2- Funções

Funções

Uma **função** f é uma terna $(X, Y, x \mapsto y)$, em que X e Y são dois conjuntos e $x \mapsto y$ é uma regra que associa a cada elemento x de X um único y de Y.

Uma função pode ser indicada por

$$\boxed{f: X \to Y, y = f(x)} \quad \text{ou} \quad \boxed{\begin{aligned} f: X &\to Y \\ x &\mapsto y \end{aligned}}$$

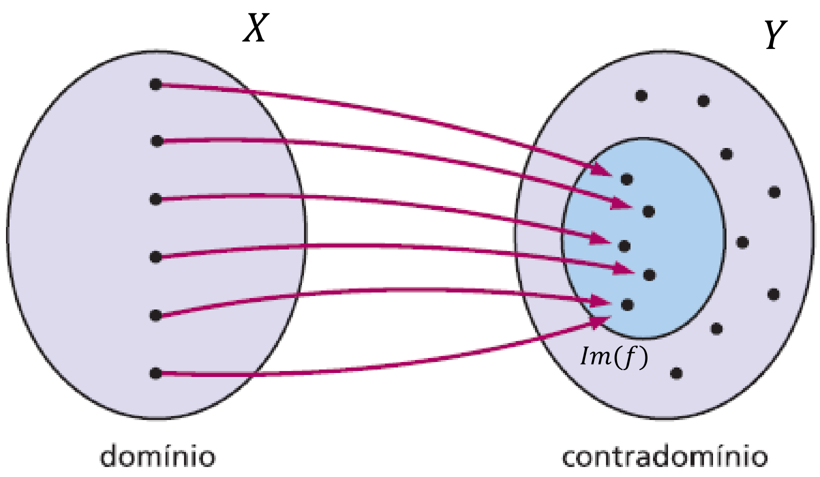
O conjunto X é chamado **domínio** da função f e será denotado por $D(f)$ ou D_f.

O conjunto Y é chamado **contradomínio** da função f.

O conjunto $Im(f) = \{f(x) : x \in X\} \subset Y$ é chamado de **conjunto imagem** da função f.

O elemento $f(x) \in Y$ é chamado de **imagem do elemento** $x \in X$ pela função f.

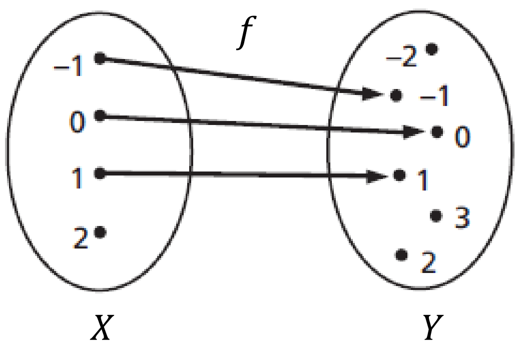
É comum chamar x de **variável independente** e y de **variável dependente** da função f.



Exemplo

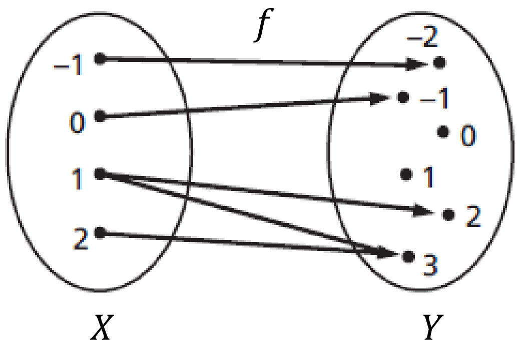
Sejam $X = \{-1, 0, 1, 2\}$ e $Y = \{-2, -1, 0, 1, 2, 3\}$. Estabeleça se $f\colon X \to Y$ é uma função ou não.

a)



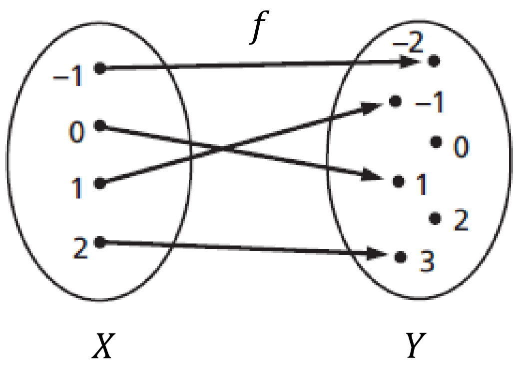
f não é uma função, pois o elemento $2 \in X$ não está associado a nenhum elemento de Y.

b)



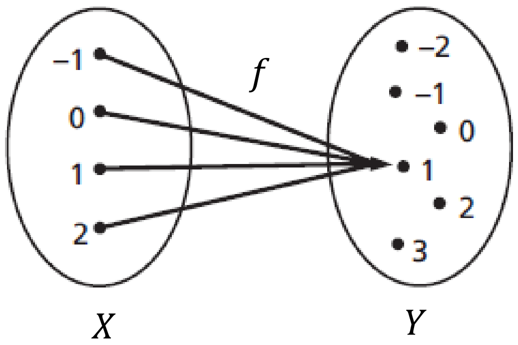
f não é uma função, pois o elemento $1 \in X$ está associado com dois elementos de Y.

c)



f é uma função

d)



f é uma função

Função de uma variável real a valores reais

Uma **função de uma variável real a valores reais** é uma função $f: X \to Y$, em que X e Y são subconjuntos de $\mathbb{R}$.

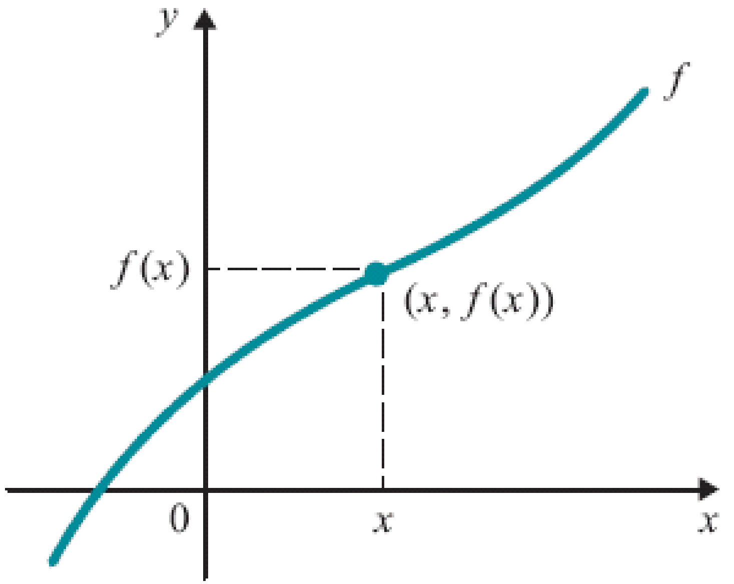
Nesta disciplina só trabalharemos com funções de uma variável real a valores reais.

Gráfico de uma função

Seja $f: X \to Y$ uma função. O conjunto

$$G_f = \{(x, f(x)) : x \in X\} \subset \mathbb{R}^2$$

é chamado de **gráfico** da função f.

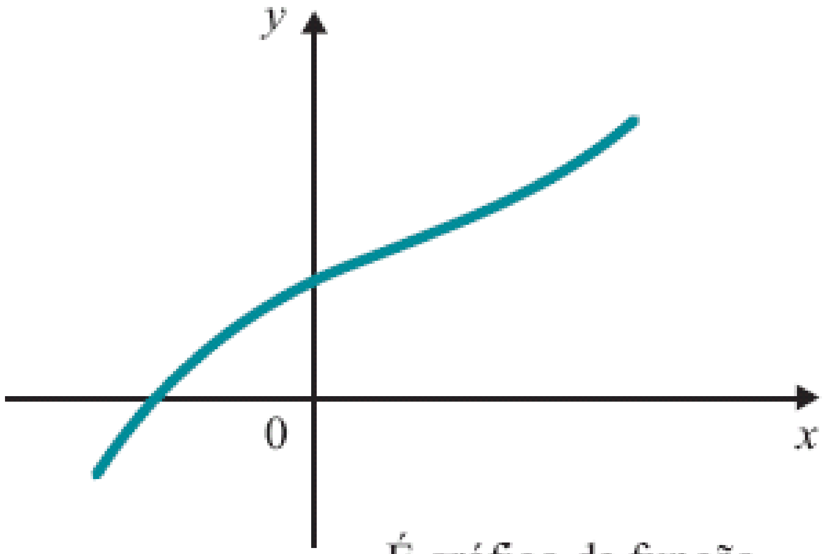


O gráfico de f é um subconjunto do conjunto de todos os pares ordenados (x, y) de números reais.

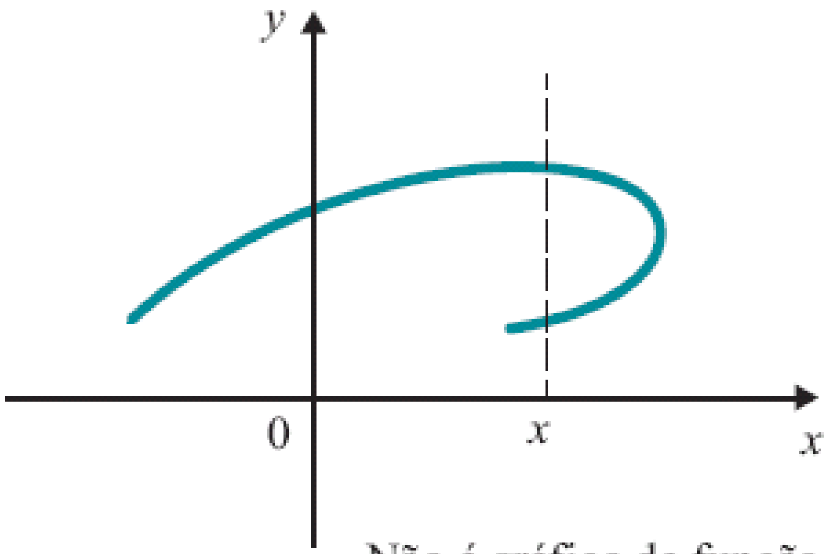
Munindo-se o plano de um sistema ortogonal de coordenadas cartesianas, o gráfico de f pode então ser pensado como o lugar geométrico descrito pelo ponto $(x, f(x))$ quando x percorre o domínio de f.

Observação:

Nem toda curva no plano coordenado é gráfico de uma função. Uma função f pode possuir apenas um valor $f(x)$ para cada x em seu domínio, de modo que nenhuma reta vertical pode ter uma intersecção com o gráfico de uma função mais de uma vez.



