T(v) = 4 \cdot v$, assim, $v = (1, 1)$ é um autovetor associado ao autovalor $\lambda = 4$. Geometricamente, o operador T levou o vetor v no seu quádruplo, isto é, v e $T(v)$ têm a mesma direção e o mesmo sentido.

4.2. Seja $T : R^2 \to R^2$, tal que $T(x, y) = (2x + 2y, x + 3y)$. Verifique se os vetores $u = (0, 3)$ e $v = (-2, 1)$ são autovetores de T.

Calculando $T(0, 3)$, temos $T(0, 3) = (6, 9)$, ou seja, o vetor $(6, 9)$ não é um múltiplo escalar de $u = (0, 3)$, logo, o vetor u não é um autovetor.

Fazendo o mesmo para $v = (-2, 1)$, temos

$$T(-2, 1) = (-2, 1) = 1 \cdot (-2, 1),$$

ou seja, o vetor v é um autovetor de T associado ao autovalor $\lambda = 1$.

Veja a seguir alguns operadores com os quais podemos facilmente obter seus autovetores e autovalores.

Dilatação e contração

$$T : R^2 \rightarrow R^2$$
$$T(x, y) = \alpha(x, y)$$

Assim, pela própria definição tem-se que qualquer vetor $v = (x, y) \in R^2$ é um autovetor de T associado ao autovalor α.

O mesmo vale para operadores definidos no R^3.

Reflexão em relação à origem

$$T : R^2 \rightarrow R^2$$
$$T(x, y) = (-x, -y)$$

Podemos reescrever este operador como $T(x, y) = -(x, y)$, ou seja, qualquer vetor $v = (x, y) \in R^2$ é um autovetor de T associado ao autovalor $\lambda = -1$.

O mesmo vale para operadores definidos no R^3.

Interpretação Geométrica

Podemos utilizar a interpretação geométrica para visualizar as ideias de autovalores e autovetores no estudo de determinados operadores lineares. Por exemplo, vejamos o operador reflexão pela origem. Vamos visualizá-lo geometricamente.

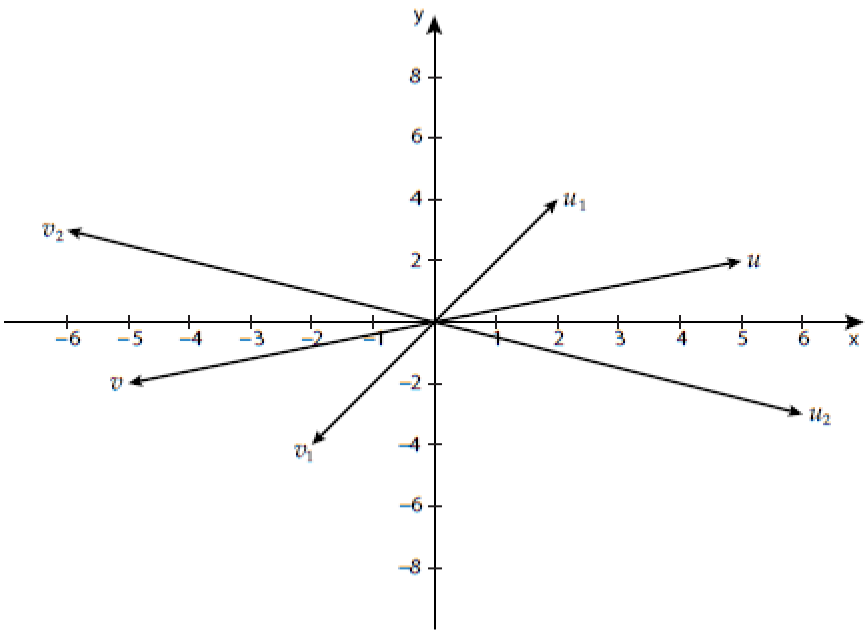

Figura 4.1 - Operador reflexão pela origem

Perceba que todos são autovetores associados ao autovalor $\lambda = -1$. Geometricamente, vemos que os vetores u e $T(u)$ têm a mesma direção, porém com sentidos opostos, bem como u_1 e $T(u_1)$ e u_2 e $T(u_2)$, como já havíamos dito na observação 4.1.

Agora é a sua vez!

Resolva os exercícios de autoavaliação 1, 2 e 3.

Até agora, apenas estamos nos familiarizando com a definição de autovalor e autovetor, ou seja, estamos verificando se certos vetores são ou não autovetores de um determinado operador linear. Mas, na verdade, queremos o contrário: dado o operador T, como obter os autovetores e autovalores? Esta resposta será dada na próxima seção. Vamos à luta.

Seção 2 – Determinação de autovalores e autovetores

Para encontrar um método para determinar autovalores e autovetores, vamos necessitar, inicialmente, da definição de autovetor e autovalor e da ideia de matriz de um operador.

Dado um operador qualquer T e se v é um autovetor associado ao autovalor λ, então $T(v) = \lambda \cdot v$. E também pela definição de operador linear $T(v) = A \cdot v$, onde A é a matriz associada ao operador T, ou seja, $\lambda \cdot v = A \cdot v$.

Por exemplo, seja $T : R^2 \to R^2$ tal que $T(x, y) = (3x + y, x + 3y)$ e tome o vetor $v = (1, 1)$. Como já vimos anteriormente, no exemplo 4.1, temos $T(1, 1) = 4 \cdot (1, 1)$, ou seja, $\lambda = 4$ é um autovalor do autovetor $v = (1, 1)$, ou seja, $T(v) = \lambda \cdot v$.

Do mesmo modo, tomando a matriz do operador T:

$$A = \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 3 \end{bmatrix}$$

temos que:

$$A \cdot v = \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 3 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 \\ 4 \end{bmatrix} = 4 \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} = 4 \cdot v = \lambda \cdot v$$

exatamente como na observação inicial.

> De maneira geral, se multiplicarmos um autovetor v pelo autovalor associado λ, é o mesmo que multiplicarmos a matriz A do operador pelo autovalor λ, ou seja, $\lambda \cdot v = A \cdot v$.

Agora já estamos aptos a entender como faremos para obter todos os autovetores e autovalores de um operador linear.

Seja o operador T, cuja matriz associada é A, e considere v o autovetor de T associado ao autovalor λ. Pela observação anterior, tem-se $\lambda \cdot v = A \cdot v$. Reescrevendo temos:

$$A \cdot v - \lambda \cdot v = 0 \tag{1}$$

Lembre-se de que este 0 (zero) não é um número real, e sim um vetor de coordenadas zero.

Multiplique-se agora a matriz identidade I, em ambos os lados da equação (1), e obtemos:

$$I \cdot A \cdot v - I \cdot \lambda \cdot v = 0$$

Mas I é o elemento neutro da multiplicação de matrizes, o que nos leva a:

$$A \cdot v - \lambda \cdot I \cdot v = 0$$

$$(A - \lambda \cdot I) \cdot v = 0$$

Essa equação matricial tem uma solução que é $v = 0$, mas, pela definição de autovetor, queremos $v \neq 0$. Assim, para que o sistema linear associado admita soluções diferentes da trivial, é necessário que $\det(A - \lambda \cdot I) = 0$. Essa equação é uma equação em λ, chamada de equação característica de T ou polinômio característico de T.

Lembre-se de que todo sistema linear tem uma equação matricial associada $A \cdot X = b$, e se $\det A \neq 0$, então A admite inversa e podemos encontrar a solução única do sistema fazendo $X = A–1 \cdot b$. Assim, fica justificado o porquê de o determinante de $A - \lambda \cdot I$ ter que ser igual a zero.

