Capítulo 2

Determinantes

2.1 História

A história dos determinantes precede a das matrizes em quase dois séculos. De fato, determinantes foram introduzidos primeiro, de forma independente, por Seki em 1683 e por Leibniz em 1693. Em 1748, determinantes apareceram no Tratado sobre Álgebra, de MacLaurin, incluindo um tratamento da Regra de Cramer até o caso 4x4. Em 1750 o próprio Cramer provou o caso geral de sua regra, aplicando-a ao ajuste de curvas, e, em 1773, Laplace deu uma prova de seu teorema de expansão. O termo determinantes só foi cunhado em 1801 quanto utilizado por gauss. Cauchy foi o Primeiro a usar determinantes no sentido moderno.

Para uma revisão sobre determinantes, acesse:

Conteúdo: https://www.youtube.com/watch?v=fSalJmaYlUU&t=2s

Propriedades:

https://www.youtube.com/watch?v=OfVGBZ_C9ts&list=PL1E3A80A44F4F1669&index=6

2.2 Definições e Terminologia

De maneira geral, entende-se por determinantes a um número associado a uma matriz quadrada. Usamos determinantes para saber se uma matriz é inversível, ou se um sistema admite ou não solução.

Representamos o determinante de uma matriz quadrada A de ordem n por:

$$\det A \text{ ou } |A|$$

Definição 2.1(Termo Principal): Dada uma matriz A de ondem n, chamamos de termo principal ao produto dos elementos da diagonal principal.

$$a_{11} \cdot a_{22} \cdot a_{33} \ldots a_{nn}$$

Definição 2.2(Definição Formal): Chama-se de determinantes de uma matriz quadrada a soma algébrica dos produtos que se obtém efetuando todas as permutações do segundos índices do termo principal, fixando os primeiros índices e fazendo-os preceder do sinal + ou – conforme a permutação dos segundos índices seja par ou impar

2.3 Cálculo dos determinantes 2x2 e 3x3

2.3.1 Cálculo do Determinante 2x2

Seja

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix}$$

O determinante de A é dado por:

$$\det A = a_{11} \cdot a_{22} - a_{12} \cdot a_{21}$$

Observação1: De uma maneira informal, o determinante de uma matriz 2x2 é dado pelo produto da **diagonal principal** menos o produto da **diagonal secundária**.

Exercício 2.1: Calcule o determinante da matriz $A = \begin{bmatrix} 1 & 4 \\ -7 & 2 \end{bmatrix}$

2.3.2 Cálculo de Determinante 3x3

Seja

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix} \begin{matrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{matrix}$$

O determinante de A é dado por:

$$\det A = a_{11} \cdot a_{22} \cdot a_{33} - a_{11} \cdot a_{23} \cdot a_{32} + a_{13} \cdot a_{21} \cdot a_{32} - a_{12} \cdot a_{21} \cdot a_{33} + a_{12} \cdot a_{23} \cdot a_{31} - a_{13} \cdot a_{22} \cdot a_{31}$$

Observação 2: De maneira informa, repetimos as duas primeiras colunas da matriz e fazemos o produto da soma das “diagonais principais” menos o produto da soma das “diagonais secundárias”.

Exercício 2.2: Calcule o determinante da matriz $B = \begin{bmatrix} 2 & 5 & 7 \\ 3 & 1 & 4 \\ 6 & 8 & 2 \end{bmatrix}$

Pare e Pense: O que você pode dizer sobre o determinante de uma matriz de ordem n, cujos elementos são todos iguais a 1? Por quê?

2.4 Propriedades dos Determinantes

(i) Pela definição de determinante, existe um e apenas um elemento de cada linha, e um e somente um elemento de cada coluna da matriz, no desenvolvimento do determinante.

(ii) Se todos os elementos de uma linha ou coluna forem nulos, então $\det A = 0$, isto segue pela propriedade (i)

(iii) Se uma linha de uma matriz for multiplicada por *k*, então o determinante fica multiplicado por *k*.

