我们以 tadpole 额外顶点图为例，计算中实际要计算的积分是

$$A=\frac{C_{\phi\phi}}{f^2}\int\frac{d^4k}{(2\pi)^4}\mathrm{Tr}[2\not{k}\frac{(2k+q)^+}{2kq+q^2}(\not{p}+M_N)\gamma^+(\not{p}'+M_N)]\tilde{F}(k)\frac{i}{D_\phi(k)}[\tilde{F}(k+q)-\tilde{F}(k)]\delta(y+\xi-\frac{k^+}{P^+})$$

那么对于这个积分，我们将分子和分母做化简并变形到这样的形式：

$$\int\frac{d^4k}{(2\pi)^4}\frac{a_1(k^-)^2+a_2k^-+a_3}{D_\phi(k)D_\Lambda^4(k)D_\Lambda^2(k+q)}\delta(y+\xi-\frac{k^+}{P^+})$$

判断是否存在 δ 项的方式是取 $k^+=0$，比较分子分母中 k^- 的幂次。那么对上面的积分取 $k^+=0$，分母上 $D_\phi(k)D_\Lambda^4(k)$ 都不再含有 k^-，只有 $D_\Lambda^2(k+q)$ 会贡献一个平方项，同时分子中也存在平方项（这里不详细给出分子的形式），所以判断存在 δ 项。但是，δ 项还有一个要求就是在 $k^+\not=0$ 的时候积分为 0，而由于在 $k^+\not=0$ 的时候，积分必然能够使用留数定理计算，这则要求分母的奇点必须在 x 轴的同一侧。具体来看分母上的奇点，$D_\phi(k)D_\Lambda^4(k)$ 的奇点的虚数部分是 $\frac{-i\epsilon}{k^+}$，由于 $k^+>0$ 所以奇点必然在 x 轴下方，而 $D_\Lambda^2(k+q)$ 的奇点虚数部分则是 $\frac{-i\epsilon}{k^++q^+}$，由于 $k^+=(y+\xi)P^+,q^+=-2\xi P^+$，所以会在 $y<\xi$ 时奇点在 x 轴上方，导致积分不是恒定为 0。这样就能判断，这个积分是 $\delta+normal$ 的形式。

那么在分离 δ 项的时候就要注意上面两方面的要求。首先对于正常积分部分，需要满足的就是保证在 $k^+=0$ 的时候分子上不存在 k^{-2}，积分变为

$$\int\frac{d^4k}{(2\pi)^4}(\frac{a_1(k^-)^2}{D_\phi(k)D_\Lambda^4(k)D_\Lambda^2(k+q)}+\frac{a_2k^-+a_3}{D_\phi(k)D_\Lambda^4(k)D_\Lambda^2(k+q)})\delta(y+\xi-\frac{k^+}{P^+})$$

这里后半部分是肯定能够使用留数定理计算的正常积分，需要处理的是前半部分。

$$\int\frac{d^4k}{(2\pi)^4}\frac{a_1(k^-)^2}{D_\phi(k)D_\Lambda^4(k)D_\Lambda^2(k+q)}\delta(y+\xi-\frac{k^+}{P^+})$$

首先，考虑到分子上只有 $(k^-)^2$，我们最好不要添加更高的幂次，所以 $D_\Lambda(k)$ 一定会保存下来，最多幂次降低。而考虑到上面所说的奇点问题，在 $0<k^+<-q^+$ 的时候，对 a_1 这部分 $D_\Lambda^2(k+q)$ 仍然贡献一个和 $D_\phi(k)D_\Lambda^4(k)$ 不同侧的奇点，积分不恒为 0。所以我们在分母上因为不添加高幂次必然保存 $D_\Lambda(k)$，那么如果也保留 $D_\Lambda^2(k+q)$，就不可能得到一个在 $k^+\not=0$ 的时候恒为 0 的积分。所以这里在约化并分离得到 δ term 的时候就必须把 $D_\Lambda^2(k+q)$ 完全消去。这部分是我所说的，必须做这样的约化的意思。

但是在分子上，我们能做不同的分离方案。例如，现在上面的公式中表达的意思是把 $(k^-)^2$ 完全放到 δ 函数中去，但是实际上，我们能对 $a_1(k^-)^2$ 做这样的变形，

$$a_1(k^-)^2 = c_1 k^+ (k^-)^2 + c_2 (k^-)^2$$

其中 c_1 和 c_2 两个系数都不含 k^+，那么积分变为

$$\int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} \left(\frac{c_2(k^-)^2}{D_\phi(k) D_\Lambda^4(k) D_\Lambda^2(k+q)} + \frac{c_1 k^+ (k^-)^2 + a_2 k^- + a_3}{D_\phi(k) D_\Lambda^4(k) D_\Lambda^2(k+q)} \right) \delta(y + \xi - \frac{k^+}{P^+})$$

这样显然是一个不同的分离方式，第二项在 $k^+ = 0$ 的时候也保证了分子上不存在 $(k^-)^2$，所以也是一个正常积分。这个分离方式，经过验证和上面的方案计算得到的 splitting function 结果是一致的。