苗苗困了 SMES PKU 25F LA-A1 Final

1.

(i) 矩阵的特征值和特征向量.

由

$$
\begin{aligned}
|\lambda I-A| &= \begin{vmatrix} \lambda-3 & -2 & 1 \\ 2 & \lambda+2 & -2 \\ -3 & -6 & \lambda+1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \lambda-3 & 0 & 1 \\ 2 & \lambda-2 & -2 \\ -3 & 2(\lambda-2) & \lambda+1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \lambda-3 & 0 & 1 \\ 2 & \lambda-2 & -2 \\ -7 & 0 & \lambda+5 \end{vmatrix} \\
&= (\lambda-2)(\lambda^2+2\lambda-8) = (\lambda-2)(\lambda-2)(\lambda+4)
\end{aligned}
$$

得，矩阵A的特征值为

$$
\lambda_1 = 2, \quad \lambda_2 = 2, \quad \lambda_3 = -4.
$$

分别求解线性方程组$(A-\lambda_i I)x=0$，可求得原矩阵的特征向量.记方程组$Px=0$的解集为$\mathrm{Nul}\ P$，则

$$
\begin{aligned}
\mathrm{Nul}\ (A-2I) &= \mathrm{Nul}\ \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ -2 & -4 & 2 \\ 3 & 6 & -3 \end{pmatrix} = \left\langle \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\rangle, \\
\mathrm{Nul}\ (A+4I) &= \mathrm{Nul}\ \begin{pmatrix} 7 & 2 & -1 \\ -2 & 2 & 2 \\ 3 & 6 & 3 \end{pmatrix} = \mathrm{Nul}\ \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 3 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 3 \end{pmatrix} \right\rangle.
\end{aligned}
$$

(ii) 矩阵是否可对角化

将三个向量写入矩阵

$$
T = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & 3 \end{pmatrix},
$$

则因为

$$
|T| = 2\begin{vmatrix} 0 & -2 \\ 1 & 3 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & -4 \\ 1 & 3 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & -3 \\ 1 & 3 \end{vmatrix} \neq 0,
$$

故前面三个特征向量确实线性无关，因此A可对角化，且T为所求可逆矩阵，此时

$$
T^{-1}AT = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & -4 \end{pmatrix}.
$$

2.

(i) 将方程记作$Ax=0$，其中$A=\begin{pmatrix}1 & 0 & -1 & -1\\ 0 & 1 & 0 & -1\end{pmatrix}$，则$A$的解空间的基为$\{(1,0,1,0)^{\mathrm{T}},(1,1,0,1)^{\mathrm{T}}\}=\{s_1,s_2\}$.对这组基标准正交化，可得$A$的解空间的标准正交基:

$$\begin{aligned}
q_1 &= \frac{s_1}{|s_1|} = \frac{1}{\sqrt{2}}(1,0,1,0)^{\mathrm{T}},\\
s_2' &= s_2 - \frac{(q_1,s_2)}{(q_1,q_1)}q_1 = (1,1,0,1)^{\mathrm{T}} - \frac{1}{2}(1,0,1,0)^{\mathrm{T}} = \frac{1}{2}(1,2,-1,2)^{\mathrm{T}},\\
q_2 &= \frac{s_2'}{|s_2'|} = \frac{1}{\sqrt{10}}(1,2,-1,2)^{\mathrm{T}}.
\end{aligned}$$

(ii) 由于线性方程组的解空间与列向量构成的线性空间正交，故列空间正任意一个向量都与解空间每个向量正交.由于A的两行线性无关，它们构成A的列空间的一组基，因此所求向量可由它们线性组合而得:

$$a=(x,y,-x,-x-y)^{\mathrm{T}},\qquad x,y\in\mathbb{R}.$$

3.

本题考查正交投影的定义.最开始的做法是写出W和$W^{\perp}$的标准正交基，虽然也算对了，但显然麻烦得多.最好的做法是先考虑正交投影的定义.

