

1 问题

给定一根圆形截面细杆，已知长度为 L ，半径为 R ，材料为理想弹塑性材料，弹性模量为 E ，泊松比为 ν ，屈服强度为 f_y ，服从 Mises 屈服准则。加载方式：

1. 轴向拉伸细杆，使其全长全截面轴向应力均达到 f_y ；
2. 在保持杆长不变的情况下，杆的两端截面相对旋转一个小角度 θ ，假定扭转变形沿着杆的轴向均匀分布，同时杆的任意横截面在旋转过程中保持平面。

请问：

1. 判断杆的轴向应力在扭转变形过程中是变大还是变小？
2. 推导上述变形之后，轴向应力与剪应力沿杆截面分布的解析表达式。
3. 其他条件不变，将材料考虑为各向同性线性硬化材料，硬化模量为 K ，推导上述问题的控制方程，并讨论此时是否可以得到问题的解析解。
4. 自拟一组参数（建议采用钢材的材料参数，钢材强度等级自定），进行上述问题的有限元分析，比较理论计算结果和有限元计算结果，讨论二者的区别与联系。
5. 其他条件不变，将材料考虑为各向同性线性硬化材料，硬化模量取为 $K=0.05E$ ，再进行有限元分析，根据计算结果讨论理想弹塑性材料与弹塑性硬化材料的区别。
6. 如果改为 Drucker-Prager 塑性模型，结果将会怎样？

2 轴向应力定性判断

经过轴向拉伸，根据 Mises 屈服准则，当材料已经屈服，继续施加扭矩时，总等效应力不能超过屈服强度。对于柱坐标系，Mise 等效应力表述为：

$$\bar{\sigma} = \sqrt{\sigma_z^2 + 3\tau_{r\theta}^2}$$

扭转变形引入了剪应力 $\tau_{r\theta}$ ，为了满足屈服条件，轴向应力必须减小以维持等效应力不超过屈服强度。因此，杆的轴向应力在扭转变形过程中减小。

3 理想弹塑性材料下应力理论解

此时，柱坐标系下应力矩阵、偏应力矩阵和应变率矩阵为

$$\boldsymbol{\sigma} = \begin{pmatrix} 0 & & \\ & 0 & \tau \\ & \tau & \sigma \end{pmatrix}$$

$$\boldsymbol{s} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{3}\sigma & & \\ & -\frac{1}{3}\sigma & \tau \\ & \tau & \frac{2}{3}\sigma \end{pmatrix}$$

$$\dot{\boldsymbol{\varepsilon}} = \begin{pmatrix} \dot{\varepsilon}_{11} & & \\ & \dot{\varepsilon}_{22} & \frac{1}{2}\dot{\gamma} \\ & \frac{1}{2}\dot{\gamma} & 0 \end{pmatrix}$$

扭转过程中杆长保持不变，有 $\dot{\varepsilon}_{33} = \dot{\varepsilon}_{33}^e + \dot{\varepsilon}_{33}^p = 0$ ， $\dot{\varepsilon}_{33}^e = -\dot{\varepsilon}_{33}^p$ 。无体积塑性应变 ($\varepsilon_{ii}^p = 0$)，故

$$\dot{\varepsilon}_{11} = \dot{\varepsilon}_{22} = -\nu\dot{\varepsilon}_{33}^e - \frac{1}{2}\dot{\varepsilon}_{33}^p = \left(\nu - \frac{1}{2}\right)\dot{\varepsilon}_{33}^p$$

于是

$$s_{kl}\dot{\varepsilon}_{kl} = \tau\dot{\gamma} - \frac{2}{3}\sigma\left(\nu - \frac{1}{2}\right)\dot{\varepsilon}_{33}^p$$

考虑塑性流动表达式，有

$$\dot{\varepsilon}_{33}^p = \frac{3}{2} \frac{s_{kl}\dot{\varepsilon}_{kl}}{\sigma_y^2} s_{33}$$

由于圆杆已经全截面屈服，故 $\sigma_y = f_y$ ，从而上式化为

$$\dot{\varepsilon}_{33}^p = \frac{3}{2} \cdot \frac{\tau\dot{\gamma} + \frac{2}{3}(\frac{1}{2} - \nu)\sigma\dot{\varepsilon}_{33}^p}{f_y^2} \cdot \frac{2}{3}\sigma$$

解得

$$\dot{\varepsilon}_{33}^p = \frac{\sigma\tau}{f_y^2} \cdot \frac{1}{1 - \frac{2}{3}(\frac{1}{2} - \nu)\frac{\sigma^2}{f_y^2}} \dot{\gamma}$$

同理， $\dot{\varepsilon}_{32}^p = \frac{3}{2} \frac{s_{kl}\dot{\varepsilon}_{kl}}{\sigma_y^2} s_{32}$ ，有

$$\dot{\varepsilon}_{32}^p = \frac{s_{32}}{s_{33}} \dot{\varepsilon}_{33}^p = \frac{3\tau^2}{2f_y^2} \cdot \frac{1}{1 - \frac{2}{3}(\frac{1}{2} - \nu)\frac{\sigma^2}{f_y^2}} \dot{\gamma}$$

此时，截面正应力变化率可表示为

$$\dot{\sigma} = \dot{\sigma}_{33} = E(\dot{\varepsilon}_{33} - \dot{\varepsilon}_{33}^p) = -E\dot{\varepsilon}_{33}^p = \frac{E\sigma\tau}{f_y^2} \cdot \frac{1}{1 - \frac{2}{3}(\frac{1}{2} - \nu)\frac{\sigma^2}{f_y^2}} \dot{\gamma}$$

