Часть 1

1. Исследуйте на линейную зависимость:

$$f_1(x)=e^x, f_2(x)=1, f_3(x)=x+1, f_4(x)=x-e^x.$$

Достаточное условие линейной зависимости: существует нетривиальная линейная комбинация векторов; это аналогично возможности выразить один из векторов через линейную комбинацию других

$$f_4(x)=f_3(x)-f_2(x)-f_1(x)$$

$$x-e^x=(x+1)-(1)-(e^x)$$

Поскольку мы смогли выразить f_4 через нетривиальную линейную комбинацию остальных, можно сделать вывод, что вектора линейно зависимы

2. Исследуйте на линейную зависимость:

$$f_1(x)=2, f_2(x)=x, f_3(x)=x^2, f_4(x)=(x+1)^2$$

$$f_4(x)=f_3(x)+2f_2(x)+\frac{1}{2}f_1(x)$$

$$(x+1)^2=x^2+2x+1$$

Вектора линейно зависимы

3. Найдите координаты вектора $x=(2,3,5)\in R^3$ в базисе $b_1=(0,0,10)$, $b_2=(2,0,0)$, $b_3=(0,1,0)$.

Разложение вектора в базисе выражается формулой $\sum_{k=1}^{n} x_n \cdot b_n$, где x_n - координаты вектора x в базисе из векторов b_n. Найдем разложение вектора x в заданном базисе:

$$x=\frac{1}{2}b_1+b_2+3b_3$$

Ответ: $\left(\frac{1}{2},1,3\right)$

4. Найдите координаты вектора $3x^2-2x+2\in R^3[x]$:

а) в базисе 1, x, x^2;

б) в базисе x^2, $x-1$, 1.

а) Аналогично предыдущему заданию восстановим разложение по формуле:

$$x=2\cdot(1)-2\cdot(x)+3\cdot(x^2)$$

$$(2,-2,3)$$

б) перепишем вектор в виде:

$$3x^2-2x+4-2$$

$$3x^2-2(x-1)+0$$

Имеем координаты (3, -2, 0)

5. Установите, считается ли линейным подпространством:

а) совокупность всех векторов трёхмерного пространства, у которых по крайней мере одна из первых двух координат равна нулю;

б) все векторы, считающиеся линейными комбинациями данных векторов $\{u_1,u_2\ldots,u_n\}$.

а) попробуем сложить два вектора (1, 0, 1) и (0, 1, 1). В результате получим вектор (1, 1, 2). Условие принадлежности к подпространству не выполняется, занчит эта совокупность не является подпространством

б)

$a=\lambda_1 u_1+\lambda_2 u_2+\ldots+\lambda_n u_n$

$b=\mu_1 u_1+\mu_2 u_2+\ldots+\mu_n u_n$

$a+b=(\lambda_1+\mu_1)u_1+(\lambda_2+\mu_2)u_2+\ldots(\lambda_n+\mu_n)u_n$

$\alpha\cdot a=\alpha\lambda_1 u_1+\alpha\lambda_2 u_2+\ldots\alpha\lambda_n u_n$

$\beta\cdot b=\beta\mu_1 u_1+\beta\mu_2 u_2+\ldots\beta\mu_n u_n$

сумма и умножение на константу также являются линейными комбинациями данных векторов

оба условия выполняются, значит совокупность является линейным подпространством

Часть 2

1. Найдите скалярное произведение векторов $x,y\in R$: а) $x=(0,-3,6)$, $y=(-4,7,9)$; б) $x=(7,-4,0,1)$, $y=(-3,1,11,2)$.

а) $(x,y)=0\cdot(-4)+(-3)\cdot 7+6\cdot 9=32$ б) $(x,y)=7\cdot(-3)+(-4)\cdot 1+0\cdot 11+1\cdot 2=-23$

```
def vect_scalar(a, b):
    result = 0
    for x, y in zip(a, b):
        result += x * y
    return result

x = [0, -3, 6]
y = [-4, 7, 9]
print(f'а) {vect_scalar(x, y)}')
x = [7, -4, 0, 1]
y = [-3, 1, 11, 2]
print(f'б) {vect_scalar(x, y)}')
```

```
а) 33
б) -23
```

