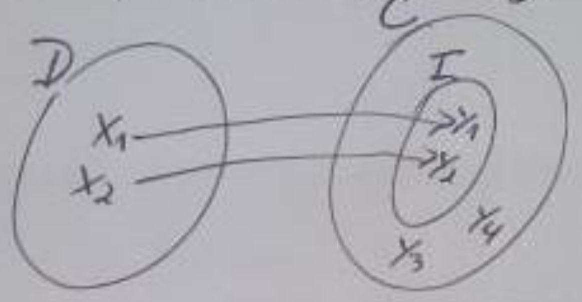
1 – Transformações lineares

FUNÇÕES: RELEMBRANDO

São aplicações com D(domínio), C(contra-domínio) e I(Imagem)

onde todo elemento do domínio tem uma, e apenas uma, imagem C contra-domí.



$$D \longrightarrow C$$
$$x \longmapsto y$$

Transformações Lineares (T.L.) são funções com domínio e contradomí. espaços vetoriais, portanto as variáveis são vetores.

$$T : V \longrightarrow W$$

W ↳ Contradomínio

V ↳ Domínio

T ↳ Transformação.

exemplo

3.1) $T: \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$ tal que $T(x,y) = (x-1, 5y)$

ou

$$T: \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$$
$$(x,y) \longmapsto (x-1, 5y)$$

a) $T(0,0) = (0-1, 5\cdot 0) = (-1,0)$

$(-1,0)$ é a imagem do domínio $(0,0)$

b) $T(1,2) = (1-1, 5\cdot 2) = (0,10)$

c) $T(-3,1) = (-3-1, 5\cdot 1) = (-4,5)$

d) $T(\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}) = (\frac{1}{2}-1, 5\cdot(-\frac{1}{2})) = (-\frac{1}{2}, -\frac{5}{2})$

$\therefore \{(0,0), (1,2), (-3,1), (\frac{1}{2}, -\frac{1}{2})\} \subset V$

e $\{(0,10), (-1,0), (-4,5), (-\frac{1}{2}, -\frac{5}{2})\} \subset W$

3.2) $T: \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ $\quad T(x,y) = (x, x-y, y)$

é uma T.L. que associa vetores em $\mathbb{R}^2$ de V com vetores em $\mathbb{R}^3$ de W

$$V = \mathbb{R}^2$$
$$W = \mathbb{R}^3$$

$T(x,y) = (x, x-y, y)$

$T(0,0) = (0,0,0)$

$T(3,2) = (3,1,2)$

$T(-1,10) = (-1,-11,10)$

Veja que se uma função é uma transformação linear, então, T(0) = 0, em que 0 representa o vetor nulo. Essa condição exige que a imagem do vetor nulo seja o vetor nulo.

Sejam V e W dois espaços vetoriais. Uma **transformação linear** T de V em W, $T : V \to W$, é uma função (ou aplicação) que a cada $v \in V$ está associado um único $T(v) \in W$ e que satisfaz as seguintes condições:

$\forall u, v \in V$ e $\forall \alpha \in \mathbb{R}$:

I. $T(u + v) = T(u) + T(v)$
II. $T(\alpha u) = \alpha T(u)$

---

3. As duas condições (I) e (II) a serem satisfeitas podem ser substituídas por uma só:

$$T(\alpha u + v) = \alpha T(u) + T(v).$$

Voltando ao ex. 3.1

3.1) $T: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$; $T(x,y) = (x-1, 5y)$

$T(0,0) = (0-1, 5\cdot 0) = (-1,0) \neq (0,0)$

$\therefore T(0,0) \neq \vec{0}$

Logo, T não é T.L.

Voltando ao ex. 3.2

3.2) $T: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$; $T(x,y) = (x, x-y, y)$

1) $T(0,0) = (0,0,0) = \vec{0}$

$\therefore T(0,0) = (0,0,0)$

T. "Pode ser" T.L.

2) $\vec{u} = (x_1, y_1)$

$v = (x_2, y_2)$

$T(au+v) = aT(u) + T(v)$?