(iv) Se trocarmos a posição de duas linhas, o determinante troca de sinal.

(v) O determinante de uma matriz que tem duas linhas(colunas) iguais é zero.

(vi) $\det(A \cdot B) = \det A \cdot \det B$

(vii) O determinante de uma matriz diagonal, triangular é igual ao termo principal, isto é, é igual ao produto dos elementos da diagonal principal.

2.5 Processo de Triangularização

Dada uma matriz quadrada *A*, o processo consiste em aplicar operações elementares entre as linhas de uma matriz de modo a transformar a matriz A em uma triangular superior(inferior), ao mesmo tempo que se efetuarão com o $\det A$ as necessárias compensações, quando for o caso, para manter inalterado seu valor, tudo de acordo com as propriedades de determinante já vistas na seção anterior, propriedades (iii) e (iv).

Assim ao tratar com a triangularização, sabemos que os elementos da diagonal principal devem ser sempre iguais a 1, se isto não acontecer, 3 hipóteses podem ocorrer:

1) O pivô é igual a zero, nesse caso deve-se proceder á operação de troca de linhas e multiplicar o $\det A$ por -1, como compensação, isto é, para que $\det A$ conserve o seu valor.

2) O pivô é igual a *k*. Neste caso devem-se multiplicar todos os elementos da linha por $\frac{1}{k}$, com que se obtém o número 1 como pivô dessa linha. Por outro lado, para compensar, isto é, para que $\det A$ mantenha o seu valor, deve-se multiplica-lo pelo inverso de $\frac{1}{k}$, isto é, por *k*.

3) O pivô é igual a 1. Nesse caso, nada a fazer no que diz respeito a diagonal principal.

Exercício 2.3: Calcule o determinante da matriz $C = \begin{bmatrix} -2 & -3 & -1 & -2 \\ -1 & 0 & 1 & -2 \\ -3 & -1 & -4 & 1 \\ -2 & 2 & -3 & -1 \end{bmatrix}$ por triangularização.

ATIVIDADE FORMATIVA II – AVALIAÇÃO COM NOTA

1) A atividade deve ser entregue na data: ____/____/_____
2) A atividade pode ser feito em grupo de 3 alunos.
3) A atividade deve ser entregue no arquivo enviado no e-mail.

Não serão aceitas atividades em folha de caderno, o padrão para trabalhos acadêmicos é folha branca A4.

ATENÇÃO: Atividades não entregues na data indicada terão um desconto de 20% por dia de atraso.

Descrição da Atividade: Aprendemos em sala de aula dois métodos para cálculo de determinantes: Definição e triangularização. Nos Vídeos citados no começo da unidade 2, foram apresentados outros métodos como o *desenvolvimento de Laplace* e a *Regra de Chió*.

Os conteúdos dos vídeos podem ser completados com os livros:

[1] STEINBRUCH, Alfredo; WINTERLE, Paulo. Álgebra linear e geometria analítica. São Paulo: Pearson Education, 2008. 470 p. ISBN 9788576051176.

[2] BOLDRINI,J.L.; COSTA, S.I.R.; RIBEIRO, V.L.F.F; WETZLER,H.G. *Álgebra Linear*. São Paulo: Editora Harper & Row do Brasil Ltda, 1978.

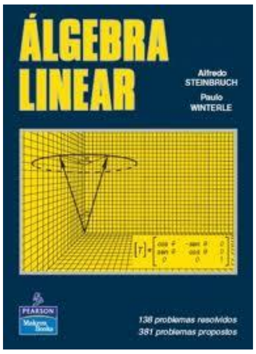
ATIVIDADE:

Item 1: Explique o método de Laplace, ou seja, apresente a expressão genérica do método, o livro [2] acima citado você encontra.

