Coordenadas Polares e Área em Coordenadas Polares

Coordenadas Polares

Um sistema de coordenadas representa um ponto no plano por um par ordenado de números chamados coordenadas. Até agora usamos as **coordenadas cartesianas**, que são distâncias orientadas a partir de dois eixos perpendiculares. Entretanto, existem outros sistemas de coordenadas possíveis para o plano.

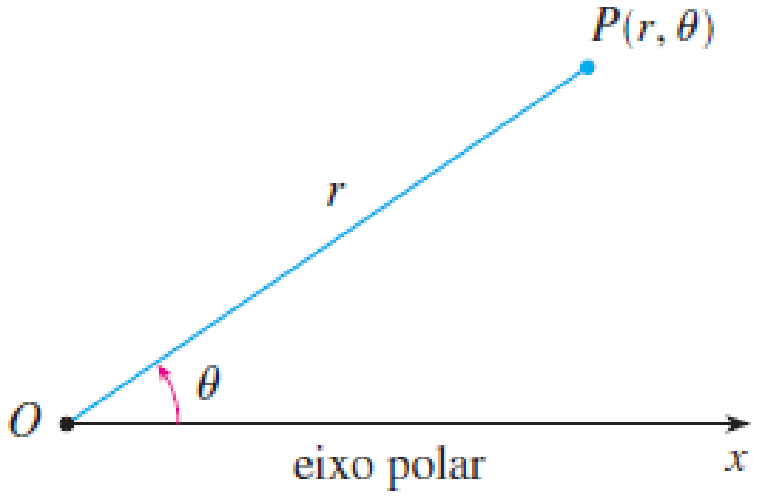
Vamos apresentar um sistema de coordenadas, introduzido por Newton, denominado **sistema de coordenadas polares**, que é mais conveniente para muitos propósitos.

Definição: O **sistema de coordenadas polares** é constituído por:

- um ponto fixo O = polo (ou origem)
- uma semirreta fixa na origem O = eixo polar

Se P é um ponto do plano, então ele pode ser representado em coordenadas polares por (r, θ), onde:

- r = comprimento de OP
- θ = ângulo entre o segmento OP e o eixo polar

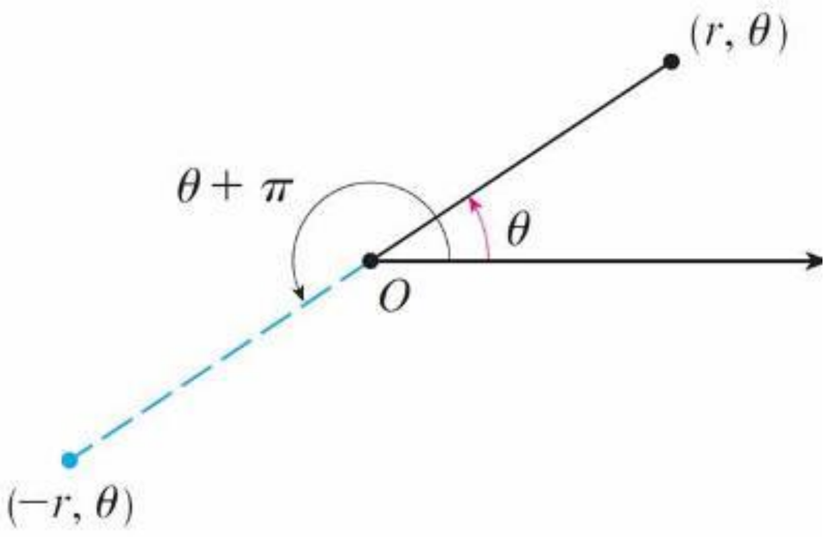


Observações:

(1) A orientação positiva de θ é a do sentido anti-horário a partir do eixo polar.

(2) Se $r = 0$, o ponto $P = (0, \theta)$ coincide com o polo, para qualquer valor de θ.

(3) Se $r < 0$, os pontos $(-r, \theta)$ e (r, θ) estão na mesma reta passando por O, estão à mesma distância $|r|$ de O, mas em lados opostos de O.



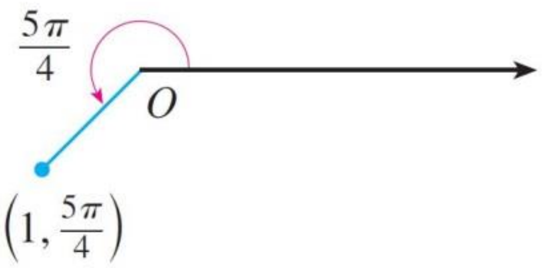
(4) Se $P = (r, \theta)$, então dizemos que r e θ são as **coordenadas polares de P.** Alguns autores utilizam a notação com ponto e vírgula $(r; \theta)$ para representar as coordenadas polares de um ponto.

Exemplo: Marque, no plano polar, os pontos cujas coordenadas polares são dadas por:

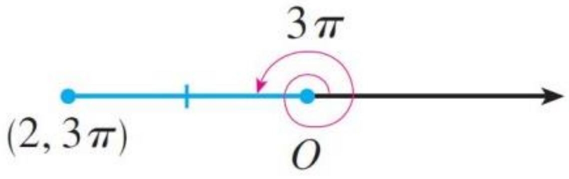
(a) $\left(1, \frac{5\pi}{4}\right)$ **(b)** $(2, 3\pi)$ **(c)** $\left(2, \frac{-2\pi}{3}\right)$ **(d)** $\left(-3, \frac{3\pi}{4}\right)$

Solução:

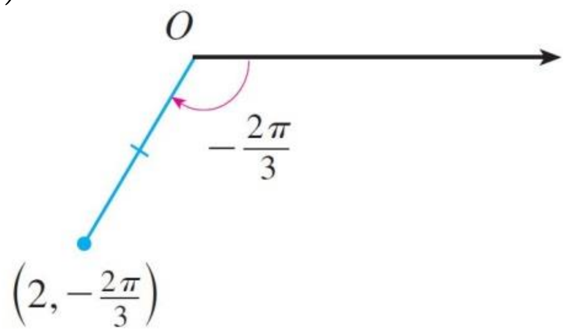
(a)



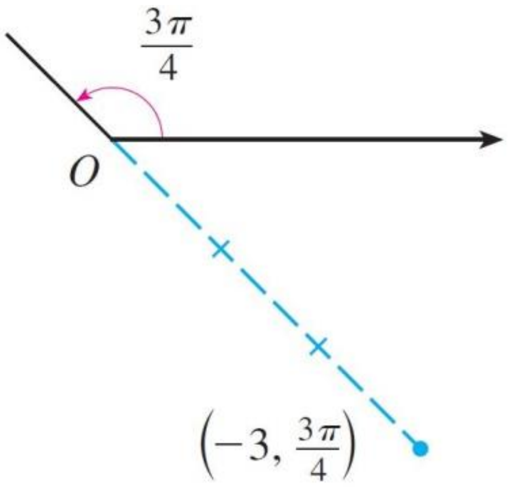
(b)



(c)



(d)

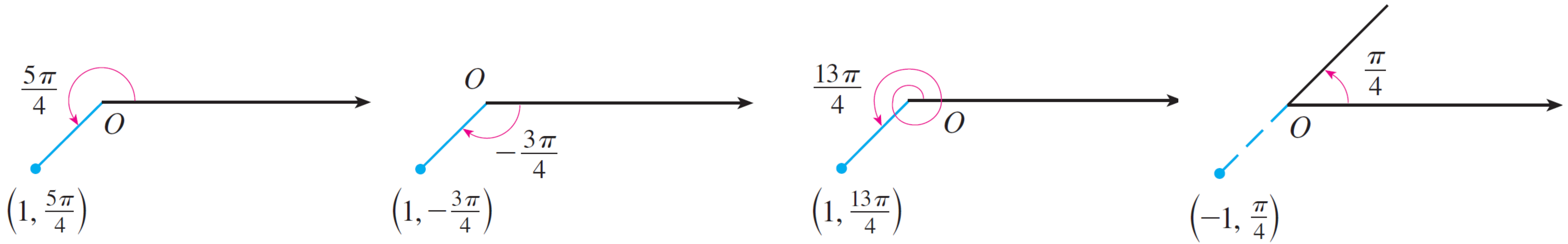


Observação: No sistema de coordenadas cartesianas cada ponto tem uma única representação, mas no sistema de coordenadas polares cada ponto tem *muitas representações*.

De fato, como uma rotação completa no sentido anti-horário por um ângulo é 2π, então o ponto representado pelas coordenadas polares (r, θ) é também representado por

$$(r, \theta + 2k\pi) \quad \text{ou} \quad (-r, \theta + (2k+1)\pi), \text{ com } k \text{ inteiro.}$$

Por exemplo, o ponto $\left(1, \frac{5\pi}{4}\right)$, pode ser escrito também como $\left(1, \frac{-3\pi}{4}\right)$, $\left(1, \frac{13\pi}{4}\right)$ ou $\left(-1, \frac{\pi}{4}\right)$.