$T(au+v) = T(a(x_1,y_1) + (x_2,y_2))$

$= T(ax_1+x_2, ay_1+y_2)$

$= (ax_1+x_2,\ ax_1+x_2-ay_1-y_2,\ ay_1+y_2)$

e

$aT(u) + T(v) = a(x_1, x_1-y_1, y_1) + (x_2, x_2-y_2, y_2)$

$= (ax_1+x_2,\ ax_1-ay_1+x_2-y_2,\ y_1+y_2)$

$= (ax_1+x_2,\ ax_1+x_2-ay_1-y_2,\ y_1+y_2)$

$\boxed{\therefore T(au+v) = aT(u) + T(v)}$ $\Rightarrow$ T é uma T.L

3.3) $T_1 : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$; $T_1(x,y) = (3x, 3y)$

i) $T(0,0) = (0,0) \Rightarrow$ Pode ser T.L.

ii) $T(au+v) = T(au) + T(v)$?

$u = (x_1, y_1)$ e $v = (x_2, y_2)$

$$
\begin{aligned}
T(au+v) &= T(a(x_1,y_1) + (x_2,y_2)) \\
&= T(ax_1 + x_2, ay_1 + y_2) \\
&= \boxed{(3ax_1 + 3x_2, 3ay_1 + 3y_2)}
\end{aligned}
$$

e

$$
\begin{aligned}
T(au) + T(v) &= T(a(x_1,y_1)) + T(x_2,y_2) \\
&= T(ax_1, ay_1) + T(x_2,y_2) \\
&= (3ax_1, 3ay_1) + (3x_2, 3y_2) \\
&= \boxed{(3ax_1 + 3x_2, 3ay_1 + 3y_2)}
\end{aligned}
$$

$\therefore T(au+v) = T(au) + T(v)$

~~de~~

De (i) e (ii); T_1 é T.L.

3.4) $T_2 : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$

$(x,y) \mapsto (2x+1, y)$

i) $T(0,0) = (1,0) \neq (0,0)$

$T(0,0) \neq (0,0)$

Logo, T_2 não é T.L.

3.7) $T_3 : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$

$(x, y, z) \longmapsto (x^2, 3y, -z)$

$\left\{ \begin{array}{l} u = (x_1, y_1, z_1) \\ v = (x_2, y_2, z_2) \end{array} \right.$

i) $T(0,0,0) = (0,0,0) \Rightarrow$ Pode se T.L.

ii) $T(au+v) = T[(ax_1+y_1, ax_2+y_2, ax_3+y_3)]$

$= ((ax_1+y_1)^2, 3(ax_2+y_2), -(ax_3+y_3))$

$= (\boxed{a^2x_1^2 + 2ax_1y_1 + y_1^2}, 3ax_2+3y_2, -ax_3-y_3)$

$T(au)+T(v) = T(ax_1, ay_1, az_1) + T(x_2, y_2, z_2)$

$= (a^2x_1^2, 3ay_1, -az_1) + (x_2^2, 3y_2, -z_2)$

$= (\boxed{a^2x_1^2 + x_2^2}, 3ay_1 + 3y_2, -az_1 - z_2)$

$\boxed{\therefore\ T(au+v) \neq T(au) + T(v)\ !}$

$\Downarrow$

T_3 NÃO é T.L.

3.8)

$$T_4: \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^2$$
$$(x,y,z) \longmapsto (z, x+2y) \qquad \begin{cases} u = (x_1, y_1, z_1) \\ v = (x_2, y_2, z_2) \end{cases}$$

i) $T(0,0,0) = (0,0)$

ii) $T(au+v) = T(ax_1+x_2, ay_1+y_2, az_1+z_2)$

$= (az_1+z_2, ax_1+x_2+2ay_1+2y_2)$

$T(au)+T(v) = T(ax_1, ay_1, az_1) + T(x_2, y_2, z_2)$

$= (az_1, ax_1+2ay_1) + (z_2, x_2+2y_2)$

$= (az_1+z_2, ax_1+x_2+2ay_1+2y_2)$

$\therefore T(au+v) = T(au) + T(v) \Rightarrow$

$\Rightarrow T_4$ é T. L.

Observações 3.3:

1. Uma transformação linear cujo domínio e contradomínio são iguais é chamada de **operador linear**.

2. As únicas **transformações lineares** de R em R são as funções da forma $f(x) = mx$, em que m é um número real qualquer. Ou seja, dentre todas as funções cujos gráficos são retas, as chamadas transformações lineares são somente aquelas que passam pela origem. Em cálculo, uma função linear é definida na forma $f(x) = mx + b$. Logo, concluímos que uma função linear é uma transformação linear de R em R se, e somente se, $b = 0$.

