Министерство науки и высшего образования Российской Федерации
Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение высшего образования
«Московский государственный технический университет имени Н.Э. Баумана (национальный исследовательский университет)»
(МГТУ им. Н.Э. Баумана)

ФАКУЛЬТЕТ Информатика и системы управления

КАФЕДРА Программное обеспечение ЭВМ и информационные технологии

Лабораторная работа №1 по курсу "Математическая статистика" по теме "Интервальные оценки"

Студент: Уласик Е.А.

Группа: ИУ7-61

Вариант: 21

2020 г.

Постановка задачи

Цель работы: построение доверительных интервалов для математического ожидания и дисперсии нормальной случайной величины.

Содержание работы:

1. Для выборки объема n из нормальной генеральной совокупности X реализовать в виде программы на ЭВМ
   a. вычисление точечных оценок $\hat{\mu}(\overrightarrow{x_n})$ и $S^2(\overrightarrow{x_n})$математического ожидания MX и дисперсии DX соответственно;
   b. вычисление нижней и верхней границ $\underline{\mu}(\overrightarrow{x_n})$, $\overline{\mu}(\overrightarrow{x_n})$ для γ-доверительного интервала для математического ожидания MX;
   c. вычисление нижней и верхней границ $\underline{\sigma^2}(\overrightarrow{x_n})$ и $\overline{\sigma^2}(\overrightarrow{x_n})$ для γ-доверительного интервала для дисперсии DX;
2. вычислить $\hat{\mu}$ и S^2 для выборки из индивидуального варианта;
3. для заданного пользователем уровня доверия γ и N – объема выборки из индивидуального варианта:
   a. На координатной плоскости Oyn построить прямую $y = \hat{\mu}(\overrightarrow{x_N})$, также графики функций $y = \hat{\mu}(\overrightarrow{x_n})$, $y = \underline{\mu}(\overrightarrow{x_n})$ и $y = \overline{\mu}(\overrightarrow{x_n})$ как функций объема n выборки, где n изменяется от 1 до N;
   b. На другой координатной плоскости Ozn построить прямую $z = S^2(\overrightarrow{x_n})$, также графики функций $z = S^2(\overrightarrow{x_n})$, $z = \underline{\sigma^2}(\overrightarrow{x_n})$ и $z = \overline{\sigma^2}(\overrightarrow{x_n})$ как функций объема n выборки, где n изменяется от 1 до N.

1. Определения

Определение γ доверительного интервала

Пусть $\overline{X_n}$ – случайная выборка объёма n из генеральной совокупности X, закон распределения которой известен с точностью до параметра θ, значение которого известно.

Интервальной оценкой с коэффициентов доверия γ (γ – доверительной интервальной оценкой) параметра θ называют пару статистик $\underline{\theta}(\overrightarrow{\mathrm{X}_n})$ и $\overline{\theta}(\overrightarrow{\mathrm{X}_n})$ таких, что $P\{\underline{\theta}(\overrightarrow{\mathrm{X}_n}) < \theta < \overline{\theta}(\overrightarrow{\mathrm{X}_n})\} = \gamma$.

Доверительный интервалом с коэффициентом доверия γ называют интервал $(\underline{\theta}(\overrightarrow{\mathrm{X}_n}), \overline{\theta}(\overrightarrow{\mathrm{X}_n}))$, отвечающий выборочным значениям статистик $\underline{\theta}(\overrightarrow{\mathrm{X}_n})$ и $\overline{\theta}(\overrightarrow{\mathrm{X}_n})$.

2. Формулы для вычисления величин

1. Оценка математического ожидания

a. При известной дисперсии

$$\underline{\mu}(\overrightarrow{X_n}) = \overline{X} - \frac{\sigma u_{1-\frac{1-\gamma}{2}}}{\sqrt{n}} \quad (1)$$

$$\overline{\mu}(\overrightarrow{X_n}) = \overline{X} + \frac{\sigma u_{1-\frac{1-\gamma}{2}}}{\sqrt{n}} \quad (2)$$

где n – объём выборки, σ^2 – дисперсия, $\overline{X}$ – выборочное среднее, $u_{1-\frac{1-\gamma}{2}}$ – квантиль уровня $1-\frac{1-\gamma}{2}$ нормального распределения.

