

Estadística de fotones

Cote Chavarría Héctor Alonso
cote@ciencias.unam.mx

August 13, 2020

Abstract

La emisión espontánea de fotones de un dispositivo láser, así como la formulación de la estadística de Poisson, nos indican que la distribución de fotones de una fuente láser que inciden en un divisor de haz 50:50, debe ser aleatoria y por lo tanto de tipo poissoniana. Al realizar la simulación, empleando diferentes valores de la ventana de tiempo, comprobamos estas afirmaciones, obteniendo que el factor de fano es cercano a 1 para cada estadística generada.

1 Introducción

Las fluctuaciones en el flujo de los fotones emitidos por un láser pueden ser medidas con detectores para calcular la tasa de conteo de los fotones, la cual, nos proporciona información sobre las propiedades estadísticas del flujo Φ , definido de la siguiente forma:

$$\phi = \frac{IA}{\hbar\omega} = \frac{P}{\hbar\omega} \text{fotones/s} \quad (1)$$

Donde A es el área transversal del haz, I la intensidad y P la potencia.

Las fluctuaciones son debidas a la naturaleza discreta de los fotones, a pesar de que tengamos un valor promedio constante de fotones, al tomar intervalos de tiempo más cortos, pocos de estos contendrán fotones y el resto estarán "vacíos", esto se ilustra en la Figura 1.

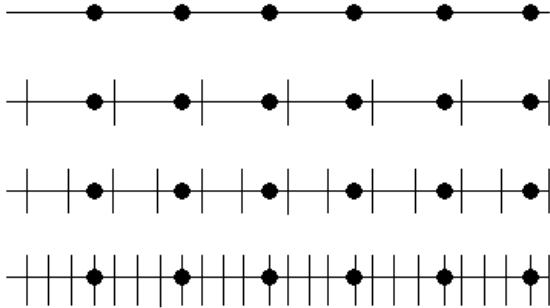


Figure 1: Al seleccionar intervalos de tiempo cada vez más cortos para las mediciones, aumentará el número de estos en los que no se detectarán fotones.

Si consideramos una fuente coherente de fotones, donde Φ , su frecuencia angular ω , intensidad I y amplitud E son constantes, la cantidad promedio de fotones a lo largo de una distancia L está dada por:

$$\bar{n} = \frac{\Phi \cdot L}{c} \quad (2)$$

Donde L es tal que \bar{n} es una cantidad entera de fotones. Si dividimos L en N intervalos, tenemos que la probabilidad de encontrar un fotón en un segmento está dada por:

$$P = \frac{\bar{n}}{N} \quad (3)$$

Por otro lado, para hallar la probabilidad de encontrar n fotones, es descrita por la expresión de la *distribución de Poisson*[2]:

$$P(n) = \frac{\bar{n}^n}{n!} e^{-\bar{n}}, n = 0, 1, 2 \quad (4)$$

la cual, toma valores enteros y describe procesos aleatorios. El promedio \bar{n} establece el valor máximo de la distribución a la vez que determina su forma.

Las fluctuaciones de la distribución alrededor de \bar{n} pueden ser cuantificadas por medio de la varianza:

$$\text{Var}(n) \equiv (\Delta n)^2 = \sum_{n=0}^{\infty} (n - \bar{n})^2 \mathcal{P}(n) \quad (5)$$

Donde Δn es la desviación estándar. Para la distribución de Poisson se cumple:

$$\text{Var}(n) \equiv (\Delta n)^2 = \bar{n} \quad (6)$$

A partir de la distribución de Poisson para una fuente coherente de fotones, se establece la siguiente clasificación de la distribución de probabilidad. Figura 2:

- Estadística Subpoissoniana $\Delta n < \sqrt{\bar{n}}$
- Estadística Poissoniana $\Delta n = \sqrt{\bar{n}}$
- Estadística Súper poissoniana $\Delta n > \sqrt{\bar{n}}$

