算法设计与分析小班课程论文考试试卷

考试时间：2017 年 5 月 26 日

姓名：　　　　　　　学号：

第一题（20 分）

论文：Mathematical Analysis of Algorithms

证明：任何一个置换都能分解为几个不相交的轮换的乘积。

证：设σ是一个 n 元置换。如下分解σ：

1、检查$\sigma(1)$是否=1， 如等于 1，则轮换(1)出现在乘积中，任取 1 以外的一个元素，重复检查。 否则令$\sigma(1)=i_1$，

2、检查$\sigma(i_1)$，由于σ是双射，故$\sigma(i_1)$不可能等于 i_1（否则$\sigma(1)=i_1$且$\sigma(i_1)=i_1$，与σ是双单射矛盾）。

如$\sigma(i_1)=1$， 则轮换$(1\ i_1)$出现在乘积中，任取 1、 i_1之外的元素重复检查。否则令$\sigma(i_1)=i_2$.

…

3、设$\sigma(1)=i_1$，$\sigma(i_1)=i_2$， …，$\sigma(i_k)=i_{k+1}$.则 i_{k+1}不是 $i_1, i_2, \ldots, i_k$ 中的任何一个。

如$\sigma(i_k)=1$， 则轮换$(1\ i_1\, i_2 \ldots i_k\ i_{k+1})$出现在乘积中，任取 1、 i_{k+1}之外的元素重复检查。否则令$\sigma(i_{k+1})=i_{k+2}$.

4、如轮换$(1\ i_1\, i_2 \ldots i_k\ i_{k+1})$、…、$(j_1 j_2 \ldots j_k)$已经出现在乘积中，且$\{1,2,\ldots, n\}=\{1, i_1, i_2,\ldots,i_k, i_{k+1}, \ldots, j_1, j_2, \ldots, j_k\}$，则$\sigma = (1\ i_1\, i_2 \ldots i_k\ i_{k+1}) \ldots (j_1 j_2 \ldots j_k)$。

如$\{1,2,\ldots, n\}-\{1, i_1, i_2,\ldots,i_k, i_{k+1}, \ldots, j_1, j_2, \ldots, j_k\}$不是空集，任取期中一个元素，重复上述过程直到为空为止。

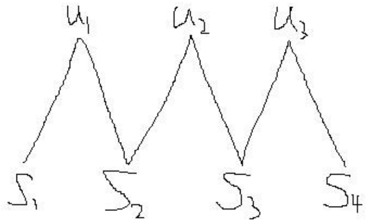
第二题（20 分）

论文：Reducibility among combinatorial problems

在 Karp 论文中给出的 EXACT COVER 到 3-DIMENSIONAL MATCHING 的归约中，设有如下的 EXACT COVER 输入实例 $I=\{S_1,S_2,S_3,S_4\}$，其中

$$S_1=\{u_1\}，S_2=\{u_1,u_2\}，S_3=\{u_2,u_3\}，S_4=\{u_3\}，$$

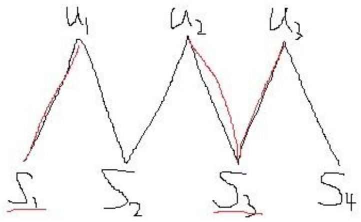
如图所示。

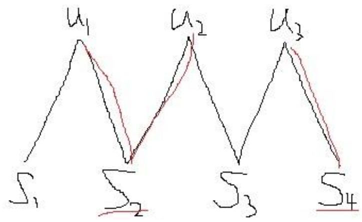


请回答以下问题（每小题 4 分）：

1. 试给出该 EXACT COVER 实例 I 的一个解；

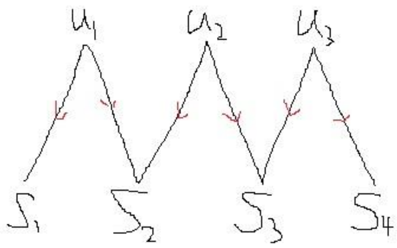
答案：$\{S_1,S_3\}$ 或 $\{S_2,S_4\}$。





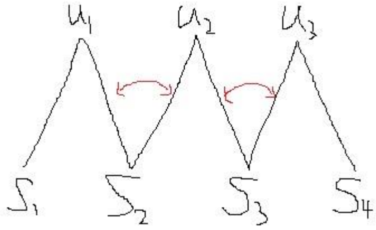
2. 试写出该实例 I 在归约下对应的 3-DIMENSIONAL MATCHING 实例 I’的集合 T；

答案：$T=\{<i,j>|u_i\in S_j\}=\{<1,1>,<1,2>,<2,2>,<2,3>,<3,3>,<3,4>\}$。



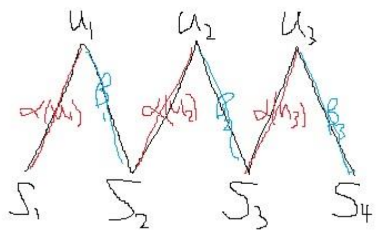
3. 试写出 T 中各元素在映射π下的对应元素；

答案：$\pi(<1,1>)=<1,1>$，$\pi(<1,2>)=<2,2>$，$\pi(<2,2>)=<1,2>$，$\pi(<2,3>)=<3,3>$，$\pi(<3,3>)=<2,3>$，$\pi(<3,4>)=<3,4>$。



