Algebra geometrica e applicazioni al Deep Learning

Giacomo Bencivinni, Alin Marian Habasescu, Riccardo Lo Iacono

11 ottobre 2024

Definizioni preliminari

Sia $\mathbb{R}^n$ uno spazio vettoriale, siano $\{\mathbf{e}_1, \dots, \mathbf{e}_n\}$ i vettori che formano una base ortonormale per lo spazio.

Due qualsiasi vettori $\mathbf{a}, \mathbf{b} \in \mathbb{R}^n$ possono essere visti come combinazioni lineari dei vettori base.

$$\mathbf{a} = \alpha_1 \mathbf{e}_1 + \cdots + \alpha_n \mathbf{e}_n \qquad \mathbf{b} = \beta_1 \mathbf{e}_1 + \cdots + \beta_n \mathbf{e}_n$$

Dalla moltiplicazione di $\mathbf{a}$ e $\mathbf{b}$ segue

$$\begin{aligned} \mathbf{ab} &= (\alpha_1\mathbf{e}_1 + \cdots + \alpha_n\mathbf{e}_n)(\beta_1\mathbf{e}_1 + \cdots + \beta_n\mathbf{e}_n) \\ &= \alpha_1\beta_1\mathbf{e}_1\mathbf{e}_1 + \cdots + \alpha_1\beta_n\mathbf{e}_1\mathbf{e}_n + \cdots + \alpha_n\beta_n\mathbf{e}_n\mathbf{e}_n \end{aligned}$$

Sia per semplicita $n = 2$, allora quanto sopra diventa

$$\begin{aligned} \mathbf{ab} &= (\alpha_1\mathbf{e}_1 + \alpha_2\mathbf{e}_2)(\beta_1\mathbf{e}_1 + \beta_2\mathbf{e}_2) \\ &= \alpha_1\beta_1\mathbf{e}_1\mathbf{e}_1 + \alpha_1\beta_2\mathbf{e}_1\mathbf{e}_2 + \alpha_2\beta_1\mathbf{e}_2\mathbf{e}_1 + \alpha_2\beta_2\mathbf{2}_2\mathbf{e}_2 \end{aligned} \tag{1}$$

Defininedo gli assiomi

1. $\mathbf{e}_i\mathbf{e}_i = 1, \forall i$
2. $\mathbf{e}_j\mathbf{e}_i = -\mathbf{e}_i\mathbf{e}_j$

l'*Equazione 1* si può riscrivere come

$$\begin{aligned} \mathbf{ab} &= (\alpha_1\mathbf{e}_1 + \alpha_2\mathbf{e}_2)(\beta_1\mathbf{e}_1 + \beta_2\mathbf{e}_2) \\ &= \alpha_1\beta_1 + \alpha_1\beta_2\mathbf{e}_1\mathbf{e}_2 + \alpha_2\beta_1 + \alpha_2\beta_2\mathbf{e}_2\mathbf{e}_2 \\ &= (\alpha_1\beta_1 + \alpha_2\beta_2) + (\alpha_1\beta_2 - \alpha_2\beta_1)\mathbf{e}_1\mathbf{e}_2 \end{aligned}$$

The frame title

The frame title