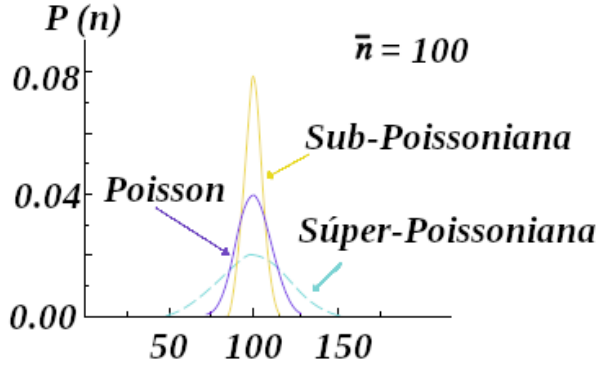


Figure 2: Comparación de las distribuciones de probabilidad subpoissoniana, poissoniana y súper poissoniana, para un mismo valor promedio de fotones $\bar{n} = 100$

Otra forma para identificar una distribución poissoniana, es utilizando la expresión:

$$F = \frac{(\Delta n)^2}{\bar{n}} = \frac{Var(n)}{\bar{n}} \quad (7)$$

Conocida como el factor de fano. Si $F = 1$ la estadística es poissoniana.

2 Metodología

En nuestro caso, consideramos una fuente láser que emite un haz coherente, este incide en un divisor de haz, resultando en un haz transmitido y otro reflejado. Estos llegan a los detectores D1 y D2 respectivamente. A su vez, estos emiten pulsos eléctricos cada vez que un foton es detectado, y la señal es enviada a un contador electrónico. Figura 3.

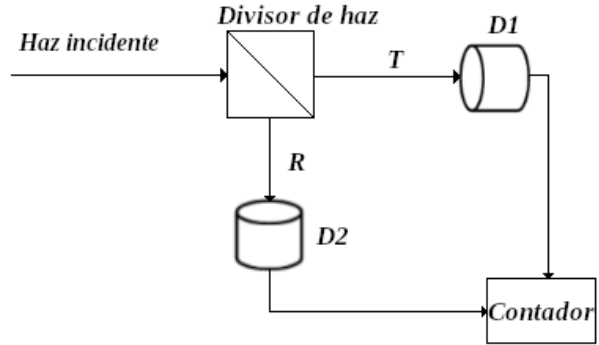


Figure 3: Esquema del dispositivo experimental para el conteo de fotones.

Los fotones emitidos por el láser poseen una distribución aleatoria, debido a que son producidos mediante el proceso conocido como *emisión espontánea*, en el que los átomos que conforman el medio activo (active laser medium), son excitados por medio de un fotón entrante (emisión estimulada) y pasado un tiempo, cada átomo puede decaer espontáneamente a un estado de energía más bajo, emitiendo un fotón que tiene exactamente la energía correspondiente a la diferencia de energía entre los dos estados. Figura 4.

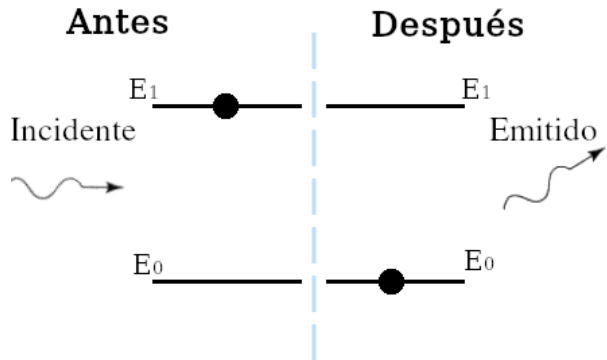


Figure 4: Emisión espontánea. Al incidir un fotón al material del medio activo, sus átomos son excitados. Después de un tiempo decaen a un estado de energía más bajo, emitiendo un fotón en el proceso

