1 δ 项的理论和分析

首先存在 δ 项的原因是，改变坐标空间之后积分的结果应该是不变的，对于协变坐标的计算就是一般的圈积分，当然可能有一些情况不那么通常和简单，而在光锥坐标下通常就是先对 k^- 使用留数定理然后对垂直分量和正分量分别做积分。但是根据种种实际计算，会发现这样的计算，光锥结果和协变结果并不能完全对应，例如 chueng 的文章。一般认为这样的差异来自于对 k^- 使用留数定理过程中，k^+ 作为参数在某些特定取值下会带来发散，例如

$$\int dk^- \frac{k^-}{D_\phi(k)D_\Lambda^4(k)D_B(p_1-k)}$$

在 $k^+=0$ 时，积分变为

$$\int dk^- \frac{k^-}{D_\phi(k)D_\Lambda^4(k)D_B(p_1-k)} \stackrel{k^+=0}{\rightarrow} \int dk^- \frac{k^-}{(-(k^\perp)^2-m_\phi^2)(-(k^\perp)^2-\Lambda^2)^4(p_1^+(p_1^- - k^-)-(p_1^\perp - k^\perp)^2 - M_N^2)}$$

那么分子分母上都只有一个 k^-，这个积分显然是发散的了，如果忽略这个发散，积分结果就和协变的不一致。

对于这样的发散情况，我们选择使用一个 δ 函数来替换并计算它，主要原因是上面的积分，能够分解成

$$\int dk^- \frac{k^-}{D_\phi(k)D_\Lambda^4(k)D_B(p_1-k)} = \int dk^- \frac{1}{D_\phi(k)D_\Lambda^4(k)} + \int dk^- \frac{1}{D_\phi(k)D_\Lambda^4(k)D_B(p_1-k)}$$

其中后者不发散，而前者只在 $k^+=0$ 时发散，在 $k^+\neq 0$ 时恒为 0，所以认为可以用 δ 函数表示。

这里有一个细节问题之前有一定的误解，就是之前认为判断一个积分有没有 δ 项是通过比较分子分母在 $k^+=0$ 时 k^- 的幂次来确定，但是对于 $\xi=0$ 的介子彩虹图，图 a，这里分子在 $k^+=0$ 不含 k^-，分母有一个，理论上没有 δ，但是计算上又不能对上协变结果，其原因在于分子上存在这样的形式

$$\int dk^- \frac{k^+ * p_2.k * p_1.k}{D_\phi(k)D_\Lambda^4(k)D_B(p_1-k)}$$

显然分子 $k^+=0$ 不含 k^-，但是考虑 $p_1.k$ 与分母消去，分子上的 $p_2.k$ 相当于和 k^+ 组合变成 $\int dk^- \frac{k^+k^-}{D_\phi(k)D_\Lambda^4(k)}$，这个显然是下面的计算结果，所以在判断 δ 项的时候不能那么直接了，还是要使用消去的方式来看并且注意

核心一定是和协变结果的比较。其次是端点奇异性的发散是高阶发散，例如线性发散，而一般的圈积分计算中可能会出现对数发散，我们忽略对数发散，只看线性发散以上的发散项从而可以不考虑分离之后的 $\int \frac{1}{D_\phi(k)D_\Lambda^4(k)D_B(p-k)}$ 在 $k^+=0$ 为 $\int \frac{1}{k^-}$ 的对数发散。

2 δ 项计算的技巧

目前的计算中由于分离 的算法相当实际，目标就是分离形式为 $\frac{1}{D(k)D(k)}$ 的 ，因为 要求留数为 0，那就限定基本就是这个形式。而对它的计算则是：

