# Algebra geometrica e applicazioni al Deep Learning

Giacomo Bencivinni, Alin Marian Habasescu, Riccardo Lo Iacono

28 ottobre 2024

Sia fissato uno spazio vettoriale $\mathbb{R}^n$, e sia $\{\mathbf{e}_1, \ldots, \mathbf{e}_n\}$ una sua base ortonormale.

Da questi è possibile definire un nuovo spazio vettoriale, detto spazio di Clifford n-dimensionale $(Cl_n)$. Nello specifico, $Cl_n$ rappresenta l'insieme di tutti i possibili sottospazi $k$-dimensionali, con $k \leq n$, di tutte le possibili combinazioni dei vettori base.

# Multivettori: il caso bi- e tri-dimensionale

Si consideri lo spazio $\mathbb{R}^2$ e sia $\{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2\}$ una sua base ortonormale. É noto che comunque presi $\mathbf{a}, \mathbf{b} \in \mathbb{R}^2$, questi possano essere intesi come opportune combinazioni lineari dei vettori base. Ossia

$$\mathbf{a} = \alpha_1 \mathbf{e}_1 + \alpha_2 \mathbf{e}_2 \qquad \mathbf{a} = \beta_1 \mathbf{e}_1 + \beta_2 \mathbf{e}_2$$

inoltre, sappiamo che

$$\begin{aligned} \mathbf{ab} &= (\alpha_1 \mathbf{e}_1 + \alpha_2 \mathbf{e}_2)(\beta_1 \mathbf{e}_1 + \beta_2 \mathbf{e}_2) \\ &= \alpha_1\beta_1 \mathbf{e}_1\mathbf{e}_1 + \alpha_1\beta_2 \mathbf{e}_1\mathbf{e}_2 + \alpha_2\beta_1 \mathbf{e}_1\mathbf{e}_2 + \alpha_2\beta_2 \mathbf{e}_2\mathbf{e}_2. \end{aligned} \tag{1}$$

Defininedo i seguenti assiomi:

1. $\mathbf{e}_i\mathbf{e}_i = 1$
2. $\mathbf{e}_j\mathbf{e}_i = -\mathbf{e}_i\mathbf{e}_j$

*Equazione* (1) può essere riscritta come

$$\mathbf{ab} = (\alpha_1\beta_1 + \alpha_2\beta_2) + (\alpha_1\beta_2 - \alpha_2\beta_1)\mathbf{e}_1\mathbf{e}_2$$

# The frame title

# The frame title