Item 2: Encontre o determinante da matriz abaixo utilizando o *método de Laplace pela 2ª Linha*

$$A = \begin{bmatrix} -2 & 3 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 2 & 3 \\ 1 & -1 & 1 & -2 \\ 4 & -3 & 5 & 1 \end{bmatrix}$$

LISTA DE EXERCÍCIOS - CAPÍTULO 2



STEINBRUCH, A.; WINTERLE, P. *Álgebra Linear*. 2 ed. São Paulo: McGraw-Hill, 1987.

Pgs 461 a 466: 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 13, 15, 16, 17, 18, 19, 20, 21, 22.

BOLDRINI,J.L.; COSTA, S.I.R.; RIBEIRO, V.L.F.F; WETZLER,H.G. *Álgebra Linear*. São Paulo: Editora Harper & Row do Brasil Ltda, 1978.

Pg 90 e 91: 3, 4 e 8

Capítulo 3

Matriz Inversa

Definição 3.1: Seja A uma matriz de ordem n, uma inversa é uma mátria de ordem n denotada por A^{-1} que satisfaz a seguinte propriedade:

$$A \cdot A^{-1} = A^{-1} \cdot A = I$$

:

A inversa é única.

Exemplo 3.1: Se $A = \begin{bmatrix} 2 & 5 \\ 1 & 3 \end{bmatrix}$, então $A^{-1} = \begin{bmatrix} 3 & -5 \\ -1 & 2 \end{bmatrix}$ é a inversa de A, pois

Solução: $A \cdot A^{-1} = \begin{bmatrix} 2 & 5 \\ 1 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3 & -5 \\ -1 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$

Exemplo 3.2: Seja a matriz $A = \begin{bmatrix} 2 & 5 \\ 1 & 3 \end{bmatrix}$, encontre a inversa.

Solução: Para encontrar a inversa de uma matriz, usamos a definição:

$\begin{bmatrix} 2 & 5 \\ 1 & 3 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x & y \\ z & w \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ e então $\begin{bmatrix} 2x+5z & 2y+5w \\ x+3z & y+3w \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$

Isto gera dois sistemas lineares

$\begin{cases} 2x + 5z = 1 \\ x + 3z = 0 \end{cases}$ e $\begin{cases} 2y + 5w = 0 \\ y + 3w = 1 \end{cases}$

Resolvendo-os chegamos aos valores $x = 3;\ y = -5;\ z = -1$ e $w = 2$.

3.1 Cálculo de Inversa 2x2

Seja $A=\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$, então A será invertível se $ad-bc\neq 0$, caso em que

$$A^{-1}=\frac{1}{ab-bc}\begin{bmatrix} d & -b \\ -c & a \end{bmatrix}$$

Se $ad-bc=0$, a matriz não é invetível.

Note que a expressão $ad-bc$, nada mais é que o determinante de uma matriz 2x2.

Teorema 1: Seja *A* uma matriz de ordem *n*, então uma matriz é invertível se $\det A\neq 0$. Uma matriz que não tem inversa é chamada de **singular.**

Exemplo 3.3: Encontre a inversa(se existir) da matriz $A=\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}$.

Solução: Primeiramente vamos calcular o determinante, para saber se a matriz possui inversa ou não.

$\det A=4-6=-2\neq 0$, logo possui inversa.

Então $A^{-1}=-\frac{1}{2}\begin{bmatrix} 4 & -2 \\ -3 & 1 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} -2 & 1 \\ 3/2 & -1/2 \end{bmatrix}$

3.2 Propriedades da Matriz Inversa

(a) $(A^{-1})^{-1}=A$

(b) $(kA)^{-1}=\frac{1}{k}A^{-1}$

(c) $(A\cdot B)^{-1}=B^{-1}A^{-1}$

(d) $(A^{T})^{-1}=(A^{-1})^{T}$

3.3 Matrizes Elementares

Uma matriz elementar é uma matriz obtida a partir da identidade, através da aplicação de uma operação elementar com linhas. Por exemplo:

$$I = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Se trocarmos a linha 2 pela linha 3, obtemos uma nova matriz, chamada de matriz elementar.