Outras transformações lineares

Algumas transformações lineares recebem nomes especiais:

1) Transformação identidade:

$$\begin{aligned} I : V &\to V \\ v &\mapsto v \end{aligned} \quad \text{ou} \quad I(v) = v$$

Observe que:

- Se $V = R^2$, I representa o operador linear:

$$\begin{aligned} I : R^2 &\to R^2 \\ (x, y) &\mapsto (x, y) \end{aligned} \qquad \text{ou} \quad I(x, y) = (x, y)$$

- Se $V = R^3$, I representa o operador linear:

$$\begin{aligned} I : R^3 &\to R^3 \\ (x, y, z) &\mapsto (x, y, z) \end{aligned} \qquad \text{ou} \quad I(x, y, z) = (x, y, z)$$

2) Transformação nula:

$$\begin{aligned} T : V &\to W \\ v &\mapsto 0 \end{aligned} \quad \text{ou} \quad T(v) = 0$$

Veja que, se $V = R^2$, $W = R^3$, então T representa a transformação linear:

$$\begin{aligned} T : R^2 &\to R^3 \\ (x, y) &\mapsto (0, 0, 0) \end{aligned} \qquad \text{ou} \quad T(x, y) = (0, 0, 0)$$

Observe que essa transformação associa qualquer vetor do domínio ao vetor nulo do contradomínio.

3) Transformação simétrica em relação à origem:

$$\begin{aligned} T : V &\to W \\ v &\mapsto -v \end{aligned} \quad \text{ou} \quad T(v) = -v$$

Se $V = R^2$, $W = R^2$, então T representa o operador linear:

$$\begin{aligned} T : R^2 &\to R^2 \\ (x, y) &\mapsto (-x, -y) \end{aligned} \qquad \text{ou} \quad T(x, y) = (-x, -y)$$

Geometricamente, para $v = (5, 2)$, temos $T(v) = (-5, -2)$.

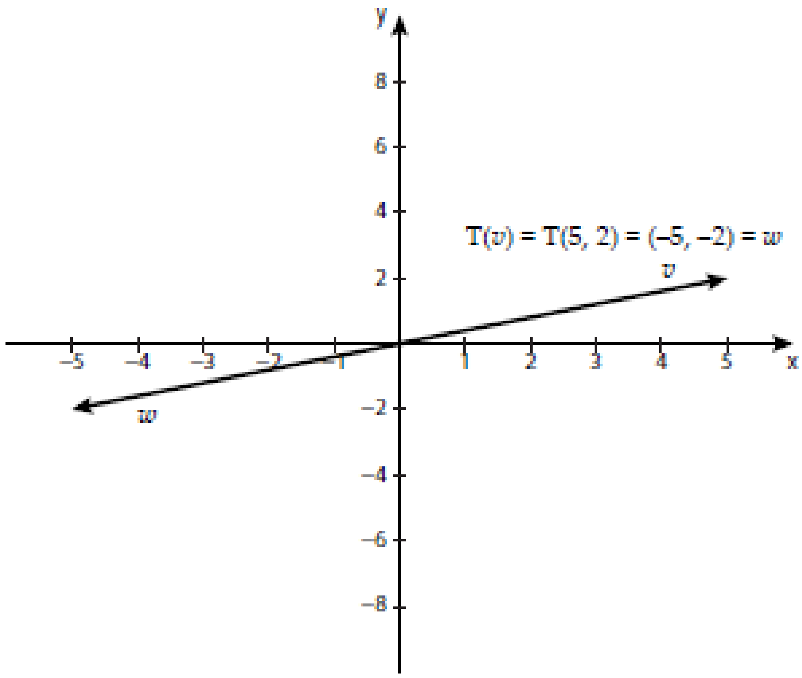


Figura 3.2 - Representação do vetor simétrico ao vetor v = (5, 2)

4) Se V é o espaço vetorial dos polinômios em *t*, então são transformações lineares as funções:

