CAPÍTULO 6

Sistemas lineares

Equação linear

Augusto foi sacar R$ 90,00 em um caixa eletrônico que só dispunha de cédulas de R$ 10,00 e de R$ 20,00. Como pode ser feita a distribuição das cédulas a fim de totalizar R$ 90,00?

JUCA MARTINS/OLHAR IMAGEM

Caixa eletrônico de banco em São Paulo.

Vamos representar por:

- **x** o número de cédulas de R$ 10,00;
- **y** o número de cédulas de R$ 20,00.

Devemos determinar quais são os possíveis valores de **x** e de **y** de modo que:

$$10 \cdot x + 20 \cdot y = 90$$

A equação obtida acima é um exemplo de **equação linear**.

> Equação linear nas incógnitas $\mathbf{x_1}, \mathbf{x_2}, \ldots, \mathbf{x_n}$ é toda equação do tipo:
> $$a_1x_1 + a_2x_2 + \ldots + a_nx_n = b$$
> em que $a_1, a_2, \ldots, a_n$ e **b** são coeficientes reais.

Chamamos **b** de **coeficiente** (ou **termo**) **independente** da equação.

Acompanhe alguns exemplos de equações lineares:

- $x_1 - 2x_2 + 4x_3 = -7$
- $4x - 3y = -2$
- $x + y + z = 1$
- $4x - 2y + 3z - t = 0$
- $\sqrt{3} \cdot x - 2y + z = -\dfrac{1}{5}$
- $\dfrac{1}{2} \cdot x_1 = -3$

Observe que uma equação linear é uma equação do primeiro grau com uma ou mais incógnitas.

OBSERVAÇÕES

- Note que, numa equação linear, os expoentes de todas as incógnitas são sempre iguais a 1. Dessa forma, não representam equações lineares:

$$2x_1^2 - x_2 = 5 \qquad x^2 + y^2 + z^2 = 1 \qquad x^3 - y^2 = 0$$

- Uma equação linear não apresenta termo misto (aquele que contém o produto de duas ou mais incógnitas). Dessa forma, não representam equações lineares:

$$2x_1 + x_2x_3 = 5 \qquad x + y + zw = 0 \qquad x^2 + yz = -4$$

Solução de uma equação linear

Dizemos que a sequência de números reais $(\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n)$ é solução da equação $a_1x_1 + a_2x_2 + \ldots + a_nx_n = b$ se a sentença $a_1\alpha_1 + a_2\alpha_2 + \ldots + a_n\alpha_n = b$ for verdadeira, isto é, quando, na equação dada, substituímos $\mathbf{x_1}$ por α_1, $\mathbf{x_2}$ por α_2, ..., $\mathbf{x_n}$ por α_n e, após efetuarmos as operações indicadas, obtemos uma sentença verdadeira.

Vejamos alguns casos:

- O par ordenado $(2, -3)$ é solução da equação $4x - 5y = 23$, pois, substituindo **x** por 2 e **y** por -3, obtemos:

$$4 \cdot 2 - 5 \cdot (-3) = 8 + 15 = 23 \Rightarrow \underbrace{23 = 23}_{\text{sentença verdadeira}}$$

- Considere a situação do saque no caixa eletrônico, apresentada na introdução deste capítulo.

Vamos apresentar as soluções da equação $10x + 20y = 90$, lembrando que **x** e **y** devem ser números naturais.

Temos as seguintes possibilidades:

x (Número de cédulas de R\$ 10,00)	**y** (Número de cédulas de R\$ 20,00)
1	4
3	3
5	2
7	1
9	0

Assim, os pares ordenados (1, 4), (3, 3), (5, 2), (7, 1), (9, 0) são soluções da equação.

- A terna ou tripla ordenada $(-1, -1, 2)$ é solução da equação $2a - 3b + c = 3$, pois $2 \cdot (-1) - 3 \cdot (-1) + 2 = -2 + 3 + 2 = 3$.

Já a tripla (5, 4, 1) não é solução dessa equação, pois $2 \cdot 5 - 3 \cdot 4 + 1 = 10 - 12 + 1 = -1 \neq 3$.

Observe que, ao representarmos a solução de uma equação linear, obedecemos à ordem alfabética de suas incógnitas. Na equação acima, quando dizemos que $(-1, -1, 2)$ é uma solução, subentende-se que $a = -1$, $b = -1$ e $c = 2$.

Sim, basta observar que:
$10x + 20y = 90 \Leftrightarrow$
$\Leftrightarrow 10 \cdot (x + 2y) = 90 \Leftrightarrow$
$\Leftrightarrow x + 2y = 9$
Vale a pena comentar com os estudantes que, em uma equação linear, podemos multiplicar ou dividir seus membros por um número real não nulo de modo a obter equações equivalentes, isto é, com mesmas soluções.

PENSE NISTO:

As soluções da equação linear $10x + 20y = 90$ são as mesmas soluções da equação $x + 2y = 9$?

EXERCÍCIO **RESOLVIDO**

1 Obtenha três soluções da equação linear $x - 3y = -2$, em que **x** e **y** são números reais.

Solução:

Podemos escolher, arbitrariamente, um valor para uma das incógnitas (por exemplo, **x**) e, a partir daí, determinar o valor da outra incógnita:

$$x = 1 \Rightarrow 1 - 3y = -2 \Rightarrow y = 1 \Rightarrow (1, 1) \text{ é solução.}$$

$$x = 0 \Rightarrow 0 - 3y = -2 \Rightarrow y = \frac{2}{3} \Rightarrow \left(0, \frac{2}{3}\right) \text{ é solução.}$$

$$x = 7 \Rightarrow 7 - 3y = -2 \Rightarrow y = 3 \Rightarrow (7, 3) \text{ é solução.}$$

Como podemos escolher qualquer valor real para **x** e calcular o valor de **y** correspondente obtendo a solução (x, y), concluímos que essa equação possui infinitas soluções.

PENSE NISTO:

Dê um exemplo de uma equação linear que não possui solução em $\mathbb{R}$.

$0 \cdot x + 0 \cdot y = 2$;
$0 \cdot x + 0 \cdot y + 0 \cdot z = -3$ etc.

EXERCÍCIOS

FAÇA NO CADERNO

1 Quais das equações seguintes podem ser classificadas como lineares?

a) $a - b + 2c = 3$

b) $x + \frac{1}{y} = 4$

c) $2x_1 - x_2 + x_3 - x_4 = x_5$

d) $a^2 + b^2 + c^2 = 1$

e) $ab + ac + bc = -2$

f) $x - y = 2$

g) $\sqrt{x} + y + 2z = 4$

h) $-m - n = p + 2$

2 Verifique se os pares ordenados abaixo são soluções da equação linear $2x - y = 7$.

a) $(2, -3)$ **b)** $(2, 7)$ **c)** $(5, 3)$

3 Verifique se as triplas ordenadas abaixo são soluções da equação $x + 2y + 4z = 1$.

a) $(-1, 3, -1)$

b) $(0, -4, -1)$

c) $(1, 1, 1)$

d) $\left(0, 0, \frac{1}{4}\right)$

4 A equação linear $3x - 2y + z = 1$ admite como solução $(1, -3, m)$. Qual é o valor de **m**?

5 Para um jantar beneficente foram vendidos convites a R$ 80,00 ou R$ 120,00 por pessoa. A arrecadação obtida com a venda dos convites foi R$ 25 200,00.

a) Escreva uma equação linear relacionando as incógnitas **x** (número de convites de R$ 80,00 vendidos) e **y** (número de convites de R$ 120,00 vendidos) com a arrecadação obtida com a venda dos convites.

b) É possível que o número de convites vendidos por R$ 80,00 tenha sido 45? E 65?

c) É possível que o número de convites vendidos por R$ 120,00 tenha sido o triplo do número de convites vendidos por R$ 80,00? E a metade?

6 Determine **m** real, de modo que o par $(m, 2m + 1)$ seja solução da equação $3x - 11y = 4$.

7 Determine duas soluções de cada uma das equações seguintes:

a) $4x_1 + 3x_2 = -5$

b) $x + y - z = 0$

c) $x + y = 2$

d) $x_1 + 2x_2 + 5x_3 = 16$

8 Cíntia tem de pagar uma compra de R$ 35,00 e só dispõe de moedas de R$ 1,00 e de notas de R$ 5,00. De quantos modos distintos poderá fazer o pagamento?

9 Considerando o problema anterior, determine o número de maneiras distintas de se fazer o pagamento, supondo que Cíntia disponha apenas de:

a) moedas de R$ 1,00 e notas de R$ 2,00;

b) notas de R$ 2,00, notas de R$ 5,00 e notas de R$ 10,00.

10 Uma equação linear com duas incógnitas apresenta os pares ordenados $(1, 1)$ e $(-2, -3)$ como algumas de suas soluções.

a) Escreva uma equação linear que satisfaça tais condições.

b) Obtenha mais três soluções dessa equação.

Sistemas lineares 2 × 2

Tina passeava pelo calçadão da praia quando avistou um quiosque que vendia sanduíches e água de coco. Em um cartaz havia as seguintes sugestões de pedidos:

GRAPHORAMA

Tina ficou interessada em saber o preço unitário do sanduíche e da água de coco. Estudante aplicada, representou por **x** e **y** os preços unitários da água de coco e do sanduíche, respectivamente, obtendo as seguintes equações:

$$\begin{cases} 3x + 2y = 30 \\ 2x + y = 17 \end{cases}$$

O conjunto dessas duas equações lineares é exemplo de um **sistema linear** de duas equações e duas incógnitas.

Um **sistema linear 2 × 2**, nas incógnitas **x** e **y**, é um conjunto de duas equações lineares em que **x** e **y** são as incógnitas de cada uma dessas equações.

Retomando o problema de Tina, para resolvê-lo, ela utilizará o método da adição, já estudado no Ensino Fundamental. Esse método consiste em adicionar, convenientemente, as duas equações, a fim de que se obtenha uma equação com apenas uma incógnita.

Temos o seguinte sistema:

$$\begin{cases} 3x + 2y = 30 \\ 2x + y = 17 \end{cases}$$

Se multiplicarmos a segunda equação por −2 e a adicionarmos à primeira, eliminaremos a incógnita **y**, de modo que a equação obtida somente apresentará a incógnita **x**.

$$\begin{cases} 3x + 2y = 30 \\ -4x - 2y = -34 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 3x + \cancel{2y} = 30 \\ -4x - \cancel{2y} = -34 \end{cases} \oplus$$
$$\overline{-x \qquad = -4 \Rightarrow x = 4}$$

Logo, a água de coco custa 4 reais.

Substituímos esse valor em qualquer uma das equações anteriores:

$$3x + 2y = 30 \quad \Rightarrow \quad 3 \cdot 4 + 2y = 30 \quad \Rightarrow \quad 2y = 18 \quad \Rightarrow \quad y = 9$$

Logo, o sanduíche custa 9 reais.

Observe que $x = 4$ e $y = 9$ satisfazem simultaneamente as duas equações:

$$\begin{cases} 3 \cdot 4 + 2 \cdot 9 = 12 + 18 = 30 \\ 2 \cdot 4 + 9 = 8 + 9 = 17 \end{cases}$$

Assim, dizemos que o conjunto solução do sistema é: $S = \{(4, 9)\}$.

