Discrete Computational Structures – graph

อ. ภูริวัจน์ วรวิชัยพัฒน์

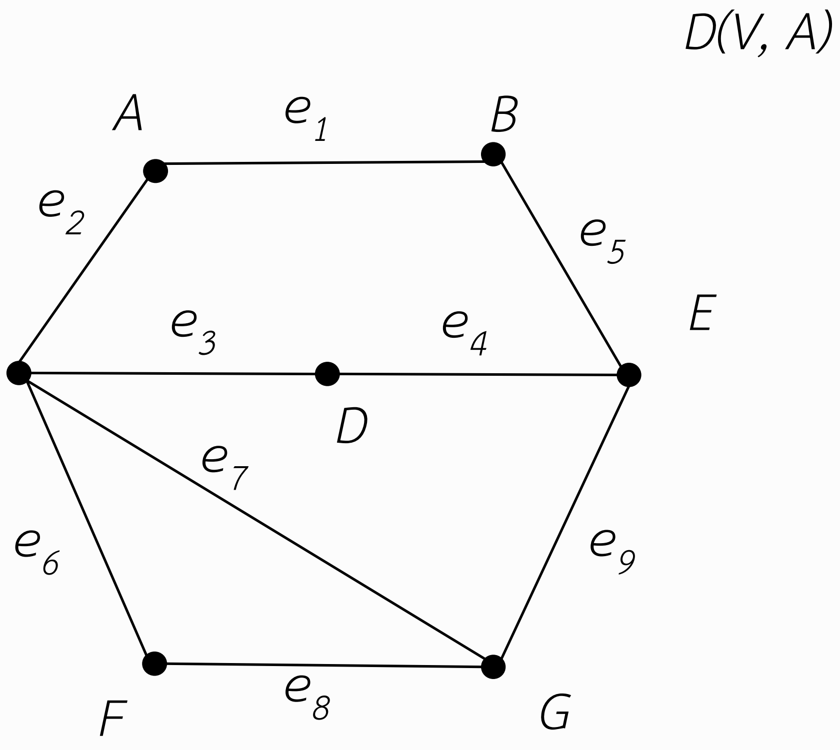
อ้างอิงจากหนังสือ: Discrete Computational Structure, คทา ประดิษฐ์วงศ์

กราฟ หรือ graph

นิยามกราฟ

ให้ *G* เป็นกราฟ ซึ่งจะประกอบด้วย เซตของจุดยอด (vertex) ที่ไม่เป็นเซตว่าง จะให้ชื่อว่า *V* และเส้นเชื่อม (edge) ที่เชื่อมจุดยอดสองจุดเข้าด้วยกัน เซตของเส้นเชื่อมอาจจะเป็นเซตว่างได้ซึ่งมีชื่อว่า *E* ข้อมูลในเซต *E* จะเขียนอยู่ในรูปแบบของ {*uv*} เมื่อ *v* และ *u* เป็นจุดยอดใน *V* ซึ่งสามารถเขียนสัญลักษณ์แทนได้ว่า *G(V,E)*

$$V = \{A, B, C, D, E, F, G\}$$
$$E = \{e_1, e_2, e_3, e_4, e_5, e_6, e_7, e_8, e_9\}$$



