クロソイド曲線

クロソイド曲線の基本式

式番号	式	説明
(1)	$RL=A^2$	曲率半径Rと曲線長Lの積が定数(一定)
(2)	$\dfrac{d\tau}{dL}=\dfrac{1}{R}$	曲率の定義式: 曲線の曲がり具合を表す
(3)	$\tau = \dfrac{L^2}{2A^2} = \dfrac{L}{2R} $	接線角τはクロソイドパラメータ A と曲線長 L で決まる 分母のA^2に(1)式を再代入
(4)	$L=A\sqrt{2\tau}$	(3)式をLについて解く
(5)	$R=\dfrac{A^2}{L}=\dfrac{A}{\sqrt{2\tau}}$	(1)式に(4)式を代入
(6)	$dx = dL \cos\tau$ $dy = dL \sin\tau$	曲線の微小変化dx,dyは、曲線長の微小増分dLと接線角τを成す
(7)	$x = \dfrac{A}{\sqrt{2}}\displaystyle\int^\tau_0 \dfrac{\cos\tau}{\sqrt{\tau}}d\tau$ $y = \dfrac{A}{\sqrt{2}}\displaystyle\int^\tau_0 \dfrac{\sin\tau}{\sqrt{\tau}}d\tau$	クロソイド曲線(x,y)は、 クロソイドパラメータAと接線角τで決まる ここで、接線角τは(3)式で定まる

接線角τの導出

(1)式をRの式にした$R=\dfrac{A^2}{L}$を(2)式の右辺に代入すると、微分方程式$\dfrac{d\tau}{dL}=\dfrac{L}{A^2}$が得られる。これを$\tau$について解く^1。

$$ \tau = \int^L_0{\frac{d\tau}{dL}dL} = \int^L_0{\frac{L}{A^2}}dL = \frac{1}{A^2}\int^L_0{L}dL=\frac{1}{A^2}\cdot\frac{1}{2}L^2 = \frac{L^2}{2A^2} $$

クロソイド曲線(x,y)の導出

(6)式から(7)式を導く。まず、(6)式に(4)式を代入してτで式をまとめる[^2]。

$$ dx = dL\cos\tau= d(A\sqrt{2\tau})\cos\tau = A\cdot \dfrac{1}{2}(2\tau)^{\frac{1}{2}-1}\cdot d(2\tau)\cos\tau d\tau = \dfrac{Ad\tau}{\sqrt{2\tau}}\cos{\tau} $$

$$ dy = dL\sin\tau= d(A\sqrt{2\tau})\sin\tau = A\cdot \dfrac{1}{2}(2\tau)^{\frac{1}{2}-1}\cdot d(2\tau)\sin\tau d\tau = \dfrac{Ad\tau}{\sqrt{2\tau}}\sin{\tau} $$

したがって、(6)式は二つの微分方程式になる。

$$ \frac{dx}{d\tau} = \dfrac{A}{\sqrt{2\tau}}\cos{\tau}, \hspace{0.5cm} \frac{dy}{d\tau} = \dfrac{A}{\sqrt{2\tau}}\sin{\tau} $$

これらの微分方程式を各々解く。

$$ x = \int^\tau_0 \frac{dx}{d\tau}d\tau=\int^\tau_0\dfrac{A}{\sqrt{2\tau}}\cos\tau d\tau = \dfrac{A}{\sqrt{2}}\int^\tau_0\frac{\cos\tau}{\sqrt{\tau}}d\tau $$

$$ y = \int^\tau_0 \frac{dy}{d\tau}d\tau=\int^\tau_0\dfrac{A}{\sqrt{2\tau}}\sin\tau d\tau = \dfrac{A}{\sqrt{2}}\int^\tau_0\frac{\sin\tau}{\sqrt{\tau}}d\tau $$