Observe que esse método utiliza duas propriedades conhecidas de uma igualdade que envolve números reais:

- Multiplicando os dois membros de uma igualdade por um número real não nulo, a igualdade é mantida.

$$x = y \text{ e } z \in \mathbb{R}^* \Rightarrow x \cdot z = y \cdot z$$

- Adicionando-se (ou subtraindo-se), membro a membro, duas igualdades, obtemos uma nova igualdade.

$$x = y \text{ e } z = w \Rightarrow x + z = y + w$$

Professor, caso considere pertinente, é possível relembrar os métodos de comparação e de substituição na resolução de sistemas 2 × 2.
Vamos lembrar os dois métodos resolvendo o sistema

$$\begin{cases} 3x + 2y = 30 \\ 2x + y = 17 \end{cases}$$

Comparação:
$2y = 30 - 3x \qquad 2x + y = 17$
$y = \frac{30 - 3x}{2} \qquad y = 17 - 2x$

Daí: $\frac{30 - 3x}{2} = 17 - 2x \Rightarrow$
$\Rightarrow x = 4$ e $y = 9$

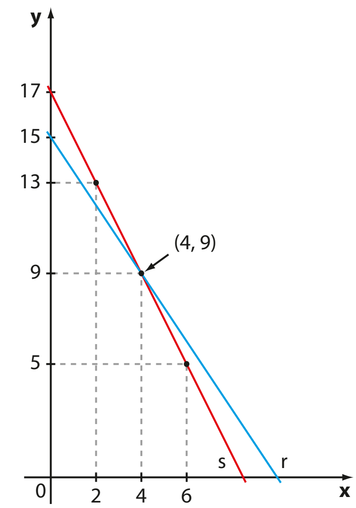
Substituição:
De $y = 17 - 2x$, temos:
$3x + 2 \cdot (17 - 2x) = 30 \Rightarrow$
$\Rightarrow -x + 34 = 30 \Rightarrow x = 4$ e $y = 9$

PENSE NISTO:

Você se lembra dos outros dois processos de resolução de sistemas 2 × 2 — substituição e comparação? Resolva o sistema por meio de um desses processos.

Interpretação geométrica e classificação

Além do processo algébrico, um sistema linear 2×2 pode ser resolvido graficamente. Acompanhe as situações a seguir.



I. Voltemos ao exemplo de Tina.

A equação linear $3x + 2y = 30$ é equivalente a $y = \dfrac{30 - 3x}{2}$, isto é, $y = 15 - \dfrac{3}{2}x$, que é a lei de uma função afim cujo gráfico é a reta **r** representada ao lado. Já a equação linear $2x + y = 17$ equivale a $y = -2x + 17$, que é a lei de uma função afim cujo gráfico é a reta **s**.

As retas **r** e **s** intersectam-se unicamente no ponto P(4, 9), isto é, o par ordenado (4, 9) é a única solução do sistema $\begin{cases} 3x + 2y = 30 \\ 2x + y = 17 \end{cases}$, pois verifica, simultaneamente, as duas equações.

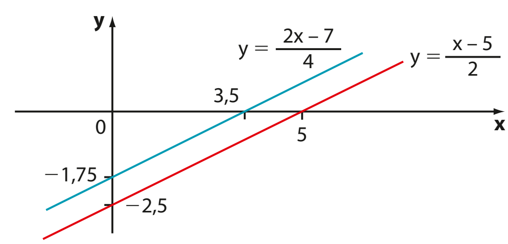
Nesse caso, dizemos que o **sistema é possível e determinado** (**S.P.D.**).

II. Seja o sistema $\begin{cases} x - 2y = 5 \\ 2x - 4y = 7 \end{cases}$

Resolvendo-o pelo método da adição, temos:

$$\begin{cases} x - 2y = 5 \quad \cdot(-2) \\ 2x - 4y = 7 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} -\cancel{2x} + \cancel{4y} = -10 \\ \cancel{2x} - \cancel{4y} = 7 \end{cases} \oplus$$
$$0 \cdot x + 0 \cdot y = -3$$

Observe que, quaisquer que sejam os valores de **x** e **y**, a equação obtida nunca é satisfeita, pois seu primeiro membro sempre resultará nulo e $0 \neq -3$. Assim, o sistema não admite solução.



Graficamente, as funções afim dadas pelas leis $y = \dfrac{x - 5}{2}$ e $y = \dfrac{2x - 7}{4}$ têm por gráficos retas paralelas distintas, como mostrado ao lado.

Como as retas são paralelas distintas, não há ponto de interseção. Assim, o sistema não admite solução.

Nesse caso, dizemos que o **sistema é impossível** e indicamos por **S.I.** Seu conjunto solução é $S = \varnothing$.

III. Ao resolvermos algebricamente o sistema $\begin{cases} x + y = 1 \\ 2x + 2y = 2 \end{cases}$, usando o método da adição, obtemos:

$$\begin{cases} x + y = 1 \quad \cdot(-2) \\ 2x + 2y = 2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} -\cancel{2x} - \cancel{2y} = -2 \\ \cancel{2x} + \cancel{2y} = 2 \end{cases} \oplus$$
$$0 \cdot x + 0 \cdot y = 0 \text{ (ou } 0 = 0)$$

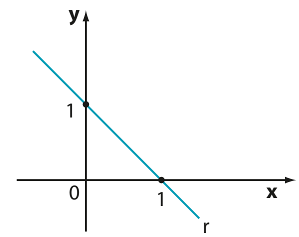
Observe a 2ª equação: $2x + 2y = 2$. Dividindo seus dois membros por 2, obtemos $x + y = 1$, ou seja, a 1ª equação. Desse modo, o sistema proposto se reduz à equação $x + y = 1$, que possui infinitas soluções, por exemplo: $(0, 1)$; $(2, -1)$; $(1, 0)$; $\left(\dfrac{3}{4}, \dfrac{1}{4}\right)$; $(-5, 6)$ etc.

Expressando-se **y** em função de **x**, obtemos $y = 1 - x$ e, deste modo, todo par ordenado da forma $(x, 1 - x)$, em que $x \in \mathbb{R}$, é solução do sistema e escrevemos: $S = \{(x, 1 - x); x \in \mathbb{R}\}$ 1

Nesse caso, dizemos que o **sistema é possível e indeterminado (S.P.I.)**.

Poderíamos também expressar **x** em função de **y**. De $x + y = 1$ obtemos: $x = 1 - y$ e, deste modo, o conjunto solução do sistema seria $S = \{(1 - y, y); y \in \mathbb{R}\}$ (2). Não é difícil verificar que (1) e (2) são formas equivalentes de expressar a solução do sistema.

Geometricamente, as funções do 1º grau dadas por $y = -x + 1$ e $y = \frac{-2x + 2}{2} = \frac{2 \cdot (-x + 1)}{2} = -x + 1$ têm por gráficos retas coincidentes e, portanto, possuem como interseção todos os pontos de **r**. Como **r** tem infinitos pontos, o sistema admite infinitas soluções.



Desse modo, um sistema linear 2 × 2 pode ser classificado de acordo com o número de soluções que possui. Veja:

- Sistema linear 2 × 2
  - possível — tem solução
    - determinado (S.P.D.) — única solução; retas concorrentes
    - indeterminado (S.P.I.) — infinitas soluções; retas coincidentes
  - impossível (S.I.) — não tem solução; retas paralelas

EXERCÍCIOS

FAÇA NO CADERNO

11 Resolva os seguintes sistemas, algébrica e graficamente, e classifique cada um deles.

a) $\begin{cases} x + 2y = 1 \\ 3x - 2y = 11 \end{cases}$

b) $\begin{cases} x - y = 1 \\ x + 2y = 0 \end{cases}$

c) $\begin{cases} x + y = 5 \\ 3x + 3y = 15 \end{cases}$

d) $\begin{cases} 3x - 2y = 1 \\ 6x - 4y = 7 \end{cases}$

12 Para uma festa infantil foram compradas 72 unidades de refrigerante, algumas de 2 L e outras de 1,5 L, num total de 129 L. Determine a quantidade de refrigerantes de 1,5 L comprada.

13 Em uma padaria, dois cafés e cinco minipães de queijo custam R$ 14,20; três cafés e sete minipães de queijo custam R$ 20,60.
Quanto custarão quatro cafés e dez minipães de queijo?

14 Luísa e Maíra foram fazer compras, cada qual com certa quantia. Se Maíra desse R$ 40,00 a Luísa, elas ficariam com a mesma quantia; se Luísa tivesse R$ 30,00 a menos, teria a metade do que Maíra possui. Quantos reais elas possuem juntas?

15 Em uma prova com 20 testes, cada resposta correta vale 5 pontos e cada resposta errada acarreta uma perda de 2 pontos. Em cada teste há apenas uma alternativa correta.

a) Maurício acertou 13 dos 20 testes. Qual foi sua pontuação final?

b) Amanda obteve pontuação final de 23 pontos. Quantas questões ela errou?

c) É possível que se termine a prova com 17 pontos?

16 Ao resolver graficamente o sistema $\begin{cases} x + y = m \\ 2x + 2y = 5 \end{cases}$, em que **m** é um número real, obtêm-se duas retas paralelas distintas. Quais são os possíveis valores de **m**?

17 Duas retas **r** e **s** correspondem, respectivamente, às funções afim definidas por: $y = x + 2$ e $y = -2x + m$, em que $m \in \mathbb{R}$. Se **r** e **s** intersectam-se no ponto (3, 5), qual é o valor de **m**?

18 Determine **m** e **n** reais para os quais a solução gráfica do sistema linear $\begin{cases} 2x - y = 3 \\ mx + ny = -6 \end{cases}$ é formada por infinitos pontos.

Sistema linear m × n

Um conjunto de **m** equações lineares e **n** incógnitas $\mathbf{x_1}, \mathbf{x_2}, \ldots, \mathbf{x_n}$ é chamado **sistema linear m × n**.

- $\begin{cases} x + y - 2z = 1 \\ x - 2y + z = -2 \\ 2x - y - z = 0 \end{cases}$ é um sistema linear com três equações e três incógnitas.

- $\begin{cases} x + y + z + w = 1 \\ x - y - z + 2w = 7 \end{cases}$ é um sistema linear com duas equações e quatro incógnitas.

- $\begin{cases} a + b = 3 \\ b - c = 0 \\ c + d = 5 \\ a - d = -1 \end{cases}$ é um sistema linear com quatro equações e quatro incógnitas.

Os sistemas lineares 2 × 2, estudados na seção anterior, são um caso particular de um sistema linear m × n, em que m = n = 2.

UM POUCO DE **HISTÓRIA**

Os sistemas lineares

O estudo dos sistemas lineares desenvolveu-se, historicamente, com maior intensidade nas civilizações orientais. Um dos capítulos do livro chinês *Nove capítulos sobre a arte matemática* (aproximadamente século III a.C.) contém um tópico sobre equações indeterminadas e a solução de um problema envolvendo um sistema linear com quatro equações e cinco incógnitas. Os coeficientes do sistema eram escritos com barras de bambu sobre um tabuleiro, que desempenhava o papel hoje ocupado pelas matrizes.

Credita-se aos chineses a descoberta de um processo de resolução de sistemas equivalente ao atual método do escalonamento, que estudaremos neste capítulo.

Fonte de pesquisa: BOYER, Carl B. *História da Matemática*. 3ª ed. São Paulo: Edgard Blucher, 2010.

Solução de um sistema

Dizemos que a sequência de números reais $(\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n)$ é **solução de um sistema linear** de **n** incógnitas se é solução de cada uma das equações do sistema.