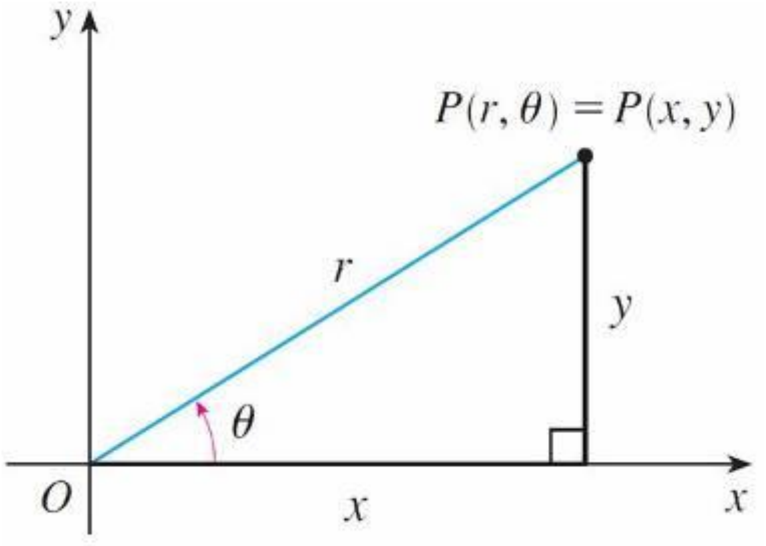
Relação entre coordenadas cartesianas e coordenadas polares

É muito importante relacionarmos as coordenadas cartesianas e as coordenadas polares. Essa relação é dada pelo teorema abaixo:

Teorema: Considere um plano munido do Sistema de Coordenadas Cartesianas Ortogonais e do Sistema de Coordenadas Polares, nos quais os eixos polar e das abscissas coincidem. Então, as coordenadas cartesianas (x, y) e as coordenadas polares (r, θ) de um mesmo ponto P satisfazem:

$$\boxed{\begin{cases} x = r\cos\theta \\ y = r\,sen\,\theta \end{cases}}$$

Podemos visualizar essas relações através da figura abaixo.



Das relações trigonométricas, temos que:

$$\cos\theta = \frac{x}{r} \text{ e } sen\,\theta = \frac{y}{r} \Rightarrow \begin{cases} x = r\cos\theta \\ y = r\,sen\,\theta \end{cases}$$

Observações:

(**1**) As equações $x = r\cos\theta$ e $y = r\,sen\,\theta$ nos permitem encontrar as coordenadas cartesianas de um ponto quando as coordenadas polares são conhecidas.

(**2**) Para encontrarmos r e θ quando x e y são conhecidos, usamos as equações

$$\boxed{r^2 = x^2 + y^2 \text{ e } tg\,\theta = \frac{y}{x}}$$

e observamos à qual quadrante o ponto pertence, para obter um valor para θ.

Exemplos:

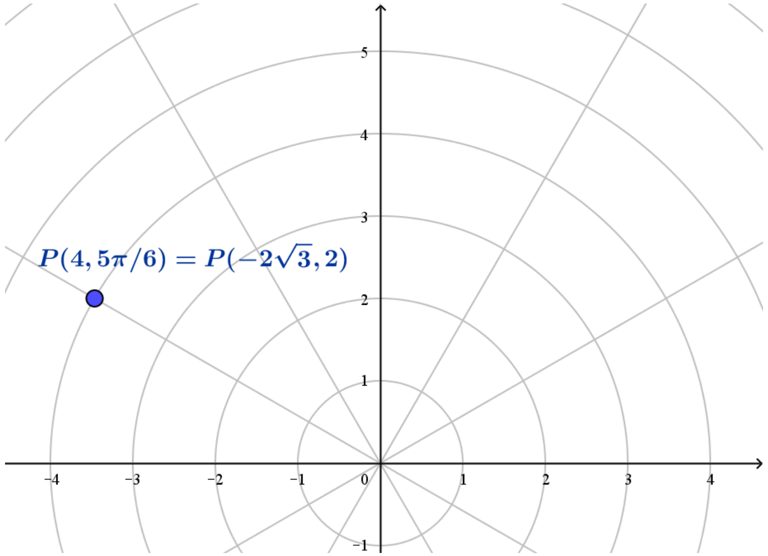
(**1**) Se P é representado por $P = \left(4, \frac{5\pi}{6}\right)$ em coordenadas polares, encontre as suas coordenadas cartesianas.

Solução: Temos que $r = 4$ e $\theta = \frac{5\pi}{6}$. Logo,

$$x = r\cos\theta = 4\cos\left(\frac{5\pi}{6}\right) = 4\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = -2\sqrt{3}$$

e

$$y = r\,sen\,\theta = 4sen\left(\frac{5\pi}{6}\right) = 4\left(\frac{1}{2}\right) = 2.$$



Portanto, $P(-2\sqrt{3}, 2)$.

(**2**) Dado o ponto $P = (1,1)$ em coordenadas cartesianas, obtenha suas coordenadas polares.

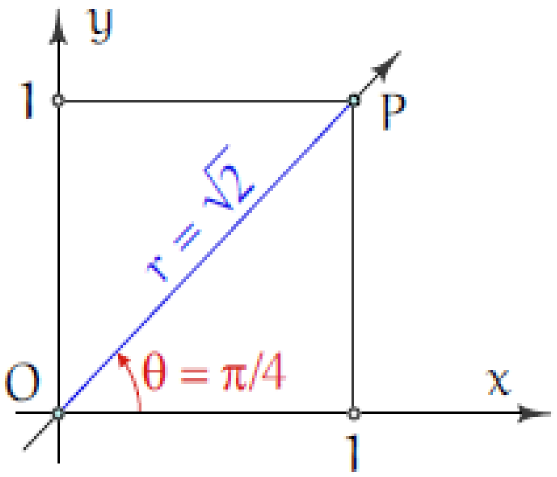
Solução: Temos que

$$r^2 = x^2 + y^2 \Rightarrow r = \sqrt{1^2 + 1^2} = \sqrt{2}$$

e

$$\operatorname{tg}\theta = \frac{y}{x} \Rightarrow \operatorname{tg}\theta = \frac{1}{1} = 1.$$

Como $P = (1,1)$ pertence ao primeiro quadrante e $\operatorname{tg}\theta = 1$, segue que $\theta = \frac{\pi}{4}$ radianos. Logo, em coordenadas polares, temos $P\left(\sqrt{2}, \frac{\pi}{4}\right)$.



P(1,1) em coordenadas cartesianas
P(√2;π/4) em coordenadas polares

Curvas e Funções em Coordenadas Polares

À semelhança do que ocorre no plano cartesiano, uma equação nas variáveis polares r e θ pode representar uma curva no plano polar. Quando é possível colocar r em função de θ, ou seja, quando é possível isolar r, temos uma função $r = f(\theta)$ em coordenadas polares. Obviamente, podemos traçar curvas ou gráficos de funções no plano polar.

Exemplo: Determine a equação cartesiana e identifique o gráfico da curva polar $r = 4sen\,\theta$.

Solução: Temos que

$$r^2 = x^2 + y^2 \Rightarrow r = \sqrt{x^2 + y^2}$$

$$y = rsen\,\theta \Rightarrow sen\,\theta = \frac{y}{r} = \frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2}}.$$

Logo,

$$r = 4sen\,\theta \Leftrightarrow \sqrt{x^2 + y^2} = 4\frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2}}$$

$$\Leftrightarrow \left(\sqrt{x^2 + y^2}\right)^2 = 4y$$

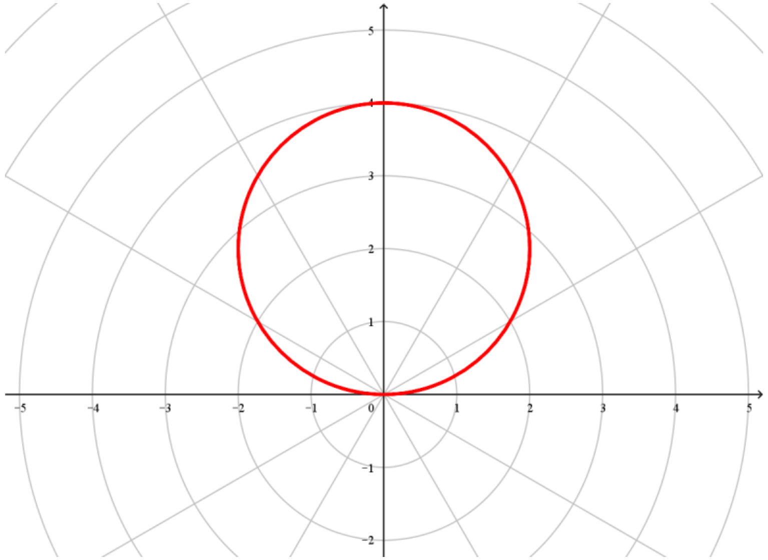
$$\Leftrightarrow x^2 + y^2 - 4y = 0.$$

Completando quadrado na variável y, obtemos:

$$x^2 + y^2 - 4y = 0 \Leftrightarrow x^2 + y^2 - 4y + 4 = 4$$

$$\Leftrightarrow x^2 + (y-2)^2 = 2^2$$

Logo, a equação descreve uma circunferência de centro $C(0, 2)$ e raio 2.



