

Discrete Computational Structures – directed graph

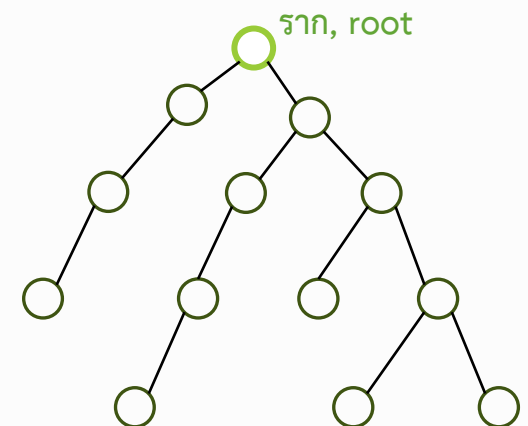
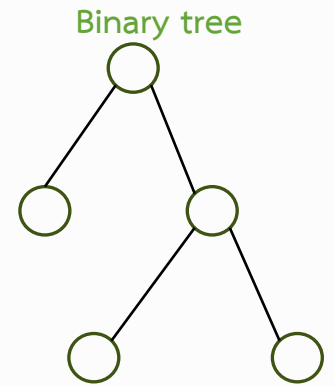
อ. ภูริวัจน์ วรวิชัยพัฒน์

อ้างอิงจากหนังสือ: Discrete Computational Structure, คทา ประดิษฐ์วงศ์

ทบทวน (Recap) คาบที่แล้ว

ต้นไม้, Tree

- เป็นการเก็บข้อมูลที่ไม่เป็นเส้นตรง, Non-linear structure, ใช้ในการเก็บข้อมูล, แสดงผล, หรือเรียบเรียงแนวคิด
- เส้นเชื่อมเดียวต่อ 2 จุดยอด, เส้นเชื่อม = สะพาน, จำนวนเส้นเชื่อม = จำนวนจุดยอด-1
- ต้นไม้ราก rooted tree, มีจุดยอด 1 จุดเป็นราก นิยมเขียนรากอยู่ด้านบน
- คำศัพท์: ปม (node), ลูก, พ่อแม่, พี่น้อง, ราก, ใบ, ปมภายใน, ระดับ, และ ความสูง
- ต้นไม้ทวิภาค: node จะมีลูกมากที่สุดได้แค่ 2 nodes เท่านั้นเรียก ลูกปมซ้าย และ ลูกปมขวา
- ท้องต้นไม้ทวิภาค: ก่อนลำดับ, ตามลำดับ, และ หลังลำดับ
- Search: Breath-First Search (BFS) และ Depth-First-Search (DFS)



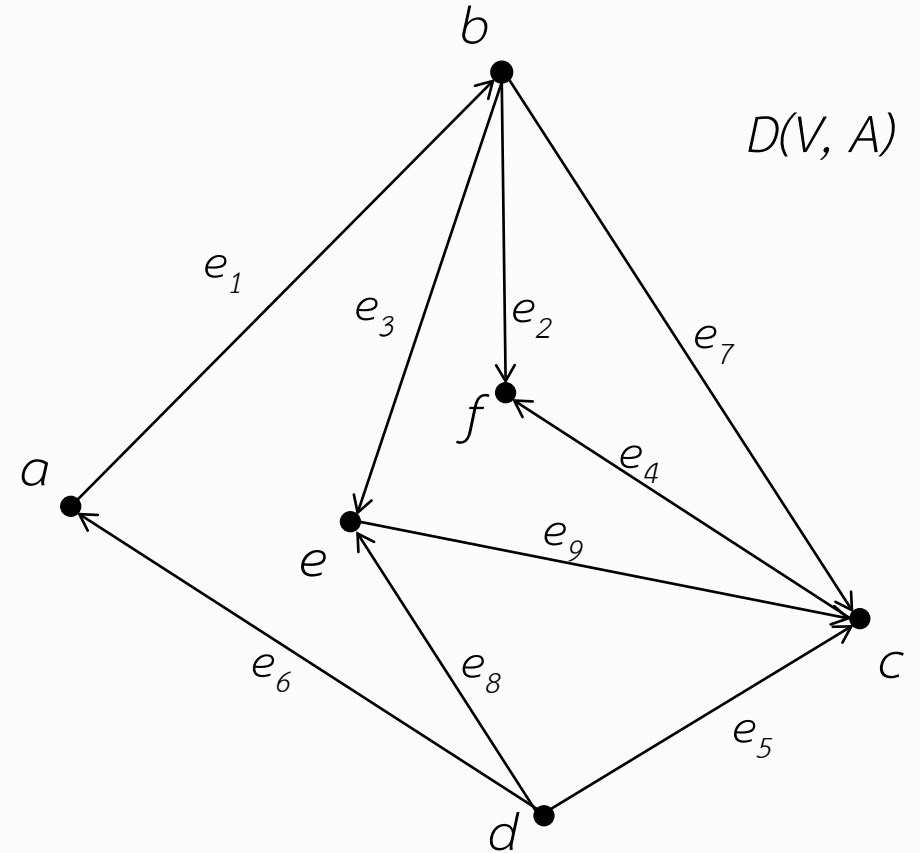
เนื้อหาปลายภาค - Overview

- ต้นไม้, Tree
- กราฟทิศทาง, Directed graph **TODAY**
- ข่ายงาน และการประยุกต์ใช้ข่ายงาน, Network
- การหาเส้นทางที่สั้นที่สุด Shortest path, Dijkstra's algorithm
- การหาต้นไม้ทอดข้ามที่น้อยที่สุด Kruskal's algorithm & Prim's algorithm

กราฟทิศทาง หรือ Directed graph

นิยาม $D(V, A)$ เป็นกราฟทิศทางก็ต่อเมื่อ

- ประกอบด้วยเซตของจุดยอดที่เรียกว่า V ซึ่งต้องไม่เป็นเซตว่าง
- กำหนดให้เซตของเส้นเชื่อมทิศทาง (arc) ใช้สัญลักษณ์ว่า A
- A ประกอบด้วยคู่อันดับของจุดยอดสองจุด u และ v เขียนแทนด้วย (u, v) ซึ่งมีลักษณะเป็นคู่อันดับ โดยที่เส้นเชื่อมทิศทาง จะเริ่มต้นที่จุด u ซึ่งเรียกว่าจุดเริ่มต้น (initial vertex) หรือ หางลูกศร (tail) เดินทางไปยังจุดยอด v ที่เป็นจุดปลายอีกชุด สามารถเรียกได้ว่าเป็นจุดสิ้นสุด (terminal vertex) หรือ หัวลูกศร (head)



เส้นเชื่อมทิศทาง – arc

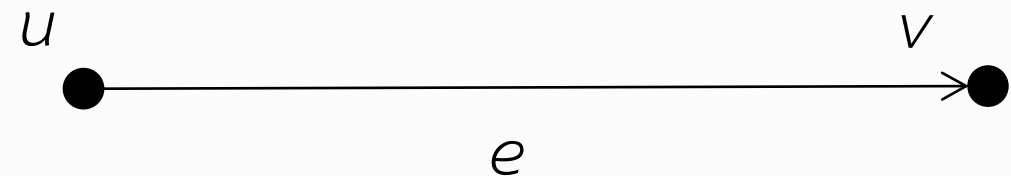
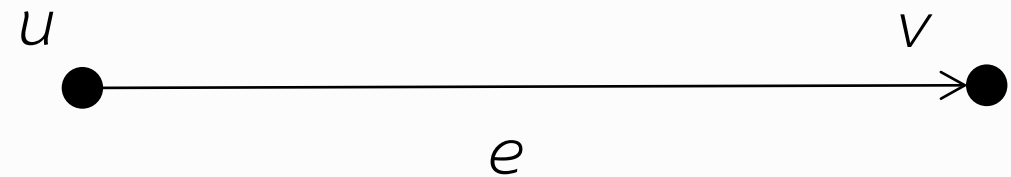
เส้นเชื่อมทิศทาง $e = (u, v)$ ในที่นี้ใช้ตัวแปร e ย่อมาจาก edge สามารถกล่าวได้ว่า

การประชิด:

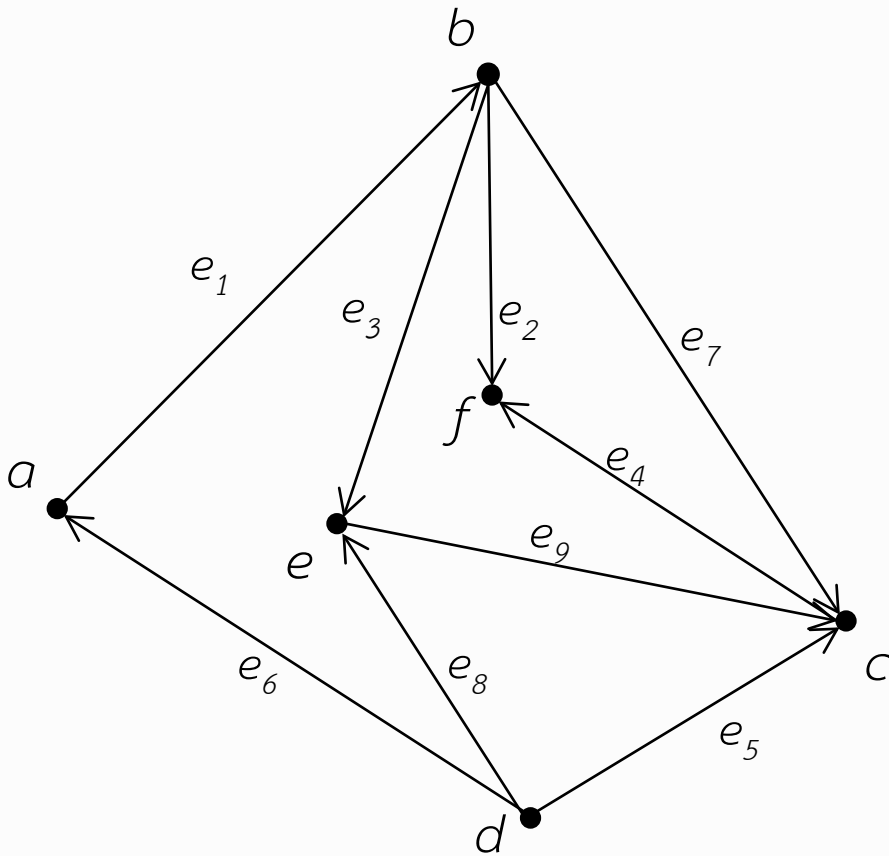
1. จุดยอด u ประชิดไป v
2. จุดยอด v ประชิดจาก u

