Dependência e independência linear

$B = \{(1, 0), (0,1), (2, -3)\}$.

Perceba que no conjunto B o vetor $(2, -3)$ é combinação linear dos outros dois, pois:

$$(2, -3) = 2(1, 0) - 3(0, 1)$$

Ou ainda,

$$(2, -3) - 2(1, 0) - 3(0, 1) = (0, 0)$$

Assim, dizemos que o vetor $(2, -3)$ depende linearmente dos vetores $(1,0)$ e $(0,1)$, ou seja, o conjunto B é um conjunto linearmente dependente. Já o conjunto A é um conjunto

$A = \{(1, 0), (0,1)\}$

linearmente independente, pois não é possível escrever um deles como combinação do outro. Veja que no conjunto B conseguimos combinar os três vetores de maneira que o resultado fosse o vetor nulo $(0,0)$, mas não necessitamos multiplicar nenhum deles por zero.

Já no conjunto A, a única possibilidade de combinarmos os vetores e ter como resultado o vetor nulo é ambos serem multiplicados por zero, ou seja, $0\cdot(1, 0) + 0\cdot(0, 1) = (0, 0)$. Esta é a ideia preliminar de vetores linearmente dependentes e independentes. Necessitamos apenas formalizar a ideia matematicamente. Veja a definição abaixo:

Seja V um espaço vetorial e sejam $v_1, v_2, \ldots, v_n \in V$. O conjunto $A = \{v_1, v_2, \ldots, v_n\}$ é dito ser linearmente dependente (LD), se existem escalares $a_1, a_2, \ldots, a_n \in \mathbb{R}$, não todos nulos, tais que $a_1v_1 + a_2v_2 + \ldots + a_nv_n = 0$. Caso contrário, se a equação $a_1v_1 + a_2v_2 + \ldots + a_nv_n = 0$ admitir apenas a solução trivial, isto é, $a_1 = a_2 = \ldots = a_n = 0$, então dizemos que o conjunto A é linearmente independente (LI).

Observação 2.8: Note que a solução trivial é sempre válida. Assim, se esta for a única, os vetores são LI, porém, se existir qualquer $a_i \neq 0$ como solução, então os vetores são LD.

Teorema 2.4: o conjunto $A = \{v_1, v_2, \ldots, v_n\}$ é LD se, e somente se, um destes vetores for uma combinação linear dos outros.

2.24. Verifique se o conjunto A = {(1, 0), (0,1)} é linearmente dependente (LD) ou linearmente independente (LI).

$a(1,0) + b(0,1) = (0,0)$

$a = 0$; $b = 0$

a e b admite só solução trivial $(a,b) = (0,0)$

∴ O conjunto é L.I.

2.25). Mostre, usando a definição, que o conjunto
B = {(1, 0), (0,1), (2, –3)} é linearmente dependente (LD).

$a(1,0) + b(0,1) + c(2,-3) = (0,0)$

$$\begin{cases} a + 2c = 0 \\ b - 3c = 0 \end{cases} \Rightarrow c = \lambda, \quad a = -2\lambda, \quad b = -3\lambda.$$

infinitas soluções

Por exemplo, se $\lambda = 2$, $(a, b, c) = (-4, -6, 2)$

$\therefore$ B é L.I pois admite solução não-trivial.

2.26. Verifique se os conjuntos a seguir são LI ou LD.

a) A = {(1, 0, 0), (0, 1, 0), (0, 0, 1)} é LI ou LD.

$a(1,0,0) + b(0,1,0) + c(0,0,1) = (0,0,0)$

$a = 0, \; b = 0, \; c = 0$

LI, pois só tem solução trivial

$(a, b, c) = (0,0,0)$

b) $B = \{(1, -1, 3), (\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, \frac{3}{2})\}$.