剪应力变化率可表示为

$$\dot{\tau} = 2G(\dot{\varepsilon}_{32} - \dot{\varepsilon}_{32}^p) = G \left[1 - \frac{\frac{3\tau^2}{f_y^2}}{1 - \frac{2}{3}(\frac{1}{2} - \nu)\frac{\sigma^2}{f_y^2}} \right] \dot{\gamma}$$

同时，考虑 Mises 屈服准则，有 $\sqrt{\sigma^2 + 3\tau^2} = f_y$ ，代入上式，得

$$\dot{\tau} = G \left[1 - \frac{\frac{3\tau^2}{f_y^2}}{1 - \frac{2}{3}(\frac{1}{2} - \nu) \left(1 - \frac{3\tau^2}{f_y^2} \right)} \right] \dot{\gamma}$$

进一步，有

$$\frac{d\sigma}{d\gamma} = \frac{E\sigma\tau}{f_y^2} \cdot \frac{1}{1 - \frac{2}{3}(\frac{1}{2} - \nu) \frac{\sigma^2}{f_y^2}}$$

$$\frac{d\tau}{d\gamma} = G \left[1 - \frac{\frac{3\tau^2}{f_y^2}}{1 - \frac{2}{3}(\frac{1}{2} - \nu) \left(1 - \frac{3\tau^2}{f_y^2} \right)} \right]$$

自定义参数：圆杆长度 L 为 400m，半径为 20mm，扭转角 θ 为 0.1rad，屈服强度 $f_y = 345\text{MPa}$ ，弹性模量 $E = 206\text{GPa}$ ，泊松比 $\nu = 0.3$ 。此时方程的显示解难以求出，考虑利用 Matlab 内置的龙格库塔公式 ode45 进行上述微分方程的数值求解，且 $\gamma = \frac{\theta}{L}r$ ，最终得到圆杆截面沿半径方向正应力、剪应力分布如图 1、图 2 所示。

值得注意的是，数值求解得到的正应力出现了不收敛的情况，此时考虑利用求得的剪应力再根据屈服函数求得真实正应力。

4 线性硬化材料下应力理论解

对于各向同性线性硬化材料，硬化模量为 K ，考虑相关塑性流动，可得塑性流动表达式：

$$\dot{\varepsilon}_{ij}^p = \dot{\lambda} \frac{\partial f(\sigma_{ij}, \alpha)}{\partial \sigma_{ij}} = \frac{\dot{\lambda}}{2\sqrt{J_2}} s_{ij} = \frac{s_{kl} \dot{\varepsilon}_{kl}}{2J_2 \left(1 + \frac{K}{3G} \right)} s_{ij}$$

此时，柱坐标系下应力矩阵、偏应力矩阵和应变率矩阵为

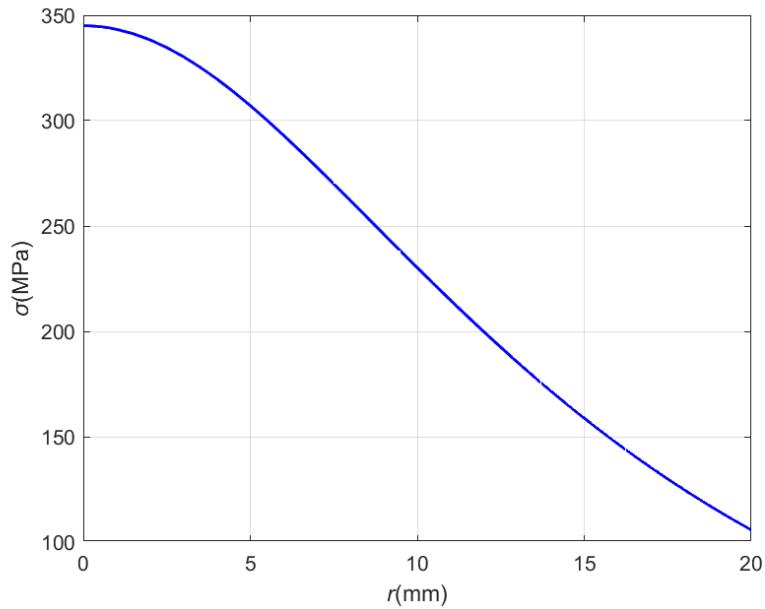


图 1 理想弹塑性材料正应力理论解

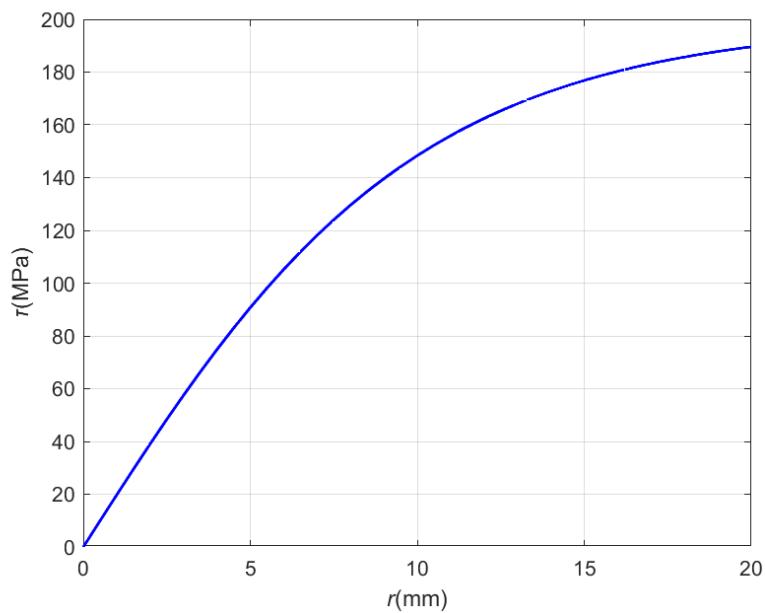


图 2 理想弹塑性材料剪应力理论解

$$\boldsymbol{\sigma} = \begin{pmatrix} 0 & & \\ & 0 & \tau \\ & \tau & \sigma \end{pmatrix}$$