先求W的标准正交基:

$$W=\langle q_1,q_2\rangle=\left\langle\frac{1}{\sqrt{2}}(1,0,1,0)^{\mathrm{T}},\frac{1}{\sqrt{22}}(1,4,-1,2)^{\mathrm{T}}\right\rangle.$$

(i) 由题意有

$$A\alpha=\frac{(q_1,\alpha)}{(q_1,q_1)}q_1+\frac{(q_2,\alpha)}{(q_2,q_2)}q_2.$$

对α取单位矩阵的各列e^i，则A的第i列为

$$A^i=\frac{(q_1,e^i)}{(q_1,q_1)}q_1+\frac{(q_2,e^i)}{(q_2,q_2)}q_2,$$

故

$$A=\begin{pmatrix}q_1 & q_2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}q_1^{\mathrm{T}}\\ q_2^{\mathrm{T}}\end{pmatrix}I=q_1q_1^{\mathrm{T}}+q_2q_2^{\mathrm{T}}=\frac{1}{11}\begin{pmatrix}6 & 2 & 5 & 1\\ 2 & 8 & -2 & 4\\ 5 & -2 & 6 & -1\\ 1 & 4 & -1 & 2\end{pmatrix}.$$

另外的推理过程：在$\mathbb{R}^4$空间上一定找得到q_3和q_4，使得$\{q_i\}_{i=1}^4$为标准正交基，设Q的各列为q_i，则有$AQ = Q\,\mathrm{diag}\{1,1,0,0\}$.考虑到$Q$是正交矩阵，我们完成了对$A$的正交对角化，它的谱分解形式就是$A = q_1 q_1^{\mathrm{T}} + q_2 q_2^{\mathrm{T}}$.

(ii) 由正交分解定理（请确认大家使用的课本），对任意向量β，都可以唯一地分解为W和$W^{\perp}$中的向量$A\beta \in W$和$(\beta - A\beta) \in W^{\perp}$.考虑到$\beta \to B\beta$定义了一个线性变换，故该矩阵对$\beta$的作用应为

$$B\beta = A\beta - (\beta - A\beta) = (2A - I)\beta,$$

由β的任意性，

$$B = 2A - I = \frac{1}{11}\begin{pmatrix} 1 & 4 & 10 & 2 \\ 4 & 5 & -4 & 8 \\ 10 & -4 & 1 & -2 \\ 2 & 8 & -2 & 7 \end{pmatrix}.$$

由定义方式，符合要求的线性变换应该是唯一的，但严谨起见，验证B的正交性.因为$BB^{\mathrm{T}} = (2A - I)^2 = 4A^2 - 4A + I$，而

$$A^2 = \begin{pmatrix} q_1 & q_2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} q_1^{\mathrm{T}} \\ q_2^{\mathrm{T}} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} q_1 & q_2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} q_1^{\mathrm{T}} \\ q_2^{\mathrm{T}} \end{pmatrix} = A,$$

故$BB^{\mathrm{T}} = I$，B一定是正交的.

4.

(i) 计算奇异值

A的奇异值是矩阵

$$A^{\mathrm{T}}A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 5 & 2 \\ 0 & 2 & 1 \end{pmatrix} = \Lambda$$

的三个特征值中，前两大特征值的正平方根.又因为

$$|\lambda I - \Lambda| = \begin{vmatrix} \lambda - 1 & -1 & 0 \\ -1 & \lambda - 5 & -2 \\ 0 & -2 & \lambda - 1 \end{vmatrix} = (\lambda - 1)\begin{vmatrix} \lambda - 5 & -2 \\ -2 & \lambda - 1 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} -1 & -2 \\ 0 & \lambda - 1 \end{vmatrix} = \lambda(\lambda - 1)($$

故Λ的特征值为

$$\lambda_1 = 6, \quad \lambda_2 = 1, \quad \lambda_3 = 0.$$

故A的奇异值为

$$\sigma_1=\sqrt{6},\quad \sigma_2=1.$$

(ii) 求正交矩阵

先对$A^{\mathrm{T}}A$对角化，即求正交矩阵V，使得

$$A^{\mathrm{T}}AV=V\begin{pmatrix}6 & & \\ & 1 & \\ & & 0\end{pmatrix}.$$

因为

$$\mathrm{Nul}\ \left(A^{\mathrm{T}}A-6I\right)=\mathrm{Nul}\ \begin{pmatrix}-5 & 1 & 0\\ 1 & -1 & 2\\ 0 & 2 & -5\end{pmatrix}=\left\langle\begin{pmatrix}1\\5\\2\end{pmatrix}\right\rangle,$$
$$\mathrm{Nul}\ (A^{\mathrm{T}}A-I)=\mathrm{Nul}\ \begin{pmatrix}0 & 1 & 0\\ 1 & 4 & 2\\ 0 & 2 & 0\end{pmatrix}=\left\langle\begin{pmatrix}2\\0\\-1\end{pmatrix}\right\rangle,$$
$$\mathrm{Nul}\ (A^{\mathrm{T}}A)=\left\langle\begin{pmatrix}1\\-1\\2\end{pmatrix}\right\rangle,$$

