

Experimento de la doble rendija

Cote Chavarría Héctor Alonso

13 de septiembre de 2020

Resumen

Se realizó una simulación del experimento de Young utilizando fotones. Los resultados obtenidos muestran que se forma un patrón de interferencia del mismo modo que en la descripción clásica de la luz. En dicha simulación también se varió la longitud de onda para $\lambda = 810nm, 497nm$ y $427nm$ consiguiéndose un resultado similar al caso clásico. Estos resultados comprueban el comportamiento dual de los fotones. Se obtuvo una desviación estándar de $7,455361185493171e-17$ para la distribución de fotones.

1. Introducción

1.1. Experimento de Young en la descripción clásica

La versión clásica del experimento de Thomas Young, consiste en una placa con un orificio por el cual incide luz, esto produce un cono coherente (frentes de onda plano), que llega a un par de rendijas que separan la onda incidente en dos frentes de onda que interfieren entre sí. El patrón de interferencia generado consta de una serie de máximos y mínimos de intensidad, los cuales son observables por medio de una pantalla colocada a una distancia R de las rendijas. Figuras 1 y 2.

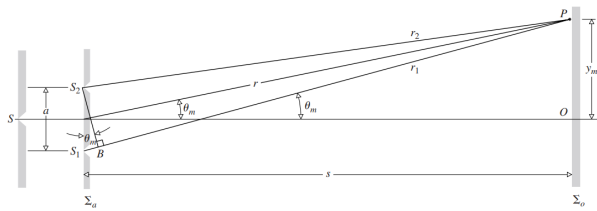


Figura 1: Relaciones geométricas de los elementos del dispositivo

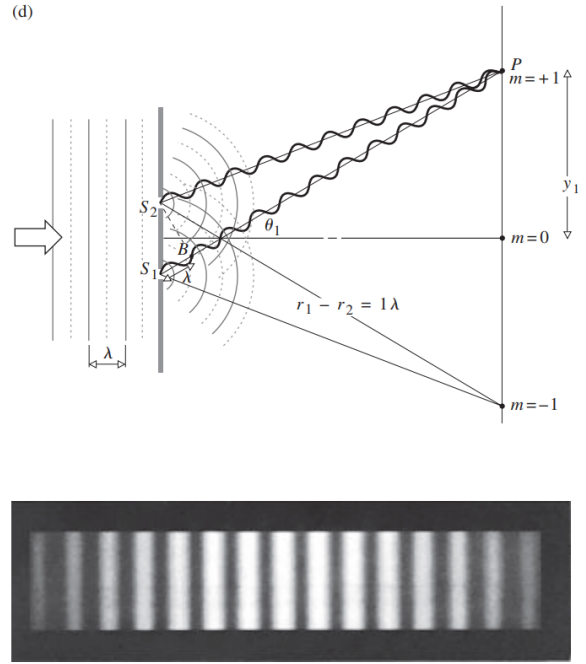


Figura 2: Dispositivo experimental bajo la descripción clásica donde los frentes de onda interfieren. En la parte de abajo se muestra el patrón generad

En figura 1 podemos ver que la distancia entre las rendijas s_1 y s_2 a un punto P de la pantalla es r_1 y r_2 , respectivamente, estás corresponden, a las deferencias de camino óptico. Trazando una recta perpendicular de r_1 hasta s_2 , podemos expresar la diferencia de comino óptico como:

$$(\overline{S_1 B}) = (\overline{S_1 P}) - (\overline{S_2 P}) \quad (1)$$

donde

$$(\overline{S_1 B}) = r_1 - r_2 \quad (2)$$

También en la Figura 1, vemos que

$$(r_1 - r_2) = a \sin \theta \quad (3)$$

Siendo a la distancia entre las rendijas. Por otro lado, la diferencia de camino óptico también se puede escribir como

$$r_1 - r_2 = m\lambda \quad (4)$$

Por lo tanto

$$a \sin \theta_m = m\lambda \quad (5)$$

Esta relación muestra que las variaciones en la longitud de onda λ modifica la posición de los máximos de intensidad en la pantalla. Figura 3.