$$s = \begin{pmatrix} -\frac{1}{3}\sigma \\ & -\frac{1}{3}\sigma & \tau \\ & \tau & \frac{2}{3}\sigma \end{pmatrix}$$

$$\dot{\varepsilon} = \begin{pmatrix} \dot{\varepsilon}_{11} \\ & \dot{\varepsilon}_{22} & \frac{1}{2}\dot{\gamma} \\ & \frac{1}{2}\dot{\gamma} & 0 \end{pmatrix}$$

易知 $\dot{\varepsilon}_{33} = \dot{\varepsilon}_{33}^e + \dot{\varepsilon}_{33}^p = 0$, $\dot{\varepsilon}_{33}^e = -\dot{\varepsilon}_{33}^p$ 。无体积塑性应变 ($\varepsilon_{ii}^p = 0$), 故

$$\dot{\varepsilon}_{11} = \dot{\varepsilon}_{22} = -\nu\dot{\varepsilon}_{33}^e - \frac{1}{2}\dot{\varepsilon}_{33}^p = \left(\nu - \frac{1}{2}\right)\dot{\varepsilon}_{33}^p$$

于是

$$s_{kl}\dot{\varepsilon}_{kl} = \tau\dot{\gamma} - \frac{2}{3}\sigma\left(\nu - \frac{1}{2}\right)\dot{\varepsilon}_{33}^p$$

代入塑性流动表达式中, 得到

$$\dot{\varepsilon}_{33}^p = \frac{\tau\dot{\gamma} - \frac{2}{3}\sigma\left(\nu - \frac{1}{2}\right)\dot{\varepsilon}_{33}^p}{2J_2\left(1 + \frac{K}{3G}\right)} s_{33}$$

即

$$\dot{\varepsilon}_{33}^p = \frac{\sigma\tau}{3J_2\left(1 + \frac{K}{G}\right) + \frac{2}{3}\sigma^2\left(\nu - \frac{1}{2}\right)} \dot{\gamma}$$

故截面正应力率表达式为

$$\begin{aligned}\dot{\sigma} &= \dot{\sigma}_{33} = E(\dot{\varepsilon}_{33} - \dot{\varepsilon}_{33}^p) = -E\dot{\varepsilon}_{33}^p \\ &= -\frac{E\sigma\tau}{3J_2\left(1+\frac{K}{G}\right)+\frac{2}{3}\sigma^2\left(\nu-\frac{1}{2}\right)}\dot{\gamma}\end{aligned}$$

同时， $\dot{\varepsilon}_{32}^p = \frac{s_{32}}{s_{33}}\dot{\varepsilon}_{33}^p = \frac{3\tau}{2\sigma}\dot{\varepsilon}_{33}^p$ ，故剪应力率表达式为

$$\begin{aligned}\dot{\tau} &= 2G(\dot{\varepsilon}_{32} - \dot{\varepsilon}_{32}^p) = 2G\left(\frac{1}{2}\dot{\gamma} - \frac{3\tau}{2\sigma}\dot{\varepsilon}_{33}^p\right) \\ &= G\left(1 - \frac{3\tau^2}{3J_2\left(1+\frac{K}{G}\right)+\frac{2}{3}\sigma^2\left(\nu-\frac{1}{2}\right)}\right)\dot{\gamma}\end{aligned}$$

考虑正应力和剪应力对剪应变的导数，有

$$\frac{d\sigma}{d\gamma} = -\frac{E\sigma\tau}{3J_2\left(1+\frac{K}{G}\right)+\frac{2}{3}\sigma^2\left(\nu-\frac{1}{2}\right)}$$

$$\frac{d\tau}{d\gamma} = G\left(1 - \frac{3\tau^2}{3J_2\left(1+\frac{K}{G}\right)+\frac{2}{3}\sigma^2\left(\nu-\frac{1}{2}\right)}\right)$$

自定义参数：屈服强度 $f_y = 345\text{MPa}$ ，弹性模量 $E = 206\text{GPa}$ ，泊松比 $\nu = 0.3$ ，剪切模量 $G = \frac{E}{2(1+\nu)}$ ，硬化模量 $K = 0.05E$ 。此时方程的显示解无法求出，同样考虑利用 Matlab 内置的龙格库塔公式 `ode45` 进行上述微分方程的数值求解，依 $\gamma = \frac{\theta}{L}r$ ，得到圆杆截面沿半径方向正应力、剪应力分布如图 3、图 4 所示。