Observe:

- O par ordenado (4, 1) é solução do sistema $\begin{cases} x + y = 5 \\ x - y = 3 \\ -6x + 10y = -14 \end{cases}$, pois, substituindo **x** por 4 e **y** por 1 em cada equação do sistema, obtemos sentenças verdadeiras: $4 + 1 = 5$; $4 - 1 = 3$; $-6 \cdot 4 + 10 \cdot 1 = -14$.

- A tripla ordenada (5, 3, 2) é solução do sistema $\begin{cases} x + y + z = 10 \\ x - y + z = 4 \\ x - y - z = 0 \end{cases}$, pois, fazendo $x = 5$, $y = 3$ e $z = 2$, obtemos sentenças verdadeiras: $5 + 3 + 2 = 10$; $5 - 3 + 2 = 4$; $5 - 3 - 2 = 0$.

Matrizes associadas a um sistema

Podemos associar a um sistema linear duas matrizes cujos elementos são os coeficientes das equações que formam o sistema.

Observe os sistemas lineares a seguir:

- Ao sistema $\begin{cases} 5x + 4y = 1 \\ 3x + 7y = 2 \end{cases}$ podemos associar as matrizes $A = \begin{pmatrix} 5 & 4 \\ 3 & 7 \end{pmatrix}$, chamada **matriz incompleta** formada pelos coeficientes das incógnitas, e a matriz $B = \begin{pmatrix} 5 & 4 & 1 \\ 3 & 7 & 2 \end{pmatrix}$, chamada **matriz completa**.

- Ao sistema $\begin{cases} x + y - 2z = 0 \\ x - 2y + z = 3 \\ 2x - y - z = -4 \end{cases}$ podemos associar as matrizes **A** e **B**, incompleta e completa, respectivamente:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & -2 \\ 1 & -2 & 1 \\ 2 & -1 & -1 \end{bmatrix} \quad \text{e} \quad B = \begin{bmatrix} 1 & 1 & -2 & 0 \\ 1 & -2 & 1 & 3 \\ 2 & -1 & -1 & -4 \end{bmatrix}$$

- Ao sistema $\begin{cases} 2x + y - z = 0 \\ 5y + z = 1 \\ -2y + z = 3 \\ z = -2 \end{cases}$ podemos associar as matrizes **A** e **B**, incompleta e completa, respectivamente:

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 0 & 5 & 1 \\ 0 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad \text{e} \quad B = \begin{bmatrix} 2 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 5 & 1 & 1 \\ 0 & -2 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & -2 \end{bmatrix}$$

Note que **B** é obtido de **A** acrescentando-se a coluna relativa aos coeficientes independentes de cada uma das equações do sistema.

Representação matricial de um sistema

Lembrando o processo de multiplicação de matrizes e utilizando a matriz incompleta de um sistema, é possível representá-lo na forma matricial. Vejamos alguns casos:

- O sistema $\begin{cases} 5x + 4y = 1 \\ 3x + 7y = 2 \end{cases}$ pode ser escrito na forma matricial:

$$\begin{pmatrix} 5 & 4 \\ 3 & 7 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

- O sistema $\begin{cases} x + y - 2z = 0 \\ x - 2y + z = 0 \\ 2x - y - z = 0 \end{cases}$ pode ser representado pela equação matricial:

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & -2 \\ 1 & -2 & 1 \\ 2 & -1 & -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

- A equação matricial $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & -1 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ w \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 7 \end{pmatrix}$ é outra forma de representar o sistema:

$$\begin{cases} x + y + z + w = 1 \\ x - y - z + 2w = 7 \end{cases}$$

EXERCÍCIOS

FAÇA NO CADERNO

19 Com relação ao sistema $\begin{cases} x + y = 1 \\ 2x + 3y = 0 \end{cases}$:

a) Verifique se os pares ordenados $(3, -2)$ e $\left(-\frac{1}{3}, \frac{4}{3}\right)$ são soluções dele.

b) Represente-o na forma de uma equação matricial.

20 Dado o sistema linear, indique quais triplas ordenadas são soluções:

$$\begin{cases} x + y - z = 0 \\ x - y + z = 4 \\ -x + y + 2z = -5 \end{cases}$$

a) $(2, 1, 3)$ **b)** $\left(2, -\frac{7}{3}, -\frac{1}{3}\right)$ **c)** $(-1, 1, 0)$

21 Construa a matriz incompleta **A** e a completa **B** de cada um dos sistemas:

a) $\begin{cases} x + y = 7 \\ x + z = 8 \\ y + z = 9 \end{cases}$

b) $\begin{cases} 4x - y + z = -1 \\ x + 2y - z = -2 \\ x - z = -5 \end{cases}$

c) $\begin{cases} 3x + 2y = -4 \\ x - y = -7 \\ 4x + y = 2 \end{cases}$

d) $\begin{cases} 2x + y + 3z = -13 \\ -x + y + 10z = 4 \end{cases}$

22 Escreva, em cada caso, o sistema associado à representação matricial dada:

a) $\begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 2 & 5 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \end{pmatrix}$

b) $\begin{pmatrix} 5 & 7 & -2 \\ 1 & -1 & 3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 11 \\ 13 \end{pmatrix}$

c) $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & -4 & 3 \\ -3 & -3 & -3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 11 \\ 10 \end{pmatrix}$

23 Em cada caso, determine o valor real de **m**:

a) A tripla ordenada $(2, -1, 3)$ é solução do sistema

$$\begin{cases} x + y - z = -2 \\ -x + 2z = 4 \\ 2x + my - z = 0 \end{cases}$$

b) O par ordenado $(5, m)$ é solução do sistema

$$\begin{cases} x + y = 8 \\ -4x + 5y = -5 \end{cases}$$

c) A tripla ordenada $(m, 0, -2)$ é solução do sistema

$$\begin{cases} x + y - z = 5 \\ 3x + 2z = 5 \end{cases}$$

24 Dado o sistema linear $\begin{cases} x + 2y + z = 5 \\ 2x + 3y - z = 0 \end{cases}$:

a) Represente-o na forma de uma equação matricial.

b) Verifique que $(-5, 4, 2)$ é uma solução desse sistema, mas $(1, 1, 1)$ não é.

c) Verifique que toda terna ordenada $(-15 + 5z, 10 - 3z, z)$, em que $z \in \mathbb{R}$, é solução desse sistema.

d) Se $(p, 16, -2)$ é solução desse sistema, determine o valor de **p**.

Sistemas escalonados

Observe os sistemas lineares seguintes:

- $\begin{cases} 4x - y + 2z = 5 \\ 0x + y - 3z = 7 \\ 0x + 0y + z = -2 \end{cases}$ ou, simplesmente, $\begin{cases} 4x - y + 2z = 5 \\ y - 3z = 7 \\ z = -2 \end{cases}$

- $\begin{cases} 3x - y + 2z = -4 \\ 3y - z = 7 \end{cases}$

- $\begin{cases} 4a + b - c + d = 0 \\ -2b + c + 3d = 1 \\ -2c + d = 3 \\ -5d = 1 \end{cases}$

- $\begin{cases} 2x - y + z - 4w = 3 \\ y + 3w = 2 \end{cases}$

Todos eles apresentam as seguintes características comuns:

- Em cada equação existe pelo menos um coeficiente (de alguma incógnita) não nulo.
- Considerando a ordem "de cima para baixo", o número de coeficientes nulos, antes do 1º coeficiente não nulo, aumenta de equação para equação.

Os sistemas que apresentam tais características são chamados **sistemas escalonados**.

Resolução de um sistema na forma escalonada

Vamos estudar a seguir dois tipos de sistemas escalonados.

1º tipo: Sistema com número de equações igual ao número de incógnitas

Seja o sistema escalonado: $\begin{cases} x - 2y + z = -5 \\ y + 2z = -3 \\ 3z = -6 \end{cases}$

Partindo da última equação, obtemos **z**. Substituindo o valor obtido para **z** na segunda equação, obtemos **y**. Por fim, substituindo **y** e **z** na 1ª equação, obtemos **x**.

Acompanhe:

$3z = -6 \Rightarrow z = -2$ (1)

$y + 2 \cdot (-2) = -3 \Rightarrow y - 4 = -3 \Rightarrow y = 1$ (2)

$x - 2 \cdot 1 + (-2) = -5 \Rightarrow x - 4 = -5 \Rightarrow x = -1$ (3)

Assim, a solução do sistema é $(-1, 1, -2)$.

Se um sistema escalonado apresenta número de equações igual ao número de incógnitas, ele é possível e determinado, isto é, ele tem uma única solução.

2º tipo: Sistema com número de equações menor que o número de incógnitas

Considere o seguinte problema:

Encontre três números reais cuja soma seja 100, sendo um deles o dobro do outro.

Chamando de **x**, **y** e **z** os números procurados, obtemos o seguinte sistema:

$$\begin{cases} x + y + z = 100 \\ y = 2z \end{cases} \quad \text{ou ainda:} \quad \begin{cases} x + y + z = 100 \\ y - 2z = 0 \end{cases}$$

Observe que o último sistema está escalonado. Podemos, por tentativa, encontrar algumas soluções desse sistema, seguindo os passos a seguir:

	Escolha um número qualquer	→	O outro número (y) é o dobro do escolhido (y = 2z)	→	O terceiro número (x) é calculado por meio da diferença: 100 − soma dos dois números anteriores (x = 100 − (y + z))
	(z)	→	(y)	→	(x)
	10	→	20	→	70
	30	→	60	→	10
	4,5	→	9	→	86,5
	−30	→	−60	→	190
	⋮		⋮		⋮
Em geral, se $\alpha \in \mathbb{R}$:	α	→	2α	→	$100 - 3\alpha$
	⋮		⋮		⋮

Observe que, para cada escolha do primeiro número (**z**), encontramos uma única solução para o sistema. Como **z** pode assumir qualquer valor real, concluímos que o sistema apresenta infinitas soluções.

O conjunto solução do sistema é:

$$S = \{(100 - 3\alpha, 2\alpha, \alpha); \alpha \in \mathbb{R}\}$$

Processo prático

Vamos apresentar um procedimento que permitirá obter diretamente a solução geral de um sistema escalonado que possui número de equações menor que o número de incógnitas.

Para isso, vamos utilizar o seguinte sistema escalonado:

$$\begin{cases} x - 2y + 3z = 5 \\ \quad\quad y - 2z = 1 \end{cases}$$

Acompanhe os passos:

1º) Identificamos a incógnita que não aparece no início de cada uma das equações do sistema (geralmente, esta é a "última" incógnita de todas as equações), chamada **variável livre** (ou **incógnita livre**). A variável livre poderá assumir qualquer valor real e, para cada valor assumido por ela, obtemos os valores das demais incógnitas, encontrando uma solução do sistema (se houver mais de uma variável livre, procederemos de modo análogo). Nesse sistema, a variável livre é **z**.

2º) Reescrevemos cada equação do sistema de modo que o termo com a variável livre fique no 2º membro e obtemos:

$$\begin{cases} x - 2y = 5 - 3z \\ \quad\quad y = 1 + 2z \end{cases} \quad (1)$$

3º) Se atribuirmos um valor para **z**, obteremos um sistema (escalonado) determinado. Resolvendo-o, encontraremos uma solução do sistema.

Se atribuirmos outro valor para **z**, obteremos outro sistema, também determinado, que, resolvido, fornecerá outra solução do sistema. E assim por diante.