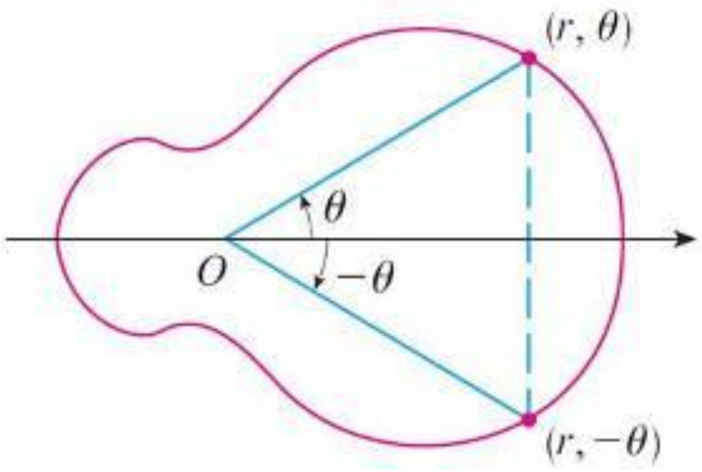
Curvas ou Gráficos em Coordenadas Polares

Para auxiliar no desenho de curvas dadas por equações em coordenadas polares, vamos utilizar alguns **testes de simetria.**

Simetrias

(1) Em relação ao eixo polar

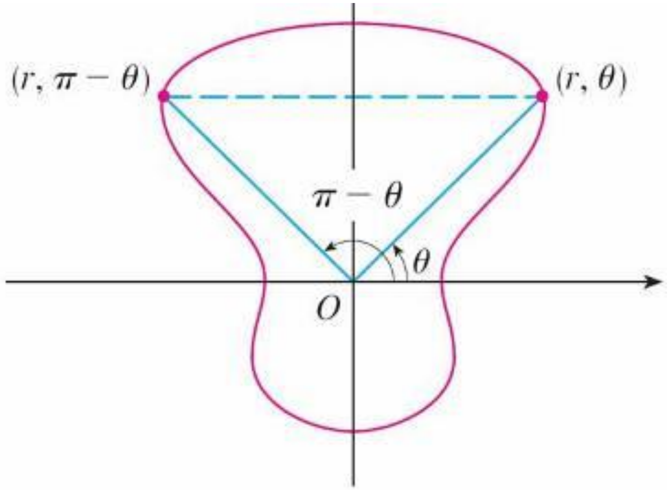
Se o gráfico é simétrico em relação ao eixo polar, então a equação não se altera quando trocamos θ por $-\theta$.



Se $r = f(\theta)$, então $f(-\theta) = f(\theta)$.

(2) Em relação à reta $\boldsymbol{\theta = \frac{\pi}{2}}$

A equação não se altera quando trocamos θ por $\pi - \theta$.



Se $r = f(\theta)$, então $f(\pi - \theta) = f(\theta)$.

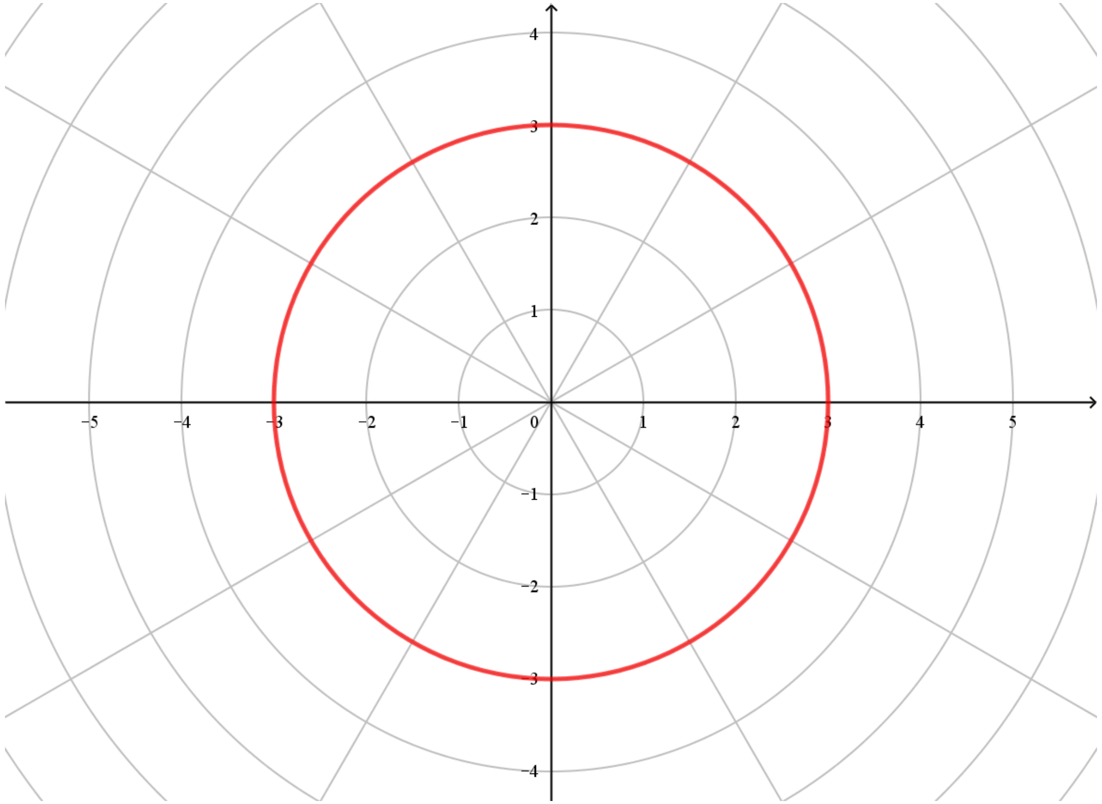
Exemplo: Faça um esboço das seguintes curvas polares:

(a) $r = 3$ **(b)** $r = 1 + \cos\theta$ **(c)** $r = 4\cos(2\theta)$

Solução:

(a) A equação $r = 3$ representa uma circunferência de centro na origem e raio 3.

De fato, veja que $r = 3 \Leftrightarrow r^2 = 9 \Leftrightarrow x^2 + y^2 = 9$.



(**b**) Seja $r = f(\theta) = 1 + \cos\theta$.

- *Simetria em relação ao eixo polar:*
  Veja que

$$f(-\theta) = 1 + \cos(-\theta)$$
$$= 1 + \cos(\theta) = f(\theta)$$

Logo, a curva é simétrica em relação ao eixo polar.

- *Simetria em relação à reta $\theta = \frac{\pi}{2}$:*
  Veja que

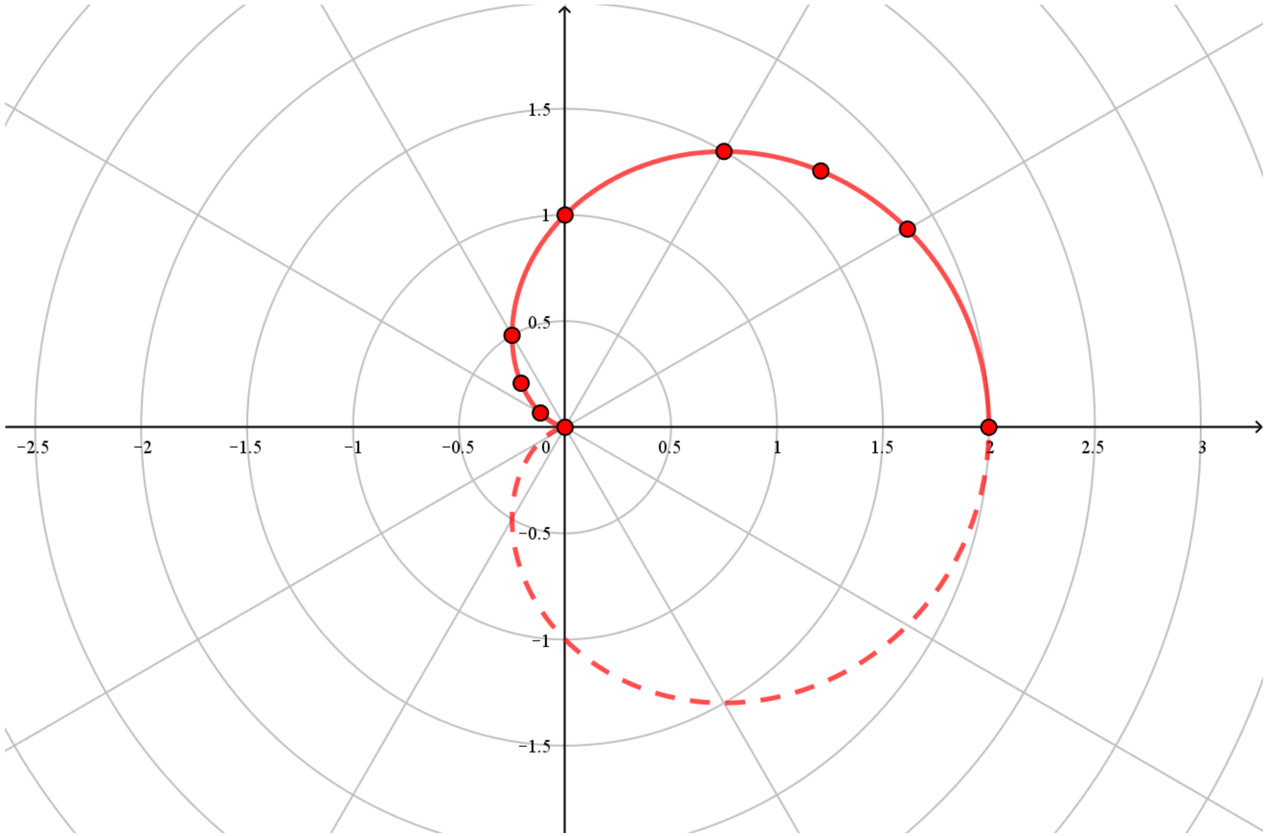
$$f(\pi - \theta) = 1 + \cos(\pi - \theta)$$
$$= 1 + \cos(\pi)\cos(\theta) + sen(\pi)sen(\theta)$$
$$= 1 - \cos(\theta)$$
$$\neq f(\theta)$$