$a(1,-1,3) + b(\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, \frac{3}{2}) = (0,0,0)$

$$\begin{cases} a + \frac{1}{2}b = 0 \\ -a - \frac{1}{2}b = 0 \\ 3a + \frac{3}{2}b = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 1/2 & 0 \\ -1 & -1/2 & 0 \\ 3 & 3/2 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow[L_3 = L_3 - 3L_1]{L_2 = L_2 + L_1}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 1/2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$a + \frac{1}{2}b = 0$

$a = -\frac{1}{2}b$

ou $b = -2a$

Soluções infinitas, $a = \lambda$, $b = -2\lambda$

Logo, é L.D.

c) $C = \{(-1, 0, -5, 4), (0, 0, 1, 3), (0, 0, 0, 1)\}$.

$a(-1,0,-5,4) + b(0,0,1,3) + c(0,0,0,1) = \vec{0}$

$-a = 0$; $\cancel{-5a} + b = 0$; $\cancel{4a} + \cancel{3b} + c = 0$

$a = 0$; $b = 0$; $c = 0$

Somente solução trivial

$(a,b,c) = (0,0,0) \Rightarrow$ L.I.

d) D = {(1, 2, 3), (4, 3, 2), (6, 4, 2)}

$$a(1,2,3) + b(4,3,2) + c(6,4,2) = (0,0,0)$$

$$\begin{aligned} a + 4b + 6c &= 0 \\ 2a + 3b + 4c &= 0 \\ 3a + 2b + 2c &= 0 \end{aligned} \Rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 4 & 6 & 0 \\ 2 & 3 & 4 & 0 \\ 3 & 2 & 2 & 0 \end{array}\right) \xrightarrow[L_3 = L_3 - 3L_1]{L_2 = L_2 - 2L_1}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 4 & 6 \\ 0 & -5 & -8 \\ 0 & -10 & -16 \end{pmatrix} \xrightarrow[L_2 = -L_2]{L_3 = L_3 - 2L_2} \begin{pmatrix} 1 & 4 & 6 \\ 0 & 5 & 8 \\ \cancel{0} & \cancel{0} & \cancel{0} \end{pmatrix} \xrightarrow{L_1 = 8L_1 - 6L_2}$$

$$\begin{pmatrix} 8 & 2 & 0 \\ 0 & 5 & 8 \end{pmatrix} \xrightarrow[L_2 = \frac{1}{5}L_2]{L_1 = \frac{1}{8}L_1} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & \frac{1}{4} & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \frac{8}{5} & 0 \end{array}\right)$$

$$\begin{cases} a + \frac{1}{4} b = 0 \\ b + \frac{8}{5} c = 0 \end{cases} \Rightarrow b = \lambda \; ; \; a = -\frac{1}{4}\lambda$$

$$c = -\frac{5}{8}\lambda$$

Há infinitas soluções

$\therefore$ L.D. (L.D.)

2.27. Prove que o conjunto A = {(–1, 3, –1), (1, –2, 4)} é LI.

$$a(-1,3,-1) + b(1,-2,4) = (0,0,0)$$

$$\begin{cases} -a + b = 0 \\ 3a - 2b = 0 \\ -a + 4b = 0 \end{cases} \Rightarrow \left(\begin{array}{cc|c} -1 & 1 & 0 \\ 3 & -2 & 0 \\ -1 & 4 & 0 \end{array}\right) \xrightarrow[\substack{L_2 = L_2 + 3L_1 \\ L_3 = L_3 - L_1}]{L_1 = -L_1}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \\ 0 & 3 \end{pmatrix} \xrightarrow[L_3 = L_3 - 3L_2]{L_1 = L_1 + L_2} \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

$\begin{cases} a = 0 \\ b = 0 \end{cases} \Rightarrow$ L.I pois só tem solução trivial para (a,b)

2.28. Encontre o valor de k para que o conjunto {(2, 4), (6, k)} seja LI e o valor de k para que o mesmo conjunto seja LD.