首先把 k 的四维积分只考虑 k^- 部分，也就是

$$\int dk^- \frac{1}{D_\phi^a(k)D_\Lambda^b(k)}$$

使用费曼参数化，

$$\frac{1}{A^aB^b} = \frac{\Gamma(a+b)}{\Gamma(a)\Gamma(b)}\int_0^1 dx \frac{x^{a-1}(1-x)^{b-1}}{(xA+(1-x)B)^{a+b}}$$

so

$$\begin{aligned}\int dk^- \frac{1}{D_\phi^a(k)D_\Lambda^b(k)} &= \frac{\Gamma(a+b)}{\Gamma(a)\Gamma(b)}\int dk^- \int_0^1 dx \frac{x^{a-1}(1-x)^{b-1}}{(xD_\phi+(1-x)D_\Lambda)^{a+b}} \\ &= \frac{\Gamma(a+b)}{\Gamma(a)\Gamma(b)}\int dk^- \int_0^1 dx \frac{x^{a-1}(1-x)^{b-1}}{(k^2-\Omega+i\epsilon)^{a+b}}\end{aligned}$$

where $\Omega = xm_\phi^2+(1-x)\Lambda^2$ and notice this ask the $D_\Lambda = k^2-\Lambda^2$

而积分中的这个高阶分数 $\frac{1}{(k^2-\Omega+i\epsilon)^{a+b}}$ 可以被处理为Ω 的函数，通过对 Ω 求导来降低分母的幂次

$$\frac{1}{(k^2-\Omega+i\epsilon)^{a+b}} = \frac{1}{(a+b-1)!}\frac{\partial^{a+b-2}}{\partial\Omega^{a+b-2}}\frac{1}{(k^2-\Omega)^2}$$

也就是对传播子的积分变成了这样的形式：

$$\begin{aligned}&\int dk^- \frac{1}{D_\phi^a(k)D_\Lambda^b(k)} \\ &\quad= \frac{\Gamma(a+b)}{\Gamma(a)\Gamma(b)}\int dk^- \int_0^1 dx \frac{1}{(a+b-1)!}\frac{\partial^{a+b-2}}{\partial\Omega^{a+b-2}}\frac{x^{a-1}(1-x)^{b-1}}{(k^2-\Omega)^2} \\ &= \frac{1}{(a+b-1)!}\frac{\Gamma(a+b)}{\Gamma(a)\Gamma(b)}\int_0^1 dx x^{a-1}(1-x)^{b-1}\frac{\partial^{a+b-2}}{\partial\Omega^{a+b-2}}\int dk^- \frac{1}{(k^2-\Omega)^2}\end{aligned}$$

又有，

$$\int dk^- \frac{1}{(k^2-\Omega)^2} = \frac{2\pi i}{k^{\perp^2}+\Omega}\delta(k^+)$$

这个公式的来历详细可以参见杨明炀师兄光锥坐标 gpdnote 中第三章 3.6 节对 k+ 积分结果的内容。大体上的意思是，利用其他的那些计算发散项的方式，例如 chueng 文章中的内容，结合一点对 delta 函数的合理猜测来给出这个公式

so the integral now is

$$\int dk^- \frac{1}{D_\phi^a(k)D_\Lambda^b(k)} = \frac{1}{(a+b-1)!}\frac{\Gamma(a+b)}{\Gamma(a)\Gamma(b)}\int_0^1 dx x^{a-1}(1-x)^{b-1}\frac{\partial^{a+b-2}}{\partial\Omega^{a+b-2}}\frac{2\pi i}{k^{\perp^2}+\Omega}\delta(k^+)$$

在十重态计算中，δ 项计算出来的形式并不是严格的上面的形式，分子上会出现 k^- 的多项式，这个的处理是这样，何方成师兄的方式是：

费曼参数化是不考虑分子的，所以还是可以做到这里，

$$\int dk^- \frac{(k^-)^n}{D_\phi^a(k)D_\Lambda^b(k)} = \frac{\Gamma(a+b)}{\Gamma(a)\Gamma(b)}\int dk^-(k^-)^n\int_0^1 dx\frac{x^{a-1}(1-x)^{b-1}}{(k^2-\Omega+i\epsilon)^{a+b}}$$