$$\boxed{\cos(a - b) = \cos(a)\cos(b) + sen(a)sen(b)}$$

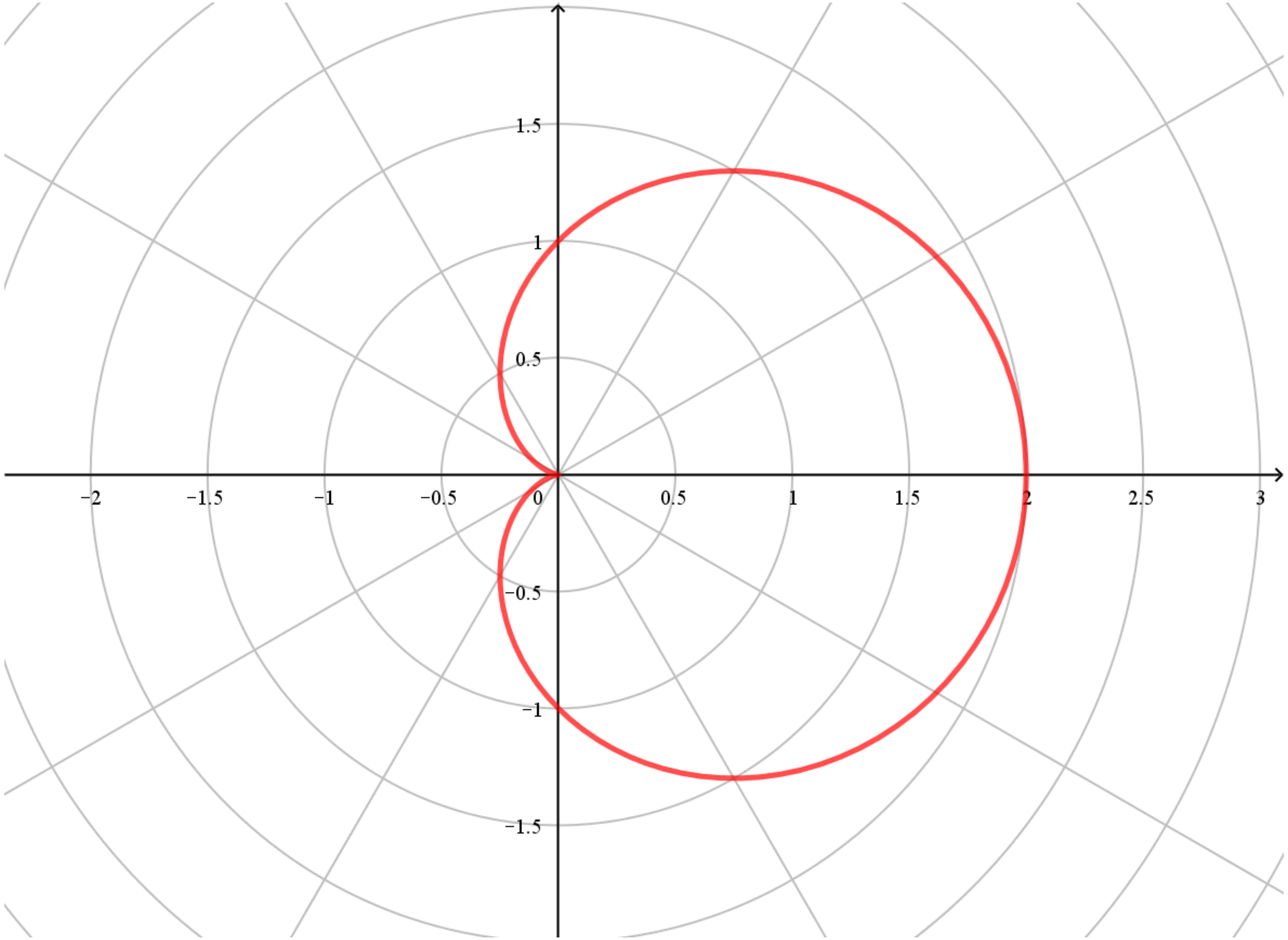
Logo, a curva **não é simétrica** em relação à reta $\theta = \frac{\pi}{2}$.

Vamos construir o gráfico para $0 \leq \theta \leq \pi$ e utilizar a reflexão em relação ao eixo polar para completar o gráfico.

θ	$r = 1 + \cos\theta$
0	$1 + \cos(0) = 1 + 1 = 2$
$\frac{\pi}{6}$	$1 + \cos\left(\frac{\pi}{6}\right) = 1 + \frac{\sqrt{3}}{2} \approx 1,87$
$\frac{\pi}{4}$	$1 + \cos\left(\frac{\pi}{4}\right) = 1 + \frac{\sqrt{2}}{2} \approx 1,71$
$\frac{\pi}{3}$	$1 + \cos\left(\frac{\pi}{3}\right) = 1 + \frac{1}{2} = 1,5$
$\frac{\pi}{2}$	$1 + \cos\left(\frac{\pi}{2}\right) = 1 + 0 = 1$
$\frac{2\pi}{3}$	$1 + \cos\left(\frac{2\pi}{3}\right) = 1 + \left(-\frac{1}{2}\right) = 0,5$
$\frac{3\pi}{4}$	$1 + \cos\left(\frac{3\pi}{4}\right) = 1 + \left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right) \approx 0,29$
$\frac{5\pi}{6}$	$1 + \cos\left(\frac{5\pi}{6}\right) = 1 + \left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right) \approx 0,13$
π	$1 + \cos(\pi) = 1 + (-1) = 0$



O gráfico de $r = 1 + \cos(\theta)$ é uma curva chamada **cardioide**.



(**c**) Seja $r = f(\theta) = 4\cos(2\theta)$.

- *Simetria em relação ao eixo polar:*
  Veja que

$$f(-\theta) = 4\cos(-2\theta)$$
$$= 4\cos(2\theta) = f(\theta)$$

Logo, a curva é simétrica em relação ao eixo polar.

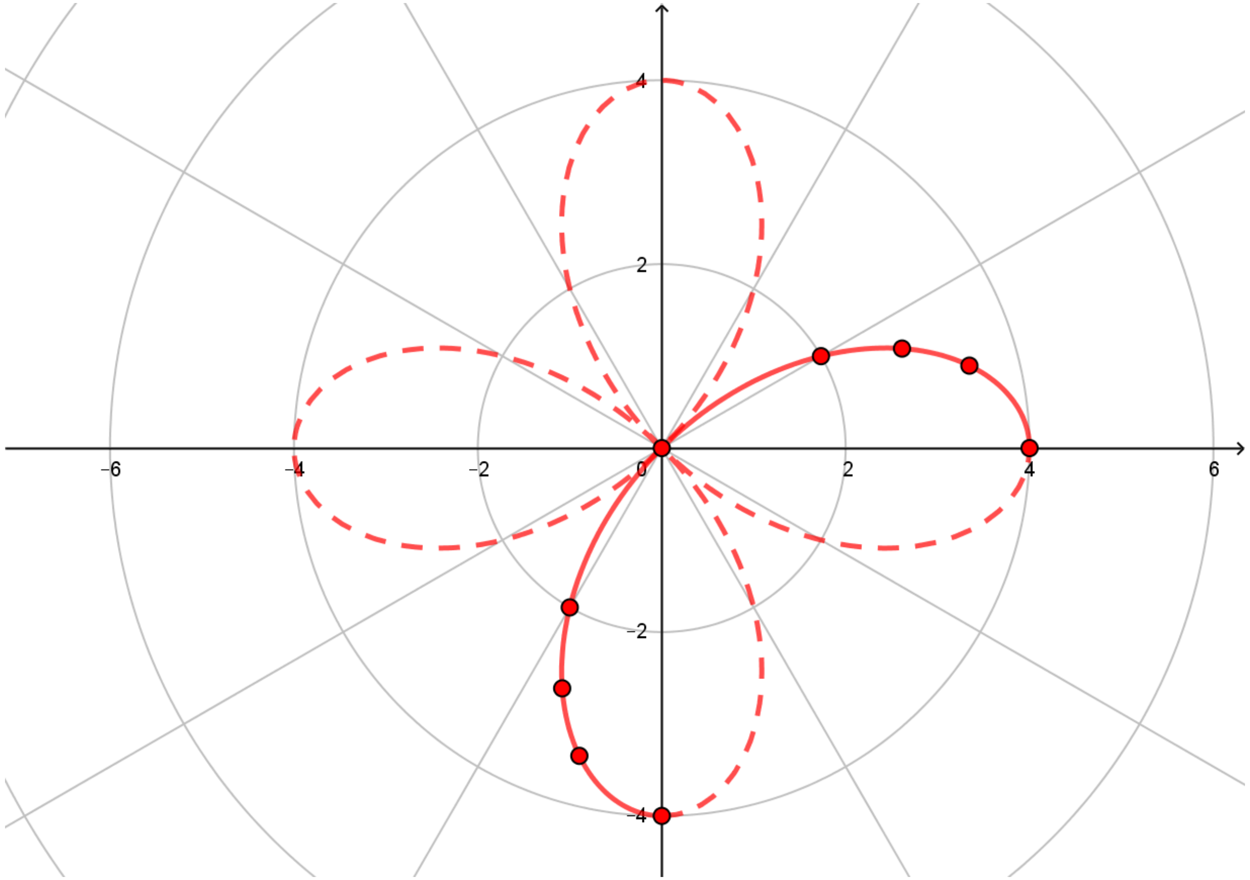
- *Simetria em relação à reta $\theta = \frac{\pi}{2}$:*
  Veja que