เส้นเชื่อม – edge

เส้นเชื่อม e = {uv} ในที่นี้ใช้ตัวแปร e ย่อมาจาก edge สามารถกล่าวได้ว่า

การประชิด, adjacent

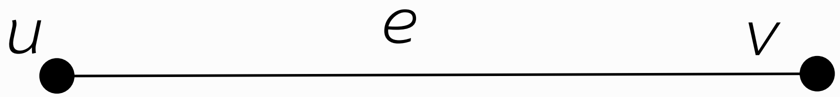
1. จุดยอด u ประชิดกับ v

2. จุดยอด v ประชิดกับ u

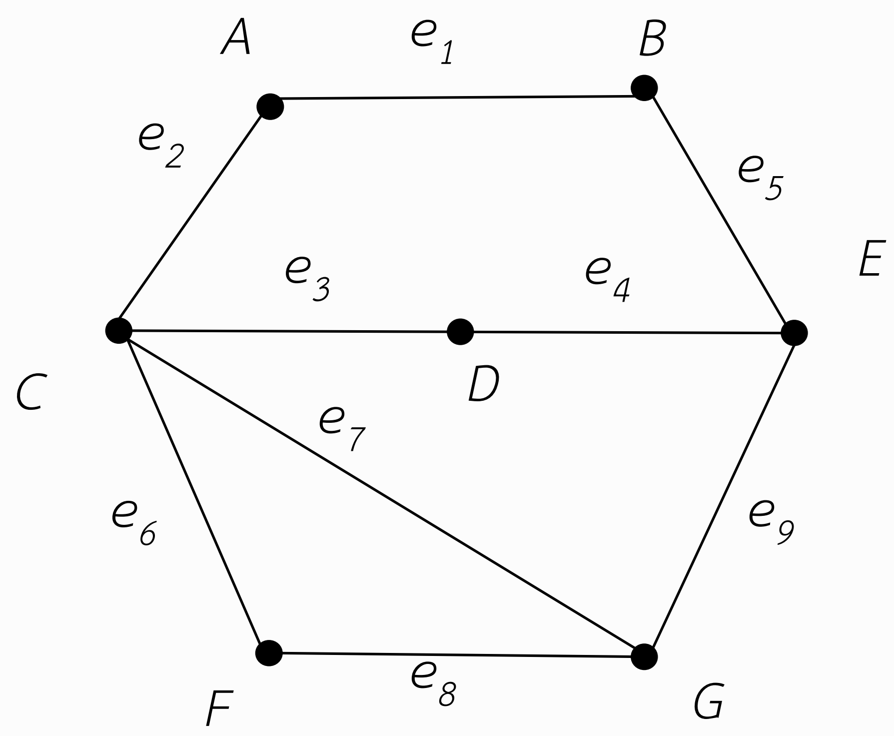
การตกกระทบ, incident

1. จุดยอด *u* ตกกระทบกับเส้นเชื่อม e

2. จุดยอด v ตกกระทบกับเส้นเชื่อม e



เส้นเชื่อม – edge



จุดยอด A และ B ตกกระทบกับเส้นเชื่อม e_1 เขียนแทนด้วยคู่ลำดับ {AB}

จุดยอด B และ E ตกกระทบกับเส้นเชื่อม e_2 เขียนแทนด้วยคู่ลำดับ {AC}

จุดยอด C และ D ตกกระทบกับเส้นเชื่อม e_3 เขียนแทนด้วยคู่ลำดับ {CD}

จุดยอด D และ E ตกกระทบกับเส้นเชื่อม e_4 เขียนแทนด้วยคู่ลำดับ {DE}

จุดยอด B และ E ตกกระทบกับเส้นเชื่อม e_5 เขียนแทนด้วยคู่ลำดับ {BE}

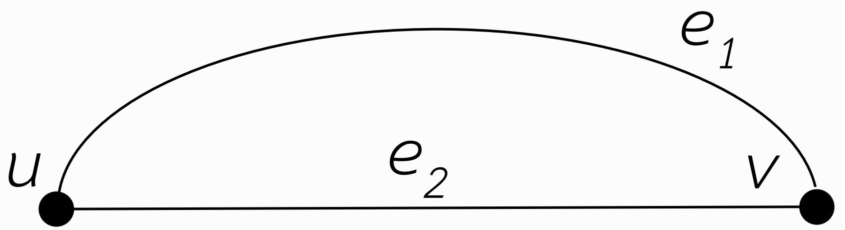
…

…

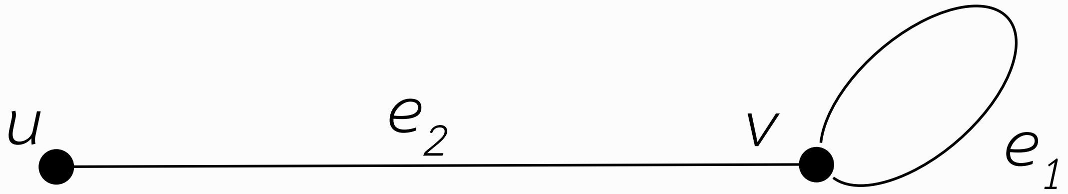
จุดยอด G และ E ตกกระทบกับเส้นเชื่อม e_9 เขียนแทนด้วยคู่ลำดับ {GE}

ชนิดของเส้นเชื่อม – type of edge

เส้นเชื่อมขนาน (parallel edges หรือ multiple edges) คือเส้นเชื่อมตั้งแต่สองเส้นขึ้นไปที่มีจุดยอดปลายเหมือนกัน



เส้นเชื่อมบ่วง (loop) คือเส้นเชื่อมที่มีจุดยอดปลายทางทั้งสองเป็นจุดยอดเดียวกัน



ชนิดเส้นเชื่อมสองแบบนี้มีผลทำให้เกิดชนิดของกราฟที่ไม่เหมือนกัน

ชนิดของกราฟ – graph types

1. กราฟเชิงเดี่ยว (simple graph)

แต่ละคู่ u และ v มีเพียงเส้นเชื่อมแค่เส้นเดียวจาก u ไป v และ ไม่มีเส้นเชื่อมที่เริ่มจากจุดยอด u แล้ววนกลับมาหาตัวเอง

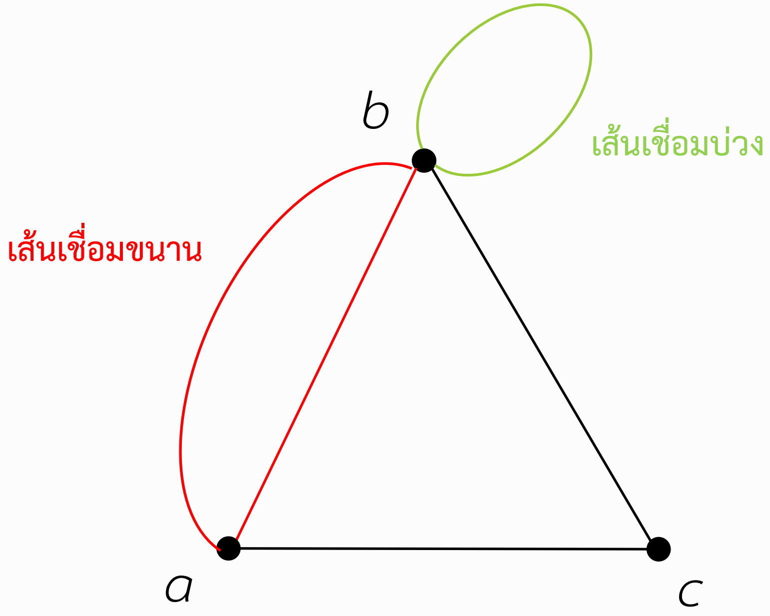
โดยสรุปแล้วคือ ไม่มี เส้นเชื่อมขนาน และ เส้นเชื่อมบ่วง

2. กราฟหลายเชิง (multigraph)

กราฟที่สามารถมีเส้นเชื่อมทิศทางขนาน

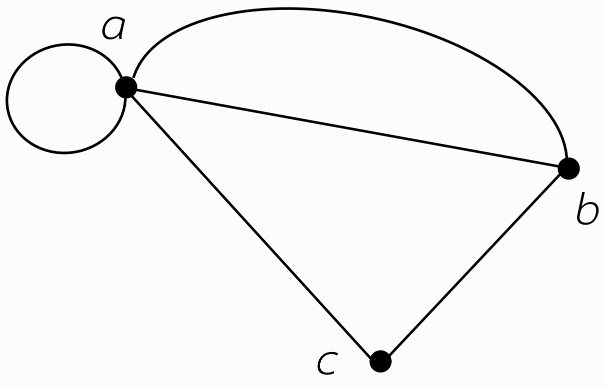
3. กราฟเทียม (pseudograph)

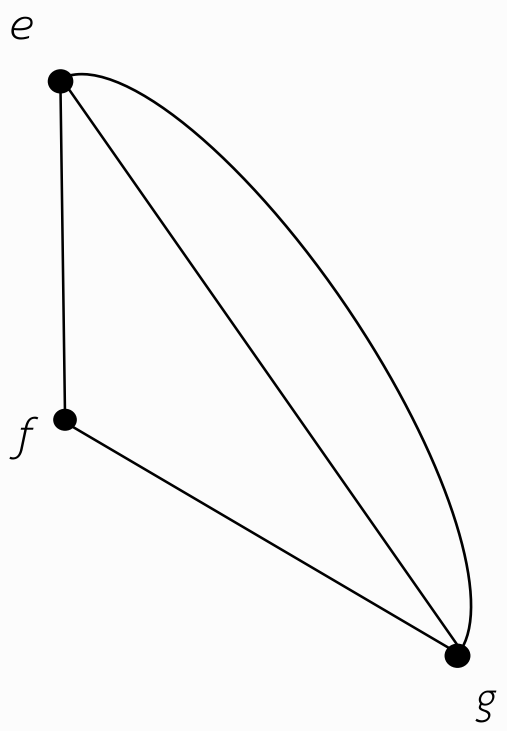
กราฟที่สามารถมีเส้นเชื่อมขนาน และ เส้นเชื่อมบ่วงได้

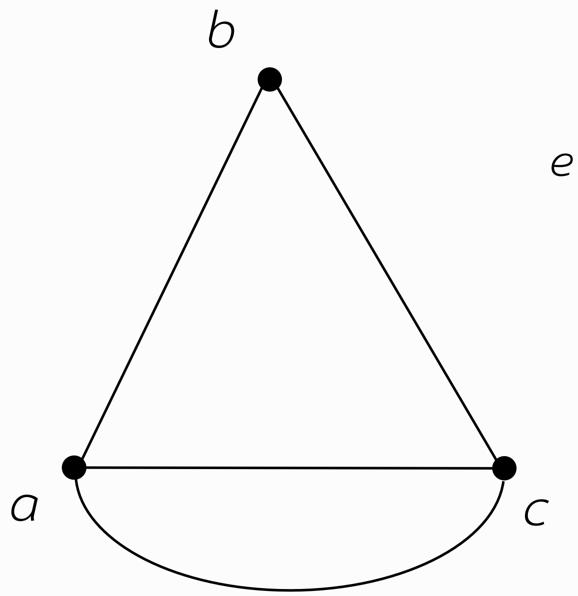


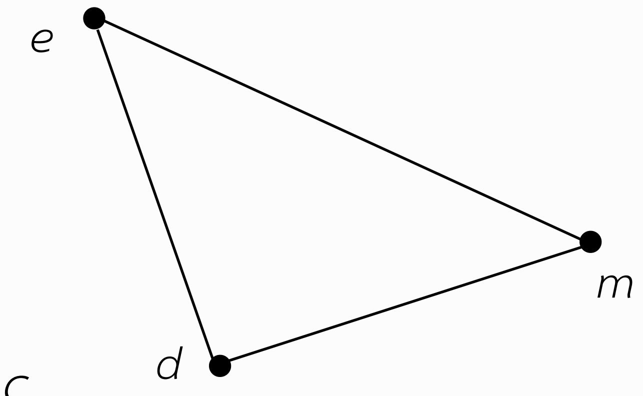
แบบฝึกหัด - ชนิดของกราฟทิศทาง

จงบอกว่ากราฟด้านล่างเป็นกราฟทิศทางชนิดใด พร้อมคำอธิบายสั้นๆ









ดีกรี - degree

ดีกรี (degree) ของจุดยอด v คือจำนวนของเส้นเชื่อมที่มาตกกระทบกับจุดยอดนี้ เขียนแทนด้วย deg(v)

ทฤษฎี:

- ผลรวมของดีกรีของทุกจุดยอดในกราฟมีค่าเป็นสองเท่าของจำนวนเส้นเชื่อมในกราฟ ซึ่งสามารถเขียนเป็นสมการได้ดังนี้

$$\sum_{i=1}^{n} deg(v_i) = 2\,e$$

- เนื่องจากเส้นเชื่อม 1 เส้น ประกอบด้วยจุดยอดสวองจุดเสมอ ดังนั้นจำนวนดีกรีของเส้นแต่ละเส้นคือ 2 ซึ่งเมื่อนับรวมทั้งหมดในกราฟจึงได้ตามสมการ

ดีกรี - degree

กำหนดให้จำนวนดีกรีของจุดยอดเป็นดังต่อไปนี้ อยากทราบว่าสามารถสร้างกราฟได้ไหม

- 1, 2, 3, 4, 4
- 1, 1, 2, 3, 4, 6, 8
- 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10
- 1, 1, 1, 2, 3, 3, 5, 5

ทางเดิน – walk

ทางเดิน (walk) ในกราฟ G(V, E) คือลำดับที่เขียนสลับกันของจุดยอดและเส้นเชื่อม

$$W = v_1 e_1 v_2 e_2 \ldots v_n e_n v_{n+1}$$

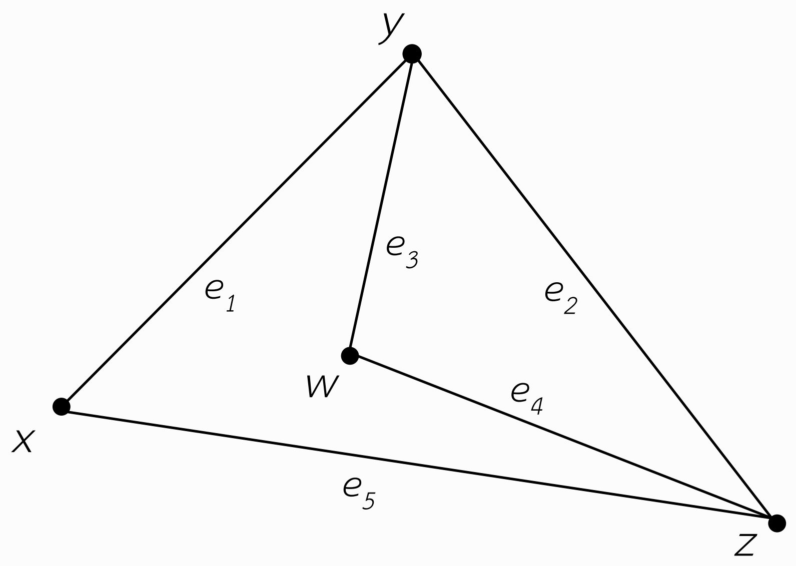
โดยที่ v_1 เป็นจุดเริ่มต้น (initial vertex) และ v_{n+1} เป็นจุดยอดปลายทาง (terminal vertex) เมื่อเส้นเชื่อม e_i ที่มีจุดปลายเป็นจุดยอด v_i และ v_{i+1} ส่วนจำนวนเส้นเชื่อม n นั้น จะถูกเรียกว่าความยาวของทางเดิน W

ยกตัวอย่างเช่นจากกราฟด้านขวา ทางเดินจาก x ไป z คือ

$W_1 = x e_1 y e_2 z$ (แบบเต็ม)

$W_1 = xyz$ (แบบย่อ, sequence)

**แบบย่อจะเขียนได้ก็ต่อเมื่อไม่มีความสับสนเรื่องเส้นเชื่อม

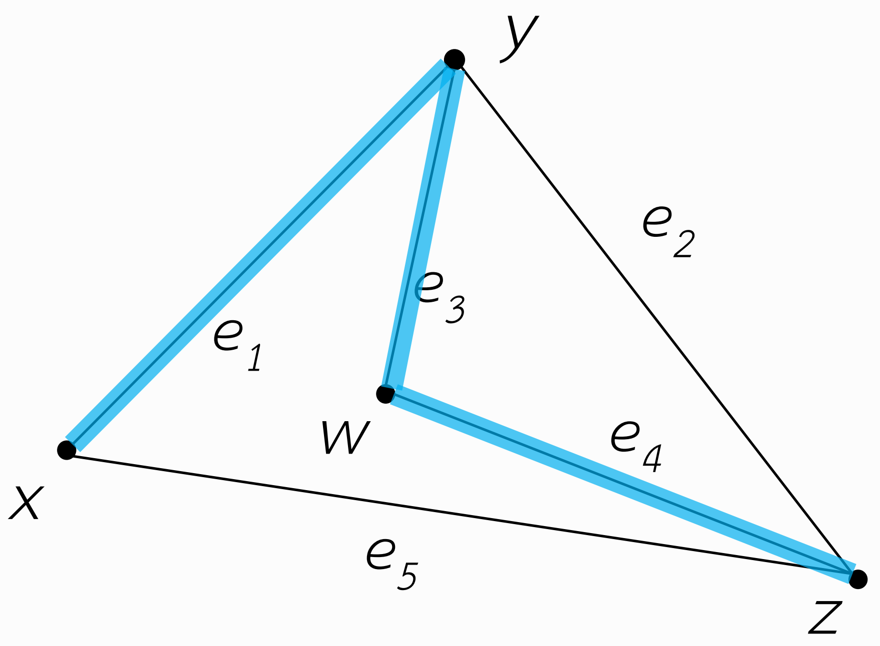


ชนิดทางเดิน – types of walk

รอยเดิน (trail) คือ ทางเดิน W = $v_1e_1v_2e_2 \ldots v_ne_nv_{n+1}$
โดยที่เส้นเชื่อม e_i ต่างกันทั้งหมด เมื่อ $1 \le i \le n$
เช่น W = $xe_1ye_3we_4z$

วิถี (path) คือทางเดิน W = $v_1e_1v_2e_2 \ldots v_ne_nv_{n+1}$
โดยที่จุดยอด v_j แตกต่างกันทั้งหมด เมื่อ $1 \le j \le n+1$

วงจร (circuit) คือ วิถีที่จุดยอดเริ่มต้นและจุดปลายทาง
เป็นจุดยอดเดียวกัน **ขัดกับนิยามของวิถีนิดหน่อยที่ยอม
ให้จุดยอดซ้ำกันได้ระหว่าง จุดเริ่มต้นกับปลายทาง



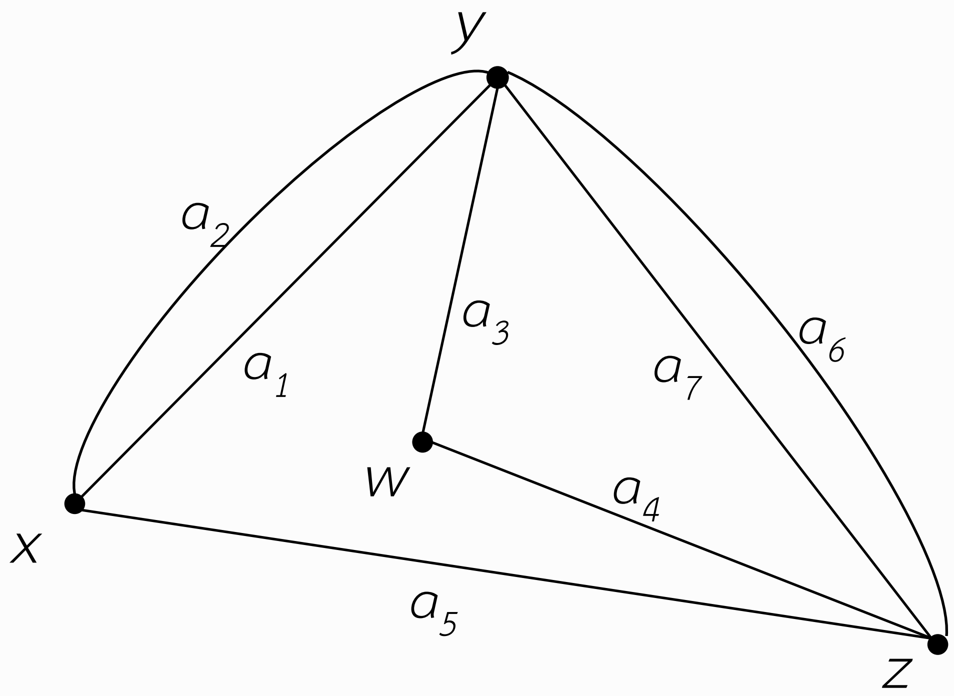
แบบฝึกหัด - ทางเดิน

จงเขียนทางเดินจำนวน 2 ทางเดินถ้าเป็นไปได้ของทางเดินทิศทางต่อไปนี้

1. ทางเดินทิศทาง x ไป z

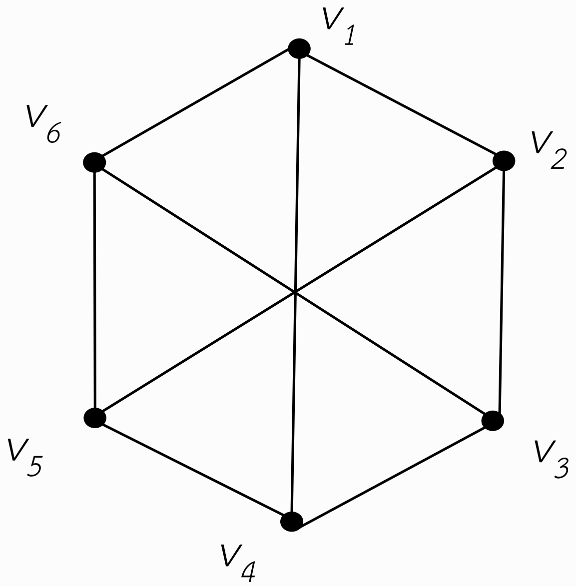
2. ทางเดินทิศทาง z ไป y

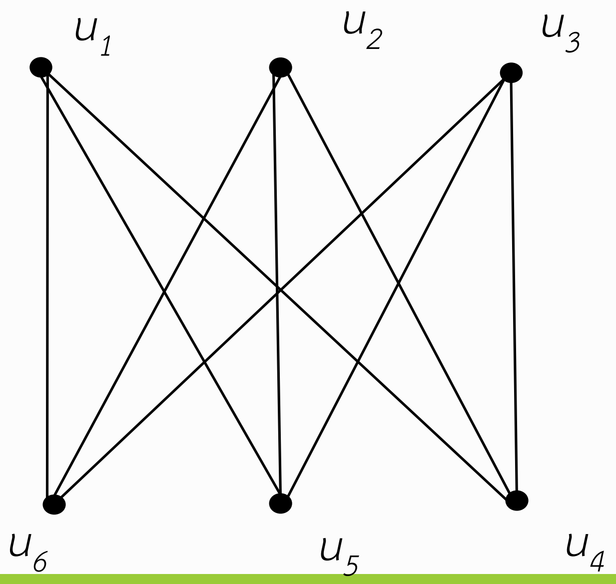
3. ทางเดินทิศทาง y ไป w



การฟพ้องรูป – isomorphism

กราฟ $G_1(V_1, E_1)$ และ $G_2(V_2, E_2)$ จะเรียกว่ากราฟ G_1 เป็นกราฟพ้องรูป (isomorphic graph) กับ G_2 ถ้ามีฟังก์ชัน f ที่เป็นหนึ่งต่อหนึ่งจาก V_1 ไป V_2 และให้เส้นเชื่อม e_1 ใน G_1 ที่จาก u_1 ไป v_1 ก็จะสอดคล้องกับเส้นเชื่อมทิศทาง e_2 ใน G_2 ที่เชื่อมจาก $f(u_1)$ ไป $f(v_2)$ ด้วย

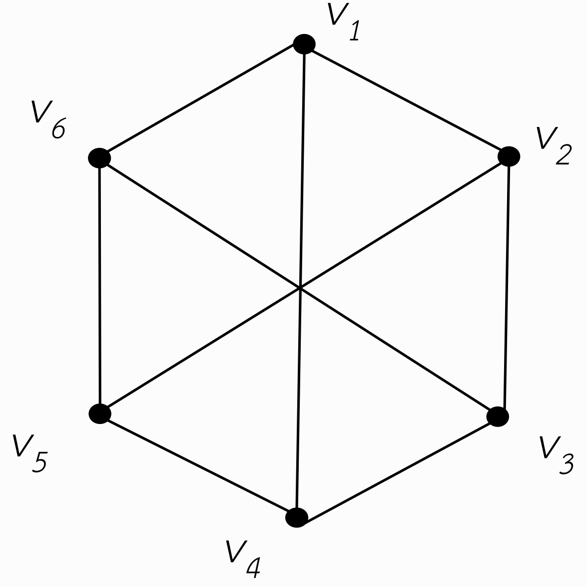


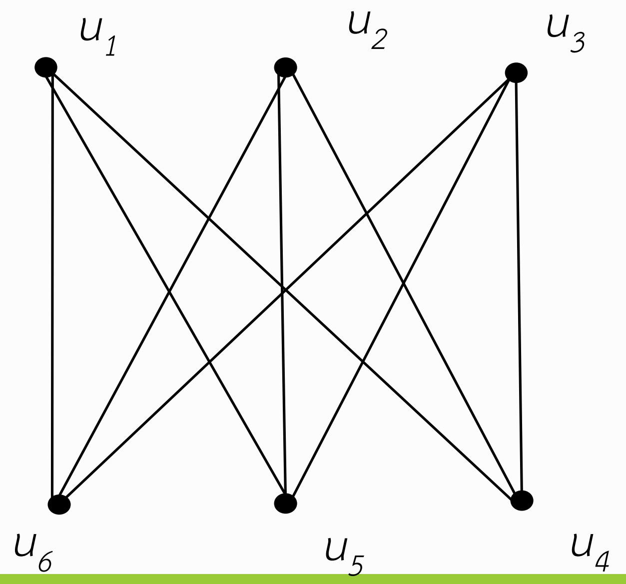


การฟพ้องรูป – isomorphism

ฟังก์ชันหนึ่งต่อหนึ่ง

$f(v_1) = u_4$, $f(v_2) = u_2$, $f(v_3) = u_6$, $f(v_4) = u_3$, $f(v_5) = u_5$, $f(v_6) = u_1$



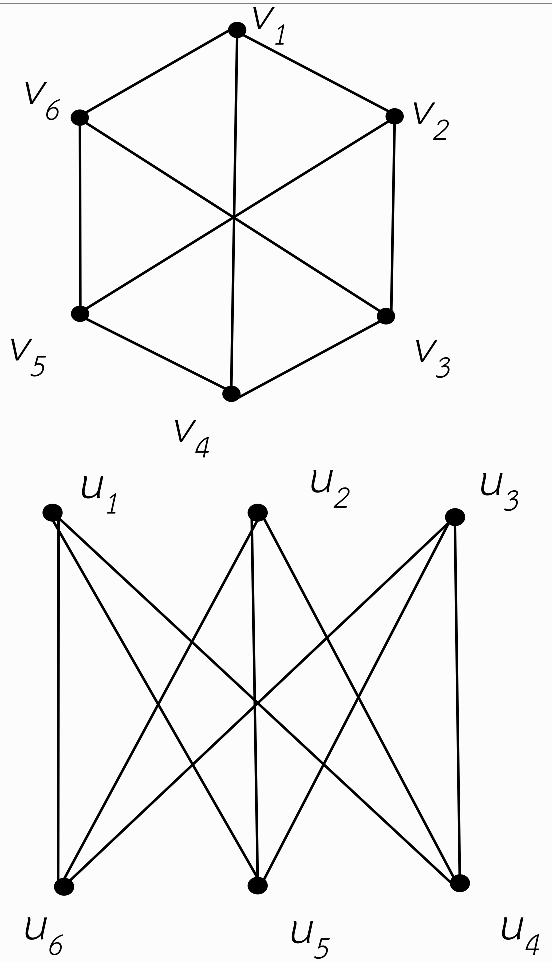


การฟพ้องรูป – isomorphism

ซึ่งจะได้ว่า

เส้นเชื่อม (v_1, v_2) สอดคล้องกับเส้นเชื่อม (u_4, u_2)
เส้นเชื่อม (v_3, v_2) สอดคล้องกับเส้นเชื่อม (u_6, u_2)
เส้นเชื่อม (v_4, v_3) สอดคล้องกับเส้นเชื่อม (u_3, u_6)
เส้นเชื่อม (v_5, v_4) สอดคล้องกับเส้นเชื่อม (u_5, u_3)
เส้นเชื่อม (v_5, v_6) สอดคล้องกับเส้นเชื่อม (u_5, u_1)
เส้นเชื่อม (v_6, v_1) สอดคล้องกับเส้นเชื่อม (u_1, u_4)
เส้นเชื่อม (v_4, v_1) สอดคล้องกับเส้นเชื่อม (u_3, u_4)
เส้นเชื่อม (v_2, v_5) สอดคล้องกับเส้นเชื่อม (u_2, u_5)
เส้นเชื่อม (v_6, v_3) สอดคล้องกับเส้นเชื่อม (u_1, u_6)

สรุปได้ว่า กราฟ G_1 และ กราฟ G_2 เป็นกราฟพ้องรูปกัน



การเก็บกราฟด้วยเมทริกซ์

ในทางคอมพิวเตอร์เพื่อให้คอมพิวเตอร์สามารถเก็บข้อมูลของกราฟและนำไปใช้ต่อได้ กราจะถูกเก็บอยู่ในรูปของเมทริกซ์ ซึ่งเมทริกซ์นั้นจะสามารถเก็บได้อยู่ 2 รูปแบบ

1. เมทริกซ์ประชิดสำหรับกราฟ (adjacent matrix)

2. เมทริกซ์อุบัติการณ์สำหรับกราฟ (incident matrix)

$$\begin{array}{cc} & \begin{array}{cccc} a & b & c & d \end{array} \\ \begin{array}{c} a \\ b \\ c \\ d \end{array} & \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \end{bmatrix} \end{array}$$

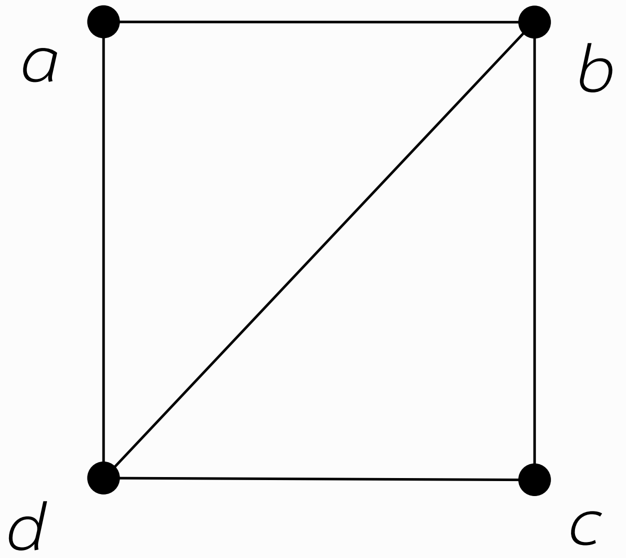
เมทริกซ์ประชิดสำหรับกราฟทิศทาง

$$\begin{array}{cc} & \begin{array}{cccc} e_1 & e_2 & e_3 & e_4 \end{array} \\ \begin{array}{c} a \\ b \\ c \\ d \end{array} & \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} \end{array}$$

เมทริกซ์อุบัติการณ์สำหรับกราฟทิศทาง

เมทริกซ์ประชิดสำหรับกราฟทิศทาง (adjacent matrix of directed graph)

ถ้าให้ G เป็นกราฟที่มี n จุดยอด ให้ Q เป็นเมทริกซ์ขนาด n x n ซึ่งเรียกว่าเมทริกซ์ประชิดของกราฟ (adjacent matrix) D โดยที่ สมาชิก q_{ij} ในเมทริกซ์จะแทนด้วยจำนวนเส้นเชื่อมระหว่าง v_i และ v_j



G(V, A)

$$
\begin{array}{cc}
 & \begin{array}{cccc} a & b & c & d \end{array} \\
\begin{array}{c} a \\ b \\ c \\ d \end{array} & \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}
\end{array}
$$

เมทริกซ์ประชิดสำหรับกราฟทิศทาง

Q

เมทริกซ์อุบัติการณ์สำหรับกราฟทิศทาง (incidence matrix of directed graph)

ถ้าให้ G เป็นกราฟที่มี n จุดยอด แทนด้วย v_1 , ..., v_n และมีจำนวนเส้นเชื่อมเป็น m เส้น แล้วให้ R เป็นเมทริกซ์อุบัติการณ์ (incidence matrix) G ขนาด n x m โดยที่ สมาชิก r_{ij} ในเมทริกซ์จะแทนด้วยค่าดังต่อไปนี้

$$r_{ij}=\begin{cases} 0, \text{ เมื่อ } v_i \text{ ไม่ได้เป็นจุดยอดปลายของเส้นเชื่อม } e_j \\ 1, \text{ เมื่อ } v_i \text{ เป็นจุดยอดปลายของเส้นเชื่อม } e_j \text{ แบบเส้นเชื่อมปกติ} \\ 2, \text{ เมื่อ } v_i \text{ เป็นจุดยอดปลายของเส้นเชื่อมเข้าหาตัวเอง } e_j \end{cases}$$

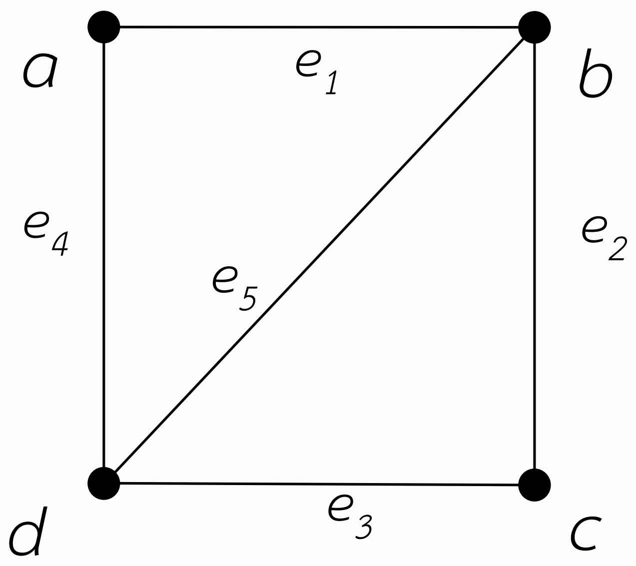
$$\begin{array}{c c} & \begin{array}{ccccc} e_1 & e_2 & e_3 & e_4 & e_5 \end{array} \\ \begin{array}{c} a \\ b \\ c \\ d \end{array} & \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \end{array}$$

$$R$$

เมทริกซ์อุบัติการณ์สำหรับกราฟทิศทาง G

เมทริกซ์อุบัติการณ์สำหรับกราฟทิศทาง (incidence matrix of directed graph)

ถ้าให้ G เป็นกราฟที่มี n จุดยอด แทนด้วย v_1 , ..., v_n และมีจำนวนเส้นเชื่อมเป็น m เส้น แล้วให้ R เป็นเมทริกซ์อุบัติการณ์ (incidence matrix) G ขนาด n x m โดยที่ สมาชิก r_{ij} ในเมทริกซ์จะแทนด้วยค่าดังต่อไปนี้

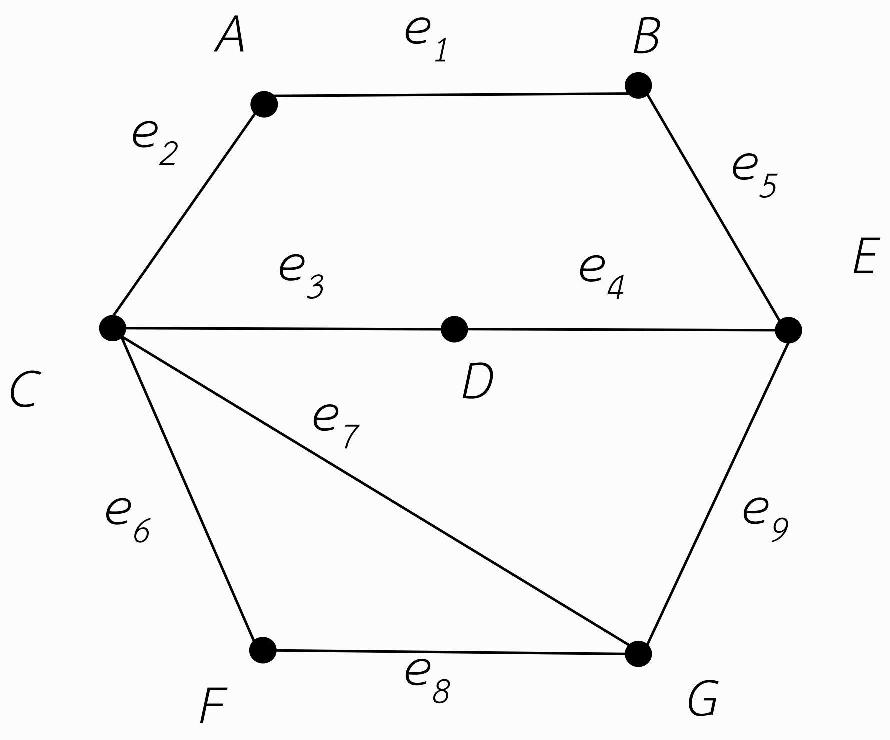


$$
\begin{array}{c c}
 & \begin{array}{ccccc} e_1 & e_2 & e_3 & e_4 & e_5 \end{array} \\
\begin{array}{c} a \\ b \\ c \\ d \end{array} & \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}
\end{array}
$$

เมทริกซ์อุบัติการณ์ R สำหรับกราฟ G

แบบฝึกหัด – เมทริกซ์ประชิด/อุบัติการณ์สำหรับกราฟ

จงเขียนเมทริกซ์ประชิดและเมทริกซ์อุบัติการณ์ของกราฟต่อไปนี้



แบบฝึกหัด – เมทริกซ์ประชิด/อุบัติการณ์สำหรับกราฟ

จงเขียนเมทริกซ์ประชิดและเมทริกซ์อุบัติการณ์ของกราฟต่อไปนี้