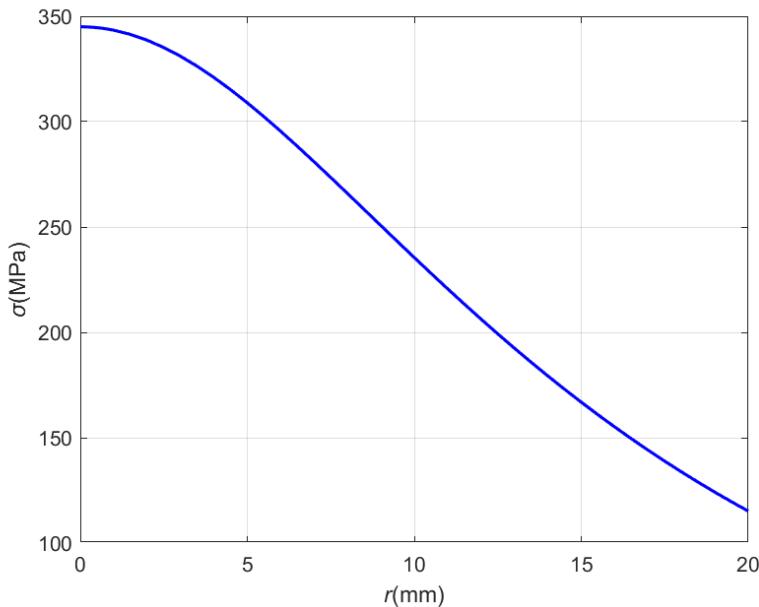


图 3 各向同性线性硬化材料正应力理论解

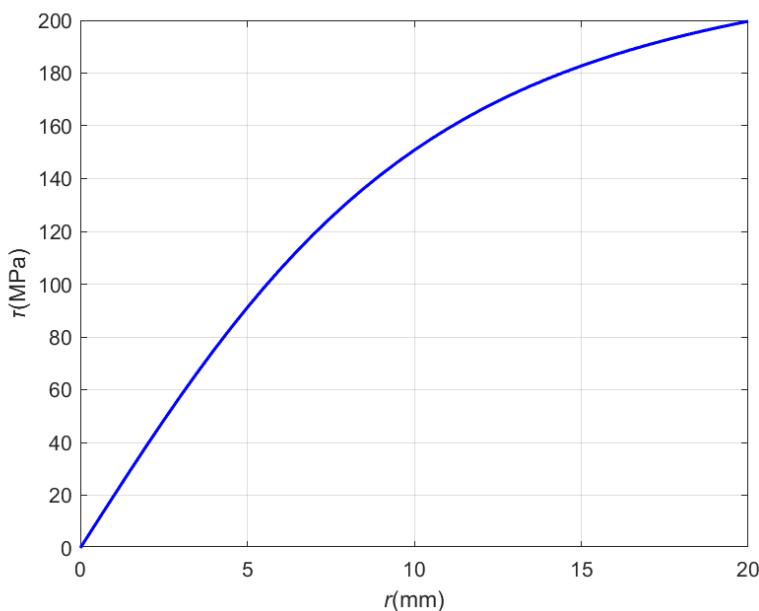


图 4 各向同性线性硬化材料剪应力理论解

5 理想弹塑性材料下应力有限元解

本文采用软件 ABAQUS 进行有限元分析，有限元模型如图 5 所示。有限元分析采用两个分析步，在第一个分析步中，在端部施加轴向位移（U3）0.67mm，可使圆杆全截面达到屈服，在第二个分析步中，在端部施加转角位移（UR3）0.1rad。有限元分析结果如图 6、图 7 所示。