$$f(\pi - \theta) = 4\cos(2(\pi - \theta))$$
$$= 4\cos(2\pi - 2\theta)$$
$$= 4\left[\cos(2\pi)\cos(2\theta) + sen(2\pi)sen(2\theta)\right]$$
$$\boxed{\cos(a - b) = \cos(a)\cos(b) + sen(a)sen(b)}$$
$$= 4\cos(2\theta)$$
$$= f(\theta)$$

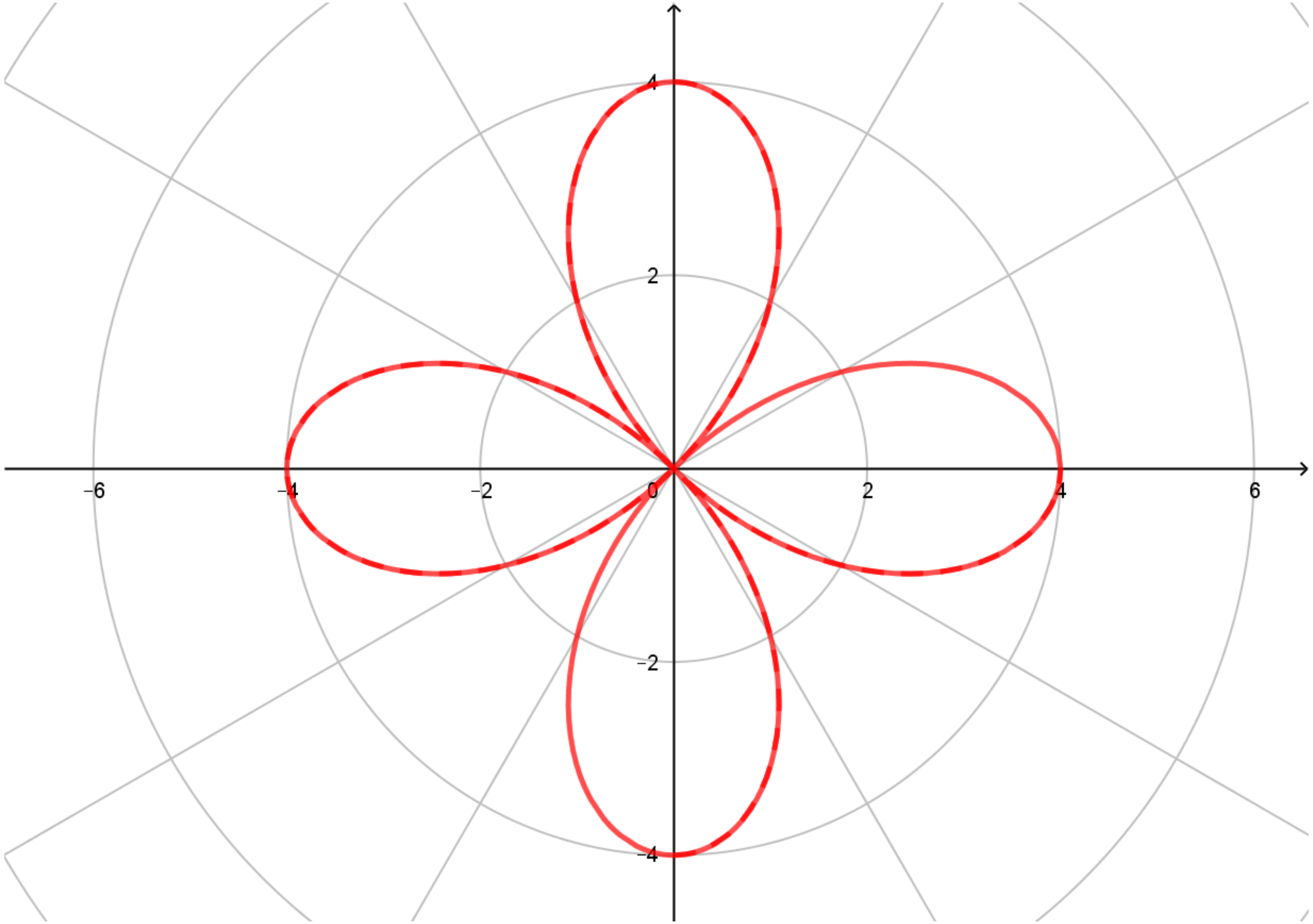
Logo, a curva é simétrica em relação à reta $\theta = \frac{\pi}{2}$.

Vamos construir o gráfico para $0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{2}$ e utilizar as reflexões para completar o gráfico.

θ	$r = 4\cos(2\theta)$
0	$r = 4\cos(2 \cdot 0) = 4 \cdot \cos 0 = 4 \cdot 1 = 4$
$\frac{\pi}{12}$	$4\cos\left(\frac{2\pi}{12}\right) = 4\cos\left(\frac{\pi}{6}\right) = 4 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} \approx 3,46$
$\frac{\pi}{8}$	$4\cos\left(\frac{2\pi}{12}\right) = 4\cos\left(\frac{\pi}{6}\right) = 4 \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} \approx 2,82$
$\frac{\pi}{6}$	$4\cos\left(\frac{2\pi}{6}\right) = 4\cos\left(\frac{\pi}{3}\right) = 4 \cdot \frac{1}{2} = 2$
$\frac{\pi}{4}$	$4\cos\left(\frac{2\pi}{4}\right) = 4\cos\left(\frac{\pi}{2}\right) = 4 \cdot 0 = 0$
$\frac{\pi}{3}$	$4\cos\left(\frac{2\pi}{3}\right) = 4\left(-\frac{1}{2}\right) = -2$
$\frac{3\pi}{8}$	$4\cos\left(\frac{2 \cdot 3\pi}{8}\right) = 4\cos\frac{3\pi}{4} = 4 \cdot \left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right) \approx -2,82$
$\frac{5\pi}{12}$	$4\cos\left(\frac{2 \cdot 5\pi}{12}\right) = 4\cos\left(\frac{5\pi}{6}\right) = 4\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right) \approx -3,46$
$\frac{\pi}{2}$	$4\cos\left(\frac{2 \cdot \pi}{2}\right) = 4\cos\pi = 4 \cdot (-1) = -4$



O gráfico de $r = 4\cos(2\theta)$ é uma curva chamada **rosácea de 4 pétalas**.

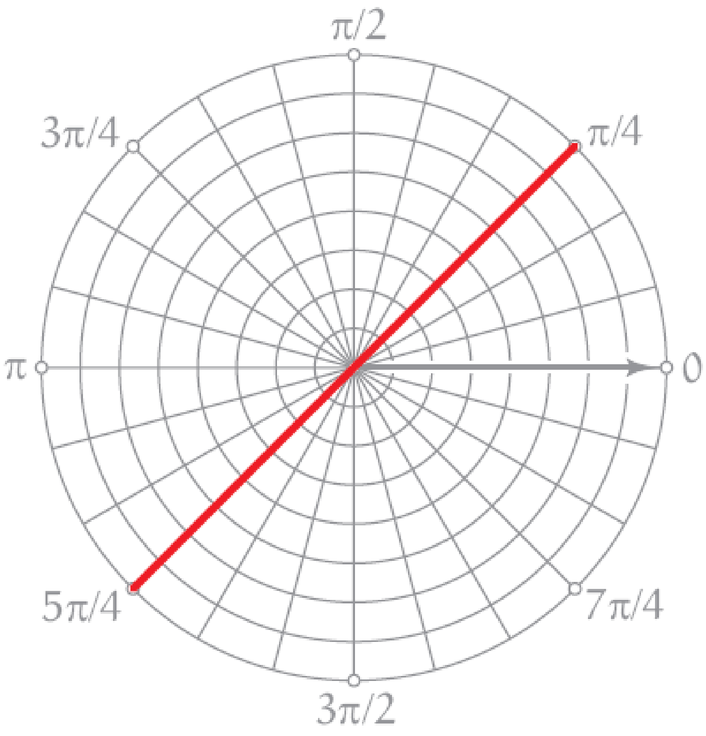


Exemplos de Curvas Polares

(1) **Retas**: no plano polar, o lugar geométrico dos pontos $P = (r, \theta)$ tais que:

- $\theta = k$ é uma reta passando pelo polo.
- $r\cos\theta = k$ é uma reta perpendicular ao eixo polar.
- $r\,sen\,\theta = k$ é uma reta paralela ao eixo polar.

