(3) Produto Misto

- Vimos que é possível definir dois produtos distintos para vetores: o produto escalar (que é um número) e o produto vetorial (que é um vetor).
- Vamos definir o produto misto que se trata de uma combinação dos dois produtos já estudados.

Definição: Seja $Oxyz$ sistema de coordenadas cartesianas ortogonais no espaço com base canônica $B = \{\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}\}$. Sejam $\vec{u} = (x_1, y_1, z_1), \vec{v} = (x_2, y_2, z_2)$ e $\vec{w} = (x_3, y_3, z_3)$ vetores com coordenadas em $Oxyz$. Chama-se **produto misto** de $\vec{u}$,$\vec{v}$ e $\vec{w}$ (tomados nessa ordem) ao <u>número real</u> $\vec{u} \cdot (\vec{v} \times \vec{w})$.

De maneira prática, temos que

$$\vec{u} \cdot (\vec{v} \times \vec{w}) = det \begin{bmatrix} x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \\ x_3 & y_3 & z_3 \end{bmatrix}.$$

O produto misto de $\vec{u}$,$\vec{v}$ e $\vec{w}$ é indicado por $(\vec{u}, \vec{v}, \vec{w})$ ou $[\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}]$.

Exemplo: O produto misto de $\vec{u} = (-1, -3, 1), \vec{v} = (1, 0, 1)$ e $\vec{w} = (2, 1, 1)$ é dado por

$$(\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}) = \vec{u} \cdot (\vec{v} \times \vec{w}) = det \begin{bmatrix} -1 & -3 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \end{bmatrix} = 0 - 6 + 1 - 0 + 1 + 3 = -1.$$

Propriedades do Produto Misto

Sejam $\vec{u}, \vec{v}$ e $\vec{w}$ vetores no espaço.

$(\mathbf{1})$ O produto misto $(\vec{u}, \vec{v}, \vec{w})$ muda de sinal ao trocarmos a posição de dois vetores, ou seja,

$$\begin{aligned}(\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}) &= -(\vec{v}, \vec{u}, \vec{w}) \\ &= -(\vec{w}, \vec{v}, \vec{u}) \\ &= -(\vec{u}, \vec{w}, \vec{v})\end{aligned}$$

$(\mathbf{2})$ $(\vec{u}+\vec{x}, \vec{v}, \vec{w}) = (\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}) + (\vec{x}, \vec{v}, \vec{w})$

$$(\vec{u}, \vec{v}+\vec{x}, \vec{w}) = (\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}) + (\vec{u}, \vec{x}, \vec{w})$$

$$(\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}+\vec{x}) = (\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}) + (\vec{u}, \vec{v}, \vec{x})$$

$(\mathbf{3})$ $(\alpha\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}) = (\vec{u}, \alpha\vec{v}, \vec{w}) = (\vec{u}, \vec{v}, \alpha\vec{w}) = \alpha(\vec{u}, \vec{v}, \vec{w})$, onde $\alpha \in \mathbb{R}$.

$(\mathbf{4})$ $(\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}) = 0$ se, e somente se, os vetores $\vec{u}, \vec{v}$ e $\vec{w}$ forem **coplanares.**
Particularmente, se algum dos três vetores for nulo, ou se dois dos vetores forem paralelos, temos o produto misto igual a zero.

Demonstração do item (4):

$\boxed{(\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}) = 0 \text{ se, e somente se, os vetores } \vec{u}, \vec{v} \text{ e } \vec{w} \text{ forem } \textbf{coplanares.}}$

Admitindo-se que $(\vec{u},\vec{v},\vec{w})=0$, ou seja, $\vec{u}\cdot(\vec{v}\times\vec{w})=0$, conclui-se que $(\vec{v}\times\vec{w})\perp\vec{u}$. Por outro lado, no estudo do produto vetorial vimos que o vetor $\vec{v}\times\vec{w}$ é também ortogonal a $\vec{v}$ e $\vec{w}$. Assim, como $\vec{v}\times\vec{w}$ é ortogonal aos três vetores $\vec{u}$, $\vec{v}$ e $\vec{w}$, estes são coplanares (Figura 4.1).

