بسم الله الرحمن الرحیم

پیاده‌سازی روش تفاضل محدود برای حل عددی پروفیل دما در صفحه کامپوزیتی با کانتور بسته دلخواه

دانشجو: حسین موتورچی

استاد: دکتر ف. قدیری مدرس

گروه هوافضا، دانشکده فنی مهندسی، دانشگاه اصفهان، اصفهان

تیرماه 1404

1. مقدمه

در صنعت مهندسی هوافضا، سازه‌های کامپوزیتی نظیر پلیمرهای تقویت شده با CFRP، به‌دلیل نسبت استحکام به وزن بالا و قابلیت‌های حرارتی مهندسی‌شده، به‌طور گسترده در اجزای حیاتی مانند پوسته بدنه، لبه‌های حمله، نازل‌های موتور و محفظه‌های احتراق استفاده می‌شوند. شکست حرارتی ناشی از تنش‌های گرمایی در این اجزا بسیار خطرناک بوده و می‌تواند به حوادث فاجعه‌بار منجر شود. با این حال، ماهیت ناهمسانگرد کامپوزیت‌ها، همراه با هندسه‌های پیچیده و مرزهای غیرمنظم، مدل‌سازی تحلیلی توزیع دما را ناممکن یا بسیار پیچیده می کند. این چالش، نیاز به روش‌های عددی را آشکار می‌سازد.

روش تفاضل محدود از اواسط قرن بیستم بعنوان یکی از اولین روش‌های عددی گسترش یافت که سادگی مفهومی و کارایی محاسباتی آن، نقطه قوت اصلی این روش بحساب می آید.

در این پروژه با درک ضرورت دسترسی به ابزارهای عددی ساده‌تر و درعین‌حال قابل اتکا برای مهندسان هوافضا، به توسعه و پیاده‌سازی یک چارچوب مبتنی بر روش تفاضل محدود می‌پردازد. نتایج می‌توانند به‌عنوان ابزاری آموزشی برای درک عمیق تر انتقال حرارت در مواد ناهمسانگرد و نیز بعنوان یک روش محاسباتی سریعتر برای طراحی اولیه یا تحلیل‌های با حساسیت کمتر مورد استفاده قرار گیرد.

2. مبنای نظری

معادله کلی گرما برای سیستم بسته که به فرم زیر نوشته میشود: [1]

$$\rho C_p \frac{\partial T}{\partial t} = \nabla.\left(\overleftrightarrow{k}\,\overrightarrow{\nabla T}\right) + \dot{q} \qquad (\mathrm{eq.}\,1)$$

قابل بازنویسی و ساده سازی در فرم پایای خود و شرایط بدون تولید انرژی است.

$$\nabla.\left(\overleftrightarrow{k}\,\overrightarrow{\nabla T}\right) = 0 \qquad (\mathrm{eq.}\,2)$$

در این شرایط اما برای مواد ناهمسانگرد ضریب انتقال حرارت هدایتی دیگر بصورت اسکالر قابل تعریف نیست. در این شرایط برای مدل سازی دوبعدی در دستگاه کارتزین تانسور ضریب انتقال حرارت بشکل زیر خواهد آمد: [2]

$$\overleftrightarrow{k} = \begin{bmatrix} k_{xx} & k_{xy} \\ k_{yx} & k_{yy} \end{bmatrix} \qquad (\mathrm{eq.}\,3)$$

بردار گرادیان دما نیز تعریف میشود:

$$\overrightarrow{\nabla T} = \begin{Bmatrix} \dfrac{\partial T}{\partial x} \\ \dfrac{\partial T}{\partial y} \end{Bmatrix} \qquad (\mathrm{eq.}\,4)$$

شار حرارتی هم بعنوان یک بردار برای این حالت نوشته میشود:

$$\vec{q} = \overleftrightarrow{k}\,\overrightarrow{\nabla T} = \begin{bmatrix} k_{xx} & k_{xy} \\ k_{yx} & k_{yy} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \frac{\partial T}{\partial x} \\ \frac{\partial T}{\partial y} \end{Bmatrix} \quad (\text{eq. } 5.1)$$

$$\vec{q} = \begin{Bmatrix} k_{xx}\frac{\partial T}{\partial x} + k_{xy}\frac{\partial T}{\partial y} \\ k_{yx}\frac{\partial T}{\partial x} + k_{yy}\frac{\partial T}{\partial y} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} q_x \\ q_y \end{Bmatrix} \quad (\text{eq. } 5.2)$$

همچنین از قانون ماکسول میدانیم ماتریس ضریب انتقال حرارت هدایتی متقارن است. [3]

$$q_x = k_{xx}\frac{\partial T}{\partial x} + k_{xy}\frac{\partial T}{\partial y} \qquad (\text{eq. } 6.1)$$
$$q_y = k_{xy}\frac{\partial T}{\partial x} + k_{yy}\frac{\partial T}{\partial y} \qquad (\text{eq. } 6.2)$$

با جایگذاری شار در معادله ی (eq.2) حاصل میشود:

$$\frac{\partial q_x}{\partial x} + \frac{\partial q_y}{\partial y} = 0 \qquad (\text{eq. } 7.1)$$

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(k_{xx}\frac{\partial T}{\partial x} + k_{xy}\frac{\partial T}{\partial y}\right) + \frac{\partial}{\partial y}\left(k_{xy}\frac{\partial T}{\partial x} + k_{yy}\frac{\partial T}{\partial y}\right) = 0 \qquad (\text{eq. } 7.2)$$

در ادامه فرض ثابت بودن مولفه های تانسور معادله ی 3 به ما کمک میکند تا مقادیر ثابت را از عملگر مشتق خارج کرده و به معادله ی نهایی زیر برسیم:

$$k_{xx}\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + 2k_{xy}\frac{\partial^2 T}{\partial xy} + k_{yy}\frac{\partial^2 T}{\partial y^2} = 0 \qquad (\text{eq. } 8)$$

حل معادله PDE نشان داده شده برای مقدار تابع دما با حداقل چهار شرط مرزی به ما توزیع دما را برای ماده ای با فرضیات زیر میدهد:

1. ماده ارتوتروپیک باشد.
2. شرایط حل پایا باشد.
3. سیستم بدون تولید انرژی باشد.
4. گرادیان دما تنها تابع دو مولفه باشد و در راستای ضخامت ناچیز باشد.
5. ضریب هدایت حرارت تابعیت مکانی نداشته باشد و تنها وابسته به جهت باشد.

3. گسسته سازی معادله

از بخش قبل به معادله ی شخصی سازی شده ی (eq.8 رسیدیم. از آنجا که حل تحلیلی این معادله برای حالت هندسه های ساده امکان پذیر است برای مسائل پیشرفته تر به ناچار سراغ روش های عددی میرویم.

برای حل به روش تفاضلات محدود، مشتقات جزئی فوق را بصورت زیر تقریب میزنیم: [4]

$$\frac{\partial^2 \mathrm{T}}{\partial \mathrm{x}^2} \approx \frac{T_{i+1,j} - 2T_{i,j} + T_{i-1,j}}{\Delta x^2} \qquad (\text{eq. } 9.1)$$

$$\frac{\partial^2 \mathrm{T}}{\partial \mathrm{y}^2} \approx \frac{T_{i,j+1} - 2T_{i,j} + T_{i,j-1}}{\Delta y^2} \qquad (\text{eq. } 9.2)$$

$$\frac{\partial^2 \mathrm{T}}{\partial \mathrm{x}\,\partial \mathrm{y}} \approx \frac{T_{i+1,j+1} - T_{i+1,j-1} - T_{i-1,j+1} + T_{i-1,j-1}}{4\Delta x \Delta y} \quad (\text{eq. } 9.3)$$

با توجه به روابط 9.1 الی 9.3 با جایگذاری مقادیر در معادله حاکمه و حل برای تابع دما، در نهایت، حاصل برای ما معادله حل پذیر زیر است:

$$k_{xx}\left(\frac{T_{i+1,j} - 2T_{i,j} + T_{i-1,j}}{\Delta x^2}\right) + 2k_{xy}\left(\frac{T_{i+1,j+1} - T_{i+1,j-1} - T_{i-1,j+1} + T_{i-1,j-1}}{4\Delta x \Delta y}\right) + k_{yy}\left(\frac{T_{i,j+1} - 2T_{i,j} + T_{i,j-1}}{\Delta y^2}\right) = 0 \qquad (\text{eq. } 10)$$

این معادله برای تمام نقاط محاسباتی تشکیل یک سیستم خطی می‌دهد که با اعمال شرایط مرزی، به صورت Ax = b حل می‌شود.

4. پیاده سازی عددی

4.1. پردازش هندسه ورودی (setupGeometry):

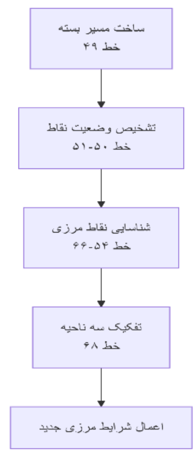
گام نخست با خواندن فایل نقاط مرزی آغاز میشود این فایل با فرمت CSV. و بصورت زیر تعریف میشود:

x,y,T
99.9996,8.756,2
...

ستون اول مربوط به مختصه افقی و ستون دوم به مختصه عمودی مربوط میشود و نظیر هر نقطه در مرز یک دما بایست اختصاص داده شود. (خط 28-30)

سپس شبکه محاسباتی مناسب روش تفاضلات محدود در ناحیه مرز با حاشیه دلخواه ایجاد شده و گام های حرکت در این مرحله با توجه به مقدار resolution محاسبه میشود.

تفکیک نوع نقاط در این مرحله انجام میشود و نقاط مرزی، داخلی و خارجی با استفاده از الگوریتم زیر تفکیک و برای حل بصورت ورودی تابع 4.2 ارسال میشوند.



دیاگرام فرایند تشخیص نواحی حل

Fig.1

- در خط 49 کتابخانه matplotlib.path با تبدیل نقاط ورودی به یک چندضلعی این قابلیت را به ما میدهد تا آزمون "نقطه در چندضلعی" را انجام دهیم.
- خط 51 به ما یک ماتریس به ابعاد شبکه محاسباتی میدهد که آرایه های آن ارزش آزمون درون چند ضلعی بودن است. این ماتریس اما هنوز نمیتواند نقاط مرزی و یا داخلی شبکه را تشخیص دهد و تنها درون کانتور اصلی بودن را بررسی کرده است.
- اکنون وقت آن است نقاط مرزی درون شبکه بازتعریف شوند در اینجا نقاط داخل کانتور اصلی همگی بصورت کاندید مرز جدید بررسی شده و چنانچه در همسایگی آنها یک نقطه خارج از کانتور وجود داشته باشد این نقطه بصورت مرز جدید انتخاب میشود. این منطق پشت حلقه تودرتوی خط 58 است.
- در خط 68 هم از میان نقاط درون کانتور ورودی چنانچه نقطه ای در میان نقاط مرزی جدید قرار نداشت بعنوان نقطه محاسباتی برای حل سیستم معادلات انتخاب میشود.
- در نهایت برای هر نقطه در مرز جدید با جست و جوی نزدیک ترین نقطه در داده های مرزی ورودی و انتساب دمای متناظر آن شرایط مرزی جدید اعمال میشود.
-

4.2. حل سیستم معادلات (solveHeatEquation)

در تابع حلگر سیستم کار خود با تعریف ضرایب گسسته سازی آغاز میکنیم این تعاریف جهت تبدیل ضرایب فیزیکی ماده به اعداد قابل استفاده در حل سیستم معادلات است. (خط99-101)

گام بعدی ایجاد ماتریس ضرایب برای حل سیستم معادلات میباشد. از معادله گسسته شده داریم که ضرایب برای هر نقطه از همسایگی نقطه محاسباتی مان تابعی از ضرایب فیزیکی ماده است پس اثر همسایگی را تعریف میکنیم. (خط 104-107)

ساخت نگاشت برای نگهداری نقاط داخلی و مقدار دهی اولیه ماتریس ضرایب و ثوابت هم پس از تعریف پارامتر های اولیه ضروری ست این ماتریس ها ابتدا بصورت ماتریس نول تعریف شده و سپس مقدار دهی خواهند شد(خط109-116)

حلقه خط 119 اما برای مقدار دهی به ماتریس های ضرایب و ثوابت نوشته شده که با پیمایش نقاط درونی و بررسی مرز آنها اقدام به پر کردن آرایه های مرتبط میکند. الگوریتم این حلقه بطور مفصل تری در Fig.2 امده است.

در خط 146 با تبدیل فرمت ماتریس ضرایب از LIL به فرمت CSR یک فرم بهینه برای حل ایجاد کرده ایم چراکه ماتریس های پراکنده ای مانند ماتریس ضرایب در روش تفاضلات محدود شمار بسیار زیادی آرایه صفر دارند و در فرمت CSR با صرف نظر از آرایه های صفر پردازش را بهینه تر میکند. [5]

در رابطه با تابع spsolve کتابخانه Scipy برای حل سیستم های خطی با این تابع روش حل را با توجه به ساختار سیستم معادلات انتخاب میکند و برای سیستم ما محتمل ترین روش حل روش های تکرار پذیر میباشند. [6]

5. نتایج عددی و بررسی آنها

در اینجا برای تاثیر ناهمسانگردی و تفاوت اثر تانسوری بودن ضریب هدایت حرارتی با حالت ساده آن دو سناریو بررسی میشود. نخست هدایت غالب در راستای عمودی و سپس در راستای افقی انجام تنظیم میشود. هندسه، شرایط مرزی و شبکه بندی کاملا یکسان خواهند بود.

ایرفویل Hor20-il با شکل نامتقارن و لبه حمله ضخیم نماینده ما برای مشاهده گرادیان دما خواهد بود. توزیع دما نیز از لبه حمله تا لبه فرار بصورت خطی به ازای هر نقطه از هندسه 2 درجه کاهش می یابد و یک توزیع نسبتا پیوسته برای ما ایجاد میکند تا از خطا های مربوط به ناپیوستگی شرایط مرزی جلوگیری شود. [7]

Fig.3: Hor20il Airfoil

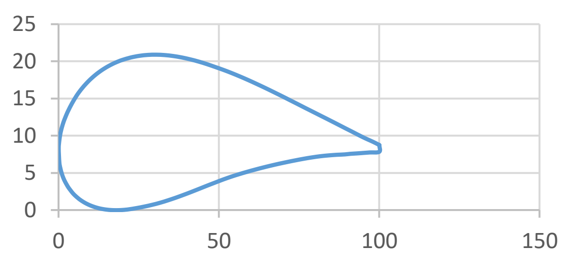
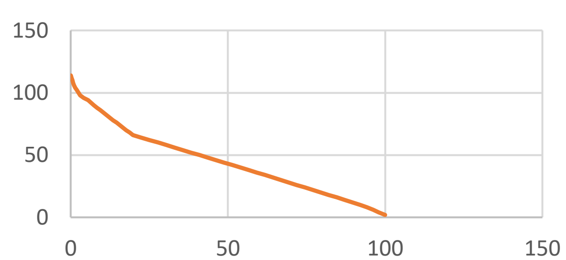


Fig.4: نمایش توزیع دما



نتایج تحلیل اما به ازای ثوابت مادی جدول زیر برای هر دو سناریو مفروض در پایین قابل مشاهده است: [8]

	$k_{\parallel}(W/m.K)$	$k_{\bowtie}(W/m.K)$	$k_{\perp}(W/m.K)$
Carbon epoxy	6.0	0.0	0.58

Tab.1

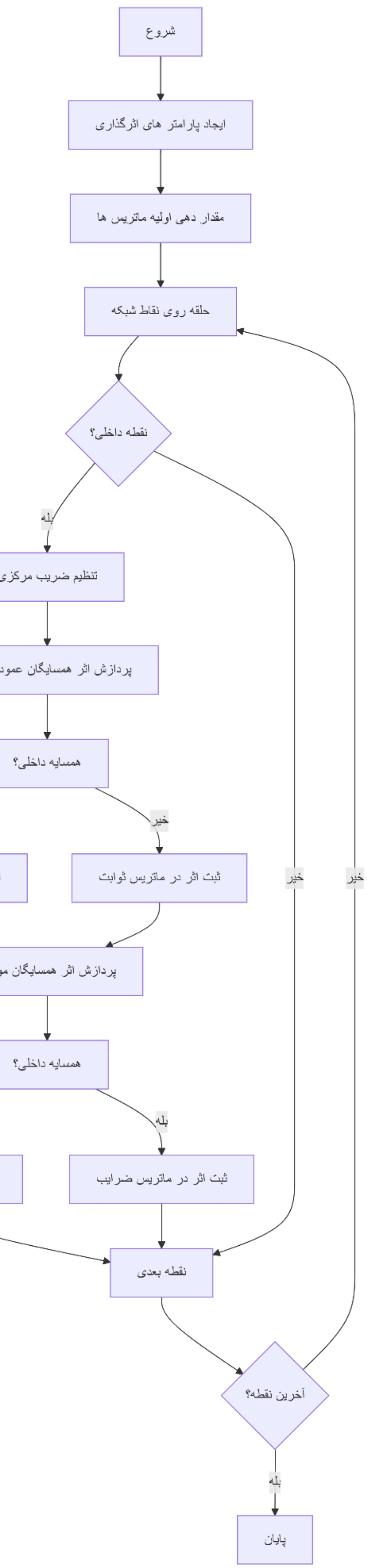


Fig.2: Ln119 loop details

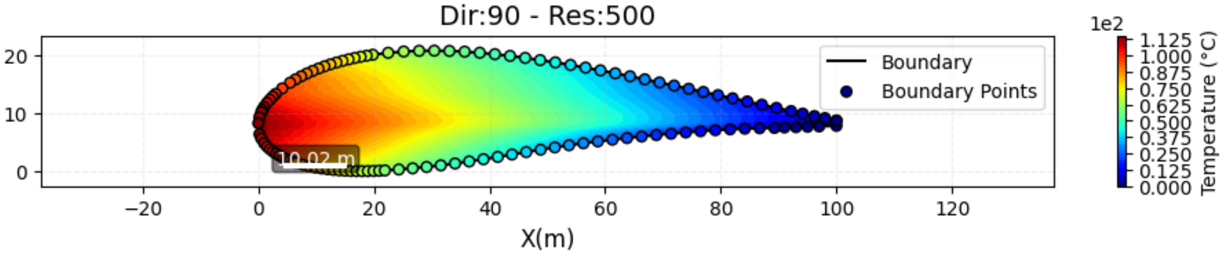


Fig.5: توزیع دما برای الیاف با جهتگیری عمودی

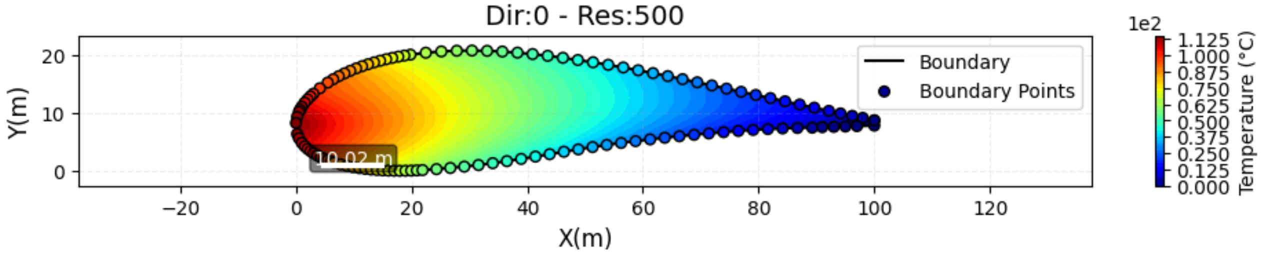


Fig.6: توزیع دما برای الیاف با جهتگیری افقی

با مستقل کردن تحلیل از مقدار رزولوشن به نتایج همگرای فوق رسیدیم. همانطور که مشاهده میشود در الیاف با جهتگیری افقی خطوط هم دما نرم تر هستند و توزیع دما بطور مطلوبتری انجام میشود در ادامه به بررسی بیشتر این نتایج میپردازیم.

در رابطه شار حرارتی داریم:

$$q = \overleftrightarrow{K}\nabla T \qquad (\text{eq.}10)$$

همچنین با استناد به معادلات 6 و تفکیک شار حرارتی به دو مولفه عمودی و افقی در می یابیم که شار حرارتی در الیاف با جهتگیری افقی در راستای مولفه x بر راستای مولفه y غالب است. این بدین معناست که در الیاف افقی دما تمایل بیشتری به تغییر در راستای افق دارد در حالی که برای الیاف با جهت گیری عمودی این قضیه برعکس است.

$$q_{0^\circ} = \begin{bmatrix} 6.0 & 0.0 \\ 0.0 & 0.58 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \partial T/\partial x \\ \partial T/\partial y \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 6\frac{\partial T}{\partial x} \\ 0.58\frac{\partial T}{\partial y} \end{Bmatrix}$$

در این رابطه بزرگترین ضریب و بیشترین تاثیر بر شار حرارتی مربوط به تغییرات دما در راستای افقی است که بدلیل اختلاف فاحش میان ضرایب انتقال حرارت افقی و عمودی از جدول 1 است.

در شار برای راستای عمودی همانطور که ذکر شد اما این قضیه خلاف الیاف افقی است:

$$q_{0^\circ} = \begin{bmatrix} 0.58 & 0.0 \\ 0.0 & 6.0 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \partial T/\partial x \\ \partial T/\partial y \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0.58\frac{\partial T}{\partial x} \\ 6\frac{\partial T}{\partial y} \end{Bmatrix}$$

در الیاف عمودی همانطور که مشاهده میشود شار غالب در راستای مولفه y است که میتوان بنحوی دیگر این را تفسیر کرد وگفت: "دما در الیاف با راستای عمودی تمایل به تغییر در جهت عمود را دارند و گرادیان دما در راستای عمودی بیشنیه است."

با دانستن این نکات اکنون میتوان دلیل تیز بودن گرادیان دما را برای الیاف در راستای عمودی توجیه کرد. از آنجا که تغییرات روی مرز هندسه با گرادیان افقی است استفاده از مواد با گرادیان غالب عمودی سبب تیز شدن و تداخل دو گرادیان با یکدیگر خواهد شد.

از این جهت «انتخاب مواد با گرادیان همسو با تغییرات دمایی در سازه» برای طراحی یک نکته کلیدی خواهد بود.

6. اعتبار سنجی کد عددی

در ادامه برای بررسی ارزش داده های ارائه شده و همچنین تعیین خطای این کد عددی به چند آزمون اکتفا میکنیم:

6.1. آزمون همگرایی

به منظور آزمون اولیه کد توسعه یافته تست همگرایی با شش مقدار رزولوشن (50 تا 750) انجام شد. پایه این آزمون مقایسه خطای نسبی حل ها نسبت به یک مرجع با دقت بالاتر(رزولوشن1000) و بررسی نرخ همگرایی در این کد عددی بود.

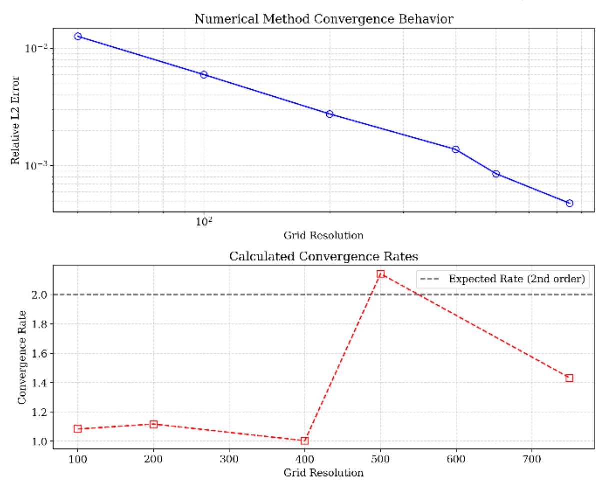


Fig.7: تست همگرایی

رزولوشن	خطای نسبی	نرخ همگرایی
50	%1.2683	1.083
100	%0.5987	1.117
200	%0.2761	1.003
400	%0.1377	2.142
500	%0.0854	1.432
750	%0.0478	-

Tab.2

همانطور که از گراف و جدول فوق قابل مشاهده است خطای نسبی حل از رزولوشن 50 الی 750 با شیب تقریبا ثابتی در حال کاهش است و نشان دهنده کاهش قابل توجه خطا از مقدار 1.27% به 0.048% در شبکه بندی 750 است.

این کاهش خطا صحت پایه ای الگوریتم حل را تایید میکند.

نکته قابل تامل اما میانگین نرخ همگرایی 1.355 است که از مقدار نظری خود پایین تر است. بررسی جزئی نشان میدهد انحراف نرخ همگرایی از مقدار نظری مربوط به:

1- تقریب مرتبه اول برای مشتقگیری مختلط
2- خطای تشخیص مرز در مناطق با انحای بالای ایرفویل

باوجود این چالش رفتار همگرا و کاهش نرم خطا قابلیت اطمینان کد را برای پیش پردازش های مهندسی تایید میکند. و بهبود نرخ همگرایی با ارتقای تقریب مشتق مختلط به منظور بهینه کردن کد لازم است.

6.2.آزمون همدما

همچنین به منظور بررسی صحت عملگر پایه ای آزمون همدما برای هندسه اولیه انجام شد. مبنای نظری این آزمون بصورت زیر بیان میشود:

در شرایط مرزی همدما(دمای ثابت مرز) حل تحلیلی معادله گرما برای سیستم پایا و بدون تولید انرژی پیشبینی میکند دمای تمام نقاط داخلی برابر با دمای مرز است.

به منظور اجرای این آزمون شرایط مرزی دما را در تمام نقاط هندسه بر 100 درجه تنظیم شد سپس ماکزیمم انحراف دمای نقاط داخلی از دمای مرزی محاسبه گردید.

معیار پذیرش صحت این آزمون انحراف دمای کمتر از ده بقوه منهای پنج است.

```
## Uniform Temperature Test
- **Objective**: Verify solver accuracy
for uniform boundary conditions
- **Max deviation**: 5.84e-11 °C
- **Status**: PASSED
```

همانطور که ملاحظه میشود بیشینه انحراف حل عددی بسیار کمتر از حداکثر مقدار مجاز است و نشان میدهد که آزمون دمای یکنواخت با موفقیت گذرانده شد و صحت عملکرد پایه‌ای حلگر عددی توسعه‌یافته را تأیید می‌کند.

7. چشم انداز های توسعه و کاربرد

پروژه حاضر با پیاده سازی موفق روش تفاضل محدود برای تحلیل انتقال حرارت در صفحه کامپوزیتی گام اولیه مؤثری در مدل سازی پیش پردازشی مسائل مهندسی

هوافضا برداشته است. با این حال، قابلیت‌های زیر می‌توانند کارایی و دامنه کاربرد این چارچوب را به‌طور چشمگیری گسترش دهند:

7.1. ارتقای تقریب مشتق

با جایگزینی تقریب مشتق مختلط فعلی با یک تقریب مرتبه بالاتر دقت محاسبات در مناطق بحرانی مانند لبه‌های ایرفویل بهبود می‌یابد. این ارتقا خطا را تا حد بسیار زیادی کاهش داده و نرخ همگرایی را به مقدار نظری (≈۲) نزدیک می‌کند. هزینه آن اما افزایش زمان حل است که بایست با بهینه‌سازی کد جبران شود.

7.2.تحلیل سازه چندلایه کامپوزیتی

افزودن قابلیت مدل‌سازی تماس حرارتی بین لایه‌ها رفتار واقعی‌تری را تحلیل میکند. این توسعه کامپوزیت‌های چند لایه ای در هوافضا (مخازن سوخت، پره‌ها) را مدل می‌کند. چالش اصلی، تعریف هندسه و تشخیص خودکار لایه‌ها در اشکال پیچیده است که نیز با الگوریتم های پیشرفته تر حل میشود.

7.3.گسترش به مسائل گذرا

این توسعه حل معادله گرما در شرایط وابسته به زمان را امکان‌پذیر می‌سازد. با گسسته‌سازی معادله اصلی(eq.1) می‌توان تغییرات دمایی وابسته به زمان و ناشی از شوک‌های حرارتی (مثل ورود به اتمسفر یا احتراق موتور) را شبیه‌سازی کرد. این قابلیت امکان بسیار مفیدی برای ادامه پردازش حرارتی به ما اعطا میکند و بنظر کاربردی ترین توسعه این الگوریتم خواهد بود.

8. منابع و ماخذ

[1]. Bergman, T. L., & Lavine, A. S. (2017). *Fundamentals of Heat and Mass Transfer* (8th Ed.). John Wiley & Sons

[2]. Joven, R., Das, R., Ahmed, A., Roozbehjavan, P., & Minaie, B. (2012). **Thermal conductivity tensor measurement in carbon/epoxy composites**. *Journal of Composite Materials*

[3]. Onsager, L. (1931). **Reciprocal relations in irreversible processes**. *Physical Review*

[4]. Causon, D. M., & Mingham, C. G. (2010). *Introductory Finite Difference Methods for PDEs*

[5]. SciPy Documentation. (2024). *Sparse Matrices (scipy.sparse)*. Retrieved July 22, 2025

[6]. SciPy Online Documentations. (2024). *scipy.sparse.linalg.spsolve*. Retrieved July 22, 2025

[7]. Airfoil Tools. (2024). *NACA-Hor20-il Airfoil Coordinates*. Retrieved July 10, 2024

[8]. Joven, R., Das, R., Ahmed, A., Roozbehjavan, P., & Minaie, B. (2012). "Thermal properties of carbon fiber-epoxy composites with different fabric weaves". *Proceedings of the SAMPE Technical Conference*