这里我简单介绍一下我们目前计算 GPD 的方式。具体计算中有很多额外的细节，这里只给了最简单的介绍。

1 计算原理

GPD 的定义是，参见 GPD 的综述

$$\frac{1}{2}\int\frac{d\lambda}{2\pi}e^{ixP\lambda n_-} < p_2|\bar{q}(-\frac{1}{2}\lambda n_-)n_-q(\frac{1}{2}\lambda n_-)|p >$$
$$= \frac{1}{2(Pn_-)}[H^q(x,\xi,t)\bar{u}(p_2)n_-u(p_1)+E^q(x,\xi,t)\bar{u}(p_2)\frac{i\sigma^{\alpha\beta}n_{-\alpha}q_\beta}{2M}u(p_1)] \tag{1}$$

我们计算中所使用的是卷积公式 (convolution formula)，可以参考附件里的第一篇文章。计算上而言就是，粒子的 GPD 等于粒子内部一个组分粒子的 GPD 和粒子-组分粒子的分裂函数 (splitting function) 的卷积，组分粒子的 GPD 是输入，分裂函数则是由图 1 中的费曼图得到，具体卷积关系如下（对于图 a），$f(y,\xi,t)$ 是从图 1 中得到的 splitting function，$H_q(\frac{x}{y},\frac{\xi}{y},t)$ 是输入的中间粒子 GPD。

$$H(x,\xi,t)=\int_x^1 dy\frac{1}{y}f(y,\xi,t)H_q(\frac{x}{y},\frac{\xi}{y},t),\quad y>x>\xi$$
$$H(x,\xi,t)=\int_\xi^1 dy\frac{1}{y}f(y,\xi,t)H_q(\frac{x}{y},\frac{\xi}{y},t),\quad y>\xi>x$$
$$H(x,\xi,t)=\int_{-\xi}^{\xi} dy\frac{1}{2\xi}f(y,\xi,t)\frac{\xi}{\pi y}\int_{s_0}^{\infty}ds\frac{Im\Phi(\frac{\frac{x}{\xi}+1}{2},\frac{\frac{y}{\xi}+1}{2},s)}{s-t+i\epsilon}\quad \xi>\{y,|x|\}$$
$$H(x,\xi,t)=\int_{-x}^1 dy\frac{1}{y}f(y,\xi,t)H_q(\frac{x}{y},\frac{\xi}{y},t),\quad -\xi>x>-1$$