b. При неизвестной дисперсии

$$\underline{\mu}(\overrightarrow{X_n}) = \overline{X} - \frac{S(\overrightarrow{X_n})}{\sqrt{n}} t_{1-\frac{1-\gamma}{2}}(n-1) \quad (3)$$

$$\overline{\mu}(\overrightarrow{X_n}) = \overline{X} + \frac{S(\overrightarrow{X_n})}{\sqrt{n}} t_{1-\frac{1-\gamma}{2}}(n-1) \quad (4)$$

где n – объём выборки, $S(\overrightarrow{X_n})$ – исправленная выборочная дисперсия, $\overline{X}$ – выборочное среднее, $t_{1-\frac{1-\gamma}{2}}$ – квантиль уровня $1-\frac{1-\gamma}{2}$ распределения Стьюдента с n – 1 степенями свободы.

2. Оценка дисперсии

$$\underline{\sigma^2}(\overrightarrow{X_n}) = \frac{S^2(\overrightarrow{X_n})(n-1)}{\chi^2_{1-\frac{1-\gamma}{2}}(n-1)} \quad (5)$$

$$\overline{\sigma^2}(\overrightarrow{X_n}) = \frac{S^2(\overrightarrow{X_n})(n-1)}{\chi^2_{\frac{1-\gamma}{2}}(n-1)} \quad (6)$$

где n – объём выборки, $S^2(\overrightarrow{X_n})$– исправленная выборочная дисперсия, $\overline{X}$ – выборочное среднее, $\chi^2_{\frac{1-\gamma}{2}}(n-1)$ – квантиль уровня $1-\frac{1-\gamma}{2}$ распределения χ^2 с n – 1 степенями свободы.

4. Листинг программы

```
function lab2()

    X = [-14.34,-16.97,-14.09,-14.74,-16.69,-13.85,-15.55,-14.62,-13.30,-15.52,-14.75,-16.51,-17.15,-16.87,-15.06,-13.60,-14.48,-14.71,-14.17,-13.88,-14.55,-15.37,-14.81,-16.05,-17.06,-15.86,-15.12,-15.98,-14.16,-15.81,-15.06,-16.19,-16.22,-16.19,-14.87,-15.62,-15.86,-15.25,-16.34,-14.44,-14.72,-15.17,-15.24,-14.44,-15.93,-14.87,-16.53,-15.76,-15.12,-12.91,-16.06,-16.06,-14.89,-15.57,-13.59,-16.84,-13.88,-14.33,-15.45,-16.58,-16.05,-14.34,-13.55,-16.78,-14.15,-14.28,-14.40,-13.98,-16.23,-15.35,-14.77,-15.61,-15.59,-15.64,-14.76,-17.18,-15.13,-15.01,-14.21,-13.91,-16.55,-15.44,-14.03,-16.44,-15.57,-15.07,-16.28,-16.30,-15.74,-14.03,-14.85,-15.73,-15.81,-14.42,-14.14,-15.14,-15.49,-16.42,-14.22,-14.20,-17.17,-15.82,-14.96,-14.75,-14.98,-13.64,-14.00,-17.29,-14.51,-16.18,-15.70,-15.07,-14.28,-14.55,-13.85,-15.36,-15.74,-14.61,-16.32,-15.34];

    N = 1:length(X);

    gamma = 0.9;
    alpha = (1 - gamma)/2;

    mu = math_expectation(X);

    s_sqr = variance(X);

    muArray = expectationArray(X, N);
    varArray = varianceArray(X, N);

    figure
    plot([N(1), N(end)], [mu, mu], 'black');
    hold on;
    plot(N, muArray, 'g');

    Ml = muArray - sqrt(varArray./N).*tinv(1 - alpha, N - 1);
    plot(N, Ml, 'b');

    Mh = muArray + sqrt(varArray./N).*tinv(1 - alpha, N - 1);
    plot(N, Mh, 'r');
    grid on;
    hold off;

    fprintf('mu = %.2f\n', mu);
    fprintf('S^2 = %.2f\n\n', s_sqr);
    fprintf('mu_low = %.2f\n', Ml(end));
    fprintf('mu_high = %.2f\n', Mh(end));


    figure
    plot([N(1), N(end)], [s_sqr, s_sqr], 'black');
    hold on;
    plot(N, varArray, 'g');

    Sl = varArray.*(N - 1)./chi2inv(1 - alpha, N - 1);
    plot(N, Sl, 'b');

    Sh = varArray.*(N - 1)./chi2inv(alpha, N - 1);
    plot(N, Sh, 'r');
    grid on;
    hold off;
    fprintf('sigma^2_low = %.2f\n', Sl(end));
    fprintf('sigma^2_high = %.2f\n', Sh(end));
end

function mu = math_expectation(X)
    mu = sum(X) / length(X);
end
```

```
function s_sqr = variance(X)
    s_sqr = var(X);
end

function muArray = expectationArray(X, N)
    muArray = [];
    for i = N
        muArray = [muArray, mean(X(1:i))];
    end
end

function varArray = varianceArray(X, N)
    varArray = [];
    for i = N
        varArray = [varArray, var(X(1:i))];
    end
end
```