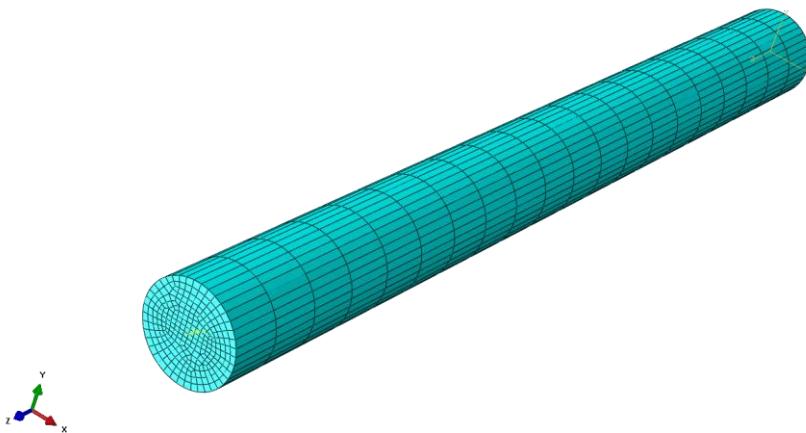


图 5 圆杆有限元模型

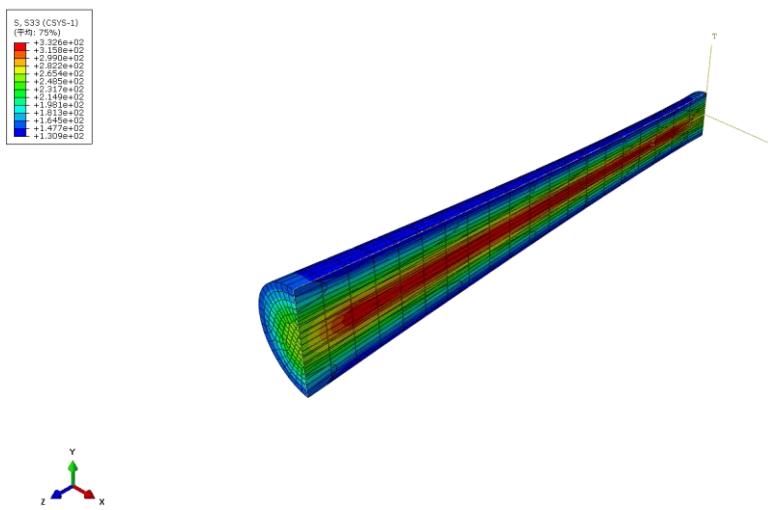


图 6 理想弹塑性材料下圆杆截面正应力云图

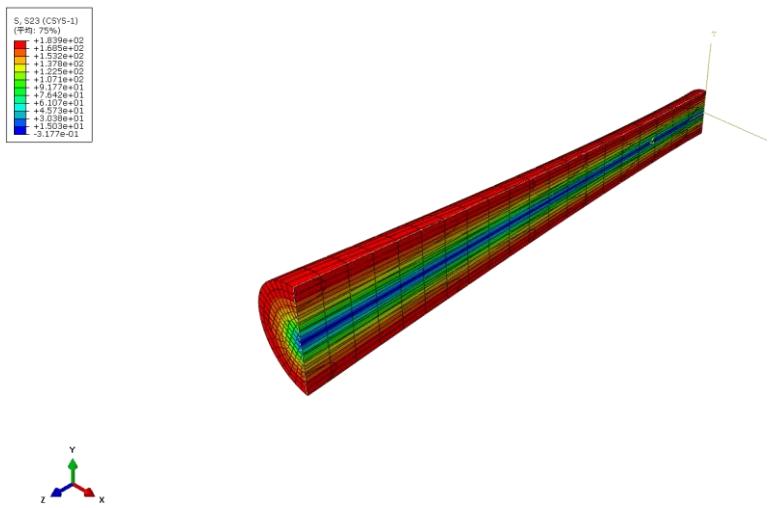


图 7 理想弹塑性材料下圆杆截面剪应力云图

提取圆杆截面沿径向分布的正应力与剪应力，并与前述理论解进行对比，如图 8、图 9 所示。

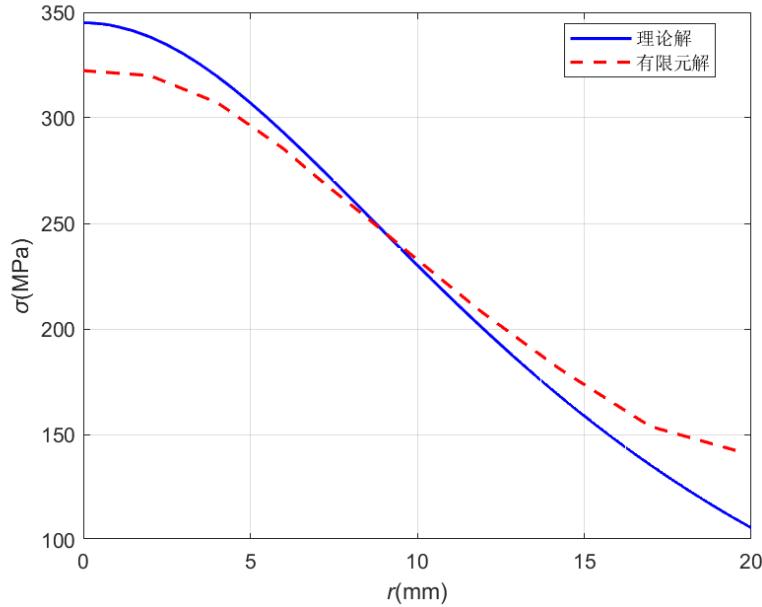


图 8 理想弹塑性材料下圆杆截面正应力理论解与有限元解

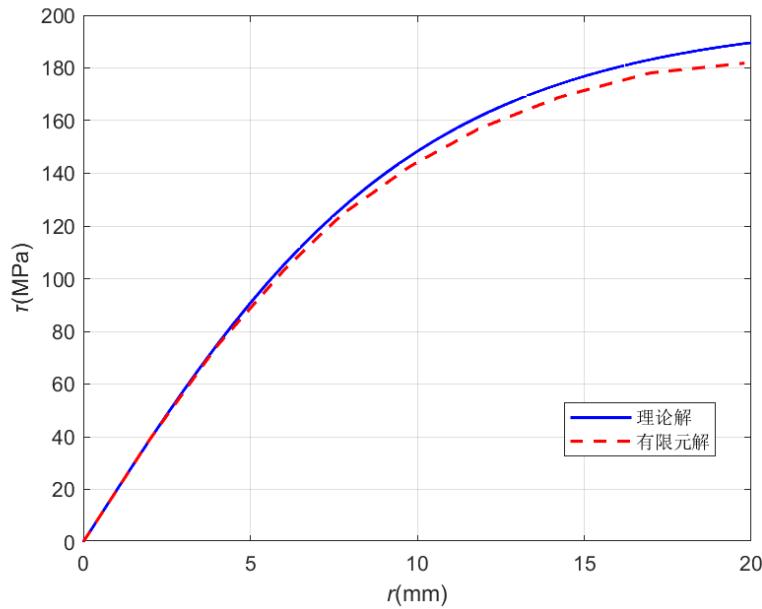


图 9 理想弹塑性材料下圆杆截面剪应力理论解与有限元解

从上图可以看出，对于剪应力理论解和有限元解较为一致。对于正应力，当 $5\text{mm} < r < 15\text{mm}$ 时，理论解与有限元解较为吻合，但在截面中心及截面外边缘的偏差较大。出现这种偏差的原因可能是由于有限元计算中插值函数的限制，

尤其是在网格较粗时，导致了数值解的精度降低。为了提高计算精度，后续可以考虑对模型进行更精细的网格划分，从而减少这种误差。

6 线性硬化材料下应力有限元解

荷载工况同第（4）问，材料为各向同性线性硬化材料。值得注意的是，多维下等效应力-等效塑性应变 ($\sigma_y - \varepsilon^p$) 曲线的斜率与一维下应力与塑性应变曲线的斜率相同，均为硬化模量 K ，在 ABAQUS 中的实现过程如下图所示。

