Рубежный контроль №1

по математической статистике

Уласик Евгений Александрович

группа ИУ7-61Б

14 мая 2020 года

Количество листов: 4

① Непрерывная СВ X имеет плотность распред.

$$f_X(x) = \frac{3\lambda^3}{x^4}, \quad x \geq \lambda$$

где зн-е $\lambda > 0$ неизвестно. Использ. стат.:

$$\hat{\lambda}(\vec{X}) = \frac{3n-1}{3n} \min_{k=\overline{1,n}} \{X_k\}$$

где $\overline{X} = (X_1, \dots X_n)$ – сл. выборка из ген. совокупности

Явл. ли оценка $\hat{\lambda}(\vec{X})$ а) несмещ.

б) эфф. по Рао-Крамеру.

а) 1. $M\hat{\lambda}(\vec{X}) = \frac{3n-1}{3n} M[\min_{k=\overline{1,n}}\{X_k\}] = \frac{3n-1}{3n} M[X_{min}]$

$\exists\ Y = \min_{k=\overline{1,n}}\{X_k\}$

$$F_Y(y) = P\{Y < y\} = 1 - P\{Y \geq y\} = 1 - P\{(X_1 \geq x) \dots (X_n \geq x)\} =$$

$$= \left\{ X_i \text{ – незав.} \right\} = 1 - \prod_{i=1}^{n} P\{X_i > y\} = 1 - \prod_{i=1}^{n}(1 - F_{X_i}(y))$$

$$F_X(x) = \int_{-\infty}^{x} f_X(x)dx = \left\{ x \geq \lambda \right\} = \int_{\lambda}^{x} \frac{3\lambda^3}{x^4}dx = 3\lambda^3\left(\frac{1}{3\lambda^3} - \frac{1}{3x^3}\right) =$$

$$= 1 - \frac{\lambda^3}{x^3}$$

$$F_X(x) = 1 - \prod_{i=1}^{n}\left(1 - 1 + \frac{\lambda_i^3}{y}\right) = \left\{ X_i \text{ имеют одинаковое распред} \right\} =$$

$$= 1 - \frac{\lambda^{3n}}{y^{3n}}$$

$$f_Y(y) = \frac{\partial F_Y(y)}{\partial y} = \frac{3n\lambda^{3n}}{y^{3n+1}}$$

$$M[Y] = \int_{-\infty}^{+\infty} y f_Y(y)dy = \int_{\lambda}^{+\infty} y \frac{3n\lambda^{3n}}{y^{3n+1}}dy = 3n\lambda^{3n}\frac{1}{(1-3n)y^{3n-1}}\Bigg|_{\lambda}^{+\infty} =$$

$$= \frac{3n\lambda^{3n}}{(3n-1)\lambda^{3n-1}} = \frac{3n\lambda}{3n-1}$$

① продолжение

$$M[\hat{\lambda}(\vec{X})] = M\left[\frac{3n-1}{3n}Y\right] = \frac{3n-1}{3n}M[Y] = \frac{3n-1}{3n}\cdot\frac{3n\lambda}{3n-1} =$$

$= \lambda$ - оценка несмещённая

б) $$D[Y] = \int_{-\infty}^{+\infty} y^2 f_Y(y)dy - (M[Y])^2 = \int_{\lambda}^{+\infty} y^2\frac{3n\lambda^{3n}}{y^{3n+1}}dy - \frac{(3n\lambda)^2}{(3n-1)^2} =$$

$$= 3n\lambda^{3n}\cdot\frac{1}{(2-3n)y^{3n-2}}\Big|_{\lambda}^{+\infty} - \frac{9n^2\lambda^2}{(3n-1)^2} = \frac{3n\lambda^{3n}}{(3n-2)\lambda^{3n-2}} - \frac{9n^2\lambda^2}{(3n-1)^2} =$$

$$= \frac{3n\lambda^2}{(3n-2)} - \frac{9n^2-\lambda}{(3n-1)^2}$$

$$D[\hat{\lambda}(\vec{X})] = D\left[\frac{3n-1}{3n}Y\right] = \frac{(3n-1)^2}{9n^2}\left(\frac{3n\lambda^2}{(3n-2)} - \frac{9n^2\lambda^2}{(3n-1)^2}\right) =$$

$$= \frac{\lambda^2(3n-1)^2}{3n(3n-2)} - \lambda^2 = \frac{\lambda^2(9n^2-6n)}{(9n^2-6n)} + \frac{\lambda^2}{9n^2-6n} - \lambda^2 = \frac{\lambda^2}{9n^2-6n}$$

