Computational Physics

Übungsblatt 0

Miriam Simm
miriam.simm@tu-dortmund.de

Katrin Bolsmann
katrin.bolsmann@tu-dortmund.de

Mario Alex Hollberg
mario-alex.hollberg@tu-dortmund.de

Abgabe: 24.April.2020

Aufgabe 1: Distributivgesetz in der Floating-Point-Arithmetik

2.1

Z.z.:

$$(a \oplus b) \odot c = a \odot c \oplus b \odot c$$

Wähle passend zu $t = 2$ (Mantissenlänge) und $l = 1$ (Exponentenlänge) a, b und c, zum Beispiel: $a = 0{,}43 \cdot 10^2$, $b = 0{,}87 \cdot 10^1$ und $c = 0{,}13 \cdot 10^3$

$$\left.\begin{array}{l} (0{,}43 \cdot 10^2 \oplus 0{,}87 \cdot 10^1) \odot 0{,}13 \cdot 10^3 = 0{,}52 \cdot 10^2 \odot 0{,}13 \cdot 10^3 = 0{,}68 \cdot 10^4 \\ 0{,}43 \cdot 10^2 \odot 0{,}13 \cdot 10^3 \oplus 0{,}87 \cdot 10^1 \odot 0{,}13 \cdot 10^3 = 0{,}56 \cdot 10^4 \oplus 0{,}11 \cdot 10^4 = 0{,}67 \cdot 10^4 \end{array}\right\} \neq$$

Folglich ist das Distributivgesetz nicht erfüllt: $\implies (a \oplus b) \odot c \neq a \odot c \oplus b \odot c$

Aufgabe 2: Rundungsfehler

Auslöschung tritt auf, wenn $f(x) \approx 0$. Vermeiden lässt sich Auslöschung durch Umformung. Der relative Fehler zwischen direktem und verbesserten Wert berechnet sich gemäß:

$$\frac{|x - \bar{x}|}{|x|}$$

a) für große $x \gg 1$

2.2

$$\begin{aligned} \frac{1}{\sqrt{x}} - \frac{1}{\sqrt{x+1}} &= \frac{1}{\sqrt{x+1} \cdot \sqrt{x}} \cdot \left(\sqrt{x+1} - \sqrt{x}\right) \\ &= \frac{1}{\sqrt{x+1} \cdot \sqrt{x}} \cdot \frac{1}{\sqrt{x+1} + \sqrt{x}} \end{aligned}$$

b) für kleine $x \ll 1$

$$\begin{aligned} \frac{1 - \cos(x)}{\sin(x)} &= \frac{2\sin^2\left(\frac{x}{2}\right)}{2\sin\left(\frac{x}{2}\right)\cos\left(\frac{x}{2}\right)} \\ &= \tan\left(\frac{x}{2}\right) \end{aligned}$$

c) für kleine $\delta \ll 1$

$$\begin{aligned} \sin(x+\delta) - \sin(x) &= \sin\left(x + \frac{\delta}{2} + \frac{\delta}{2}\right) - \sin\left(x + \frac{\delta}{2} - \frac{\delta}{2}\right) \\ &= 2\cos\left(x + \frac{\delta}{2}\right)\sin\left(\frac{\delta}{2}\right) \end{aligned}$$

Die Ergebnisse der direkten und verbesserten Berechnung befinden sich in Abbildung 1 für Aufgabenteil a), in Abbildung 2 für Aufgabenteil b) und in Abbildung 3 für Teil c).