	屈服应力	塑性应变
1	345	0
2	500	0.015

图 10 多维弹塑性模型本构塑性部分建模

经有限元分析，圆杆的应力场结果如下图所示。

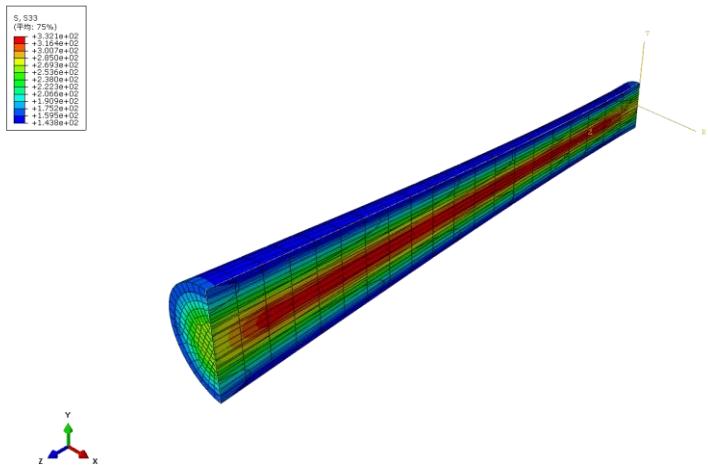


图 11 线性硬化材料下圆杆截面正应力云图

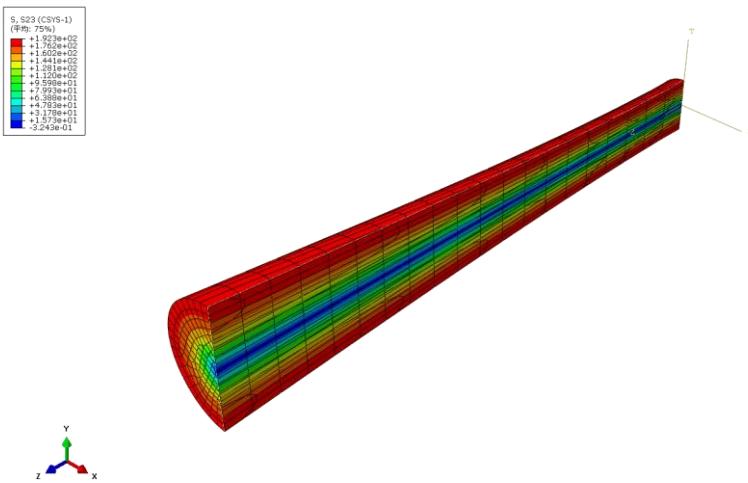


图 12 线性硬化材料下圆杆截面剪应力云图

提取圆杆截面沿径向分布的正应力与剪应力，并与前述理论解进行对比，如图 11、图 12 所示。

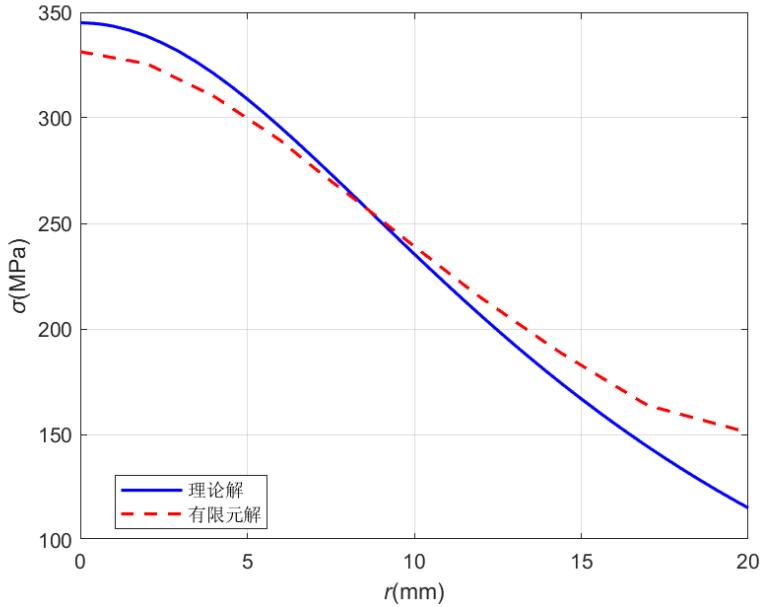


图 13 线性硬化材料正应力理论解与有限元解对比

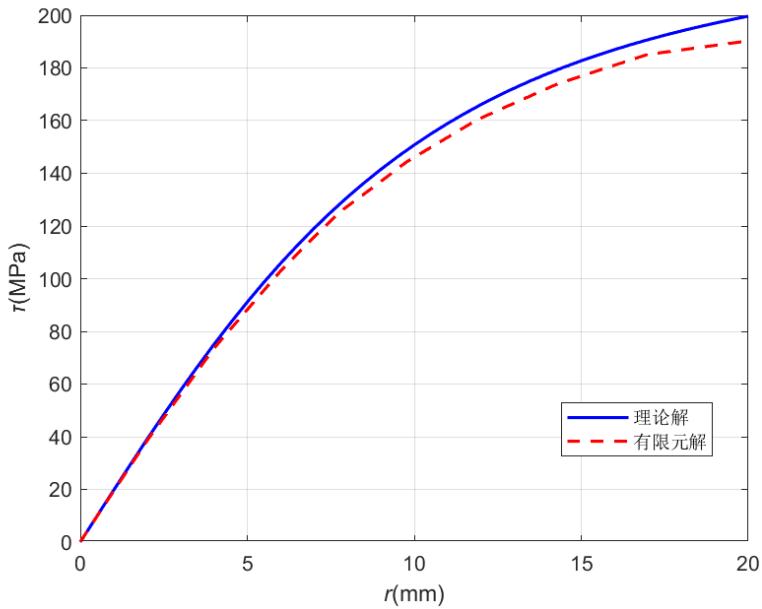


图 14 线性硬化材料剪应力理论解与有限元解对比

同时，对比理想弹塑性材料和线性硬化材料下圆杆截面正应力和剪应力分布，如图 15、图 16 所示，从中可以看到，采用理想弹塑性模型的圆杆截面正应力和剪应力相对采用弹性硬化模型时较小，可能是因为理想弹塑性模型假