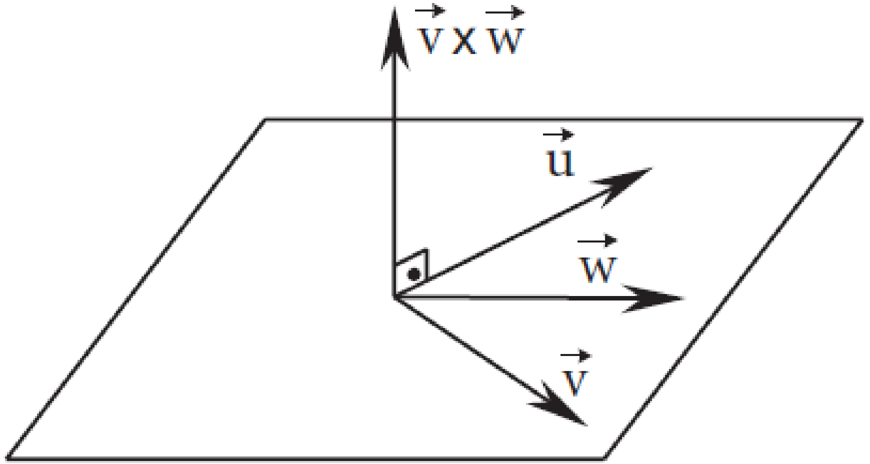


Figura 4.1

Reciprocamente, admitindo-se que $\vec{u}$, $\vec{v}$ e $\vec{w}$ sejam coplanares, o vetor $\vec{v}\times\vec{w}$, por ser ortogonal a $\vec{v}$ e $\vec{w}$, é também ortogonal a $\vec{u}$.

Ora, se $\vec{u}$ e $\vec{v}\times\vec{w}$ são ortogonais, o produto escalar deles é igual a zero, ou seja,

$$\vec{u}\cdot(\vec{v}\times\vec{w})=(\vec{u},\vec{v},\vec{w})=0$$

Exercícios

(1) Verificar se são coplanares os vetores $\vec{u} = (2, -1, 1), \vec{v} = (1, 0, -1)$ e $\vec{w} = (2, -1, 4)$.

Solução: Basta verificar se o produto misto dos vetores é igual a zero.
Temos que:

$$(\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}) = det \begin{bmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \\ 2 & -1 & 4 \end{bmatrix} = 0 + 2 - 1 - 0 - 2 + 4 = -3 \neq 0.$$

Logo, os vetores dados não são coplanares.

(**2**) Determine o valor de m para que os vetores $\vec{u} = (2, m, 0), \vec{v} = (1, -1, 2)$ e $\vec{w} = (-1, 3, -1)$ sejam coplanares.

Solução: Para que os vetores sejam coplanares, devemos ter seu produto misto igual a zero. Calculando o produto misto, obtemos:

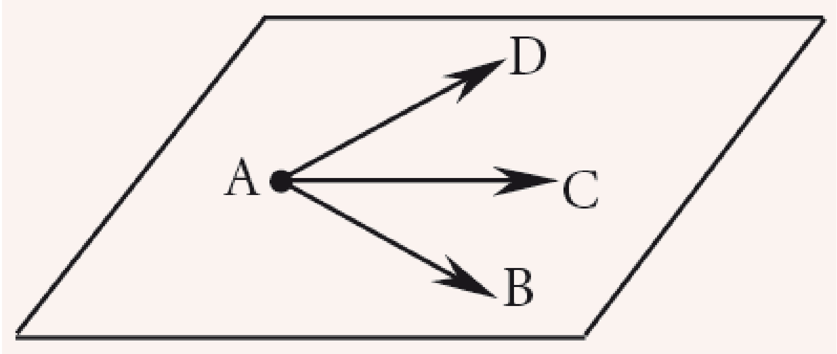
$$(\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}) = det\begin{bmatrix} 2 & m & 0 \\ 1 & -1 & 2 \\ -1 & 3 & -1 \end{bmatrix} = 2 - 2m + 0 - 0 - 12 + m = -m - 10.$$

Então, devemos ter

$$-m - 10 = 0 \Rightarrow m = -10.$$

(3) Verificar se os pontos $A(1,2,4), B(-1,0,-2), C(0,2,2)$ e $D(-2,1,-3)$ estão no mesmo plano.

Solução: Os pontos A, B, C e D estão no mesmo plano se, e somente se, os vetores $\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}$ e $\overrightarrow{AD}$ forem coplanares.