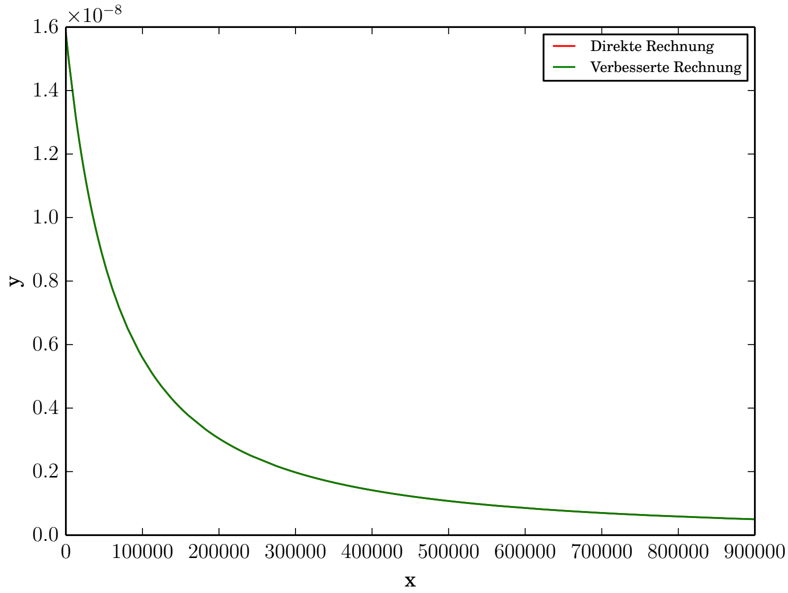

Abbildung 1: Aufgabe 2a: Vergleich der direkten Berechnung und der verbesserten Berechnung für sehr kleine Werte von x.

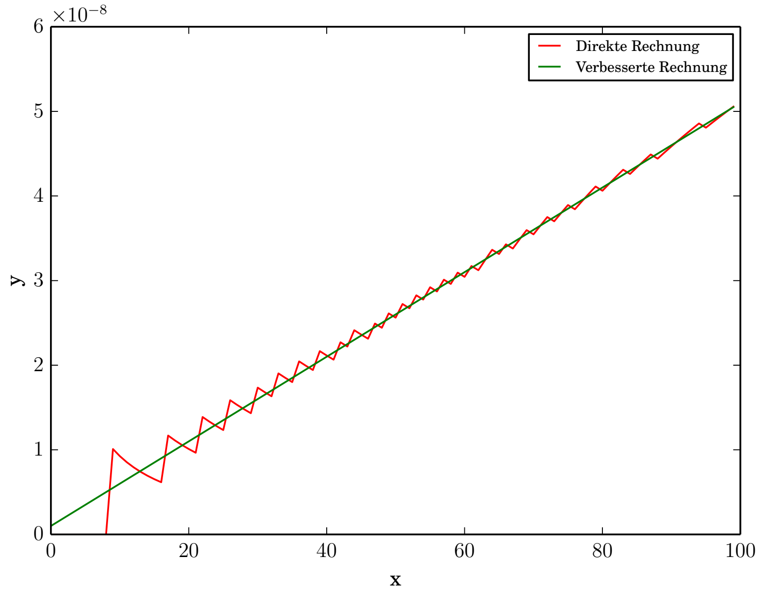

Abbildung 2: Aufgabe 2b: Vergleich der direkten Berechnung und der verbesserten Berechnung für sehr große Werte von x.

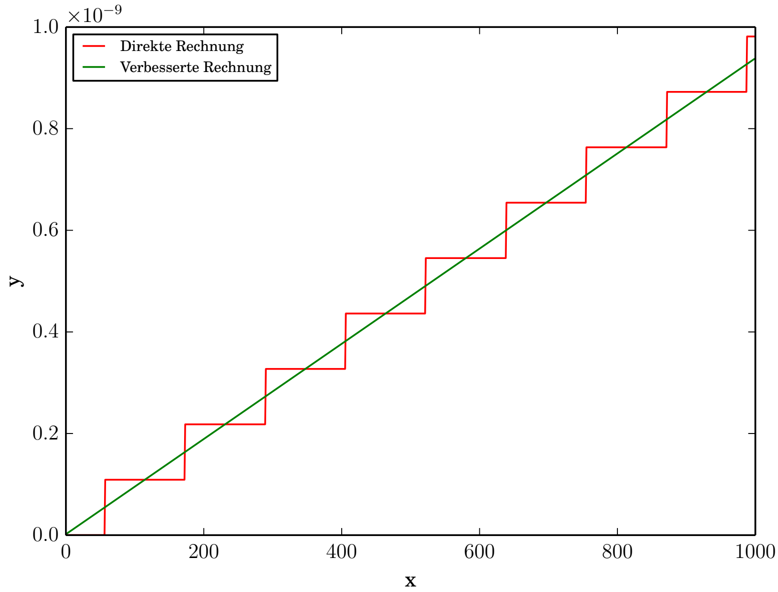

Abbildung 3: Aufgabe 2c: Vergleich der direkten Berechnung und der verbesserten Berechung für sehr kleine Werte von δ.