Количество информации по Фишеру в первом испытании:

$$I_0(\lambda) = M\left\{\left[\frac{\partial \ln f_X(x,\lambda)}{\partial\lambda}\right]^2\right\} = M\left\{\left[\frac{\partial \ln\left(\frac{3\lambda^3}{x^4}\right)}{\partial\lambda}\right]^2\right\} =$$

$$= M\left\{\left[\frac{\partial(\ln 3 + 3\ln\lambda - 4\lambda x)}{\partial\lambda}\right]^2\right\} = M\left[\left(\frac{3}{\lambda}\right)^2\right] = \frac{9}{\lambda^2}$$

Количество информации в n испытаниях:

$$I(\lambda) = n I_0(\lambda) = \frac{9n}{\lambda^2}$$

Показатель эффективности:

$$e(\hat{\lambda}) = \frac{1}{I(\lambda)D[\hat{\lambda}]} = \frac{1}{\frac{9n}{\lambda^2}\cdot\frac{\lambda^2}{9n^2-6n}} = \frac{9n^2-6n}{9n} \neq 1$$

Оценка неэфф. по Р.К

Ответ: да; нет

2

Дано

$X \sim N(m, 6^2)$

$6^2 = 4$

$\gamma = 0.9$

$n = 16$

$\overline{X} = 3.52$

$S^2(\overrightarrow{X}) = 1.21$

Найти

довер. интервал

Решение

Для решения этой задачи нужно использовать центральную статистику:

$$T(\overrightarrow{X}, m) = \frac{m - \overline{X}}{6}\sqrt{n}$$

$\exists$ g - функция плотности распред. статистики. Выберем $\alpha_1, \alpha_2 > 0$ такие, что $\alpha_1 + \alpha_2 = 1 - \gamma$. В соответствии со свойствами непрерывных случайных величин можно записать:

$$\gamma = \{u_{\alpha_1} < g(\overrightarrow{X}, m) < u_{1-\alpha_2}\},$$

где $u_{\alpha_1}, u_{1-\alpha_2}$ - квантили соотв. уровней нормального распред.

$\alpha_1 = \alpha_2 = \frac{1-\gamma}{2}$, поэтому $u_{\alpha_2} = u_{1-\frac{1-\gamma}{2}} = u_{\frac{1+\gamma}{2}}$.

В силу симметричности плотности норм. распред:

$$u_{\alpha_1} = -u_{\alpha_2} = -u_{\frac{1+\gamma}{2}}$$

Таким образом: $\gamma = P\left\{-u_{\frac{1+\gamma}{2}} < \frac{m - \overline{X}}{6}\sqrt{n} < u_{\frac{1+\gamma}{2}}\right\}$

$$\gamma = P\left\{\overline{X} - \frac{6u_{\frac{1+\gamma}{2}}}{\sqrt{n}} < m < \overline{X} + \frac{6u_{\frac{1+\gamma}{2}}}{\sqrt{n}}\right\}$$

$$\underline{m}(\overrightarrow{X}) = \overline{X} - \frac{6u_{\frac{1+\gamma}{2}}}{\sqrt{n}} = \overline{X} - \frac{6u_{0.95}}{\sqrt{n}} \overset{\text{таблица квантилей}}{=} 3.52 - \frac{2 \cdot 2.1199}{4} \approx 2.46$$

$$\overline{m}(\overrightarrow{X}) = \overline{X} + \frac{6u_{0.95}}{\sqrt{n}} = 3.52 + \frac{2 \cdot 2.1199}{4} \approx 4.57995$$

Ответ: (2.46, 4.57995).