$$a(2,4) + b(6,K) = (0,0)$$

$$\begin{cases} 2a + 6b = 0 \\ 4a + Kb = 0 \end{cases} \Rightarrow \left(\begin{array}{cc|c} 2 & 6 & 0 \\ 4 & K & 0 \end{array}\right) \xrightarrow[L_2 = L_2 - 2L_1]{L_1 = \frac{1}{2}L_1}$$

$$\left(\begin{array}{cc|c} 1 & 3 & 0 \\ 0 & K-12 & 0 \end{array}\right) \to (K-12)b = 0$$

Se $K - 12 \neq 0 \Rightarrow K \neq 12 \Rightarrow$ L.I

pois temos $\left(\begin{array}{cc|c} 1 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$ $a = -3b$ infinitas soluções

se $K - 12 = 0 \Rightarrow K =$

11) Quais dos seguintes conjuntos são LD ou LI?

a) $B = \{(-1, 2, 4)\}$

$a(-1, 2, 4) = (0, 0, 0)$

$a = 0 \Rightarrow$ ÚNICA SOLUÇÃO

$\therefore$ B é L.I.

b) $B = \left\{ \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \right\}$

$$a\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} + b\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} + c\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$a + b + 2c = 0$

$a - b = 0$, $a = b$

$b + c = 0$, $c = -b$, $b = -c$

$a + c = 0$, $c = -a$, $a = -c$

$a + b + 2c = 0$

$-c - c + 2c = 0$

$0 = 0$

c é variável livre.

infinitas soluções

$(a, b, c) = (-\lambda, -\lambda, \lambda)$

$\therefore$ B é L.D.

c) B = {(1, –2, 0, 0), (0, 3, 1, –1), (1, 0, 1, 2), (3, 2, 0, 3)}

$$\underbrace{a(1,-2,0,0) + b(0,3,1,-1) + c(1,0,1,2) + d(3,2,0,3) = (0,0,0,0)}$$

$$\begin{array}{c} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 1 & 3 & 0 \\ -2 & 3 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 2 & 3 & 0 \end{array}\right) \\ \begin{array}{ccccc} a & b & c & d & R \end{array} \end{array} \xrightarrow{L_2 = L_2 + 2L_1} \left(\begin{array}{ccccc} 1 & 0 & 1 & 3 & 0 \\ 0 & 3 & 2 & 8 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 2 & 3 & 0 \end{array}\right) \rightarrow$$

$$\xrightarrow[L_2 \leftrightarrow L_3]{L_4 = L_4 + L_3,\ L_2 = L_2 - 3L_3} \left(\begin{array}{cccc} 1 & 0 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 8 \\ 0 & 0 & 3 & 3 \end{array}\right) \xrightarrow[L_3 = -L_3]{L_4 = L_4 + 3L_3}$$

$$\begin{array}{c} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 1 & 3 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -8 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 27 & 0 \end{array}\right) \\ \begin{array}{ccccc} a & b & c & d & R \end{array} \end{array} \xrightarrow{L_4 = \frac{1}{27}L_4} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 1 & 3 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -8 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{array}\right)$$

$d = 0$; $c - \cancel{8d} = 0$, $c = 0$; $b + \cancel{c} = 0$, $\cancel{b = -c}$, ~~ou~~, $\cancel{c = -b}$, $b = 0$; $a + \cancel{c} + \cancel{3d} = 0$, $a = 0$

$\therefore (a, b, c, d) = (0,0,0,0)$ é a única solução

Logo, B é L.I.

d) B = {(1, 0, –1), (1, 2, 1), (0, –1, 0)}

$$a(1,0,-1) + b(1,2,1) + c(0,-1,0) = (0,0,0)$$

$a + b = 0$ | $2b - c = 0$ | $-a + 1b = 0$

(1) $a = -b$ | | $-a = -b$ (2)

$$\begin{cases} a = -b \\ -a = -b \end{cases}$$

$0 = -2b$

$b = 0$

$a = 0$

$2b - c = 0$

$-c = 0$

$c = 0$

$(a, b, c) = (0, 0, 0)$
é a única solução.

B é L.I.

12) Encontre o valor de k para que o conjunto $A = \{(1, -1, -2), (2, k, 1), (-1, 0, 3)\}$ seja LI. Qual o valor de k para o conjunto ser LD?

$$a(1,-1,-2) + b(2,k,1) + c(-1,0,3) = (0,0,0)$$

$$\begin{cases} a + 2b - c = 0 \\ -a + kb = 0 \\ -2a + b + 3c = 0 \end{cases} \Rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -1 & 0 \\ -1 & k & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 3 & 0 \end{array}\right) \xrightarrow[L_3 = L_3 - 2L_1]{L_2 = L_2 + L_1}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 0 & k+2 & -1 \\ 0 & 5 & 3 \end{pmatrix} \xrightarrow[L_2 \leftrightarrow L_3]{L_2 = \frac{1}{5}L_3} \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 0 & 1 & -\frac{3}{5} \\ 0 & k+2 & -1 \end{pmatrix} \xrightarrow{L_3 = L_3 - (k+2)L_2}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -\frac{3}{5} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{3}{5}k + \frac{1}{5} & 0 \end{array}\right)$$

$$\begin{cases} L_3 - (k+2)L_2 \\ -1 - (k+2)\cdot\left(-\frac{3}{5}\right) \\ -1 + \frac{3}{5}k + \frac{6}{5} \\ \frac{3}{5}k + \frac{1}{5} \end{cases}$$

$$\left(\frac{3}{5}k + \frac{1}{5}\right)c = 0$$

Se $\frac{3}{5}k + \frac{1}{5} = 0$

$3k + 1 = 0$

$3k = -1$

então $k = -1/3$

Se $k = -1/3$ temos infinitas soluções $0 = 0$

$\therefore$ Se $k = -1/3$, B é L.D.

e se $k \neq -1/3$, B é L.I.

pois a única solução é zero.

$\therefore$ Se $\begin{cases} k = -1/3, & \text{B é L.D.} \\ k \neq -1/3, & \text{B é L.D.} \end{cases}$

Base e dimensão

Um conjunto A = $\{v_1, v_2, \ldots, v_n\}$ de um espaço vetorial V é chamado de base de V se:

a) A é LI
b) A gera V, ou seja, G(A) = V.

Por exemplo, no R^2 um gerador mínimo deve ter, no máximo, dois vetores. A base mais usada para o R^2 é o conjunto A = {(1, 0), (0, 1)}, que já provamos em exemplos anteriores que gera o R^2 e é LI. Portanto, pela definição, o conjunto A é uma base de R^2. Esta base é conhecida como **base canônica**.

É comum encontrar em muitos livros a letra grega beta (β) para indicar uma base [ou uma outra letra grega qualquer].

Existem muitas outras bases para o R^2, assim como o R^3, que tem base canônica dada por β = {(1, 0, 0), (0, 1, 0), (0, 0, 1)}, também tem outras bases. De maneira geral, qualquer espaço vetorial V tem infinitas bases, algumas mais simples de trabalhar, outras nem tanto. Veja alguns exemplos:

2.29. Mostre que o conjunto A = {(1, 1), (0, –1)} é uma base do R^2.

a) Mostrar que A é L.I.

b) Mostrar que A gera $V = \mathbb{R}^2$

a) $a(1,1) + b(0,-1) = (0,0)$

$a = 0$ $\quad a - b = 0$

$a = b = 0$

UNICA SOLUÇÃO: $(a,b) = (0,0)$

A é L.I.

b) $(x,y) = a(1,1) + b(0,-1)$

$\boxed{a = x}$ $\quad a - b = y$

$-b = y - a$

$b = a - y$

$\boxed{b = x - y}$

de fato,

$a(1,1) + b(0,-1) =$

$x(1,1) + (x-y)(0,-1) = (x, x-x+y)$

$= (x,y)$

$\therefore$ A gera $\mathbb{R}^2$.

de a e b, A é uma base do $\mathbb{R}^2$.