É gráfico de função

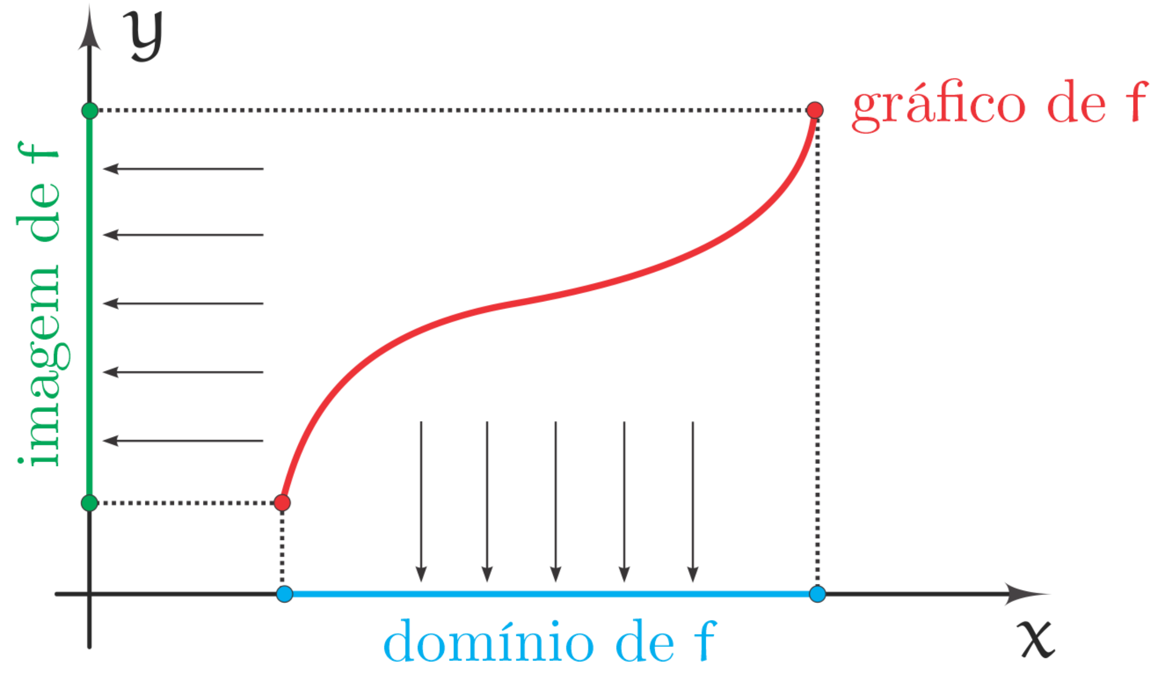


Não é gráfico de função

Domínio e Imagem

Dado o gráfico de uma função f, temos que:

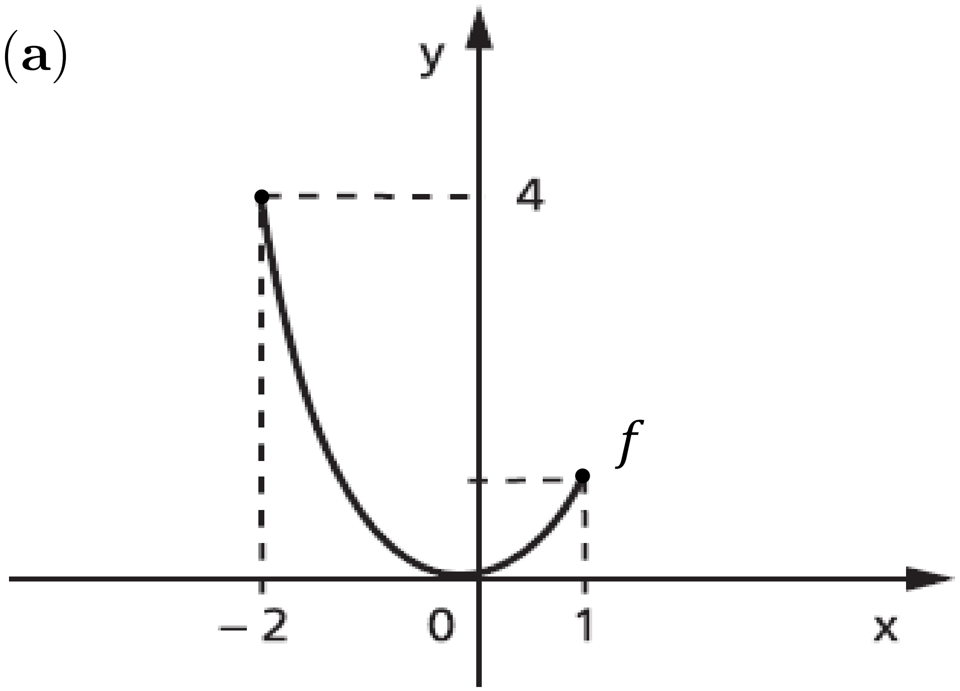
- **Domínio de f**: é o conjunto formado por todas as abscissas dos pontos do gráfico de f.
- **Imagem de f**: é o conjunto formado por todas as ordenadas dos pontos do gráfico de f.



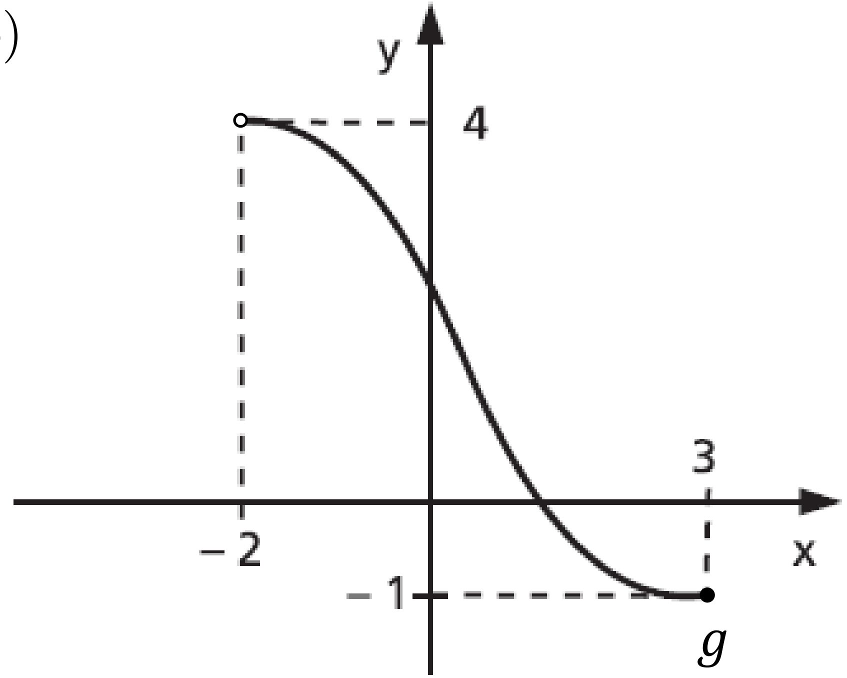
Exemplo

Os seguintes gráficos representam funções. Determine o domínio e o conjunto imagem de cada uma delas.

(a)



(b)



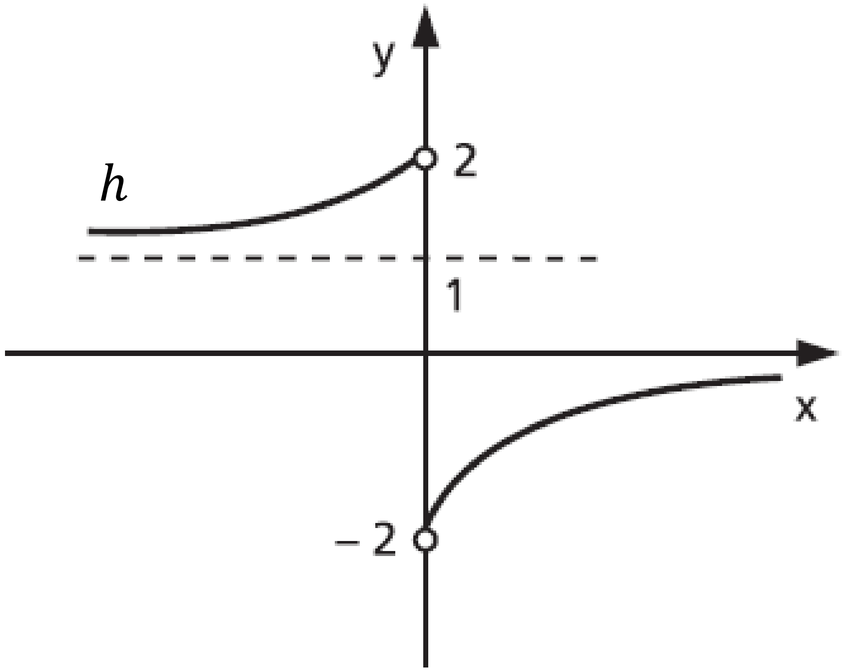
$D(f) = \{x \in \mathbb{R}: -2 \leq x \leq 1\} = [-2,1]$

$Im(f) = \{y \in \mathbb{R}: 0 \leq y \leq 4\} = [0,4]$

$D(g) = \{x \in \mathbb{R}: -2 < x \leq 3\} = (-2,3]$

$Im(g) = \{y \in \mathbb{R}: -1 \leq y < 4\} = [-1,4)$

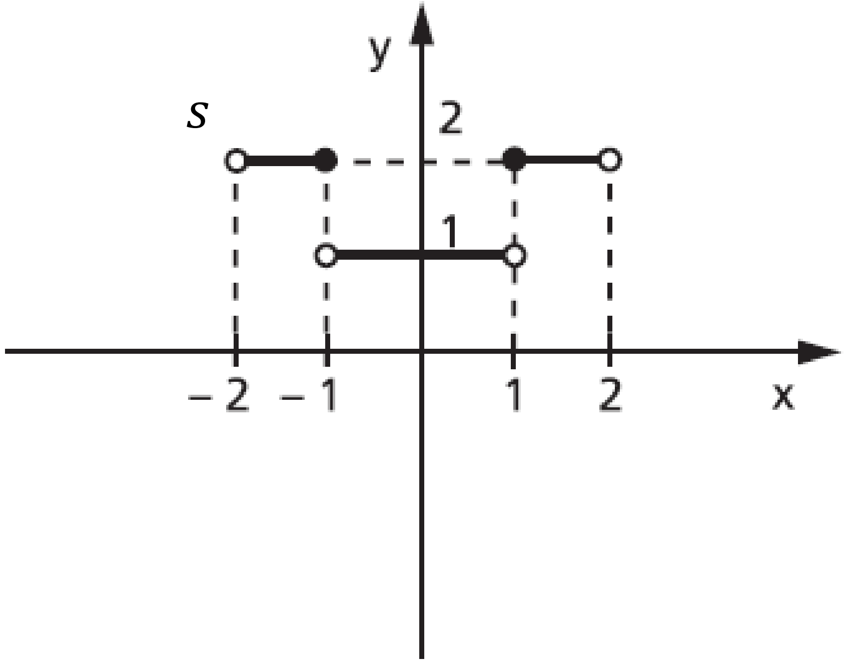
$\mathbf{(c)}$



$$D(h) = \{x \in \mathbb{R}: x \neq 0\} = (-\infty, 0) \cup (0, +\infty)$$

$$Im(h) = \{y \in \mathbb{R}: -2 < y < 0 \text{ ou } 1 < y < 2\}$$
$$= (-2, 0) \cup (1, 2)$$

$\mathbf{(d)}$



$$D(s) = \{x \in \mathbb{R}: -2 < x < 2\} = (-2, 2)$$

$$Im(s) = \{1, 2\}$$

Observação: Por simplificação, deixaremos muitas vezes de explicitar o domínio e o contradomínio de uma função; quando tal ocorrer, ficará implícito que o contradomínio é $\mathbb{R}$ e o domínio é o "maior" subconjunto de $\mathbb{R}$ para o qual faz sentido a regra da função.