การตกกระทบ:

1. เส้นเชื่อมทิศทาง e ตกกระทบไปจุดยอด v
2. เส้นเชื่อมทิศทาง e ตกกระทบจากจุดยอด u



เส้นเชื่อมทิศทาง – arc



เส้นเชื่อมทิศทาง e_1 ตกกระทบบกับจุดยอด a และ b เขียนแทนด้วยคู่อันดับ (a, b)

เส้นเชื่อมทิศทาง e_2 ตกกระทบบกับจุดยอด b และ f เขียนแทนด้วยคู่อันดับ (b, f)

เส้นเชื่อมทิศทาง e_3 ตกกระทบบกับจุดยอด b และ e เขียนแทนด้วยคู่อันดับ (b, e)

เส้นเชื่อมทิศทาง e_4 ตกกระทบบกับจุดยอด c และ f เขียนแทนด้วยคู่อันดับ (c, f)

เส้นเชื่อมทิศทาง e_5 ตกกระทบบกับจุดยอด d และ c เขียนแทนด้วยคู่อันดับ (d, c)

...

...

เส้นเชื่อมทิศทาง e_9 ตกกระทบบกับจุดยอด e และ c เขียนแทนด้วยคู่อันดับ (e, c)

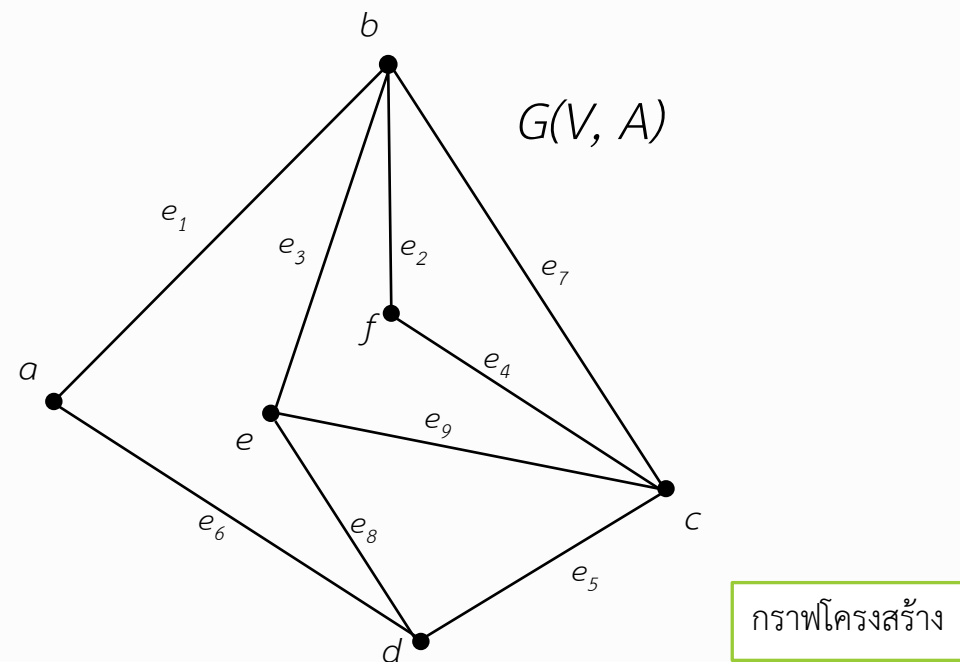
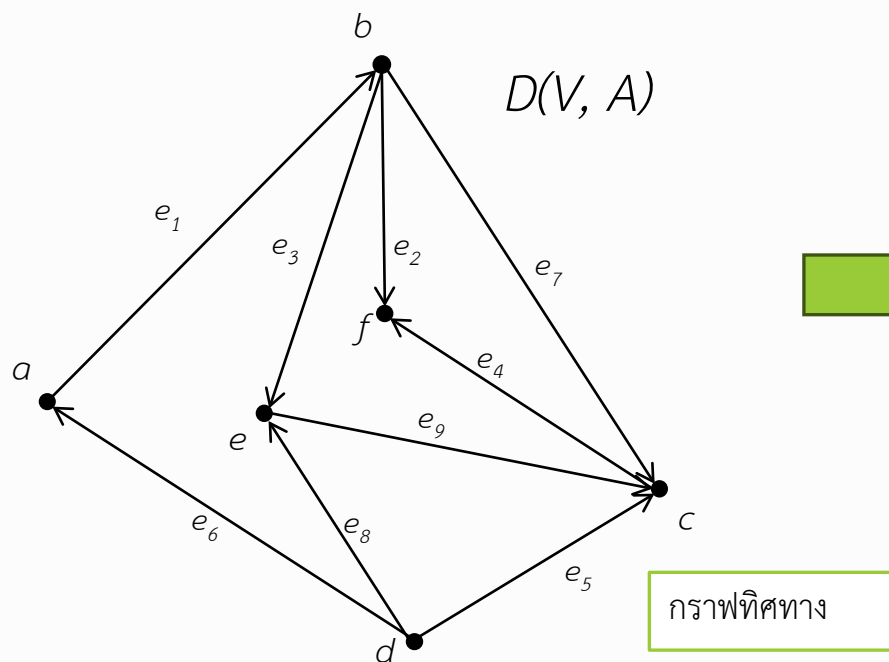
ทั้งนี้ทั้งนั้น ถ้าเรามองในจากมุมมองของจุดยอด

จากเส้นเชื่อมทิศทาง e_1 จะพบว่า จุดยอด a นั้นประชิดจุดยอด b ในทำนองเดียวกัน จุดยอด b นั้นประชิดจุดยอด a เช่นกัน กล่าวคือ “การประชิดสามารถมองได้สองฝั่งไม่คำนึงทิศทางลูกศร”

* เส้นเชื่อมทิศทางอื่นๆก็สามารถอธิบายได้แบบนี้เช่นกัน

กราฟโครงสร้าง – underlying graph

ให้ $D(V, A)$ เป็นกราฟทิศทางจะเรียกว่ากราฟ $G(V, A)$ ว่าเป็นกราฟโครงสร้าง(underlying graph) ของ $D(V, A)$ ถ้า กราฟ $G(V, A)$ เกิดจากกราฟทิศทาง $D(V, A)$ โดยเส้นเชื่อมทิศทางถูกพิจารณาว่าเป็นเส้นเชื่อม (ไม่คำนึงทิศทาง)

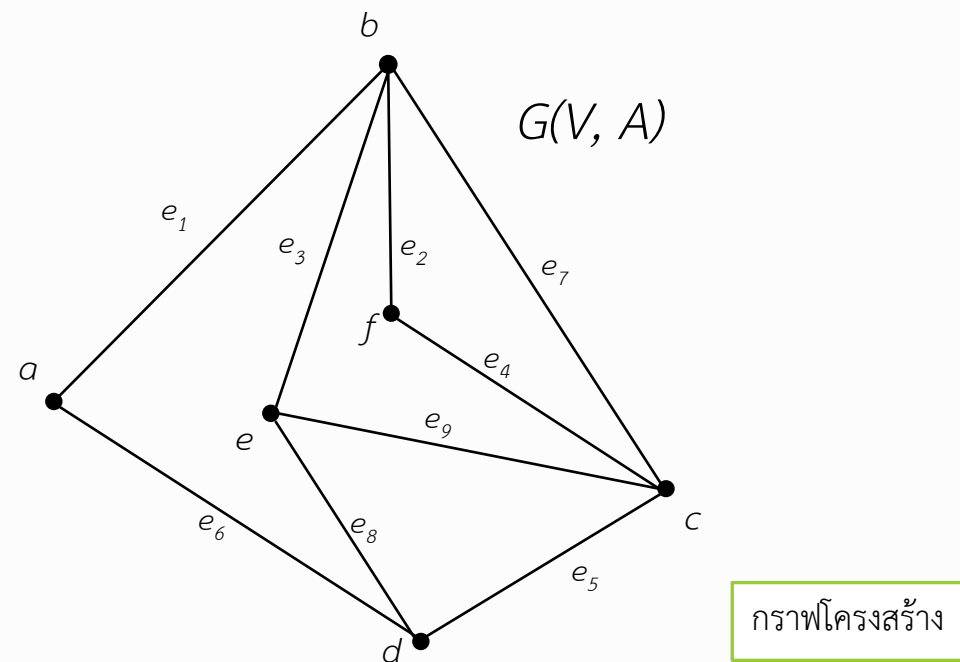
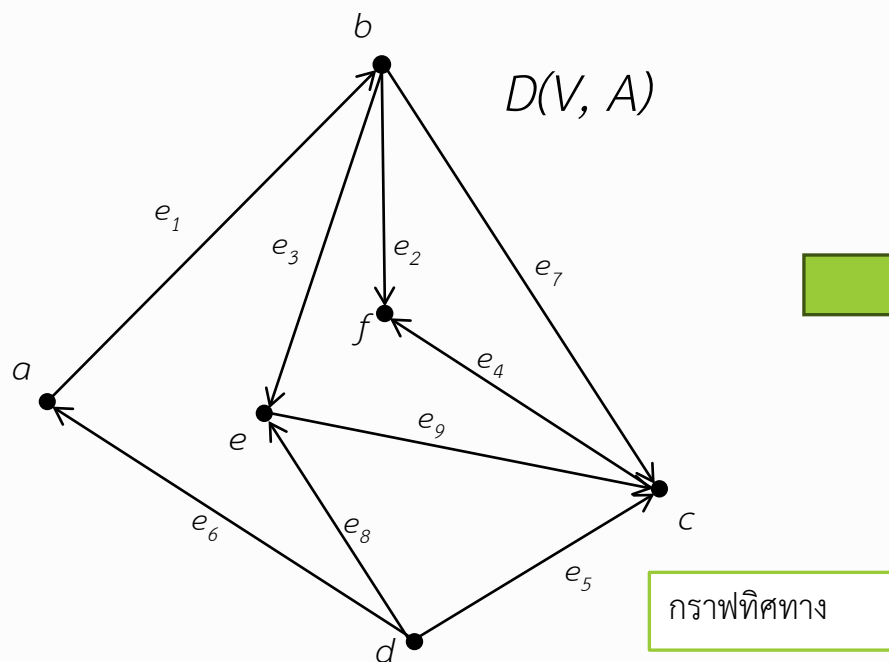