(pois é L.I. e gera $\mathbb{R}^2$)

2.30. Mostre que $\beta = \{a(1, 1, 1), (0, 1, 1), (2, 0, 1)\}$ é uma base do R^3.

a) Mostrar que β é L.I.

$a(1,1,1) + b(0,1,1) + c(2,0,1) = (0,0,0)$

$$\begin{cases} a + 2c = 0 \\ a + b = 0 \\ a + b + c = 0 \end{cases}$$

② $a+b=0$
$a=-b$
$b=-a$

① $a+2c=0$
$a=-2c$
$c=-\frac{1}{2}a$

③ $a+b+c=0$
$\cancel{a}-\cancel{a}-\frac{1}{2}a=0$
$a=0 \Rightarrow$
$\Rightarrow a=b=c=0$

Solução única, $(a,b,c)=(0,0,0)$ Trivial

b) β gera o $\mathbb{R}^3$?

$$\begin{cases} a + 2c = x \\ a + b = y \\ a + b + 2c = z \end{cases}$$

$a+b=y$
$b=y-a$

$a+2c=x$
$2c=x-a$
$c=\frac{x-a}{2}$

$a+b+2c=z$
$a+y-\cancel{a}+x-\cancel{a}=z$
$a=z-y$
$a=-y+z$

$b=y+y-z$
$b=2y-z$

$c=\frac{x+y-z}{2}$

$\therefore \mathbb{R}^3$ pode ser escrito como combinação dos vetores de β.

Basta tomar $a=-y+z$, $b=2y-z$ e $c=\frac{1}{2}(x+y-z)$

$\therefore$ de (a) e (b); β é base do $\mathbb{R}^3$.

2.31. O conjunto B = {(1, 0), (0,1), (2, –3)} é uma base de R^2?

a) B é L.I.?

$a(1,0) + b(0,1) + c(2,-3) = (0,0)$

$a + 2c = 0 \qquad b - 3c = 0 \qquad c = \lambda$

$a = -2c \qquad b = 3c$

$(a, b, c) = (-2\lambda, 3\lambda, \lambda)$

Infinitas soluções

B é L.D.

Logo, B não é base de $\mathbb{R}^2$ (apesar de gera $\mathbb{R}^2$).

Se V é um espaço vetorial, dizemos que V tem dimensão finita *n* se V tem uma base com *n* vetores e denota-se por dim V = *n*.

Deste modo, temos então que dim $R^2 = 2$, pois uma base do R^2 tem sempre dois vetores. Do mesmo modo, dim $R^3 = 3$, e de maneira geral, dim $R^n = n$.

Propriedades de base e dimensão

1. Qualquer conjunto LI de um espaço vetorial V é base do subespaço por ele gerado.

Tome como exemplo o conjunto $A = \{(-1, 3, -1), (1, -2, 4)\}$ que é LI (exemplo 2.27, seção 5). Já provamos também, no final da Seção 3, que esse conjunto gera o subespaço vetorial do R^3, dado por $W = \{(x, y, z) \in R^3; 10x + 3y - z = 0\}$. Assim, segundo a propriedade 1, segue que A é uma base do subespaço W.

2. Seja $A = \{v_1, v_2, \ldots, v_n\}$ uma base de um espaço vetorial V, então, todo conjunto com mais de n vetores será linearmente dependente.

Tome como exemplo o conjunto $A = \{(1, 0), (0, 1)\}$, que já provamos ser uma base do R^2. Portanto, pela propriedade 2, qualquer conjunto com mais de 2 vetores é linearmente dependente. De fato, o conjunto $B = \{(1, 0), (0,1), (2, -3)\}$ é um conjunto linearmente dependente.

3. Duas bases quaisquer de um espaço vetorial têm sempre o mesmo número de elementos.

De fato, sejam A = $\{v_1, v_2, \ldots, v_n\}$ e B = $\{w_1, w_2, \ldots, w_m\}$ duas bases de um espaço vetorial V qualquer.

a) Como A é uma base e B é LI, segue que o número de elementos de A é maior ou igual ao número de elementos de B, pela propriedade anterior, ou seja, $n \geq m$.

b) De modo análogo, como B é base e A é LI, então o número de elementos de B é maior ou igual ao número de elementos de A, isto é, $m \geq n$.

Assim, como ao mesmo tempo $n \geq m$ e $m \geq n$, somente pode ocorrer que $n = m$, logo duas bases de um mesmo espaço vetorial têm o mesmo número de elementos.

Por exemplo, como a base canônica de R^2 tem dois elementos, então qualquer outra base de R^2 também tem dois elementos.

4. Todo espaço V que não possui uma base tem dimensão zero, ou seja, dim V = 0.

5. Se V é um espaço vetorial e W é um subespaço de V, então dim W ≤ dim V. Se as dimensões forem iguais, então V = W.

Como exemplo, tomemos novamente o subespaço $W = \{(x, y, z) \in R^3; 10x + 3y - z = 0\}$ de R^3, que já provamos ter uma base formada por dois vetores, a saber, $\beta = \{(-1, 3, -1), (1, -2, 4)\}$, então $\dim W = 2 \leq 3 = \dim R^3$.

6. Qualquer conjunto de vetores LI de um espaço vetorial V pode ser completado até formar uma base de V.

Tome como exemplo o conjunto A = {(1, 0, 0), (1, 1, 0)}, que é LI. Este conjunto não forma uma base do R^3, pois sabemos pela propriedade 3, que uma base do R^3 deve conter três vetores. Pela propriedade 6, podemos completar o conjunto *A* e formar uma base. Por exemplo, tome o vetor $w = (1, 1, 1)$. Assim, o conjunto A' = {(1, 0, 0), (1, 1, 0), (1, 1, 1)} é uma base do R^3, pois é um conjunto LI e gera o R^3, como provamos na Seção 4.

2.32. Mostre que o conjunto A = {(1, 3, 1), (5, 1, 0), (1, 0, 0)} é uma base do R^3.

a) $a(1,3,1) + b(5,1,0) + c(1,0,0) = (0,0,0)$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 5 & 1 & 0 \\ 3 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

$a = 0$ $\quad$ $\cancel{3a} + b = 0$ $\quad$ $\cancel{a} + 5\cancel{b} + c = 0$

$b = 0$ $\quad$ $c = 0.$

A é L.I.

b) $(x,y,z) = a(1,3,1) + b(5,1,0) + c(1,0,0)$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 5 & 1 & x \\ 3 & 1 & 0 & y \\ 1 & 0 & 0 & z \end{array}\right)$$

$a = z$

$$\left\{\begin{array}{l} 3a + b = y \\ b = y - 3a \\ b = y - 3z \end{array}\right\}$$

$a + 5b + c = x$

$z + 5(y - 3z) + c = x$

$c = x - z - 5y + 15z$

$c = x - 5y + 14z.$

A gera $\mathbb{R}^3$ ao tomar $(a, b, c) = (z, y - 3z, x - 5y + 14z).$

$\therefore$ de (a) e (b), A é base do $\mathbb{R}^3$.

2.33. Considere o subespaço vetorial:

$$W = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3; x = y \text{ e } z = 0\}.$$

$W = \{(x,x,0);\ x \in \mathbb{R}\}$

Temos $(x,x,0) = x(1,1,0)$

$\therefore\ W = \{x(1,1,0);\ x \in \mathbb{R}\}$

W é gerado pelo vetor $(1,1,0)$

a) $(1,1,0)$ é L.I.?

$a(1,1,0) = (0,0,0)$

$a = 0 \Rightarrow$ soluçã única.

$\therefore$ $(1,1,0)$ é L.I.

b) se $a = x$; $(1,1,0)$ gera W.

A é base de W com apenas um vetor.

$\dim W = 1$.

2.34. Seja U = {$(x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4$; $2x + y = 0$ e $z = 2t$}. Encontre uma base e a dimensão de U.

$U = \{(x, -x, 2t, t);\ x, t \in \mathbb{R}\}$

Podemos fazer direto:

$(x, -x, 2t, t) = x(1, -1, 0, 0) + t(0, 0, 2, 1)$

ou seja, todos os elementos de U podem ser gerados pelos vetores $(1, -1, 0, 0)$ e $(0, 0, 2, 1)$

Falta mostrar que estes dois vetores são L.I.

$a(1, -1, 0, 0) + b(0, 0, 2, 1) = (0, 0, 0, 0)$

$a = 0 \quad -a = 0 \quad 2b = 0 \quad b = 0$

$ a = 0 \quad\;\; b = 0$

$\therefore (a, b) = (0, 0)$ é a única solução.

$\therefore (1, -1, 0, 0)$ e $(0, 0, 2, 1)$ são L.I.

Base de U: $\{(1, -1, 0, 0), (0, 0, 2, 1)\}$

$\dim U = 2$

2.35. Seja o sistema homogêneo

$$\begin{cases} x - y + 4z = 0 \\ 2x + 4y - 6z = 0 \\ 6y - 14z = 0 \end{cases}$$

Encontre a dimensão e a base do espaço solução deste sistema.

Solução do sistema:

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 4 \\ 2 & 4 & -6 \\ 0 & 6 & -14 \end{pmatrix} \xrightarrow{L_2 = L_2 - 2L_1} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 4 \\ 0 & 6 & -14 \\ 0 & 6 & -14 \end{pmatrix} \xrightarrow[L_2 = \frac{1}{2} L_2]{L_3 = L_3 - L_2}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 4 \\ 0 & 3 & -7 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow{L_2 = L_2 + 3L_1} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 4 \\ 0 & 0 & 5 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow{L_2 = \frac{1}{5} L_2}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 4 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow{L_1 = L_1 - 4L_2} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

$x - y = 0$ e $z = 0$

$x = y$

Espaço vetorial solução do sistema:

$W = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 / x = y \wedge z = 0\}$

$W = \{(x, x, 0)\}$

$W = \{x(1,1,0);\ x \in \mathbb{R}\}$

$(1,1,0)$ é L.I?

Sim, $a(1,1,0) = (0,0,0) \Rightarrow a = 0$ (só)

Logo, W tem base $\beta = \{(1,1,0)\}$

e $\dim W = 1$

13) Sejam os vetores $u = (1, -2, 3)$ e $v = (3, 1, 2)$.

a) Determine $[u, v]$ (subespaço gerado por u e v).

b) O vetor $(-2, 5, -3) \in [u, v]$?

c) Exiba uma base para $[u, v]$. Qual é a dimensão?

d) $[u, v] = \mathbb{R}^3$? Por quê?

a)

$(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$

$(x, y, z) = a(1, -2, 3) + b(3, 1, 2)$

$$\begin{cases} -a + 3b = x \\ 2a + 1b = y \\ 3a + 2b = z \end{cases} \quad \left(\begin{array}{cc|c} -1 & 3 & x \\ 2 & 1 & y \\ 3 & 2 & z \end{array}\right) \xrightarrow[L_3 = L_3 + 3L_1]{L_1 = -L_1,\ L_2 = L_2 + 2L_1}$$

$$\left(\begin{array}{cc|c} 1 & -3 & (-x) \\ 0 & 7 & (2x+y) \\ 0 & 0 & (-x+y+z) \end{array}\right)$$

queremos que o sistema seja possível, então $-x+y+z=0$

$\therefore [u, v] = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 / -x+y+z=0\}$

b) $(-2, 5, -3) \in [u, v]$?

Basta verificar em $-x+y+z=0$

$-x+y+z =$
$-(-2)+(5)+(-3) =$
$+2+5-3 = 4 \neq 0.$

$\therefore (-2, 5, -3) \notin [u, v].$

c) Base p/ $[u, v]$ e dimensão:

$[u, v] = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 / -x+y+z=0\}$

$-x+y+z=0$

$x = y+z$

$\text{Dim}\,[u, v] = 2$; pois há duas variáveis livres.

$(x,y,z) = (y+z, y, z)$

ou

$(x,y,z) = (\lambda_1+\lambda_2, \lambda_1, \lambda_2)$; $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}$.

$(x,y,z) = (y+z, y, z)$

$= (y,y,0) + (z,0,z)$

$= y(1,1,0) + z(1,0,1)$

$(1,1,0)$ e $(1,0,1)$ é L.I.?

$a(1,1,0) + b(1,0,1) = (0,0,0)$

$a+b=0$ $\quad a=0 \quad b=0$

$a=-b$

$0=0$.

$\therefore$ é L.I.

CONCLUINDO.

$\dim [u,v] = 2$

$\beta[u,v] = \{(1,1,0), (1,0,1)\}$

d) $[u,v] = \mathbb{R}^3$??

Não! $\left.\begin{array}{l}\dim [u,v] = 2 \\ \dim \mathbb{R}^3 = 3\end{array}\right\} \therefore [u,v] \neq \mathbb{R}^3$

14) Determine uma base e a dimensão do subespaço vetorial seguinte:

$W = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3; x = -y \text{ e } z = 3y\}$

$w = \{(x, -x, -3x), x \in \mathbb{R}\}$ $\quad$ $x = -y$ $\quad$ $z = 3y$

$W = \{x(1, -1, -3); x \in \mathbb{R}\}$ $\quad$ $y = -x$ $\quad$ $z = -3x$

Dimensão 1, pois tem só um vetor gerado por uma única variavel livre.

$(1, -1, -3)$ é L.I, pois se

$a(1, -1, -3) = 0 \Rightarrow a = 0$ (somente)

$\therefore$ Base de W: $B = \{(1, -1, -3)\}$

$\text{Dim } W = 1.$

15) Encontre uma base e a dimensão para o espaço-solução do sistema homogêneo abaixo:

$$\begin{cases} x \quad\quad - 2z + t = 0 \\ -x \quad\quad + 2z \quad\quad = 0 \\ \quad\quad y + z \quad\quad = 0 \\ \quad\quad y + z \quad\quad = 0 \end{cases}$$

Resolver o S.L.

$$\begin{array}{c} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & -2 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \end{array}\right) \\ \begin{array}{ccccc} x & y & z & t & R \end{array} \end{array} \xrightarrow[L_4=L_4-L_3]{L_2=L_2+L_1} \begin{pmatrix} 1 & 0 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ \cancel{0} & \cancel{0} & \cancel{0} & \cancel{0} \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow{L_1=L_1-L_2} \begin{pmatrix} 1 & 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow{L_2 \leftrightarrow L_3}$$

$$\begin{array}{c} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & -2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \\ \begin{array}{ccccc} x & y & z & t & R \end{array} \end{array} \Longrightarrow t=0$$

$x-2z=0$

$x=2z$

$y+z=0$

$y=-z.$

se $z = \lambda$.

então, $(x, y, z, t) = (2\lambda, -\lambda, \lambda, 0)$ que depende de só uma variável λ, Logo $\dim S = 1$.

Ainda, $(2\lambda, -\lambda, \lambda, 0) = \lambda(2, -1, 1, 0)$

verificar se $(2, -1, 1, 0)$ é L.I.

$a(2, -1, 1, 0) = (0, 0, 0, 0)$

$a = 0. \Rightarrow$ L.I.

$\therefore$ O sistema linear S.

tem base: $B = \{(2, -1, 1, 0)\}$

e $\mathrm{Dim}(S) = 1$.