Façamos, então, $z = \alpha$ (α é um número real qualquer) e em (1) teremos:

$$\begin{cases} x - 2y = 5 - 3\alpha & (2) \\ \quad\quad y = 1 + 2\alpha & (3) \end{cases}$$

4º) Substituímos (3) em (2):

$$x - 2 \cdot (1 + 2\alpha) = 5 - 3\alpha \Rightarrow x - 2 - 4\alpha = 5 - 3\alpha \Rightarrow x = 7 + \alpha$$

5º) Por fim, as soluções do sistema podem ser representadas pela solução geral:

$(7 + \alpha, 1 + 2\alpha, \alpha)$ com $\alpha \in \mathbb{R}$; temos $S = \{(7 + \alpha, 1 + 2\alpha, \alpha); \alpha \in \mathbb{R}\}$

Esse tipo de sistema apresenta sempre infinitas soluções, sendo, portanto, um sistema possível e indeterminado (S.P.I.).

Atribuindo valores reais para α, obtemos algumas de suas soluções:

$$\alpha = 0 \Rightarrow (7, 1, 0)$$
$$\alpha = 1 \Rightarrow (8, 3, 1)$$
$$\alpha = -2 \Rightarrow (5, -3, -2)$$
$$\alpha = \frac{1}{2} \Rightarrow \left(\frac{15}{2}, 2, \frac{1}{2}\right) \text{ etc.}$$

Quando um sistema escalonado apresenta número de equações menor que o número de incógnitas, ele é possível e indeterminado, isto é, tem infinitas soluções.

OBSERVAÇÕES

- É importante destacar que, na identificação da(s) variável(is) livre(s), levamos em consideração que, em cada equação do sistema, os termos que contêm as incógnitas aparecem sempre em uma mesma ordem (em geral, a ordem alfabética).
- A escolha da variável livre é, na verdade, arbitrária. Poderíamos, por exemplo, ter escolhido **y** como variável livre. No caso do sistema que acabamos de resolver, teríamos $z = \frac{y - 1}{2}$ e $x = \frac{y + 13}{2}$ (faça as contas) e o conjunto solução do sistema seria $S = \left\{\left(\frac{y + 13}{2}, y, \frac{y - 1}{2}\right); y \in \mathbb{R}\right\}$. Pode-se mostrar que os dois conjuntos solução obtidos são iguais, isto é, possuem os mesmos elementos.

No entanto, vamos seguir a convenção adotada a fim de facilitar a verificação das respostas e estabelecer um procedimento comum.

EXERCÍCIOS **RESOLVIDOS**

2 Resolva o sistema $\begin{cases} x + 2y + z = 2 \\ y - 3z = 1 \end{cases}$.

Solução:

O sistema proposto está escalonado e tem o número de equações menor que o número de incógnitas. Trata-se de um sistema indeterminado.

A variável livre do sistema é **z**.

Reescrevendo o sistema de modo que **z** fique no 2º membro, temos: $\begin{cases} x + 2y = 2 - z \\ y = 1 + 3z \end{cases}$

Fazendo $z = \alpha$ (com $\alpha \in \mathbb{R}$), obtemos: $\begin{cases} x + 2y = 2 - \alpha & (1) \\ y = 1 + 3\alpha & (2) \end{cases}$

Substituindo (2) em (1), obtemos:

$$x + 2 \cdot (1 + 3\alpha) = 2 - \alpha \Rightarrow x = -7\alpha$$

Assim:

$$S = \{(-7\alpha, 1 + 3\alpha, \alpha); \alpha \in \mathbb{R}\}$$

Vejamos algumas soluções particulares:

- $\alpha = 3 \Rightarrow (-21, 10, 3)$
- $\alpha = -2 \Rightarrow (14, -5, -2)$
- $\alpha = \frac{1}{3} \Rightarrow \left(-\frac{7}{3}, 2, \frac{1}{3}\right)$

⋮

3 Resolva o sistema $\begin{cases} a - b + c + d = 1 \\ 2c - d = 0 \end{cases}$.

Solução:

O sistema está escalonado e tem o número de equações menor que o número de incógnitas.

As variáveis livres são: **b** e **d**.

Reescrevendo o sistema de modo que as variáveis livres fiquem no 2º membro e fazendo $b = \alpha$ e $d = \beta$ (com $\alpha \in \mathbb{R}$ e $\beta \in \mathbb{R}$), temos:

$$\begin{cases} a + c = 1 + \alpha - \beta & (1) \\ 2c = \beta & (2) \end{cases}$$

De (2) obtemos: $c = \frac{\beta}{2}$

Em (1) temos: $a + \frac{\beta}{2} = 1 + \alpha - \beta \Rightarrow a = 1 + \alpha - \frac{3}{2}\beta$

O conjunto solução do sistema é: $S = \left\{\left(1 + \alpha - \frac{3}{2}\beta, \alpha, \frac{\beta}{2}, \beta\right); \alpha \in \mathbb{R} \text{ e } \beta \in \mathbb{R}\right\}$.

Atribuindo-se valores reais quaisquer a α e a β, obtemos algumas soluções particulares do sistema:

- $\alpha = 0$ e $\beta = 1 \Rightarrow \left(-\frac{1}{2}, 0, \frac{1}{2}, 1\right)$
- $\alpha = 1$ e $\beta = 2 \Rightarrow (-1, 1, 1, 2)$ etc.

EXERCÍCIOS

FAÇA NO CADERNO

25 Verifique se cada um dos sistemas abaixo está escalonado.

a) $\begin{cases} x + 3y = 7 \\ 2y = 5 \end{cases}$

b) $\begin{cases} -3x + 2y = 11 \\ x - 3y = -1 \end{cases}$

c) $\begin{cases} x + y + z = 0 \\ y - z = 5 \\ 2z = 8 \end{cases}$

d) $\begin{cases} x - 5y + 3z = 8 \\ 3y + 7z = -2 \\ 2y - 5z = 3 \end{cases}$

26 Resolva e classifique os seguintes sistemas:

a) $\begin{cases} 3x + 2y = 5 \\ -y = -7 \end{cases}$

b) $\begin{cases} x + y + z = 2 \\ y + z = -1 \\ -2z = 8 \end{cases}$

c) $\begin{cases} x - y + 2z = 5 \\ y - 3z = 2 \end{cases}$

d) $\begin{cases} x + y + z - 2w = 5 \\ y - z + 3w = 3 \\ 2z - w = 4 \\ 3w = 6 \end{cases}$

e) $\begin{cases} 4x + y + 2z = -1 \\ 5y - z = 0 \\ 0z = -5 \end{cases}$

27 O sistema $\begin{cases} a + b - c = \alpha \\ 2b + c = \beta \\ 3c = \gamma \end{cases}$, nas incógnitas **a**, **b** e **c**, é possível e determinado e sua solução é $(-1, 2, -2)$. Determine os valores das constantes reais α, β e γ.

28 Considere o problema: "Determine dois números reais cuja diferença seja igual a 8".

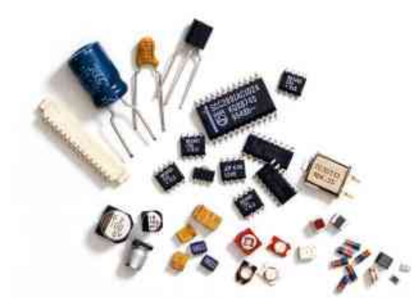
a) Represente esse problema por meio de um sistema linear.

b) Apresente ao menos quatro soluções do problema.

c) Classifique o sistema do item *a*, obtendo também sua solução geral.

29 Uma das soluções de $\begin{cases} x - y + z = 2 \\ y - 2z = m \end{cases}$ é $(1, -1, 0)$. Determine o conjunto solução desse sistema.

Escalonamento



STOCKFOLIO/ALAMY/FOTOARENA

Uma loja vende componentes eletrônicos de três tipos diferentes: **A**, **B** e **C**.

Um levantamento sobre as vendas desses componentes, realizado durante três dias consecutivos, revelou que:

- no primeiro dia, foram vendidos um componente do tipo **A**, dois do tipo **B** e três do tipo **C**, arrecadando-se R$ 260,00;
- no 2º dia, foram vendidos dois componentes do tipo **A**, um do tipo **B** e um do tipo **C**, resultando num total de vendas igual a R$ 150,00;
- no 3º dia, foram vendidos quatro componentes do tipo **A**, três do tipo **B** e um do tipo **C**, num total de R$ 290,00.

Qual é o preço unitário de venda de cada tipo de componente?

Vamos representar o preço unitário dos componentes dos tipos **A**, **B** e **C** por **a**, **b** e **c**, respectivamente.

Temos: $\begin{array}{l} 1^{\underline{o}}\text{ dia} \rightarrow \\ 2^{\underline{o}}\text{ dia} \rightarrow \\ 3^{\underline{o}}\text{ dia} \rightarrow \end{array} \begin{cases} a + 2b + 3c = 260 \\ 2a + b + c = 150 \\ 4a + 3b + c = 290 \end{cases}$

O método do escalonamento, que será estudado a seguir, possibilitará resolver esse sistema.

Sistemas equivalentes

Dois sistemas lineares, $\mathbf{S}_1$ e $\mathbf{S}_2$, são equivalentes se toda solução de $\mathbf{S}_1$ é solução de $\mathbf{S}_2$, e vice-versa.

Os sistemas $S_1: \begin{cases} x + y = 2 \\ x + 2y = 1 \end{cases}$ e $S_2: \begin{cases} x - y = 4 \\ 3x + 2y = 7 \end{cases}$, por exemplo, são equivalentes, pois ambos admitem apenas o par $(3, -1)$ como solução.

Dado um sistema linear qualquer, nosso objetivo é transformá-lo em um outro equivalente, porém na forma escalonada. Procederemos dessa maneira, pois, como vimos, não é difícil resolver um sistema na forma escalonada.

Para isso, poderemos usar os seguintes procedimentos:

I. Multiplicar por **k**, $k \in \mathbb{R}^*$, os dois membros de uma equação qualquer do sistema.

II. Substituir uma equação do sistema pela soma dela, membro a membro, com alguma outra equação. Cada uma dessas equações pode ou não estar previamente multiplicada por um número real não nulo.

III. Trocar a posição de duas equações do sistema.

Observe que os dois primeiros procedimentos já foram usados quando estudamos a resolução de sistemas lineares 2×2.

Para escalonar um sistema linear qualquer, vamos seguir o roteiro abaixo.

1º) Escolhemos para a 1ª equação aquela em que o coeficiente da 1ª incógnita seja não nulo.
Se possível, fazemos a escolha para que esse coeficiente seja igual a -1 ou 1, pois os cálculos ficam, em geral, mais simples.

2º) Anulamos o coeficiente da 1ª incógnita das demais equações, usando o procedimento **II** citado acima.

3º) Fixamos a 1ª equação e aplicamos os dois primeiros passos com as equações restantes.

4º) Fixamos a 1ª e a 2ª equações e aplicamos os dois primeiros passos nas equações restantes, até o sistema ficar escalonado.

EXEMPLO 1

Vamos escalonar e, depois, resolver o sistema $\begin{cases} a + 2b + 3c = 260 \\ 2a + b + c = 150 \\ 4a + 3b + c = 290 \end{cases}$, proposto na situação da loja de componentes eletrônicos apresentada na página anterior.