Exemplo: Determine o domínio das seguintes funções:

(**a**) $f(x) = 2x - 5$. Essa regra é válida para qualquer número real, logo $D(f) = \mathbb{R}$.

(**b**) $f(x) = x^2 + 2x - 3$. Essa regra é válida para qualquer número real, logo $D(f) = \mathbb{R}$.

(**c**) $f(x) = \sqrt{x-2}$. Essa regra é válida quando $x - 2 \geq 0 \Rightarrow x \geq 2$.
Logo, $D(f) = \{x \in \mathbb{R}: x \geq 2\} = [2, +\infty)$.

(**d**) $f(x) = \frac{1}{x+5}$. Essa regra é válida quando $x + 5 \neq 0$, ou seja, $x \neq -5$.
Logo, $D(f) = \{x \in \mathbb{R}: x \neq -5\} = \mathbb{R} - \{-5\}$.

(**e**) $f(x) = \frac{1}{x^2+4}$. Essa regra é válida para qualquer número real, uma vez que o denominador nunca se anula. Logo, $D(f) = \mathbb{R}$.

(**f**) $f(x) = \sqrt[3]{x^8 + 3x - 1}$. Essa regra é válida para qualquer número real, logo $D(f) = \mathbb{R}$.

Análise de Gráficos

Analisando o gráfico de uma função podemos obter informações importantes a respeito do seu comportamento.

(1) Estudo do sinal de uma função

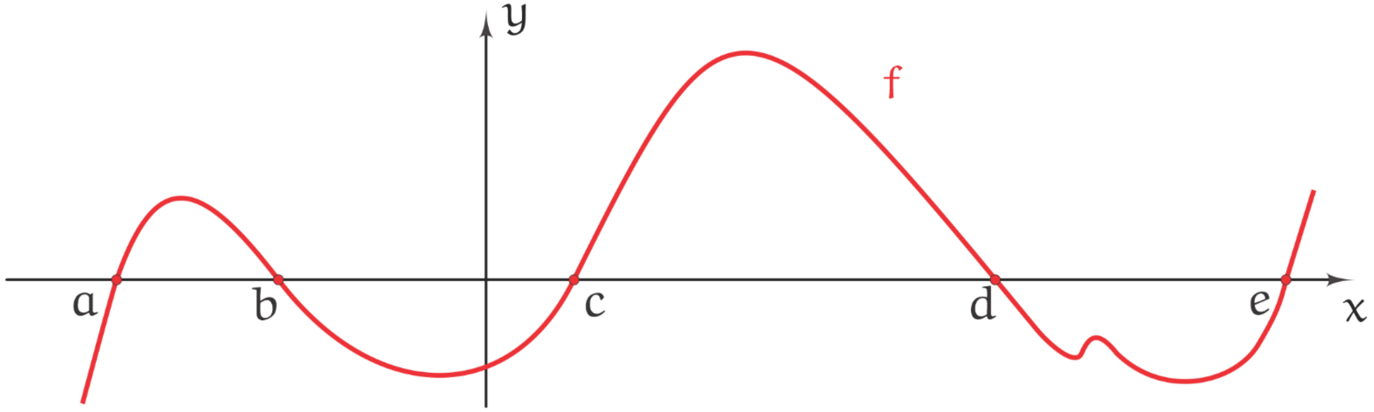
Seja $y = f(x)$ uma função de variável real. Estudar o sinal de f significa determinar os valores de x para os quais y é positivo, os valores de x para os quais y é zero e os valores de x para os quais y é negativo. Temos que:

- Os pontos de intersecção do gráfico com o eixo x apresentam ordenadas $y = 0$, ou seja, suas abscissas x_0 são tais que $f(x_0) = 0$.
  Essas abscissas são os **zeros** ou **raízes** da função.

- Os pontos do gráfico situados acima do eixo x apresentam ordenadas $y > 0$, ou seja, suas abscissas x_0 são tais que $f(x_0) > 0$. Nesses pontos, dizemos que a função dada é **positiva.**

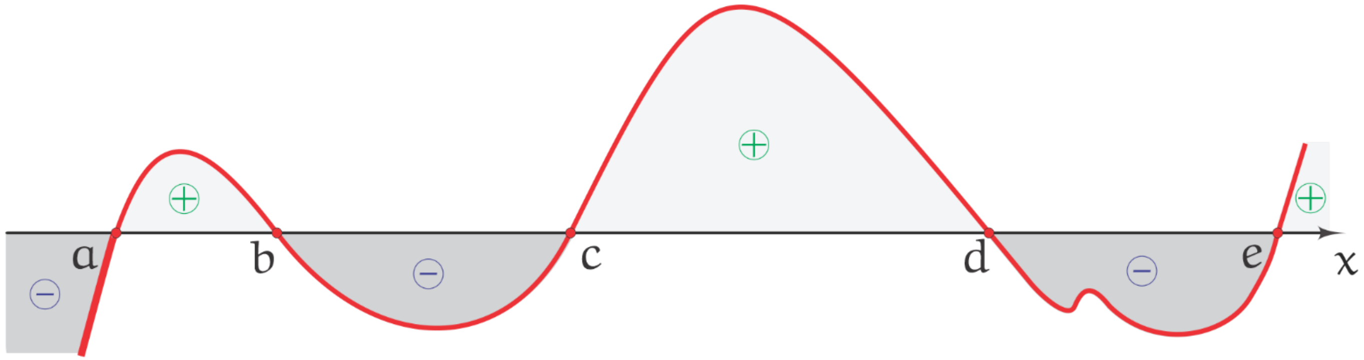
- Os pontos do gráfico situados abaixo do eixo x apresentam ordenadas $y < 0$, ou seja, suas abscissas x_0 são tais que $f(x_0) < 0$. Nesses pontos, dizemos que a função dada é **negativa.**

Exemplo: Seja f uma função de uma variável real cujo gráfico é dado abaixo.



Temos que:

- a, b, c, d e e são raízes de f;
- f é positiva nos intervalos: $(a, b), (c, d)$ e $(e, +\infty)$;
- f é negativa nos intervalos: $(-\infty, a), (b, c)$ e (d, e).

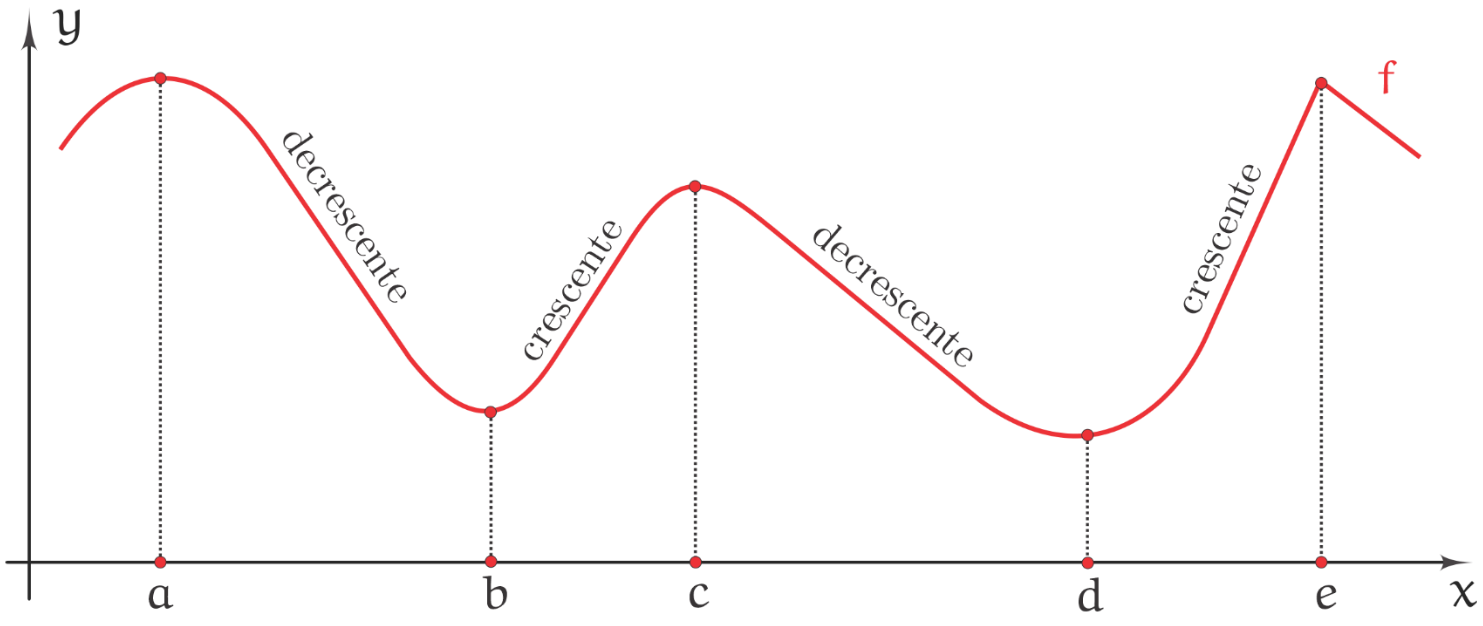


(2) Crescimento e decrescimento de uma função

Seja $y = f(x)$ uma função de uma variável real a valores reais e seja X um subconjunto do domínio de f.

- Se para quaisquer $x_1, x_2 \in X$ com $x_1 < x_2$, tem-se $f(x_1) < f(x_2)$, dizemos que f é **crescente em $\boldsymbol{X}$**.
- Se para quaisquer $x_1, x_2 \in A$ com $x_1 < x_2$, tem-se $f(x_1) > f(x_2)$, dizemos que f é **decrescente em $\boldsymbol{X}$**.

Exemplo: Seja f uma função cujo gráfico é dado a seguir.