กราฟโครงสร้าง – underlying graph

นิยามแบบไม่เป็นทางการ

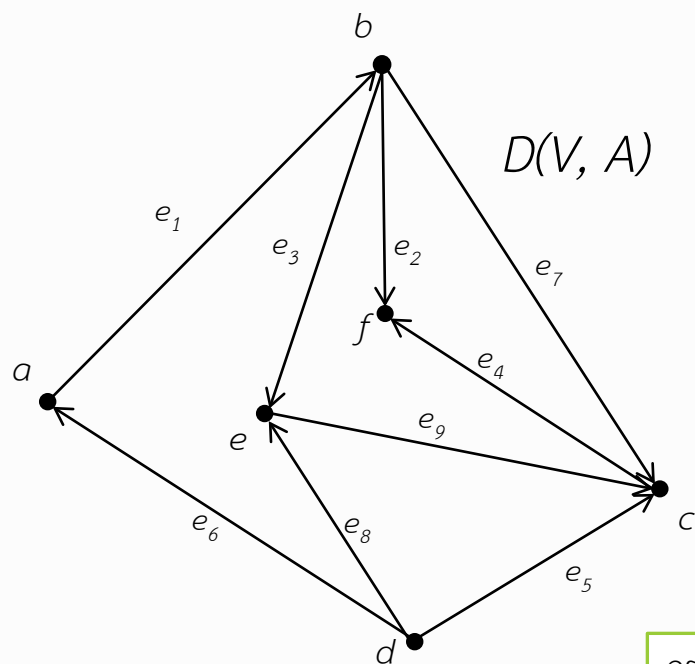
ทุกๆกราฟทิศทาง จะมีกราฟโครงสร้าง(underlying graph) อยู่ภายใต้เสมอ

ถ้ามี $D(V, A)$ เป็นกราฟทิศทาง จงมองทุกๆเส้นเชื่อมทิศทาง เป็น เส้นเชื่อม จะได้กราฟโครงสร้าง $G(V, A)$

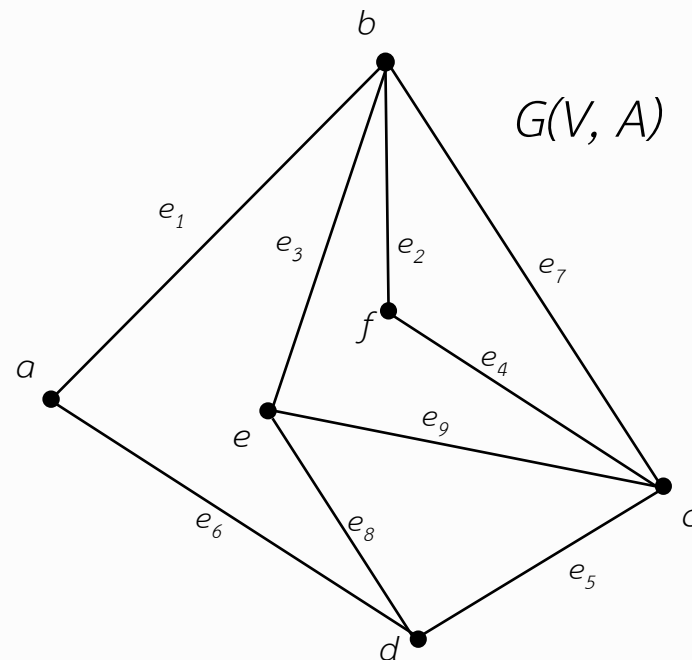
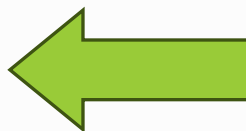


กราฟโครงสร้าง – underlying graph (orientation)

$G(V, A)$ เป็นกราฟ และ $D(V, A)$ เป็นกราฟทิศทางที่เกิดจาก $G(V, E)$ โดยเพิ่มทิศทางให้กับเส้นเชื่อม ซึ่งจะเรียกกระบวนการนี้ว่า การกำหนดทิศทาง (orientation)



กราฟทิศทาง



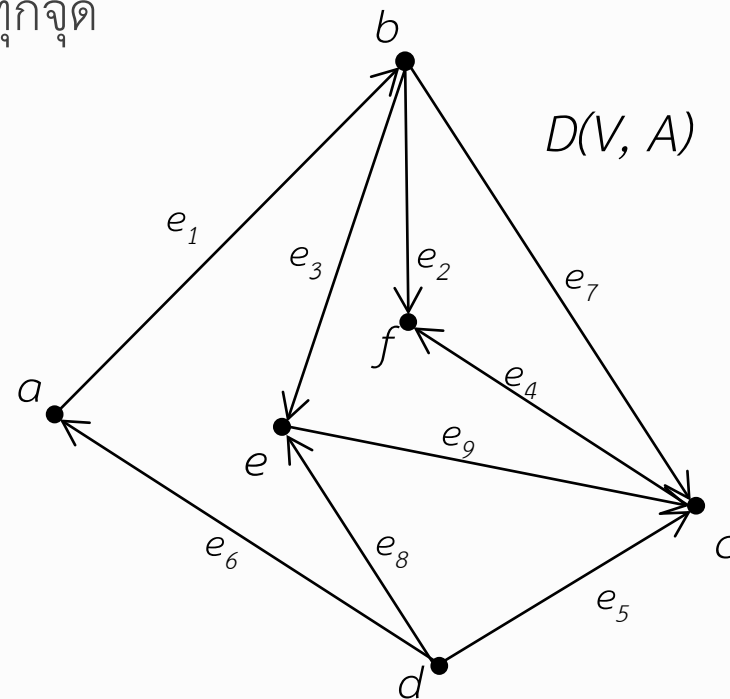
กราฟโครงสร้าง

ดีกรีเข้า และ ดีกรีออก – indegree and outdegree

ดีกรีเข้า (indegree) ของจุด v คือจำนวนเส้นเชื่อมที่มีจุด v เป็นจุดสิ้นสุด ใช้สัญลักษณ์ว่า $\text{indeg}(v)$ และ ดีกรีออก (outdegree) ของจุด v คือจำนวนเส้นเชื่อมที่มีจุด v เป็นจุดเริ่มต้น ใช้สัญลักษณ์ว่า $\text{outdeg}(v)$

ทฤษฎี: ผลบวกของดีกรีเข้าของทุกจุดเท่ากับผลบวกดีกรีออกของทุกจุด และเท่ากับจำนวนของเส้นเชื่อม

$$\sum_{i=0}^n \text{indeg}(v_i) = \sum_{i=0}^n \text{outdeg}(v_i) = k$$



ชนิดของกราฟทิศทาง – digraph types

1. กราฟเชิงเดียวทิศทาง (directed simple graph)

แต่ละคู่ u และ v มีเพียงเส้นเชื่อมแค่เส้นเดียวจาก u ไป v และ ไม่มีเส้นเชื่อมที่เริ่มจากจุดยอด u แล้ววนกลับมาหาตัวเอง
โดยสรุปแล้วคือ **ไม่มี** เส้นเชื่อมทิศทางขนาน และ เส้นเชื่อมทิศทางปวง

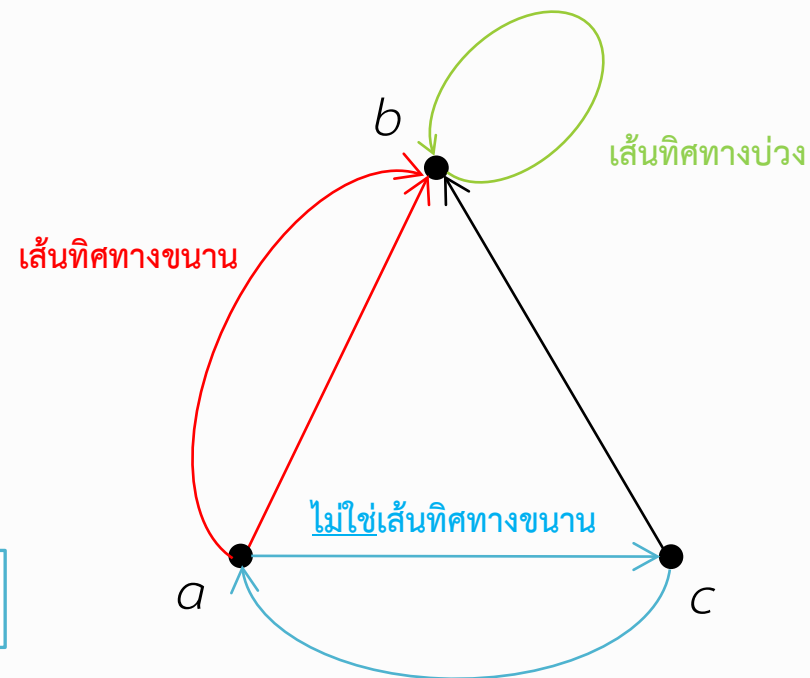
2. กราฟหลายเชิงทิศทาง (directed multigraph)