Para ilustrar as ideias anteriores, vamos tomar uma transformação $T : R^2 \to R^2$, cuja matriz A é dada por:

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix}$$

Assim, de $(A - \lambda \cdot I) \cdot v = 0$, temos:

$$\left(\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix} - \lambda \cdot \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \right) \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} a_{11} - \lambda & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} - \lambda \end{bmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \tag{2}$$

Como $\det \begin{bmatrix} a_{11} - \lambda & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} - \lambda \end{bmatrix} = 0$, temos:

$$(a_{11} - \lambda)(a_{22} - \lambda) - a_{12} \cdot a_{21} = 0,$$

o que nos dá uma equação do 2º grau em λ. Com os λ´s calculados, substituímos na equação (2) para encontrar os autovetores associados.

Que tal alguns exemplos para fixarmos os conceitos?

Exemplos

4.3. Determine os autovalores e autovetores do operador

$$T(x, y) = (3x + y, x + 3y).$$

Primeiramente, tomamos a matriz do operador, que é $A = \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 3 \end{bmatrix}$ e montamos a matriz $A - \lambda \cdot I$.

$$A - \lambda \cdot I = \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 3 \end{bmatrix} - \lambda \cdot \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3-\lambda & 1 \\ 1 & 3-\lambda \end{bmatrix}$$

Agora, fazemos $\det(A - \lambda \cdot I) = 0$ e assim obtemos a equação $(3 - \lambda)^2 - 1 = 0$. Abrindo o termo quadrático, temos $\lambda^2 - 6\lambda + 8 = 0$. Resolvendo a equação do 2º grau, conseguimos $\lambda_1 = 2$ e $\lambda_2 = 4$.

Para encontrar os autovalores associados, tomemos a equação $(A - \lambda \cdot I) \cdot v = 0$.

Para $\lambda_1 = 2$, temos $(A - 2 \cdot I) \cdot v = 0$ e, portanto:

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

o que nos leva ao sistema linear:

$$\begin{cases} x + y = 0 \\ x + y = 0 \end{cases}$$

Resolvendo o sistema obtemos $y = -x$ e assim os autovetores associados a $\lambda_1 = 2$ são do tipo $v = (x, y) = (x, -x) = x(-1, 1)$, ou seja, temos infinitos autovetores gerados pelo autovetor $v_1 = (-1, 1)$.

Para $\lambda_2 = 4$, obtemos:

$$\begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

o que nos leva ao sistema linear:

$$\begin{cases} -x + y = 0 \\ x - y = 0 \end{cases}$$

Resolvendo o sistema, obtemos $y = x$ e assim os autovetores associados a $\lambda_2 = 4$ são do tipo $v = (x, y) = (x, x) = x(1, 1)$, isto é, temos infinitos autovetores gerados pelo autovetor $v_2 = (1, 1)$.

Em geral escrevemos:

- $v_1 = (-1, 1)$ é um autovetor associado ao autovalor $\lambda_1 = 2$ e
- $v_2 = (1, 1)$ é um autovetor associado ao autovalor $\lambda_2 = 4$.

4.4. Seja $T : R^3 \to R^3$, tal que $T(x, y, z) = (x, 2x - 2y, -3x + y + 2z)$. Determine os autovalores e autovetores do operador T.

A matriz associada é dada por:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & -2 & 0 \\ -3 & 1 & 2 \end{bmatrix}$$

Fazendo $A - \lambda \cdot I$, obtemos

$$A - \lambda \cdot I = \begin{bmatrix} 1-\lambda & 0 & 0 \\ 2 & -2-\lambda & 0 \\ -3 & 1 & 2-\lambda \end{bmatrix}$$

Fazendo $\det(A - \lambda \cdot I) = 0$, temos $(1 - \lambda)(-2 - \lambda)(2 - \lambda) = 0$, que tem como solução $\lambda_1 = -2$, $\lambda_2 = 1$ e $\lambda_3 = 2$.

Agora, seja a equação, $(A - \lambda \cdot I) \cdot v = 0$.

Para $\lambda_1 = -2$, tem-se $(A - (-2) \cdot I) \cdot v = 0$, ou seja,

$$\begin{bmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 0 \\ -3 & 1 & 4 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

que nos leva ao sistema linear

$$\begin{cases} 3x = 0 \\ 2x = 0 \\ -3x + y + 4z = 0 \end{cases}$$

Resolvendo este sistema, temos diretamente que $x = 0$ e substituindo na última equação, tem-se $y = -4z$, e assim os autovetores associados a $\lambda_1 = -2$ são do tipo $v = (x, y, z) = (0, -4z, z) = z(0, -4, 1)$, de modo que temos infinitos autovetores gerados pelo autovetor $v_1 = (0, -4, 1)$.

Para $\lambda_2 = 1$, obtém-se:

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 2 & -3 & 0 \\ -3 & 1 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

o que nos leva ao sistema linear:

$$\begin{cases} 2x - 3y = 0 \\ -3x + y + z = 0 \end{cases}$$

Da primeira equação, obtemos $y = \frac{2}{3}x$ e, substituindo y na segunda equação, chegamos a $z = \frac{7}{3}x$; assim os autovetores associados ao autovalor $\lambda_2 = 1$ são da forma:

$$v = (x, y, z) = \left(x, \frac{2}{3}x, \frac{7}{3}x\right) = x\left(1, \frac{2}{3}, \frac{7}{3}\right)$$

temos infinitos autovetores gerados pelo autovetor:

$$v_2 = \left(1, \frac{2}{3}, \frac{7}{3}\right).$$

Para $\lambda_3 = 2$, temos:

$$\begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 2 & -4 & 0 \\ -3 & 1 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

que nos leva ao seguinte sistema linear:

$$\begin{cases} -x = 0 \\ 2x - 4y = 0 \\ -3x + y = 0 \end{cases}$$

Deste sistema, tiramos $x = 0$ e $y = 0$. Como notamos, não há condição para z, logo z é qualquer número real. Assim os autovetores são do tipo $v = (x, y, z) = (0, 0, z) = z(0, 0, 1)$, ou seja, infinitos autovetores gerados pelo autovetor $v_3 = (0, 0, 1)$. Geometricamente, estes autovetores pertencem ao eixo z.

Veja a tabela com o resumo dos autovetores e autovalores do operador $T(x, y, z) = (x, 2x - 2y, -3x + y + 2z)$.

Autovalor	Autovetor
$\lambda_1 = -2$	$v_1 = (0, -4, 1)$
$\lambda_2 = 1$	$v_2 = \left(1, \frac{2}{3}, \frac{7}{3}\right)$
$\lambda_3 = 2$	$v_3 = (0, 0, 1)$

Veja que você pode tirar uma prova real para saber se suas respostas estão de acordo. Por exemplo, tomemos o autovetor $v_1 = (0, -4, 1)$, devemos ter que $T(v_1) = -2 \cdot v_1$. De fato,

$$T(0, -4, 1) = (0, 8, -2) = -2 \cdot (0, -4, 1)$$

O mesmo pode ser feito para todos os outros autovetores.

> ! Já sabemos que todo operador linear tem uma matriz quadrada associada e toda matriz quadrada tem a ela associado um operador linear. Assim, encontrar os autovetores e autovalores de um operador linear é o mesmo que encontrar os autovalores e autovetores de uma matriz.