定当材料应力达到屈服强度之后不再增加，而线性硬化模型中等效应力会随着塑性应变增加而增加。

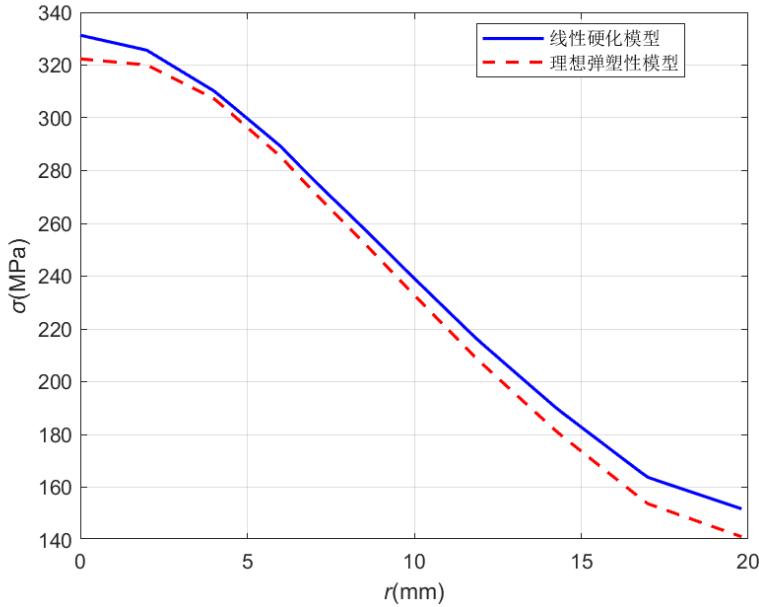


图 15 理想弹塑性模型与线性硬化模型正应力有限元解对比

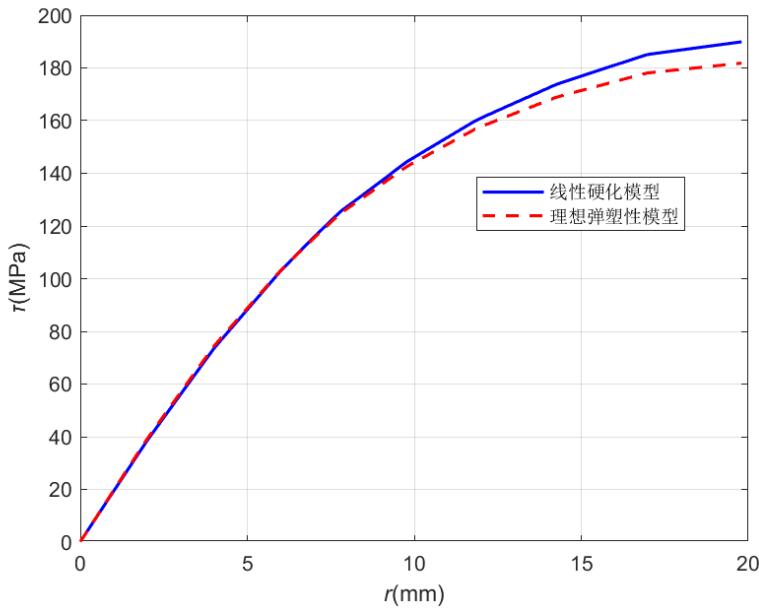


图 16 理想弹塑性模型与线性硬化模型剪应力有限元解对比

7 Drucker-Prager 塑性模型下应力的有限元解

Drucker-Prager 准则是一种双参数准则，在 Mises 准则的基础上，引入了静水应力 I_1 的影响，模型的表达式为

$$f(I_1, J_2) = \sqrt{J_2} + \alpha_s I_1 - q = 0$$

材料基本性质同前述，塑性部分采用 Drucker-Prager 模型（后简称 DP 模型），在 ABAQUS 中，设置剪切准则为“线性”，计算取摩擦角、膨胀角均为 30° ，流应力比为 1.0，设置硬化效应，求解结果如图 17、图 18 所示。