Em primeiro lugar, precisamos anular os coeficientes de **a** na 2ª e na 3ª equações.

$$\begin{cases} a + 2b + 3c = 260 \\ -3b - 5c = -370 \\ -5b - 11c = -750 \end{cases}$$

Substituímos a 2ª equação pela soma dela com a 1ª, multiplicada por -2:

$$\begin{array}{r} -\cancel{2a} - 4b - 6c = -520 \\ \cancel{2a} + b + c = 150 \quad \oplus \\ \hline -3b - 5c = -370 \end{array}$$

Substituímos a 3ª equação pela soma dela com a 1ª, multiplicada por -4:

$$\begin{array}{r} -\cancel{4a} - 8b - 12c = -1\,040 \\ \cancel{4a} + 3b + c = 290 \quad \oplus \\ \hline -5b - 11c = -750 \end{array}$$

Fixando a 1ª equação, vamos repetir o processo para a 2ª e a 3ª equações.

$$\begin{cases} a + 2b + 3c = 260 \\ \quad -3b - 5c = -370 \\ \qquad\quad \boxed{-8c = -400} \end{cases}$$

Substituímos a 3ª equação pela soma dela, multiplicada por 3, com a 2ª, multiplicada por −5:

$$\begin{array}{rcll} -\cancel{15b} - 33c & = & -2\,250 & \leftarrow (3 \cdot 3^{a}\text{ eq.}) \\ \cancel{15b} + 25c & = & +1\,850 \; \oplus & \leftarrow (-5 \cdot 2^{a}\text{ eq.}) \\ \hline -8c & = & -400 & \end{array}$$

O sistema obtido está escalonado e tem o mesmo número de equações e de incógnitas, isto é, o sistema é possível e determinado.

Resolvendo-o, obtemos:

- na 3ª equação $\rightarrow$ $c = 50$;
- na 2ª equação $\rightarrow$ $-3b - 5 \cdot 50 = -370 \Rightarrow -3b = -120 \Rightarrow b = 40$;
- na 1ª equação $\rightarrow$ $a + 2 \cdot 40 + 3 \cdot 50 = 260 \Rightarrow a + 230 = 260 \Rightarrow a = 30$.

Desse modo, os preços unitários dos componentes dos tipos **A**, **B** e **C** são, respectivamente, R$ 30,00, R$ 40,00 e R$ 50,00.

EXEMPLO 2

Vamos escalonar e resolver o sistema $\begin{cases} 3x - y + z = 2 \\ x - 2y - z = 0 \\ 2x + y + 2z = 2 \end{cases}$.

Vamos trocar as posições das duas primeiras equações, a fim de que o 1º coeficiente de **x** seja igual a 1: $\begin{cases} x - 2y - z = 0 \\ 3x - y + z = 2 \\ 2x + y + 2z = 2 \end{cases}$.

Precisamos anular os coeficientes de **x** na 2ª e 3ª equações:

$$\begin{cases} x - 2y - z = 0 \\ \boxed{5y + 4z = 2} \\ \boxed{5y + 4z = 2} \end{cases} \; *$$

(−3) · (1ª eq.) + (2ª eq.):

$$\begin{array}{rcl} -\cancel{3x} + 6y + 3z & = & 0 \\ \cancel{3x} - y + z & = & 2 \; \oplus \\ \hline 5y + 4z & = & 2 \end{array}$$

(−2) · (1ª eq.) + (3ª eq.):

$$\begin{array}{rcl} -\cancel{2x} + 4y + 2z & = & 0 \\ \cancel{2x} + y + 2z & = & 2 \; \oplus \\ \hline 5y + 4z & = & 2 \end{array}$$

Fixando a 1ª equação, repetimos o processo para a 2ª e a 3ª equações:

Obtemos:

$$\begin{cases} x - 2y - z = 0 \\ 5y + 4z = 2 \\ \boxed{0 = 0} \end{cases}$$

(−1) · (2ª eq.) + (3ª eq.):

$$\begin{array}{rcl} -\cancel{5y} - \cancel{4z} & = & -\cancel{2} \\ \cancel{5y} + \cancel{4z} & = & \cancel{2} \; \oplus \\ \hline 0 & = & 0 \end{array}$$

OBSERVAÇÃO

No processo de escalonamento, podemos encontrar duas equações com os coeficientes da mesma incógnita iguais (ou proporcionais), o mesmo ocorrendo com os coeficientes independentes (veja * no exemplo 2). Nesses casos, já podemos retirar uma delas do sistema, pois são equações equivalentes.

A 3ª equação pode ser suprimida do sistema, pois, apesar de ser sempre verdadeira, ela não traz informação sobre os valores das incógnitas. Assim, obtemos o sistema escalonado:

$$\begin{cases} x - 2y - z = 0 & (1) \\ 5y + 4z = 2 & (2) \end{cases}$$, cujo número de equações é menor que o número de incógnitas e, portanto, é possível e indeterminado.

A variável livre do sistema é **z**. Fazendo $z = \alpha$, $\alpha \in \mathbb{R}$, obtemos:

- em (2): $y = \dfrac{2 - 4\alpha}{5}$
- em (1): $x = 2y + z \Rightarrow x = 2\left(\dfrac{2 - 4\alpha}{5}\right) + \alpha \Rightarrow x = \dfrac{-3\alpha + 4}{5}$

Assim, $S = \left\{\left(\dfrac{-3\alpha + 4}{5}, \dfrac{2 - 4\alpha}{5}, \alpha\right); \alpha \in \mathbb{R}\right\}$.

EXEMPLO 3

Vamos escalonar e resolver o sistema $\begin{cases} 2x - y + z = -1 \\ -5x - 20y - 15z = 11 \\ 3x + 3y + 4z = 3 \end{cases}$.

Precisamos anular os coeficientes de **x** na 2ª e na 3ª equações:

$$\begin{cases} 2x - y + z = -1 \\ -45y - 25z = 17 \\ 9y + 5z = 9 \end{cases} \quad *$$

5 · (1ª eq.) + 2 · (2ª eq.):

$$\begin{array}{r} \cancel{10x} - 5y + 5z = -5 \\ -\cancel{10x} - 40y - 30z = 22 \\ \hline -45y - 25z = 17 \end{array} \oplus$$

(−3) · (1ª eq.) + 2 · (3ª eq.):

$$\begin{array}{r} -\cancel{6x} + 3y - 3z = 3 \\ \cancel{6x} + 6y + 8z = 6 \\ \hline 9y + 5z = 9 \end{array} \oplus$$

OBSERVAÇÃO

No processo de escalonamento, podemos encontrar duas equações incompatíveis entre si. No exemplo 3, em *, poderíamos ter dividido os coeficientes da 2ª equação por (−5), obtendo a equação $9y + 5z = -\dfrac{17}{5}$, que é incompatível com a 3ª equação: $9y + 5z = 9$. Quando isso ocorrer, podemos concluir que se trata de um sistema impossível.

Repetimos o processo para a 2ª e a 3ª equações, fixando a 1ª equação. Vamos anular o coeficiente de **y** na 3ª equação.

$$\begin{cases} 2x - y + z = -1 \\ -45y - 25z = 17 \\ 0 = 62 \end{cases}$$

(2ª eq.) + 5 · (3ª eq.):

$$\begin{array}{r} -\cancel{45y} - \cancel{25z} = 17 \\ \cancel{45y} + \cancel{25z} = 45 \\ \hline \underbrace{0 \cdot y + 0 \cdot z}_{0} = 62 \end{array} \oplus$$

A equação obtida é sempre falsa, pois, para todo $y \in \mathbb{R}$ e $z \in \mathbb{R}$, o primeiro membro se anula e $0 \neq 62$.

Logo, o sistema é impossível, isto é, não admite solução.

EXEMPLO 4

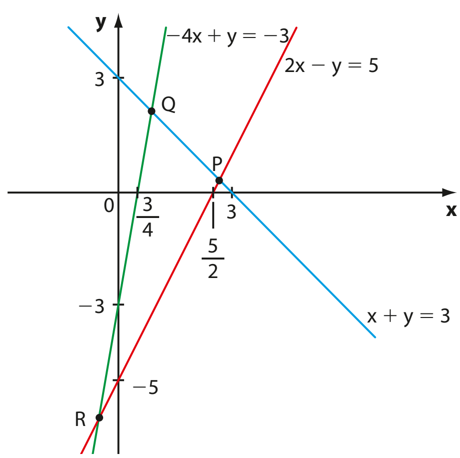
Vamos escalonar e resolver o sistema $\begin{cases} x + y = 3 \\ 2x - y = 5. \\ -4x + y = -3 \end{cases}$

É preciso anular o coeficiente de **x** na 2ª e na 3ª equações. Temos:

$$\begin{cases} x + y = 3 \\ -3y = -1 \leftarrow (-2) \cdot (1^a \text{ eq.}) + (2^a \text{ eq.}) \\ 5y = 9 \leftarrow (4) \cdot (1^a \text{ eq.}) + (3^a \text{ eq.}) \end{cases}$$

Esse sistema é impossível, pois a 2ª e a 3ª equações não podem ser satisfeitas simultaneamente. Assim, $S = \varnothing$.

É interessante interpretar graficamente esse sistema. Já vimos que uma equação linear com duas incógnitas é representada, graficamente, por uma reta. Façamos, em um mesmo plano cartesiano, a representação dessas três retas.



P é solução de $\begin{cases} x + y = 3 \\ 2x - y = 5 \end{cases} \Rightarrow P\left(\frac{8}{3}, \frac{1}{3}\right)$;

Q é solução de $\begin{cases} -4x + y = -3 \\ x + y = 3 \end{cases} \Rightarrow Q\left(\frac{6}{5}, \frac{9}{5}\right)$;

R é solução de $\begin{cases} -4x + y = -3 \\ 2x - y = 5 \end{cases} \Rightarrow R(-1, -7)$

PENSE NISTO:

Quais são as coordenadas dos pontos **P**, **Q** e **R**?

Observe que as três retas obtidas são, duas a duas, concorrentes entre si (veja os pontos **P**, **Q** e **R**), mas não existe um ponto que pertença, simultaneamente, às três retas.

EXEMPLO 5

Vamos escalonar e resolver o sistema $\begin{cases} 2x + 3y - z = 1 \\ 4x - y + 5z = 2 \end{cases}$.

Devemos anular o coeficiente de **x** na 2ª equação:

$$\begin{cases} 2x + 3y - z = 1 \\ -7y + 7z = 0 \leftarrow (-2) \cdot (1^a \text{ eq.}) + (2^a \text{ eq.}) \end{cases}$$

O sistema obtido está escalonado, tem o número de equações menor que o número de incógnitas e é possível e indeterminado; sua variável livre é **z**.