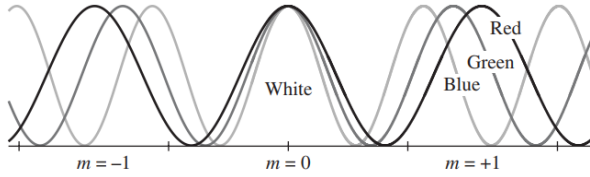


Figura 3: Desplazamiento de los máximos de interferencia en función de la longitud de onda λ . La condición para que exista un máximo es que m sea entero.

Es posible tener una expresión para la intensidad del campo de interferencia, a partir de la suma de los campos eléctricos de las ondas que emergen de cada rendija.

$$E(\mathbf{r}, t) = K_1 E(\mathbf{r}_1, t_1) + K_2 E(\mathbf{r}_2, t_2) \quad (6)$$

ya que la intensidad es proporcional al cuadrado de la energía:

$$I(\mathbf{r}) = \langle |E(\mathbf{r}, t)|^2 \rangle \quad (7)$$

Sustituyendo (6) en (7) y desarrollando considerando que el haz es coherente

$$I(\mathbf{r}) = I_1 + I_2 + 2\sqrt{I_1 I_2} \cos(\Phi_{12} - \psi) \quad (8)$$

donde

$$\begin{aligned} I_1 &= |K_1|^2 \langle |E(\mathbf{r}_1, t_1)|^2 \rangle \\ I_2 &= |K_2|^2 \langle |E(\mathbf{r}_2, t_2)|^2 \rangle \end{aligned} \quad (9)$$

Mientras que el último es el término de interferencia.

1.2. Experimento de Young en la descripción cuántica

El campo cuantizado está dado por

$$\hat{E}^{(+)}(r, t) = iK\hat{a}e^{i(kr - \omega t)} \quad (10)$$

En el experimento de Young el campo de los fotones que llegan a la pantalla (o a un detector. Figura 5) está determinado por la suma de las ondas que emergen de las rendijas, en este caso es:

$$\hat{E}^{(+)}(r, t) = iK\hat{a}_1e^{i(k \cdot r_1 - \omega t)} + iK\hat{a}_2e^{i(k \cdot r_2 - \omega t)} \quad (11)$$

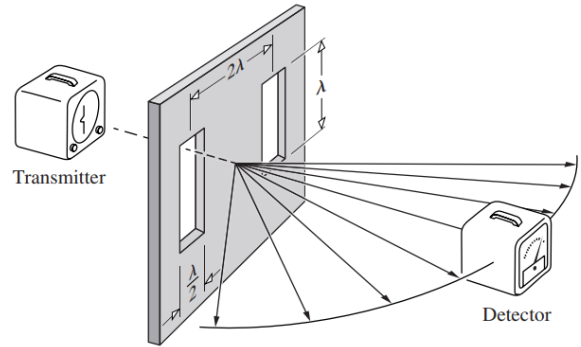


Figura 4: Experimento de Young, reemplazando la pantalla por un detector de fotones

Donde r_1 y r_2 son las distancias recorridas por los fotones desde la rendija 1 y 2, a la pantalla respectivamente.

Simplificando (11) obtenemos

$$\hat{E}^{(+)}(r, t) = iK \left[\hat{a}_1 e^{i(k \cdot r_1 - \omega t)} + \hat{a}_2 e^{i(k \cdot r_2 - \omega t)} \right] \quad (12)$$

Ya que

$$e^{ikr - i\omega t} = e^{ikr} e^{-i\omega t} \quad (13)$$

podemos escribir el campo de la siguiente forma

$$\hat{E}^{(+)}(r, t) = iK e^{-i\omega t} \left[\hat{a}_1 e^{ikr_1} + \hat{a}_2 e^{ikr_2} \right] \quad (14)$$

Donde la constante K se define como

$$K = \left(\frac{\hbar\omega}{2\varepsilon_0 V} \right)^{1/2} \quad (15)$$

En nuestro caso, el término de volumen V corresponde al volumen de coherencia del fotón, cuya longitud de coherencia R es la distancia entre la rendija de donde emerge hasta la pantalla. De este modo, tenemos un volumen como el mostrado en la Figura 5.