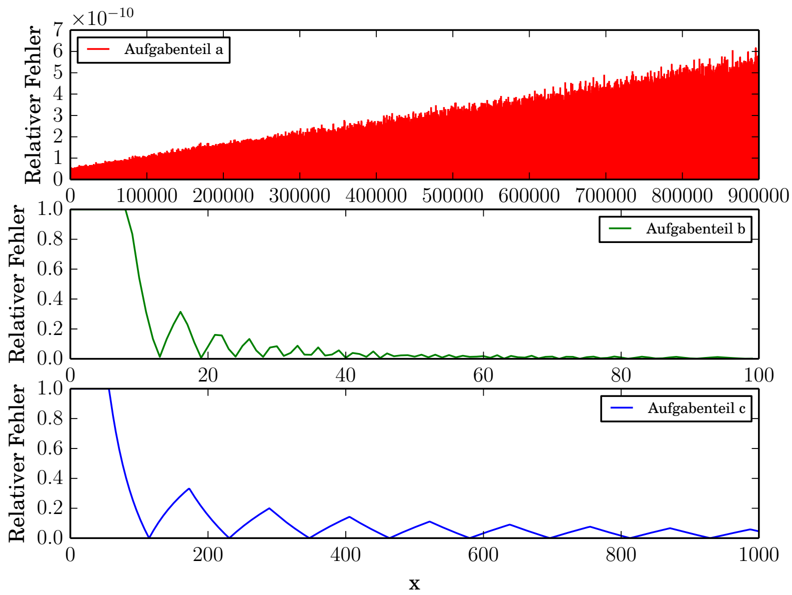

Abbildung 4: Aufgabe 2: Vergleich der relativen Fehler für die Aufgabenteile a) bis c).

Bei der Betrachtung der relativen Fehler fällt deutlich der Unterschied zwischen der ersten und der zweiten und dritten Berechnung auf. Während der relative Fehler bei Aufgabenteil b) und c) zunächst erst sehr groß ist, nimmt er dann jedoch schnell ab und wird kleiner, wenn auch mit einigen Schwankungen. Bei a) ergibt sich ein ganz anderer Verlauf, was daran liegt, das der relative Fehler sehr klein und nicht mehr für den Computer berechenbar ist. Dies ist auch in Abbildung 1 ersichtlich.

Aufgabe 3: Stabilität

Anfangswertproblem:

$$\dot{y}(t) = -y(t),$$
$$y(0) = 1$$

Analytische Lösung:

$$y(t) = e^t$$

5.1

a)

Anfangswerte:

$$y_0 = 1$$

und für das symmetrische Euler-Verfahren zusätzlich

$$y_1 = e^{-\Delta t}$$

Für eine Schrittweite von $\Delta t = 0,1$ ergibt sich auf dem Intervall [0, 10] folgene Funktion als Lösung des Anfangswertproblems.

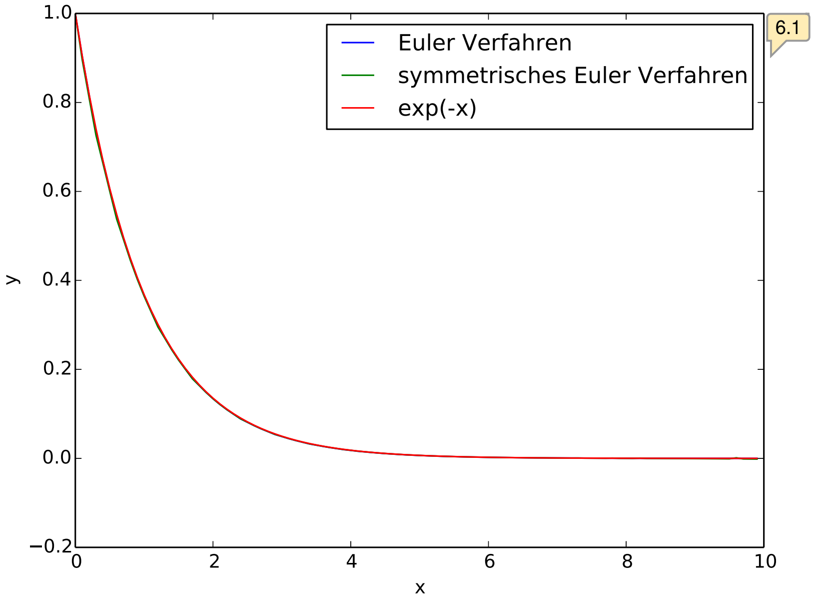

Abbildung 5: Aufgabe 3a: Lösung des AWP mittels Euler-Verfahrens und symmetrischen Euler-Verfahrens und rauschfreien Anfangswerten.