$$E = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

Exemplo 3.4: Tome $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 0 & 3 & 1 \\ 2 & 1 & -5 \end{bmatrix}$ e I a matriz identidade de ordem 3. Agora faça os seguintes procedimentos:

1) Troque a linha 1 e 2 da matriz identidade e obtenha a matriz E_1 e multiplique-a pela matriz *A*, ou seja, o que você obtém?

$$E_1 \cdot A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 0 & 3 & 1 \\ 2 & 1 & -5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 3 & 1 \\ 1 & 2 & -1 \\ 2 & 1 & -5 \end{bmatrix}$$

2) Faça a operação $-2L_1 + L_3 \to L_3$ na matriz identidade obtendo a matriz E_2 e multiplique-a pela matriz *A*, o que você obtém? (Faça)

Teorema: Se *A* é uma matriz, o resultado da aplicação de uma operação com linhas de *A*, é o mesmo que o resultado da multiplicação da matriz elementar *E* correspondente à operação com linhas pela matriz *A*.

O procedimento para inversão de matrizes é a seguinte:

$$I = E_k \cdot E_{k-1} \cdot \cdots \cdot E_3 \cdot E_2 \cdot E_1 \cdot A$$

$$I = (E_k \cdot E_{k-1} \cdot \cdots \cdot E_3 \cdot E_2 \cdot E_1 \cdot I) \cdot A$$

Pela definição de inversa, temos que $E_k \cdot E_{k-1} \cdot \cdots \cdot E_3 \cdot E_2 \cdot E_1 \cdot I = A^{-1}$.

Assim temos:

Teorema: Se uma matriz *A* pode ser reduzida à matriz identidade por uma seqüência de operações elementares com linhas, então *A* é inversível e a matriz inversa de *A* é obtida a partir da identidade, aplicando-se a mesma seqüência de operação com linhas.

3.4 Inversão de Matrizes por Meio de Operações Elementares

1° Passo: Coloque a matriz a ser invertida e a matriz identidade de mesma ordem lado a lado, separadas por um traço:

$$\begin{bmatrix} A & \vdots & I \end{bmatrix}$$

2° Passo: Aplicar operações elementares nas duas matrizes simultaneamente, até transformarmos *A* em *I*. No lugar de *I* encontramos A^{-1}.

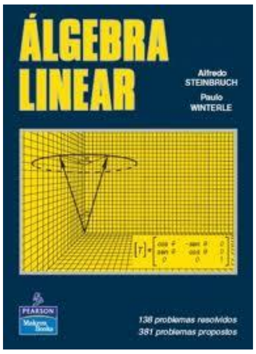
$$\begin{bmatrix} I & \vdots & A^{-1} \end{bmatrix}$$

Exercício 3.1: Encontre a inversa das seguintes matrizes

$$A = \begin{bmatrix} 12 & 7 \\ 5 & 3 \end{bmatrix} \qquad B = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 4 & 2 & 2 \\ 2 & 5 & 3 \end{bmatrix}$$

Resposta: $A^{-1} = \begin{bmatrix} 3 & -7 \\ -5 & 12 \end{bmatrix}$ $\qquad B^{-1} = \begin{bmatrix} -\frac{1}{8} & \frac{3}{8} & -\frac{1}{8} \\ -\frac{1}{4} & 0 & \frac{1}{4} \\ \frac{1}{2} & -\frac{1}{4} & 0 \end{bmatrix}$

LISTA DE EXERCÍCIOS - CAPÍTULO 3



STEINBRUCH, A.; WINTERLE, P. *Álgebra Linear*. 2 ed. São Paulo: McGraw-Hill, 1987.

<u>Pgs 498 a 504</u>: 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12, 13, 14, 15, 16, 17, 18, 19, 20, 21, 22, 23, 24, 25, 26.