故V可取

$$V=\begin{pmatrix}\frac{1}{\sqrt{30}} & \frac{2}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{6}}\\ \frac{5}{\sqrt{30}} & 0 & -\frac{1}{\sqrt{6}}\\ \frac{2}{\sqrt{30}} & -\frac{1}{\sqrt{5}} & \frac{2}{\sqrt{6}}\end{pmatrix}.$$

根据奇异值分解的计算过程，只需要再计算AV，并对所得结果归一化，即得到所求的正交矩阵.因为

$$AV=\begin{pmatrix}\frac{6}{\sqrt{50}} & \frac{2}{\sqrt{5}} & 0\\ \frac{12}{\sqrt{30}} & -\frac{1}{\sqrt{5}} & 0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\frac{1}{\sqrt{5}} & \frac{2}{\sqrt{5}}\\ \frac{2}{\sqrt{5}} & -\frac{1}{\sqrt{5}}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\sqrt{6} & & \\ & 1 & 0\end{pmatrix},$$

所以取

$$Q=V,P=\begin{pmatrix}\frac{1}{\sqrt{5}} & \frac{2}{\sqrt{5}}\\ \frac{2}{\sqrt{5}} & -\frac{1}{\sqrt{5}}\end{pmatrix}$$

即可.

5.

据说是数值方法的结论，我不太了解.但是化简$f(x)$用到了经典的行列式降阶技巧，可能还是要掌握一下的.

(i)对于对称矩阵A，存在正交矩阵P，使得$PAP^{\mathrm{T}}=\operatorname{diag}\{\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_n\}=D$，这里$D$是可逆的.

对于$f(x)$，有下面关系成立

$$\begin{aligned}f(x)=\begin{vmatrix}A & x\\ x^{\mathrm{T}} & a|x|^2\end{vmatrix}&=\begin{vmatrix}P & 0\\ 0 & 1\end{vmatrix}\begin{vmatrix}A & x\\ x^{\mathrm{T}} & a|x|^2\end{vmatrix}\begin{vmatrix}P^{\mathrm{T}} & 0\\ 0 & 1\end{vmatrix}\\ &=\begin{vmatrix}D & Px\\ (Px)^{\mathrm{T}} & a|x|^2\end{vmatrix}\\ &=\begin{vmatrix}I & 0\\ -(Px)^{\mathrm{T}}D^{-1} & 1\end{vmatrix}\begin{vmatrix}D & Px\\ (Px)^{\mathrm{T}} & a|x|^2\end{vmatrix}\\ &=\begin{vmatrix}D & Px\\ 0 & a|x|^2-(Px)^{\mathrm{T}}D^{-1}(Px)\end{vmatrix},\end{aligned}$$

令$Px=y$，则$y^{\mathrm{T}}y=1\Leftrightarrow |x|^2=|y|^2$,

$$f(x)=\prod_{i=1}^{n}\lambda_i\sum_{i=1}^{n}\left[\left(a-\frac{1}{\lambda_i}\right)y_i^2\right].$$

据此给出$f(x)$的一个标准型.

(ii)$\max_{|x|=1}f(x)$和$\min_{|x|=1}f(x)$分别为二次型$f(x)$的最大和最小特征值.由于$\lambda_1\leqslant\lambda_2\leqslant\cdots\leqslant\lambda_n$，故$a-\frac{1}{\lambda_n}\leqslant a-\frac{1}{\lambda_{n-1}}\leqslant\cdots\leqslant a-\frac{1}{\lambda_1}$，故

$$\max_{|x|=1}f(x)=\prod_{i=1}^{n}\lambda_i\sum_{i=1}^{n}\left(a-\frac{1}{\lambda_1}\right),\min_{|x|=1}f(x)=\prod_{i=1}^{n}\lambda_i\sum_{i=1}^{n}\left(a-\frac{1}{\lambda_n}\right).$$

(iii)若二次型的最小值为正，则二次型正定，这等价于$a>\frac{1}{\lambda_n}$；
若二次型的最大值为负，则二次型负定，这等价于$a<\frac{1}{\lambda_1}$；
其余情况下二次型不定，这等价于$\frac{1}{\lambda_1}\leqslant a\leqslant\frac{1}{\lambda_n}$.