(7)式がこれで導出された。(7)式はフレネル積分を含む式である。

クロソイド曲線(x,y)の計算

クロソイド曲線上の任意の点 P(x,y)は、クロソイドパラメータAと接線角τで表されているが、(7)式のままでは具体的に値を計算できない。いったん被積分関数を無限級数にした後に積分する。無限級数の形にすることによってコンピュータ上で正確に値を計算可能になる。

$$ \begin{array}{cl} x & = \dfrac{A}{\sqrt2} \displaystyle\int^\tau_0 \dfrac{\cos\tau}{\sqrt{\tau}}d\tau = \dfrac{A}{\sqrt2{}} \int^\tau_0 \tau^{ -1/2 } (1 - \dfrac{\tau^2}{2!} + \dfrac{\tau^4}{4!} - \dfrac{\tau^6}{6!} \dots) d\tau; \hspace{0.5cm} //\cos\tau\text{を展開} \ \ & = \dfrac{A}{\sqrt2{}} \displaystyle\int^\tau_0 (\tau^{-1/2} - \frac{\tau^{3/2}}{2!} + \frac{\tau^{7/2}}{4!} - \frac{\tau^{11/2}}{6!} \dots)d\tau; \hspace{1cm} // 因子\tau^{-1/2}を掛ける \ \ & = \dfrac{A}{\sqrt2{}} \left(2\tau^{1/2} - \dfrac{2\tau^{5/2}}{5\cdot2!} + \dfrac{2\tau^{9/2}}{9\cdot4!} - \dfrac{2\tau^{13/2}}{13\cdot6!} + \dots +\dfrac{(-1)^{n-1} 2\tau^{(4n-3)/2}}{(4n-3)\cdot(2n-2)!}+ \dots\right); //積分 \ \ & = A\sqrt{2\tau}\left(1 - \dfrac{\tau^2}{5\cdot 2!} + \dfrac{\tau^4}{9\cdot4!} - \dfrac{\tau^6}{13\cdot6!} + \dots +\dfrac{(-1)^{n-1} \tau^{2(n-1)}}{(4n-3)\cdot(2n-2)!}+ \dots\right); // 2\tau^{1/2}を抽出 \ \ & = A\sqrt{2\tau}\left(\displaystyle\sum^{\infty}_{n=1}\dfrac{(-1)^{n-1} \tau^{2(n-1)}}{(4n-3)\cdot(2n-2)!}\right) \ \ \end{array} $$

$$ \begin{array}{cl} y & = \dfrac{A}{\sqrt{2}} \displaystyle\int^\tau_0 \dfrac{\sin\tau}{\sqrt{\tau}}d\tau = \dfrac{A}{\sqrt2{}} \int^\tau_0 \tau^{ -1/2 } (\tau - \dfrac{\tau^3}{3!} + \dfrac{\tau^5} {5!} - \dfrac{\tau^7}{7!} \dots) d\tau; \hspace{0.5cm} //\sin\tau\text{を展開} \ \ & = \dfrac{A}{\sqrt2{}} \displaystyle\int^\tau_0 (\tau^{1/2} - \frac{\tau^{5/2}}{3!} + \frac{\tau^{9/2}}{5!} - \frac{\tau^{13/2}}{7!} \dots)d\tau; \hspace{1cm} // 因子\tau^{-1/2}を掛ける \ \ & = \dfrac{A}{\sqrt2{}} \left(\dfrac{2}{3}\tau^{3/2} - \dfrac{2\tau^{7/2}}{7\cdot3!} + \dfrac{2\tau^{11/2}}{11\cdot5!} - \dfrac{2\tau^{15/2}}{15\cdot7!} + \dots +\dfrac{(-1)^{n-1} 2\tau^{(4n-1)/2}}{(4n-1)(2n-1)!}+ \dots\right); //積分 \ \ & = A\sqrt{2\tau}\left(\dfrac{\tau}{3} - \dfrac{\tau^3}{7\cdot 3!} + \dfrac{\tau^5}{11\cdot5!} - \dfrac{\tau^7}{15\cdot7!} + \dots +\dfrac{(-1)^{n-1} \tau^{2n-1}}{(4n-1)(2n-1)!}+ \dots\right); // 2\tau^{1/2}を抽出 \ \ & = A\sqrt{2\tau}\left(\displaystyle\sum^{\infty}_{n=1}\dfrac{(-1)^{n-1} \tau^{2n-1}}{(4n-1)\cdot(2n-1)!}\right) \end{array} $$

これで、x, yどちらも無限級数で表せたのでコンピュータで計算可能になった。

また、これらに$(3)式\tau=\dfrac{L}{2R}と(4)式L=\sqrt2\tau$式を代入すると、クロソイド曲線ではお馴染みの計算式であることがわかる。

$$ x = L\left(1 - \dfrac{L^2}{40R^2} + \dfrac{L^4}{3456R^4} - \dfrac{L^6}{599040R^6} +\dots\right), y = \dfrac{L^2}{6R}\left(1 - \dfrac{L^2}{56R^2} + \dfrac{L^4}{7040R^4} - \dfrac{L^6}{1612800R^6} + \dots \right) $$

数値計算上の工夫

一般に無限級数で表現される一般項をそのままコンピュータで計算する際には次の課題がある。

- 6 乗 7 乗など高次の項は整数値がコンピュータ上で扱える最大値を超えてしまい誤った数値になる
- 級数は小さい順や大きい順に計算しないと誤差が大きくなる
- 級数を有限項で打ち切る場合は、精度評価しておく必要がある

したがって、こうした無限級数の計算では、一般項そのものを計算するのではなく、隣接二項間漸化式を利用して各項を逐次計算する。各項は十分小さな値になったところで計算を終了すれば良い。この方針でクロソイド曲線を求めるアルゴリズムを以下に示す。

級数における係数数列の一般項

クロソイド曲線(x,y)の共通項の各項を要素とする数列をそれぞれx_n, y_nとすると、x, yの式は次のようになる。

$$ \begin{array}{cll} x = & A\sqrt{2\tau}(x_1+ x_2 + x_3 + \cdots), & x_n = \left\{ 1, -\dfrac{\tau^2}{5\cdot2!}, \dfrac{\tau^4}{9\cdot4!}, -\dfrac{\tau^6}{13\cdot6!}, \cdots \right\} \\ y = & A\sqrt{2\tau}(y_1+ y_2 + y_3 + \cdots), & y_n = \left\{ \dfrac{\tau}{3}, -\dfrac{\tau^3}{7\cdot3!}, \dfrac{\tau^5}{11\cdot5!}, -\dfrac{\tau^7}{15\cdot7!}, \cdots \right\} \end{array} $$

さらに偶数項をx_n奇数項目をy_nとする新しい数列c_nを考えると、x, yは次のようになる。

$$ \begin{array}{c} x = A\sqrt{2\tau}(x_1+ x_2 + x_3 + \cdots) = A\sqrt{2\tau}(c_0 + c_2 + c_4 + \cdots) \\ y = A\sqrt{2\tau}(y_1+ y_2 + y_3 + \cdots) = A\sqrt{2\tau}(c_1 + c_3 + c_5 + \cdots) \\ c_n = \left\{ 1, \dfrac{\tau}{3}, -\dfrac{\tau^2}{5\cdot2!}, -\dfrac{\tau^3}{7\cdot3!}, \dfrac{\tau^4}{9\cdot4!}, \dfrac{\tau^5}{11\cdot5!}, -\dfrac{\tau^6}{13\cdot6!}, -\dfrac{\tau^7}{15\cdot7!}, \cdots \right\} \end{array} $$

この新しい数列c_nの隣接二項漸化式を求めるために$c_{n+1}とc_n$の商である数列$\dfrac{c_{n+1}}{c_n}$を考える。

$$ \frac{c_{n+1}}{c_n} = \left\{ \frac{\tau}{3\cdot1}, -\frac{3\tau}{5\cdot2}, \frac{5\tau}{7\cdot3}, -\frac{7\tau}{9\cdot4}, \frac{9\tau}{11\cdot5}, -\frac{11\tau}{13\cdot6}, \frac{13\tau}{15\cdot7}, \dots \right\} = \frac{(-1)^n(2n+1)\tau}{(2n+3)(n+1)} $$

したがって数列c_nは、隣接二項間漸化式として$ c_{n+1} = \dfrac{(-1)^n(2n+1)\tau}{(2n+3)(n+1)}c_n $ であることがわかった。

この漸化式を用いると初項$c_0=1$を与えるだけで数列c_n の各項が求められ、計算過程において、数列c_nの元になった数列x_n,y_nを交互に計算していることがわかる。

$$ \begin{array}{cccl} c_0 =& 1 &=& 1 && &=& x_1\\ c_1 =& (-1)^0 \dfrac{\tau}{3\cdot1}c_0 &=& \dfrac{\tau}{3}\cdot1 &=& \dfrac{\tau}{3} & = & y_1\\ c_2 =& (-1)^1 \dfrac{3\tau}{5\cdot2}c_1 &=& -\dfrac{3\tau}{5\cdot2!}\cdot \dfrac{\tau}{3} &=& -\dfrac{\tau^2}{5\cdot2!} &=& x_2\\ c_3 =& (-1)^2 \dfrac{5\tau}{7\cdot3}c_2 &=& \dfrac{5\tau}{7\cdot3} \cdot -\dfrac{\tau^2}{5\cdot2!}&=& - \dfrac{\tau^3}{7\cdot3!} &=& y_2\\ c_4 =& (-1)^3 \dfrac{7\tau}{9\cdot4}c_3 &=& -\dfrac{7\tau}{9\cdot4} \cdot -\dfrac{\tau^3}{7\cdot3!}&=& \dfrac{\tau^4}{9\cdot4!} &=& x_3 \\ \dots \end{array} $$

数列c_nの漸化式から$x_1\rightarrow y_1 \rightarrow x_2 \rightarrow \dots$と順番に計算できる。これらを$x, y$に交互に足し合わせることで目的の$(x,y)$の理論式である(7)式に一致する。この時、$y_n$が十分小さくなるまで繰り返せば良い。

$$ \begin{array}{cl} x & = A\sqrt{2\tau}(c_0 + c_2 + c_4 + \cdots) = A\sqrt{2\tau}(x_1 + x_2 + x_3 + \cdots) \ & \ & = A\sqrt{2\tau}\left(1 - \dfrac{\tau^2}{5\cdot 2!} + \dfrac{\tau^4}{9\cdot4!} - \dfrac{\tau^6}{13\cdot6!} + \dots +\dfrac{(-1)^{n-1} \tau^{2(n-1)}}{(4n-3)(2n-2)!}+ \dots\right) \ & \ y & = A\sqrt{2\tau}(c_1 + c_3 + c_5 + \cdots) = A\sqrt{2\tau}(y_1 + y_2 + y_3 + \cdots) \ & \ & = A\sqrt{2\tau}\left(\dfrac{\tau}{3} - \dfrac{\tau^3}{7\cdot 3!} + \dfrac{\tau^5}{11\cdot5!} - \dfrac{\tau^7}{15\cdot7!} + \dots +\dfrac{(-1)^{n-1} \tau^{2n-1}}{(4n-1)(2n-1)!}+ \dots\right) \ \end{array} $$

丁張マンの中でのクロソイド曲線の計算コード

本稿で考察した内容そのもので実装がなされている。

```
T = Tau(A, R)
X = 1
Y = T/3
g = -Y
h = 1
I = 0
Do Until Abs(g) <= 0.00000000001
    g = (2 * h + 1) * T * g / (2 * h + 3)/ (h + 1)
    If I = 0 Then
        X = X + g
        I = 1
    Else
        Y = Y + g
        I = 0
        g = -g
    EndIf
    h = h + 1
Loop
j = Sqr(2 * Abs(T))
X = X * A * j
Y = Y * A * j
```

解説

- 1: τを計算
- 2: x_1を初期設定
- 3: y_1を初期設定
- 4: 一般項の係数$(-1)^n$部分
- 5: 一般項の添字nと同様
- 6: x, yを交互に計算するためのフラグ変数
- 7: 一般項の収束条件
- 8: 一般項そのもの
- 9-18: $x、y$に順次計算して足し合わせている
- 19-21: 係数調整

係数数列c_nの存在理由

係数数列x_n, y_n両方含む数列c_nを考えることにより、収束判定ループを一つにできるからである。

> ある関数`$f(t)$`の積分である`$x(t)=\displaystyle\int f(t)dt$`となる関数`$x(t)$`において、`$x(t)$`の微分は `$\dfrac{dx}{dt}=\dfrac{d}{dt}\displaystyle\int f(t)dt = f(t)$`となる。これにより、`$f(t) = \dfrac{dx}{dt}$` を `$x(t)$` の定義に代入すると `$x(t) = \displaystyle\int \frac{dx}{dt}dt$`となる。導関数を積分すれば元の関数に戻るこの性質`[^3]`を利用して微分方程式を解く。

[^2]: 合成関数の微分 $dL= \frac{dL}{dt}\cdot \frac{dt}{d\tau}$ $L=A\sqrt{t}, t = 2\tau$ の時、$ \frac{dL}{dt} = A\dfrac{1}{2}t^{\frac{1}{2}-1} = \frac{A}{2\sqrt{t}}$ であり、$\frac{dt}{d\tau}=2d\tau$。したがって、$dL=\dfrac{Ad\tau}{\sqrt{2\tau}}$

積分した関数を微分すると元に戻り、微分した関数を積分しても元に戻る。微分と積分がお互いに逆演算であること。