而这样则可以把 $(k^-)^n$ 处理为对分母上的 k^+ 求导

$$\frac{\Gamma(a+b)}{\Gamma(a)\Gamma(b)}\int dk^-(k^-)^n\int_0^1 dx\frac{x^{a-1}(1-x)^{b-1}}{(k^2-\Omega+i\epsilon)^{a+b}} = \frac{\Gamma(a+b)}{\Gamma(a)\Gamma(b)}\int_0^1 dx x^{a-1}(1-x)^{b-1}\int dk^-\frac{(k^-)^n}{(k^2-\Omega+i\epsilon)^{a+b}}$$

而

$$\int dk^-\frac{(k^-)^n}{(k^2-\Omega+i\epsilon)^{a+b}} = A*\int dk^-\frac{\partial^n}{\partial k^{+n}}\frac{1}{(k^2-\Omega+i\epsilon)^{a+b-n}}$$

A 是求导之后会出现一个常系数。然后偏导可以提出去到对 k^+ 积分那里，所以内部相当于只有幂次变成 a+b-n 了，还是能做之前的计算。之后

需要注意的就是

$$
\begin{aligned}
&\int dk^+ dk^- \frac{(k^-)^n}{D^a_\phi(k) D^b_\Lambda(k)} = \\
&\int dk^+ \frac{\Gamma(a+b)}{\Gamma(a)\Gamma(b)} \int_0^1 dx x^{a-1}(1-x)^{b-1} \int dk^- \frac{\partial^n}{\partial k^{+n}} \frac{1}{(k^2-\Omega+i\epsilon)^{a+b-n}} = \\
&\int dk^+ \frac{\partial^n}{\partial k^{+n}} \frac{\Gamma(a+b)}{\Gamma(a)\Gamma(b)} \int_0^1 dx x^{a-1}(1-x)^{b-1} \frac{\partial^{a+b-2-n}}{\partial \Omega^{a+b-2-n}} \int dk^- \frac{1}{(k^2-\Omega)^2} \\
&\qquad = \int dk^+ \frac{\partial^n}{\partial k^{+n}} \delta(k^+)
\end{aligned}
$$

在最后一行忽略了许多 k^+ 无关的系数，所以这时会有一个对 函数求导的问题，这里使用了一个近似，注意这里存在一个负号

$$
\frac{d}{dx}\delta(x) = -\frac{\delta(x)}{x}
$$

原理是对 函数可以处理为函数极限这样，然后就能近似成这个。而严格定义是泛函的，例如，一阶的时候是

$$
\int dx f(x)\delta'(x) = -f'(0)
$$

回到计算上，那么最后的结果就是会引入一个 $\frac{\delta(x)}{x}$，这里根据最后与协变积分的对比以及理论上确实存在的近似，选择了这样的处理

$$
\frac{d}{dx}\delta(x) = -\frac{\delta(x)}{x}
$$

注意负号，同时这样会让更高阶的 k 也存在不为 0 的贡献，具体计算中出现的不多，但是注意高阶矩时候的影响。

实际计算中的时候，只算最低阶情况的话，分母的 k 不被消去的全是 0.

3 对 δ 项计算的验证

对于上面的计算，对那些分子上只有 1 不存在裸露的指标的项，可以在协变指标下进行计算来验证结果。毕竟出现 δ 项的本质原因就是光锥坐标下的计算和协变结果有差别。但是协变积分的计算并不能直接使用 mma 的积分程序计算，因为要做重整化的啊。所以实际上要使用圈积分的方式计算，目前就直接用 px 包的 loopintegrate 计算就好了，当然计算之后的两个结果不是直接相等，相差一个系数 $2\pi^2$，因为 loopintegrate 的结果相比实际的圈积分少一个 $\frac{1}{16\pi^2}$，而留数-delta 的计算中相比实际圈积分少了 $\frac{1}{2} * \frac{1}{(2\pi)^4}$

4 分离 δ

实际计算中最重要的其实是从整个积分中把需要作为 δ 项的贡献分离出来。首先，δ 项有两个方面的要求让它的形式基本固定为 $\frac{1}{D_\phi^a(k)D_\Lambda^b(k)}$，也就是分母上只会有动量为 k 的传播子，两个约束是：1、δ 项必须要留数为 0，也就是分母上的 pole 在一个半平面，而由于分子上的 k^- 幂次问题，是不能完全把 $D_\Lambda(k)$ 消去的，所以只能考虑消去 $D_B(p-k)$，2、δ 项要在 $k^+=0$ 发散所以分母上也是不能有 k^+k^- 之外的 k^- 于是只能是 $\frac{1}{D_\phi^a(k)D_\Lambda^b(k)}$。之后就是如何把这个分离出来，之前我的思路是简单的消去分子分母上的 k^+k^- 之外的 k^-，这个计算太过粗糙和笼统，并且无法正确处理 $\frac{(k^-)^n}{D_\phi^a(k)D_\Lambda^b(k)}$。现在还是使用了和之前师兄类似的办法。首先将积分中分子也变成传播子的形式然后做分子分母的消去之后对具体而简单的形式做进一步的分离。具体的参见程序，其中需要注意的有：1、分离时会手动的直接删去一些对 δ 没有贡献的项，比如不含 k^- 无法和分母相消的，2、对于垂直分量，在 $\frac{1}{D_\phi^a(k)D_\Lambda^b(k)}$ 中会因为分母上的垂直分量一定是偶数幂次从而把分子上的奇数幂次全部消去（奇函数积分 =0），但是要注意这个原理，因为 $\frac{1}{D_\phi(k+q)D_\Lambda^2(k)D_\Lambda^2(k+q)}$ 中分母上就不再能保持一定是偶数幂次了

5 计算中出现的其他形式 δ

如果需要计算 zero skewness 的结果，（一般用在计算 pdf 从而和实验对比），则会出现一些更复杂的 δ 项计算，主要是三项乃至四项的费曼参数化，所以在这里记录一下计算的过程和结果。

5.1 三项情况

5.1.1 费曼参数化

$$\frac{1}{A^aB^bC^c}=\int_0^1 dx_1dx_2dx_3\delta(x_1+x_2+x_3-1)\frac{\Gamma(a+b+c)}{\Gamma(a)\Gamma(b)\Gamma(c)}\frac{x_1^{a-1}x_2^{b-1}x_3^{c-1}}{(x_1A+x_2B+x_3C)^{a+b+c}}$$

其中，对 x 的积分处理为

$$\int_0^1 dx_1dx_2dx_3\delta(x_1+x_2+x_3)=\int_0^1 dx_1\int_0^{1-x_1}dx_2|(\text{同时将}x_3\text{替换为1-}x_1+x_2)$$

也就是将 x_3 积分等价位 δ 函数替换之后，对 x_1x_2 正常积分但是要额外注意满足替换 x_3 之后的约束，也就是 $1>1-x_1+x_2>0$，从而改变了 x_2 的积分范围。

5.1.2 一个例子

实际计算中只在 $\xi=0$ 的时候出现三项以上的 δ，所以这里的 $k+q$ 都不能提供额外的 k^-，相当于一个 k

$$\begin{aligned}
&\int \frac{1}{D_\phi(k+q)D_\Lambda^2(k)D_\Lambda^2(k+q)}dk^- \\
&= \int_0^1 dxdydz\delta(x+y+z-1)\frac{\Gamma(5)}{\Gamma(1)\Gamma(2)\Gamma(2)}\frac{x^0yz}{(xD_\phi(k+q)+yD_\Lambda(k)+zD_\Lambda(k+q))^5} \\
&\qquad = \int_0^1 dxdydz\delta(x+y+z-1)\frac{\Gamma(5)}{\Gamma(1)\Gamma(2)\Gamma(2)}\frac{yz}{(k^2-\Omega+i\epsilon)^5}
\end{aligned}$$

$$\Omega = x(q^{\perp 2}+2k^\perp.q^\perp+m_\phi^2)+y\Lambda^2+z(q^{\perp 2}+2k^\perp.q^\perp+\Lambda^2)$$

5.2 四项情况

5.2.1 费曼参数化

$$\frac{1}{A^aB^bC^cD^d} = \int_0^1 dx_1dx_2dx_3dx_4\delta(x_1+x_2+x_3+x_4-1)\frac{\Gamma(a+b+c+d)}{\Gamma(a)\Gamma(b)\Gamma(c)\Gamma(d)}\frac{x_1^{a-1}x_2^{b-1}x_3^{c-1}x_4^{d-1}}{(x_1A+x_2B+x_3C+x_4D)^{a+b+c+d}}$$

4 个 x 的积分：和三个的类似，区别是替换 x_4 之后，从 x_3 开始就要改变积分上下限了。

$$\int_0^1 dx_1dx_2dx_3dx_4\delta(x_1+x_2+x_3+x_4-1) = \int_0^1 dx_1\int_0^{1-x_1}dx_2\int_0^{1-x_1-x_2}dx_3$$

5.2.2 例子

$$\begin{aligned}
&\int \frac{1}{D_\phi(k)D_\phi(k+q)D_\Lambda^2(k)D_\Lambda^2(k+q)}dk^- = \int_0^1 dx_1dx_2dx_3dx_4\delta(x_1+x_2+x_3+x_4-1) \\
&\times\frac{\Gamma(6)}{\Gamma(1)\Gamma(1)\Gamma(2)\Gamma(2)}\frac{x_3x_4}{(x_1D_\phi(k)+x_2D_\phi(k+q)+x_3D_\Lambda(k)+x_4D_\Lambda(k+q))^6} \\
&\quad= \int_0^1 dx_1dx_2dx_3dx_4\delta(x_1+x_2+x_3+x_4-1)\frac{\Gamma(6)}{\Gamma(1)\Gamma(1)\Gamma(2)\Gamma(2)} \\
&\quad\times\frac{x_3x_4}{(k^2-(x_2+x_4)(\overrightarrow{q}^{\perp 2}+\overrightarrow{k}^{\perp}.\overrightarrow{q}^{\perp})-(x_1+x_2)m_\phi^2-(x_3+x_4)\Lambda^2+i\epsilon)^6} \\
&\quad= \int_0^1 dx_1dx_2dx_3dx_4\delta(x_1+x_2+x_3+x_4-1)\frac{\Gamma(6)}{\Gamma(1)\Gamma(1)\Gamma(2)\Gamma(2)} \\
&\qquad\times\frac{x_3x_4}{(k^2-\Omega+i\epsilon)^6}
\end{aligned}$$

$$\Omega = (x_2+x_4)(\overrightarrow{q}^{\perp 2}+\overrightarrow{k}^{\perp}.\overrightarrow{q}^{\perp})+(x_1+x_2)m_\phi^2+(x_3+x_4)\Lambda^2$$

6 普适形式的费曼参数化

$$\frac{1}{A_1^{m_1}...A_n^{m_n}} = \int_0^1 dx_1...dx_n\delta(\Sigma x_i-1)\frac{\Gamma(m_1+...+m_n)}{\Gamma(m_1)*...*\Gamma(m_n)}\frac{\Pi x_i^{m_i-1}}{(\Sigma x_iA_i)^{\Sigma m_i}}$$