Cuando el fotón llega al divisor, se desconoce si este será transmitido o reflejado. Por ello, su ecuación de onda es descrita por la superposición de ambas posibilidades:

$$|\psi\rangle = C_1 |\psi^T\rangle + C_2 |\psi^R\rangle \quad (8)$$

donde C_1 y C_2 son los coeficientes complejos que corresponden a la amplitud de probabilidad. Se cumple:

$$|C_1|^2 + |C_2|^2 = 1 \quad (9)$$

Si se trata de un divisor de haz 50:50, es decir, con 50% de probabilidad de que el fotón incidente sea transmitido y un 50% de ser reflejado, entonces $C_1=C_2$:

$$|\psi\rangle = C_1 (|\psi^T\rangle + |\psi^R\rangle) \quad (10)$$

Si además $C_1, C_2 \geq 0$:

$$C_1^2 + C_2^2 = 1 \quad (11)$$

$$2C_1^2 = 1 \quad (12)$$

$$C_1 = \frac{1}{\sqrt{2}} \quad (13)$$

por lo tanto, la función de onda de un fotón que incide en un divisor 50:50 es

$$|\psi\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} (|\psi^T\rangle + |\psi^R\rangle) \quad (14)$$

Luego de pasar por el divisor, las distribuciones de los fotones se hacen aún más aleatorias en los haces transmitido y reflejado. Figura 5.

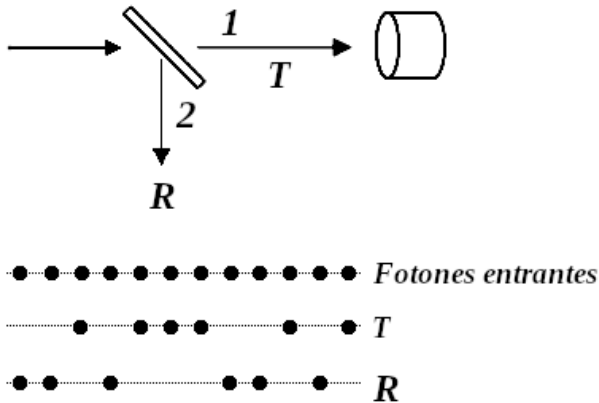


Figure 5: Los haces T y R muestran una distribución más aleatoria en comparación con el haz incidente debido a la presencia del divisor de haz

Una vez que atraviesan el divisor, los haces llegan a los detectores, estos pueden ser fotomultiplicadores (PMT) o fotodiodos de avalancha (APD), los

cuales emiten pulsos de voltaje que son enviados a un contador electrónico cuya función es contar el número de pulsos dentro de un intervalo de tiempo previamente definido.

Cabe mencionar, que estos detectores poseen una *eficiencia cuántica* (QE), definida como la razón entre el número de fotones que entran al detector n_{in} entre los que son n_{out} detectados.

$$QE = \frac{n_{out}}{n_{in}} \quad (15)$$

Se simuló el dispositivo experimental mostrado en la figura 1, compilando el código en el ambiente Jupyter notebook empleando el lenguaje de programación Python 3.6.9, con las bibliotecas: random, math, pandas 0.22.0, matplotlib 3.3.0, y numpy 1.18.1.

El código del programa está disponible en el siguiente repositorio: https://github.com/H-Cote/LFC2/blob/master/p1_est_fotones.ipynb

Se consideró la emisión aleatoria de un haz de 1×10^5 fotones por segundo, este intervalo de tiempo es dividido en 1×10^7 segmentos de modo, que en algunos de estos hay fotones y en otros no.

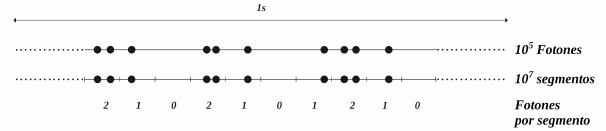


Figure 6: División de la unidad de tiempo en segmentos dt por los que pasan cantidades aleatorias de fotones.

Cada segmento dt está dado por:

$$dt = \frac{1 \text{ s}}{1 \times 10^7} = 1 \times 10^{-7} \text{ s} = 100 \text{ ns} \quad (16)$$

Así, la probabilidad de que en un segmento dt se encuentre un fotón es:

$$Ps = \frac{1 \times 10^5}{1 \times 10^7} = 0.01 \quad (17)$$

Los fotones pasan a través un divisor de haz 50:50, este criterio es simulado por medio de la siguiente regla: Para cada segmento, si el valor de un número aleatorio entre 0 y 1 es menor o igual que la probabilidad Ps entonces un fotón es transmitido, lo cual, es representado por un 1, de lo contrario es reflejado y representado por un 0. Guardamos

esta información en una lista, a la que llamamos "serie1".

