Algebra geometrica e applicazioni al Deep Learning

Giacomo Bencivinni, Alin Marian Habasescu, Riccardo Lo Iacono

30 ottobre 2024

Algebra di Clifford

Sia fissato uno spazio vettoriale $\mathbb{R}^n$, e sia $\{\mathbf{e}_1, \ldots, \mathbf{e}_n\}$ una sua base ortonormale.

Da questi è possibile definire un nuovo spazio vettoriale, detto spazio di Clifford n-dimensionale (Cl_n). Nello specifico, Cl_n rappresenta l'insieme di tutti i possibili sottospazi k-dimensionali, con $k \leq n$, di tutte le possibili combinazioni dei vettori base.

Multivettori: il caso bi- e tri-dimensionale

Si consideri lo spazio $\mathbb{R}^2$ e sia $\{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2\}$ una sua base ortonormale. É noto che comunque presi $\mathbf{a}, \mathbf{b} \in \mathbb{R}^2$, questi possano essere intesi come opportune combinazioni lineari dei vettori base. Ossia

$$\mathbf{a} = \alpha_1 \mathbf{e}_1 + \alpha_2 \mathbf{e}_2 \qquad \mathbf{a} = \beta_1 \mathbf{e}_1 + \beta_2 \mathbf{e}_2$$

inoltre, sappiamo che

$$\begin{aligned} \mathbf{ab} &= (\alpha_1 \mathbf{e}_1 + \alpha_2 \mathbf{e}_2)(\beta_1 \mathbf{e}_1 + \beta_2 \mathbf{e}_2) \\ &= \alpha_1 \beta_1 \mathbf{e}_1 \mathbf{e}_1 + \alpha_1 \beta_2 \mathbf{e}_1 \mathbf{e}_2 + \alpha_2 \beta_1 \mathbf{e}_1 \mathbf{e}_2 + \alpha_2 \beta_2 \mathbf{e}_2 \mathbf{e}_2. \end{aligned} \tag{1}$$

Defininedo i seguenti assiomi:

1. $\mathbf{e}_i\mathbf{e}_i = 1$
2. $\mathbf{e}_j\mathbf{e}_i = -\mathbf{e}_i\mathbf{e}_j$

Equazione (1) può essere riscritta come

$$\mathbf{ab} = (\alpha_1\beta_1 + \alpha_2\beta_2) + (\alpha_1\beta_2 - \alpha_2\beta_1)\mathbf{e}_1\mathbf{e}_2 \tag{2}$$

Da *Equazione* (2) segue che, $\forall \mathsf{a}, \mathsf{b} \in \mathbb{R}^2$ il loro prodotto risulti essere la somma di un termine scalare $(\alpha_1\beta_1 + \alpha_2\beta_2)$ e da un termine $(\alpha_1\beta_2 - \alpha_2\beta_1)\mathsf{e}_1\mathsf{e}_2$.

Dando un'interpretazione geometrica, $(\alpha_1\beta_2 - \alpha_2\beta_1)$ descrive l'area del rettandolo definita dai vettori $\mathsf{e}_1, \mathsf{e}_2$; segue che $(\mathsf{e}_1, \mathsf{e}_2)$ definiscono il piano su cui giace l'area.

In conclusione, $\mathsf{e}_1\mathsf{e}_2$ rappresenta un'area orientata in $\mathbb{R}^2$ ed è definita *bivettore*.

Un ragionamento analogo può essere fatto per $\mathbb{R}^3$.

Sia $\{\mathsf{e}_1, \mathsf{e}_2, \mathsf{e}_3\}$ una base ortonormale di $\mathbb{R}^3$. Considerati $\mathsf{a}, \mathsf{b} \in \mathbb{R}^3$, questi saranno della forma

$$\mathsf{a} = \alpha_1 \mathsf{e}_1 + \alpha_2 \mathsf{e}_2 + \alpha_3 \mathsf{e}_3 \qquad \mathsf{b} = \beta_1 \mathsf{e}_1 + \beta_2 \mathsf{e}_2 + \beta_3 \mathsf{e}_3$$

Considerandone il prodotto, e applicando gli assiomi defInti poco sopra, segue

$$\begin{aligned} \mathsf{ab} = {} & (\alpha_1\beta_1 + \alpha_2\beta_2 + \alpha_3\beta_3) \\ & + (\alpha_1\beta_2 - \alpha_2\beta_1)\mathsf{e}_1\mathsf{e}_2 \\ & + (\alpha_1\beta_3 - \alpha_3\beta_1)\mathsf{e}_1\mathsf{e}_3 \\ & + (\alpha_2\beta_3 - \alpha_3\beta_2)\mathsf{e}_2\mathsf{e}_3 \end{aligned}$$

Oltre le tre aree, in $\mathbb{R}^3$ è possibile definire un elemento dato dal prodotto dei vettori base: $\mathbf{e}_1\mathbf{e}_2\mathbf{e}_3$.