I) Derivada:

$$\begin{aligned} D : V &\to V \\ v &\mapsto \tfrac{dv}{dt} \end{aligned}$$

Pois, pelas propriedades de derivadas, se

$$\begin{aligned} f : R &\to R \\ t &\mapsto f(t) \end{aligned}, \quad \begin{aligned} g : R &\to R \\ t &\mapsto g(t) \end{aligned} \quad \text{e } \alpha \in \mathbb{R}, \text{ então:}$$

1. A derivada da soma de duas funções é igual à soma das derivadas de cada uma das funções, ou seja:

$$\frac{d(f+g)}{dt} = \frac{df}{dt} + \frac{dg}{dt}$$

II) Integral:

$$\begin{aligned} J : V &\to V \\ v &\mapsto \int v\, dt \end{aligned}$$

Analogamente, pelas propriedades de integrais, se:

$$\begin{aligned} f : R &\to R \\ t &\mapsto f(t) \end{aligned}, \quad \begin{aligned} g : R &\to R \\ t &\mapsto g(t) \end{aligned} \quad \text{e } \alpha \in \mathbb{R}, \text{ então:}$$

1. A integral da soma de duas funções é igual à soma das integrais de cada uma das funções, ou seja:

$$\int [f(t) + g(t)] dt = \int f(t)\, dt + \int g(t)\, dt$$

2. A integral do produto de uma constante por uma função é igual ao produto da constante pela integral da função:

$$\int [\alpha \cdot f(t)] dt = \alpha \cdot \int f(t)\, dt$$

5) A função de $T : R^n \rightarrow R^m$ é uma transformação linear dada pela multiplicação de um vetor *v* por uma matriz de ordem $(m \times n)$.

Por exemplo:

$$T : R^2 \rightarrow R^3$$
$$(x, y) \mapsto (2x + 5y, -1x, 3x - 2y)$$

$$T(x, y) = \begin{bmatrix} 2 & 5 \\ -1 & 0 \\ 3 & -2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2x + 5y \\ -1x \\ 3x - 2y \end{bmatrix}$$

Em que a matriz que representa a transformação é:

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 5 \\ -1 & 0 \\ 3 & -2 \end{bmatrix}$$

Assim, toda matriz $A_{m \times n}$ pode ser usada para definir uma transformação linear $T_A : R^n \rightarrow R^m$, onde a imagem $T_A(v)$ é o produto da matriz $A_{m \times n}$ pelo vetor coluna v.

Preste atenção na ordem da matriz em relação à ordem dos espaços vetoriais do domínio e da imagem. Isto é, se temos uma transformação de R^n em R^m, a matriz associada a essa transformação linear é de ordem $(m \times n)$. Assim, uma matriz de ordem (3×2) pode representar uma transformação do R^2 em R^3.

---

ex1 $A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 3 \\ 1 & 2 & 0 \end{pmatrix}_{(2\times 3)} \Rightarrow \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$

$$T_A : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$$

$$(x,y,z) \mapsto \underbrace{(2x - y + 3z\ ,\ x + 2y)}_{\text{USAR LINHAS}}$$

ex2) $B = \begin{pmatrix} 2 & -2 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}_{2\times 2} \Rightarrow \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$

$$T_B : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$$

$$(x,y) \mapsto (2x - 2y, x - y)$$

∴ Podemos escrever uma T.L. em forma de matriz, chamada de MATRIZ CANÔNICA

Voltando:

3.2. $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$

$$(x,y) \mapsto (x, x-y, y)$$

$$A_{3\times 2} = \begin{array}{c} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}_{3\times 2} \\ \begin{matrix} x \quad & \quad y \end{matrix} \end{array}$$

~~Note que~~

e ainda

$$\boxed{\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ x-y \\ y \end{pmatrix}}$$

Propriedade das transformações lineares

A transformação linear de uma combinação linear de vetores do domínio é igual à combinação linear das transformações lineares dos mesmos vetores com os mesmos escalares. Isto é:

Se $T : V \rightarrow W$ é uma transformação linear, então

$$\forall v_1, v_2 \in V \text{ e } \forall a_1, a_2 \in R$$

$$T(a_1v_1 + a_2v_2) = a_1T(v_1) + a_2T(v_2)$$

Portanto, vale:

$$T(a_1v_1 + a_2v_2 + \ldots + a_nv_n) = a_1T(v_1) + a_2T(v_2) + \ldots + a_nT(v_n)$$

$$\forall v_1, v_2, \ldots, v_n \in V \text{ e } \forall a_1, a_2, \ldots, a_n \in R$$

Teorema 3.1: Dados dois espaços vetoriais reais V e W e uma base de $\{v_1, v_2, \ldots, v_n\} \in V$ e sejam $w_1, w_2, \ldots, w_n$ elementos arbitrários de W. Então existe uma **única** aplicação linear:

$T : V \to W$ tal que $T(v_1) = w_1$, $T(v_2) = w_2$, …, $T(v_n) = w_n$

Se $v = a_1v_1 + a_2v_2 + \ldots + a_nv_n$, então, essa aplicação é dada por:

$$T(v) = a_1T(v_1) + a_2T(v_2) + \ldots + a_nT(v_n) = a_1w_1 + a_2w_2 + \ldots + a_nw_n$$

Ou seja, a imagem de uma combinação linear de vetores de V é a combinação linear, de mesmos escalares, das imagens

$$T(v_1) + T(v_2) + \ldots + T(v_n).$$

Isto é uma consequência do teorema 3.1, e pode determinar uma transformação linear conhecendo as imagens dos vetores de uma base do espaço vetorial domínio.

.

3.9. Seja a transformação $T : R^3 \to R^2$, sabendo que:

$$T(1, 0, 0) = (2, 3),\ T(0, 1, 0) = (-1, 4) \text{ e } T(0, 0, 1) = (5, -3)$$

determine:

a) $T(3, -4, 5)$

Escrever $(3,-4,5)$ como C. L.
de $(1,0,0)$, $(0,1,0)$ e $(0,0,1)$

$$(3,-4,5) = 3(1,0,0) - 4(0,1,0) + 5(0,0,1)$$

$$T(3,-4,5) = 3\underbrace{T(1,0,0)}_{(2,3)} - 4\underbrace{T(0,1,0)}_{(-1,4)} + 5\underbrace{T(0,0,1)}_{(5,-3)}$$

$$T(3,-4,5) = 3(2,3) - 4(-1,4) + 5(5,-3)$$

$$T(3,-4,5) = (6+4+25,\ 9-16-15)$$

$$\boxed{T(3,-4,5) = (35,\ -22)}$$

b) a imagem de um vetor $v = (x, y, z)$ qualquer do $\mathbb{R}^3$.

b) Escrever C.L. com $x, y, z, \ldots$

$$(x,y,z) = x(1,0,0) + y(0,1,0) + z(0,0,1)$$

$$T(x,y,z) = x\underbrace{T(1,0,0)}_{(2,3)} + y\underbrace{T(0,1,0)}_{(-1,4)} + z\underbrace{T(0,0,1)}_{(5,-3)}$$

$$T(x,y,z) = x(2,3) + y(-1,4) + z(5,-3)$$

$$T\underbrace{(x,y,z)}_{\text{DOMINIO}} = \underbrace{(2x-y+5z,\ 3x+4y-3z)}_{\text{IMAGEM.}}$$

$$\therefore\ T: \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^2$$
$$(x,y,z) \longmapsto (2x-y+5z,\ 3x+4y-3z)$$

3.9. Seja a transformação $T : R^2 \to R^3$, tal que:

$$T(1, 1) = (3, 2, 1) \text{ e } T(0, -1) = \left(0, \frac{1}{2}, 0\right).$$

Determine $T(x, y)$.

1) Escrever $(1,1)$ e $(0,-1)$ como C.L. de (x,y) ou seja, verificar se $\beta = \{(1,1),(0,-1)\}$ é base do $\mathbb{R}^2$.

$$\left.\begin{aligned} (x,y) &= a(1,1) + b(0,-1) \\ (x,y) &= (a,\ a-b) \end{aligned}\right\} \quad \boxed{a = x} \quad \text{e} \quad \begin{aligned} a - b &= y \\ \cancel{x} - b &= y \\ -b &= y - x \\ \boxed{b} & \boxed{= x - y} \end{aligned}$$

Então:

$$(x,y) = x(1,1) + (x-y)(0,-1)$$

$$T(x,y) = x\,\underbrace{T(1,1)}_{(3,2,1)} + (x-y)\,\underbrace{T(0,-1)}_{(0,\frac{1}{2},0)}$$

$$T(x,y) = x(3,2,1) + (x-y)(0, 1/2, 0)$$

$$T(x,y) = (3x, 2x, x) + (0, \tfrac{1}{2}x - \tfrac{1}{2}y, 0)$$

$$T(x,y) = (3x, 2x + \tfrac{1}{2}x - \tfrac{1}{2}y, x)$$

$$T(x,y) = (3x, \tfrac{5}{2}x - \tfrac{1}{2}y, x)$$

$$\text{ou: } T: A_{3\times 2} = \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 5/2 & -1/2 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

3.10. Sabendo que $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ é um operador linear dado por:

$T(x, y, z) = (x + 2y + 2z,\ x + 2y - z,\ -x + y + 4z)$,

determine os vetores $u, v \in \mathbb{R}^3$ tais que

$T(u) = (-1, 8, -11)$ e $T(v) = v$

1) $u = ?$

$$(x+2y+2z,\ x+2y-z,\ -x+y+4z) = T(u) = (-1, 8, -11)$$

$$\begin{cases} x+2y+2z = -1 \\ x+2y-z = 8 \\ -x+y+4z = -11 \end{cases}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 2 & -1 \\ 1 & 2 & -1 & 8 \\ -1 & 1 & 4 & -11 \end{array}\right) \xrightarrow[L_3 = L_3 + L_1]{L_2 = L_2 - L_1}$$

$$\left(\begin{array}{cccc} 1 & 2 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & -3 & 9 \\ 0 & 3 & 6 & -12 \end{array}\right) \xrightarrow{\frac{L_2}{-3} \leftrightarrow \frac{L_3}{3}} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 2 & -1 \\ 0 & 1 & 2 & -4 \\ 0 & 0 & 1 & -3 \end{array}\right) \xrightarrow[L_2 = L_2 - 2L_3]{L_1 = L_1 - 2L_3}$$

$$\left(\begin{array}{cccc} 1 & 2 & 0 & 5 \\ 0 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & -3 \end{array}\right) \xrightarrow{L_1 = L_1 - 2L_2} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & -3 \end{array}\right)$$

$\therefore\ u = (1, 2, -3)$

Conferindo:

$$T(1,2,-3) = (1+2\cdot 2+2\cdot(-3),\ 1+2(2)-(-3),\ -1+2+4(-3))$$

$$T(1,2,-3) = (1+4-6,\ 1+4+3,\ -1+2-12)$$

$$T(1,2,-3) = (-1, 8, -11)$$

OK.

$\therefore\ u = (1, 2, -3)$.

2) $V = ?$ $V = (x, y, z)$

$(x+2y+3z, x+2y-z, -x+y+4z) = T(V) = (x, y, z)$

$$\left.\begin{array}{l} x+2y+3z=x \\ 2y+3z=0 \end{array}\right\} \quad \left.\begin{array}{l} x+2y-z=y \\ x+y-z=0 \end{array}\right\} \quad \begin{array}{l} -x+y+4z=z \\ -x+y+3z=0 \end{array}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} -1 & 1 & 3 & 0 \\ 1 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 2 & 3 & 0 \end{array}\right) \xrightarrow[L_2 = L_2 + L_1]{L_1 = -L_1} \begin{pmatrix} 1 & -1 & -3 \\ 0 & 2 & 2 \\ 0 & 2 & 3 \end{pmatrix} \xrightarrow[L_3 = L_3 - L_2]{L_2 = \frac{1}{2}L_2}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & -3 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow[L_2 = L_2 - L_3]{L_1 = L_1 + 3L_3} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{L_1 = L_1 + L_2}$$

$$\longrightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{array}\right) \quad x = y = z = 0.$$

$\therefore V = (0, 0, 0)$

De FATO:

$T(0,0,0) = (0+2(0)+3(0), 0+2(0)-0, -0+0+4(0))$

$T(0,0,0) = (0,0,0)$

ok.

$\therefore V = (0, 0, 0)$.

AGORA É UM BOM MOMENTO PARA ESTUDAR OS EXÉRCICIOS DE 1 A 9 DO MATERIAL COMPLETO. ESTES EXERCÍCIOS ESTÃO RESOLVIDOS NO FINAL DO MATERIAL.