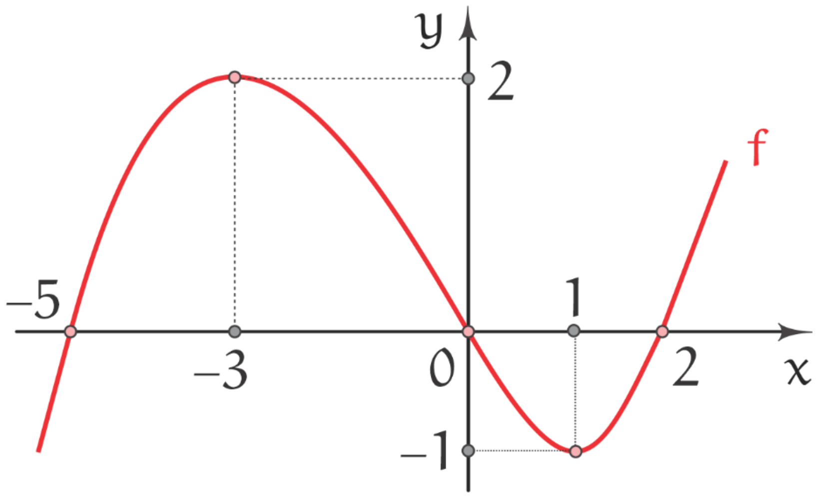
Temos que:

- f é crescente nos intervalos: $(-\infty,\ a), (b, c)$ e (d, e).
- f é decrescente nos intervalos: $(a, b), (c, d)$ e $(e, +\infty)$.

Exemplo: O gráfico ao lado representa uma função f de uma variável real.

Determine:

(**a**) os valores de $f(-3), f(0)$ e $f(1)$;
(**b**) as raízes de f;
(**c**) os intervalos em que f é crescente;
(**d**) os intervalos em que f é decrescente;
(**e**) os intervalos em que f é positiva;
(**f**) os intervalos em que f é negativa.



Solução:

(**a**) Temos que $f(-3) = 2, f(0) = 0$ e $f(1) = -1$.

(**b**) As raízes de f são $-5, 0$ e 2.

(**c**) Intervalos em que f é crescente: $(-\infty, -3)$ e $(1, +\infty)$.

(**d**) Intervalo em que f é decrescente: $(-3, 1)$.

(**e**) Intervalos em que f é positiva: $(-5, 0)$ e $(2, +\infty)$.

(**f**) Intervalos em que f é negativa: $(-\infty, -5)$ e $(0, 2)$.

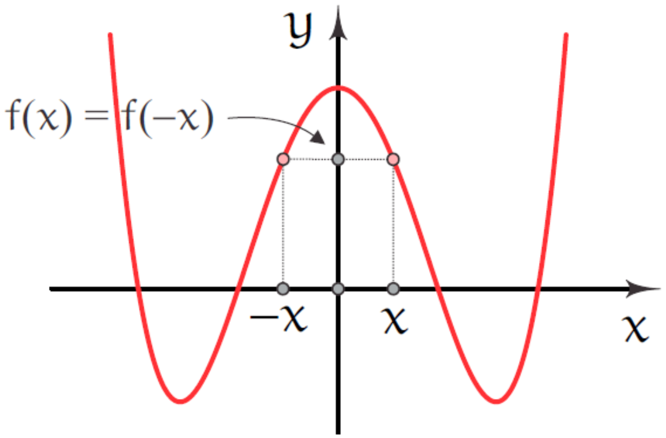
(3) Funções Pares e Funções Ímpares

Seja $f\colon X \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ uma função.

- Dizemos que f é **par** quando $f(-x) = f(x)$, para todo $x \in X$.
- Dizemos que f é **ímpar** quando $f(-x) = -f(x)$, para todo $x \in X$.

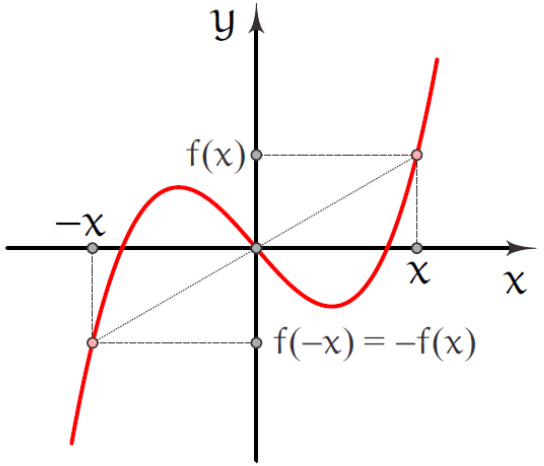
Propriedade Geométrica das Funções Pares

O gráfico de uma função par é simétrico em relação ao eixo das ordenadas (eixo y).



Propriedade Geométrica das Funções Ímpares

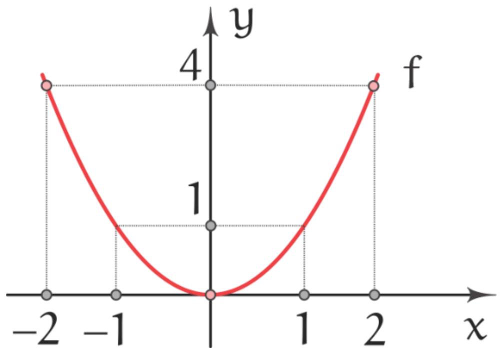
O gráfico de uma função ímpar é simétrico em relação à origem do sistema de coordenadas.



Exemplos

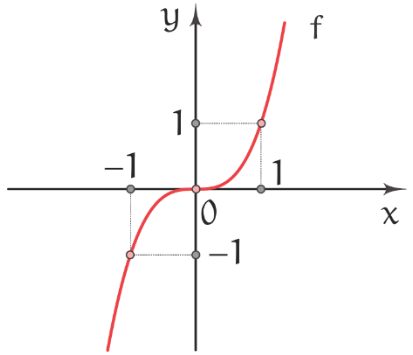
(**1**) A função $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dada por $f(x) = x^2$ é par, pois

$$f(-x) = (-x)^2 = x^2 = f(x), \text{ para todo } x \in \mathbb{R}.$$



(**2**) A função $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dada por $f(x) = x^3$ é ímpar, pois

$$f(-x) = (-x)^3 = -x^3 = -f(x), \text{ para todo } x \in \mathbb{R}.$$



(**3**) A função $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dada por $f(x) = x^2 + x$ não é par nem ímpar. Por exemplo, observe que $f(1) = 2$ e $f(-1) = 0$, logo $f(-1) \neq f(1)$ e $f(-1) \neq -f(1)$.

Exercícios

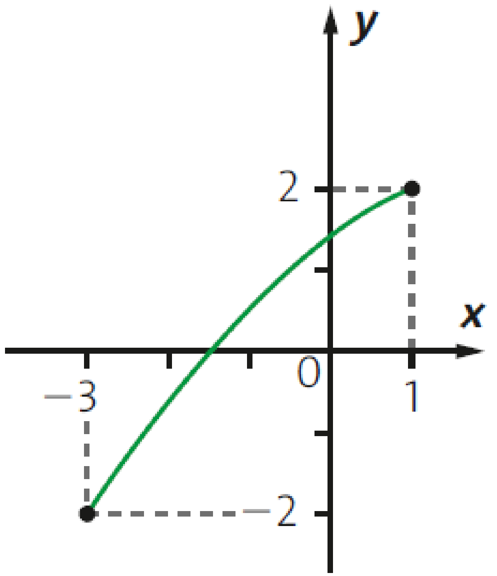
(1) Determine o domínio das seguintes funções:

(a) $f(x) = 3x^5 - 4x^3 + 2$ **(b)** $g(x) = \frac{x-1}{x^2-4}$ **(c)** $h(x) = \sqrt{x-1}$

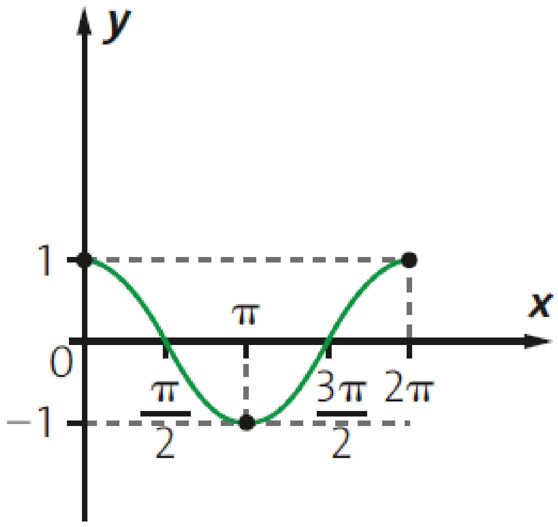
(d) $p(x) = \frac{1}{\sqrt{x+1}}$ **(e)** $r(x) = \frac{\sqrt{x+2}}{x-2}$ **(f)** $s(t) = \frac{1}{\sqrt[3]{2t+3}}$

(2) Determine o domínio e a imagem das funções cujos gráficos são dados a seguir.

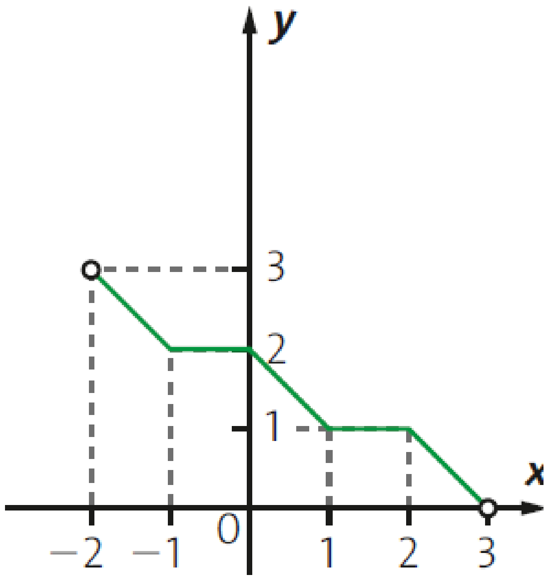
(a)



(b)



(c)



(3) Considere a função $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, definida por $f(x) = \frac{x+2}{x^2+1}$. Calcule:

(a) $f(1)$ **(b)** $f(0)$ **(c)** $f(-1)$ **(d)** $f\left(\frac{1}{2}\right)$ **(e)** $f(2x)$ **(f)** $f(x+1)$

(4) Seja a função $f: \mathbb{R} - \{1\} \to \mathbb{R}$, definida por $f(x) = \frac{3x+2}{x-1}$. Qual é o elemento do domínio que tem imagem 2?

(5) É dada uma função real tal que

1. $f(x+y) = f(x)f(y)$
2. $f(1) = 2$
3. $f\left(\sqrt{2}\right) = 4$.

Calcule $f(3+\sqrt{2})$.