Se $z = \alpha$, $\alpha \in \mathbb{R}$, obtemos:

2ª equação: $-7y + 7\alpha = 0 \Rightarrow y = \alpha$

1ª equação: $2x + 3\alpha - \alpha = 1 \Rightarrow x = \dfrac{1 - 2\alpha}{2} = \dfrac{1}{2} - \alpha$

$$S = \left\{\left(\frac{1}{2} - \alpha, \alpha, \alpha\right); \alpha \in \mathbb{R}\right\}$$

EXERCÍCIOS

FAÇA NO CADERNO

30 Resolva os seguintes sistemas, por meio do escalonamento, e classifique-os.

a) $\begin{cases} x + 2y + z = 9 \\ 2x + y - z = 3 \\ 3x - y - 2z = -4 \end{cases}$

b) $\begin{cases} x - y - 2z = 1 \\ -x + y + z = 2 \\ x - 2y + z = -2 \end{cases}$

c) $\begin{cases} x + 3y + 2z = 2 \\ 3x + 5y + 4z = 4 \\ 5x + 3y + 4z = -10 \end{cases}$

d) $\begin{cases} x + y + z = 2 \\ 2x - z = -1 \\ 3x + y = 1 \end{cases}$

31 Resolva os seguintes sistemas:

a) $\begin{cases} x + 8y - 3z = 7 \\ -x + 3y - 2z = 1 \\ 3x + 2y + z = 5 \end{cases}$

b) $\begin{cases} x + y = 3 \\ x + z = 4 \\ y + z = -3 \end{cases}$

c) $\begin{cases} 2x - y + z = 3 \\ x + y - 3z = 1 \\ 3x - 2z = 3 \end{cases}$

d) $\begin{cases} a - b - c = -1 \\ a - b + c = 1 \\ a + b - c = 1 \end{cases}$

32 Um casal de namorados jantou, em um *fast-food* de cozinha árabe, três vezes em um mesmo mês.

- Na primeira noite, consumiram dois quibes, cinco esfirras e dois sucos e pagaram R$ 32,00.
- Na segunda noite, consumiram três quibes, seis esfirras e três sucos e pagaram R$ 44,70.
- Na terceira noite, consumiram dois quibes, dez esfirras e três sucos e pagaram R$ 49,00.

Qual é o preço unitário do quibe, da esfirra e do suco?

33 Uma vendedora de loja de roupas atendeu, no mesmo dia, três clientes e efetuou as seguintes vendas dos mesmos produtos:

Cliente 1 — 1 calça, 2 camisas e 3 pares de meias
Valor: R$ 287,00

Cliente 2 — 2 calças, 5 camisas e 7 pares de meias
Valor: R$ 674,00

Cliente 3 — 2 calças, 3 camisas e 4 pares de meias
Valor: R$ 462,00

JOSE LUIS PELAEZ INC/BLEND RF/DIOMEDIA

Quanto custou cada camisa?

34 Em um programa de prêmios na TV, o participante começa com R$ 500,00. Para cada pergunta respondida corretamente, recebe R$ 200,00; e para cada resposta errada perde R$ 150,00.
Se um participante respondeu todas as 25 questões formuladas e terminou com R$ 600,00, quantas questões ele errou?

35 Resolva, utilizando o escalonamento, os seguintes sistemas:

a) $\begin{cases} x + y = 10 \\ x - y = 4 \\ 2x - 5y = -1 \end{cases}$

b) $\begin{cases} -x + 3y - z = 1 \\ x + y + z = 7 \end{cases}$

c) $\begin{cases} x + y = 3 \\ x - y = 1 \\ 3x + 7y = 11 \end{cases}$

d) $\begin{cases} x - 2y = 8 \\ 3x - y = 9 \\ x + y = 1 \\ 5x + 7y = -10 \end{cases}$

e) $\begin{cases} x + 2y = 11 \\ x + 3y = 16 \\ 2x + 5y = 27 \end{cases}$

f) $\begin{cases} x + y + z = 4 \\ 2x - z + w = -4 \\ y - z - w = -2 \\ x - z + 2w = -2 \end{cases}$

36 Resolva, graficamente, os sistemas correspondentes aos itens *a* e *c* do exercício anterior.

37 Três amigas, Ana, Bia e Carol, têm juntas R\$ 340,00. Se Ana gastar R\$ 10,00, passará a ter o dobro do que tem Bia. Se Ana gastar 40% do total que possui, passará a ter R\$ 9,00 a menos que Carol. Quanto tem cada uma?

38 Em uma papelaria foram feitos os seguintes pedidos:
- pedido I: 4 canetas, 3 lapiseiras e 6 borrachas.
- pedido II: 2 canetas, 2 lapiseiras e 3 borrachas.

Os valores dos pedidos I e II eram, respectivamente, R\$ 37,20 e R\$ 20,60.

Com base nessas informações, determine, se possível:

a) o preço unitário da lapiseira;

b) o preço de cada caneta;

c) o preço pago por 5 lapiseiras, 2 canetas e 3 borrachas;

d) a diferença entre o preço da caneta e o preço da borracha.

39 Para a final de um campeonato de futebol, foram colocados à venda 40 000 ingressos, divididos entre arquibancada, numerada descoberta e numerada coberta.

Sabe-se que:
- todos os ingressos foram vendidos;
- o preço do ingresso para a numerada coberta é igual à soma dos preços dos ingressos dos outros dois setores;
- 60% do total de ingressos foram vendidos para a arquibancada, 25% para a numerada descoberta e os demais para a numerada coberta, gerando uma arrecadação de 4,32 milhões de reais;
- a razão entre os preços dos ingressos para a numerada descoberta e coberta é, nessa ordem, igual a $\frac{3}{5}$. Determine o preço dos ingressos para cada setor.

40 Uma fábrica de colchões utiliza três tipos de molas $\mathbf{M_1}$, $\mathbf{M_2}$ e $\mathbf{M_3}$ na confecção de três tipos de colchões $\mathbf{C_1}$, $\mathbf{C_2}$ e $\mathbf{C_3}$, todos com dimensões 2 m × 1,20 m. O número de molas usados na confecção dos três tipos de colchões é dado na tabela seguinte.

Mola \ Colchão	C_1	C_2	C_3
M_1	96	144	240
M_2	96	48	24
M_3	96	96	24

Sabendo que, em uma semana, foram utilizados, 19 200 molas do tipo $\mathbf{M_1}$, 10 080 molas do tipo $\mathbf{M_2}$ e 12 480 molas do tipo $\mathbf{M_3}$, determine a soma das quantidades de colchões produzidos naquela semana.

Determinantes

Algumas operações envolvendo os coeficientes das incógnitas de um sistema linear permitem classificá-lo como possível (determinado ou indeterminado) ou impossível.

Se o número de equações do sistema é igual ao seu número de incógnitas, há um método geral de discussão.

Caso 2 × 2

Seja o sistema linear $\begin{cases} ax + by = e \\ cx + dy = f \end{cases}$, de incógnitas **x** e **y**.

Vamos construir um sistema equivalente a ele, porém na forma escalonada:

$$\begin{cases} ax + by = e \\ (ad - bc) \cdot y = af - ce \end{cases} \quad *$$

$(-c) \cdot (1^{a}\text{ eq.}) + (a) \cdot (2^{a}\text{ eq.})$

$$\begin{array}{rl} -\cancel{acx} - bcy = -ce & \\ \cancel{acx} + ady = af & \oplus \\ \hline (ad - bc) \cdot y = af - ce & \end{array}$$

Podemos ter:

- $ad - bc \neq 0$: nesse caso, podemos obter o valor de **y**, que é único, e, em seguida, obter o valor de **x**, que também é único.

  Trata-se de um sistema possível e determinado (S.P.D.).

- $ad - bc = 0$: nesse caso, o 1º membro de $\ast$ se anularia.

  Se o 2º membro de $\ast$ também se anulasse, teríamos $0 = 0$, e o sistema se reduziria à sua 1ª equação, sendo, portanto, possível e indeterminado (S.P.I.).

  Se o 2º membro de $\ast$ não se anulasse, a 2ª equação seria uma sentença falsa, $\forall y \in \mathbb{R}$.

  Logo, o sistema não teria solução: seria um sistema impossível (S.I.).

O número real $ad - bc$ é definido como o **determinante** da matriz incompleta (**M**) dos coeficientes do sistema. Temos:

$$M = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \text{ e } \det M = a \cdot d - b \cdot c$$

Indicaremos esse número por: det M ou $\det \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ ou $\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix}$.

Observe que det M é igual à diferença entre o produto dos elementos da diagonal principal de **M** e o produto dos elementos de sua diagonal secundária.

$$M = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$$

diagonal secundária

diagonal principal

Temos: $\det M = a \cdot d - b \cdot c$

EXEMPLO 6

- O determinante (**D**) da matriz $\begin{pmatrix} 6 & -4 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$ é:

$$D = \begin{vmatrix} 6 & -4 \\ 1 & 3 \end{vmatrix} = 6 \cdot 3 - 1 \cdot (-4) = 18 + 4 = 22$$

- O determinante da matriz $\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 5 & 4 \end{pmatrix}$ é:

$$\begin{vmatrix} 0 & -1 \\ 5 & 4 \end{vmatrix} = 0 \cdot 4 - 5 \cdot (-1) = 5$$

- $\begin{vmatrix} 1 & -1 \\ -1 & -1 \end{vmatrix} = 1 \cdot (-1) - (-1) \cdot (-1) = -1 - 1 = -2$

O símbolo [ ] é usado para representar uma matriz e nunca o determinante da matriz.

PENSE NISTO:

Note que escrevemos $\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = ad - bc$, porém $\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} = ad - bc$ não faz sentido.

PENSE NISTO:

Qual é o valor do determinante da matriz I_2 (identidade de ordem 2)?

$\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = 1 - 0 = 1$

Caso 3 × 3

Consideremos o sistema linear seguinte nas incógnitas **x**, **y** e **z**:

$$\begin{cases} ax + by + cz = m \\ dx + ey + fz = n \\ gx + hy + iz = p \end{cases}$$

Seguindo raciocínio análogo ao desenvolvido no caso 2 × 2 (veja um pouco mais sobre determinantes de matrizes de ordem 3 e a regra de Sarrus na página 124), define-se o determinante da matriz $\begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{pmatrix}$ pelo número real:

$$aei + bfg + cdh - ceg - afh - bdi \quad *$$

Existe uma maneira mais fácil de se obter esse valor por meio da **regra prática de Sarrus** (1798-1861):

1º) Copiamos ao lado da matriz **A** as suas duas primeiras colunas.

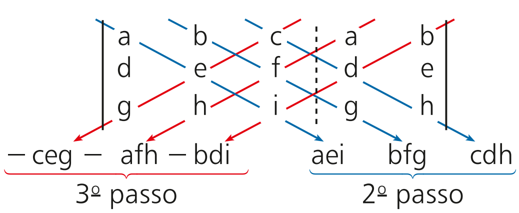
2º) Multiplicamos os elementos da diagonal principal de **A**. Seguindo a direção da diagonal principal, multiplicamos, separadamente, os elementos das outras duas "diagonais".

3º) Multiplicamos os elementos da diagonal secundária de **A**, trocando o sinal do produto obtido. Seguindo a direção da diagonal secundária, multiplicamos, separadamente, os elementos das outras duas "diagonais", também trocando o sinal dos produtos.

4º) Somamos todos os produtos obtidos no 2º e no 3º passos.

Observe:

1º passo:



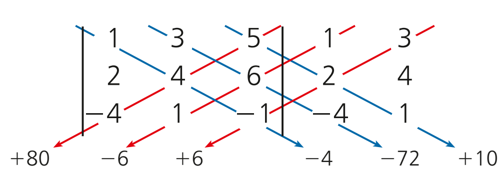
4º passo: O determinante da matriz é igual a:

aei + bfg + cdh − ceg − afh − bdi, que coincide com *.

Acompanhe os dois exemplos seguintes.