4.Результат расчётов

Выборка:

X=(-14.34,-16.97,-14.09,-14.74,-16.69,-13.85,-15.55,-14.62,-13.30,-15.52,-14.75,-16.51,-17.15,-16.87,-15.06,-13.60,-14.48,-14.71,-14.17,-13.88,-14.55,-15.37,-14.81,-16.05,-17.06,-15.86,-15.12,-15.98,-14.16,-15.81,-15.06,-16.19,-16.22,-16.19,-14.87,-15.62,-15.86,-15.25,-16.34,-14.44,-14.72,-15.17,-15.24,-14.44,-15.93,-14.87,-16.53,-15.76,-15.12,-12.91,-16.06,-16.06,-14.89,-15.57,-13.59,-16.84,-13.88,-14.33,-15.45,-16.58,-16.05,-14.34,-13.55,-16.78,-14.15,-14.28,-14.40,-13.98,-16.23,-15.35,-14.77,-15.61,-15.59,-15.64,-14.76,-17.18,-15.13,-15.01,-14.21,-13.91,-16.55,-15.44,-14.03,-16.44,-15.57,-15.07,-16.28,-16.30,-15.74,-14.03,-14.85,-15.73,-15.81,-14.42,-14.14,-15.14,-15.49,-16.42,-14.22,-14.20,-17.17,-15.82,-14.96,-14.75,-14.98,-13.64,-14.00,-17.29,-14.51,-16.18,-15.70,-15.07,-14.28,-14.55,-13.85,-15.36,-15.74,-14.61,-16.32,-15.34)

Результат:

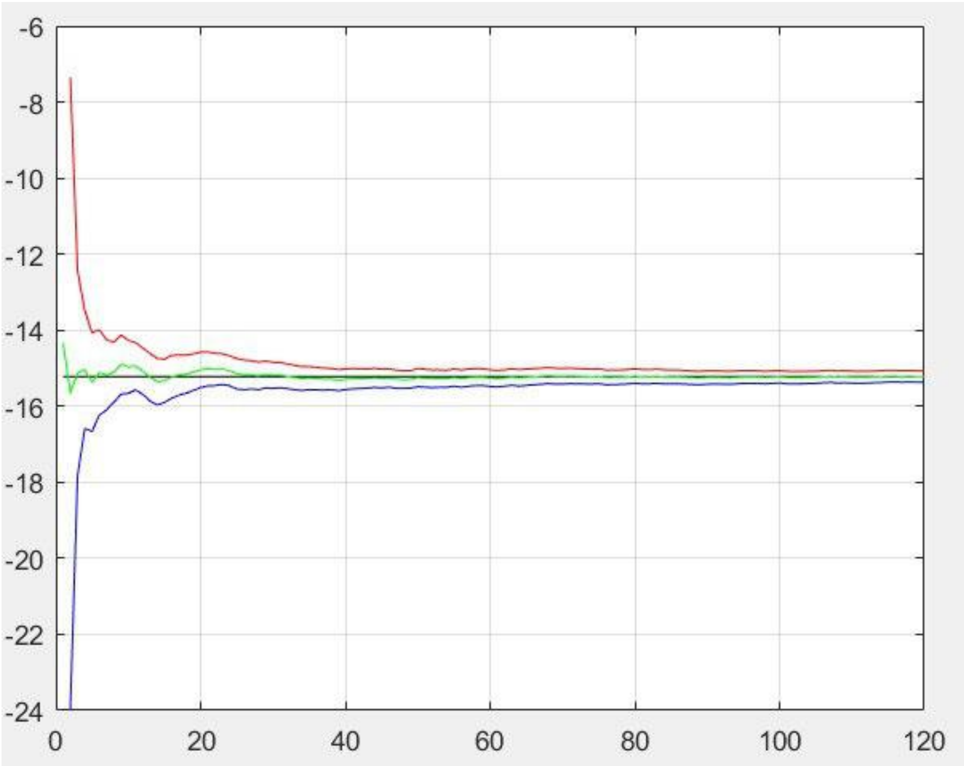
$\mu^2 = 1.84$

$S^2 = 1.15$

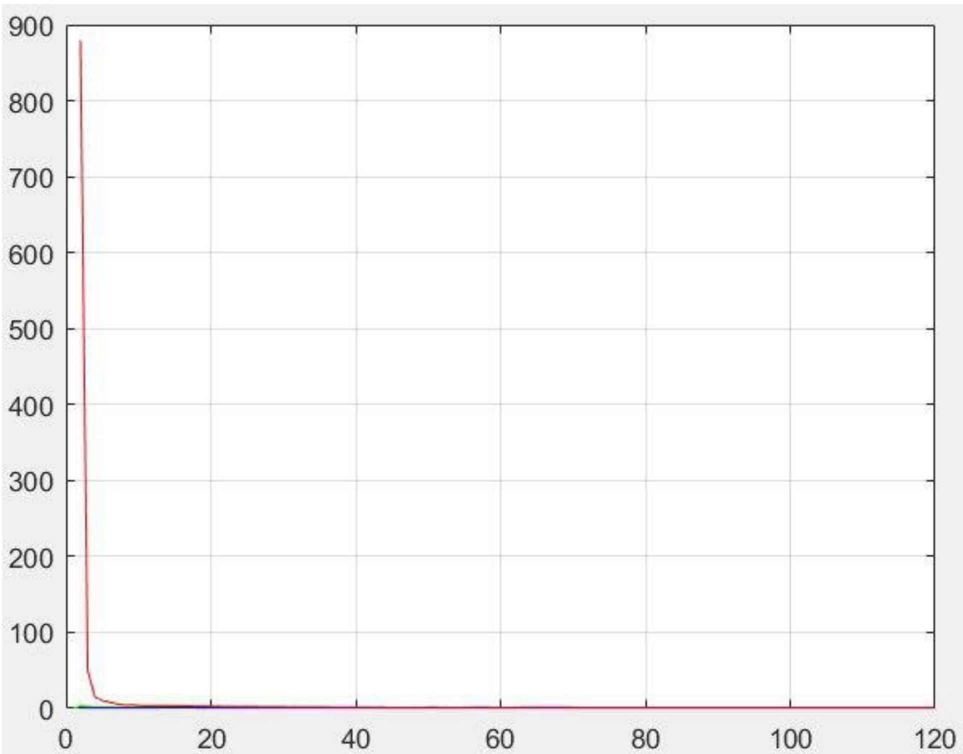
$(\underline{\mu}, \overline{\mu}) = (-15.37, -15.07)$

$(\underline{\sigma}, \overline{\sigma}) = (0.79, 1.21)$

$y = \hat{\mu}(\overrightarrow{x_N})$ (чёрный), $y = \hat{\mu}(\overrightarrow{x_n})$ (зелёный), $y = \underline{\mu}(\overrightarrow{x_n})$ (синий) и $y = \overline{\mu}(\overrightarrow{x_n})$ (красный) как функций объема n выборки, где n изменяется от 1 до N:



$z = S^2(\overrightarrow{x_n})$ (чёрный), $z = S^2(\overrightarrow{x_n})$ (зелёный), $z = \underline{\sigma^2}(\overrightarrow{x_n})$ (синий) и $z = \overline{\sigma^2}(\overrightarrow{x_n})$ (красный) как функций объема n выборки, где n изменяется от 1 до N:



от 1 до 40: