对于广义部分子分布的高阶梅林矩，从算符层面上可以给出其分解为洛伦兹标量的形式，即为 GPD 的多项式展开，例如非极化的广义部分子分布的定义是：

$$
\begin{aligned}
&\frac{1}{2}\int\frac{dz^-}{2\pi}e^{ixP^+z^-}<p'|\bar{q}(-\frac{1}{2}z)\gamma^+q(\frac{1}{2}z)|p> \\
&\qquad=\frac{1}{2P^+}[H\bar{u}(p')\gamma^\mu u(p)+E\bar{u}(p')\frac{i\sigma^{\mu\alpha}q_\alpha}{2m}u(p)]
\end{aligned}
$$

算符形式的 n 阶梅林矩为：

$$
\begin{aligned}
&(P^+)^{n+1}\int dxx^n\int\frac{dz^-}{2\pi}e^{ixP^+z^-}[\bar{q}(-\frac{1}{2}z)\gamma^+q(\frac{1}{2}z)]_{z^+=0,z=0} \\
&\qquad=\bar{q}(0)\gamma^+(i\overleftrightarrow{\partial}^+)^nq(0)
\end{aligned}
$$

第二行的算符能够分解为如下的形式，其中省略了一些结构仅展示形式

$$
\begin{aligned}
<p'|\bar{q}(0)\gamma^+(i\overleftrightarrow{\partial}^+)^nq(0)|p>=&\ \bar{u}(p')\gamma^+u(p)\sum_i A_i(t) \\
&+\bar{u}(p')\frac{i\sigma^{+\alpha}q_\alpha}{2m}u(p)\sum_i B_i(t) \\
&+\frac{q^+}{m}\bar{u}(p')u(p)\mathrm{mod}(n,2)C_{n+1}(t)
\end{aligned}
\tag{1}
$$

对应到 GPD 函数即 H,E 中，就会得到常用的多项式展开

$$
\begin{aligned}
\int dxx^nH&=\sum_{i,even}(2\xi)^iA_i(t)+\mathrm{mod}(n,2)(2\xi)^{n+1}C_{n+1}(t) \\
\int dxx^nE&=\sum_{i,even}(2\xi)^iB_i(t)-\mathrm{mod}(n,2)(2\xi)^{n+1}C_{n+1}(t)
\end{aligned}
$$

因此我们计算中出现的广义部分子分布必须能够给出 C 项。而作为输入的 GPD，是在 double distribution representation 下构造的，double distribution representation 是光锥算符的矩阵元的一种参数化表象，对于算符 $<p'|\bar{q}(-\frac{1}{2}z)\not{z}q(\frac{1}{2}z)|p>$double distribution representation 下，以 Pz,qz，即平均动量与动量迁移在 z 方向的投影为自由变量，其参数化结果为：

$$
\begin{aligned}
<p'|\bar{q}(-\frac{1}{2}z)\not{z}q(\frac{1}{2}z)|p>_{z^2=0}=&\ \bar{u}(p')\not{z}u(p)\int d\beta d\alpha e^{-i\beta(Pz)+i\alpha\frac{qz}{2}}f(\beta,\alpha,t) \\
&+\bar{u}(p')\frac{i\sigma^{\mu\alpha}z_\mu q_\alpha}{2m}u(p)\int d\beta d\alpha e^{-i\beta(Pz)+i\alpha\frac{qz}{2}}k(\beta,\alpha,t) \\
&-\bar{u}(p')\frac{qz}{2m}u(p)\int d\alpha e^{i\alpha\frac{qz}{2}}D(\alpha,t)
\end{aligned}
\tag{2}
$$

将上式算符形式变为 GPD 定义式可以将 GPD 和 double distribution representation 的参数化关联起来：

$$H(x,\xi,t)=\int d\beta d\alpha\,\delta(x-\beta-\xi\alpha)\,f(\beta,\alpha,t)+sgn(\xi)D\Big(\frac{x}{\xi},t\Big)$$

在 double distribution representation 下的可以计算等式 1所定义的 n 阶矩，

$$\begin{aligned}\int dxx^n<p'|\bar{q}(-\frac{1}{2}z)\gamma^+q(\frac{1}{2}z)|p>=&\bar{u}(p')\gamma^+u(p)\int dxx^n\int d\beta d\alpha\,\delta(x-\beta-\xi\alpha)\,f(\beta,\alpha,t)\\&+\bar{u}(p')\frac{i\sigma^{+\alpha}q_\alpha}{2m}u(p)\int dxx^n\int d\beta d\alpha\,\delta(x-\beta-\xi\alpha)k(\beta,\alpha,t)\\&-\bar{u}(p')\frac{q^+}{2m}u(p)\int dxx^nD\Big(\frac{x}{\xi},t\Big)\end{aligned}\qquad(3)$$

从等式 3中可以看到 $f(\beta,\alpha,t)$ 与 Dterm 的 n 阶矩分别对应 1中的 $\sum_i A_i(t)$ 与 $C_{n+1}(t)$ 项，如果只考虑 $f(\beta,\alpha,t)$ 构造的 GPD，高阶矩计算中是无法得到 $C_{n+1}(t)$ 项的，证明如下

$$\begin{aligned}\int dxx^n\int d\beta d\alpha\,\delta(x-\beta-\xi\alpha)\,f(\beta,\alpha,t)&=\int d\beta d\alpha f(\beta,\alpha,t)\int dxx^n\delta(x-\beta-\xi\alpha)\\&=\int d\beta d\alpha\;(\beta+\xi\alpha)^nf(\beta,\alpha,t)\end{aligned}$$

显然其中 ξ 的幂次最高只有 n 次，而 $C_{n+1}(t)$ 项是 n+1 次幂，因此我们必须引入 Dterm 来满足 GPD 的多项式展开性质

对于上式中的 $f(\beta,\alpha,t)$，对应于粒子的 PDF，可以利用 PDF 来构造，以介子为例：

$$H^q_\pi(x,\xi,t)=\int_{-1}^{1}d\beta\int_{-1+|\beta|}^{1-|\beta|}d\alpha\,\delta(x-\beta-\xi\alpha)\,h_b(\beta,\alpha)\,H_{q/\pi}(\beta,0,t)$$

在考虑了 Dterm 之后，输入的 GDP 的形式变为：

$$H^q_\pi(x,\xi,t)=\int_{-1}^{1}d\beta\int_{-1+|\beta|}^{1-|\beta|}d\alpha\,\delta(x-\beta-\xi\alpha)\,h_b(\beta,\alpha)\,H_{q/\pi}(\beta,0,t)+\frac{\xi}{|\xi|}D^q_\pi\Big(\frac{x}{\xi},t\Big)\,\theta(\xi-|x|)$$

其中，Dterm 具体的形式为，例如 π 介子 GPD 输入中：

$$D^q_\pi(z,t)=\frac{15}{4}z(1-z^2)\,D^q_\pi(t),$$

这样选取的原因是 Dterm 满足：

1、对于 t，Dterm 对应于引力形状因子，选取格点上的计算结果 $D_\pi^q(t)$ 作为输入

2、对于 x，Dterm 应该是一个奇函数，并且应该在 $x=\pm\xi$ 的端点处为 0，因此选择了一个此条件下最简单的函数描述 x 依赖

3、系数是归一化而产生的。

而极化的情况下，算符的展开不会给出非极化中的 C 项，因此 $\tilde{H,}\tilde{E}$ 的多项式展开没有 D-term，也就是满足

$$\int dx x^n \tilde{H} = \sum_{i,even}(2\xi)^i \tilde{A}_i(t)$$
$$\int dx x^n \tilde{E} = \sum_{i,even}(2\xi)^i \tilde{B}_i(t)$$

在极化的计算中，以第一阶的梅林矩为例，极化的 GPD 满足

$$\int dx \tilde{H} = \tilde{A}_i(t)$$

而非极化的为

$$\int dx H = A_i(t) + (2\xi)^2 C_2(t)$$

卷积公式计算极化 GPD，$\tilde{H}$，如果使用非极化作为输入，记为 H_{in}，那么一阶矩根据卷积公式可以分解为输入与分裂函数：

$$\begin{aligned}\int_{-\xi}^{1} x\tilde{H}(x,\xi,t)dx &= \int_{-\xi}^{1} d\bar{y}\bar{y}f(\bar{y},\xi,t)\int_{-\frac{\xi}{\bar{y}}}^{1} dz z H_{in}(z,\frac{\xi}{\bar{y}},t)\\ &= \int_{-\xi}^{1} d\bar{y}\bar{y}f(\bar{y},\xi,t)(A_i(t)+(2\frac{\xi}{\bar{y}})^2 C_2(t))\end{aligned}$$

需要证明的是卷积计算得到的极化 GPD 一阶矩中没有 ξ 依赖项，但是现在没有办法消去由于 $(2\frac{\xi}{\bar{y}})^2 C_2(t)$ 引入的 ξ 依赖。

对于非极化情况下的 n 阶矩计算，根据卷积公式，积分可以写为：

$$
\begin{aligned}
\int_{-\xi}^{\xi} x^n H^u(x,\xi,t)dx &= \int_{-\xi}^{\xi} d\bar{y}\frac{1}{\bar{y}}f(\bar{y},\xi,t)\xi^{n+1}\int_0^1 d\eta(2\eta-1)^n\Phi(\eta,z,t) \\
&= \int_{-\xi}^{\xi} d\bar{y}\frac{1}{\bar{y}}f(\bar{y},\xi,t)\xi^{n+1}\left(\sum_{i=0,even}^{n} 2^i(\frac{\bar{y}}{\xi})^{n-i}A_i^{n+1}(t)+2^{n+1}C^{n+1}(t)\right) \\
&= \int_{-\xi}^{\xi} d\bar{y}\bar{y}^n f(\bar{y},\xi,t)\left(\sum_{i=0,even}^{n}(2\frac{\xi}{\bar{y}})^i A_i^{n+1}(t)+(2\frac{\xi}{\bar{y}})^{n+1}C^{n+1}(t)\right) \\
&= \int_{-\xi}^{\xi} d\bar{y}\bar{y}^n f(\bar{y},\xi,t)\int_{\frac{-\xi}{\bar{y}}}^{\frac{\xi}{\bar{y}}} d\frac{x}{\bar{y}}(\frac{x}{\bar{y}})^n H_{in}^u(\frac{x}{\bar{y}},\frac{\xi}{\bar{y}},t)
\end{aligned}
$$

由于我们不考虑海夸克输入，因此卷积计算中实际上范围只有 $-\xi\sim 1$。
其中第二行各项的证明如下：

1、GPD 输入的 DGLAP 区间：

$$
\begin{aligned}
\int_{\xi}^{1} x^n H^u(x,\xi,t)dx &= \int_{\xi}^{1} x^n dx\int_x^1 d\bar{y}\frac{1}{\bar{y}}f(\bar{y},\xi,t)H_{in}^u(\frac{x}{\bar{y}},\frac{\xi}{\bar{y}},t) \\
&= \int_{\xi}^{1} d\bar{y}\frac{1}{\bar{y}}f(\bar{y},\xi,t)\int_{\xi}^{\bar{y}} dx x^n H_{in}^u(\frac{x}{\bar{y}},\frac{\xi}{\bar{y}},t) \\
&= \int_{\xi}^{1} d\bar{y}f(\bar{y},\xi,t)\int_{\frac{\xi}{\bar{y}}}^{1} d\frac{x}{\bar{y}}x^n H_{in}^u(\frac{x}{\bar{y}},\frac{\xi}{\bar{y}},t) \\
&= \int_{\xi}^{1} d\bar{y}\bar{y}^n f(\bar{y},\xi,t)\int_{\frac{\xi}{\bar{y}}}^{1} d\frac{x}{\bar{y}}(\frac{x}{\bar{y}})^n H_{in}^u(\frac{x}{\bar{y}},\frac{\xi}{\bar{y}},t)
\end{aligned}
$$

2、GPD 输入的 ERBL 区间：

$$
\begin{aligned}
\int_{-\xi}^{\xi} x^n H^u(x,\xi,t)dx &= \int_{-\xi}^{\xi} x^n dx\int_{\xi}^1 d\bar{y}\frac{1}{\bar{y}}f(\bar{y},\xi,t)H_{in}^u(\frac{x}{\bar{y}},\frac{\xi}{\bar{y}},t) \\
&= \int_{\xi}^{1} d\bar{y}\frac{1}{\bar{y}}f(\bar{y},\xi,t)\int_{-\xi}^{\xi} dx x^n H_{in}^u(\frac{x}{\bar{y}},\frac{\xi}{\bar{y}},t) \\
&= \int_{\xi}^{1} d\bar{y}f(\bar{y},\xi,t)\int_{\frac{-\xi}{\bar{y}}}^{\frac{\xi}{\bar{y}}} d\frac{x}{\bar{y}}x^n H_{in}^u(\frac{x}{\bar{y}},\frac{\xi}{\bar{y}},t) \\
&= \int_{\xi}^{1} d\bar{y}\bar{y}^n f(\bar{y},\xi,t)\int_{\frac{-\xi}{\bar{y}}}^{\frac{\xi}{\bar{y}}} d\frac{x}{\bar{y}}(\frac{x}{\bar{y}})^n H_{in}^u(\frac{x}{\bar{y}},\frac{\xi}{\bar{y}},t)
\end{aligned}
$$

3、GDA 输入部分：

首先变换积分顺序：

$$\begin{aligned}\int_{-\xi}^{\xi} x^n H^u(x,\xi,t)dx &= \int_{-\xi}^{\xi} x^n dx \int_{-\xi}^{\xi} d\bar{y}\frac{1}{\bar{y}}f(\bar{y},\xi,t)\frac{1}{2}\Phi(\eta,z,t)\\ &= \int_{-\xi}^{\xi} d\bar{y}\frac{1}{\bar{y}}f(\bar{y},\xi,t)\int_{-\xi}^{\xi} x^n\frac{1}{2}\Phi(\eta,z,t)dx\\ &= \int_{-\xi}^{\xi} d\bar{y}\frac{1}{\bar{y}}f(\bar{y},\xi,t)\xi^{n+1}\int_{0}^{1} d\eta(2\eta-1)^n\Phi(\eta,z,t)\end{aligned}$$

对于 GDA 本身，其 n 阶矩也有自己的多项式展开：

$$\begin{aligned}\int_0^1 d\eta(2\eta-1)^n\Phi(\eta,z,t) &= \sum_{i=0,even}^{n} 2^i(2z-1)^{n-i}A_i^{n+1}(t)+2^{n+1}C^{n+1}(t)\\ &= \sum_{i=0,even}^{n} 2^i(\frac{\bar{y}}{\xi})^{n-i}A_i^{n+1}(t)+2^{n+1}C^{n+1}(t)\end{aligned}$$

其中，由于我们所使用的输入的 GDA 实际上就是 GPD 改变了变量形式，因此展开中的系数 $A_i^{n+1}(t), C^{n+1}(t)$ 相同。因此 GDA 的卷积对应可以变换为：

$$\begin{aligned}\int_{-\xi}^{\xi} x^n H^u(x,\xi,t)dx &= \int_{-\xi}^{\xi} d\bar{y}\frac{1}{\bar{y}}f(\bar{y},\xi,t)\xi^{n+1}\int_0^1 d\eta(2\eta-1)^n\Phi(\eta,z,t)\\ &= \int_{-\xi}^{\xi} d\bar{y}\frac{1}{\bar{y}}f(\bar{y},\xi,t)\xi^{n+1}\left(\sum_{i=0,even}^{n} 2^i(\frac{\bar{y}}{\xi})^{n-i}A_i^{n+1}(t)+2^{n+1}C^{n+1}(t)\right)\\ &= \int_{-\xi}^{\xi} d\bar{y}\bar{y}^n f(\bar{y},\xi,t)\left(\sum_{i=0,even}^{n}(2\frac{\xi}{\bar{y}})^i A_i^{n+1}(t)+(2\frac{\xi}{\bar{y}})^{n+1}C^{n+1}(t)\right)\\ &= \int_{-\xi}^{\xi} d\bar{y}\bar{y}^n f(\bar{y},\xi,t)\int_{\frac{-\xi}{\bar{y}}}^{\frac{\xi}{\bar{y}}} d\frac{x}{\bar{y}}(\frac{x}{\bar{y}})^n H_{in}^u(\frac{x}{\bar{y}},\frac{\xi}{\bar{y}},t)\end{aligned}$$