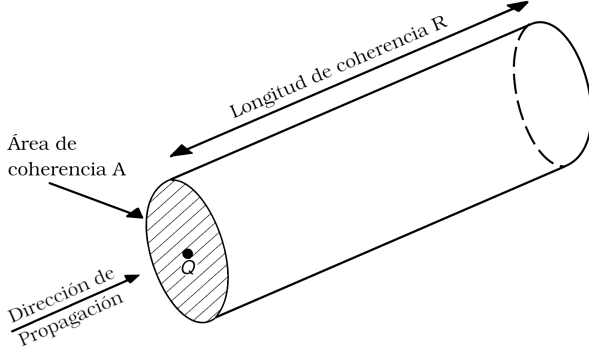


Figura 5: Volumen de coherencia del fotón.

Por lo que V es el volumen de un cilindro

$$V = (4\pi r^2)R \quad (16)$$

Sustituyéndolo en la constante

$$K = \left(\frac{\hbar\omega}{2\varepsilon_0(4\pi R)} \right)^{1/2} \frac{1}{r} \quad (17)$$

Sea

$$f(r) = i \left[\frac{\hbar\omega}{2\varepsilon_0(4\pi R)} \right]^{1/2} \frac{1}{r} \quad (18)$$

De modo que el campo resultante de la superposición es

$$\hat{E}^{(+)}(\mathbf{r}, t) = f(r) [\hat{a}_1 e^{ikr_1} + \hat{a}_2 e^{ikr_2}] e^{-i\omega t} \quad (19)$$

Para la una expresión de la intensidad, es necesario multiplicar el campo por su conjugado dado por

$$\hat{E}^{(-)}(\mathbf{r}, t) = [\hat{E}^{(+)}(\mathbf{r}, t)]^\dagger \quad (20)$$

Asi como el operador de densidad

$$\hat{\rho}_F = \sum_i P_i |i\rangle\langle i| \quad (21)$$

donde

$$P_n = \frac{\bar{n}^n}{(1 + \bar{n})^{n+1}} \quad (22)$$

es la probabilidad de detectar n fotones en el campo. Con lo anterior, la intensidad está dada por

$$I(\mathbf{r}, t) = \sum_i P_i \langle i | \hat{\mathbf{E}}^{(-)}(\mathbf{r}, t) \cdot \hat{\mathbf{E}}^{(+)}(\mathbf{r}, t) | i \rangle \quad (23)$$

siendo

$$\begin{aligned} & \left| \hat{\mathbf{E}}^{(-)}(\mathbf{r}, t) \cdot \hat{\mathbf{E}}^{(+)}(\mathbf{r}, t) \right| = \\ & f(r) \left[\hat{a}_1^\dagger e^{-ikr_1} + \hat{a}_2^\dagger e^{-ikr_2} \right] e^{ti\omega t} \\ & \cdot f(r) \left[\hat{a}_1 e^{ikr_1} + \hat{a}_2 e^{ikr_2} \right] e^{-i\omega t} \end{aligned} \quad (24)$$

Ya que la probabilidad de que los fotones pasen por una u otra rendija es la misma, podemos escribir el operador de campo \hat{a} como

$$\hat{a} = \frac{1}{\sqrt{2}} (\hat{a}_1 + \hat{a}_2) \quad (25)$$

En el caso de un fotón incidente, su estado es

$$|1\rangle_a |0\rangle_b = \frac{1}{\sqrt{2}} (|1, 0\rangle + |0, 1\rangle) \quad (26)$$

Sustituyendo en (23) la intensidad es

$$\begin{aligned} I(\mathbf{r}, t) = & |f(\mathbf{r})|^2 \left\{ \frac{1}{2} \langle 1, 0 | \hat{a}_1^\dagger \hat{a}_1 | 0, 1 \rangle \right. \\ & + \frac{1}{2} \langle 0, 1 | \hat{a}_2^\dagger \hat{a}_2 | 0, 1 \rangle \\ & \left. + \langle 1, 0 | \hat{a}_1^\dagger \hat{a}_2 | 0, 1 \rangle \cos \Phi \right\} \end{aligned} \quad (27)$$

Es importante notar que esta expresión muestra que cada fotón incidente interfiere consigo mismo.

