Долганёв Антон ПМИ-22
Вариант: 9

Цель: Сформировать практические навыки применения правила Рунге для оценки ошибки численного интегрирования и уточнения по Ричардсону для повышения точности решения прикладных задач.

Формулировка задания.

1. Разработать класс, реализующий схемы численного интегрирования в соответствии с вариантом задания.

2. Вычислить аналитически $I^* = \int_a^b \varphi(x)\,dx$.

3. Для отрезка [a,b] постройте три вложенные сетки с равномерным шагом h, h/2 и h/4. Для каждой из реализованных схем численного интегрирования выполните оценку порядка аппроксимации относительно шага равномерного сеточного разбиения.

4. Для каждой квадратурной формулы заполнить таблицу

№	a	b	$\varphi(x)$	Квадратуры	
9	0	1	$1/(x^2-4)$	Параболы	Гаусс-2

Результаты

```
Parabola Results:
h = 0.1000000000 : -0.2746538762 Error: 0.0000008040
h = 0.0500000000 : -0.2746531233 Error: 0.0000000511
h = 0.0250000000 : -0.2746530754 Error: 0.0000000032

Parabola Error Analysis (Runge and Richardson):
              h           Runge      RichardsonError_Richardson
   0.0500000000  -0.0000000502  -0.2746531735    0.0000001013
   0.0250000000  -0.0000000032  -0.2746530786    0.0000000064

Gauss-2 Results:
h = 0.1000000000 : -0.2746530381 Error: 0.0000000341
h = 0.0500000000 : -0.2746530700 Error: 0.0000000021
h = 0.0250000000 : -0.2746530720 Error: 0.0000000001

Gauss-2 Error Analysis (Runge and Richardson):
              h           Runge      RichardsonError_Richardson
   0.0500000000   0.0000000021  -0.2746530679    0.0000000043
   0.0250000000   0.0000000001  -0.2746530719    0.0000000003
```

Результаты численного интегрирования, представленные в таблицах:

h	$I^* - I^h$	$\dfrac{I^{h/2} - I^h}{2^k - 1}$	I^R	$I^* - I^R$
0,05	0.0000000511	0.0000000502	-0.2746531735	0.0000001013
0.025	0.0000000032	0.0000000032	-0.2746530786	0.0000000064

h	$I^* - I^h$	$\dfrac{I^{h/2} - I^h}{2^k - 1}$	I^R	$I^* - I^R$
0,05	0.0000000021	0.0000000021	-0.2746530679	0.0000000043
0.025	0.0000000001	0.0000000001	-0.2746530719	0.0000000003

Выводы:

Метод парабол: При уменьшении шага h, результаты интегрирования с каждым разом становятся более точными, что подтверждается уменьшением ошибки. Оценка ошибки методом Рунге и уточнение по Ричардсону показывают, что с уменьшением h, ошибка значительно сокращается, что является характерным признаком сходимости метода.

Гаусс2: Результаты аналогичны: снижение h ведет к улучшению точности (ошибка также уменьшается). Ошибка по Ричардсону для Гаусса-2 также уменьшается при меньших шагах, и её значения значительно близки к нулю.Оба метода демонстрируют хорошую сходимость с уменьшением шага.

В целом, оба метода (парабола и Гаусс-2) дают схожие результаты с малой ошибкой. Снижение шага приводит к улучшению точности, что подтверждает правильность реализации алгоритмов и правильный выбор шагов интегрирования.