EXEMPLO 7

Vamos calcular o determinante da matriz $A = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 5 \\ 2 & 4 & 6 \\ -4 & 1 & -1 \end{bmatrix}$.



det A = +80 − 6 + 6 − 4 − 72 + 10 = 14

EXEMPLO 8

Vamos calcular o determinante da matriz $B = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 3 \\ -1 & 3 & 2 \\ -4 & 1 & -2 \end{pmatrix}$.

Temos:

$$\begin{array}{ccc|cc} 0 & 2 & 3 & 0 & 2 \\ -1 & 3 & 2 & -1 & 3 \\ -4 & 1 & -2 & -4 & 1 \end{array}$$
$$+36 \quad 0 \quad -4 \quad 0 \quad -16 \quad -3$$

Temos:
det B = 36 − 4 − 16 − 3 = 13

$\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 1$; pela regra prática de Sarrus

PENSE NISTO:

Qual é o valor de det I_3, sendo $\mathbf{I}_3$ a matriz identidade de ordem 3?

OBSERVAÇÃO

Só se define o determinante de matrizes quadradas (1 × 1, 2 × 2, 3 × 3, ...).
No caso 1 × 1 (matriz com um único elemento), o determinante da matriz é igual ao seu elemento.
Vejamos:

- $A = [5] \Rightarrow \det A = 5$
- $B = (-2) \Rightarrow \det B = -2$

O estudo dos determinantes de matrizes quadradas de ordem superior a 3 não faz parte dos objetivos desta coleção.

EXERCÍCIOS **RESOLVIDOS**

4 Seja $A = (a_{ij})_{3 \times 3}$, em que $a_{ij} = \begin{cases} 1, & \text{se } i \geq j \\ i + j, & \text{se } i < j \end{cases}$.

Calcule det A.

Solução:

Escrevemos a matriz **A** em sua forma genérica:

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix}$$

Utilizamos a lei de formação dos elementos de **A** e obtemos: $A = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 4 \\ 1 & 1 & 5 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$.

$$\det A = \begin{array}{ccc|cc} 1 & 3 & 4 & 1 & 3 \\ 1 & 1 & 5 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \end{array} \Rightarrow$$
$$-4 \quad -5 \quad -3 \quad 1 \quad 15 \quad 4$$

$\Rightarrow \det A = -12 + 20 = 8$

5 Resolva, em ℝ, a equação:

$$\begin{vmatrix} x & 4 & -2 \\ x-1 & x & 1 \\ 1 & x+1 & 3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} x & 3 \\ 2 & 1 \end{vmatrix}$$

Solução:

O 1º membro representa o determinante de uma matriz 3 × 3:

$$\begin{array}{ccc|cc} x & 4 & -2 & x & 4 \\ x-1 & x & 1 & x-1 & x \\ 1 & x+1 & 3 & 1 & x+1 \end{array}$$
$$2x \quad -(x^2+x) \quad -12(x-1) \quad 3x^2 \quad 4 \quad -2(x^2-1)$$

Seu valor é:
$2x - (x^2 + x) - 12(x - 1) + 3x^2 + 4 - 2(x^2 - 1) =$
$= -11x + 18$

O 2º membro é igual ao determinante de uma matriz 2 × 2:

$$\begin{vmatrix} x & 3 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} = x - 6$$

Como os dois determinantes são iguais, temos:

$$-11x + 18 = x - 6 \Rightarrow x = 2$$

S = {2}

6 Considere o sistema nas incógnitas **x** e **y** e $m \in \mathbb{R}$:

$$\begin{cases} mx + 4y = 8 \\ x + 2y = 4 \end{cases}$$

Determine os possíveis valores de **m** para os quais o sistema:

a) admite um única solução;

b) admite infinitas soluções;

c) não admite solução.

Solução:

Como vimos, um sistema com número de equações igual ao número de incógnitas pode ser classificado de acordo com o anulamento ou não do determinante **D** da matriz incompleta dos coeficientes:

$$D = \begin{vmatrix} m & 4 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = 2m - 4$$

a) Se $D \neq 0 \Rightarrow 2m - 4 \neq 0$, isto é, $m \neq 2$, então o sistema é possível e determinado e apresenta uma única solução.

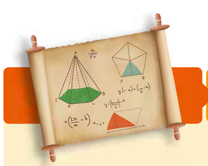
b) Se $D = 0$, isto é, se $m = 2$, o sistema pode ser indeterminado ou impossível. É preciso substituir **m** por 2 e analisar:

$$\begin{cases} 2x + 4y = 8 \\ x + 2y = 4 \end{cases}$$

Dividindo por 2 os coeficientes da 1ª equação, obtemos $x + 2y = 4$ e o sistema se reduz à equação linear $x + 2y = 4$, que possui infinitas soluções $\left((4, 0), (0, 2), \left(1, \frac{3}{2}\right) \text{ e } (-2, 3) \text{ são algumas de suas soluções}\right)$.

Assim, se $m = 2$, o sistema admite infinitas soluções, isto é, é indeterminado.

c) Pelo que vimos no item *b*, não existe $m \in \mathbb{R}$ para o qual o sistema é impossível, isto é, não admite solução.



UM POUCO DE **HISTÓRIA**

A origem dos determinantes

Os primeiros trabalhos sobre determinantes teriam surgido, quase na mesma época, no Oriente e no Ocidente: em 1683, em um artigo do matemático japonês Seki Kowa (1642-1708) e, dez anos depois, com o alemão Gottfried Leibniz (1646-1716). Ambos desenvolveram expressões matemáticas ligadas aos coeficientes das incógnitas das equações de um sistema linear. Em linguagem e notação atuais, tais expressões definem o determinante da matriz incompleta dos coeficientes de um sistema.

Outros matemáticos, como Cramer, Bézout, Laplace e Vandermonde também publicaram, no século XVIII, artigos sobre determinantes e deixaram contribuições valiosas.

No entanto, somente no século XIX a teoria dos determinantes ganhou maior impulso na Europa, com os trabalhos de Jacobi (1804-1851) e Cauchy (1789-1857). A esse último atribui-se o título de criador do termo “determinante”, além de ser o responsável por reunir, em 1812, tudo o que era conhecido até então sobre o assunto.

ALEX SEGRE/ALAMY/FOTOARENA

Estátua de Leibniz na parte externa da Royal Academy of Arts de Londres.

Fontes de pesquisa: BOYER, Carl B. *História da Matemática*. 3ª ed. São Paulo: Edgard Blucher, 2010.; BATISTA, I. L; LUCCAS, S. Abordagem histórico-filosófica e Educação Matemática — uma proposta de interação entre domínios de conhecimento. *Educ. Mat. Pesqui.*, São Paulo, v. 6, n. 1, p. 101-133, 2004. Disponível em: <www.uel.br/grupo-pesquisa/ifhiecem/arquivos/4682-10997-1-PB.pdf>. Acesso em: 10 mar. 2016.

EXERCÍCIOS

FAÇA NO CADERNO

41 Calcule os seguintes determinantes:

a) $\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{vmatrix}$

b) $\begin{vmatrix} 2 & 9 \\ 3 & 7 \end{vmatrix}$

c) $\begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 2 \end{vmatrix}$

d) $\begin{vmatrix} -2 & 4 \\ 0 & -3 \end{vmatrix}$

e) $\begin{vmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{3} \\ 3 & 4 \end{vmatrix}$

f) $\begin{vmatrix} a & -a \\ -a & -a \end{vmatrix}$ $(a \in \mathbb{R})$

g) $\begin{vmatrix} \text{sen}\,\frac{\pi}{2} & \text{tg}\,\pi \\ \text{tg}\,\frac{\pi}{4} & \cos\pi \end{vmatrix}$

h) $\begin{vmatrix} \text{sen}\,8° & -\cos 8° \\ \cos 8° & \text{sen}\,8° \end{vmatrix}$

42 Sejam $A = \begin{bmatrix} -4 & 3 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$ e $B = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 3 \end{bmatrix}$.

Calcule o determinante das seguintes matrizes:

a) A

b) B

c) A + B

d) A − B

e) A + 2B

f) A · B

g) $A + I_2$

h) A^t

43 Seja $A = (a_{ij})_{2 \times 2}$, em que $a_{ij} = 4i - 3j$. Calcule det A.

44 Calcule o valor de cada um dos seguintes determinantes:

a) $\begin{vmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 1 & 2 & 5 \\ 1 & -1 & 0 \end{vmatrix}$

b) $\begin{vmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 5 & 7 & -4 \\ 1 & 0 & 1 \end{vmatrix}$

c) $\begin{vmatrix} 0 & 1 & 3 \\ -4 & 2 & 5 \\ -3 & 0 & -1 \end{vmatrix}$

d) $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 0 & 3 & 9 \\ 0 & 0 & -5 \end{vmatrix}$

45 Seja $A = (a_{ij})_{3 \times 3}$, em que $a_{ij} = (i - j)^2$. Obtenha o valor de:

a) det A

b) det A^t

46 Sejam as matrizes $A = (a_{ij})_{3\times3}$, em que $a_{ij} = \begin{cases} 1, \text{ se } i \geqslant j \\ 2, \text{ se } i < j \end{cases}$, e $B = (b_{ij})_{3 \times 3}$, em que $b_{ij} = \begin{cases} -1, \text{ se } i \geqslant j \\ 1, \text{ se } i < j \end{cases}$.

Calcule det A, det B, det (A + B) e det (A · B).

47 Resolva, em $\mathbb{R}$, as seguintes equações:

a) $\begin{vmatrix} x & -3 \\ x+2 & x-2 \end{vmatrix} = 8$

b) $\begin{vmatrix} x & 0 & 1 \\ 2x & x & 2 \\ 3 & 2x & x \end{vmatrix} = 0$

c) $\begin{vmatrix} 1 & 2 & x \\ -1 & x & x+1 \\ 3 & 2 & x \end{vmatrix} = 6$

48 Resolva, em $\mathbb{R}$, as inequações:

a) $\begin{vmatrix} x & x+2 \\ 4 & 3 \end{vmatrix} \leqslant x$

b) $\begin{vmatrix} 6 & 1 & -5 \\ x & 0 & 1 \\ 1 & -3 & 2 \end{vmatrix} > \begin{vmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 0 & x & 4 \\ 0 & 0 & -6 \end{vmatrix}$

49 Considere o sistema $\begin{cases} x + y = 3 \\ 2x + my = 2 \end{cases}$ em que as incógnitas são **x** e **y** e $m \in \mathbb{R}$.
Determine $m \in \mathbb{R}$ de modo que o sistema:

a) admita uma única solução;

b) admita infinitas soluções;

c) não admita solução.

50 Determine **a** e **b** reais tais que $\begin{vmatrix} b & 3 \\ a-1 & 2 \end{vmatrix} = 14$ e $\begin{vmatrix} b & a & 2 \\ 0 & 4 & -1 \\ 2 & -2 & 3 \end{vmatrix} = 0$.

51 Considere a matriz $M = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ -3 & 5 \end{bmatrix}$.

a) Construa a matriz M − k · I, sendo $k \in \mathbb{R}$ e **I** a matriz identidade 2 × 2.

b) Quais os valores de **k** que tornam nulo o determinante da matriz M − k · I?

52 Considere o sistema linear representado pela equação matricial:

$$\begin{bmatrix} 1 & k \\ k+1 & 2 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Para quais valores reais de **k** o sistema admite solução única?

TROQUE IDEIAS

Os sistemas lineares e o balanceamento de equações químicas

Nas aulas de Química, você provavelmente já deve ter aprendido a balancear uma equação química, ao estudar sobre a estequiometria das reações.

