Домашнее задание
по математической статистике

Уласик
ИУ7-61Б
21 вариант

① Производится 1000 бросков правильной монеты. Определить такое число X, для которого с $P\{400 \le k \le X\} = 0.85$, где k-число выпадений герба.

Решение: $n = 1000$

$p = 0.5 \Rightarrow q = 1 - p = 0.5$

Воспользуемся интегральной теоремой Муавра-Лапласа:

$$P_{1000}(K_1; K_2) \approx \Phi\left(\frac{K_2 - np}{\sqrt{npq}}\right) - \Phi\left(\frac{K_1 - np}{\sqrt{npq}}\right)$$

$np = 1000 \cdot 0.5 = 500$

$\sqrt{npq} = \sqrt{500 \cdot 0.5} \approx 15.8114$

$$P_{1000}(400; X) \approx \Phi\left(\frac{X - 500}{15.8114}\right) - \Phi\left(\frac{400 - 500}{15.8114}\right) = 0.85$$

Отсюда $\Phi\left(\frac{400-500}{15.8114}\right) = \Phi(-6.3246) = -\Phi(6.3246) = -\Phi(>5) =$
$= \{$воспользуемся таблицей значений ф-ии Лапласа$\} \approx -0.5$

$$\Phi\left(\frac{X-500}{15.8114}\right) + 0.5 = 0.85$$

$$\Phi\left(\frac{X-500}{15.8114}\right) = 0.35$$

$$\frac{X-500}{15.8114} = 1.04$$

$$x - 500 = 16.4439$$

$$X \approx 516$$

Ответ: $X = 516$

② С использованием метода моментов для случайной выборки $\vec{X} = (X_1, \dots X_n)$ из генеральной совокупности X найти точечные оценки указанных параметров заданного закона распределения:

$$f_X(x) = \frac{\Theta^4}{3!} x^3 e^{-\Theta x}, \quad x > 0$$

Решение: Рассмотрим данный закон распределения. Если заметить, что $\Gamma(4) = 3!$, то $f_X(x)$ есть гамма распределение с параметрами $\lambda = \frac{1}{\Theta}$, $\alpha = 4$.

$$f_X(x) = x^3 \frac{e^{-\Theta x} \Theta^4}{\Gamma(4)}$$

Отсюда следует $X \sim \Gamma(4; \frac{1}{\Theta})$. Поэтому начальный момент

$$m_1(\Theta) = MX = \frac{4}{\Theta}$$

Начальный выборочный момент:

$$\hat{m}_1 = \overline{X}, \text{ где } \overline{X} \text{ - среднее выборочное}$$

Следуя методу моментов и приравняя эти моменты между собой:

$$\frac{4}{\Theta} = \overline{X} \Rightarrow \Theta = \frac{4}{\overline{X}}$$

Ответ: $\Theta = \frac{4}{\overline{X}}$, при $x > 0$

③ С использованием метода максимального правдоподобия для случайной выборки $\vec{X} = (x_1, \dots x_n)$ из генеральной совокупности X найти точечные оценки параметров заданного закона распределения. Вычислить выборочные значения найденных оценок для выборки $\vec{x}_5 = (x_1, \dots x_5)$

$$f_X(x) = \frac{1}{2\Theta^3} x^2 e^{-x/\Theta} \quad , x>0$$

Р: Заметим $\Gamma(3) = 2! = 2$, тогда f_x есть гамма распределение с параметрами $\lambda = \Theta$, $\alpha = 3$. Тогда $X \sim \Gamma(3; \Theta)$.

Функция правдоподобия:

$$L(\vec{X}, \Theta) = \frac{1}{2\Theta^3} x_1^2 e^{-x_1/\Theta} \cdot \frac{1}{2\Theta^3} x_2^2 e^{-x_2/\Theta} \cdot \ldots \cdot \frac{1}{2\Theta^3} x_5^2 e^{-x_n/\Theta} =$$

$$= \left(\frac{1}{2\Theta^3}\right)^n (x_1 \cdot x_2 \cdot \ldots \cdot x_n)^2 \cdot e^{-\frac{(x_1+x_2+\ldots+x_n)}{\Theta}} = (2\Theta^3)^{-n} (x_1 \cdot x_2 \cdot \ldots \cdot x_5)^2 \cdot e^{-\frac{(x_1+x_2+\ldots+x_5)}{\Theta}}$$

$$\ln L(\vec{X}, \Theta) = -n \ln(2\Theta^3) + 2\ln(x_1 \cdot x_2 \cdot \ldots \cdot x_n) - \frac{x_1+x_2+\ldots+x_n}{\Theta}$$

$$\frac{\partial \ln L}{\partial \Theta} = -\frac{n}{2\Theta^3} + \frac{(x_1+x_2+\ldots+x_n)}{\Theta^2} = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \hat{\Theta}(\vec{X}) = \frac{n}{2} \cdot \frac{1}{\sum_{i=1}^{n}(x_i)} = \frac{5}{2} \cdot \frac{1}{(3+5+6+2+9)} = \frac{1}{10}$$

Ответ: $\hat{\Theta}(\vec{X}) = \frac{1}{10}$

④ В результате пусков $n=10$ ракет получены (в км) следующие значения боковых отклонений точек попадания от точки прицеливания:

x	1.0	0.2	1.0	-0.1	-0.5	5.0	-1.0	3.0	0.5	1.0

Считая, что контролируемый признак имеет нормальное распределение, построить для него 99%-ый доверительный интервал.

Решение: Для нахождения доверительного интервала воспользуемся статистикой $\dfrac{\overline{X}-m}{\hat{\sigma}(\overrightarrow{X_n})}\cdot\sqrt{n-1}$, которая имеет распределение Стьюдента с $n-1$ степенью свободы. Выборочное среднее имеет значение:

$$\overline{x}=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}x_i=\frac{1}{10}(1+0.2+1-0.1-0.5+5-1+3+0.5+1)=1.01$$

Выборочная дисперсия: $\hat{\sigma}^2=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(x_i-\overline{x})^2=\frac{1}{10}((-0.01)^2+\ldots+(-0.01)^2)\approx 2.8673$

Выборочное среднее квадратичное отклонение: $\sigma=\sqrt{2.8673}\approx 1.69$

По условию:

$n=10 \Rightarrow n-1=9.$

$\alpha=\frac{1-\gamma}{2}=0.005=\alpha_1=\alpha_2$

$h_{1-\alpha_1}(9)=h^{+}_{0.995}(9)\approx 3.25$

$$\frac{\hat{\sigma}}{\sqrt{n-1}}\cdot h_{1-\alpha_1}=\frac{1.69}{3}\cdot 3.25\approx 1.79$$

Ответ: доверительный интервал: $1.01-1.79<m<1.01+1.79$