1. Найдите нормы векторов (4,2,4) и (12,3,4) и угол между ними.

```
import numpy as np
import math
x = np.array([4, 2, 4])
y = np.array([12, 3, 4])
norm_x = np.sqrt(vect_scalar(x, x))
norm_y = np.sqrt(vect_scalar(y, y))
cos_phi = vect_scalar(x, y) / (norm_x * norm_y)
print(f'norm(x) = {norm_x}, norm(y) = {norm_y}, phi = 
{math.acos(cos_phi)*(180/math.pi)} degrees')
```

```
norm(x) = 6.0, norm(y) = 13.0, phi = 26.17695217166654 degrees
```

```
#проверю
from numpy.linalg import norm

norm(x), norm(y), math.acos(x.dot(y)/norm(x)/norm(y))*(180/math.pi)
```

```
(6.0, 13.0, 26.176952171666557)
```

3. Определите, будет ли линейное пространство евклидовым, если за скалярное произведение принять: а) произведение длин векторов; б) утроенное обычное скалярное произведение векторов?

Проверим основные аксиомы евклидова пространства:

```
# а)
def vect_len_mul(a, b):
    return norm(a) * norm(b)

# б)
def triple_scalar(a, b):
    return 3*a.dot(b)

#проверка аксиом
```

```python
def check_axioms(func):
    x = np.array([1, 2, 4])
    y = np.array([4, 5, 6])
    x1 = np.array([7, 8, 9])
    x2 = np.array([2, 5, 11])
    Lambda = 3
    #1 (x ,y) = (y, x)
    print(func(x, y) == func(y, x))
    #2 (lambda*x, y) = lambda(x, y)
    print(func(Lambda*x, y) == Lambda*func(x, y))
    #3 (x1+x2, y) = (x1, y) + (x2)
    print(func(x1+x2, y) == (func(x1, y) + func(x2, y)))
    #4 (x, x) >= 0, (x, x) = 0 -> x=0
    nul = np.array([0, 0, 0])
    print(func(x, x) >= 0, func(nul, nul) == 0)

#a)
print("CASE A:")
check_axioms(vect_len_mul)
print('------------')
print('CASE B')
check_axioms(triple_scalar)
```

```
CASE A:
True
False
False
True True
------------
CASE B
True
True
True
True True
```

В первом случае не выполняются 2-я и 3-я аксиомы, значит за скалярное произведение произведение длин принимать нельзя, либо это пространство не будет евклидовым. Со вторым случаем все аксиомы прошли проверку

4. Выясните, какие из нижеперечисленных векторов образуют ортонормированный базис в линейном пространстве R^3: а) $(1,0,0),(0,0,1)$; б) $(1/\sqrt{2},-1/\sqrt{2},0),(1/\sqrt{2},1/\sqrt{2},0),(0,0,1)$; в) $(1/2,-1/2,0),(0,1/2,1/2),(0,0,1)$; г) $(1,0,0),(0,1,0),(0,0,1)$?

Случай г) является стандартным ОНБ в пространстве R^3.

В случае а) не хватает одного вектора для образования трехмерного базиса

Проверим базисы б) и г) на выполнение свойств ОНБ: вектора должны быть попарно перпендикулярными (скалярное произведение векторов попарно равно 0), норма каждого вектора должна быть равна 1

```
# б)
two_sqrt = 1/np.sqrt(2)
b1 = np.array([two_sqrt, -two_sqrt, 0])
b2 = np.array([two_sqrt, two_sqrt, 0])
b3 = np.array([0, 0, 1])
b1.dot(b2), b1.dot(b3), b2.dot(b3), norm(b1), norm(b2), norm(b3)
```

```
(0.0, 0.0, 0.0, 0.9999999999999999, 0.9999999999999999, 1.0)
```

в случае б) базис ортонормирован

```
# в)
b1 = np.array([0.5, -0.5, 0])
b2 = np.array([0, 0.5, 0.5])
b3 = np.array([0, 0, 1])
b1.dot(b2), b1.dot(b3), b2.dot(b3), norm(b1), norm(b2), norm(b3)
```

```
(-0.25, 0.0, 0.5, 0.7071067811865476, 0.7071067811865476, 1.0)
```

в) не образуют ортонормированный базис