4.5. Encontre os autovetores e autovalores da matriz:

$$A = \begin{bmatrix} 10 & -9 \\ 4 & -2 \end{bmatrix}$$

Temos que:

$$A - \lambda \cdot I = \begin{bmatrix} 10-\lambda & -9 \\ 4 & -2-\lambda \end{bmatrix}$$

Como $\det(A - \lambda{\cdot}I) = 0$, obtemos $(10 - \lambda)(-2 - \lambda) + 36 = 0$, ou seja, $\lambda_2 - 8\lambda + 16 = 0$, o que nos leva a dois autovetores iguais: $\lambda_1 = \lambda_2 = 4$.

Agora, para $\lambda = 4$, obtemos:

$$\begin{bmatrix} 6 & -9 \\ 4 & -6 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

que nos leva ao sistema linear:

$$\begin{cases} 6x - 9y = 0 \\ 4x - 6y = 0 \end{cases}$$

Resolvendo o sistema, obtém-se $y = \dfrac{2}{3}x$, que nos dá o autovetor:

$$v = (x, y) = \left(x, \frac{2}{3}x\right) = x\left(1, \frac{2}{3}\right)$$

Observação 4.2: chamamos de multiplicidade algébrica de um autovalor a quantidade de vezes que ele aparece como raiz do polinômio característico.

No exemplo 4.5, o autovalor $\lambda = 4$ tem multiplicidade algébrica 2.

4.6 Encontre os autovalores e autovetores da matriz:

$$A = \begin{bmatrix} -2 & -7 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$$

Temos que:

$$A - \lambda \cdot I = \begin{bmatrix} -2-\lambda & -7 \\ 1 & 2-\lambda \end{bmatrix}$$

Fazendo $\det(A - \lambda \cdot I) = 0$, obtemos $(-2 - \lambda)(2 - \lambda) + 7 = 0$, ou seja, $l^2 + 3 = 0$. Resolvendo esta equação, percebemos que ela não possui valores reais para raízes e, portanto, a matriz A não possui autovalores reais.

Agora é a sua vez!

Resolva os exercícios de autoavaliação 4 e 5.

Podemos, a partir de um autovalor λ, construir subespaços vetoriais dos autovetores associados a λ. A próxima seção vai mostrar isso e muito mais. Antes, não esqueça de resolver os exercícios referentes a esta seção. Bons estudos e mãos à obra

SEÇÃO 3 – Propriedades de autovalores e autovetores

Veja, a partir de agora algumas propriedades que envolvem os autovalores e os autovetores e nosso objeto de estudo, os subespaços vetoriais.

Propriedade 1: seja v um autovetor do operador linear T associado ao autovalor λ. Então, o autovetor $\alpha \cdot v$ $(\alpha \neq 0)$ é também um autovetor de T associado ao autovalor λ.

Em outras palavras, se v é um autovetor associado a um autovalor λ, então qualquer múltiplo escalar de v também é um autovetor associado ao mesmo autovalor λ. Assim, todo operador linear que possui pelo menos um autovetor tem infinitos autovetores associados ao mesmo autovalor.

Vamos à demonstração. Por hipótese, temos que $T(v) = \lambda \cdot v$, pois v é um autovetor associado ao autovalor λ. Devemos mostrar que $T(\alpha \cdot v) = \lambda \cdot (\alpha \cdot v)$.

De fato,

$T(\alpha \cdot v) = \alpha \cdot T(v)$ (T é um operador linear)

Como $T(v) = \lambda \cdot v$, então:

$$T(\alpha \cdot v) = \alpha \cdot T(v) = \alpha \cdot (\lambda \cdot v) = \lambda \cdot (\alpha \cdot v),$$

como queríamos demonstrar.

Propriedade 2: sejam $T : V \to V$ e o conjunto $T_\lambda = \{v \in V; T(v) = \lambda \cdot v\}$. T_λ é um subespaço vetorial.

Em outras palavras, o conjunto de todos os autovetores v associados ao mesmo autovalor λ é um subespaço vetorial de V.

a) Sejam v_1 e $v_2 \in T_\lambda$. Devemos mostrar que $v_1 + v_2 \in T_\lambda$, ou seja, que $T(v_1 + v_2) = \lambda \cdot (v_1 + v_2)$.

De fato, $T(v_1 + v_2) = T(v_1) + T(v_2)$ (T é um operador linear)

Mas $T(v_1) = \lambda \cdot v_1$ e $T(v_2) = \lambda \cdot v_2$, pois v_1 e $v_2 \in T_\lambda$.

Logo,

$$T(v_1 + v_2) = T(v_1) + T(v_2) = \lambda \cdot v_1 + \lambda \cdot v_2 = \lambda \cdot (v_1 + v_2).$$

b) Sejam $v_1 \in T_\lambda$ e $k \in R$. Devemos mostrar que $k \cdot v_1 \in T_\lambda$, ou seja, que $T(k \cdot v_1) = \lambda \cdot (k \cdot v_1)$.

Isto decorre diretamente da propriedade 1.

Portanto o conjunto T_λ é um subespaço vetorial de V.

Exemplos

4.7. Seja $T : R^2 \to R^2$ em que $T(x, y) = (2x + 2y, y)$.

A matriz deste operador linear é dada por $A = \begin{bmatrix} 2 & 2 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$.

Fazendo o $\det(A - \lambda \cdot I) = 0$, ou seja,

$$\begin{bmatrix} 2-\lambda & 2 \\ 0 & 1-\lambda \end{bmatrix} = 0$$

obtemos o polinômio característico $(2 - \lambda)(1 - \lambda) = 0$, cujos autovalores são $\lambda_1 = 1$ e $\lambda_2 = 2$.

Para $\lambda_1 = 1$, temos:

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

o que nos leva à $x + 2y = 0$, ou seja, $x = -2y$, e, portanto, temos o autovetor $v_1 = (x, y) = (-2y, y) = y(-2, 1)$. Assim um autovetor associado ao autovalor $\lambda_1 = 1$ é $v_1 = (-2, 1)$; e, pela propriedade 1, segue que qualquer múltiplo de v_1 também é um autovetor associado ao autovalor $\lambda_1 = 1$.

Assim, todos os autovetores associados a $\lambda_1 = 1$ têm a forma $v = (-2y, y)$. Então, pela propriedade 2, o conjunto $T_{\lambda_1} = \{v \in R^2; x = -2y\}$ é um subespaço vetorial que, geometricamente, é uma reta que passa pela origem.

Para $\lambda_2 = 2$, temos:

$$\begin{bmatrix} 0 & 2 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

o que nos leva ao sistema linear:

$$\begin{cases} 2y = 0 \\ -y = 0 \end{cases}$$

ou seja, $y = 0$; como não temos condição para x, segue que x é qualquer número real, então o autovetor é dado por $v_2 = (x, y) = (x, 0) = x(1, 0)$. Então, um autovetor associado ao autovalor $\lambda_2 = 2$ é $v_2 = (1, 0)$ e, pela propriedade 1, qualquer múltiplo de v_2 também é um autovetor associado ao autovalor $\lambda_2 = 2$.

Também temos que o conjunto $T_{\lambda_2} = \{v \in R^2; y = 0\}$ é um subespaço vetorial pela propriedade 2. Geometricamente, é o eixo x.

4.8. Tome o exemplo 4.4 da Seção 2:

seja $T : R^3 \to R^3$, tal que $T(x, y, z) = (x, 2x - 2y, -3x + y + 2z)$.