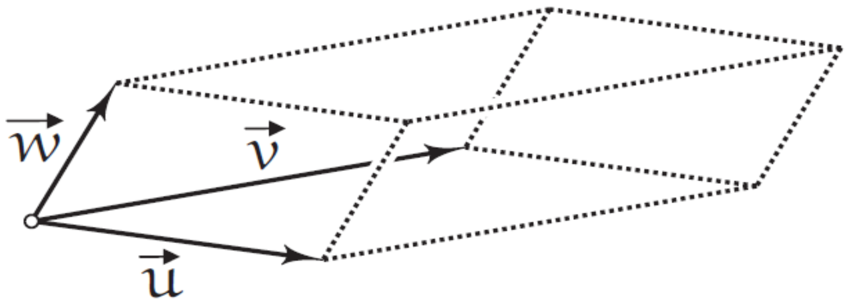


Calculando o produto misto desses vetores, obtemos:

$$(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}, \overrightarrow{AD}) = det \begin{bmatrix} -2 & -2 & -6 \\ -1 & 0 & -2 \\ -3 & -1 & -7 \end{bmatrix} = 0.$$

Portanto, os pontos dados são coplanares.

Proposição (caracterização geométrica do produto misto): Sejam $\vec{u}, \vec{v}$ e $\vec{w}$ vetores não coplanares. Então, o volume V do paralelepípedo gerado por $\vec{u}, \vec{v}$ e $\vec{w}$ é igual ao módulo do produto misto $(\vec{u}, \vec{v}, \vec{w})$, ou seja, $V = |(\vec{u}, \vec{v}, \vec{w})|$.



Paralelepípedo

$$V = |(\vec{u}, \vec{v}, \vec{w})|$$

Demonstração:

Consideremos os vetores $\vec{u}$, $\vec{v}$, $\vec{w}$ e $\vec{u} \times \vec{v}$ com representantes de mesma origem O e tomemos os vetores $\vec{u}$ e $\vec{v}$ como geradores da base do paralelepípedo.

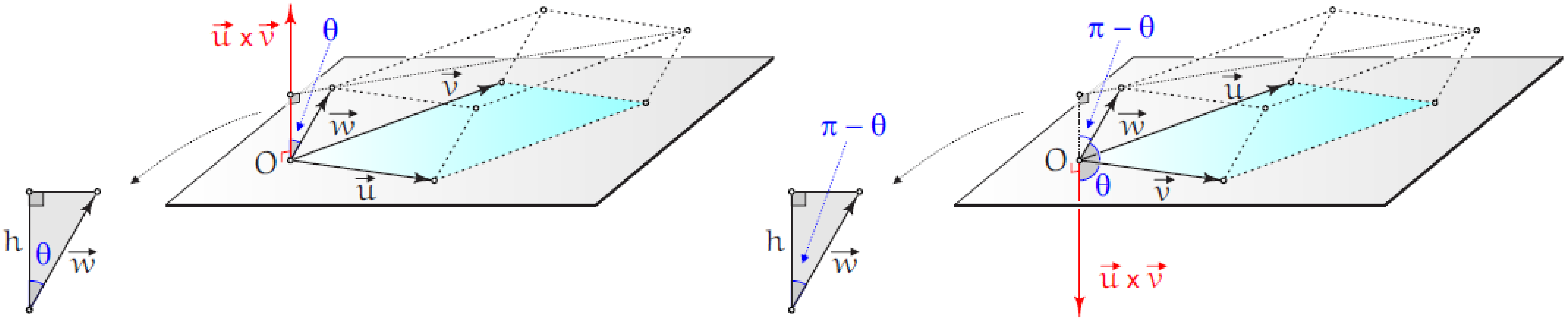
Chamemos, ainda, de θ a medida do ângulo formado por $\vec{w}$ e $\vec{u} \times \vec{v}$.

Temos duas possíveis posições em relação aos vetores $\vec{w}$ e $\vec{u} \times \vec{v}$:

(i) Ambos estão no mesmo lado do plano que passa pela base do paralelepípedo e, neste caso, $0 \leqslant \theta < \frac{\pi}{2}$.

(ii) Cada um está em um dos lados opostos do plano que passa pela base do paralelepípedo e, neste caso, $\frac{\pi}{2} < \theta \leqslant \pi$.

A figura abaixo ilustra as duas situações possíveis.



Observemos que $\theta = \frac{\pi}{2}$ não ocorre, pois os vetores $\vec{u}$, $\vec{v}$ e $\vec{w}$ não são coplanares.

Lembrando que o volume $\mathcal{V}$ do paralelepípedo é dado pelo produto da área $\mathcal{A}$ de sua base por sua altura h, ou seja, $\mathcal{V} = \mathcal{A}h$, nossa preocupação será com a altura, pois pela Proposição 2.13, a área da base é dada por $\mathcal{A} = \|\vec{u} \times \vec{v}\|$.

No caso (**i**) a altura h do paralelepípedo é dada por $h = \|\vec{w}\| \cos(\theta)$.

No caso (**ii**) a altura h do paralelepípedo é dada por $h = \|\vec{w}\| \cos(\pi - \theta)$.

Como

$$\cos(\pi - \theta) = \cos(\pi)\cos(\theta) + \operatorname{sen}(\pi)\operatorname{sen}(\theta) = -\cos(\theta),$$

podemos escrever, no caso (**ii**), $h = \|\vec{w}\| \left(-\cos(\theta)\right)$.

Juntando os dois casos, para não nos preocuparmos com sinais, podemos escrever $h = \left|\, \|\vec{w}\| \cos(\theta) \,\right|$.

Deste modo:

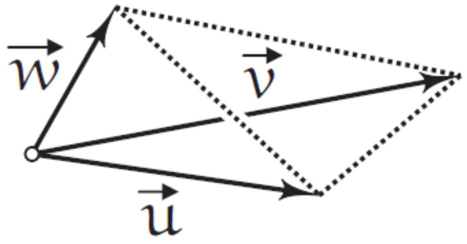
$$\mathcal{V} = \mathcal{A}.\mathrm{h} = ||\vec{u} \times \vec{v}||.|\ ||\vec{w}|| \cos(\theta)\,| = |\ ||\vec{u} \times \vec{v}||.||\vec{w}|| \cos(\theta)\,| = |\,(\vec{u} \times \vec{v}) \cdot \vec{w}| \Rightarrow$$

$$\boxed{\mathcal{V} = |\vec{u} \cdot \vec{v} \times \vec{w}|}.$$

Na primeira linha acima, utilizamos a Proposição 2.10, que relaciona o produto escalar com a medida de ângulo entre dois vetores.

Na conclusão usamos a propriedade (5) da Proposição 2.12, que permite comutar o produto escalar com o produto vetorial. □

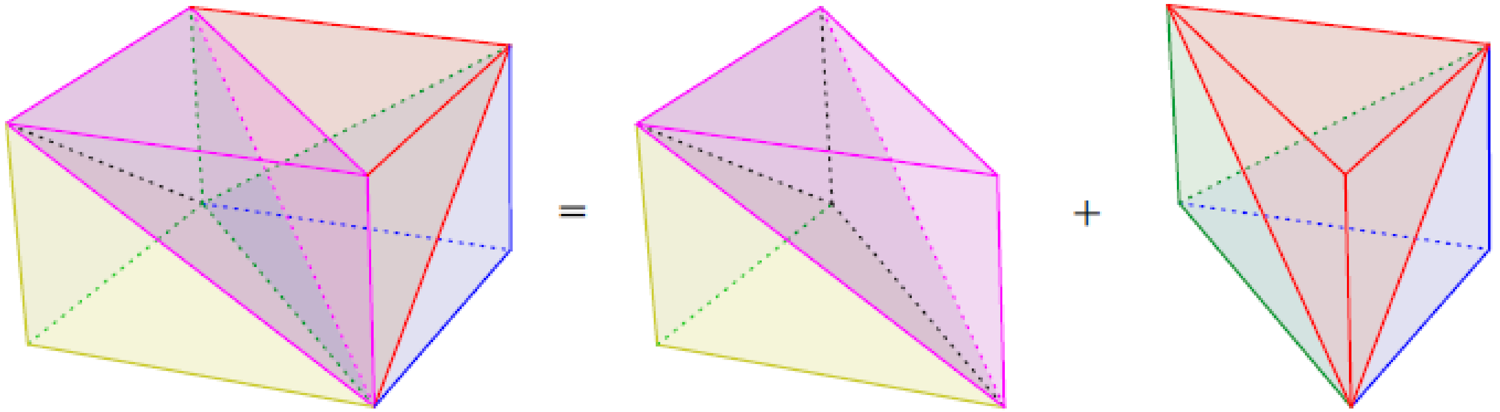
Corolário: Sejam $\vec{u}, \vec{v}$ e $\vec{w}$ vetores não coplanares. Então, o volume V do tetraedro gerado por $\vec{u}, \vec{v}$ e $\vec{w}$ é igual a $V = \frac{1}{6}|(\vec{u}, \vec{v}, \vec{w})|$.



Tetraedro

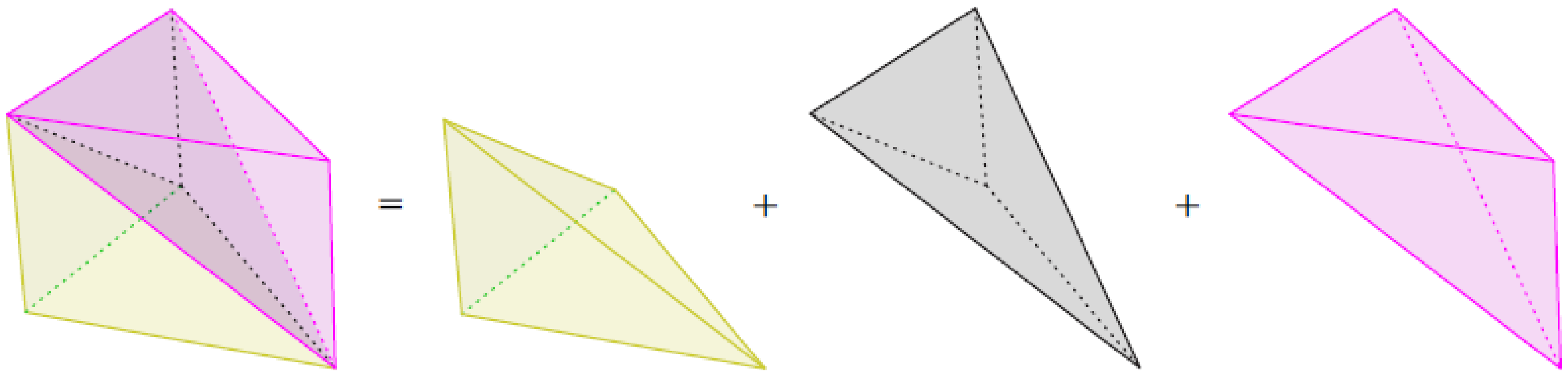
$$V = \frac{1}{6}|(\vec{u}, \vec{v}, \vec{w})|$$

A título de ilustração, vamos "recortar" um paralelepípedo em 6 tetraedros, todos de mesmo volume. Para facilitar, vamos tomar um paralelepípedo reto retângulo (bloco retangular), mas o raciocínio é válido de modo generalizado. Comecemos dividindo o paralelepipedo em dois prismas triangulares de mesmo volume, que chamaremos de "Prisma Triangular 1" e "Prisma Triangular 2", conforme a figura abaixo.



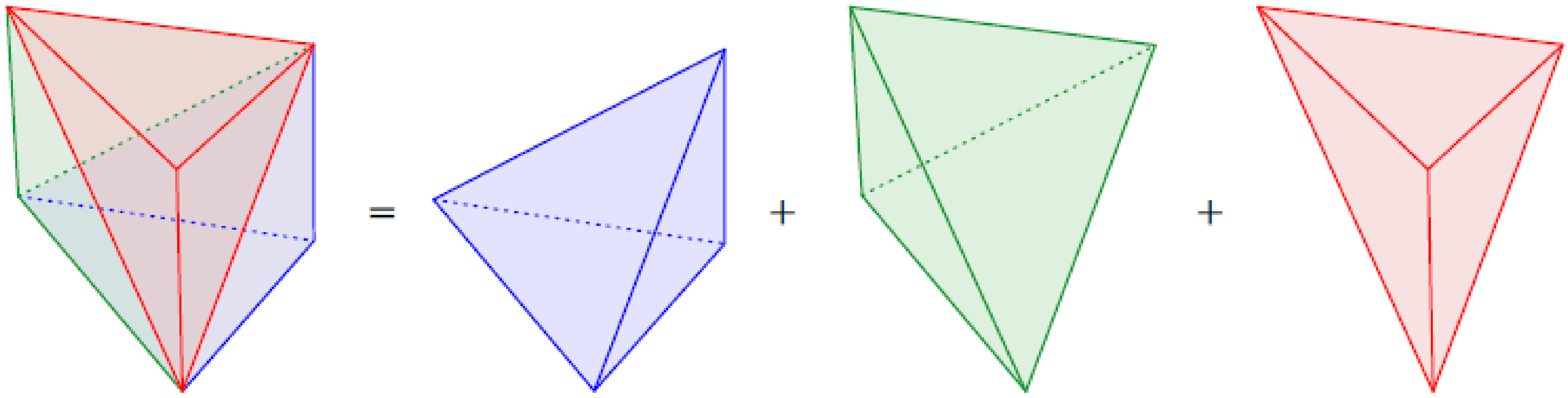
Paralelepípedo *Prisma Triangular 1* *Prisma Triangular 2*

Em seguida, tomamos o "Prisma Triangular 1" e o dividimos em 3 pirâmides de bases triangulares, que são os tetraedros, todos de mesmo volume, e chamaremos de "Tetraedros 1, 2 e 3". Recordando que a fórmula do volume V_P de uma pirâmide é $V_P = \frac{1}{3}(\text{área da base})\,(\text{altura})$, o leitor não terá dificuldades para verificar que, realmente, os tetraedos possuem o mesmo volume. A figura abaixo apresenta o procedimento.