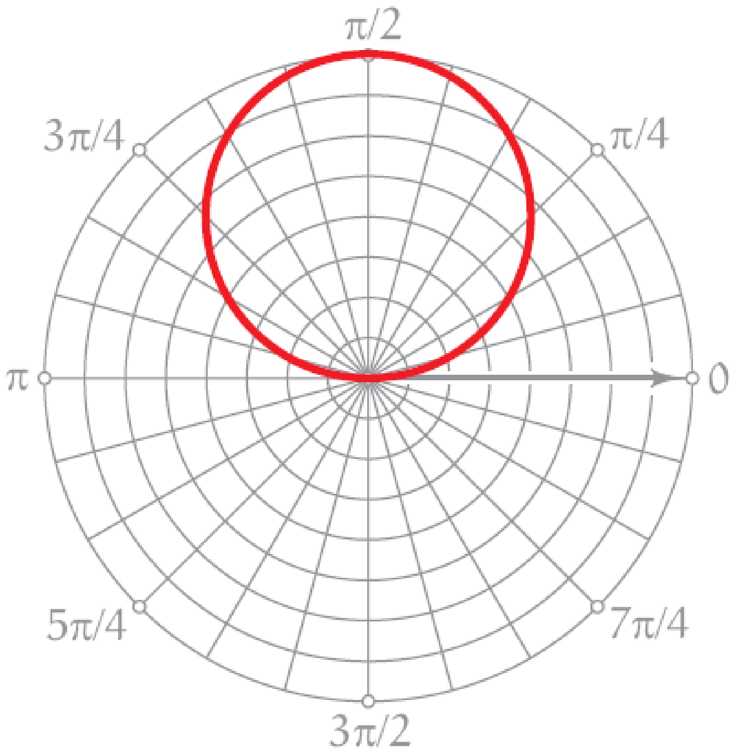
($k \in \mathbb{R}$ constante)



$$\theta = \frac{\pi}{4}$$

(2) **Circunferências**: no plano polar, o lugar geométrico dos pontos $P = (r, \theta)$ tais que:

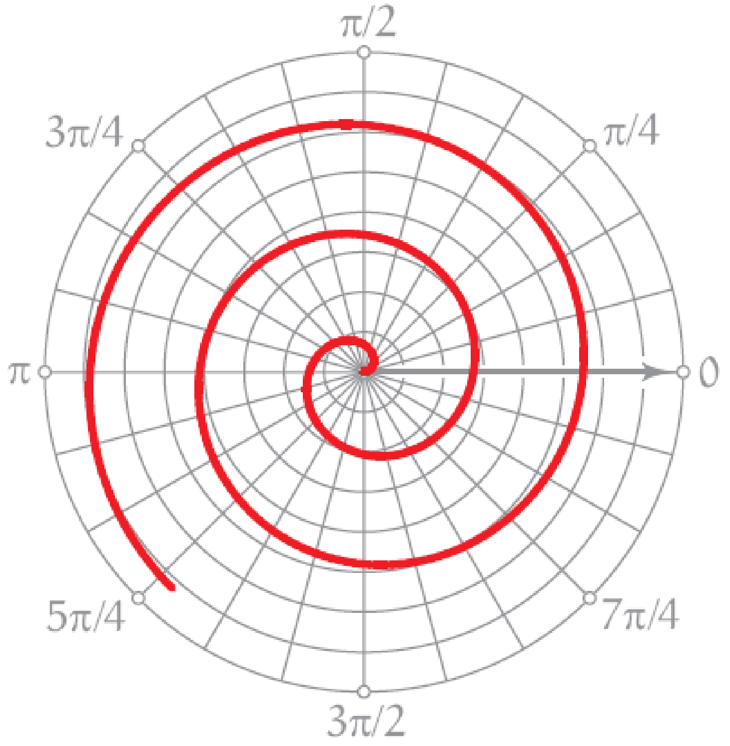
- $\circ$ $r = k$ ($k \neq 0$ constante real) é uma circunferência de centro no polo e raio $|k|$.
- $\circ$ $r = k\cos\theta, k \neq 0$, é uma circunferência de centro no eixo polar e raio $\left|\frac{k}{2}\right|$.
- $\circ$ $r = k\,sen\,\theta, k \neq 0$ é circunferência de centro na reta perpendicular ao eixo polar passando pelo pólo e raio $\left|\frac{k}{2}\right|$.



$r = sen\,\theta$ $\left(\text{circunferência de centro cartesiano } \left(0, \frac{1}{2}\right) \text{ e raio } \frac{1}{2}\right)$

($\mathbf{3}$) **Espirais:** no plano polar, o lugar geométrico dos pontos $P = (r, \theta)$ tais que:

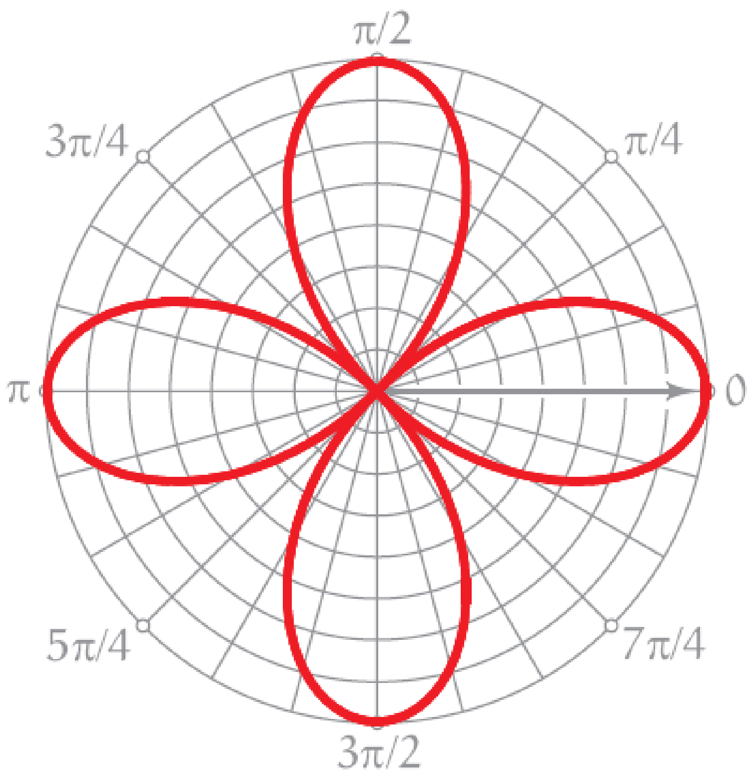
- $r = k\theta$ ($k \neq 0$ constante real) é uma *Espiral de Arquimedes.*
- $r = \dfrac{k}{\theta}, k \neq 0$, é uma *Espiral Hiperbólica.*
- $r = k^{c\theta}, k > 0, k \neq 1, c \neq 0$ é uma *Espiral Logarítmica.*
- $r = k\sqrt{\theta}, k \neq 0$ é uma *Espiral Parabólica.*



$r = \theta$ *(Espiral de Arquimedes)*

(4) **Rosáceas:** no plano polar, o lugar geométrico dos pontos $P = (r, \theta)$ tais que:

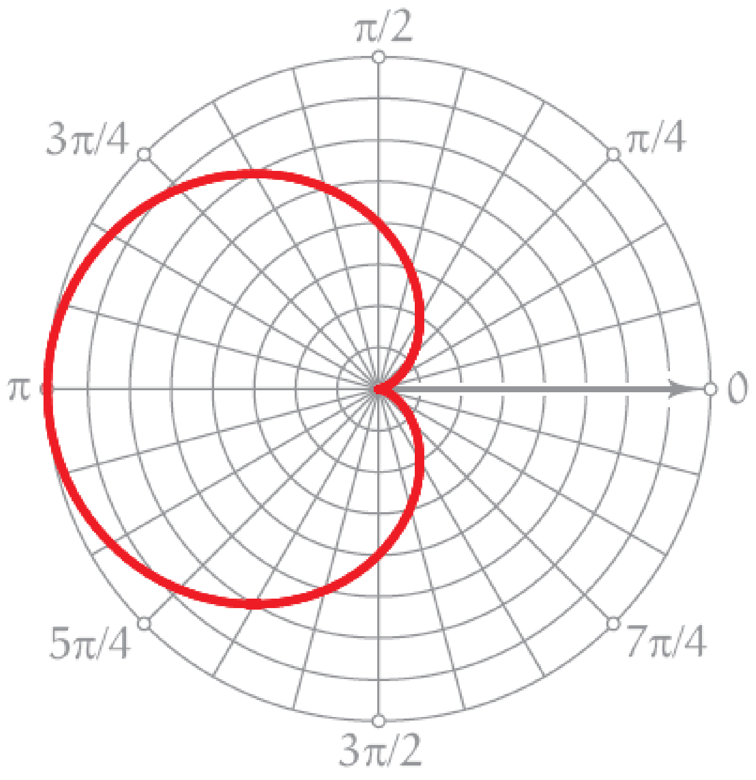
- $r = k\cos(n\theta)$ ($k \neq 0$ constante real, $n \geq 2$ constante inteira) é uma *rosácea* de $2n$ laços, quando n é par, e n laços, quando n é ímpar.
- $r = k\,\text{sen}(n\theta)$ é uma rosácea com as mesmas considerações acima.