所以卷积之后的 n 阶矩的形式为：

$$\begin{aligned}\int_{-\xi}^{1} x^n H^u(x,\xi,t)dx &= \int_{\xi}^{1} x^n H^u(x,\xi,t)dx+\int_{-\xi}^{\xi} x^n H_{gpd}^u(x,\xi,t)dx+\int_{-\xi}^{\xi} x^n H_{gda}^u(x,\xi,t)dx\\ &= \int_{\xi}^{1} d\bar{y}^n\bar{y}f(\bar{y},\xi,t)\int_{\frac{\xi}{\bar{y}}}^{1} dzz^n H_{in}^u(z,\frac{\xi}{\bar{y}},t)+\int_{\xi}^{1} d\bar{y}\bar{y}^n f(\bar{y},\xi,t)\int_{-\frac{\xi}{\bar{y}}}^{\frac{\xi}{\bar{y}}} dzz^n H_{in}^u(z,\frac{\xi}{\bar{y}},t)\\ &+\int_{-\xi}^{\xi} d\bar{y}\bar{y}^n f(\bar{y},\xi,t)\int_{-\frac{\xi}{\bar{y}}}^{1} dzz^n H_{in}^u(z,\frac{\xi}{\bar{y}},t)\\ &= \int_{-\xi}^{1} d\bar{y}\bar{y}^n f(\bar{y},\xi,t)\int_{-\frac{\xi}{\bar{y}}}^{1} dzz^n H_{in}^u(z,\frac{\xi}{\bar{y}},t)\end{aligned}$$

将作为输入的价夸克 GPD 展开，有

$$\begin{aligned}\int_{-\xi}^{1} x^n H^u(x,\xi,t)dx &= \int_{-\xi}^{1} d\bar{y}\bar{y}^n f(\bar{y},\xi,t)\int_{-\frac{\xi}{\bar{y}}}^{1} dz z^n H_{in}^u(z,\frac{\xi}{\bar{y}},t)\\ &= \int_{-\xi}^{1} d\bar{y}\bar{y}^n f(\bar{y},\xi,t)\left(\sum_{i=0,even}^{n}(2\frac{\xi}{\bar{y}})^i A_i^{n+1}(t)+(2\frac{\xi}{\bar{y}})^{n+1}C^{n+1}(t)\right)\\ &= \sum_{i=0,even}^{n}\int_{-\xi}^{1} d\bar{y}\bar{y}^n f(\bar{y},\xi,t)(2\frac{\xi}{\bar{y}})^i A_i^{n+1}(t)+\int_{-\xi}^{1} d\bar{y}\bar{y}^n f(\bar{y},\xi,t)(2\frac{\xi}{\bar{y}})^{n+1}C^{n+1}(t)\end{aligned}$$

因此分裂函数在 n 阶矩计算中需要满足

$$\int_{-\xi}^{1} d\bar{y}\bar{y}^n\, f(y,\xi,t) = \sum_{j=0,\mathrm{even}}^{n}(2\xi)^j\mathcal{A}_j^{n+1}(t)+(2\xi)^{n+1}\,\mathcal{C}^{(n+1)}(t)|_{n+1\,\mathrm{even}},$$

$$\int_{-\xi}^{1} d\bar{y}\bar{y}^{-1}\, f(y,\xi,t) = \mathcal{C}'(t)$$

其中第一行可以利用分裂函数的算符定义来证明，第二行可以从计算中检验。