A reação seguinte representa a decomposição térmica do clorato de potássio ($KClO_3$):

$$2\ KClO_3 \xrightarrow{\Delta} 2\ KCl + 3\ O_2$$

Ela está balanceada. Os números inteiros 2, 2 e 3 são coeficientes estequiométricos dos compostos $KClO_3$, KCl e O_2, respectivamente. Note que a quantidade de átomos de potássio (K), cloro (Cl) e oxigênio (O) é a mesma nos dois lados (reagentes e produtos) da reação.

Vamos conhecer outro método de balanceamento, baseado na resolução de sistemas lineares. A reação seguinte, não balanceada, representa o processo de obtenção do etanol (C_2H_5OH) a partir da sacarose ($C_{12}H_{22}O_{11}$). A sacarose é o chamado "açúcar de mesa" ou "açúcar comercial comum" encontrado em frutas e na cana-de-açúcar.

DELFIM MARTINS/PULSAR IMAGENS

Usina de açúcar e de álcool, Pontal (SP), 2013.

$$C_{12}H_{22}O_{11} + H_2O \longrightarrow C_2H_5OH + CO_2$$

- Vamos atribuir incógnitas aos coeficientes de cada composto envolvido na equação:

$$x\ C_{12}H_{22}O_{11} + y\ H_2O \longrightarrow z\ C_2H_5OH + w\ CO_2$$

Consulte as respostas nas Orientações Didáticas.

a) Para cada elemento químico da reação, faça a contagem da quantidade de átomos, igualando a quantidade no lado dos reagentes à quantidade no lado dos produtos e escreva em seu caderno as equações lineares obtidas:
i) oxigênio (O) ii) carbono (C) iii) hidrogênio (H)

b) Escreva, em seu caderno, o sistema linear de três equações e quatro incógnitas obtido.

c) Escalone o sistema linear obtido.

d) Classifique o sistema escalonado e obtenha sua solução geral em função de **w**.

e) Como **w** pode assumir qualquer valor real, escolha **w** de modo a obter uma solução em que todas as incógnitas são os menores inteiros positivos possíveis; em seguida, escreva, em seu caderno, a equação balanceada.

f) Usando esse processo, faça o balanceamento das seguintes equações químicas:
i) $C_6H_{12}O_6 \longrightarrow CO_2 + C_2H_5OH$
ii) $Al_2(CO_3)_3 \longrightarrow Al_2O_3 + CO_2$
iii) $C_4H_{10} + O_2 \longrightarrow CO_2 + H_2O$

Fonte de pesquisa: ATKINS, P.; JONES, L. *Princípios da Química*: questionando a vida moderna e o meio ambiente. 5ª ed. Porto Alegre: Bookman, 2012.

Sistemas homogêneos

Dizemos que um sistema linear é homogêneo se o termo (ou coeficiente) independente de cada uma de suas equações é igual a zero. Assim, são exemplos de sistemas homogêneos:

$$S_1: \begin{cases} 4x + 3y = 0 \\ 3x + 2y = 0 \end{cases} \quad S_2: \begin{cases} x + 2y + 2z = 0 \\ 3x + y - z = 0 \\ -x + 5y + \frac{1}{2}z = 0 \end{cases} \quad S_3: \begin{cases} 3x + y = 0 \\ x + y = 0 \\ 2x - y = 0 \end{cases}$$

PENSE NISTO:

O sistema $\begin{cases} x + y - z + 3 = 0 \\ 2x - y + z - 1 = 0 \\ x - z + 2 = 0 \end{cases}$ é homogêneo?

Não; $x + y - z + 3 = 0 \Rightarrow$ $\Rightarrow x + y - z = -3$, e assim por diante; trata-se do sistema $\begin{cases} x + y - z = -3 \\ 2x - y + z = 1 \\ x - z = -2 \end{cases}$

Vamos observar uma propriedade característica dos sistemas homogêneos:

- Em $\mathbf{S_1}$, o par ordenado (0, 0) é uma solução, pois verifica as duas equações.
- Em $\mathbf{S_2}$, a tripla ordenada (0, 0, 0) é uma solução, pois verifica as três equações.
- Em $\mathbf{S_3}$, o par ordenado (0, 0) é uma solução, pois verifica as três equações.

De modo geral, um sistema homogêneo com **n** incógnitas sempre admite a sequência $\underbrace{(0, 0, \ldots, 0)}_{\mathbf{n} \text{ zeros}}$ como solução. Essa solução é chamada solução **nula**, **trivial** ou **imprópria**. Desse modo, um sistema homogêneo é sempre possível, pois possui, ao menos, a solução nula.

Se o sistema só possui a solução nula, ele é possível e determinado.

Havendo outras soluções, além da solução nula, ele é possível e indeterminado. Essas soluções recebem o nome de **soluções próprias** ou **não triviais**.

EXEMPLO 9

Resolvendo o sistema $\begin{cases} 4x + 3y = 0 \\ 3x + 2y = 0 \end{cases}$ por escalonamento, obtemos:

$$\begin{cases} 4x + 3y = 0 \\ \quad - y = 0 \end{cases} \leftarrow (1^{\underline{a}} \text{ eq.}) \cdot (-3) + (2^{\underline{a}} \text{ eq.}) \cdot 4$$

Temos um sistema escalonado com mesmo número de equações e de incógnitas, ou seja, um sistema possível e determinado; sua única solução é (0, 0).

EXEMPLO 10

O sistema homogêneo $\begin{cases} x - 3y = 0 \\ -5x + 15y = 0 \end{cases}$ admite infinitas soluções. Observe:

Notando que $-5x + 15y = 0$ equivale a $-5 \cdot (x - 3y) = 0$, isto é, $x - 3y = 0$, temos que o sistema se reduz à equação linear $x - 3y = 0$, que possui infinitas soluções.

Como $x = 3y$, sua solução geral é $(3\alpha, \alpha)$; $\alpha \in \mathbb{R}$. Vejamos algumas soluções:

$\alpha = 0 \rightarrow (0, 0)$ é a solução nula, trivial ou imprópria.

$$\left.\begin{array}{l} \alpha = 1 \rightarrow (3, 1) \\ \alpha = -4 \rightarrow (-12, -4) \\ \alpha = \frac{1}{9} \rightarrow \left(\frac{1}{3}, \frac{1}{9}\right) \end{array}\right\} \text{soluções próprias ou diferentes da trivial.}$$

$\vdots$

PENSE NISTO:

Observe que o determinante da matriz incompleta dos coeficientes desse sistema é zero. Podemos, então, garantir que o sistema é indeterminado?

Sim. Conforme vimos na página 116, quando o determinante se anula, o sistema é impossível ou indeterminado. Nesse exemplo, trata-se de um sistema homogêneo, que sempre apresenta solução, isto é, não pode ser impossível. Logo, só pode ser indeterminado.

EXERCÍCIOS

FAÇA NO CADERNO

53 Resolva e classifique os seguintes sistemas homogêneos:

a) $\begin{cases} x + 2y = 0 \\ 3x + 5y = 0 \end{cases}$

b) $\begin{cases} 7x - 14y = 0 \\ -x + 2y = 0 \end{cases}$

c) $\begin{cases} 2x + 3y - z = 0 \\ x - 4y + z = 0 \\ 3x + y - 2z = 0 \end{cases}$

d) $\begin{cases} x + 2y - z = 0 \\ 2x - y + 3z = 0 \\ 4x + 3y + z = 0 \end{cases}$

54 Seja o sistema:

$$\begin{cases} x - y + 4z = m - 2 \\ mx + 3y - z = 0 \\ 6x + (m - 3)y + 15z = 0 \end{cases}$$

a) Determine **m** real para que o sistema seja homogêneo.

b) Utilizando o resultado do item *a*, resolva o sistema.

55 O sistema a seguir é escalonado:

$$\begin{cases} x - 3y = 0 \\ (m + 1)y = 0 \end{cases}$$

Para quais valores reais de **m** o sistema admite somente a solução nula ou trivial?

56 Considere o sistema $\begin{cases} x + 2y = 0 \\ -4x + my = 0 \end{cases}$, no qual **x** e **y** são incógnitas e $m \in \mathbb{R}$.

a) Para quais valores de **m** o sistema admite soluções próprias?

b) Nas condições do item *a*, forneça três soluções próprias desse sistema.

DESAFIO

Patrícia fez um pagamento de R$ 5 200,00 usando cédulas de R$ 20,00, R$ 50,00 e R$ 100,00, num total de 96 cédulas. Sabe-se que as quantidades de cédulas de R$ 20,00, R$ 50,00 e R$ 100,00 formavam, nessa ordem, uma progressão aritmética (P.A.). Qual é a razão dessa P.A.?

UM POUCO **MAIS** SOBRE

Determinantes de matrizes de ordem 3 e a regra de Sarrus

Consideremos o sistema linear seguinte nas incógnitas **x**, **y** e **z**:

$$\begin{cases} ax + by + cz = m \\ dx + ey + fz = n \\ gx + hy + iz = p \end{cases}$$

Vamos construir um sistema equivalente a ele, porém na forma escalonada:

$$\begin{cases} ax + by + cz = m \\ (bd - ae) \cdot y + (cd - af) \cdot z = md - an \leftarrow d \cdot (1^{\text{a}}\text{ eq.}) + (-a) \cdot (2^{\text{a}}\text{ eq.}) \\ (bg - ah) \cdot y + (cg - ai) \cdot z = mg - ap \leftarrow g \cdot (1^{\text{a}}\text{ eq.}) + (-a) \cdot (3^{\text{a}}\text{ eq.}) \end{cases}$$

$$\begin{cases} ax + by + cz = m \\ (bd - ae) \cdot y + (cd - af) \cdot z = md - an \\ (aie + cdh + bfg - afh - ecg - bid) \cdot z = (mdh + nbg + ape - anh - mge - pbd) \leftarrow -(bg - ah) \cdot (2^{\text{a}}\text{ eq.}) + (bd - ae) \cdot (3^{\text{a}}\text{ eq.}) \end{cases}$$

O último sistema obtido está escalonado.
Observe que:

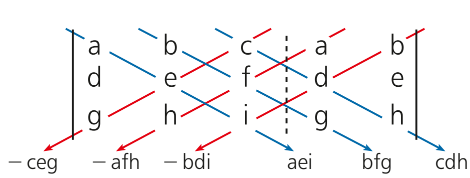
- se $(aie + cdh + bfg - afh - ecg - bid) \neq 0$, obtemos um único valor para **z**; substituindo-se **z** na 2ª equação, obtemos o valor de **y**, e, em seguida, obtemos o valor de **x**, chegando à única solução desse sistema. Nesse caso, teríamos um sistema possível e determinado;
- se $(aie + cdh + bfg - afh - ecg - bid) = 0$, podemos ter um sistema indeterminado ou impossível, conforme o 2º membro da última equação seja nulo ou não nulo, respectivamente.

O número real $\mathbf{aei + cdh + bfg - afh - ecg - bid}$ é definido como o determinante da matriz

$\begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{pmatrix}$, que é a matriz incompleta dos coeficientes do sistema e indicamos: $\begin{vmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{vmatrix} =$

$= aei + bfg + cdh - ceg - afh - bdi.$

Observe o cálculo de $\begin{vmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{vmatrix}$ por meio da regra de Sarrus:



$= aei + bfg + cdh - ceg - afh - bdi$