

Entropía de Shannon

Cote Chavarría Héctor Alonso
cote@ciencias.unam.mx

20 de agosto de 2020

Resumen

Cuando una fuente de fotones linealmente polarizada cruza un divisor de haz polarizado (DHP), los fotones tomarán una trayectoria transmitida o reflejada, dependiendo de su ángulo de incidencia. Por ello, el haz es una fuente binaria cuya entropía de Shannon (H), proporciona una medida de la equiprobabilidad de las trayectorias. Con una simulación se calcularon 100 valores para H usando diferentes probabilidades de transmisión. Se obtuvo un error promedio de 0,33 respecto a la curva teórica. De este modo, se corroboró que $H = 1$ indica un mínimo de incertidumbre en la trayectoria de los fotones y $H=0$ un máximo.

1. Introducción

Una onda polarizada verticalmente presenta un campo eléctrico que oscila a lo largo del plano xy , como se muestra la siguiente Figura 1.

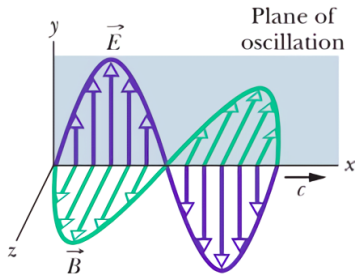


Figura 1: Luz polarizada verticalmente

Consideramos que la onda es emitida por una fuente cuántica que emite fotones polarizados.

Si la polarización tiene un ángulo θ_i respecto al eje rápido de un retardador de fase de media onda, al cruzarlo su fase será retrasada haciendo rotar su polarización un ángulo de 2θ . Figura 2.

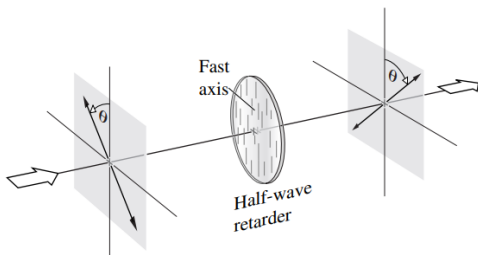


Figura 2: El retardador de fase gira el ángulo de incidencia de la luz linealmente polarizada, al doble.

De este modo, una onda incidente con un ángulo de polarización $\theta_i = 22,5^\circ$, al pasar por el retardador se obtendrá un ángulo de $\theta = 45^\circ$

Cuando un haz con estas características pasa por un divisor de haz polarizado (DHP), la componente horizontal es transmitida, mientras que la componente vertical es reflejada. Figura 3.

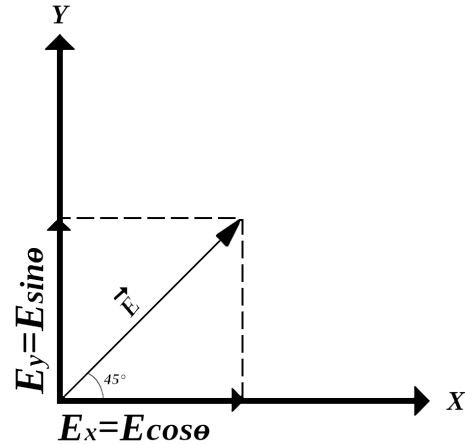


Figura 3: Componentes de la amplitud de onda polarizada con ángulo de incidencia de 45° .

Al llegar al divisor, el estado de un fotón individual está dado por:

$$|\theta\rangle = |H\rangle \cos \theta + |V\rangle \sin \theta \quad (1)$$

Donde las funciones $\cos \theta$ y $\sin \theta$ son las amplitudes de probabilidad, por lo tanto:

$$P_T = \cos^2(\theta) \quad (2)$$

$$P_R = \sin^2(\theta) \quad (3)$$

Son las probabilidades de transmisión y reflexión de un fotón, respectivamente.

Al asociar el valor de 1 cuando el fotón es transmitido y 0 cuando es reflejado, podemos considerar al haz como una fuente binaria, y así calcular el valor de la *entropía de Shannon* para variables binarias, la cual permite cuantificar la información contenida en una variable aleatoria. Su expresión general está dada por:

$$H = - \sum_{i=1}^k p_i \log_2(p_i) \quad (4)$$

para variables binarias:

$$H = -p_1 \log_2(p_1) - p_2 \log_2(p_2) \quad (5)$$

En este caso,

$$\begin{cases} T = 1 & \text{con } P_T = P_1 = p \\ R = 0 & \text{con } P_R = P_2 = 1 - p \end{cases} \quad (6)$$

Obteniéndose

$$H = -P_T \log_2(P_T) - P_R \log_2(P_R) \quad (7)$$

En el caso de $P_T = 1$ (ó $P_R = 1$), no hay incertidumbre dado que el camino que tomará el fotón queda determinado, de este modo $H = 0$, indicando que el sistema no contiene información adicional.

Por otro lado, para $P_T = P_R = 0,5$, obtenemos $H = 1$, indicando un máximo en la incertidumbre sobre el camino que tomará el fotón, y con ello un máximo en la información que se obtiene del sistema. Figura 4.

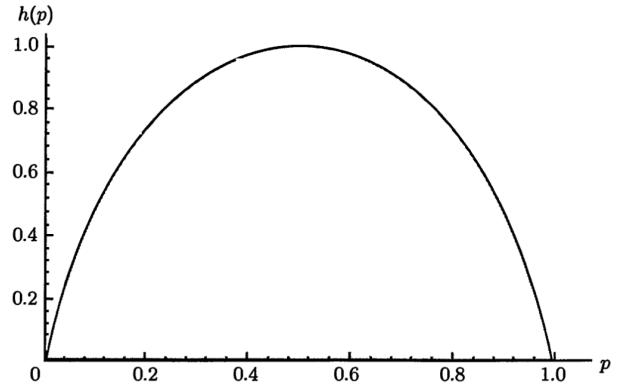


Figura 4: Gráfica de la entropía de Shannon para variables binarias

2. Metodología

Se simuló el dispositivo experimental mostrado en la figura 5, donde una fuente cuántica de fotones polarizados inciden en un retardador de fase que duplica su ángulo de incidencia, para luego llegar a un divisor de haz polarizado (DHP).

En la simulación se usaron 100 valores distintos para P_T , lo cual equivale a realizar el experimento probando diferentes ángulos de incidencia. Con cada valor de P_T se calculó el valor de la entropía de Shannon y en conjunto fueron comparados con la curva teórica, mostrada en la figura 4.

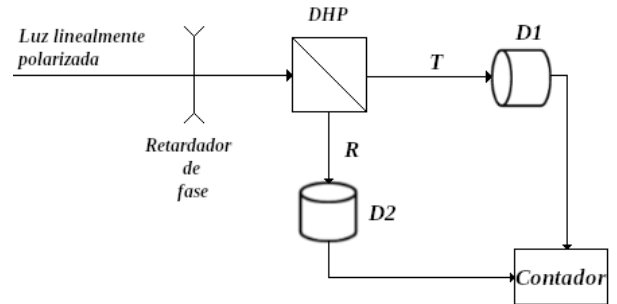


Figura 5: Dispositivo experimental

El código de la simulación fue compilado en el ambiente Jupyter notebook empleando el lenguaje de programación Python 3.6.9, con las bibliotecas: random, math, pandas 0.22.0, matplotlib 3.3.0, y numpy 1.18.1. Este puede consultarse en el siguiente repositorio: https://github.com/H-Cote/LFC2/blob/master/entropia_de_shannon.ipynb

En el programa, se consideró un haz que emi-

te 100000 fotones por segundo. Las probabilidades P_T se obtuvieron generando una lista de 100 valores aleatorios. A estas se les aplicó la función $dh()$, que simula un divisor de haz polarizado, produciendo una serie de ceros y unos, cuya proporción depende de cada P_T . Los datos generados por la función dh son guardados en la lista "serie1".

Después se crea una lista "probabilidades" con las probabilidades de transmisión de cada fotón, la cual se obtiene calculando el número de fotones transmitidos entre en total de fotones. Cada una de estas probabilidades le es aplicada la función de la entropía de Shannon, con lo que obtenemos la lista 'entropias' que contiene las entropías calculadas.

3. Resultados

Para cada experimento se calculó la entropía usando un valor P_T distinto, el resultado se representa como un punto en la gráfica. Figura 6.

Con los 100 experimentos realizados, se observa que el valor de la entropía sigue la curva experimental de la entropía de Shannon. Con un valor máximo en $H \approx 1$ cuando $P_T \approx 0,5$ y $H \approx 0$ cuando $P_T \approx 1$ ó bien $P_T \approx 0$.

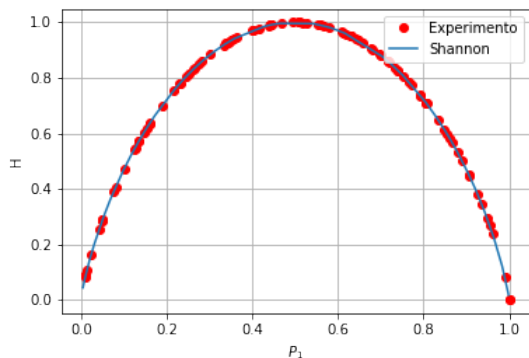


Figura 6: Comparación de los resultados obtenidos con la curva teórica de la entropía de Shannon

Se calcularon los siguientes datos estadísticos:

Datos	Valor
Promedio	0.49956
DS	0.0778382664
Varianza	0.278995101032258
Error promedio	0.337918393503877

Donde el error promedio se calculó sumando el valor absoluto de las diferencias entre los valores en la lista con los números aleatorios que forman la curva de la entropía y las entropías calculadas para cada probabilidad, después el resultado se dividió entre el total de experimentos realizados.

De este modo, se obtuvo 0,3379 de error promedio entre los valores experimentales y la curva teórica.

4. Conclusiones

Los valores experimentales se aproximan a la curva teórica con un error promedio de 0,3379.

La gráfica resultante muestra que, si $H \neq 1$ las trayectorias no son equiprobables, por lo que los fotones siguen una trayectoria preferente, reduciéndose la incertidumbre en los resultados a obtener en el sistema.

Por otro lado, cuando $H \approx 1$ la probabilidad de que los fotones sean transmitidos es igual a la probabilidad de ser reflejados por el divisor. Teniendo el valor máximo de incertidumbre en el sistema.

Lo anterior muestra que la simulación obtiene los resultados previstos por la teoría.

Referencias

- [1] Han, T. & Kobayashi, K. (2002). Mathematics of information and coding. Providence, RI: American Mathematical Society.
- [2] Walker, J., Resnick, R. & Halliday, D. (2014). Halliday & Resnick fundamentals of physics. Hoboken, NJ: Wiley.
- [3] Hecht, E. (2017). Optics. Harlow, England: Pearson Education.
- [4] Gerry, C. & Knight, P. (2005). Introductory quantum optics. Cambridge, UK New York: Cambridge University Press.
- [5] Arndt, C. (2001). Information Measures : Information and Its Description in Science and Engineering. Berlin, Heidelberg: Springer Berlin Heidelberg.