6.

这个其实是极分解的弱化结论，它的直接意义是任何一个连续体的变形行为，都可以分解为一个轴向拉伸和旋转（有时包括镜像）对连续体的先后作用.这里直接引用奇异值分解的结论证明之.

任意方阵A都存在奇异值分解$A=U\Sigma V^{\mathrm{T}}$，其中U,V为正交矩阵，Σ为对角矩阵,因此A可以分解为

$$A=U\Sigma V^{T}=U\Sigma U^{\mathrm{T}}UV^{\mathrm{T}}.$$

令

$$U\Sigma U^{\mathrm{T}}=S,UV^{\mathrm{T}}=Q,$$

则容易验证S是对称矩阵，Q是正交矩阵，因而可逆.于是原题得证.

7.

由于A是正定矩阵，故存在正交矩阵P和对角矩阵D使得$A=P^{\mathrm{T}}DP$.定义D的平方根R为D的各个元素改写为其正平方根，则D和R都是对角矩阵且$R^2=D$.于是，因为相等，或者在左乘某个矩阵的同时右乘它的逆，下面矩阵相似：

$$AB=P^{\mathrm{T}}DPB\sim DPBP^{\mathrm{T}}=RRPBP^{\mathrm{T}}\sim RPBP^{\mathrm{T}}R=RPBP^{\mathrm{T}}R^{\mathrm{T}}=RPB(RP)^{\mathrm{T}}.$$

注意到：

1. 正定矩阵B和$RPB(RP)^{\mathrm{T}}$合同，因而B和$RPB(RP)^{\mathrm{T}}$具有相同的正惯性指数，$RPB(RP)^{\mathrm{T}}$的特征值都是正实数;
2. AB和$RPB(RP)^{\mathrm{T}}$相似，因而AB和$RPB(RP)^{\mathrm{T}}$的特征值相同，二者的特征值也都是正实数.

于是原题得证.

8.

设$A^{\mathrm{T}}A=B^{\mathrm{T}}B=S$，则存在正交矩阵$P$和对角矩阵$D=\operatorname{diag}\{d_1,\cdots,d_r,0\cdots,0\}$（其中$r$为$S$的秩；由于$S$正定，$d_i>0$，据此可定义$D$的平方根$R$）使得$S=PDP^{\mathrm{T}}$，于是$(AP)^{\mathrm{T}}(AP)=(BP)^{\mathrm{T}}(BP)=D$.考虑$BP$的第$i$列$b_i'$，则有：

1. $|b_i'|=\begin{cases}\sqrt{d_i},i\leqslant r,\\0,i>r,\end{cases}$ 进而有$b_i'=0(i>r)$.
2. $\left\{\frac{b_i'}{|b_i'|}\right\}_{i=1}^{r}$构成$\mathbb{R}^n$中某个子空间的一组标准正交基，且可扩充为$\mathbb{R}^n$的一组标准正交基.据此定义正交矩阵$Q=\begin{pmatrix}Q_r & Q_{n-r}\end{pmatrix}$，其前$r$列为$\frac{b_i'}{|b_i'|}(i=1,\cdots,r)$，后$(n-r)$列只需要和前$r$列正交.

故

$$BP=\begin{pmatrix}b_1' & \cdots & b_r' & 0 & \cdots & 0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}Q_r & Q_{n-r}\end{pmatrix}R\Leftrightarrow B=QRP^{\mathrm{T}}.$$

于是我们为B找到了奇异值分解.由前面的构造过程可知，A的构造过程是类似的，其中：

1. 因为D的对角化过程提供了P，我们仍然考虑AP的各列，因此在A的奇异值分解$A=U\Sigma V^{\mathrm{T}}$中，取$V=P,\Sigma=R$没有问题;
2. 因为对B作奇异值分解的过程中构造的Q依赖于B的形式，因此A中根据AP定义的正交矩阵应与B的不同.

因此，存在可能异于Q的正交矩阵S，使得$A=SRP^{\mathrm{T}}$.

因此,

$$A = SRP^{\mathrm{T}} = A = SQ^{\mathrm{T}}QRP^{\mathrm{T}} = (SQ^{\mathrm{T}})B,$$

其中SQ^{T}是正交矩阵.