7 约化

order1 和 order2 的如图，图上有挺多细节写错了，order1 具体为：首先展开点乘并舍弃不包含 k^- 的部分因为不能和分母消去，一定不能给出 delta 项形式，之后进行等价变换把 q 变为外腿动量 p，主要和分母的动量对应

$$\frac{k.q}{D_B(p_1-k)} = \frac{\frac{1}{2}k^-q^+}{D_B(p_1-k)} = \frac{k^-p_1^+}{D_B(p_1-k)}\frac{-\xi}{1+\xi}$$

然后分子上的用传播子替换掉，许多项都不含 delta 项贡献所以可以加

减来补足形式。

$$\frac{k^-p_1^+}{D_B(p_1-k)}\frac{-\xi}{1+\xi}=\frac{\xi}{1+\xi}\frac{-2k.p_1}{D_B(p_1-k)}=\frac{\xi}{1+\xi}\frac{D_B(p_1-k)-k^2+M^2-p_1^2}{D_B(p_1-k)}$$
$$=\frac{\xi}{1+\xi}\frac{D_B(p_1-k)}{D_B(p_1-k)}$$

order2 的细节如下，首先也是展开点乘

$$\frac{(k.q)^2}{D_B}=\frac{(\frac{1}{2}k^-q^+)^2}{D_B}=\frac{(k^-p_1^+)^2}{D_B}(\frac{\xi}{1+\xi})^2$$

然后分子的处理是首先加减一个传播子：

$$\frac{(k^-p_1^+)^2}{D_B}(\frac{\xi}{1+\xi})^2=\frac{(D_B-(D_B+k^-p_1^+))^2}{D_B}(\frac{\xi}{1+\xi})^2$$

然后展开平方：

$$\frac{(D_B-(D_B+k^-p_1^+))^2}{D_B}(\frac{\xi}{1+\xi})^2$$
$$=\frac{D_B^2+(D_B+k^-p_1^+)^2-2D_B(D_B+k^-p_1^+)}{D_B}(\frac{\xi}{1+\xi})^2$$

其中 $(D_B+k^-p_1^+)^2$ 不含 k^- 非 k^+pole，因此不贡献 delta，所以可以舍掉，上式变为

$$\frac{D_B^2+(D_B+k^-p_1^+)^2-2D_B(D_B+k^-p_1^+)}{D_B}(\frac{\xi}{1+\xi})^2$$
$$=\frac{D_B^2-2D_B(D_B+k^-p_1^+)}{D_B}(\frac{\xi}{1+\xi})^2$$
$$=(D_B-2(D_B+k^-p_1^+))(\frac{\xi}{1+\xi})^2$$
$$=(-D_B-2k^-p_1^+)(\frac{\xi}{1+\xi})^2$$

最后和程序里的还差一个 $-2k^-p_1^+(\frac{\xi}{1+\xi})^2$ 这一项没有额外的 k^+ 的时候是 $\frac{k^-}{D_\phi D_\Lambda^4}$ 的形式，所以在这里取 0 舍掉了，在大部分图的计算中可以这样做，但是在有的图里确实得补上。

ord3 的计算是，首先展开 3 次幂，其中舍去了不含 k^- 和 k^- 一次幂的

没有贡献的项：

$$\begin{aligned}\frac{(k.q)^3}{D_B(p_1-k)} &= \frac{(\frac{1}{2}(k^+q^-+k^-q^+)-k^\perp.q^\perp)^3}{D_B} \\ &= \frac{1}{D_B}((\frac{1}{2}k^-q^+)^3+(\frac{1}{2}k^-q^+)^2(\frac{3}{2}k^+q^--3k^\perp.q^\perp) \\ &+(\frac{1}{2}k^-q^+)(3(k^\perp.q^\perp)^2)\end{aligned}$$