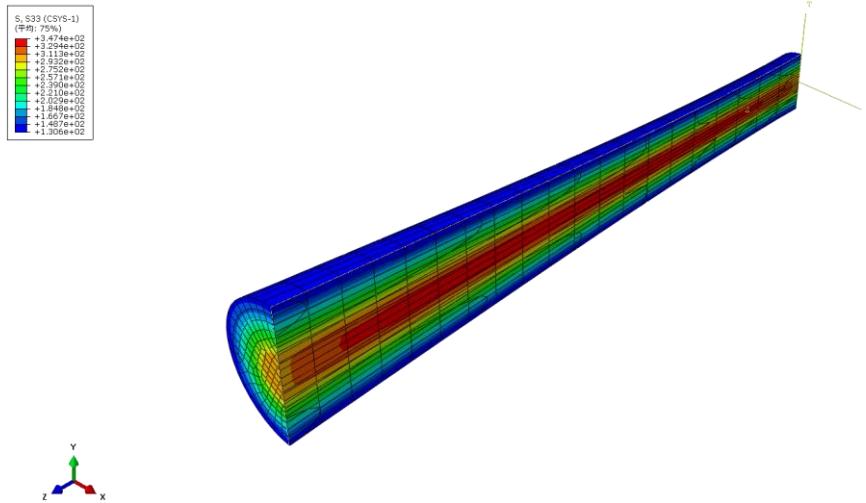


图 17 DP 模型下正应力有限元解

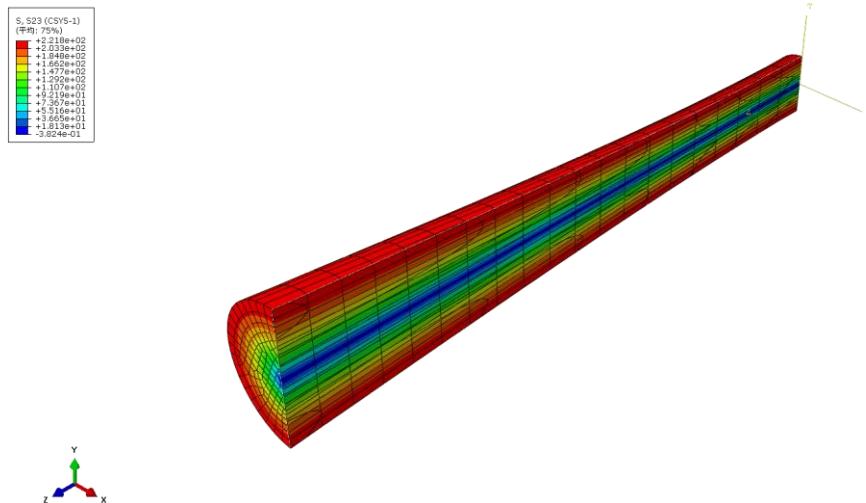


图 18 DP 模型下剪应力有限元解

提取圆杆截面沿径向的正应力和剪应力，并与理想弹塑性模型、线性硬化模型下的结果进行对比，如图 19、图 20 所示。从中可见，DP 模型考虑了静水压力的影响和硬化效应，其所得正应力和剪应力的值均较大。

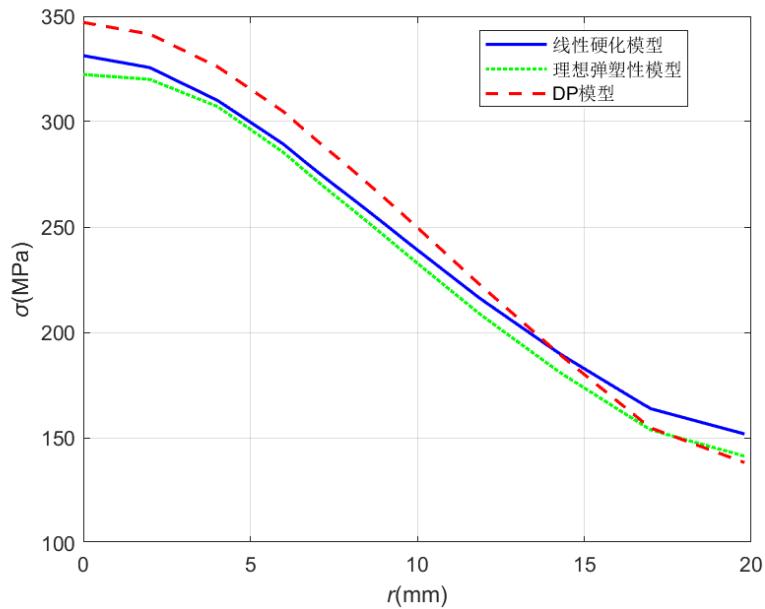


图 19 各种模型下求解得到的圆杆截面正应力

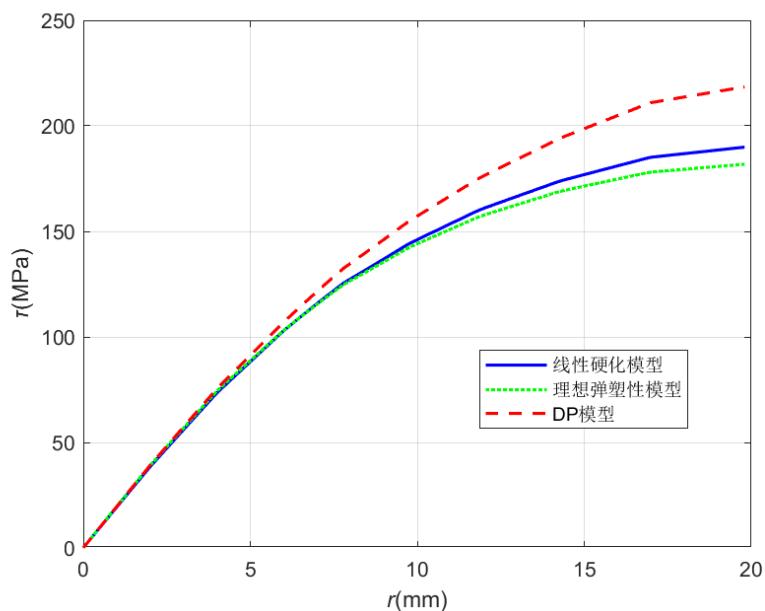


图 20 各种模型下求解得到的圆杆截面剪应力