$r = \cos(2\theta)$

(5) **Limaçons:** no plano polar, o lugar geométrico dos pontos $P = (r, \theta)$ tais que:

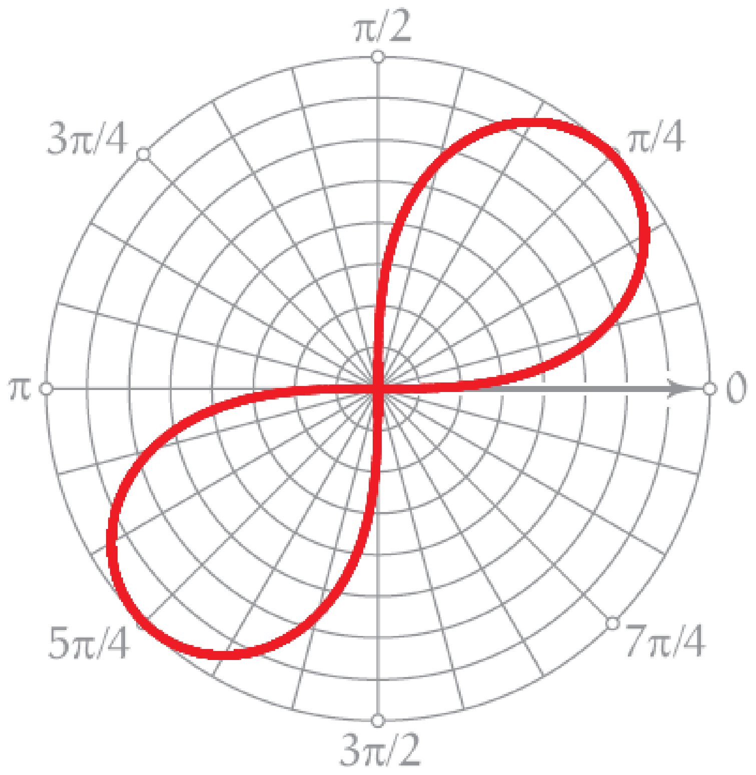
- $r = k + l\cos(\theta)$ $(k, l \neq 0$ constantes reais$)$ é um *limaçon* (do latim *limax*, que significa caracol). Quando $|k| < |l|$ o limaçon apresenta um laço. Quando $|k| = |l|$ o limaçon apresenta um "bico" e é, também, chamado de ***cardioide***, devido ao formato de coração.
- $r = k + l\mathrm{sen}(\theta)$ é um limaçon com as mesmas considerações acima.



$r = 1 - \cos(\theta)$ *(Cardioide)*

(**6**) **Lemniscatas:** no plano polar, o lugar geométrico dos pontos $P = (r, \theta)$ tais que:

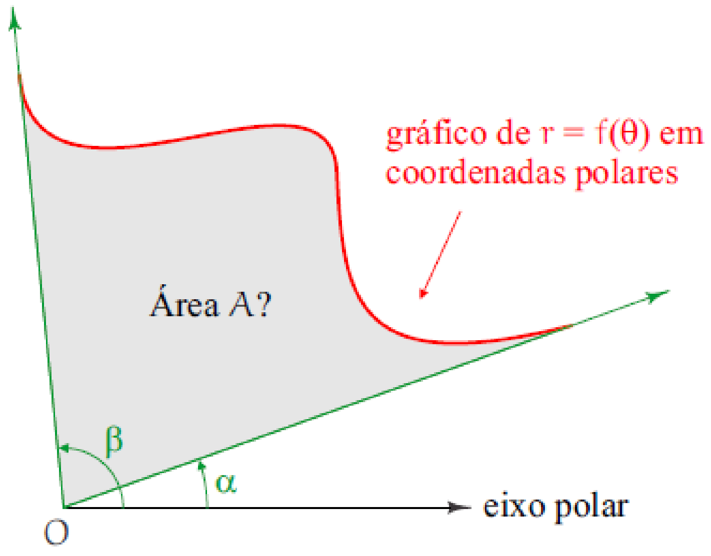
- $r^2 = kcos\,(2\theta)$ ($k \neq 0$ constante real), com θ variando em intervalos nos quais o segundo membro é positivo, é uma *lemniscata* (do latim ***lmniscus***, que significa faixa suspensa).
- $r^2 = ksen\,(2\theta)$ é uma lemniscata com as mesmas considerações acima.



$$r^2 = 4\,sen(2\theta)$$

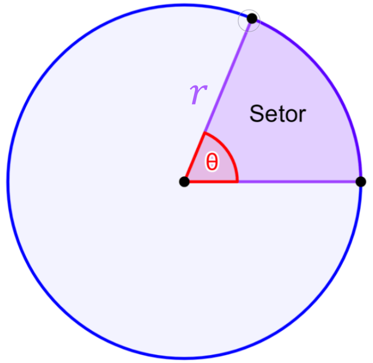
Área em Coordenadas Polares

Consideremos uma curva em coordenadas polares dada por $r = f(\theta)$, sendo f não negativa em $[\alpha.\beta]$. Queremos calcular a área A da região delimitada pela curva $r = f(\theta)$ e pelas retas $\theta = \alpha$ e $\theta = \beta$.



Vamos usar a mesma ideia de aproximação de áreas por Somas de Riemann que foi feita para o cálculo de áreas no sistema de coordenadas cartesianas. Entretanto, nesse caso, ao invés de retângulos, vamos considerar setores circulares.

Recordemos, da geometria, que a área de um setor circular de abertura θ (em radianos) e raio r é igual a $\frac{r^2\theta}{2}$.

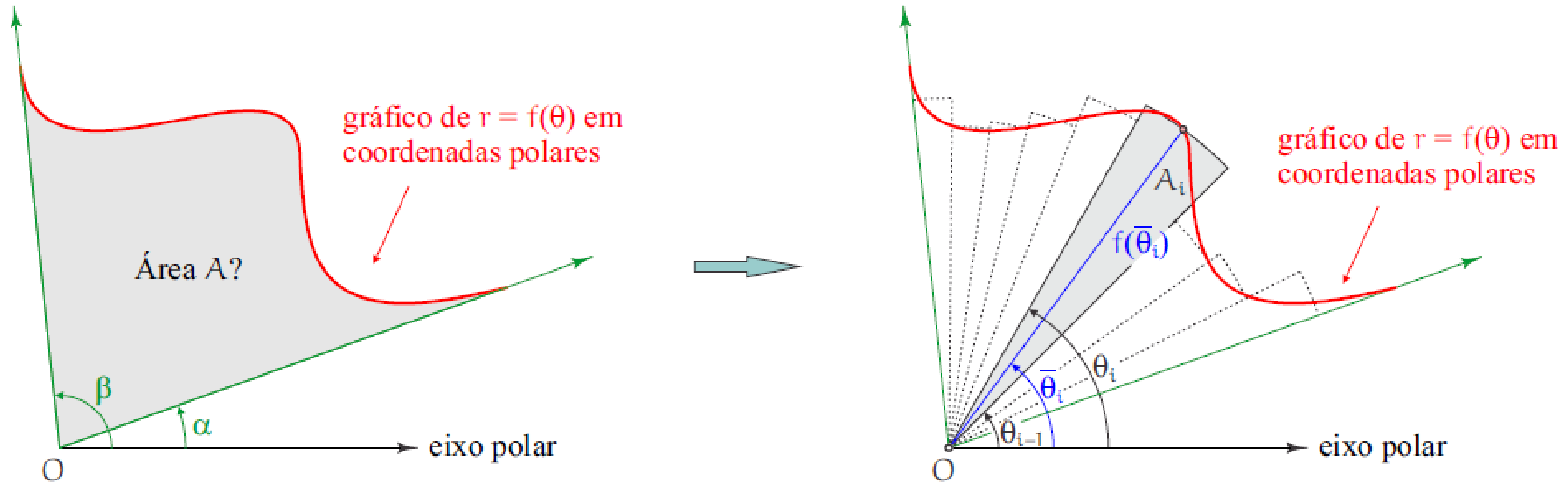


$2\pi\ rad$ ——— πr^2

$\theta\ rad$ ——— A_{SC}

$$A_{SC} = \frac{\theta\pi r^2}{2\pi} = \frac{r^2\theta}{2}$$

Seja $P = \{\alpha = \theta_0, \theta_1, \dots, \theta_{n-1}, \theta_n = \beta\}$ uma partição do intervalo $[\alpha, \beta]$.
Tomemos números $\bar{\theta}_i \in [\theta_{i-1}, \theta_i]$ com $i = 1, \dots, n$. Consideremos os setores circulares de aberturas $\Delta\theta_i = \theta_i - \theta_{i-1}$ e raios $f(\bar{\theta}_i)$.