Este operador linear tem os seguintes autovetores e autovalores:

Autovalor	Autovetor
$\lambda_1 = -2$	$v_1 = (0, -4, 1)$
$\lambda_2 = 1$	$v_2 = \left(1, \frac{2}{3}, \frac{7}{3}\right)$
$\lambda_3 = 2$	$v_3 = (0, 0, 1)$

Pela propriedade 2, temos os seguintes subespaços vetoriais:

- $T_{\lambda_1} = \{v \in R^2; x = 0 \text{ e } z = -4y\}$, que, geometricamente, é uma reta no espaço que passa pela origem e pertence ao plano yOz;
- $T_{\lambda_2} = \{v \in R^2; y = \frac{2}{3}x \text{ e } z = \frac{7}{3}x\}$, que geometricamente é uma reta no espaço que passa pela origem; e
- $T_{\lambda_2} = \{v \in R^2; x = y = 0\}$, que geometricamente é o eixo z.

Agora é a sua vez!

Resolva o exercício 6 das atividades de autoavaliação.

Já sabemos que todo operador linear $T : V \to V$ tem uma matriz A associada. Nosso objetivo é obter uma base para V de tal maneira que a matriz associada a esta nova base seja a mais simples possível.

Que matriz será essa?

Para descobrir, não deixe de conferir a próxima seção. Mas antes tenha todos os conceitos vistos até agora bem entendidos, por isso, tente resolver o máximo de exercícios propostos.

SEÇÃO 4 – Diagonalização de operadores

Objetivo: seja $T : V \to V$, encontrar uma base β de V, na qual a matriz A associada ao operador seja a mais simples possível.

Para chegar a tal matriz, necessitamos de alguns resultados importantes que envolvem autovetores e autovalores.

Teorema 4.1: seja $T : V \to V$ um operador linear. Os autovetores de T associados a autovalores distintos são linearmente independentes.

Demonstração: vamos provar para o caso de dois autovalores distintos, então suponha λ_1 e λ_2 distintos.

Seja v_1 o autovetor associado a λ_1 e v_2, o autovetor associado a λ_2. Devemos mostrar que o conjunto formado por v_1 e v_2 é LI, ou seja:

$$a_1v_1 + a_2v_2 = 0 \Leftrightarrow a_1 = a_2 = 0$$

Como v_1 é o autovetor associado a λ_1, temos por definição que $T(v_1) = \lambda_1 v_1$, e como v_2 é o autovetor associado a λ_2, então $T(v_2) = \lambda_2 v_2$.

Partindo de $a_1v_1 + a_2v_2 = 0$ e aplicando T nesta igualdade, obtemos $T(a_1v_1 + a_2v_2) = T(0)$. Como T é linear e v_1 e v_2 são autovetores, temos:

$$a_1T(v_1) + a_2T(v_2) = 0$$

$$a_1\lambda_1v_1 + a_2\lambda_2v_2 = 0 \qquad (1)$$

Agora multiplique a igualdade $a_1v_1 + a_2v_2 = 0$ por λ_1 e obtemos:

$$a_1\lambda_1v_1 + a_2\lambda_1v_2 = 0 \qquad (2)$$

Subtraindo (1) de (2), temos:

$$a_2(\lambda_2 - \lambda_1)v_2 = 0$$

Como λ_1 e λ_2 são distintos, então $\lambda_2 - \lambda_1 \neq 0$ e também $v_2 \neq 0$. Sendo assim, segue que $a_2 = 0$.

Substituindo $a_2 = 0$ em (1) e como $v_1 \neq 0$, segue que $a_1 = 0$, e portanto, o conjunto $\{v_1, v_2\}$ é LI, como queríamos demonstrar.

Uma consequência direta desse teorema é o fato de que, se tivermos um operador $T : V \to V$, onde V tem dimensão n, então qualquer conjunto com n autovetores distintos é uma base de V.

Exemplo:

4.9. Seja $T : R^2 \to R^2$ em que $T(x, y) = (2x + 2y, y)$. Já calculamos, no exemplo 4.7, que $v_1 = (-2, 1)$ é o autovetor associado ao autovalor $\lambda_1 = 1$ e que $v_2 = (1, 0)$ é o autovetor associado ao autovalor $\lambda_2 = 2$. Pelo teorema 1 e sua consequência, segue que $\beta = \{(-2, 1), (1, 0)\}$ é uma base para R^2.

Podemos proceder ao contrário, sabendo que $\lambda_1 = 1$ e $\lambda_2 = 2$ são autovalores associados aos autovetores $v_1 = (-2, 1)$ e $v_2 = (1, 0)$ respectivamente, encontre $T(x, y)$.

Primeiramente, escrevemos (x, y) em relação à base $\beta = \{(-2, 1), (1, 0)\}$, isto é:

$$(x, y) = a(-2, 1) + b(1, 0)$$

Isto nos leva à $-2a + b = x$ e $a = y$; substituindo a segunda na primeira, obtemos $b = x + 2y$. Assim,

$$(x, y) = y(-2, 1) + (x + 2y)(1, 0).$$

Aplicando T em ambos os lados e usando sua linearidade, obtemos:

$$T(x, y) = yT(-2, 1) + (x + 2y)T(1, 0).$$

Mas $T(-2, 1) = 1 \cdot (-2, 1)$, $(-2, 1)$ é um autovetor associado a $\lambda_1 = 1$ e também $T(1, 0) = 2 \cdot (1, 0)$, pois $(1, 0)$ é um autovetor associado a $\lambda_2 = 2$. Logo,

$$T(x, y) = y(-2, 1) + (x + 2y)(1, 0) = (2x + 2y, y).$$

Lembre-se de que, dada uma base de V, podemos escrever a matriz de T associada à base de V . Como os autovetores $v_1 = (-2, 1)$ e $v_2 = (1, 0)$ formam uma base de R^2, então a matriz de T associada a essa base é dada por:

$$T(-2, 1) = 1 \cdot (-2, 1) + 0 \cdot (1, 0)$$
$$T(1, 0) = 0 \cdot (-2, 1) + 1 \cdot (1, 0)$$

Assim,

$$T_\beta = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}$$

Ou seja, a matriz associada à base dos autovetores é uma matriz diagonal cujos elementos da diagonal principal são os autovalores de T.

Vejamos o caso mais geral. Sejam $T : V \rightarrow V$ tal que $\dim V = n$ e suponha que T tenha autovalores $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$ todos distintos, associados aos autovetores $v_1, v_2, \ldots, v_n$. Pelo teorema 4.1 e sua consequência, segue que o conjunto $\beta = \{v_1, v_2, \ldots, v_n\}$ é uma base para V. Portanto, tem-se:

$$T(v_1) = \lambda_1 v_1 + 0v_1 + \quad + 0v_n$$
$$T(v_2) = 0v_1 + \lambda_1 v_1 + \quad + 0v_n$$
$$\vdots$$
$$T(v_n) = 0v_1 + 0v_1 + \quad + \lambda_n v_n$$

Assim o operador T é representado na base β dos autovetores pela matriz diagonal:

$$T_\beta = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \lambda_n \end{bmatrix}$$

cujos elementos da diagonal principal são os autovalores associados a T.

Podemos, então, enunciar o seguinte teorema:

Teorema 4.2: um operador linear T admite uma base β em relação a qual sua matriz T_β é diagonal se, e somente se, essa base for formada por autovetores de T.