Für die gegebenen Startwerte ist die Lösung des Anfangswertproblems sowohl mittels Euler-Verfahrens als auch mittels symmetrischen Euler Verfahrens sehr genau, da kaum ein Unterschied zwischen den Funktionen erkennbar ist.

b)

Anfangswerte für das Euler-Verfahren:

$$y_0 = 1 - \Delta t$$

Anfangswerte für das symmetrische Euler-Verfahren:

$$\begin{aligned} y_0 &= 1 \\ y_1 &= y_0 - \Delta t \end{aligned}$$

Mit der gleichen Schrittweite wie in a) ergibt sich mit den angegebenen Startwerten folgene Funktion als Lösung des Anfangswertproblems.

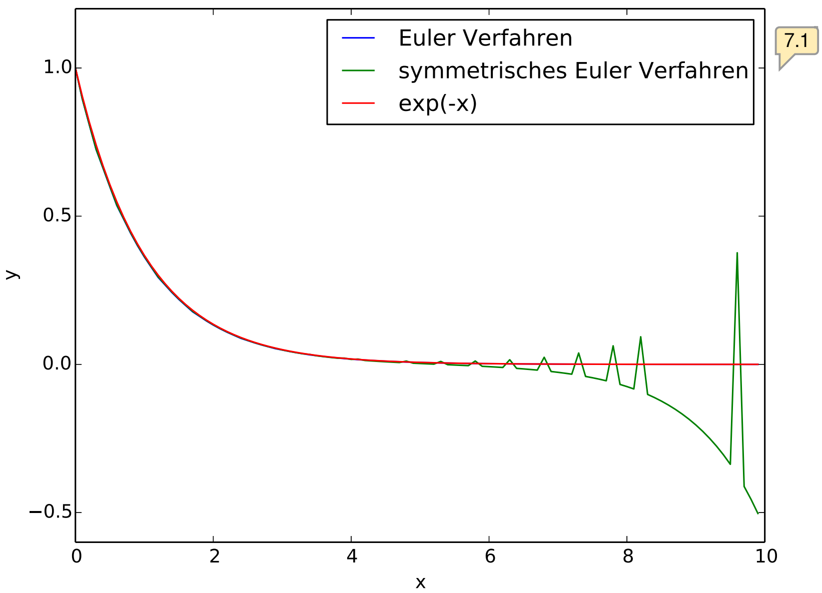

Abbildung 6: Aufgabe 3b: Lösung des AWP mittels Euler Verfahrens und symmetrischen Euler-Verfahrens und rauschbelasteten Anfangswerten.

Hier ist deutlich erkennbar, dass das Rauschen zu einer Instabilität des symmetrischen Euler-Verfahrens führt. Die Lösung dieses Verfahrens weicht auf dem gegebenen Intervall deutlich stärker von der analytischen Lösung ab, als die Lösung, welche durch das symmetrische Euler-Verfahren bestimmt wurde. Damit wurde anhand eines Beispiels gezeigt, dass das symmetrische Euler-Verfahren instabil gegenüber kleinen Fehlern (hier in der Größenordnung der Schrittweite) in den Anfangswerten ist.

Index der Kommentare

2.1 Noch eindrucksvoller wäre es natürlich gewesen, wenn ihr denselben Exponenten für a...c gewählt hättet, aber so ist das selbstverständlich auch völlig okay.

2.2 Sehr schön!

5.1 Ihr meint bestimmt e^{-t}

6.1 Passt!

Ideen für eine genauere Analyse:
- Plotten des rel./abs. Fehlers
- log. y-Achsenskalierung, um Verhalten auch nahe 0 gut vergleichen zu können

7.1 Wegen der Sprünge könnte es sinnvoll sein, die symm. Ergebnisse mit Punkten ohne Verbindungslinie einzuzeichnen.
Das Verhalten ist hier aber auch so gut erkennbar.
Allerdings seht ihr nicht, dass die Werte in quasi jedem Schritt springen, da in eurem Code dt nicht gleich eurer Auflösung in t ist