Prisma Triangular 1 *Tetraedro 1* *Tetraedro 2* *Tetraedro 3*

Finalmente, fazemos a mesma divisão como o "Prisma Triangular 2" e o dividimos nos "Tetraedros 4, 5 e 6", todos de mesmo volume, ficando assim, ilustrado o Corolário 2.3. A figura abaixo mostra esta última etapa.



Prisma Triangular 2 *Tetraedro 4* *Tetraedro 5* *Tetraedro 6*

Exercícios

(1) Calcular o valor de m para que o volume do paralelepípedo determinado pelos vetores $\vec{u} = (2,-1,0), \vec{v} = (6, m, -2)$ e $\vec{w} = (-4, 0, 1)$ seja igual a 10.

Solução: O volume do paralelepípedo determinado pelos vetores $\vec{u}, \vec{v}$ e $\vec{w}$ é dado por

$$V = |(\vec{u}, \vec{v}, \vec{w})|.$$

Calculando o produto misto desses vetores, obtemos:

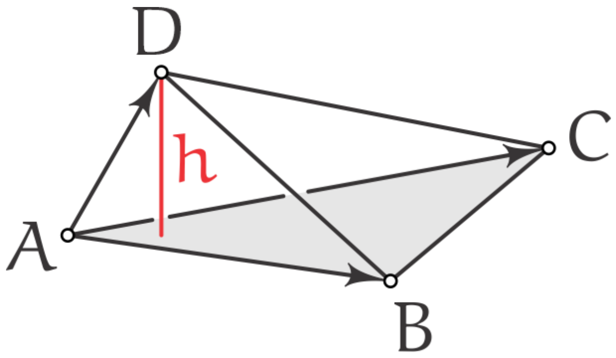
$$(\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}) = det\begin{bmatrix} 2 & -1 & 0 \\ 6 & m & -2 \\ -4 & 0 & 1 \end{bmatrix} = 2m - 8 + 0 - 0 - 0 + 6 = 2m - 2.$$

Então, devemos ter

$$|2m - 2| = 10 \Rightarrow \begin{cases} 2m - 2 = 10 \\ \text{ou} \\ 2m - 2 = -10 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} m = 6 \\ \text{ou} \\ m = -4 \end{cases}.$$

(**2**) Sejam $A(4,0,0), B=(4,8,0), C=(0,6,0)$ e $D=(4,-4,18)$ vértices de um tetraedro. Calcular:

(**a**) O volume do tetraedro.
(**b**) A altura do tetraedro relativa ao vértice D.



Solução: Considere a figura ao lado.

(**a**) O volume do tetraedro é dado por $V=\frac{1}{6}\left|\left(\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC},\overrightarrow{AD}\right)\right|$.

Calculando o produto misto desses vetores, obtemos:

$$\left(\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC},\overrightarrow{AD}\right)=\begin{vmatrix}0 & 8 & 0\\ -4 & 6 & 0\\ 0 & -4 & 18\end{vmatrix}=576 \Rightarrow V=\frac{1}{6}|576|=\frac{576}{6}=96.$$

(**b**) Da Geometria Espacial sabemos que o volume de uma pirâmide é um terço da área da base ABC pela altura h relativa a esta base.

A área do triângulo ABC é dada por $A_{\Delta ABC}=\frac{1}{2}\left\|\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{AC}\right\|$. Temos que:

$$\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{AC}=\begin{vmatrix}\vec{i} & \vec{j} & \vec{k}\\ 0 & 8 & 0\\ -4 & 6 & 0\end{vmatrix}=(0,0,32) \Rightarrow A_{\Delta ABC}=\frac{1}{2}\|(0,0,32)\|=16.$$

Logo,

$$V=\frac{1}{3}A_{\Delta ABC}\,.\,h \Rightarrow 96=\frac{1}{3}.(16).h \Rightarrow h=18.$$