A demonstração foi feita anteriormente.

> Quando um operador $T : V \rightarrow V$ admite uma base cujos elementos são seus autovetores, então dizemos que este operador é diagonalizável.

Exemplos

4.10. O exemplo 4.8 , $T(x, y) = (2x + 2y, y)$, é um operador linear diagonalizável, pois ele admite uma base cujos elementos são seus autovetores.

4.11. Seja o operador $T : R^2 \rightarrow R^2$, em que $T(x, y) = (2x + y, 3x + 4y)$. Verifique se T é diagonalizável e determine uma base para T cuja matriz seja diagonal.

Seja:

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}$$

a matriz associada a T.

Fazendo $\det(A - \lambda \cdot I) = 0$, obtemos o polinômio característico $(2 - \lambda)(4 - \lambda) - 3 = 0$, o que nos dá $\lambda^2 - 6\lambda + 5 = 0$. Resolvendo essa equação, obtém-se $\lambda_1 = 1$ e $\lambda_2 = 5$.

Como os autovalores são distintos, é possível obter uma base cujos elementos são os autovetores de T. Pelo teorema 4.2, podemos afirmar que o operador T é diagonalizável. Encontremos os autovetores:

Para $\lambda_1 = 1$, temos:

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 3 & 3 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{cases} x + y = 0 \\ 3x + 3y = 0 \end{cases}$$

que nos leva a $y = -x$ e, portanto, temos o autovetor $v_1 = (x, y) = (x, -x) = x(1, -1)$. Assim, um autovetor associado ao autovalor $\lambda_1 = 1$ é $v_1 = (1, -1)$.

Para $\lambda_2 = 5$, temos:

$$\begin{bmatrix} -3 & 1 \\ 3 & -1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{cases} -3x + y = 0 \\ 3x - y = 0 \end{cases}$$

que tem solução dada por $y = 3x$ e, portanto, temos o autovetor $v_2 = (x, y) = (x, 3x) = x(1, 3)$.

Assim, o autovetor associado ao autovalor $\lambda_2 = 5$ é $v_2 = (1, 3)$.

Logo, $\beta = \{(1, -1), (1, 3)\}$ é uma base de R^2 e a matriz de T relativa à base dos autovetores é dada por:

$$T_\beta = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 5 \end{bmatrix}$$

4.12. Verifique se o operador $T(x, y, z) = (3x, 3y, y - z)$ é diagonalizável.

Primeiramente, encontremos os autovalores.

Seja a matriz:

$$A = \begin{bmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 2 & 3 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \end{bmatrix}$$

Calculando $\det(A - \lambda \cdot I) = 0$, obtemos o seguinte polinômio característico $(3 - \lambda)^2(-1 - \lambda) = 0$, ou seja, $\lambda_1 = -1$ e $\lambda_2 = 3$ são os autovalores de T.

Para $\lambda_1 = -1$, temos:

$$\begin{bmatrix} 4 & 0 & 0 \\ 2 & 4 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

o que nos dá $4x = 0$, $2x + 4y = 0$ e $y = 0$, ou seja, $x = y = 0$. Como não temos condição para a variável z, então ela pode assumir qualquer valor. Assim para $\lambda_1 = -1$ temos o autovetor associado $v_1 = (0, 0, 1)$.

Para $\lambda_2 = 3$ temos

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -4 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

que nos dá $2x = 0$ e $y = 4z$. Então, para $\lambda_2 = 3$ temos o autovetor $v_2 = (0, 4z, z) = z(0, 4, 1)$, sendo assim para $\lambda_2 = 3$ temos o autovetor $v_2 = (0, 4, 1)$.

Como temos apenas dois autovetores LI, eles não formam uma base para R^3, e portanto T não é diagonalizável.

Agora é a sua vez!

Resolva os exercícios 7 a 11 das atividades de autoavaliação.

Síntese

Nessa unidade, você continuou estudando as transformações lineares, mas um tipo especial delas: os chamados operadores lineares. Nestes operadores, estávamos interessados em vetores que eram levados em múltiplos de si próprios, ou seja, $T(v) = \lambda v$. A esses vetores v chamamos autovetores, e ao número real λ chamamos autovalor associado a v.

Muitas propriedades foram expostas, e também tivemos contato com uma maneira prática de determinar os autovetores e autovalores de um operador linear, que é o mesmo que encontrar os autovalores e autovetores da matriz associada a este operador. Finalizamos mostrando que, a partir de uma base formada pelos autovetores, podemos obter uma matriz para a transformação que seja a mais simples possível e entender isso como uma matriz diagonal.

Atividades de autoavaliação

1. Verifique se os vetores a seguir são autovetores dos correspondentes operadores. Em caso afirmativo, escreva o autovalor. Use apenas a definição.

   a) $v = (-1, 4)$ e $T(x, y) = (-2x - y, 2x - 3y)$

   b) $v = \left(\frac{3}{5}, -\frac{4}{5}\right)$ e $T(x, y) = (4x + 12y, 12x - 3y)$

   c) $v = (2, 1, 2)$ e $T(x, y, z) = (x + 2y + z, -x + 3y + z, 2y + 2z)$

2. Seja $T : R^2 \to R^2$ e suponha que $\lambda_1 = -2$ e $\lambda_2 = 5$ são autovalores associados aos autovetores $v_1 = (1, 1)$ e $v_2 = (-3, -2)$, respectivamente. Determine $T(2v_1 - 3v_2)$.

3. Suponha que o operador $T : R^2 \to R^2$ tenha autovalores $v_1 = (-1, 2)$ e $v_2 = (3, 4)$ associados aos autovalores $\lambda_1 = 2$ e $\lambda_2 = -3$, respectivamente. Determine o valor de $T(10, 10)$. Dica: primeiramente encontre a combinação de $v = (10, 10)$ em relação a v_1 e v_2.

4. Determine os autovalores e autovetores dos operadores lineares abaixo, se existirem:

a) $T : R^2 \to R^2$, $T(x, y) = (x - y, x + y)$

b) $T : R^2 \to R^2$, $T(x, y) = (-3x + 4y, -x + 2y)$

c) $T : R^2 \to R^2$, T é a rotação de 90° em torno da origem.

d) $T : R^3 \to R^3$, $T(x, y, z) = (3x - 3y + 4z, 3y + 5z, -z)$

5. Encontre os autovalores e autovetores das matrizes abaixo:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} \qquad B = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{bmatrix}$$

6. Seja o operador $T : R^3 \to R^3$, em que:

$T(x, y, z) = (x - y, 2x + 3y + 2z, x + y + 2z)$.

Encontre os subespaços vetoriais T_λ para cada autovalor e expresse geometricamente cada um dos subespaços encontrados.

7. Encontre uma transformação $T : R^2 \to R^2$, sabendo que $\lambda_1 = 1$ e $\lambda_2 = 2$ são autovalores associados aos autovetores $u = (1, 0)$ e $v = (-2, 1)$, respectivamente.

8. Suponha que λ seja um autovalor de T associado ao autovetor v e seja k um número real não nulo. Mostre que o operador kT tem um autovetor v associado ao autovalor $k\lambda$.

9. Já mostramos na Seção 4 que dados dois autovalores distintos seus correspondentes autovalores são LI. Agora suponha que λ_1 e λ_2 são autovalores distintos de um operador $T : R^2 \to R^2$ associados aos autovetores v_1 e v_2. Mostre que $T(v_1)$ e $T(v_2)$ são linearmente independentes.

