

中国科学技术大学少年班“创新试点班”2023 选拔回忆

栗山未来

2023 年 6 月 27 日

1 复试数学

一. (20 分) 求参数圆 $(R \sin t, R \cos t, 0)$ 的曲率和挠率。

二. (20 分) 一个光滑正则的参数曲线 $\vec{r}(s)$ (s 为弧长参数) 的曲率恒为 0, 求证: $\vec{r}(s)$ 是直线的一部分。

三. (20 分) 一个光滑正则的参数曲线 $\vec{r}(s)$ (s 为弧长参数) 的曲率恒正, 挠率恒为 0, 求证: $\vec{r}(s)$ 在某个平面内。

四. (20 分) 一个光滑的参数曲线 $\vec{r}(s)$ (s 为弧长参数, $s > 0$) 在 s 处的曲率为 $\kappa(s)$, 挠率为 $\tau(s)$, 副法向量为 $\vec{b}(s)$, 定义参数曲线 $\tilde{\vec{r}}(s)$ 如下:

$$\tilde{\vec{r}}(s) = \int_0^s \vec{b}(s_1) \, ds_1.$$

其在 s 处的曲率为 $\tilde{\kappa}(s)$, 挠率为 $\tilde{\tau}(s)$, 求证: s 是 $\tilde{\vec{r}}(s)$ 的弧长参数, 且 $\tilde{\kappa}(s) = \tau(s)$, $\tilde{\tau}(s) = \kappa(s)$ 。

五. (20 分) 一个光滑正则的闭合参数曲线 $\vec{r}(s)$ (s 为弧长参数, $s \in [0, L]$), 弧长为 L , $\vec{r}(0) = \vec{r}(L)$ 。不妨假设它是简单的, 即: $\forall 0 \leq s_1 < s_2 < L: \vec{r}(s_1) \neq \vec{r}(s_2)$ 。设其在 s 处的曲率为 $\kappa(s)$, 求证:

$$\int_0^L \kappa(s) \, ds \geq 2\pi.$$

2 复试物理

一. (20 分)

- 在 p - V 图画出卡诺循环示意图。(5 分)
- 写出理想卡诺循环的效率。(5 分)
- 为什么理想卡诺热机是可逆的? 卡诺循环高明在哪里?(5 分)
- 不用卡诺定理, 证明“理想卡诺热机的效率与工作物质无关”。(5 分)

二. (40 分) 如图, T - S 图里有形如 U,S,T,C 边缘的四个热机循环, 上下界均与 T_1, T_2 对齐, 仅使用温度为 T_1, T_2 的两个热源, 不与其他物质传热, 所有过程均视为准静态过程。

- 哪个热机效率最高? 说明理由。
- 分析每个循环是否可逆? 说明理由。
- 对每个循环分析, 能否通过增加一个恒温热源增加其热机的效率? 说明理由。若可以, 说明方案。
- 对每个循环分析, 其反向运转能否起到制冷的效果? 说明理由。
- 对每个循环分析, 能否通过增加一个恒温热源增加其反向运转时制冷的效率? 说明理由。若可以, 说明方案。



三. (20 分) 有一个带有绝热密封活塞的绝热光滑气缸, 内有一处于平衡态的理想气体, 初始体积为 V_1 , 活塞不受外力作用。

- 缓慢拉动活塞至 V_2 , 期间始终为准静态过程, 熵如何变化?
- 快速拉动活塞至 V_2 , 期间始终为非平衡状态, 然后气体扩散到平衡态。求最后的熵相比初始状态的熵怎么变化?

四. (20 分) 有一个长条形的长方形金属棒, 初始温度为 T_1 。方法 A 使用一个高温热源从侧面加热金属棒, 由于金属棒较细, 可以视为全程均处于平衡态, 直至温度达到 T_2 。方法 B 使用一个高温热源从端面加热金属棒, 由于金属棒较长, 在加热过程始终不平衡, 加热一段时间后停止加热, 金属棒达到平衡时温度也达到 T_2 。金属棒仅和热源传热, 忽略金属棒的体积变化。

- 试分析两种方法下金属棒熵变的差别。
- 试分析两种方法下“熵流”与“熵产生”对熵变的贡献。