4. 设$\alpha(u_1)=<1,1>$，$\alpha(u_2)=<2,2>$，$\alpha(u_3)=<3,3>$，$\beta_1=<1,2>$，$\beta_2=<2,3>$，$\beta_3=<3,4>$。若把该实例 I 在归约下对应的 3-DIMENSIONAL MATCHING 实例 I’的集合 U 分为两个部分，其中 $U_1=\{<\alpha(u_i),<i,j>,<i,j>>|<i,j>\in T\}$，$U_2=\{<\beta,\sigma,\pi(\sigma)>|\text{for all } i, \beta\neq\alpha(u_i)\}$，试分别写出 U_1 和 U_2。

答案：



$U_1=\{<\alpha(u_1),<1,1>,<1,1>>,\quad <\alpha(u_1),<1,2>,<1,2>>,\quad <\alpha(u_2),<2,2>,<2,2>>,$
$<\alpha(u_2),<2,3>,<2,3>>,$
$<\alpha(u_3),<3,3>,<3,3>>, <\alpha(u_3),<3,4>,<3,4>>\}$
$=\{<<1,1>,<1,1>,<1,1>>,<<1,1>,<1,2>,<1,2>>,<<2,2>,<2,2>,<2,2>>,<<2,2>,<2,3>$
$,<2,3>>, <<3,3>,<3,3>,<3,3>>, <<3,3>,<3,4>,<3,4>>\}$

$U_2=\{<\beta_1,<1,1>,<1,1>>,<\beta_1,<1,2>,<2,2>>,<\beta_1,<2,2>,<1,2>>,<\beta_1,<2,3>,<3,3>>,$
$<\beta_1,<3,3>,<2,3>>,<\beta_1,<3,4>,<3,4>>,$
$<\beta_2,<1,1>,<1,1>>,<\beta_2,<1,2>,<2,2>>,<\beta_2,<2,2>,<1,2>>,<\beta_2,<2,3>,<3,3>>,$
$<\beta_2,<3,3>,<2,3>>,<\beta_2,<3,4>,<3,4>>,$
$<\beta_3,<1,1>,<1,1>>,<\beta_3,<1,2>,<2,2>>,<\beta_3,<2,2>,<1,2>>,<\beta_3,<2,3>,<3,3>>,$
$<\beta_3,<3,3>,<2,3>>,<\beta_3,<3,4>,<3,4>> \}$
$=\{<<1,2>,<1,1>,<1,1>>,<<1,2>,<1,2>,<2,2>>,<<1,2>,<2,2>,<1,2>>,<<1,2>,<2,3$
$>,<3,3>>,$
$<<1,2>,<3,3>,<2,3>>,<<1,2>,<3,4>,<3,4>>,$
$<<2,3>,<1,1>,<1,1>>,<<2,3>,<1,2>,<2,2>>,<<2,3>,<2,2>,<1,2>>,<<2,3>,<2,3>$
$,<3,3>>,$
$<<2,3>,<3,3>,<2,3>>,<<2,3>,<3,4>,<3,4>>,$
$<<3,4>,<1,1>,<1,1>>,<<3,4>,<1,2>,<2,2>>,<<3,4>,<2,2>,<1,2>>,<<3,4>,<2,3>$
$,<3,3>>,$
$<<3,4>,<3,3>,<2,3>>,<<3,4>,<3,4>,<3,4>> \}$

5. 试写出与(1)中实例 I 的解对应的实例 I’的解。

答案：实例 I’的解为

$\{<\alpha(u_i),<i,j>,<i,j>>|\ u_i\in S_j$，$S_j$ 在实例 I 的解中$\}\cup$

$\{<\beta_i,\sigma_i,\pi(\sigma_i)>|\ \sigma_i=<k,j>$各不相同，$S_j$ 不在实例 I 的解中$\}$

与$\{S_1,S_3\}$对应的解为

$\{<<1,1>,<1,1>,<1,1>>,<<2,2>,<2,3>,<2,3>>,<<3,3>,<3,3>,<3,3>>,$
$<<1,2>,<2,2>,<1,2>>,<<2,3>,<1,2>,<2,2>> ,<<3,4>,<3,4>,<3,4>>\}$

或

$\{<<1,1>,<1,1>,<1,1>>,<<2,2>,<2,3>,<2,3>>,<<3,3>,<3,3>,<3,3>>,$
$<<1,2>,<1,2>,<2,2>>,<<2,3>,<2,2>,<1,2>> ,<<3,4>,<3,4>,<3,4>>\}$或……

与 $\{S_2,S_4\}$对应的解为

$\{<<1,1>,<1,2>,<1,2>>,<<2,2>,<2,2>,<2,2>>,<<3,3>,<3,4>,<3,4>>,$
$<<1,2>,<2,2>,<1,2>>,<<2,3>,<1,2>,<2,2>> ,<<3,4>,<3,4>,<3,4>>\}$

或

$\{<<1,1>,<1,2>,<1,2>>,<<2,2>,<2,2>,<2,2>>,<<3,3>,<3,4>,<3,4>>,$

<<1,2>,<1,1>,<1,1>>,<<2,3>,<2,3>,<3,3>> ,<<3,4>,<3,3>,<2,3>>}或……

说明：解的第一行是固定的，第二行第一分量是固定的，第二三分量可整体作置换。

第三题（20 分）
论文：Smoothed analysis an attempt to explain the behavior of algorithms in practice
请回答以下问题：
1. 进行算法的平均情况复杂性分析时，需假定输入实例的概率分布。通常为了方便计算，我们会假定输入实例的分布是完全随机的，这么做会有何问题？为什么？（10 分）
参考答案:
（1）我们假定输入实例的分布是完全随机的，但这与实际情况并不相符（就像 random graphs 和 random matrices 与实际不符一样），这会严重干扰其后的分析（论文中说“Random objects have special properties with exponentially high probability, and these special properties might dominate the average-case analysis”）。
（2）之所以出现这种不相符，是因为输入实例的多个维度之间是相互作用的，而我们并不知道这种作用关系，只能简单地假设各个维度之间的独立性从而“完全随机”地生成实例。事实上，这种 random objects 很可能是 very special objects（论文中提到“we argue that “random matrices” are very special matrices”）。

2. 中心极限定理（central limit theorem）告诉我们：一个随机事件的出现受到许多相互独立的随机因素的影响，如果每个因素所产生的影响都很微小时，总体的影响可以看作是服从正态分布的。请问这一定理与论文中的算法平滑分析有什么关系？（5 分）
参考答案：
论文中说“practical data is often subject to some small degree of random noise”，根据中心极限定理，我们可以认为输入实例符合正态分布（高斯分布），因此论文中说“the family of Gaussian distributions provides a natural model of noise or perturbation”，然后很自然地以高斯扰动模型为例来定义和分析平滑复杂度（smoothed complexity）。

3. 在平滑复杂度定义中，σ（sigma）的意义是什么？（5 分）
参考答案：
用来调节引入的扰动程度。σ 从 0 变到无穷时，平滑分析就由“最坏情况分析”渐变到“平均情况分析”。当然，我们感兴趣的还是 σ 相对较小时的情况，可以来分析微小扰动的影响，这是平滑分析的主要意义所在。
（论文中提到“The smoothed complexity of an algorithm measures the performance of the algorithm both in terms of the input size n and in terms of the magnitude sigma of the perturbation. By varying sigma between zero and infinity, one can use smoothed analysis to interpolate between worst-case and

average-case analysis. We are most interested in the situation in which σ is small relative to…”，答这段话同样可以给分）

第四题（20 分，每小题 10 分）
论文：A Bridging Model for Parallel Computation
该文区分基于全局同步的并行算法的计算复杂性、通讯复杂性和同步复杂性。
某个算法复杂性公式是

O(N * log P) + O(N * log P) g + O(N) L

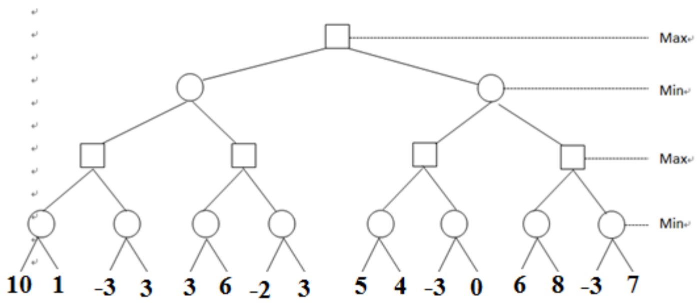
假设各个并行进程负载是均匀的，随着网络 规模 P 增加，请回答以下问题：
1.那么在一个全连接（两两直接相连）的网络中，该算法总体复杂性是多少？
2. 在一个超立方体网络中，每个进程编号为二进制，与编号仅二进制一位不同的进程直接相连，该算法总体复杂性是多少？

答案:

1 O(N * log P) + O(N * log P) * O(1) + O(N) * O(1) = O(N * log P)

2 O(N * log P) + O(N * log P) * O(log P) + O(N) * O(log P) = O(N * log P * log P)

第五题（20 分，每小题 10 分）
论文：The Solution for the Branching Factor of the Alpha-Beta Pruning Algorithm and its Optimality
请回答以下问题：
1．请按照文章阐述的 α-β 剪枝方式自左往右遍历的下面的博弈树， 写出遍历的过程并标出访问过的节点。



2．论文的主要贡献在哪里？其结论是什么？
主要贡献是证明了以下不等式

$$\mathscr{R}_{\alpha\text{-}\beta} = \lim_{h\to\infty} (N_{n,d})^{1/2h} \leq \xi_n / 1 - \xi_n$$

结论是

$$\mathscr{R}_{\alpha\text{-}\beta} = \frac{\xi_n}{1 - \xi_n}$$