กราฟทิศทางที่มี เส้นเชื่อมทิศทางขนาน

3. กราฟเทียมทิศทาง (directed pseudograph)

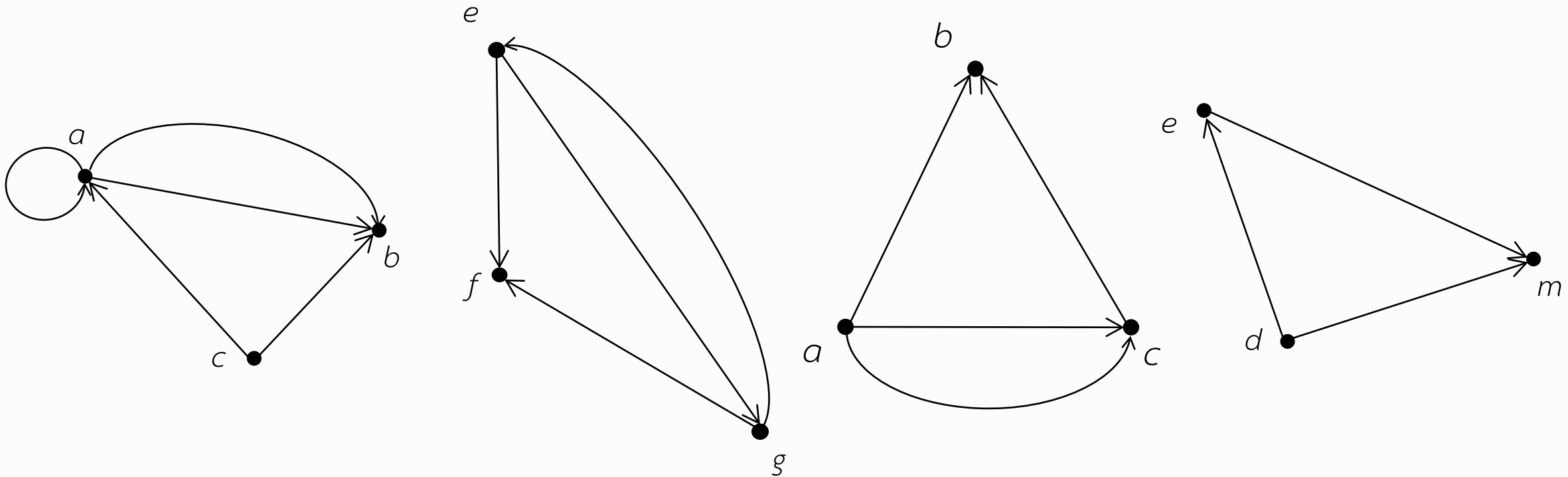
กราฟทิศทางที่มี เส้นเชื่อมทิศทางขนาน และ เส้นเชื่อมทิศทางปวง

*เส้นเชื่อมทิศทางขนาน = คู่เส้นเชื่อมระหว่าง u และ v ที่มีทิศทางเดียวกัน



แบบฝึกหัด - ชนิดของกราฟทิศทาง

จงบอกว่ากราฟด้านล่างเป็นกราฟทิศทางชนิดใด พร้อมคำอธิบายสั้นๆ



ทางเดินทิศทาง – directed walk

ทางเดินทิศทาง (directed walk) ในกราฟทิศทาง $D(V,A)$ คือลำดับ W ดังต่อไปนี้

$$W = v_1 a_1 v_2 a_2 \dots v_n a_n v_{n+1}$$

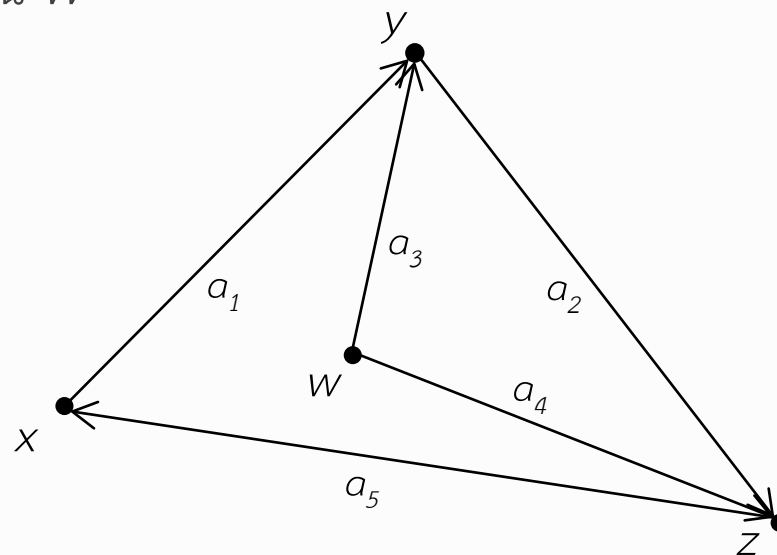
โดยที่ v_1 เป็นจุดเริ่มต้นและ v_{n+1} เป็นจุดยอดปลายทางเมื่อเส้นเชื่อม a_i ที่มีจุดปลายเป็นจุดยอด v_i และ v_{i+1} ส่วนจำนวนเส้นเชื่อม n นั้น จะถูกเรียกว่าความยาวของทางเดิน W