对于图 1 中的费曼图 a，外场耦合到介子上，这说明这个图做贡献的中间粒子是介子，对图 b 则是重子作为中间粒子。

2 光锥坐标

光锥坐标的变换就是把协变坐标的 03 分量加起来，12 坐标不变，例如

$$k=(k^0,k^1,k^2,k^3)$$
$$k=(k^+,k^-,\overrightarrow{k}^\perp)$$

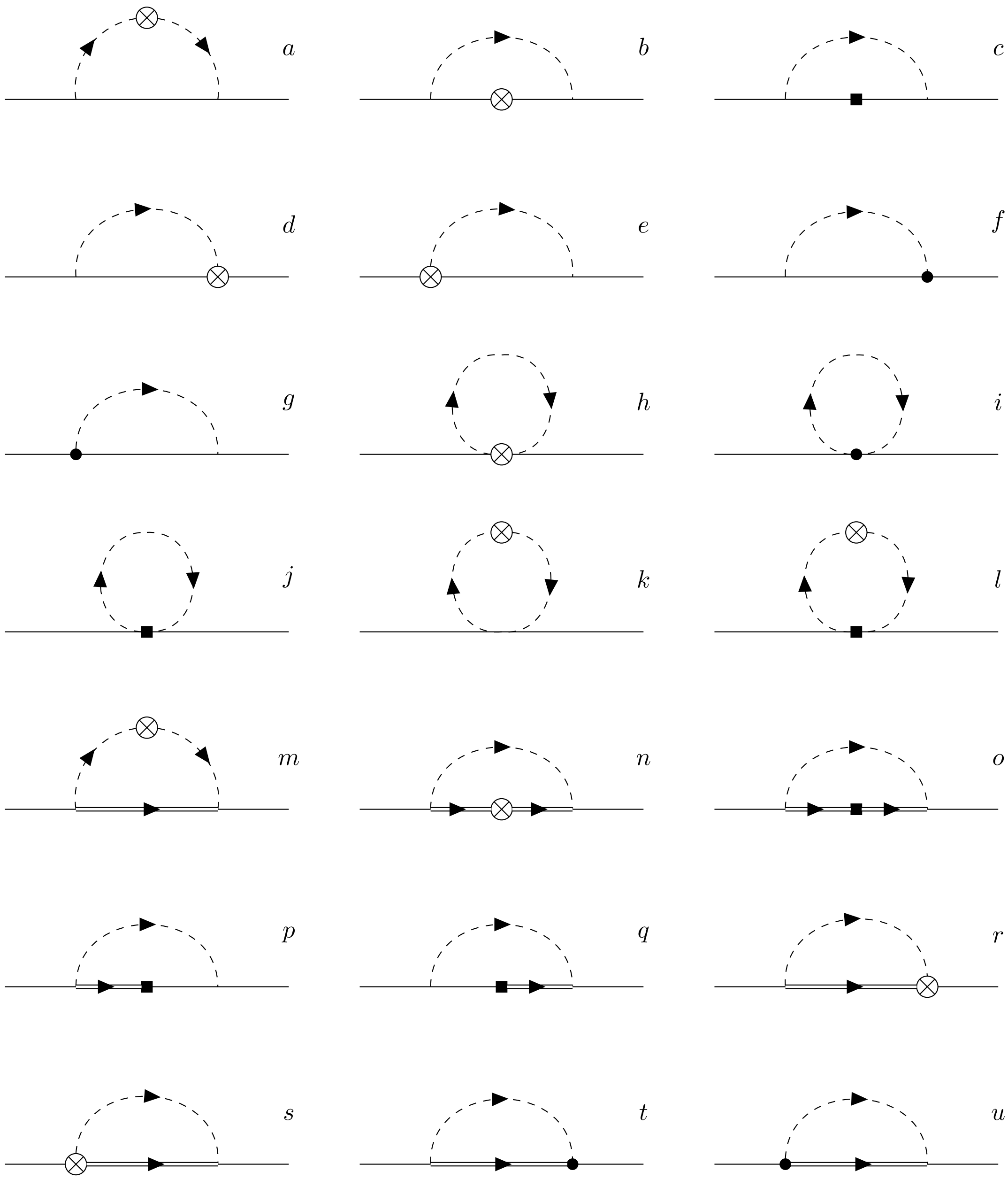

图 1: 需要计算的单圈费曼图

其中

$$
\begin{aligned}
k^+ &= k^0 + k^3 \\
k^- &= k^0 - k^3 \\
\overrightarrow{k}^\perp &= (k^1, k^2) \\
d^4k &= \frac{1}{2} dk^+ dk^- d^2 k^\perp \\
k.p &= \frac{1}{2}(k^+ p^- + k^- p^+) - \overrightarrow{k}^\perp . \overrightarrow{p}^\perp
\end{aligned}
$$

3 分裂函数

对于图 1 中的费曼图，根据 GPD 的定义我们所需要的分裂函数的定义为

$$
\bar{u}(p_2)\Gamma^+ u(p_1) = \bar{u}(p_2)[\gamma^+ f(y,\xi,t) + \frac{i\sigma^{+\alpha} q_\alpha}{2M_B} g(y,\xi,t)]u(p_1) \tag{2}
$$

$$
= \bar{u}(p_2)[\gamma^+(f(y,\xi,t) + g(y,\xi,t)) - \frac{p_1^+ + p_2^+}{2M_B} g(y,\xi,t)]u(p_1) \tag{3}
$$

其中使用了戈登恒等式替换掉了 $\sigma^{\mu\nu}$，y 是因为分裂函数描述的是具有一定的动量占比的中间粒子的状态，从而需要引入一个动量 fraction y 来描述动量占比，具体定义在下面。

为了提取出 fg，我们定义如下的投影算符 AB：

$$
A = \mathrm{Tr}[\Gamma^+(p_1 + M_B)\gamma^+(p_2 + M_B)] \tag{4}
$$

$$
= (f(y,\xi,t) + g(y,\xi,t)) * \mathrm{Tr}[\gamma^+(p_1 + M_B)\gamma^+(p_2 + M_B)] \tag{5}
$$

$$
- \frac{p_1^+ + p_2^+}{2M_B} g(y,\xi,t) * \mathrm{Tr}[(p_1 + M_B)\gamma^+(p_2 + M_B)] \tag{6}
$$

$$
B = \mathrm{Tr}[\Gamma^+(p_1 + M_B)(p_2 + M_B)]\frac{p_1^+ + p_2^+}{2M_B} \tag{7}
$$

$$
= (f(y,\xi,t) + g(y,\xi,t)) * \mathrm{Tr}[\gamma^+(p_1 + M_B)(p_2 + M_B)]\frac{p_1^+ + p_2^+}{2M_B} \tag{8}
$$

$$
- \frac{p_1^+ + p_2^+}{2M_B} g(y,\xi,t) * \mathrm{Tr}[\gamma^+(p_1 + M_B)(p_2 + M_B)]\frac{p_1^+ + p_2^+}{2M_B} \tag{9}
$$

反解得到

$$f = \frac{4M_B^2\xi^2 B - Q^2 A}{8P^{+2}(4M_B^2\xi^2 + (\xi^2-1)Q^2)} \tag{10}$$

$$g = \frac{M_B^2(1-\xi^2)B - M_B^2 A}{2P^{+2}(4M_B^2\xi^2 + (\xi^2-1)Q^2)} \tag{11}$$

所以计算中需要做的就是，以费曼图 a 为例：图 a 的振幅为

$$\begin{aligned}\bar{u}(p')\,\Gamma^+_{(\mathrm{a})}\,u(p) \quad &= \quad \bar{u}(p')\,\frac{C_{B\phi}^2}{f^2}\int\frac{[4]k}{(2\pi)^4}(k+q)\gamma_5\,\widetilde{F}(k+q)\frac{i}{D_\phi(k+q)}\,(2k^+ + q^+)\\ &\qquad \times\frac{i}{D_\phi(k)}\frac{i(p-k+M_B)}{D_B(p-k)}\gamma_5 k\,\widetilde{F}(k)\,\delta\Big(y+\xi-\frac{k^+}{P^+}\Big)\,u(p)\\ &\equiv \quad \bar{u}(p')\bigg[\gamma^+ f_{\phi B}^{(\mathrm{rbw})}(y,\xi,t) + \frac{i\sigma^{+\nu}q_\nu}{2M}g_{\phi B}^{(\mathrm{rbw})}(y,\xi,t)\bigg]u(p),\end{aligned} \tag{12}$$

其中通过 δ 函数 $\delta(y+\xi-\frac{k^+}{P^+})$ 引入动量 fraction y 来描述动量占比，具体的定义是通过 bilocal operator 推导出来的，需要注意的是 y 的定义在介子耦合和重子耦合中不同，不过重子图比较复杂，先只看介子圈的话 y 就都是一样的（也就是图 1 中的 a、k、l、m 图）

将振幅 Γ^+ 带入到上面的算符 AB 中 (旋量已经被 trace 计算了)，计算 trace 之后对 AB 分别做四维积分即可得到分裂函数。而在光锥坐标中进行四维积分的方式则是：

首先 + 分量是 delta 函数所以实际上不用积分，负分量使用留数定理计算，因为传播子中是含有 $i\epsilon$ 的，即 $D(k)=k^2-m^2+i\epsilon$，最后垂直分量则直接进行数值积分，从而得到了分裂函数。具体的话对照 mma 程序会更好理解，之后我把程序给你。

4 卷积计算

得到分裂函数之后，只需要得到中间粒子 gpd 作为输入即可计算卷积。需要注意的是，第一节中的卷积公式的第四行实际上是不计算的，是通过对称性得到的，这是因为这一行是纯反夸克贡献，而我们计算中输入的 gpd 是只有 π^+ 中的 u 夸克的。对于介子，输入 gpd 是

$$
\begin{aligned}
H_{q/\pi}(x,\xi,t) &= \int_{-1}^{1}\beta\int_{-1+|\beta|}^{1-|\beta|}\alpha\,\delta(x-\beta-\xi\alpha)\,h_b(\beta,\alpha)\,H_{q/\pi}(\beta,0,t) \\
&+ \frac{\xi}{|\xi|}D_{q/\pi}\left(\frac{x}{\xi},t\right)\theta(\xi-|x|),
\end{aligned} \tag{13}
$$

更具体的参数之后在程序里给你。

最后有一个使用对称性得到完整 GPD 的过程，这是因为第一我们只计算了 π^+ 中的 u 夸克，想要得到 d 夸克就需要用对称性，其次是 GPD 在 x<0 的部分是反夸克的贡献，而反夸克也只能用对称性来得到，

对于介子可以这么理解，输入的中间介子有 π^+,π^0,π^-，但实际上计算中只算了 π^+ 中的 u 夸克，其余夸克均是从对称性得到的，因为 π^+ 中的 u 夸克分布 $=\pi^+$ 中的 $\bar{d}$ 夸克 $=\pi^-$ 中的 d 夸克分布 $=\pi^-$ 中的 $\bar{u}$ 夸克 $=2{*}\pi^0$ 中的 u,d 夸克。举例来说，如果要计算 π 介子对 u 夸克分布的贡献，那么首先是 π^+ 中的 u 夸克分布，其次是通过对称性得到 π^- 中的 $\bar{u}$ 夸克，以及 π^0 中的 $u,\bar{u}$ 夸克，这部分反夸克我们把 x 加个负号就属于 u 夸克 gpd 在 x<0 部分的贡献，从而得到了 x<0 的部分，之后把它们加起来就好了