10. Seja $T : R^2 \rightarrow R^2$ o operador linear definido por:

$T(x, y) = (2x + 4y, 3x + y)$

a) Determine uma base do R^2 em relação à qual a matriz do operador T é diagonal.

b) Determine a matriz de T nesta base.

11. Verifique se os operadores dos exercícios 4(b), 4(c) e 4(d) são diagonalizáveis.

Saiba mais

Os autovalores e autovetores são objetos de inúmeras aplicações interessantes, tanto na parte física quanto geométrica. Para aqueles que gostam de física, sugiro o livro de José Luiz Boldrini, Álgebra Linear, da editora Harbra. O volume traz uma aplicação de autovalores e autovetores no estudo das vibrações, vale a pena conferir. Alguns exercícios desta unidade foram adaptados do livro sugerido, mas lá existem muitos outros exercícios que requerem um esforço a mais. Os alunos investigativos tenho certeza de que não deixarão de tentar.

1. Verifique se os vetores a seguir são autovetores dos correspondentes operadores. Em caso afirmativo, escreva o autovalor. Use apenas a definição.

a) $v = (-1, 4)$ e $T(x, y) = (-2x - y, 2x - 3y)$

b) $v = \left(\frac{3}{5}, -\frac{4}{5}\right)$ e $T(x, y) = (4x + 12y, 12x - 3y)$

c) $v = (2, 1, 2)$ e $T(x, y, z) = (x + 2y + z, -x + 3y + z, 2y + 2z)$

Solução

a) Calculando $T(-1, 4)$ temos:

$$T(-1, 4) = (-2\cdot(-1) - 4, 2\cdot(-1) - 3\cdot 4) = (-2, -14).$$

Como $(-2, -14)$ não é múltiplo escalar de $v = (-1, 4)$ pelo operador T, então $v = (-1, 4)$ não é um autovetor.

b) Calculando $T\left(\frac{3}{5}, -\frac{4}{5}\right)$.

$$T\left(\frac{3}{5}, -\frac{4}{5}\right) = \left(4\cdot\frac{3}{5} + 12\cdot\left(-\frac{4}{5}\right), 12\cdot\frac{3}{5} - 3\cdot\left(-\frac{4}{5}\right)\right)$$

$$= \left(-\frac{36}{5}, \frac{48}{5}\right) = -12\cdot\left(\frac{3}{5}, -\frac{4}{5}\right)$$

Ou seja, $T(v) = -12v$, portanto, $v = \left(\frac{3}{5}, -\frac{4}{5}\right)$ é um autovetor de T associado ao autovalor $\lambda = -12$.

c) Calculando T(2, 1, 2).

$$T(2, 1, 2) = (2 + 2\cdot1 + 2, -2 + 3\cdot1 + 2, 2\cdot1 + 2\cdot2) = (6, 3, 6) = 3(2, 1, 2)$$

Isto é, $T(v) = 3v$ e, portanto, $v = (2, 1, 2)$ é um autovetor de T associado ao autovalor $\lambda = 3$.

2. Seja $T : R^2 \to R^2$ e suponha que $\lambda_1 = -2$ e $\lambda_2 = 5$ são autovalores associados aos autovetores $v_1 = (1, 1)$ e $v_2 = (-3, -2)$, respectivamente. Determine $T(2v_1 - 3v_2)$.

Solução

Como $\lambda_1 = -2$ é autovalor associado ao autovetor $v_1 = (1, 1)$ temos:

$$T(v_1) = T(1, 1) = -2\cdot(1, 1)$$

Do mesmo modo, temos que $\lambda_2 = 5$ é um autovalor associado ao autovetor $v_2 = (-3, -2)$ e então:

$$T(v_2) = T(-3, -2) = 5\cdot(-3, -2)$$

Como T é uma transformação linear, então:

$$\begin{aligned} T(2v_1 - 3v_2) &= 2T(v_1) - 3T(v_2) \\ &= 2\cdot(-2)\cdot(1, 1) - 3\cdot5\cdot(-3, -2) \\ &= (-4, -4) - (-45, -30) \\ &= (41, 26) \end{aligned}$$

Assim, $T(2v_1 - 3v_2) = (41, 26)$.

3. Suponha que o operador $T : R^2 \rightarrow R^2$ tenha autovalores $v_1 = (-1, 2)$ e $v_2 = (3, 4)$ associados aos autovalores $\lambda_1 = 2$ e $\lambda_2 = -3$, respectivamente. Determine o valor de T(10, 10). Dica: primeiramente encontre a combinação de $v = (10, 10)$ em relação a v_1 e v_2.

Solução

Pelo fato de $\lambda_1 = 2$ ser autovalor associado ao autovetor de $v_1 = (-1, 2)$, então $T(v_1) = 2v_1$, do mesmo modo como $\lambda_2 = -3$ é um autovalor associado ao autovetor $v_2 = (3, 4)$, então $T(v_2) = -3v_2$.

Como v_1 e v_2 formam uma base para o R^2, temos que:

$$(10, 10) = a(-1, 2) + b(3, 4),$$

o que nos leva ao sistema linear associado:

$$\begin{cases} -a + 3b = 10 \\ 2a + 4b = 10 \end{cases}$$

que nos leva à solução $a = -1$ e $b = 3$. Assim,

$$(10, 10) = -1\cdot(-1, 2) + 3\cdot(3, 4)$$

Aplicando T em ambos os lados da igualdade e usando o fato que T é uma transformação linear, temos:

$$\begin{aligned} T(10, 10) &= -1T(-1, 2) + 3T(3, 4) \\ &= -1\cdot 2\cdot(-1, 2) + 3\cdot(-3)\cdot(3, 4) \\ &= (2, -4) + (-27, -36) \\ &= (-25, -40) \end{aligned}$$

Ou seja, $T(10, 10) = (-25, -40)$.

4. Determine os autovalores e autovetores dos operadores lineares abaixo, se existirem:

a) $T : R^2 \to R^2$, $T(x, y) = (x - y, x + y)$

b) $T : R^2 \to R^2$, $T(x, y) = (-3x + 4y, -x + 2y)$

c) $T : R^2 \to R^2$, T é a rotação de 90° em torno da origem.

d) $T : R^3 \to R^3$, $T(x, y, z) = (3x - 3y + 4z, 3y + 5z, -z)$

Solução

a) $A = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$ e $A - \lambda I = \begin{bmatrix} 1-\lambda & -1 \\ 1 & 1-\lambda \end{bmatrix}$

Calculando $\det(A - \lambda I) = 0$, obtemos o polinômio característico $(1 - \lambda)^2 + 1 = 0$, o que nos leva à equação $\lambda^2 - 2\lambda + 2 = 0$.

Resolvendo obtemos $\lambda = \dfrac{2 \pm \sqrt{-4}}{2}$.

Como não temos raiz real, conclui-se que este operador não possui autovalores reais e portanto também não temos autovetores.

b) $A = \begin{bmatrix} -3 & 4 \\ -1 & 2 \end{bmatrix}$ e $A - \lambda I = \begin{bmatrix} -3-\lambda & 4 \\ -1 & 2-\lambda \end{bmatrix}$

Calculando $\det(A - \lambda I) = 0$, obtemos o polinômio característico $(-3 - \lambda)(2 - \lambda) + 4 = 0$, o que nos leva à equação $\lambda^2 + \lambda - 2 = 0$, cuja solução é dada por $\lambda_1 = -2$ e $\lambda_2 = 1$.

Para $\lambda_1 = -2$, obtemos:

$$\begin{bmatrix} -1 & 4 \\ -1 & 4 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

o que nos leva ao sistema linear:

$$\begin{cases} -x + 4y = 0 \\ -x + 4y = 0 \Rightarrow x = 4y \end{cases}$$

Assim, o autovetor associado ao autovalor $\lambda_1 = -2$, é dado por $v_1 = (4y, y) = y(4, 1)$, ou seja, infinitos autovetores gerados pelo autovetor $v_1 = (4, 1)$.

Para $\lambda_2 = 1$, obtemos:

$$\begin{bmatrix} -4 & 4 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} . \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

o que nos leva ao sistema linear:

$$\begin{cases} -4x + 4y = 0 \\ \quad -x + y = 0 \Rightarrow x = y \end{cases}$$

Assim, o autovetor associado ao autovalor $\lambda_2 = 1$, é dado por $v_2 = (x, x) = x(1, 1)$, ou seja, infinitos autovetores gerados pelo autovetor $v_2 = (1, 1)$.

c) A matriz rotação 90° da transformação T é dada por:

$$A = \begin{bmatrix} \cos 90° & -\operatorname{sen} 90° \\ \operatorname{sen} 90° & \cos 90° \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$$

Portanto $A - \lambda I = \begin{bmatrix} -\lambda & -1 \\ 1 & -\lambda \end{bmatrix}$.

Agora $\det(A - \lambda I) = 0$ nos leva à equação $\lambda^2 + 1 = 0$, que tem como raízes $\lambda = \pm\sqrt{-1}$. Assim a transformação rotação 90° não possui autovalores reais e, portanto, não temos autovetores.

d) Primeiramente encontremos os autovalores. Seja a matriz:

$$A = \begin{bmatrix} 3 & -3 & 4 \\ 0 & 3 & 5 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}$$

Calculando $\det(A - \lambda I) = 0$, obtemos o seguinte polinômio característico $(3 - \lambda)^2(-1 - \lambda) = 0$, ou seja, $\lambda_1 = -1$ e $\lambda_2 = 3$ são os autovalores de T.

Para $\lambda_1 = -1$, temos:

$$\begin{bmatrix} 3 & -3 & 4 \\ 0 & 3 & 5 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

o que nos dá o sistema:

$$\begin{cases} 4x - 3y + 4z = 0 \\ \qquad 4y + 5z = 0 \end{cases}$$

Resolvendo o sistema, obtemos $y = -\frac{5}{4}z$ e, substituindo na primeira, obtemos $x = -\frac{31}{16}z$.

Assim, temos o autovetor:

$$v_1 = (x, y, z) = \left(-\frac{31}{16}z, -\frac{5}{4}z, z\right) = z\left(-\frac{31}{16}, -\frac{5}{4}, 1\right).$$

Como o conjunto dos autovetores associados ao autovalor $\lambda_1 = -1$ é um subespaço vetorial, podemos fazer $z = -16$ para obter uma representação mais simples. Assim, para $\lambda_1 = -1$ temos o autovetor associado $v_1 = (31, 20, -16)$.

Para $\lambda_2 = 3$, temos:

$$\begin{bmatrix} 0 & -3 & 4 \\ 0 & 0 & 5 \\ 0 & 0 & -4 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

que tem associado o seguinte sistema:

$$\begin{cases} -3y + 4z = 0 \\ \qquad 5z = 0 \\ \qquad -4z = 0 \end{cases}$$

que, por sua vez, tem solução $y = z = 0$. Como não temos condição para x, podemos tomar qualquer valor. Assim, para $\lambda_2 = 3$, temos o autovetor $v_2 = (1, 0, 0)$.

5. Encontre os autovalores e autovetores das matrizes abaixo:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} \qquad B = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{bmatrix}$$

Solução

A) Fazendo $\det(A - \lambda I) = 0$, obtemos o polinômio característico $(1 - \lambda)(1 - \lambda) = 0$, ou seja, $\lambda_1 = 1$ e $\lambda_2 = -1$ são os autovalores da matriz A.

Para $\lambda_1 = 1$, obtemos:

$$\begin{bmatrix} 0 & 2 \\ 0 & -2 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

o que nos leva à equação $2y = 0$, isto é, $y = 0$.

Como não temos condição para x, ele pode assumir qualquer valor, assim, o autovetor associado ao autovalor $\lambda_1 = 1$ é $v_1 = (x, 0) = x(1, 0)$, ou simplesmente $v_1 = (1, 0)$.

Para $\lambda_2 = -1$, obtemos:

$$\begin{bmatrix} 2 & 2 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

o que nos leva à equação $2x + 2y = 0$, isto é, $y = -x$. Assim, o autovetor associado a autovalor $\lambda_2 = -1$ é $v_2 = (x, -x) = x(1, -1)$, ou simplesmente $v_2 = (1, -1)$.

B) Fazendo $\det(A - \lambda I) = 0$, obtemos o polinômio característico $(1 - \lambda)(3 - \lambda)(-2 - \lambda) = 0$, ou seja, $\lambda_1 = -2$, $\lambda_2 = 1$ e $\lambda_3 = 3$ são os autovalores da matriz A.

Para $\lambda_1 = -2$, obtemos:

$$\begin{bmatrix} 3 & -1 & 2 \\ 0 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \qquad \Rightarrow \qquad \begin{cases} 3x - y + 2z = 0 \\ 5y = 0 \end{cases}$$

o que nos leva a $y = 0$ e $z = -\frac{3}{2}x$.

Assim, $v_1 = (x, 0, -\frac{3}{2}x) = x(1, 0, -\frac{3}{2})$ é o autovetor associado ao autovalor $\lambda_1 = -2$.

Para $\lambda_2 = 1$, obtemos:

$$\begin{bmatrix} 0 & -1 & 2 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & -3 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \qquad \Rightarrow \qquad \begin{cases} -y + 2z = 0 \\ 2y = 0 \\ -3z = 0 \end{cases}$$

que nos leva a $y = z = 0$ e, como não temos condição para x, ele pode assumir qualquer valor, assim $v_1 = (x, 0, 0) = x(1, 0, 0)$ é o autovetor associado ao autovalor $\lambda_2 = 1$.

Para $\lambda_3 = 3$, obtemos:

$$\begin{bmatrix} -2 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -5 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \qquad \Rightarrow \qquad \begin{cases} -x - y + 2z = 0 \\ -5z = 0 \end{cases}$$

que nos leva à solução $z = 0$ e $y = -2x$.

Assim, $v_3 = (x, -2x, 0) = x(1, -2, 0)$ é o autovalor associado ao autovalor $\lambda_3 = 3$.

6. Seja o operador $T : R^3 \rightarrow R^3$, em que:

$$T(x, y, z) = (x - y, 2x + 3y + 2z, x + y + 2z).$$

Encontre os subespaços vetoriais T_λ para cada autovalor e expresse geometricamente cada um dos subespaços encontrados.

Solução

A matriz associada à transformação é $A = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 2 & 3 & 2 \\ 1 & 1 & 2 \end{bmatrix}$.

Fazendo $\det(A - \lambda I) = 0$, obtemos o polinômio característico $\lambda^3 - 6\lambda^2 + 11\lambda - 6 = 0$, cujos autovalores são $\lambda_1 = 1$, $\lambda_2 = 2$ e $\lambda_3 = 3$.

Para $\lambda_1 = 1$, obtemos:

$$\begin{bmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 2 & 2 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \qquad \Rightarrow \begin{cases} -y = 0 \\ 2x + 2y + 2z = 0 \\ x + y + z = 0 \end{cases}$$

que nos leva à solução $y = 0$ e $z = -x$ e, portanto, temos o subespaço vetorial $T_{\lambda_1} = \{v \in R^3,\ y = 0 \text{ e } z = -x\}$, que, geometricamente, é uma reta que passa pela origem do R^3 e pertence ao plano $x0z$.

Para $\lambda_2 = 2$, obtemos:

$$\begin{bmatrix} -1 & -1 & 0 \\ 2 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \qquad \Rightarrow \begin{cases} -x - y = 0 \\ 2x + y + 2z = 0 \\ x + y = 0 \end{cases}$$

que nos leva à solução $y = x$ e $z = -\frac{3}{2}x$ e, portanto, temos o subespaço vetorial $T_{\lambda_2} = \{v \in R^3,\ y = x \text{ e } z = -\frac{3}{2}x\}$, que geometricamente é uma reta no espaço que passa pela origem do R^3.

Para $\lambda_3 = 3$, obtemos:

$$\begin{bmatrix} -2 & -1 & 0 \\ 2 & 0 & 2 \\ 1 & 1 & -1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \qquad \Rightarrow \begin{cases} -2x - y = 0 \\ 2x + 2z = 0 \\ x + y - z = 0 \end{cases}$$

que nos leva à solução $y = -2x$ e $z = -x$ e, assim, obtemos o subespaço vetorial $T_{\lambda_3} = \{v \in R^3,\ y = -2x \text{ e } z = -x\}$, que, geometricamente, é uma reta no espaço que passa pela origem do R^3.

7. Encontre uma transformação $T : R^2 \rightarrow R^2$, sabendo que $\lambda_1 = 1$ e $\lambda_2 = 2$ são autovalores associados aos autovetores $u = (1, 0)$ e $v = (-2, 1)$, respectivamente.

Solução

Como $V = R^2$ e temos dois autovalores distintos, então os autovetores $u = (1, 0)$ e $v = (-2, 1)$ formam uma base para o R^2.

Deste modo, temos $(x, y) = a(1, 0) + b(-2, 1)$, o que nos leva às equações $a - 2b = x$ e $b = y$. Substituindo b na primeira equação, obtém-se $a = x + 2y$, assim, temos:

$$(x, y) = (x + 2y)(1, 0) + y(-2, 1)$$

Aplicando T em ambos os lados da equação:

$$T(x, y) = (x + 2y)T(1, 0) + yT(-2, 1)$$

Mas como $u = (1, 0)$ e $v = (-2, 1)$ são autovetores associados aos autovalores $\lambda_1 = 1$ e $\lambda_2 = 2$, respectivamente, temos que $T(1, 0) = 1 \cdot (1, 0) = (1, 0)$ e $T(-2, 1) = 2 \cdot (-2, 1) = (-4, 2)$.

Assim,

$$T(x, y) = (x + 2y)(1, 0) + y(-4, 2) = (x - 2y, 2y)$$

8. Suponha que λ seja um autovalor de T associado ao autovetor v e seja k um número real não nulo. Mostre que o operador kT tem um autovetor v associado ao autovalor $k\lambda$.

Solução

Por hipótese, λ é um autovalor de T associado ao autovetor v e, portanto, $T(v) = \lambda \cdot v$.

Agora, $(kT)(v) = kT(v) = k(\lambda \cdot v) = (k\lambda)v$, ou seja, v é um autovetor do operador kT cujo autovalor é dado por $k\lambda$.

9. Já mostramos na Seção 4 que dados dois autovalores distintos seus correspondentes autovalores são LI. Agora suponha que λ_1 e λ_2 são autovalores distintos de um operador $T : R^2 \to R^2$ associados aos autovetores v_1 e v_2. Mostre que $T(v_1)$ e $T(v_2)$ são linearmente independentes.

Solução

Temos por hipótese que $T(v_1) = \lambda_1 \cdot v_1$ e $T(v_2) = \lambda_2 \cdot v_2$.

Para mostrar que $T(v_1)$ e $T(v_2)$ são LI, devemos mostrar que a equação $aT(v_1) + bT(v_2) = 0$ possui apenas a solução trivial, isto é, $a = b = 0$.

De fato,

$$aT(v_1) + bT(v_2) = 0$$
$$a(\lambda_1 v_1) + b(\lambda_2 v_2) = 0$$
$$(a\lambda_1)v_1 + (b\lambda_2)v_2 = 0$$

Mas os autovetores v_1 e v_2 são LI por hipótese, logo a única solução da equação $(a\lambda_1)v_1 + (b\lambda_2)v_2 = 0$ é $a\lambda_1 = 0$ e $b\lambda_2 = 0$. Mas como $\lambda_1 \neq 0$ e $\lambda_2 \neq 0$, segue que $a = b = 0$, como queríamos demonstrar.

10. Seja $T : R^2 \to R^2$ o operador linear definido por:

$$T(x, y) = (2x + 4y, 3x + y)$$

c) Determine uma base do R^2 em relação à qual a matriz do operador T é diagonal.

d) Determine a matriz de T nesta base.

Solução

a) Vamos procurar os autovalores e autovetores de T.

A matriz associada a T é dada por $A = \begin{bmatrix} 2 & 4 \\ 3 & 1 \end{bmatrix}$.

Fazendo $\det(A - \lambda I) = 0$, obtemos o polinômio característico $\lambda^2 - 3\lambda - 10 = 0$, que nos dá os autovalores $\lambda_1 = -2$ e $\lambda_2 = 5$.

Para $\lambda_1 = -2$, obtemos:

$$\begin{bmatrix} 4 & 4 \\ 3 & 3 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} 4x + 4y = 0 \\ 3x + 3y = 0 \end{cases}$$

que nos dá a solução $y = -x$. Assim, temos o autovetor $v_1 = (x, -x) = x(1, -1)$ associado ao autovalor $\lambda_1 = -2$.

Para $\lambda_2 = 5$, obtemos:

$$\begin{bmatrix} -3 & 4 \\ 3 & -4 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} -3x + 4y = 0 \\ 3x - 4y = 0 \end{cases}$$

que nos dá a solução $y = \frac{3}{4}x$.

Assim, temos o autovetor $v_2 = (x, \frac{3}{4}x) = x(1, \frac{3}{4})$.

Como $V = R^2$ e temos dois autovalores distintos, então os autovetores associados são LI e, conseqüentemente, formam uma base para o R^2, cuja matriz de T, nesta base, é diagonal, então a base pedida é $\beta = \{(1, -1), (1, \frac{3}{4})\}$.

b) A matriz de T nesta base é uma matriz diagonal, cujos elementos da diagonal são os autovalores de T, portanto:

$$D = \begin{bmatrix} -2 & 0 \\ 0 & 5 \end{bmatrix}$$

11. Verifique se os operadores dos exercícios 4(b), 4(c) e 4(d) são diagonalizáveis.

Solução

4(b) Temos que $V = R^2$ e, como possui dois autovalores distintos, então seus autovetores são LI e, portanto, formam uma base para o R^2 e, então, o operador T é diagonalizável.

4(c) Não possui autovalores reais, logo não é diagonalizável no campo dos reais.

4(d) Como temos apenas dois autovetores LI, eles não formam uma base para R^3 e, portanto, T não é diagonalizável.