ยกตัวอย่างเช่นจากกราฟด้านขวา ทางเดินจาก x ไป z คือ

$$W_1 = x a_1 y a_2 z \quad (\text{แบบเต็ม})$$

$$W_1 = xyz \quad (\text{แบบย่อ})$$

**แบบย่อจะเขียนได้ก็ต่อเมื่อไม่มีความสับสนเรื่องเส้นเชื่อม



ทางเดินทิศทาง – directed walk

ทางเดินทิศทาง จากจุดยอดหนึ่ง ไป อีกจุดยอดหนึ่ง สามารถมีได้หลายทางเดิน

ยกตัวอย่างเช่น ทางเดินจาก w ไป x คือ

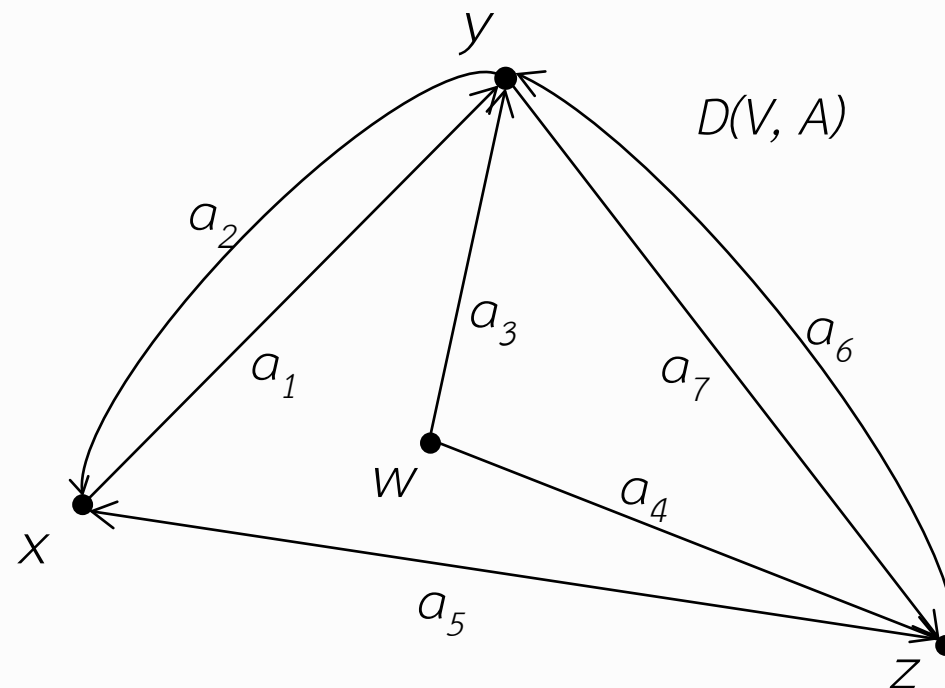
$$W_1 = wa_3ya_7za_6ya_7za_5x$$

$$W_2 = wa_4za_6ya_2x$$

ทางเดินจาก x ไป x คือ

$$W_3 = xa_1ya_7za_5x$$

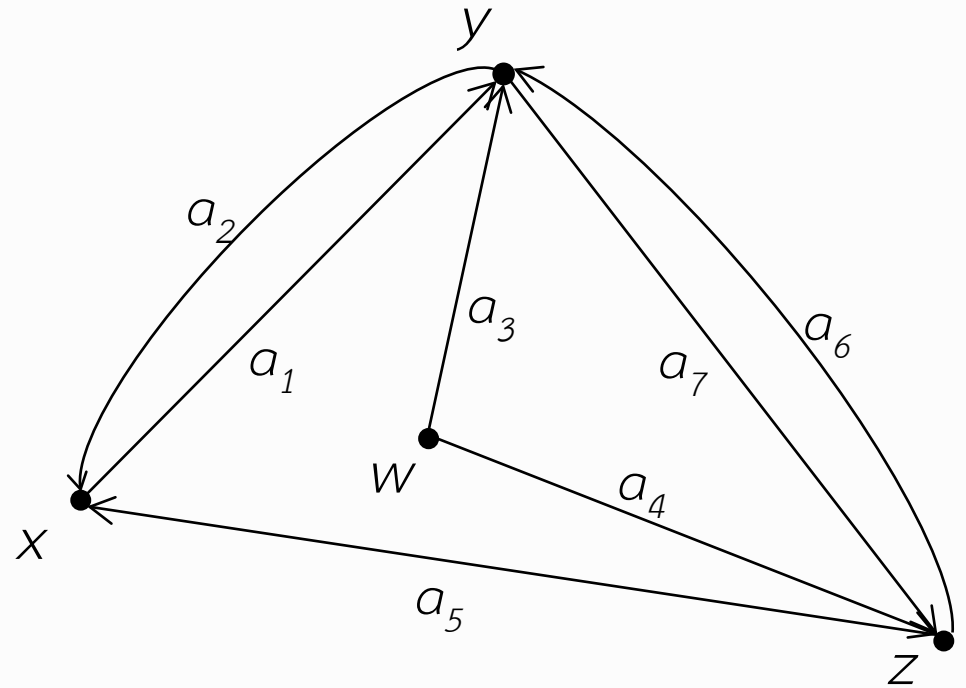
$$W_4 = xa_1ya_7za_6ya_7za_5x$$



แบบฝึกหัด - ทางเดินทิสทาง

จงเขียนทางเดินทิสทางจำนวน 2 ทิสทางถ้าเป็นไปได้ของทางเดินทิสทางต่อไปนี้

1. ทางเดินทิสทาง x ไป z
2. ทางเดินทิสทาง z ไป y
3. ทางเดินทิสทาง y ไป w



การเชื่อมโยงของกราฟทิศทาง

การเชื่อมโยงของกราฟทิศทางจะมีอยู่ 2 ประเภท

1. การเชื่อมโยงแบบอ่อน (weakly connected digraph)

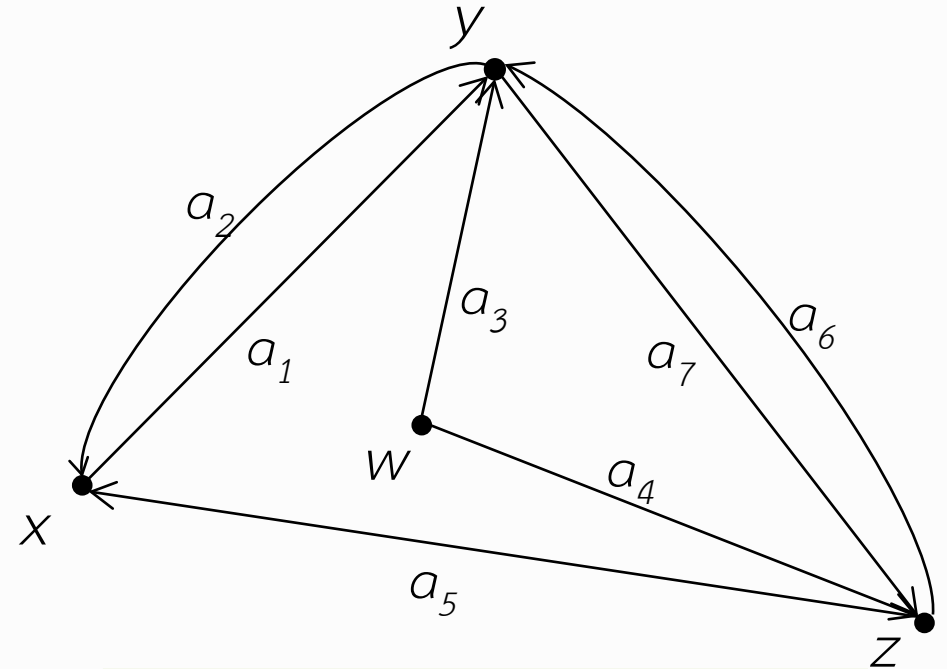
จุดยอดในกราฟทิศทางนั้นมีการเข้าถึงกันอยู่แบบหลวมๆ สามารถเข้าถึงกันได้แต่ไม่แน่มาก

2. การเชื่อมโยงแบบแข็งแรง (strongly connected digraph)

จุดยอดในกราฟทิศทางนั้นมีการเข้าถึงกันอยู่แบบหนาแน่น สามารถจุดยอดหนึ่งเข้าถึงจุดยอดใดก็ได้

การเข้าถึงคืออะไร?

จุดยอด v จะเรียกว่า จุดยอดที่เข้าถึงได้ (reachable vertex) จากจุดยอด u ซึ่งเป็นจุดยอดอีกจุดหนึ่ง ถ้ามีทางเดินทิศจากจุดยอด u ถึง v



ตัวอย่าง:

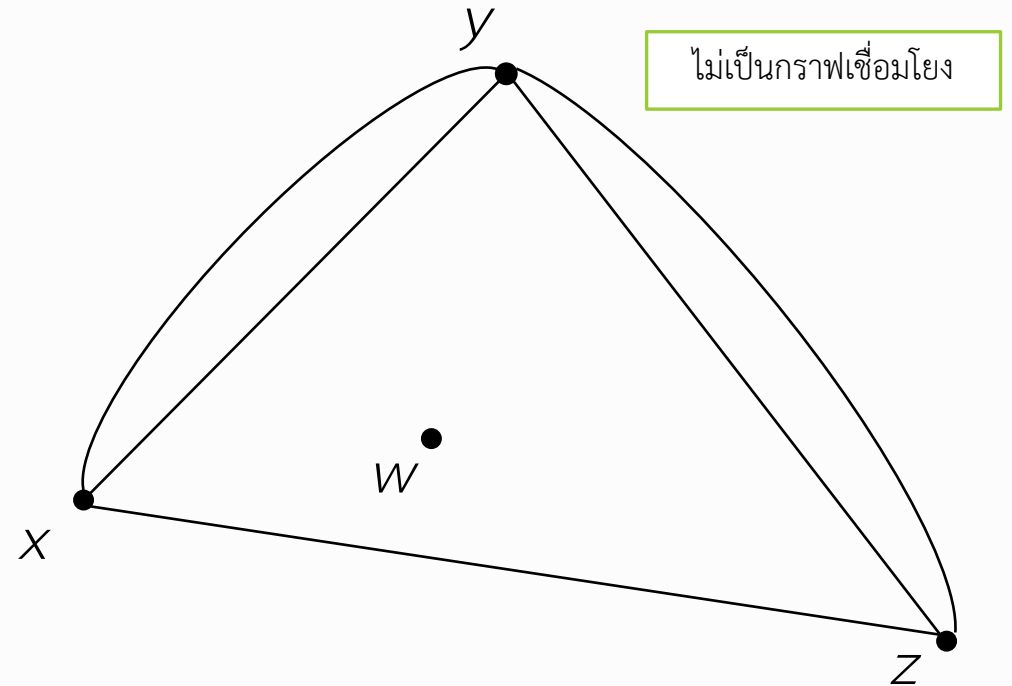
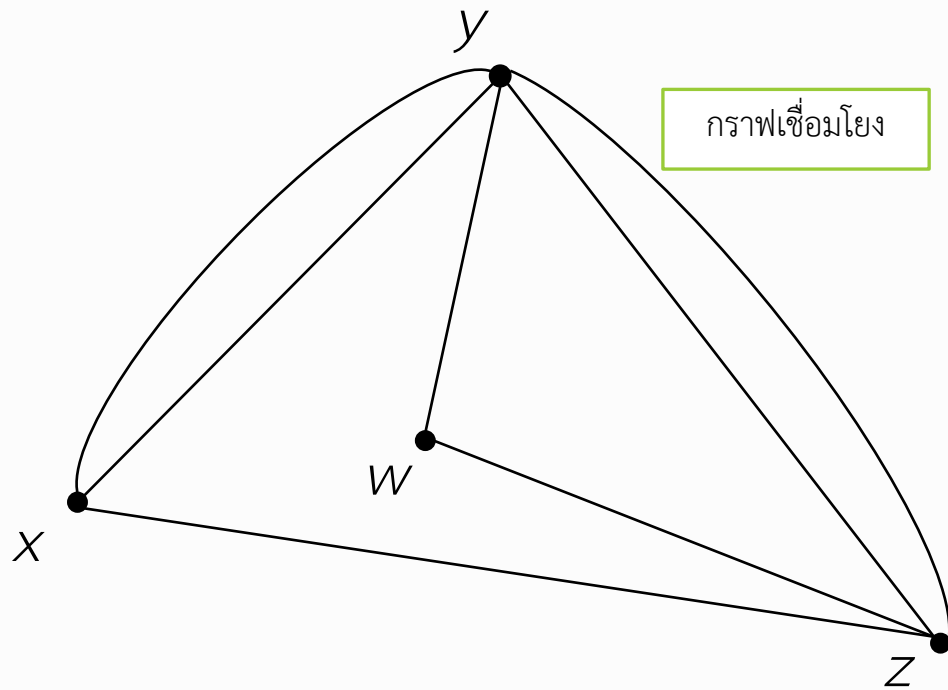
จุดยอด x เข้าถึงได้จาก w, y, z

จุดยอด z เข้าถึงได้จาก x, y, w

การเชื่อมโยงแบบอ่อน – weakly connected digraph

กราฟทิศทาง D จะถูกเรียกว่าการเชื่อมโยงแบบอ่อน (weakly connected digraph) หรือเชื่อมต่อ

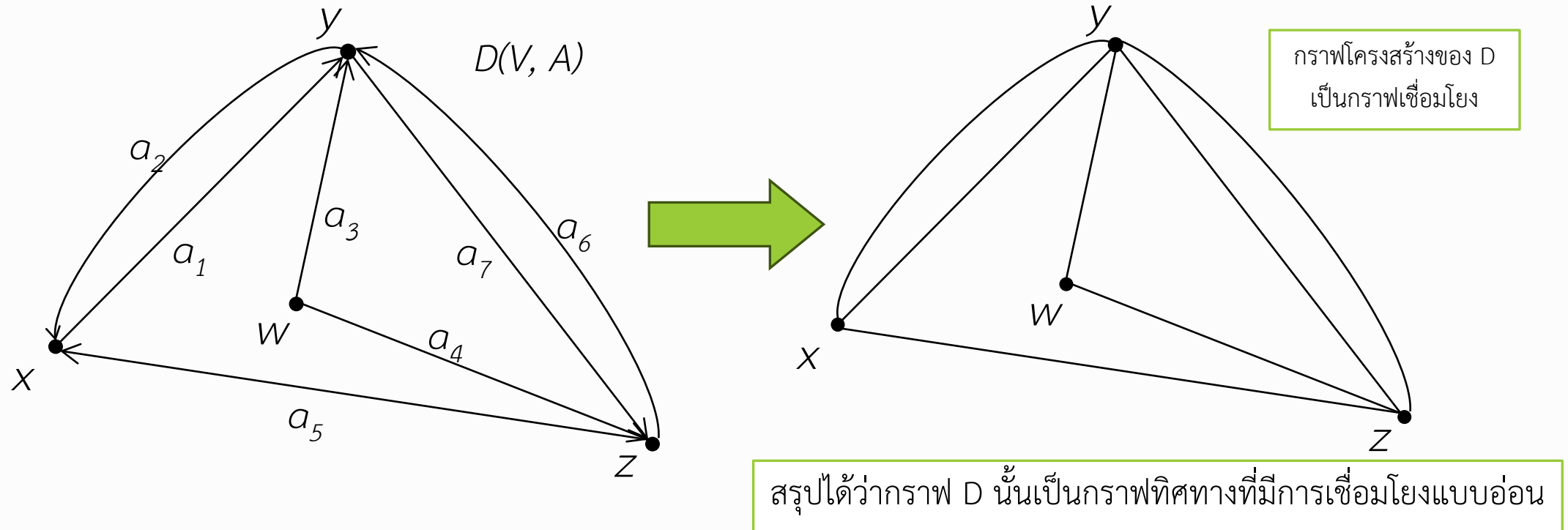
ถ้า กราฟโครงสร้าง (underlying graph) ของ D นั้นเป็นกราฟเชื่อมโยง



การเชื่อมโยงแบบอ่อน – weakly connected digraph

กราฟทิศทาง D จะถูกเรียกว่าการเชื่อมโยงแบบอ่อน (weakly connected digraph) หรือเชื่อมต่อ

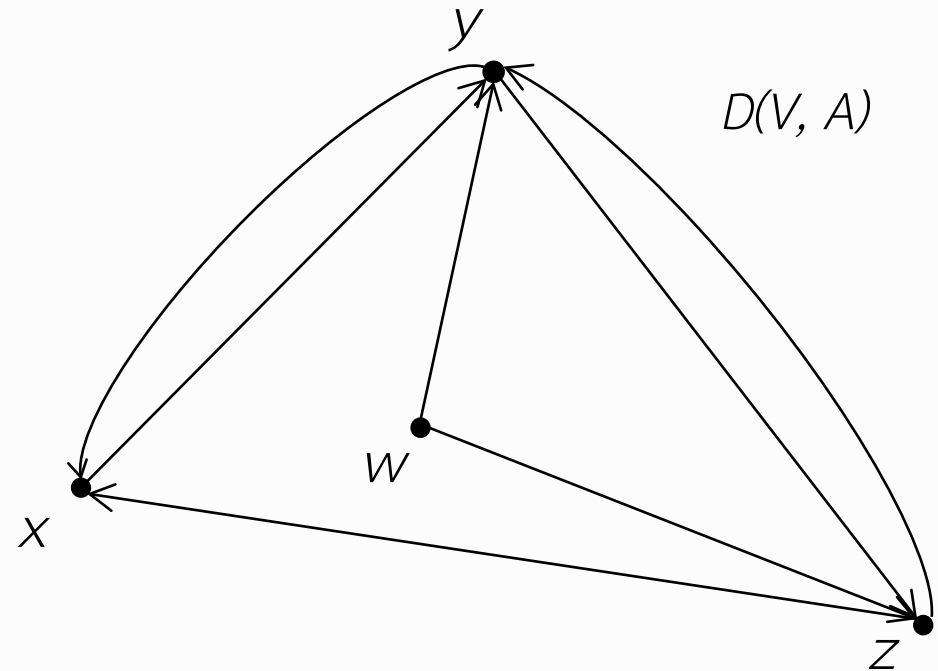
ถ้า กราฟโครงสร้าง (underlying graph) ของ D นั้นเป็นกราฟเชื่อมโยง



การเชื่อมโยงแบบแข็งแรง – strongly connected digraph

กราฟทิศทาง D จะถูกเรียกว่า การเชื่อมโยงแบบแข็งแรง (strongly connected digraph) ถ้าจุดยอดสองจุดใดๆ u และ v ใน D มีทางเดินทิศทางจาก u ไป v

กล่าวคือ กราฟทิศทาง D เป็นการเชื่อมโยงแบบแข็งแรง “ถ้าทุกจุดยอดใน D สามารถเข้าถึงได้จากจุดยอดอื่นๆทุกจุดใน D ”

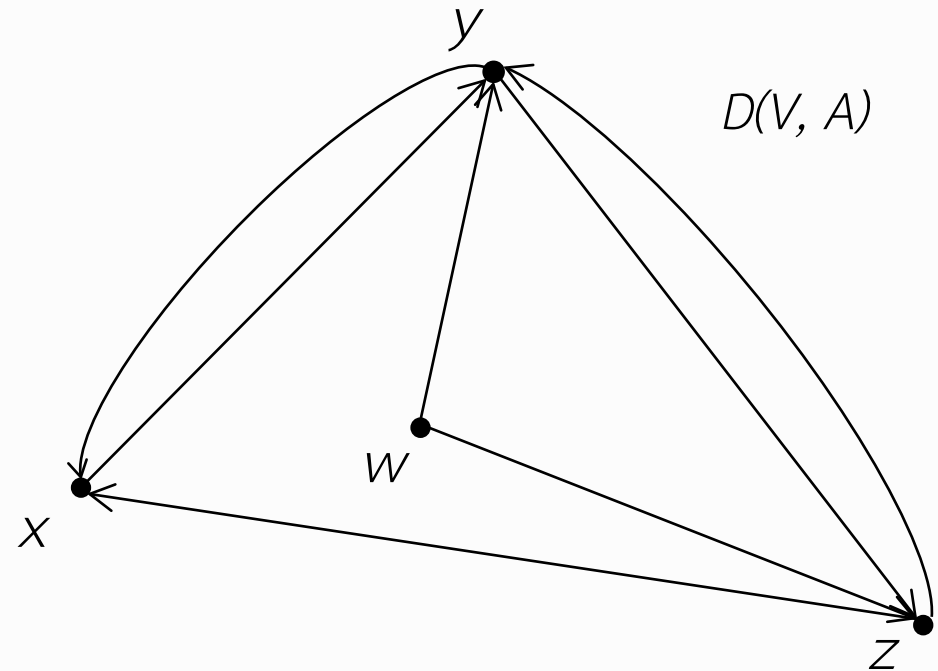


สรุปได้ว่ากราฟ D นั้นเป็นกราฟทิศทางที่.....

การเชื่อมโยงแบบแข็งแรง – strongly connected digraph

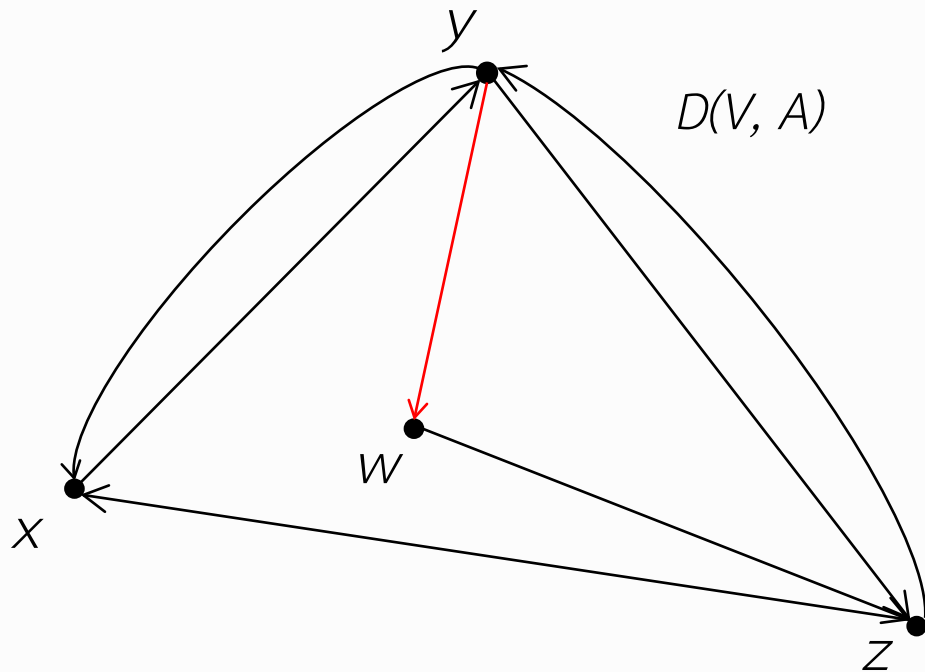
ตัวอย่างวิธีตรวจสอบ:

- จุดยอด x เข้าถึงได้จาก w, y, z
- จุดยอด y เข้าถึงได้จาก
- จุดยอด z เข้าถึงได้จาก
- แล้วจุดยอด w หละ?



สรุปได้ว่ากราฟ D นั้นเป็นกราฟทิศทางที่.....

การเชื่อมโยงแบบแข็งแรง – strongly connected digraph



วิธีทำ

จุดยอด w เข้าถึงได้จาก

จุดยอด x เข้าถึงได้จาก

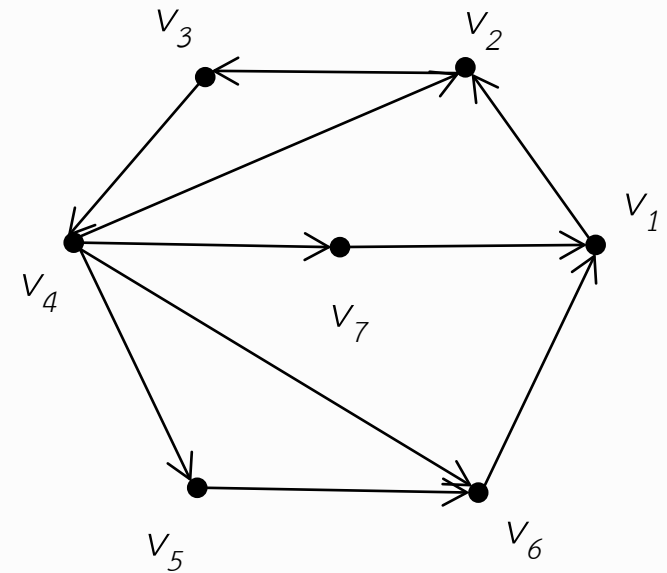
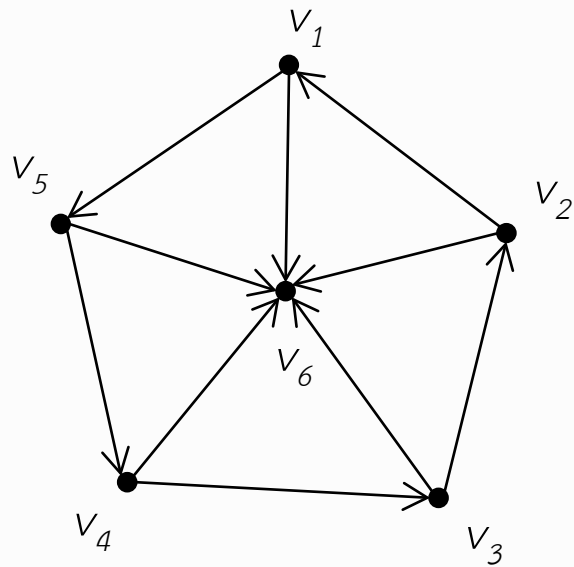
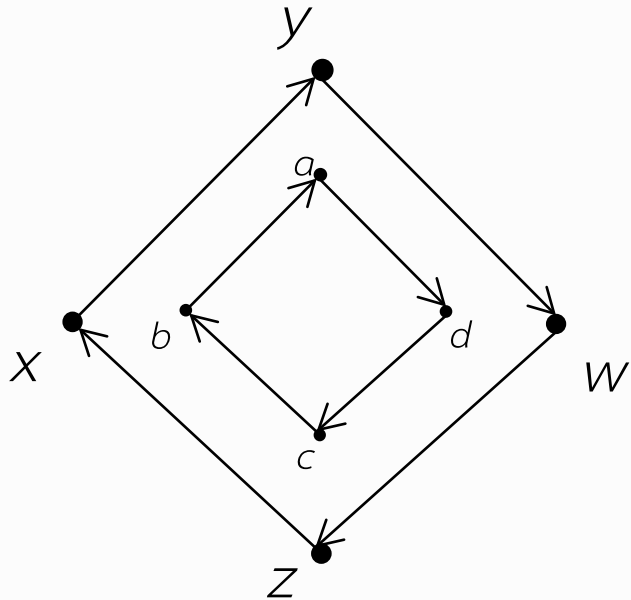
จุดยอด y เข้าถึงได้จาก

จุดยอด z เข้าถึงได้จาก

สรุปได้ว่ากราฟ D นั้นเป็นกราฟทิศทางที่.....

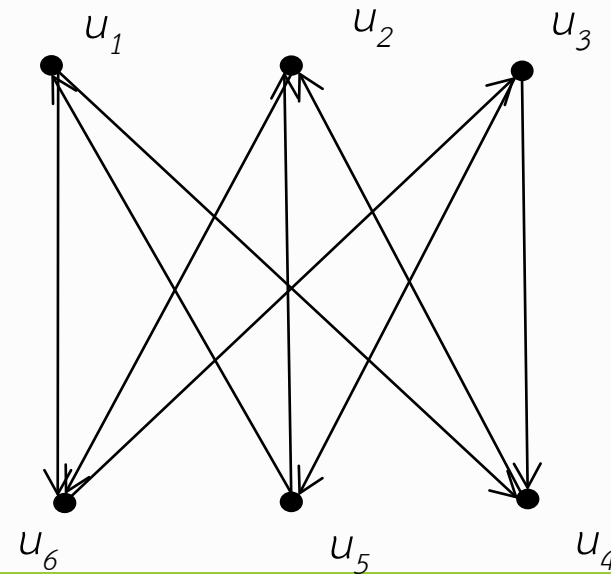
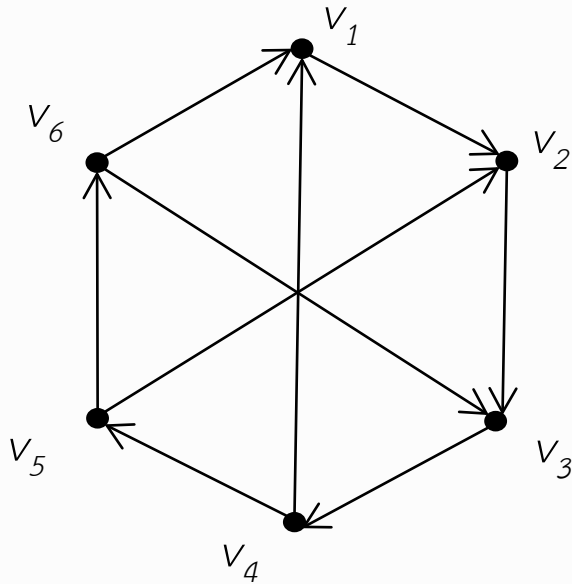
แบบฝึกหัด - การเชื่อมโยงของกราฟทิศทาง

กราฟต่อไปนี้เป็นกราฟทิศทางที่มีการเชื่อมโยงแบบอ่อนหรือการเชื่อมโยงแบบแข็งแรง หรือไม่มีคุณสมบัติเชื่อมโยง



การทิศทางพ้องรูป – isomorphism

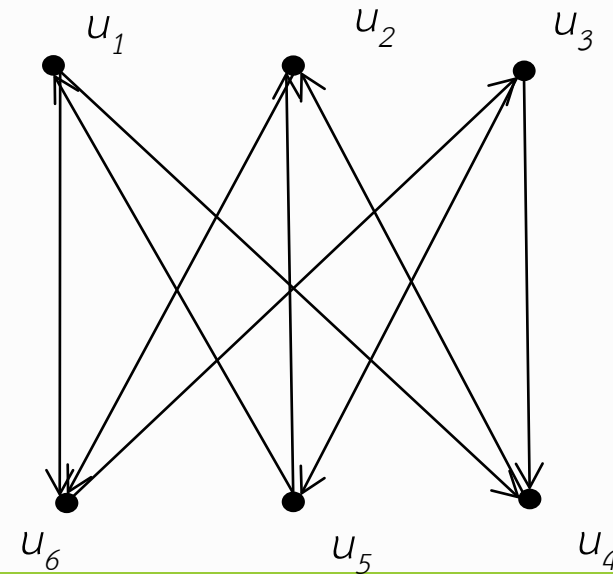
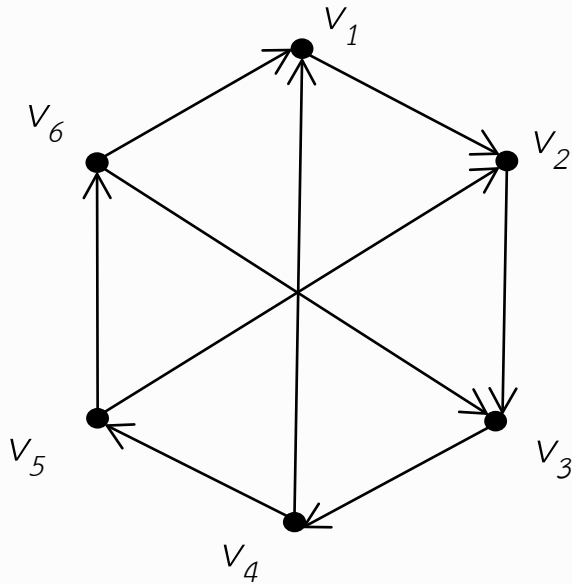
กราฟทิศทาง $D_1(V_1, A_1)$ และ $D_2(V_2, A_2)$ จะเรียกว่ากราฟทิศทาง D_1 เป็นกราฟทิศทางพ้องรูป (isomorphism) กับ D_2 ถ้ามีฟังก์ชัน f ที่เป็นหนึ่งต่อหนึ่งจาก V_1 ไป V_2 และให้เส้นเชื่อม e_1 ใน D_1 ที่เริ่มจาก u_1 ไป v_1 ก็จะสอดคล้องกับเส้นเชื่อมทิศทาง e_2 ใน D_2 ที่เชื่อมจาก $f(u_1)$ ไป $f(v_1)$ ด้วย



การทิศทางพ้องรูป – isomorphism

ฟังก์ชันหนึ่งต่อหนึ่ง

$$f(v_1) = u_4, f(v_2) = u_2, f(v_3) = u_6, f(v_4) = u_3, f(v_5) = u_5, f(v_6) = u_1$$



การทิศทางพ้องรูป – isomorphism

ซึ่งจะได้ว่า

เส้นเชื่อม (v_1, v_2) สอดคล้องกับเส้นเชื่อม (u_4, u_2)

เส้นเชื่อม (v_3, v_2) สอดคล้องกับเส้นเชื่อม (u_6, u_2)

เส้นเชื่อม (v_4, v_3) สอดคล้องกับเส้นเชื่อม (u_3, u_6)

เส้นเชื่อม (v_5, v_4) สอดคล้องกับเส้นเชื่อม (u_5, u_3)

เส้นเชื่อม (v_5, v_6) สอดคล้องกับเส้นเชื่อม (u_5, u_1)

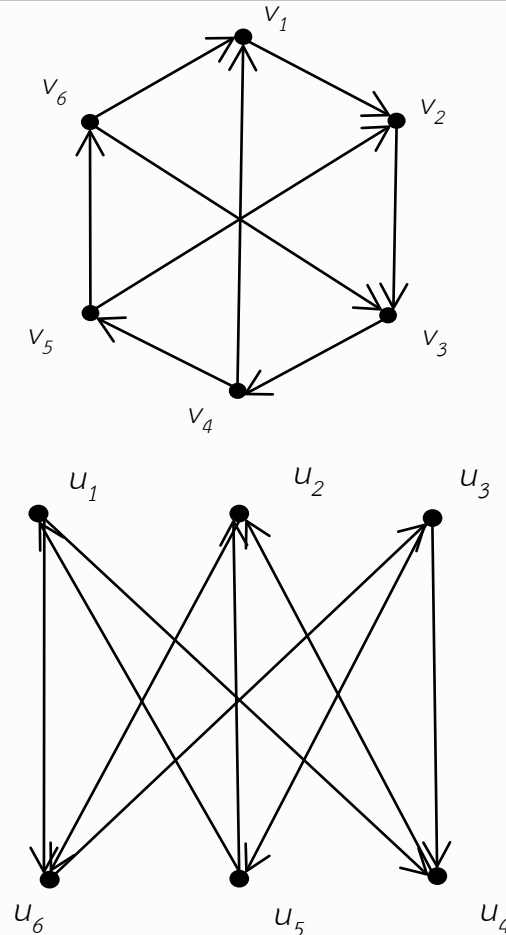
เส้นเชื่อม (v_6, v_1) สอดคล้องกับเส้นเชื่อม (u_1, u_4)

เส้นเชื่อม (v_4, v_1) สอดคล้องกับเส้นเชื่อม (u_3, u_4)

เส้นเชื่อม (v_2, v_5) สอดคล้องกับเส้นเชื่อม (u_2, u_5)

เส้นเชื่อม (v_6, v_3) สอดคล้องกับเส้นเชื่อม (u_1, u_6)

สรุปได้ว่า กราฟทิศทาง D_1 และ กราฟทิศทาง D_2 เป็นกราฟพ้องรูปกัน



การเก็บกราฟทิศทางด้วยเมทริกซ์

ในทางคอมพิวเตอร์เพื่อให้คอมพิวเตอร์สามารถเก็บข้อมูลของกราฟและนำไปใช้ได้ กราฟทิศทางจะถูกเก็บอยู่ในรูปของ

1. เมทริกซ์ประชิดสำหรับกราฟทิศทาง (adjacent matrix of directed graph)
2. เมทริกซ์อุบัติการณ์สำหรับกราฟทิศทาง (incident matrix of directed graph)

$$\begin{array}{c} \begin{array}{c} a \\ b \\ c \\ d \end{array} \begin{array}{ccccc} & a & b & c & d \\ \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \end{bmatrix} \end{array}\end{array}$$

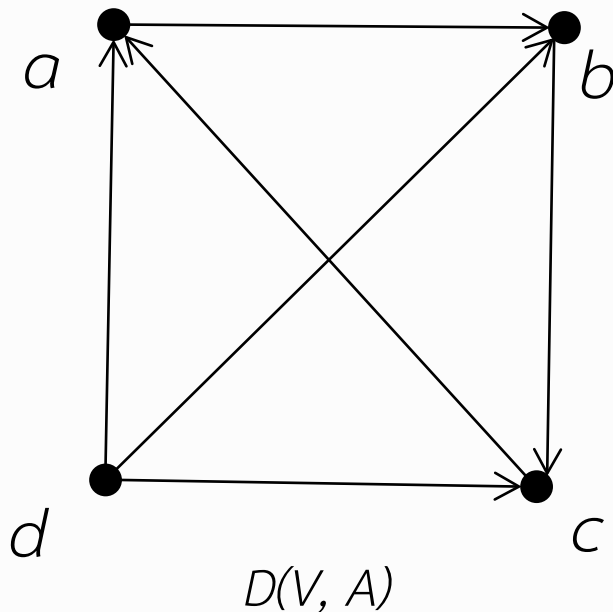
เมทริกซ์ประชิดสำหรับกราฟทิศทาง

$$\begin{array}{c} \begin{array}{c} a \\ b \\ c \\ d \end{array} \begin{array}{ccccc} & e_1 & e_2 & e_3 & e_4 \\ \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{bmatrix} \end{array}\end{array}$$

เมทริกซ์อุบัติการณ์สำหรับกราฟทิศทาง

เมทริกซ์ประชิดสำหรับกราฟทิศทาง (adjacent matrix of directed graph)

ถ้าให้ D เป็นกราฟทิศทางที่มี n จุดยอด ให้ Q เป็นเมทริกซ์ขนาด $n \times n$ ซึ่งเรียกว่าเมทริกซ์ประชิดของกราฟทิศทาง (adjacent matrix of directed graph) D โดยที่ สมาชิก q_{ij} ในเมทริกซ์จะแทนด้วยจำนวนเส้นเชื่อมจาก v_i ไปสิ้นสุด v_j



	a	b	c	d
a	0	1	0	0
b	0	0	1	0
c	1	0	0	0
d	1	1	1	0

เมทริกซ์ประชิดสำหรับกราฟทิศทาง

Q

เมทริกซ์อุบัติการณ์สำหรับกราฟทิศทาง (incidence matrix of directed graph)

ถ้าให้ D เป็นกราฟทิศทางที่มี n จุดแทนด้วย v_1, \dots, v_n และมีจำนวนเส้นเชื่อมเป็น m เส้นแล้ว แล้วให้ R เป็นเมทริกซ์อุบัติการณ์ของกราฟทิศทาง (incidence matrix of directed graph) G ขนาด $n \times m$ โดยที่ สมาชิก r_{ij} ในเมทริกซ์จะแทนด้วยค่าดังต่อไปนี้

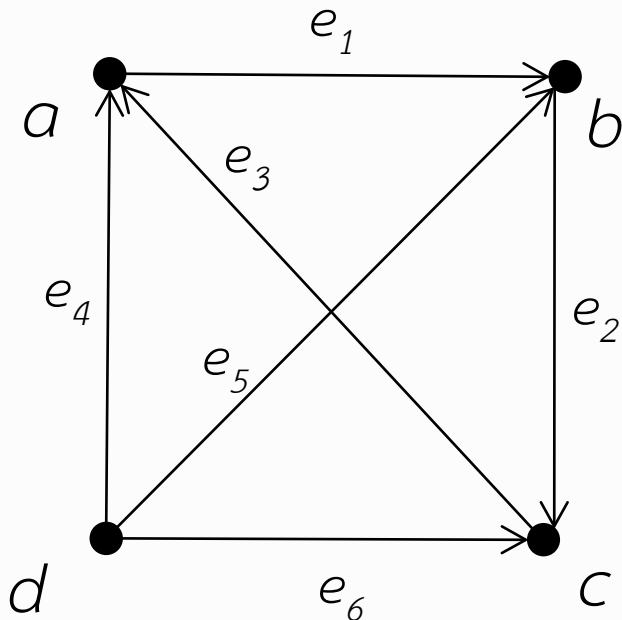
$$r_{ij} = \begin{cases} 0, & \text{เมื่อ } v_i \text{ ไม่ได้เป็นจุดปลายของเส้นเชื่อมทิศทาง } e_j \\ -1, & \text{เมื่อ } v_i \text{ เป็นจุดเริ่มต้นของเส้นเชื่อมทิศทาง } e_j \\ 1, & \text{เมื่อ } v_i \text{ เป็นจุดสิ้นสุดของเส้นเชื่อมทิศทาง } e_j \end{cases}$$

$$\begin{array}{c} \\ a \\ b \\ c \\ d \end{array} \begin{array}{cccc} e_1 & e_2 & e_3 & e_4 \\ \left[\begin{array}{cccc} -1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{array} \right] \end{array}$$

เมทริกซ์อุบัติการณ์สำหรับกราฟทิศทาง G

เมทริกซ์อุบัติการณ์สำหรับกราฟทิศทาง (incidence matrix of directed graph)

ถ้าให้ D เป็นกราฟทิศทางที่มี n จุดแทนด้วย v_1, \dots, v_n และมีจำนวนเส้นเชื่อมเป็น m เส้นแล้ว แล้วให้ R เป็นเมทริกซ์อุบัติการณ์ของกราฟทิศทาง (incidence matrix of directed graph) G ขนาด $n \times m$ โดยที่ สมาชิก r_{ij} ในเมทริกซ์จะแทนด้วยค่าดังต่อไปนี้



$$\begin{array}{c} e_1 \quad e_2 \quad e_3 \quad e_4 \quad e_5 \quad e_6 \\ \begin{array}{c} a \\ b \\ c \\ d \end{array} \begin{bmatrix} -1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & -1 & -1 \end{bmatrix} \end{array}$$

เมทริกซ์อุบัติการณ์สำหรับกราฟทิศทาง G

แบบฝึกหัด – เมทริกซ์ประชิด/ปฏิบัติการสำหรับกราฟทิศทาง

จงเขียนเมทริกซ์ประชิดและเมทริกซ์ปฏิบัติการของทางเดินทิศทางต่อไปนี้