A continuación se define una ventana de tiempo, esto es, un intervalo de tiempo formado por la unión de un número fijo de segmentos como se muestra en la siguiente figura.

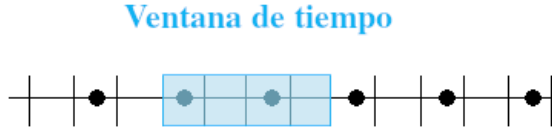


Figure 7: La ventana de tiempo está formada por un conjunto de segmentos dt , de modo que al variar su tamaño podemos cambiar el promedio \bar{n} de la distribución y en consecuencia su máximo.

En seguida, se cuentan el número de fotones por cada ventana y con esa información se forma una nueva lista, a la que llamamos "serie2".

Para calcular la probabilidad de cada valor en la "serie2", tomamos el ejemplo de un dado para el cual, queremos conocer la probabilidad de que caiga 5, para ello tenemos que contar el número de caras con ese valor, es decir, el número de "casos favorables", es decir, la frecuencia para ese resultado, y dividir la cantidad de casos entre el número de caras. Con este procedimiento, se calcula la probabilidad para cada valor n en la "serie2".

Obtenemos el valor máximo de la "serie2" (n_{max}), y con un ciclo for contamos las veces que se repite cada valor entre 0 y n_{max} . Guardamos esta información en una lista llamada "favorables" que contiene el número de "casos favorables" para cada n .

Con otro ciclo for dividimos cada valor de la lista "favorables" entre el número total de valores que contiene la lista. De este modo, obtenemos una nueva lista con las probabilidades P_n de cada valor n de la lista "serie2".

Graficamos los valores (sin repeticiones) de la lista "serie2" en el eje x y en el eje y las probabilidades de cada valor.

Por otro lado, utilizando la expresión (4), y con

el promedio \bar{n} de la "serie2" y generamos una lista con las probabilidades para cada valor (sin repeticiones) de la "serie2"

El procedimiento descrito se realizó para cuatro diferentes valores de ventana de tiempo: 100, 500, 1000 y 2000 segmentos dt .

Posteriormente, dejando el valor de ventana fijo en 2000 segmentos dt se ejecutó el programa 50 veces para poder tener valores promedio de las variables estadísticas.

3 Resultados

A continuación se muestran los gráficos obtenidos para los valores de ventana 100, 500, 1000 y 2000 segmentos dt . En ellos se observa que al aumentar el valor de la ventana el valor promedio \bar{n} aumenta y con ello el valor máximo de P_n se desplaza hacia la derecha.

Además se observa un alto grado de coincidencia entre los datos experimentales con los obtenidos con la distribución de Poisson.