一次幂部分和前面一次幂形式完全一样，只是要多一个垂直分量。

然后 3 次幂是：

$$\begin{aligned}\frac{1}{D_B}(\frac{1}{2}k^-q^+)^3 &= (\frac{-\xi}{1+\xi})^3\frac{(k^-p_1^+)^3}{D_B} \\ &= (\frac{\xi}{1+\xi})^3\frac{(D_B-(D_B+k^-p_1^+))^3}{D_B} \\ &= (\frac{\xi}{1+\xi})^3(\frac{D_B^3-3D_B^2(D_B+k^-p_1^+)}{D_B} \\ &+\frac{3D_B(D_B+k^-p_1^+)^2-(D_B+k^-p_1^+)^3}{D_B}) \\ &= (\frac{\xi}{1+\xi})^3(D_B^2-3D_B(D_B+k^-p_1^+)+3(D_B+k^-p_1^+)^2) \\ &= (\frac{\xi}{1+\xi})^3(D_B^2+3(k^-p_1^+)^2+3D_B*k^-p_1^+)\end{aligned}$$

之后，由于 $(k^-p_1^+)^2$ 在最低阶计算中不会有非零贡献因此舍去了，高阶计算中可能有贡献。

2 次幂则是：

$$\frac{1}{D_B}(\frac{1}{2}k^-q^+)^2(\frac{3}{2}k^+q^--3k^\perp.q^\perp)=3(\frac{\xi}{1+\xi})^2\frac{1}{D_B}(k^-p_1^+)^2(\frac{1}{2}k^+q^--k^\perp.q^\perp)$$

其中 k^+ 部分是：

$$\begin{aligned}\frac{1}{D_B}(k^-p_1^+)^2\frac{1}{2}k^+q^- &= \frac{k^-p_1^+}{D_B}*\frac{1}{2}k^-p_1^+k^+q^- \\ &= -\frac{1}{2}k^-p_1^+k^+q^-\end{aligned}$$

$k^\perp$ 部分则是：

$$\begin{aligned}\frac{1}{D_B}(k^-p_1^+)^2k^\perp.q^\perp &= \frac{(D_B-(D_B+k^-p_1^+))^2}{D_B}k^\perp.q^\perp \\ &= (-D_B-2k^-p_1^+)k^\perp.q^\perp\end{aligned}$$

其中 $2k^-p_1^+ * k^\perp.q^\perp$ 由于垂直分量会使得 项为 0，舍去。

$$\begin{aligned}
\frac{1}{D_B}(k^-p_1^+)^2k^\perp.q^\perp &= -D_B * k^\perp.q^\perp \\
&= -(p_1^2 + k^2 - 2p_1.k - M^2)k^\perp.q^\perp \\
&= 2p_1.k * k^\perp.q^\perp \\
&= -2k^\perp.p_1^\perp * k^\perp.q^\perp
\end{aligned}$$

而动量之间存在关系 $p_1^\perp = -\frac{1}{2}q^\perp$

$$\frac{k\,.\,q}{D_n(p-k)D_\Lambda^4(k)} = \frac{k^-q^+}{D_n(p-k)D(k)} = \frac{k^-p^+}{D_n(p-k)D(k)}\frac{\xi}{1+\xi} = \frac{D_n(p-k)-a}{D_n(p-k)D(k)}\frac{\xi}{1+\xi} = \frac{1}{D(k)}\frac{\xi}{1+\xi}$$

$$\frac{(k\,.\,q)^2}{D_n(p-k)D_\Lambda^4(k)} = \frac{(k^-q^+)^2}{D_n(p-k)D(k)} = \frac{(k^-p^+)^2}{D_n(p-k)D(k)}(\frac{\xi}{1+\xi})^2 = \frac{(D_n(p-k)-(D_n(p-k)-p^+k^-))^2}{D_n(p-k)D(k)}(\frac{\xi}{1+\xi})^2 = \frac{D_n(p-k)^2-2D_n(p-k)(D_n(p-k))}{D_n(p-k)D(k)}(\frac{\xi}{1+\xi})^2 = -\frac{D_n(p-k)}{D(k)}(\frac{\xi}{1+\xi})^2$$

图 1: