جبر المنطق

أطلق اسم جبر المنطق على العمليات التي تتعامل مع الجبر المنطقي .

❖ مسلمات في جبر المنطق :

بفرض لدينا ثلاث مجموعات A,B,C لا على التعيين هذه المجموعات تنتمي إلى المجموعة الشاملة فإنه يمكن أن نقول:

١. $A . A = A$, $A + A = A$ خاصة اللانمو .
٢. $A . 0 = 0$ حيث ال 0 هي المجموعة الخالية .
٣. $A . 1 = A$ حيث الواحد يعبر عن المجموعة الشاملة .
٤. $A + 0 = A$
٥. $A + 1 = 1$

سوف نطلق على المجموعة $\overline{A}$ اسم المجموعة المتممة للمجموعة A وهي عبارة عن مجموعة تحتوي جميع العناصر التي لا تنتمي إلى المجموعة A وتنتمي إلى المجموعة الشاملة بحيث يشكل مجموع عناصر المجموعة A وعناصر المجموعة $\overline{A}$ المجموعة الشاملة وبالتالي يمكن أن نكتب :

- $\overline{A} + A = 1$
- $\overline{A} . A = 0$
- $\overline{\overline{A}} = A$

قانونا ديمورغان :

- قانون تحويل المجموع إلى جداء : $\overline{A + B} = \overline{A} . \overline{B}$
- قانون تحويل الجداء إلى مجموع : $\overline{A . B} = \overline{A} + \overline{B}$

جدول الحقيقة :

هو جدول تحتوي أعمدته جميع المتحولات في المعادلة أو في العلاقة الجبرية المنطقية كما يحتوي على عمود يعطي قيمة التابع في كل حالة من حالات الدخل حيث تحتوي أسطر هذا الجدول جميع المتحولات والاحتمالات الممكنة لهذه المتحولات .

مثال :

بفرض لدينا العلاقة التالية : $X = (A + B) . C$

اكتب جدول الحقيقة لهذه العلاقة :

الدليل	A	B	C	X
0	0	0	0	0
1	0	0	1	0
2	0	1	0	0
3	0	1	1	1
4	1	0	0	0
5	1	0	1	1
6	1	1	0	0
7	1	1	1	1

ايجاد العلاقة الجبرية انطلاقاً من جدول الحقيقة :

لكتابة العلاقة الجبرية التي تربط التابع X مع المتحولات A, B , C الموجودة في الجدول السابق نتبع الواحدات الموجودة في عمود الخرج (X) ونكتب المتحول الذي قيمته 1 في السطر الذي يحتوي على X= 1 نكتبه بدون نفي أما إذا كانت قيمة هذا المتحول 0 فنكتبه منفياً وبالتالي نحصل على سلسلة من الحروف يفصل بينها اشارة ضرب منطقي كما يفصل بين السلاسل الناتجة عن جميع الواحدات في عمود التابع X اشارات جمع منطقي .

وبناء على ذلك يمكننا كتابة علاقة X الموضحة في الجدول السابق على الشكل التالي :

$$X = \bar{A} . B . C + A . \bar{B} . C + A . B . C$$

تعاريف :

- نسمي كل حد من حدود العلاقة الجبرية اذا كانت مؤلفة من مجموع مضاريب ب (P - term) اذا كان حد واحد على الأقل من حدود التابع لا يحوي جميع المتحولات .
- نقول عن تابع أنه مكتوب بصيغة الـ min-term اذا كانت جميع حدود التابع تحتوي على جميع المتحولات .

اختصار التوابع الجبرية بالاعتماد على قوانين جبر المنطق :

لاختصار أي تابع نقوم بالبحث عن عوامل مشتركة بين حدود هذا التابع مع الاستفادة من قوانين جبر المنطق .

مثال ١ :

اختصر التابع التالي : $X = \bar{A} . B . C + A . \bar{B} . C + A . B . C$

نلاحظ وجود المتحول C مشترك بين جميع الحدود وبالتالي نكتب التابع على الشكل التالي :

$X = (\overline{A} . B + A . \overline{B} + A . B). C$ حسب خاصة اللانمو نستطيع اضافة حدود إلى التابع حسب الحاجة على الشكل : $X = (\overline{A} . B + A . B + A . \overline{B} + A . B). C$

$$X = [B (\overline{A} + A) + A (\overline{B} + B)]. C$$

$$X = [B (1) + A (1)]. C$$

$$X = (A + B) . C$$

مثال ٢ :

اختصر التابع التالي :

$$Y = C (A + B) . (A + \overline{C})$$

$$Y = C (A . A + A . \overline{C} + A . B + B . \overline{C})$$

$$Y = C (A + A . \overline{C} + A . B + B . \overline{C})$$

$$Y = C [A (1 + \overline{C} + B) + B . \overline{C}]$$

$$Y = C [A + B . \overline{C}]$$

$$Y = A . C + B . C . \overline{C}$$

$$Y = A . C$$

البوابات المنطقية

هي عبارة عن دارات الكترونية مصممة لكي تنفذ العمليات الجبرية المنطقية مثل :

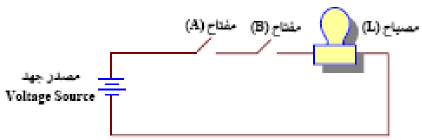
الضرب المنطقي و الجمع المنطقي والنفي .

أولا : بوابة الضرب المنطقي (AND) :

هي عبارة عن بوابة لها n دخل حيث 2 =<n وخرج واحد فقط .

فإذا كانت المداخل هي :   a 1 , a2,a3,.............................an   وخرج y

يمكن تمثيل هذه البوابة بعدد من المفاتيح الموصولة على التسلسل في دارة كهربائية كما هو مبين في الشكل :

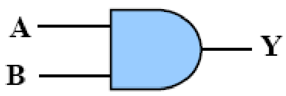


حيث المفتاحان A ,B يمثلان مداخل البوابة تكون قيمة أي متغير منهما تساوي 0 الثنائي عندما يكون المفتاح مفتوح وتساوي 1 الثنائي عندما يكون المفتاح مغلق نلاحظ أنه لا يضيئ المفتاح الا اذا كان كلا المفتاحان في حالة ON أو 1منطقي .

وبالتالي تكون العلاقة التي تربط الدخل مع الخرج على الشكل التالي :

$$y = a1 \, . \, a2 \, . \, a3 \, . \, \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots an$$

رمز البوابة ذات المدخلين على الشكل التالي :



العلاقة التي تربط الدخل مع الخرج : $Y = A \, . \, B$

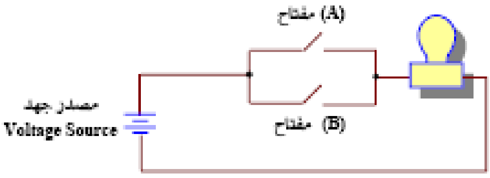
وجدول الحقيقة على الشكل التالي :

A	B	A . B
0	0	0
0	1	0
1	0	0
1	1	1

ثانياً : بوابة الجمع المنطقي (OR) :

هي عبارة عن بوابة لها n دخل حيث n>= 2 وخرج واحد فقط فإذا كانت المداخل هي :

a 1 , a2,a3,............................an وخرج y يمكن تمثيل هذه البوابة بعدد من المفاتيح الموصولة على التفرع في دارة كهربائية كما هو مبين في الشكل :

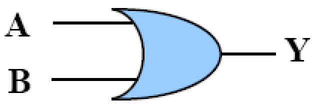


حيث المفتاحان A ,B يمثلان مداخل البوابة تكون قيمة أي متغير منهما تساوي 0 الثنائي عندما يكون المفتاح مفتوح وتساوي 1 الثنائي عندما يكون المفتاح مغلق نلاحظ أنه المفتاح يضيئ اذا كان مفتاح واحد على الأقل في حالة ON أو 1 منطقي.

وبالتالي تكون العلاقة التي تربط الدخل مع الخرج على الشكل التالي :

$$Y= a1 + a2 + a3 + ... + an$$

رمز البوابة ذات المدخلين على الشكل التالي :



العلاقة التي تربط الدخل مع الخرج : $Y = A + B$

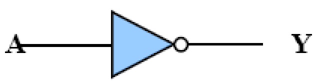
وجدول الحقيقة على الشكل التالي :

A	B	A + B
0	0	0
0	1	1
1	0	1
1	1	1

ثالثاً : بوابة النفي (NOT)العاكس) :

هي عبارة عن بوابة ذات دخل واحد وخرج واحد بحيث تعطي على خرجها معكوس حالة الدخل .

رمز هذه البوابة :



العلاقة التي تربط الدخل مع الخرج : $Y = \overline{A}$

وجدول الحقيقة على الشكل التالي :

A	Y
0	1
1	0

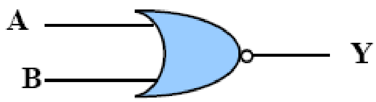
رابعا : بوابة NOR وتكافئ OR NOT :

هي عبارة عن بوابة لها n دخل حيث n>= 2 وخرج واحد تعطي على خرجها عكس الخرج الذي تعطيه بوابة OR فإذا كانت المداخل هي : a 1 , a2,a3,..............................an وخرج y

وبالتالي تكون العلاقة التي تربط الدخل مع الخرج هي :

$$Y = \overline{a1 + a2 + a3 + \cdots \ldots \ldots . + an}$$

رمز البوابة ذات المدخلين على الشكل التالي :



العلاقة التي تربط الدخل مع الخرج : $Y = \overline{A + B}$

وجدول الحقيقة على الشكل التالي :

A	B	$\overline{A+B}$
0	0	1
0	1	0
1	0	0
1	1	0

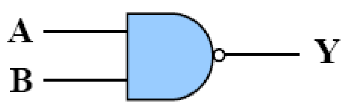
خامسا : بوابة NAND وتكافئ AND NOT :

هي عبارة عن بوابة لها n دخل حيث n>= 2 وخرج واحد تعطي على خرجها عكس الخرج الذي تعطيه بوابة AND فإذا كانت المداخل هي : a 1 , a2,a3,..............................an وخرج y

وبالتالي تكون العلاقة التي تربط الدخل مع الخرج هي :

$$Y = \overline{a1 . a2 . a3 + \cdots \ldots \ldots . . an}$$

رمز البوابة ذات المدخلين على الشكل التالي :



العلاقة التي تربط الدخل مع الخرج : $Y = \overline{A.B}$

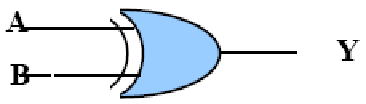
وجدول الحقيقة على الشكل التالي :

A	B	$\overline{A.B}$
0	0	1
0	1	1
1	0	1
1	1	0

سادساً : بوابة عدم التماثل (X – OR) :

هي عبارة عن بوابة منطقية ذات مدخلين وخرج واحد فقط يأخذ الخرج القيمة 1 اذا كان الدخلين مختلفين و 0 اذا كان الدخل متساويين .

رمز البوابة على الشكل التالي :



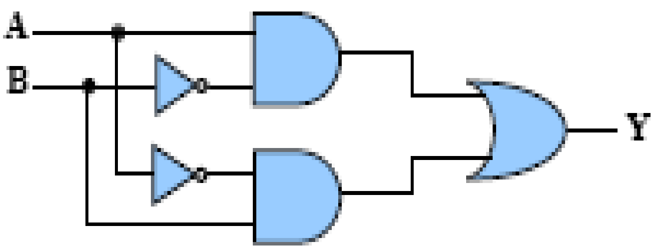
العلاقة التي تربط الدخل مع الخرج : $Y = A \oplus B$

وجدول الحقيقة على الشكل التالي :

A	B	$A \oplus B$
0	0	0
0	1	1
1	0	1
1	1	0

من جدول الحقيقة يمكننا استنتاج التابع لهذه البوابة وهو على الشكل التالي : $Y = \overline{A}.B + A.\overline{B}$

يمكننا بناء البوابة السابقة باستخدام بوابات AND,OR,NOT كما هو موضح في الشكل :

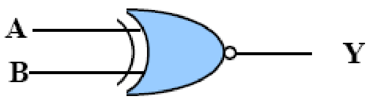


حيث تقوم هذه البوابات المنطقية بعمل بوابة X-NOR .

سابعاً: بوابة عدم التماثل (X – OR) :

هي عبارة عن بوابة منطقية ذات مدخلين وخرج واحد فقط يأخذ الخرج القيمة 1 اذا كان الدخلين متساويين و 0 اذا كان الدخل مختلفين .

رمز البوابة على الشكل التالي :



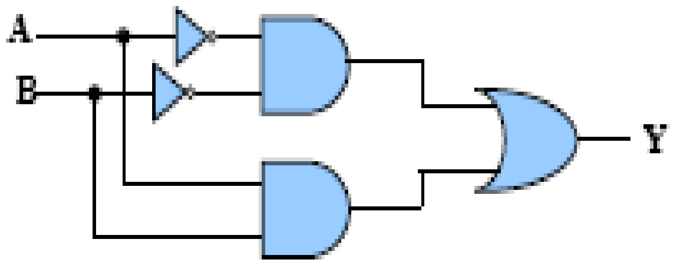
العلاقة التي تربط الدخل مع الخرج : $Y = A \odot B$

وجدول الحقيقة على الشكل التالي :

A	B	$A \odot B$
0	0	1
0	1	0
1	0	0
1	1	1

من جدول الحقيقة يمكننا استنتاج التابع لهذه البوابة وهو على الشكل التالي : $Y = \overline{A}.\overline{B} + A.B$

يمكننا بناء البوابة السابقة باستخدام بوابات AND,OR,NOT كما هو موضح في الشكل :



حيث تقوم هذه البوابات المنطقية بعمل بوابة X-NOR .

ثامنا : بوابة التمرير :

عبارة عن بوابة لها دخل واحد وخرج واحد تعطي الدخل نفسه على خرجها ولكن بعد تأخير زمني .

جدول الحقيقة على الشكل التالي :

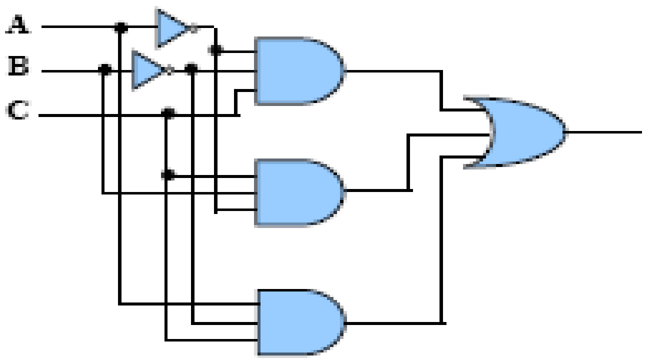
A	Y
0	0
1	1

مثال : ارسم الدارة المنطقية الخاصة بجدول الحقيقة التالي :

A	B	C	Y
0	0	0	0
0	0	1	1
0	1	0	0
0	1	1	1
1	0	0	0
1	0	1	1
1	1	0	0
1	1	1	0

نقوم أولا باستنتاج العلاقة من جدول الحقيقة : $Y = \overline{A}.\overline{B}.C + \overline{A}.B.C + A.\overline{B}.C$

وبالتالي فإن الرسم المقابل لهذه الدارة كما يلي :



مثال :

باستخدام قواعد الجبر بسط العلاقة التالية ثم ارسم الدارة المنطقية المناسبة قبل وبعد الاختصار .

$$Y = AB + A(A + C) + B(A + C)$$

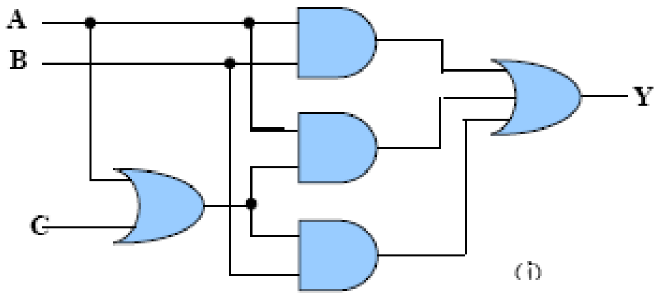
نقوم أولا بفك الأقواس : Y= A . B + A.A+ A.C + A.B + B.C

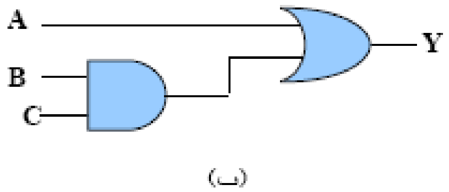
نعوض قيمة A.A=A تصبح Y= A.B + A + A.C + B.C

نأخذ المتحول A عامل مشترك Y=A.(B+1+C) + B.C

Y=A. 1=B.C

Y= A + B.C





يمثل الشكل أ الدارة المنطقية المكافئة للعلاقة Y قبل الاختصار ويمثل الشكل ب الدارة المنطقية المختصرة نلاحظ أنه بعد الاختصار مثلنا الدارة ببوابتين فقط بينما احتاج تمثيل العلاقة الأصلية قبل التبسيط إلى خمس بوابات .

تمرين :

اختصر التابع التالي إلى أبسط شكل ممكن باستخدام قوانين الجبر البولياني ثم ارسم الدارة المنطقية المكافئة قبل وبعد التبسيط

================

انتهت المحاضرة