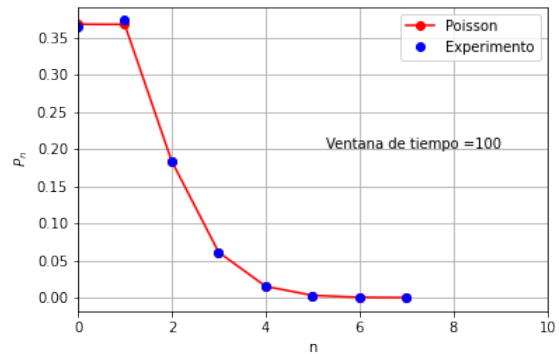


Figure 8: ventana de tiempo = 100

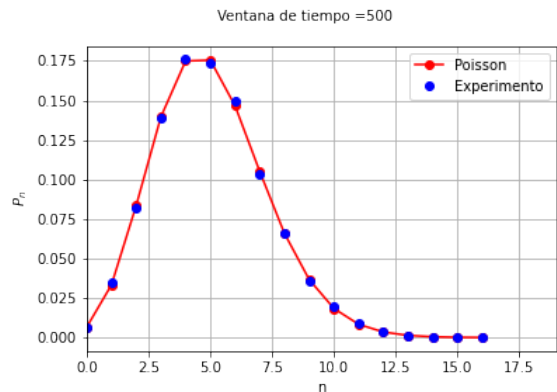


Figure 9: ventana de tiempo = 500

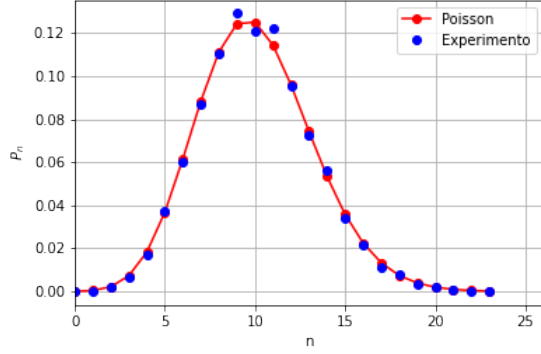


Figure 10: ventana de tiempo = 1000

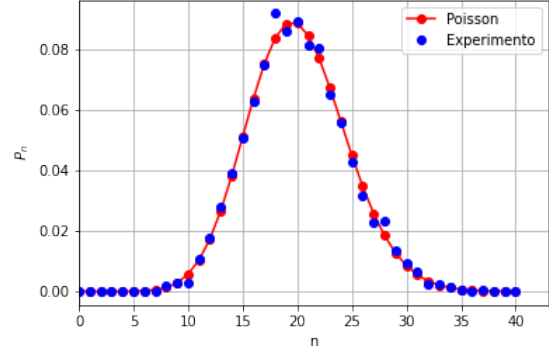


Figure 11: ventana de tiempo = 2000

Para cada ventana se obtuvieron los siguientes datos estadísticos:

	Ventana = 100	Ventana = 500	Ventana = 1000	Ventana = 2000
\bar{n}	0.99977	5.01385	10.0606	20.0454
DS	0.9891899471	5.0223581775	9.79832764	19.99053884
Varianza	0.994580286904984	2.2410618415162	3.13022804920025	4.47107804002569
F.Fano	0.98941751312802	1.00169693499008	0.973930743693219	0.997263154638969
Error	0.005304706481756	0.00189905154313	0.041616839819389	0.006130911988943
Error promedio	0.00138111729721	0.00093890056708	0.001378436555098	0.001140796207206

Donde la variable error corresponde al valor absoluto de la diferencia entre la desviación estándar y la raíz del promedio.

Mientras que el error promedio es el promedio del valor absoluto de la diferencia entre el valor experimental de la probabilidad P_n y el obtenido con la expresión de la estadística de Poisson (4).

	Promedios
\bar{n}	19.999764
DS	19.7165739912
Varianza	4.44016853414418
F.Fano	0.985852951309907
Error	0.039469943426278
Error promedio	0.001335121976589

4 Conclusiones

Notamos que el factor de Fano para cada una de las ventanas es cercano a uno.

Dejando fijo el valor de la ventana con $v = 2000$, se ejecutó el programa 50 veces para obtener medidas promedio de cada variable estadística. Los resultados se muestran en la siguiente tabla.

Al variar el valor de la ventana de tiempo, cambia el valor promedio \bar{n} y por lo tanto también el valor máximo de la probabilidad P_n .

Usando una ventana de tiempo variable o fija, en ambos casos el factor de Fano se mantiene cercano a 1, con un error de 0.039469943426278, lo cual, implica que la distribución estadística de los fotones es de tipo poissoniana y por lo tanto los fotones son emitidos aleatoriamente.

References

- [1] M. Fox (2006). Quantum Optics: An Introduction, Oxford Master Series in Physics.
- [2] Gerry, C. C., and P. L. Knight (2005). Introductory Quantum Optics, Cambridge University Press, Cambridge.
- [3] Fano factor. Wikipedia. Recuperado Agosto 10, 2020, de https://en.wikipedia.org/wiki/Fano_factor
- [4] Bertolotti, M. (2005). The history of the laser. Bristol, UK Philadelphia, PA: Institute of Physics.
- [5] Paschotta, R. (2008). Field guide to lasers. Bellingham, Wash: SPIE.
- [6] Tra“ger, F. (2012). Springer handbook of lasers and optics. Berlin New York: Springer.