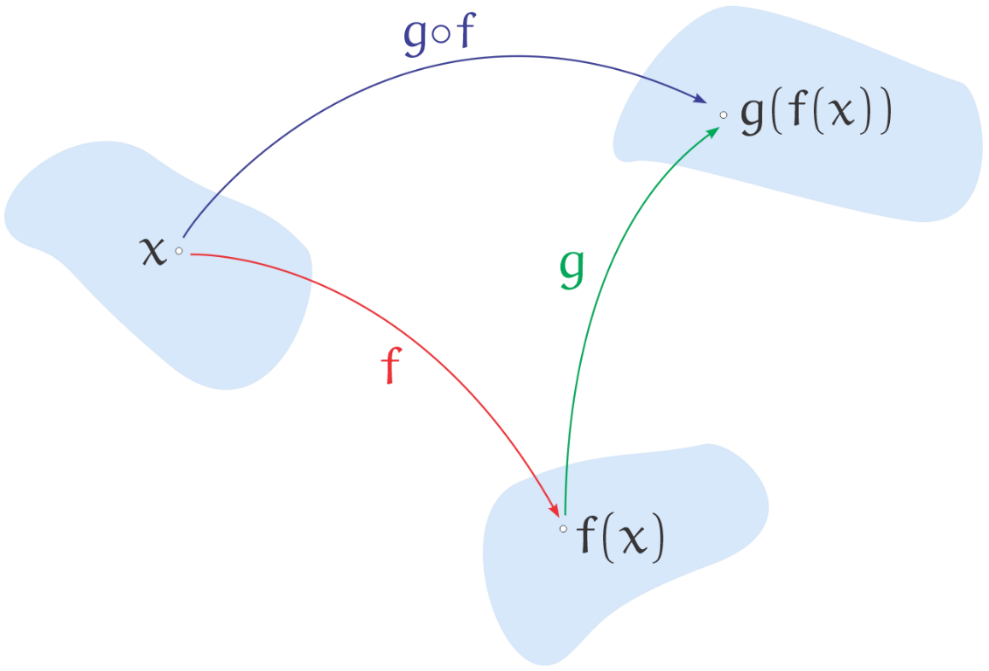
(6) Diga se a função é par, ímpar ou nenhuma delas.

(a) $f(x) = x^4 - x^2$ **(b)** $f(x) = 2x^3$ **(c)** $f(x) = \frac{x}{x^2-1}$ **(d)** $f(x) = 2x^2 - x$

Função Composta

Sejam f e g duas funções tais que $Im(f) \subset D(g)$. A **função composta de g e f** é definida por

$$\boxed{(g \circ f)(x) = g\big(f(x)\big), \text{ com } x \in D(f).}$$



Observações:

(1) A função composta de g com f está definida **apenas** quando o conjunto imagem de f está contido no domínio de g.

(2) Note que $\boldsymbol{g \circ f}$ **possui o mesmo domínio que** $\boldsymbol{f}$.

Exemplos

(**1**) Sejam $f: \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$, dada por $f(x) = \sqrt{x}$ e $g: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, definida por $g(x) = 2x + 1$.
Temos que

- $Im(f) = \mathbb{R}_+$
- $D(g) = \mathbb{R}$.

Logo, $Im(f) \subset D(g)$ e podemos obter a função composta $g \circ f: \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$, dada por

$$(g \circ f)(x) = g\big(f(x)\big) = 2f(x) + 1 = 2\sqrt{x} + 1.$$

Por outro lado, temos que $Im(g) = \mathbb{R}$ não está contida em $D(f) = \mathbb{R}_+$, logo $f \circ g$ não está definida.

(**2**) Sejam $f, g: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, dadas por $f(x) = x + 1$ e $g(x) = x^2$.
Neste caso, $Im(f) = \mathbb{R}$ está contida no $D(g) = \mathbb{R}$ e também $Im(g) = \mathbb{R}_+$ está contida no $D(f) = \mathbb{R}$.
Logo, podemos calcular $g \circ f$ e $f \circ g$:

$$(g \circ f)(x) = g\big(f(x)\big) = (f(x))^2 = (x + 1)^2 = x^2 + 2x + 1,$$

$$(f \circ g)(x) = f\big(g(x)\big) = g(x) + 1 = x^2 + 1.$$

Exercícios

(1) Verifique que $Im(f) \subset D_g$ e determine a composta $g \circ f$, sendo:

(a) $f(x) = x + 2$ e $g(x) = 3x + 1$.
(b) $f(x) = x^2 + 2$ e $g(x) = \sqrt{x}$

Solução:

(a) Temos que $Im(f) = \mathbb{R}$ e $D_g = \mathbb{R}$.
Logo, $Im(f) \subset D_g$ e $g \circ f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ é dada por

$$(g \circ f)(x) = g\big(f(x)\big) = 3f(x) + 1 = 3(x + 2) + 1 = 3x + 7.$$

(b) Neste caso, temos que $Im(f) = [2, +\infty)$ e $D_g = [0, +\infty)$.
Logo, $Im(f) \subset D_g$ e $g \circ f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ é dada por

$$(g \circ f)(x) = g\big(f(x)\big) = \sqrt{f(x)} = \sqrt{x^2 + 2}\,.$$

(**2**) Sejam $f, g\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, definidas por $f(x) = x^2 + 4x - 5$ e $g(x) = 2x - 3$.

(**a**) Obtenha as leis que definem $f \circ g$ e $g \circ f$.
(**b**) Calcule $(f \circ g)(2)$ e $(g \circ f)(2)$.
(**c**) Determine os valores do domínio da função $f \circ g$ que produzem imagem 16.

Solução:

(**a**) Temos que

$$\begin{aligned}(f \circ g)(x) &= f\big(g(x)\big)\\ &= \big(g(x)\big)^2 + 4g(x) - 5\\ &= (2x-3)^2 + 4(2x-3) - 5\\ &= (4x^2 - 12x + 9) + 8x - 12 - 5\\ &= 4x^2 - 4x - 8\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}(g \circ f)(x) &= g\big(f(x)\big)\\ &= 2f(x) - 3\\ &= 2(x^2 + 4x - 5) - 3\\ &= 2x^2 + 8x - 10 - 3\\ &= 2x^2 + 8x - 13\end{aligned}$$

(**b**) $(f \circ g)(2) = 4 \cdot 2^2 - 4 \cdot 2 - 8 = 16 - 8 - 8 = 0$

$(g \circ f)(2) = 2 \cdot 2^2 + 8 \cdot 2 - 13 = 8 + 16 - 13 = 11$

Solução:

(**c**) Queremos obter os valores de x tais que $(f \circ g)(x) = 16$, ou seja

$$4x^2 - 4x - 8 = 16 \Rightarrow 4x^2 - 4x - 24 = 0$$
$$\overset{(\div\, 4)}{\Rightarrow} x^2 - x - 6 = 0$$

Temos que $\Delta = b^2 - 4ac \Rightarrow \Delta = (-1)^2 - 4.1.(-6) = 25$, logo

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{1 \pm 5}{2}$$

isto é, $x_1 = 3$ ou $x_2 = -2$.

(3) Determine o "maior" conjunto domínio D_f de modo que $Im(f) \subset D_g$, em seguida determine a função composta $g \circ f$, sendo $f(x) = x + 3$ e $g(x) = \frac{2}{x+2}$.

1ª Solução:

Como $g(x) = \frac{2}{x+2}$, então $D_g = \{x \in \mathbb{R}: x \neq -2\} = \mathbb{R} - \{-2\}$.
Para que $Im(f) \subset D_g$, então $-2 \notin Im(f)$.
Assim, devemos retirar do domínio de f os valores de x tais que $f(x) = -2$.
Veja que

$$f(x) = -2 \Rightarrow x + 3 = -2 \Rightarrow x = -5.$$

Logo, o domínio de f deve ser igual a $D_f = \{x \in \mathbb{R}: x \neq -5\} = \mathbb{R} - \{-5\}$. Neste caso, temos que a imagem de f é $Im(f) = \mathbb{R} - \{-2\}$, e portanto, $Im(f) \subset D_g$.

A composta de g com f é a função $g \circ f: \mathbb{R} - \{-5\} \rightarrow \mathbb{R}$, dada por

$$(g \circ f)(x) = g\big(f(x)\big) = \frac{2}{f(x)+2} = \frac{2}{x+3+2} = \frac{2}{x+5} .$$

2ª Solução:

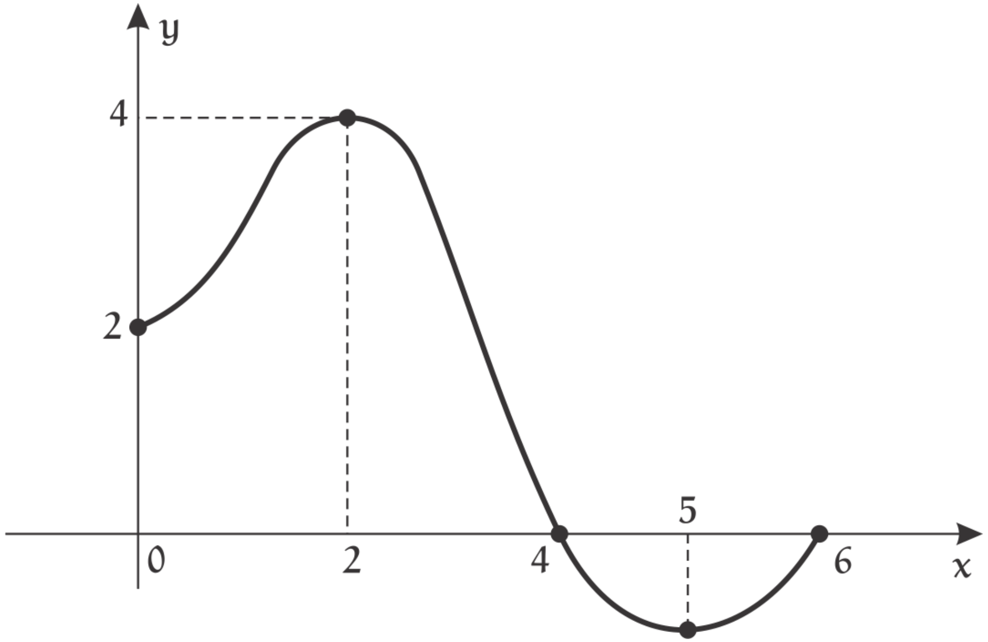
Observe que o "maior" conjunto D_f possível, satisfazendo a condição desejada, deve ser igual ao conjunto para o qual a função composta de g com f existe, e neste caso temos que $D_f = D_{g\circ f}$.

Calculando $g \circ f$, obtemos:

$$(g \circ f)(x) = g\big(f(x)\big) = \frac{2}{f(x)+2} = \frac{2}{x+3+2} = \frac{2}{x+5}\ ,$$

cujo domínio é $D_{g\circ f} = \mathbb{R} - \{-5\}$. Portanto, $D_f = \mathbb{R} - \{-5\}$.

(4) Considere o gráfico da função $f\colon [0,6] \to \mathbb{R}$ representado a seguir.



Com base nesse gráfico, marque para as alternativas a seguir (**V**) Verdadeira ou (**F**) Falsa e **justifique as falsas.**

(F) f é decrescente no intervalo $[2,6]$. Temos que f é decrescente no intervalo $[2,5]$.

(V) O conjunto dos números $x \in [0,6]$ tais que $f(x) \leq 0$ é o intervalo $[4,6]$. f é negativa em $[4,6]$.

(V) $(f \circ f \circ f)(2) = 2$ Temos que $(f \circ f \circ f)(2) = (f \circ f)\big(f(2)\big) = (f \circ f)(4) = f\big(f(4)\big) = f(0) = 2.$

(V) O número real $1 + \sqrt{2}$ pertence ao conjunto imagem da função f.

Exercícios

(1) Considere as funções reais f e g, definidas por $f(x) = x^2 + 2$ e $g(x) = x - 3$, obtenha as leis que definem:

(a) $f \circ g$ **(b)** $g \circ f$ **(c)** $f \circ f$ **(d)** $g \circ g$

(2) Dadas as funções reais definidas por $f(x) = 3x + 2$ e $g(x) = 2x + a$, determine o valor de a de modo que se tenha $f \circ g = g \circ f$.

(3) Sejam as funções reais $f(x) = 2x + 7$ e $(f \circ g)(x) = x^2 - 2x + 3$. Determine a lei da função g.

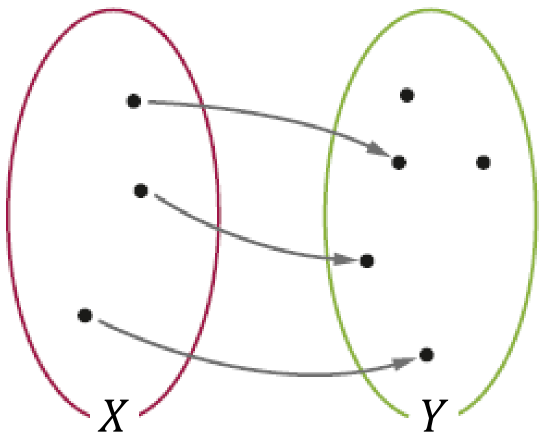
(4) Sejam as funções reais $g(x) = 2x - 3$ e $(f \circ g)(x) = 2x^2 - 4x + 1$. Determine a lei da função f.

Propriedades de uma Função

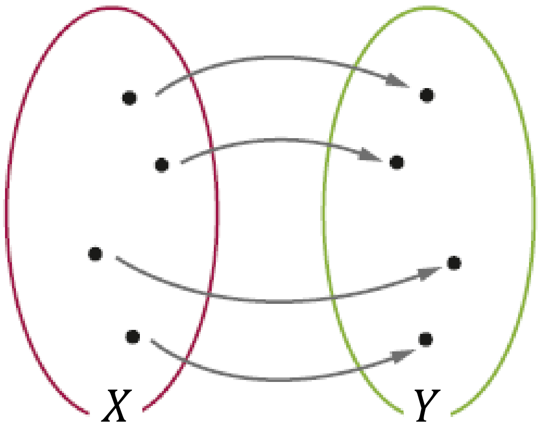
Função Injetiva ou Injetora

Uma função $f: X \to Y$ é **injetiva** (ou **injetora)** quando elementos diferentes de X são transformados por f em elementos diferentes de Y, ou seja, não há elemento em Y que seja imagem de mais de um elemento de X. Matematicamente:

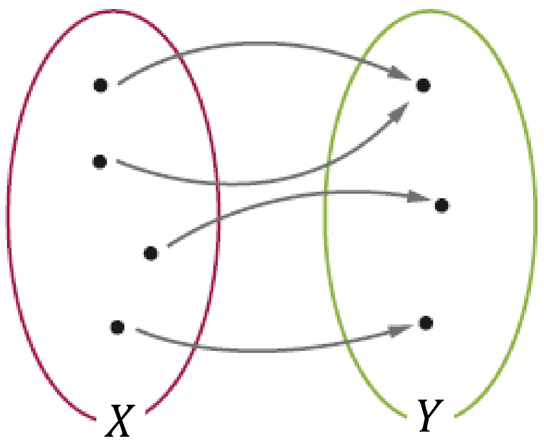
$\boxed{x_1 \neq x_2 \Rightarrow f(x_1) \neq f(x_2)}$ ou, equivalentemente, $\boxed{f(x_1) = f(x_2) \Rightarrow x_1 = x_2\,.}$



função injetiva



função injetiva



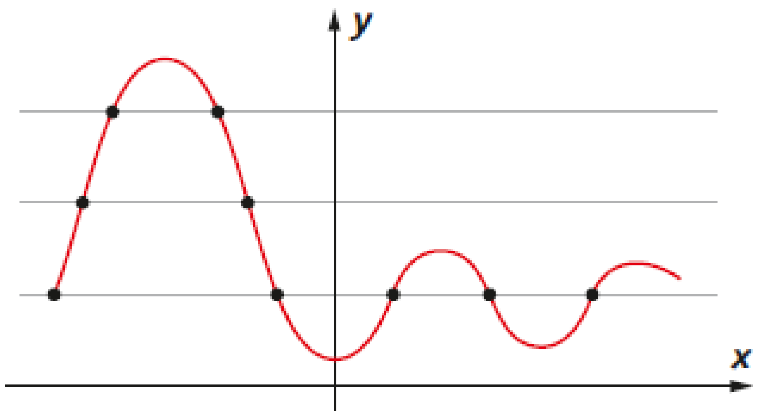
função não injetiva

(Não há elemento em Y que seja imagem de mais de um elemento de X.)

(Há um elemento em Y que é imagem de dois elementos distintos de X.)

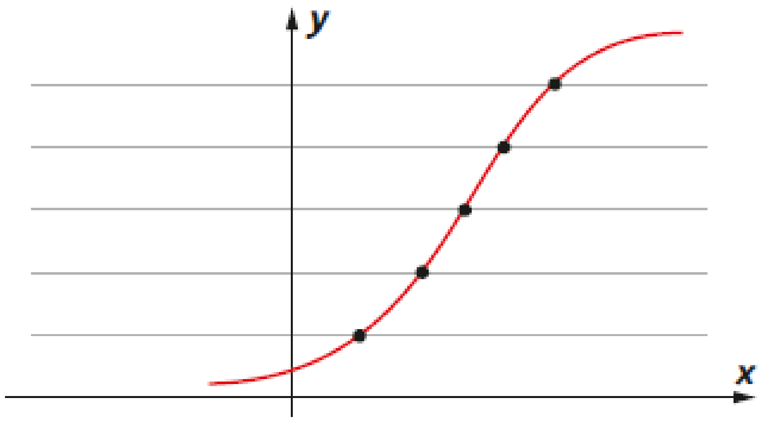
Observação: Podemos verificar se uma função é injetiva olhando seu gráfico. Sabemos que, se a função é injetiva, não há elemento do conjunto imagem que seja imagem de mais de um elemento do domínio. Assim, imaginando retas horizontais cortando o gráfico, essas retas só podem cruzar o gráfico uma única vez para cada valor de y.

a) As linhas horizontais intersectam o gráfico mais de uma vez.



Então, a função não é injetiva.

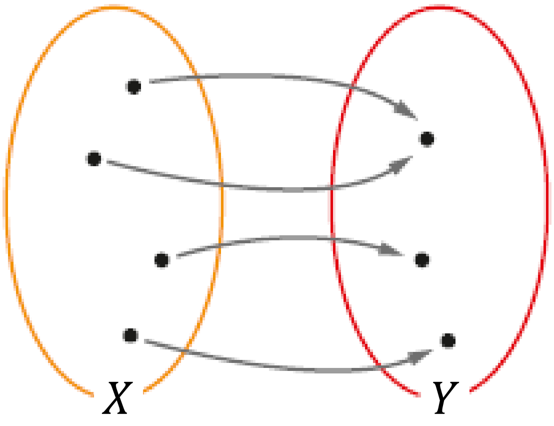
b) As linhas horizontais **nunca** intersectam o gráfico mais de uma vez.



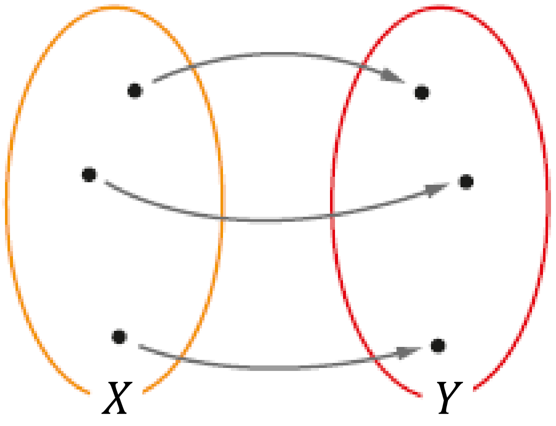
Então, a função é injetiva.

Função Sobrejetiva ou Sobrejetora

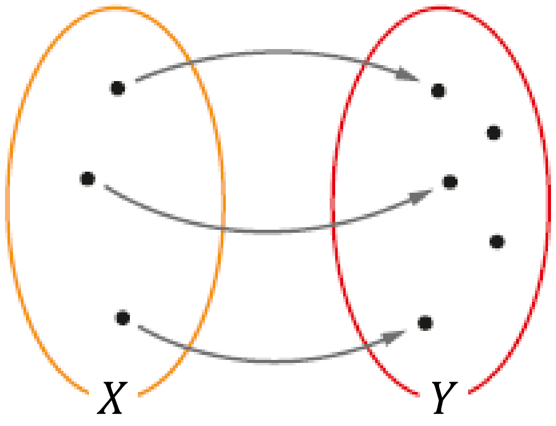
Uma função $f: X \to Y$ é **sobrejetiva** (ou **sobrejetora**) quando, para qualquer elemento $y \in Y$, pode-se encontrar um elemento $x \in X$ tal que $f(x) = y$. Ou seja, f é sobrejetiva quando todo elemento de Y é imagem de pelo menos um elemento de X, isto é, quando $Im(f) = Y$.



função sobrejetiva
$Im(f) = Y$



função sobrejetiva
$Im(f) = Y$

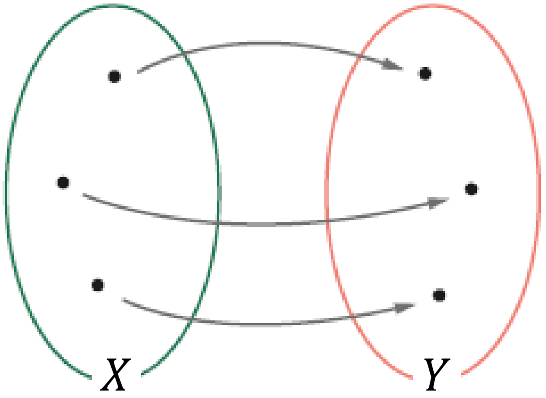


função não sobrejetiva

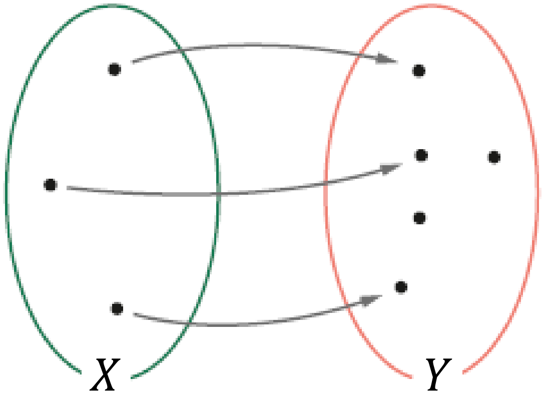
(Há elementos em Y sem correspondência em X. Logo, $Im(f) \neq Y$)

Função Bijetiva ou Bijetora

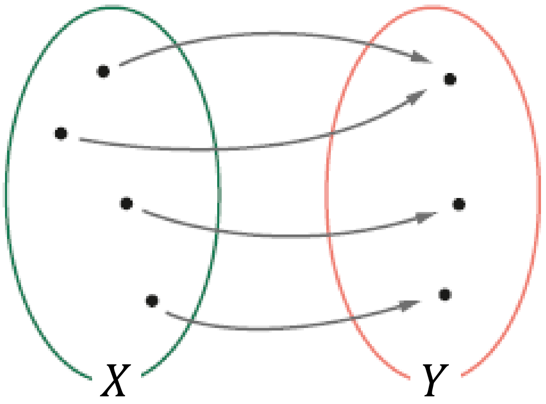
Uma função $f: X \to Y$ é **bijetiva (ou bijetora)** quando f é, simultaneamente, injetiva e sobrejetiva. Quando isso ocorre dizemos que há uma **bijeção** ou uma **correspondência biunívoca** entre os conjuntos X e Y.



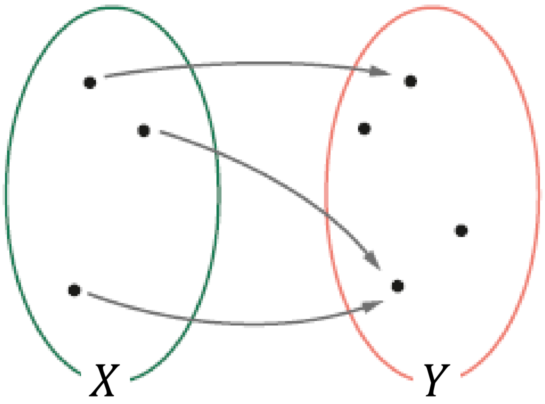
função bijetiva



não é bijetiva
(É injetiva, mas não sobrejetiva.)



não é bijetiva
(É sobrejetiva, mas não injetiva.)



não é bijetiva
(Não é injetiva nem sobrejetiva.)

Exemplos

(1) Prove que a função $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, definida por $f(x) = 3x + 2$ é bijetora.

Solução:

(**i**) f é injetora:

Dados $x_1, x_2 \in D_f = \mathbb{R}$, temos que:

$$f(x_1) = f(x_2) \Rightarrow 3x_1 + 2 = 3x_2 + 2 \Rightarrow 3x_1 = 3x_2 \Rightarrow x_1 = x_2,$$

ou seja, f é injetora.

(**ii**) f é sobrejetora:

Vamos mostrar que qualquer que seja $y \in CD_f = \mathbb{R}$, existe $x \in D_f = \mathbb{R}$ tal que $f(x) = y$.
Isolando x na expressão da função, obtemos:

$$y = 3x + 2 \Leftrightarrow 3x = y - 2 \Leftrightarrow x = \frac{y-2}{3}.$$

Desse modo, basta tomarmos $x = \frac{y-2}{3}$, que teremos:

$$f(x) = f\left(\frac{y-2}{3}\right) = 3\left(\frac{y-2}{3}\right) + 2 = y - 2 + 2 = y.$$

Logo, f é sobrejetora.

(**2**) Determine se as funções a seguir são injetoras, sobrejetoras, bijetoras ou nenhuma delas.

(**a**) $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ f(x) = x^3$

- Sejam $x_1, x_2 \in D_f = \mathbb{R}$, temos que:

$$f(x_1) = f(x_2) \Rightarrow x_1^3 = x_2^3 \Rightarrow \sqrt[3]{x_1^3} = \sqrt[3]{x_2^3} \Rightarrow x_1 = x_2.$$

  Logo, f é injetora.

- Qualquer que seja $y \in CD_f = \mathbb{R}$, existe $x \in D_f = \mathbb{R}$ tal que $f(x) = y$. Basta tomar $x = \sqrt[3]{y}$, que teremos

$$f(x) = f\left(\sqrt[3]{y}\right) = \left(\sqrt[3]{y}\right)^3 = y.$$

  Logo, $Im(f) = \mathbb{R}$ e, portanto, f é sobrejetora.

- Como f é injetora e sobrejetora, então ela é bijetora.

(**b**) $g: \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ g(x) = |x|$

Veja que:

- g não é injetora, por exemplo, $3, -3 \in \mathbb{R}$ e $g(3) = g(-3) = 3$, ou seja, elementos distintos possuem a mesma imagem.
- g não é sobrejetora, uma vez que a $Im(g) = \mathbb{R}_+$ é diferente do contradomínio de $g,\ CD_g = \mathbb{R}$.
- Logo, g também não é bijetora.

(**c**) $h: \mathbb{R} \to \mathbb{R}_+,\ h(x) = |x|$

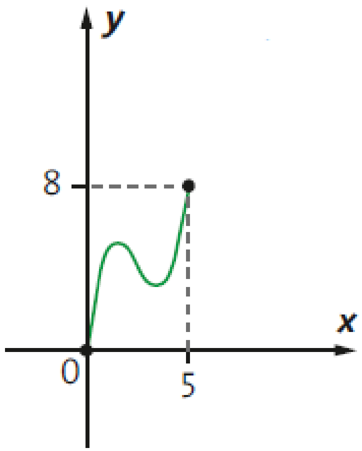
Veja que a função h possui a mesma lei da função g do item anterior, diferenciando apenas no contradomínio, que agora é dado por $\mathbb{R}_+$.

- Como no item anterior, h não é injetora.
- No entanto, agora $Im(h) = \mathbb{R}_+$ coincide com o seu contradomínio. Logo, h é sobrejetora.
- Por fim, h não é bijetora.

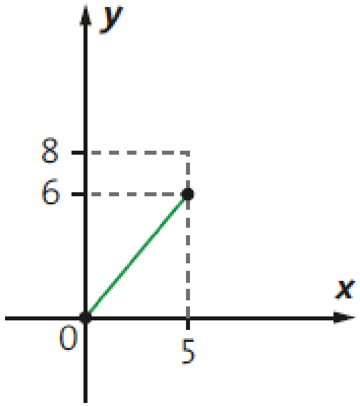
Exercícios

(1) Analisando os gráficos a seguir, verifique se as funções são injetoras, sobrejetoras, bijetoras ou nenhuma delas.

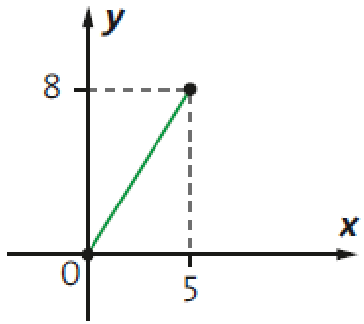
a) $f: [0, 5] \to [0, 8]$



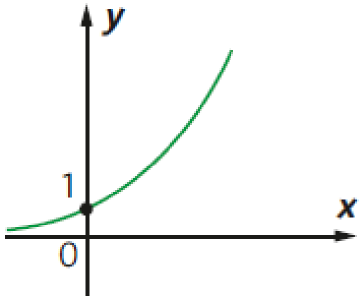
b) $f: [0, 5] \to [0, 8]$



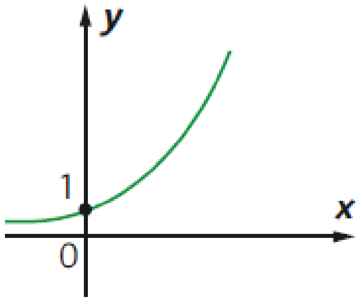
c) $f: [0, 5] \to [0, 8]$



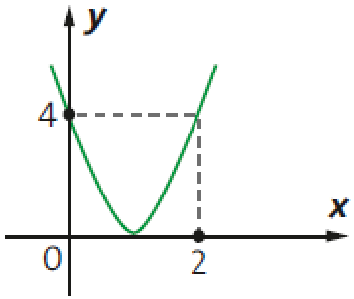
d) $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$



e) $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}_+^*$



f) $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$



(2) Determine se as funções a seguir são injetoras, sobrejetoras, bijetoras ou nenhuma delas.

(a) $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}, f(x) = 3x - 1$

(b) $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}, f(x) = 1 - x^2$

(c) $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}_+ , f(x) = |x - 1|$

(d) $f: \mathbb{R}^* \to \mathbb{R}, f(x) = \frac{1}{x}$

(3) Determine o valor de b em $B = \{y \in \mathbb{R}: y \geq b\}$ de modo que a função f de $\mathbb{R}$ em B, definida por $f(x) = x^2 - 4$ seja sobrejetora.

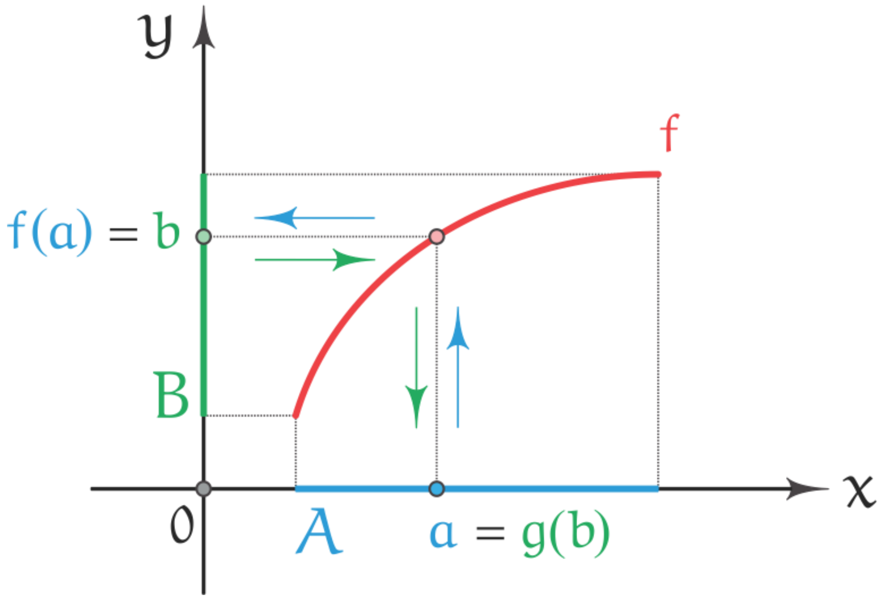
Função Inversa

Seja $f: A \subset \mathbb{R} \to B \subset \mathbb{R}$ uma função bijetora. Então, podemos definir a função $g: B \to A$ tal que

$$f(a) = b \Leftrightarrow g(b) = a.$$

A função g é chamada de **inversa** da função f e indicada por $g = f^{-1}$. Neste caso, dizemos que f é **invertível**, e temos que

$$\boxed{f(a) = b \Leftrightarrow f^{-1}(b) = a.}$$

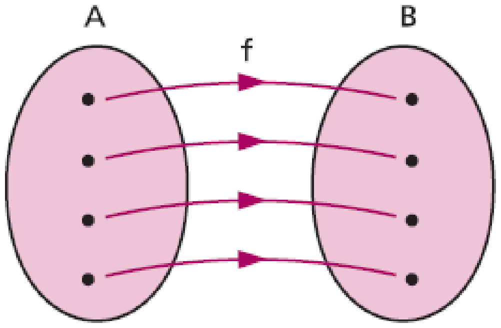


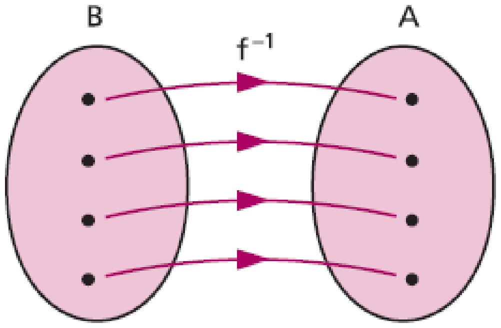
Observações:

(1) $D(f^{-1}) = B = Im(f)$ e $Im(f^{-1}) = A = D(f)$.

(2) $(x, y) \in f \Leftrightarrow (y, x) \in f^{-1}$.

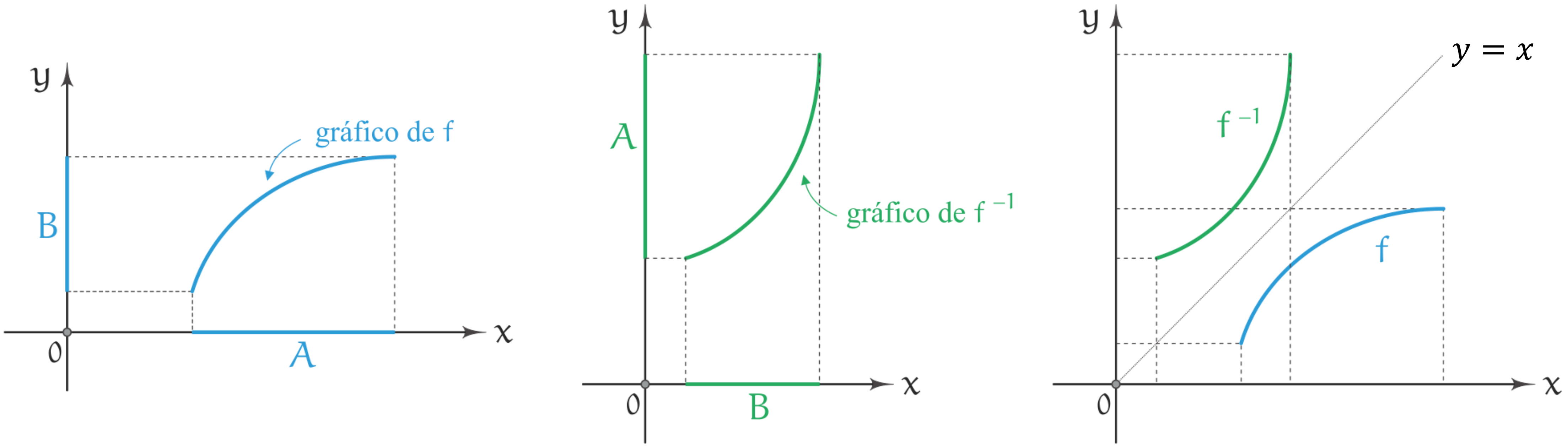
(3) $(f^{-1})^{-1} = f$.





Propriedade dos Gráficos de Funções Invertíveis

O gráfico de uma função $f\colon A \to B$ invertível e o gráfico de sua inversa $f^{-1}\colon B \to A$, com $A, B \subset \mathbb{R}$, são simétricos em relação ao gráfico da função $y = x$ (bissetriz dos quadrantes ímpares).



Determinação da Função Inversa

Dada a função bijetora $f: A \to B$, definida pela sentença $y = f(x)$, para obtermos a expressão que define sua inversa $f^{-1}: B \to A$, procedemos do seguinte modo:

(I) Isole o x na lei da função f;
(II) Troque as variáveis de lugar, isto é, troque o x pelo y e y por x.

Exemplo: Determine a função inversa das seguintes funções bijetoras:

(**a**) $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ \ f(x) = 2x - 4$

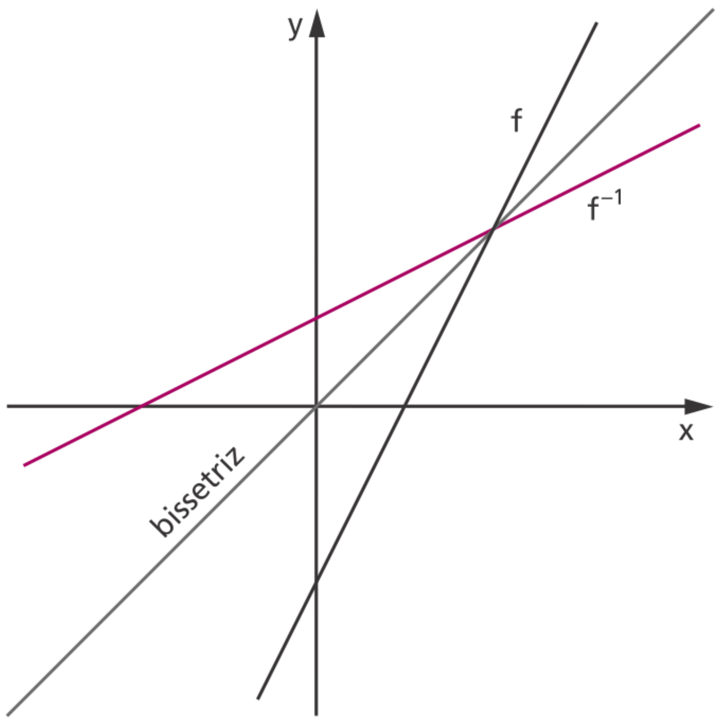
I) Isolando x na expressão da função:

$$y = 2x - 4 \Rightarrow 2x = y + 4 \Rightarrow x = \frac{y+4}{2}$$

II) Trocando x e y de lugar:

$$y = \frac{x+4}{2}$$

Logo, a função inversa de f é dada por $f^{-1}(x) = \frac{x+4}{2}$.



$(\mathbf{b})\ f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ \ f(x) = x^3$

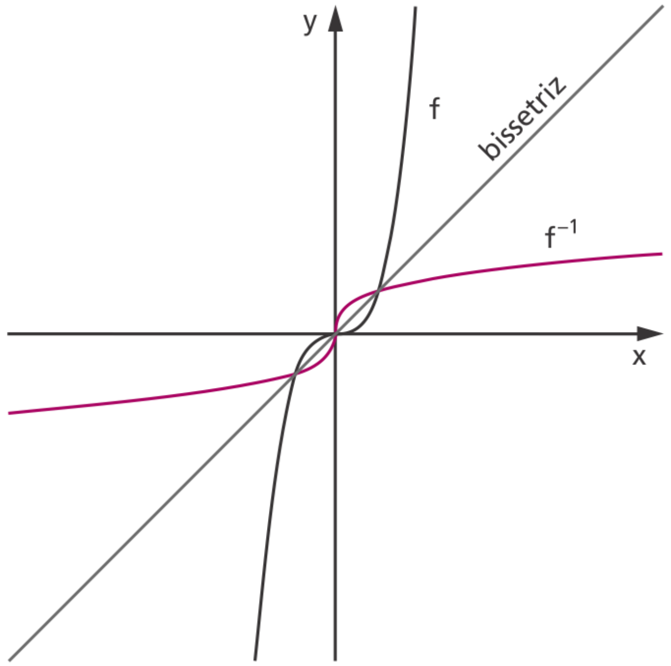
I) Isolando x na expressão da função:

$$y = x^3 \Rightarrow \sqrt[3]{y} = \sqrt[3]{x^3} \Rightarrow \sqrt[3]{y} = x \Rightarrow x = \sqrt[3]{y}$$

II) Trocando x e y de lugar:

$$y = \sqrt[3]{x}$$

Logo, a função inversa de f é dada por $f^{-1}(x) = \sqrt[3]{x}$.



Propriedades de Funções Invertíveis

(1) Composta de funções inversas entre si

Seja $f\colon A \to B$ uma função invertível. Se f^{-1} é a inversa de f, então:

$$(f^{-1} \circ f)(a) = f^{-1}\big(f(a)\big) = f^{-1}(b) = a = Id(a),\ \forall\ a \in A$$

$$(f \circ f^{-1})(b) = f\big(f^{-1}(b)\big) = f(a) = b = Id(b),\ \forall\ b \in B$$

sendo $Id\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ a função identidade, dada por $Id(x) = x$, cujo gráfico é a reta bissetriz dos quadrantes ímpares.

(2) A inversa da composta

Sejam $f\colon A \to B$ e $g\colon B \to C$ funções invertíveis. Então,

$$(g \circ f)^{-1} = f^{-1} \circ g^{-1}.$$

Exercícios

(1) Prove que cada função abaixo é bijetora e obtenha a sua inversa.

(a) $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \ \ f(x) = 2x - 5$

(b) $g: \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \ \ g(x) = \sqrt[3]{x - 1}$

(c) $h: \mathbb{R} - \{4\} \to \mathbb{R} - \{1\}, \ \ h(x) = \frac{x+1}{x-4}$

(2) Considere a função bijetora $f: \mathbb{R}^* \to \mathbb{R} - \{4\}, \ \ f(x) = \frac{4x+2}{x}$. Qual é a função inversa de f?

(3) Construa num mesmo plano cartesiano os gráficos de f e f^{-1}.

(a) $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \ \ f(x) = 2x + 1$

(b) $f: \mathbb{R}^* \to \mathbb{R}^*, \ \ f(x) = \frac{1}{x}$

(4) Dadas as funções f e g, determine a função inversa de $g \circ f$.

(a) $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \ \ f(x) = 4x + 1$ e $g: \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \ \ g(x) = 3x - 5$

(b) $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \ \ f(x) = x^3$ e $g: \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \ \ g(x) = 2x + 3$