Desarrollando (27), obtenemos

$$I(\mathbf{r}, t) = |f(\mathbf{r})|^2 [1 + \cos \Phi] \quad (28)$$

2. Metodología

Consideramos un haz coherente de fotones individuales que pasan a través de las dos rendijas de experimento de Young, por lo que el campo total está dado por (19). Por lo que el campo de un solo fotón atravesando alguna de las rendijas es

$$\hat{E}^{(+)}(\mathbf{r}, t) = f(r) [\hat{a}e^{ikr}] e^{-i\omega t} \quad (29)$$

Tomando en cuenta sólo la parte espacial se reduce a

$$\hat{E}^{(+)}(\mathbf{r}) = f(r) (\hat{a}e^{ikr}) \quad (30)$$

Ya que el número de onda está dado por $k = \frac{2\pi}{\lambda}$ y considerando para este caso

$$\hat{a} = \frac{1}{\sqrt{2}} (\hat{a}_1 + \hat{a}_2) = \frac{1}{\sqrt{2}} \quad (31)$$

Obtenemos

$$\hat{E}^{(+)}(\mathbf{r}) = \frac{1}{\sqrt{2}} f(r) \left(e^{i\frac{2\pi}{\lambda}r} \right) \quad (32)$$

En la simulación se utiliza esta definición para el campo de cada fotón que pasa por las rendijas.

El campo resultante de la superposición es modulado al multiplicarlo por la función densidad de la función normal.

$$d(x; \mu, \sigma^2) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)^2} = r_{mod} \quad (33)$$

con $\sigma = 0,0000127501770$ y $\Delta\mu = 0,00005$

$$r_{mod} = \frac{1}{31289,1562} e^{-\frac{x^2}{2\Delta\mu}} \quad (34)$$

Donde $\Delta\mu = |(\mu - \sigma) - (\mu + \sigma)|$ es la anchura de la distribución normal (gaussiana).

Después, el campo es multiplicado por su conjugado para obtener $I(r)$ que nos dará una representación de la amplitud de probabilidad.

2.1. Simulación

El código de la simulación fue compilado en el ambiente Jupyter notebook empleando el lenguaje de programación Python 3.6.9, con las bibliotecas: random, math, cmath, pandas 0.22.0, matplotlib 3.3.0, numpy 1.18.1, scipy.constants y Axes

3D. Este puede consultarse en el siguiente repositorio: https://nbviewer.jupyter.org/github/H-Cote/LFC2/blob/master/p3_interferencia_cuantica.ipynb

El código consiste de tres ciclos anidados. Los dos primeros simulan el desplazamiento vertical y horizontal en una pantalla como la mostrada en la Figura 6.

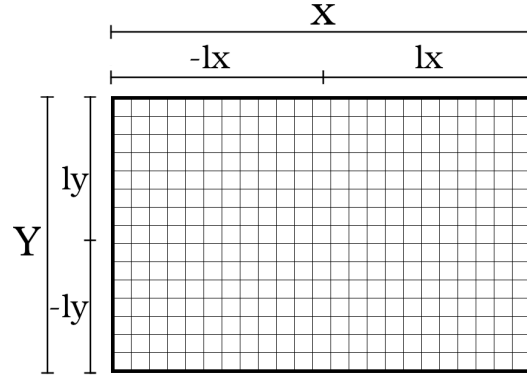


Figura 6: Dimensiones de la pantalla

La dimensión de la pantalla es $X = 200$ con $lx = 100$ y $Y = 200$ con $ly = 100$, por lo tanto su resolución es $X \times Y = 40000$ píxeles.

Cada píxel es ubicado por una pareja ordenada (px, py) . El primer ciclo realiza el desplazamiento en el eje X , modificando los valores de px , por medio de la expresión:

$$px = l/10000 \quad (35)$$

donde l es el índice del ciclo, del mismo modo

$$py = k/10000 \quad (36)$$

modifica los valores de py donde k es el índice del segundo ciclo.

El tercer ciclo, con índice $j = 1, 2$, calcula la distancia R entre las rendijas y la pantalla. Estas se ubican en los puntos (x, y, z) y $(-x, y, z)$, de modo que la distancia entre las rendijas y un punto en la pantalla (px, py, pz) es

$$R_1 = \sqrt{(x - px)^2 + (y - py)^2 + (z - pz)^2} \quad (37)$$

ó

$$R_2 = \sqrt{(-x - px)^2 + (y - py)^2 + (pz - z)^2} \quad (38)$$

dependiendo del valor de j . Este comportamiento es programado mediante la expresión:

$$x = (-1)^j r \quad (39)$$

Siendo $r = a/2$ donde $a = 2,5 \times 10^{-4}$ es la separación entre las rendijas

Con distancia R obtenida se calcula el factor $f(R)$ mostrado en (18) y con este se calcula el valor de $E(R)$ dado en (32).

La superposición de los campos se obtiene con la variable Ap que guarda la suma de los campos en cada paso de los ciclos, es decir, en este paso se realiza la suma dada en (19), cuyo valor se va acumulando con cada corrida de los ciclos.

El campo resultante es modulado al multiplicarlo por el factor $rmod$, mostrado en (34) haciendo $x = px$.

Luego el campo es multiplicado por su conjugado, en congruencia con (23):

$$I(\mathbf{R}) = \langle \hat{E}^{(-)}(R) \rangle \langle \hat{E}^{(+)}(R) \rangle \quad (40)$$

Obteniéndose de esta manera los valores de I para cada punto en la pantalla.

Finalmente los datos de las coordenadas px , py y de $I(R)$ (que nos genera la amplitud de probabilidad) son guardados en tres listas, cada una con una longitud de 40000 elementos, uno por cada pixel.

3. Resultados

La distribución de probabilidad obtenida muestra 7 máximos principales, cuyo máximo global se encuentra en el centro de la pantalla. Más allá del rango de estos máximos, es menos probable la detección de fotones. Figura 7.

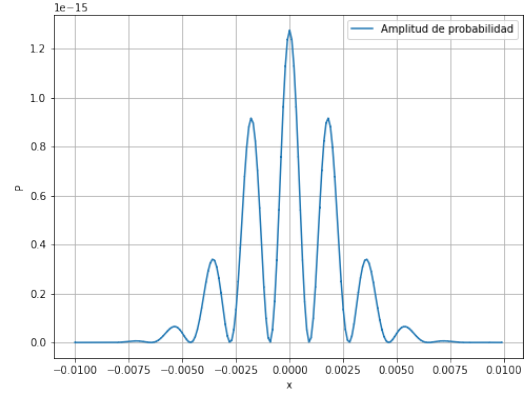


Figura 7: Amplitud de probabilidad obtenida en la simulación

Se realizó una vista en tres dimensiones del patrón de interferencia. Figura 8.

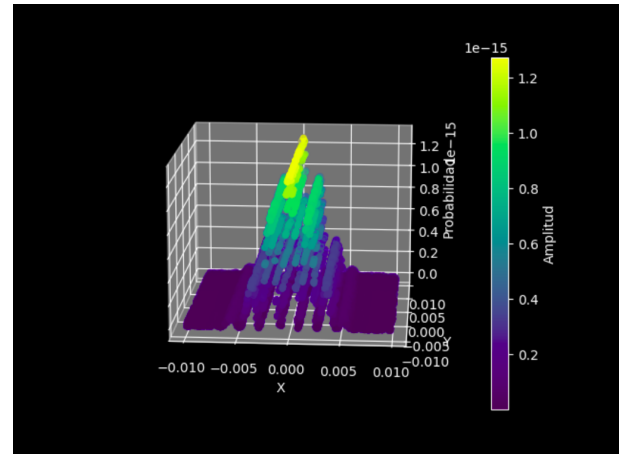


Figura 8: Vista en tres dimensiones del patrón de interferencia formado en la pantalla

Los datos estadísticos de la distribución son los siguientes:

Parámetro	Valor
Promedio	4.4675572365565494e-17
Desviación estándar	7.455361185493171e-17
Varianza	5.558241040615814e-33

Además, se obtuvieron vistas del patrón de interferencia formado en la pantalla para 500 y 5000 fotones (Figuras 9 y 10). En esta simulación intensidad de cada punto depende de su valor de probabilidad.

En el primer caso solo son visibles cinco de los

siete máximos, mientras que en el segundo caso ya es posible observarlos.

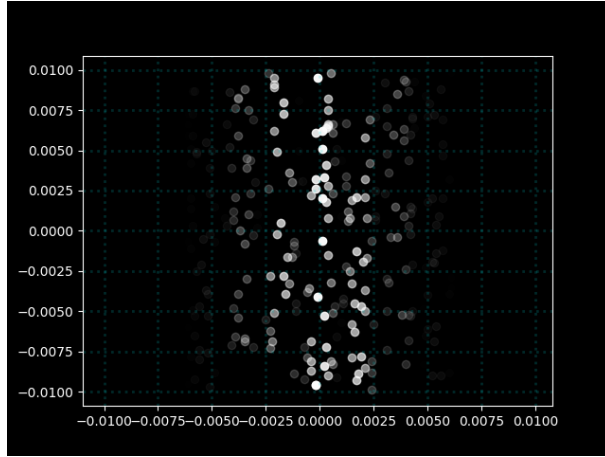


Figura 9: Patrón de interferencia con 500 fotones.

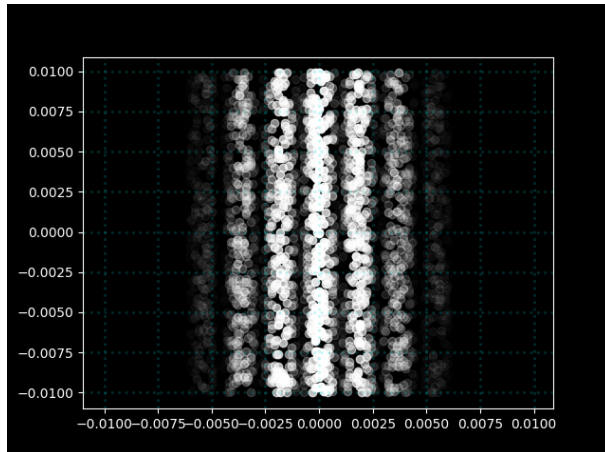


Figura 10: Patrón de interferencia con 5000 fotones.

Al variar la longitud de onda λ con los valores $810nm$, $497nm$ y $427nm$, se obtuvo la gráfica de la Figura 11. Se observa que para longitudes de onda corta la distancia entre los máximos se reduce, mientras que para longitudes de onda grandes la distancia entre máximos aumenta.

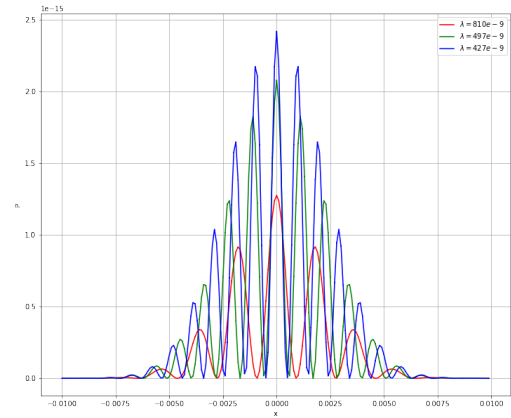


Figura 11: Desplazamiento de los máximos de onda en función de λ

4. Conclusiones

La desviación estándar de la distribución es $7,455361185493171e - 17$.

En consistencia con la expresión (27) la simulación muestra que bajo la descripción cuántica de la luz, es posible obtener un patrón de interferencia del mismo modo que con la descripción clásica.

De igual modo, los resultados obtenidos al variar λ concuerdan con la expresión (5), derivada de la descripción clásica. Se comprueba que pesar de usar de partículas individuales, el patrón de interferencia formado muestra un comportamiento es ondulatorio.

Referencias

- [1] Gerry, C. C., and P. L. Knight (2005). Introductory Quantum Optics, Cambridge University Press, Cambridge.
- [2] Mandel, L. & Wolf, E. (1995). Optical coherence and quantum optics. Cambridge: Cambridge University Press.
- [3] Devore, J. & Berk, K. (2012). Modern mathematical statistics with applications. New York, NY: Springer.
- [4] Soper D. (2012), The density operator in quantum mechanics (pp. 8 - 9), University of Oregon. Recuperado Septiembre 8, 2020, de <https://web.archive.org/web/20180205043735/https://pages.uoregon.edu/soper/QuantumMechanics/density.pdf>
- [5] Hecht, E. (2017). Optics. Harlow, England: Pearson Education.