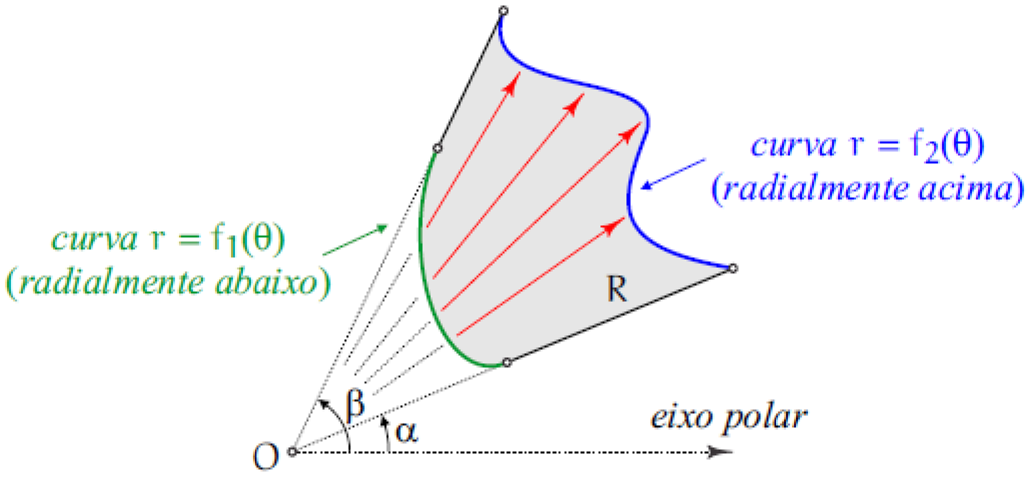
Denotemos por $A_i = \frac{f(\bar{\theta}_i)^2 \Delta\theta_i}{2}$ a área de cada setor circular. Naturalmente, a soma dessas áreas é uma aproximação para a área A procurada. Temos assim, as seguintes Somas de Riemann em coordenadas polares:

$$A \cong \sum_{i=1}^{n} A_i = \sum_{i=1}^{n} \frac{[f(\bar{\theta}_i)]^2 \Delta\theta_i}{2}.$$

Fazendo $n \to \infty$, obtemos a integral definida que fornece a área procurada:

$$A = \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} \frac{[f(\bar{\theta}_i)]^2 \Delta\theta_i}{2} \Rightarrow \boxed{A = \frac{1}{2}\int_{\alpha}^{\beta} [f(\theta)]^2 \, d\theta.}$$

Observação: Para calcular a área de uma região R delimitada radialmente abaixo por $r = f_1(\theta)$ e radialmente acima por $r = f_2(\theta)$ com ângulo variando de α até β, fazemos:

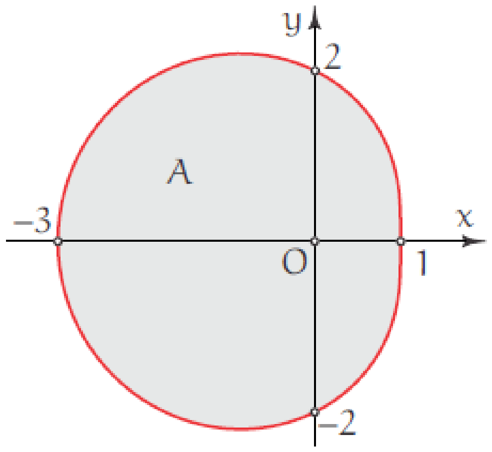


$$\boxed{A = \frac{1}{2}\int_{\alpha}^{\beta} \left([f_2(\theta)]^2 - [f_1(\theta)]^2\right) d\theta}$$

Exemplos:

(1) Calcular a área da região limitada pelo limaçon $r = 2 - \cos\theta$.

Solução: O esboço da curva é dado a seguir.



Observe que para cobrir toda a região, θ varia de 0 até 2π. Logo, a área pedida é dada por:

$$A = \int_0^{2\pi} \frac{(2-\cos(\theta))^2}{2} d\theta = \frac{1}{2}\int_0^{2\pi} \left(4 - 4\cos(\theta) + \cos^2(\theta)\right) d\theta = \frac{1}{2}\int_0^{2\pi} \left(4 - 4\cos(\theta) + \frac{1+\cos(2\theta)}{2}\right) d\theta$$

$$= \frac{1}{2}\left(4\theta - 4\,\mathrm{sen}(\theta) + \frac{1}{2}\theta + \frac{\mathrm{sen}(2\theta)}{4} \Big|_0^{2\pi} \right) = \frac{1}{2}\left(8\pi - 0 + \pi + 0 - (0 - 0 + 0 + 0)\right) = \frac{9\pi}{2}.$$

(2) Mostre que a área de um círculo de raio ρ é $A = \pi\rho^2$.

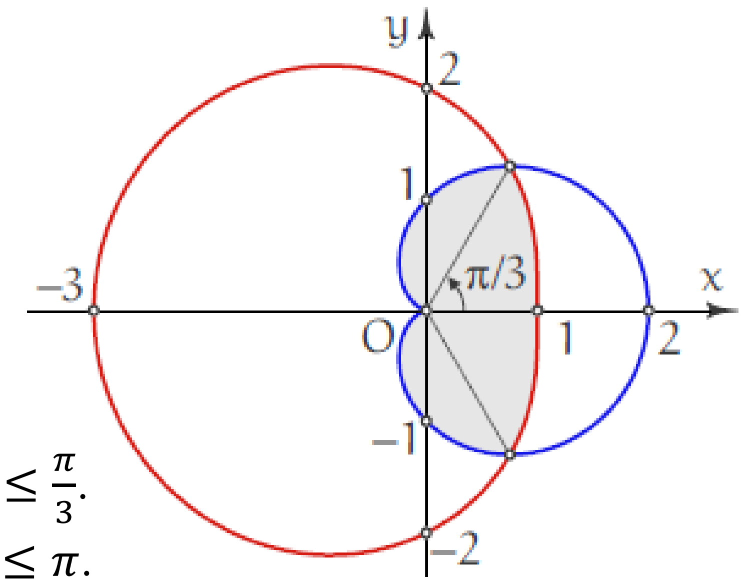
Solução: Posicionando o círculo com centro no polo, temos que sua equação polar é $r = \rho$, ou seja, $f(\theta) = \rho$. Para cobrir o círculo, θ varia de 0 até 2π. Assim,

$$A = \int_0^{2\pi} \frac{\rho^2}{2} d\theta = \frac{\rho^2}{2}\theta\Big|_0^{2\pi} = \frac{2\pi\rho^2}{2} - 0 = \pi\rho^2.$$

(3) Calcular a área da intersecção das regiões limitadas pelas curvas de equações polares $r = 2 - \cos\theta$ (limaçon) e $r = 1 + \cos\theta$ (cardioide).

Solução: Primeiro, devemos determinar as intersecções entre as curvas:

$$2 - \cos\theta = 1 + \cos\theta \Rightarrow 2\cos\theta = 1$$
$$\Rightarrow \cos\theta = \frac{1}{2}$$
$$\Rightarrow \theta = \pm\frac{\pi}{3}$$



Sejam:

- A_1: o conjunto de todos os pontos (r, θ) tais que $0 \le r \le 2 - \cos\theta$ e $0 \le \theta \le \frac{\pi}{3}$.
- A_2: o conjunto de todos os pontos (r, θ) tais que $0 \le r \le 1 + \cos\theta$ e $\frac{\pi}{3} \le \theta \le \pi$.

A área pedida é dada por $A = 2(\text{área de } A_1 + \text{área de } A_2)$, ou seja,

$$A = 2\left(\int_0^{\frac{\pi}{3}} \frac{(2-\cos(\theta))^2}{2} d\theta + \int_{\frac{\pi}{3}}^{\pi} \frac{(1+\cos(\theta))^2}{2} d\theta\right) = \int_0^{\frac{\pi}{3}} \left(4 - 4\cos(\theta) + \cos^2(\theta)\right) d\theta + \int_{\frac{\pi}{3}}^{\pi} \left(1 + 2\cos(\theta) + \cos^2(\theta)\right) d\theta$$

$$= \int_0^{\frac{\pi}{3}} \left(4 - 4\cos(\theta) + \frac{1+\cos(2\theta)}{2}\right) d\theta + \int_{\frac{\pi}{3}}^{\pi} \left(1 + 2\cos(\theta) + \frac{1+\cos(2\theta)}{2}\right) d\theta$$

$$= \left(4\theta - 4\,\text{sen}(\theta) + \frac{1}{2}\theta + \frac{\text{sen}(2\theta)}{4}\Big|_0^{\frac{\pi}{3}}\right) + \left(\theta + 2\,\text{sen}(\theta) + \frac{1}{2}\theta + \frac{\text{sen}(2\theta)}{4}\Big|_{\frac{\pi}{3}}^{\pi}\right)$$

$$= \left(\frac{4\pi}{3} - 4\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{\pi}{6} + \frac{\sqrt{3}}{8} - (0 - 0 + 0 + 0)\right) + \left(\pi + 0 + \frac{\pi}{2} + 0 - \left(\frac{\pi}{3} + 2\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{\pi}{6} + \frac{\sqrt{3}}{8}\right)\right) = \frac{5\pi}{2} - 3\sqrt{3}.$$

Exercícios

(1) Calcule a área da região limitada pelo cardioide $r = 1 - \cos\theta$. R:$3\pi/2$

(2) Calcule a área da intersecção das regiões limitadas pelas curvas de equações polares $r = 3\cos\theta$ e $r = 1 + \cos\theta$. R:$5\pi/4$

(3) Calcule a área da região interior à circunferência $r = 2\cos\theta$ e exterior ao cardioide $r = 2 - 2\cos\theta$.
R: $4\sqrt{3} - 4\pi/3$