Similarmente all'area orientata rappresentata da $\mathbf{e}_1\mathbf{e}_2$, $\mathbf{e}_1\mathbf{e}_2\mathbf{e}_3$ rappresenta un volume orientata in $\mathbb{R}^3$.

Multivettori: il caso generale

In generale fissato un n, e assunti $\{\mathbf{e}_1, \ldots, \mathbf{e}_n\}$ una base ortonormale di uno spazio $\mathbb{R}^n$, un multivettore $\mathbf{a} \in \mathbb{R}^n$ è un elemento della forma

$$\mathbf{a} = \alpha_0 + \alpha_1 \mathbf{e}_1 + \cdots \alpha_n \mathbf{e}_n + \alpha_{1,2} \mathbf{e}_1 \mathbf{e}_2 + \cdots + \alpha_{1,\cdots,n} \mathbf{e}_1 \cdots \mathbf{e}_n$$

e lo spazio che contiene tutti questi multivettori è detto spazio di Clifford n-dimensionale (Cl_n).

Operazioni tra multivettori

Fissata una qualche algebra di Clifford Cl_n , su gli elementi della stessa è possibile applicare diverse operazioni, quali

- prodotto geometrico
- prodotto esterno
- contrazione sinistra (destra)
- operazioni unari: duale, inverso, coniugato e involuzione di grado

Operazioni tra multivettori: il prodotto geometrico

Sia considerata Cl_2 , (l'estensione al caso n-simo è immediata), e siano $\mathbf{a}, \mathbf{b}$ due multivettori.

Il prodotto geometrico tra i due consiste nel moltiplicare ciascuna delle componenti del primo multivettore per quelle del secondo, tenendo conto dei seguenti assiomi:

- $\mathbf{e}_i\mathbf{e}_i = \pm 1$
- $\mathbf{e}_i\mathbf{e}_j = -\mathbf{e}_i\mathbf{e}_j$
- $\lambda\mathbf{e}_i = \mathbf{e}_i\lambda$

Si ha cioè che

$$
\begin{aligned}
\mathsf{ab} &= (\alpha_0 + \alpha_1\mathsf{e}_1 + \alpha_2\mathsf{e}_2 + \alpha_1\alpha_2\mathsf{e}_1\mathsf{e}_2)(\beta_0 + \beta_1\mathsf{e}_1 + \beta_2\mathsf{e}_2 + \beta_1\beta_2\mathsf{e}_1\mathsf{e}_2) \\
&= \alpha_0\beta_0 + \alpha_0\beta_1\mathsf{e}_1 + \alpha_0\beta_2\mathsf{e}_2 + \alpha_0\beta_1\beta_2\mathsf{e}_1\mathsf{e}_2 \\
&+ \alpha_1\beta_0\mathsf{e}_1 + \alpha_1\beta_1\mathsf{e}_1\mathsf{e}_1 + \alpha_1\beta_2\mathsf{e}_1\mathsf{e}_2 + \alpha_1\beta_1\beta_2\mathsf{e}_1\mathsf{e}_1\mathsf{e}_2 \\
&+ \alpha_2\beta_0\mathsf{e}_2 + \alpha_2\beta_1\mathsf{e}_2\mathsf{e}_1 + \alpha_2\beta_2\mathsf{e}_2\mathsf{e}_2 + \alpha_2\beta_1\beta_2\mathsf{e}_2\mathsf{e}_1\mathsf{e}_2 \\
&+ \alpha_1\alpha_2\beta_0\mathsf{e}_1\mathsf{e}_2 + \alpha_1\alpha_2\beta_1\mathsf{e}_1\mathsf{e}_2\mathsf{e}_1 + \alpha_1\alpha_2\beta_2\mathsf{e}_1\mathsf{e}_2\mathsf{e}_2 + \alpha_1\alpha_2\beta_1\beta_2\mathsf{e}_1\mathsf{e}_2\mathsf{e}_1\mathsf{e}_2
\end{aligned}
$$

diventa, applicando gli assiomi di cui sopra

$$
\begin{aligned}
\mathsf{ab} &= (\alpha_0\beta_0 + \alpha_1\beta_1 + \alpha_2\beta_2 - \alpha_1\alpha_2\beta_1\beta_2) \\
&\quad + (\alpha_0\beta_1 + \alpha_1\beta_0 - \alpha_2\beta_1\beta_2 + \alpha_1\alpha_2\beta_2)\mathsf{e}_1 \\
&\quad + (\alpha_0\beta_2 + \alpha_2\beta_0 + \alpha_1\beta_1\beta_2 - \alpha_1\alpha_2\beta_1)\mathsf{e}_2 \\
&\quad + (\alpha_0\beta_1\beta_2 + \alpha_1\alpha_2\beta_0 + \alpha_1\beta_2 - \alpha_2\beta_1)\mathsf{e}_1\mathsf{e}_2
\end{aligned}
$$

The frame title

The frame title