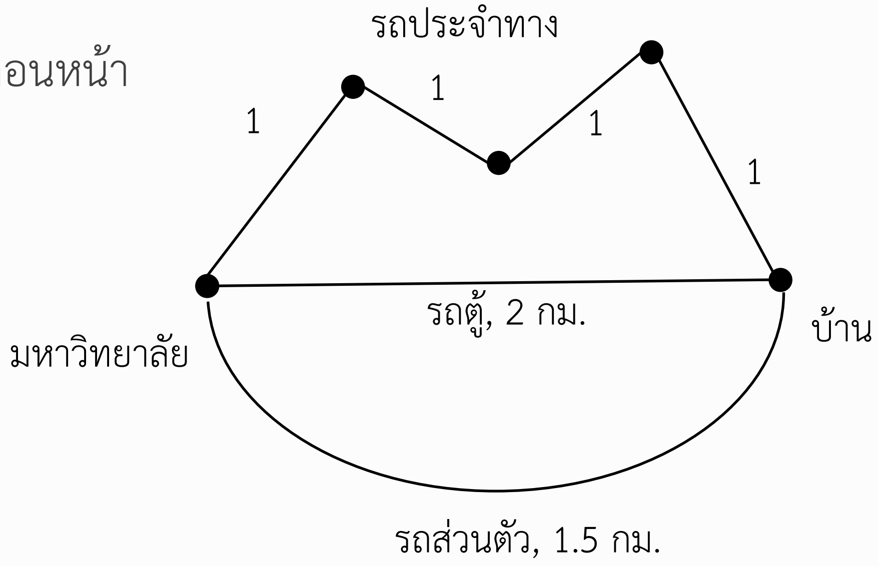
Discrete Computational Structures – Minimum Spaning Tree

อ. ภูริวัจน์ วรวิชัยพัฒน์

อ้างอิงจากหนังสือ: Discrete Computational Structure, คทา ประดิษฐ์วงศ์

ทบทวนคาบที่แล้ว (Recap)

- **เส้นทาวที่สั้นที่สุด shortest path**
- นิยามของ กราฟน้ำหนัก ที่น้ำหนักนั้นแทนความสำคัญ/ยากง่าย ของเส้นทางระหว่างจุดยอด ตย. จำนวนไฟแดง, ระยะทาง, หรือ เวลา
- องค์ประกอบกราฟที่จำเป็น: น้ำหนัก weight(), ระยะทาง dist(), และ จุดก่อนหน้า previous()



ทบทวนคาบที่แล้ว (Recap)

ไดส์ตร้าอัลกอริทึม หรือ Dijkstra’s algorithm มีดังนี้

1. ให้ T เป็นเซ็ตของจุดยอดทั้งหมดหรือจุดยอดที่ยังไม่ถูกเยี่ยม (unvisited vertex)

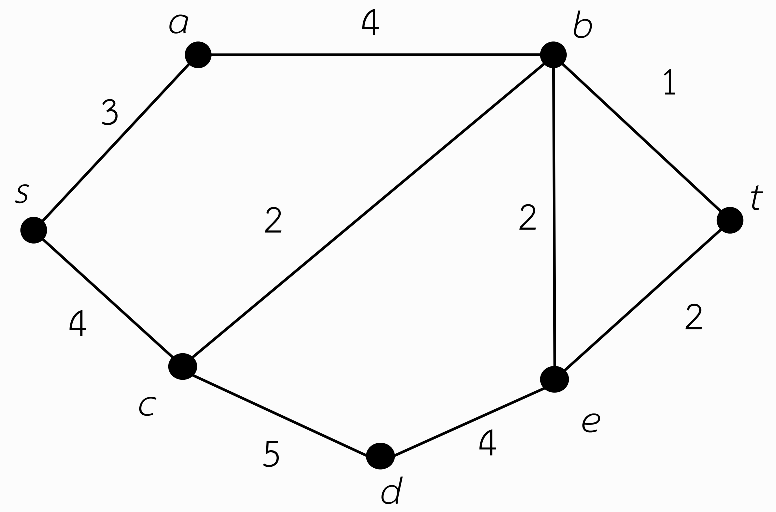
2. กำหนดจุดยอดปัจจุบัน (current vertex) เป็นจุดยอด s และปรับระยะทางของ dist(s) = 0 และ dist(a) = ∞ โดยที่ a เป็นจุดยอดอื่นๆที่ a ≠ s

3. หาจุดยอด $v \in T$ ที่ $dist(v)$ น้อยที่สุด, ให้ v เป็นจุดยอดปัจจุบัน
   - 3.1 สำหรับทุกจุดยอด u ที่ประชิดกับ v และ $u \in T$ ถ้า $dist(v) + weight(v,u) < dist(u)$ ทำ 3.2 และ 3.3
   - 3.2 อัปเดต $dist(u) = dist(v) + weight(v,u)$
   - 3.3 $prev(u) = v$

4. $T = T - \{v\}$ และกลับไปทำข้อ 3 ใหม่ จนกว่า T จะเป็นเซ็ตว่าง

ในข้อ 4 นั้น จริงๆแล้วสามารถหยุดการทำงานได้ก่อน T เป็นเซ็ตว่าง ถ้าจุดยอดปลายทางของเรานั้นไม่อยู่ใน T แล้ว
แต่จะไม่รับประกันว่าตารางที่ได้จะระบุเส้นทางที่สั้นที่สุดจาก s ไปถึงจุดยอดทุกจุด *จะรับประกันแต่ s ไปถึงจุดปลายทางเท่านั้น

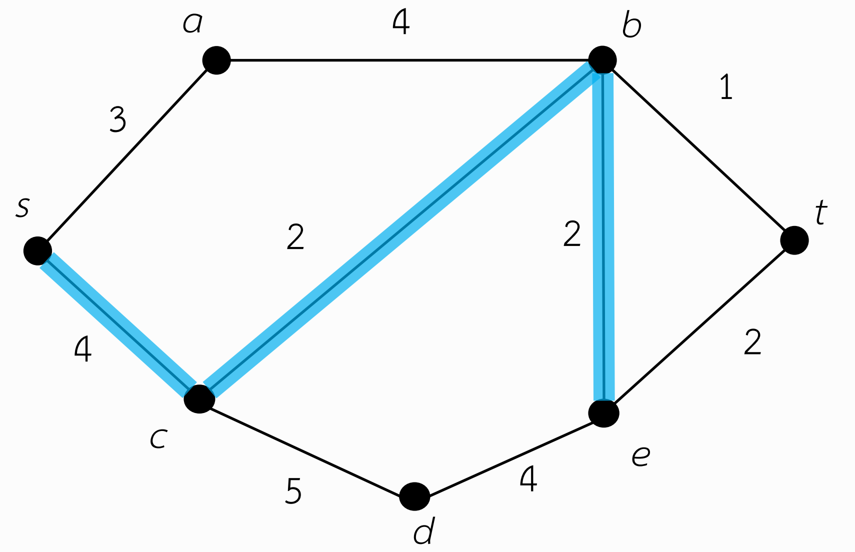
*ข้อ 3 และ 4 สำคัญ



ทบทวนคาบที่แล้ว (Recap)

ตารางบันทึกเส้นทางที่สั้นที่สุด

จุดยอด v	ระยะทาง, $dist(v)$	จุดยอดก่อนหน้า, $prev(v)$
s	0	null
a	3	s
b	6	c
c	4	s
d	9	c
e	8	b
t	7	b



ตารางนี้บอกเส้นทางและระยะทางที่สั้นที่สุดจาก s ไปถึง จุดยอด a อื่นๆ, a ≠ s โดยเส้นทางไปถึง a สามารถดูได้จากจุดก่อนหน้าของ a ย้อนกลับไปถึง s เช่น: ระยะทางที่สั้นที่สุดจาก s ไป e ให้ดูย้อนจาก prev(e) -> prev(b) -> prev(c) -> s จะได้เส้นทาง s -> c -> b -> e

เนื้อหาปลายภาค - Overview

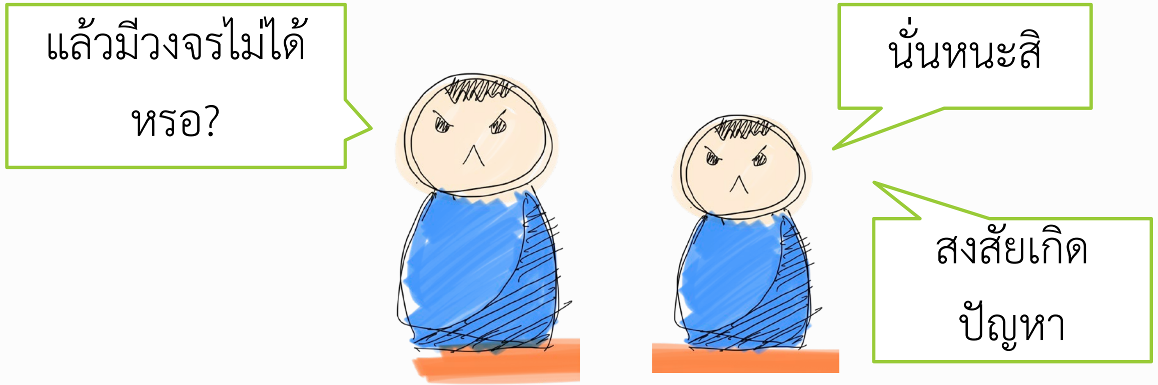
- ต้นไม้, Tree
- กราฟทิศทาง, Directed graph
- ข่ายงาน และการประยุกต์ใช้ข่ายงาน, Network
- การหาเส้นที่สั้นที่สุด Shortest path, Dijkstra’s algorithm
- **การหาต้นไม้ทอดข้ามที่น้อยที่สุด Kruskal’s algorithm & Prim’s algorithm** TODAY

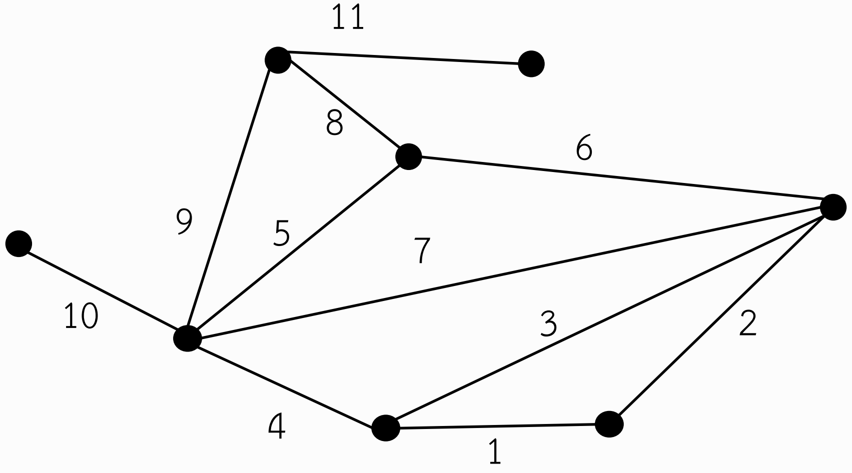
ต้นไม้ทอดข้าม, spanning tree

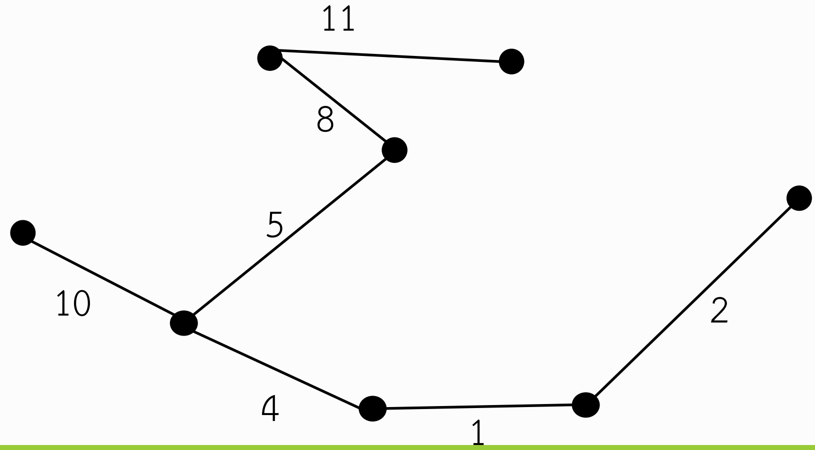
วงจร (circuit) คือ การเดิน หรือ วิถี ที่ จุดยอดเริ่มต้นและจุดยอดปลายทางเป็นจุดยอดเดียวกัน

ต้นไม้ทอดข้าม หรือ spanning tree คือ กราฟเชิงเดี่ยวของกราฟ G ที่เป็นต้นไม้และมีจุดยอดของ G อยู่ครบทุกจุดยอด

จุดประสงค์หลักๆของต้นไม้ทอดข้ามคือ ต้องการต้นไม้ต้นหนึ่งที่จุดยอดใดๆ สามารถเดินทาง หรือ มีเส้นทาง ไปหาจุดยอดอื่นๆทุกจุดได้ *และด้วยคุณสมบัติของต้นไม้นั้นการเดินทางใดๆในต้นไม้จะไม่เกิด“วงจร”





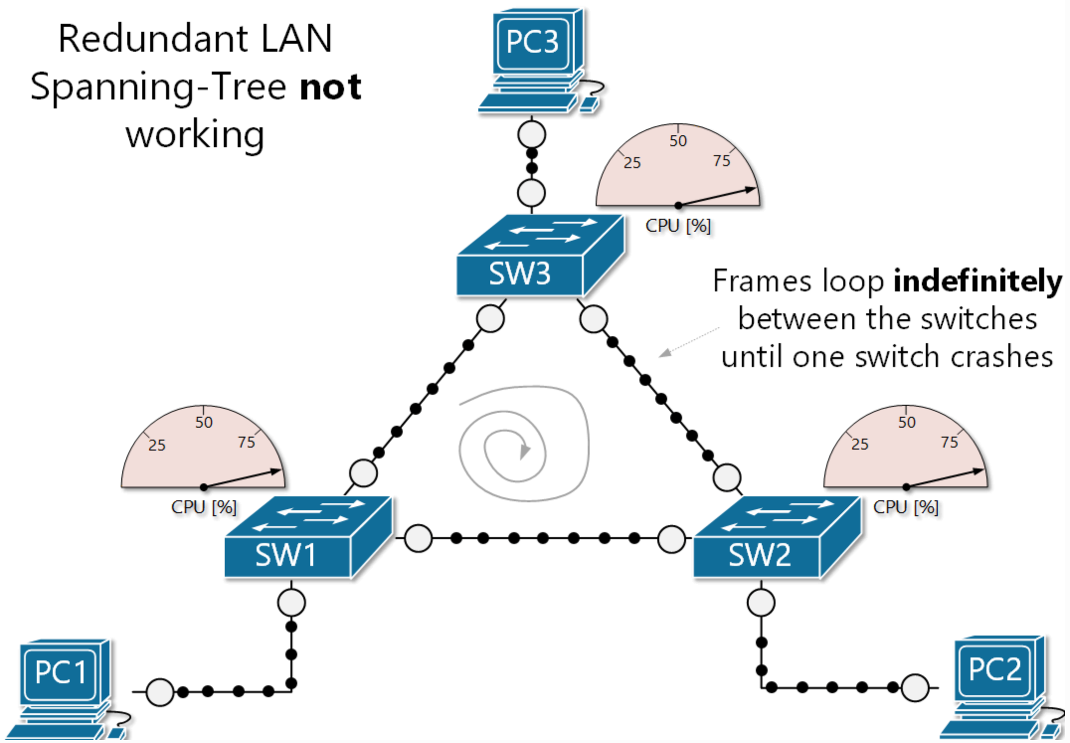


ต้นไม้ทอดข้าม, spanning tree

การประยุกต์ใช้ในเชิง Computer Network จะมีกระบวนการที่เรียกว่า Broadcasting ซึ่งหนึ่งในวัตถุประสงค์ของกระบวนนี้คือ ต้องการให้อุปกรณ์อื่นๆนั้นรับรู้ถึงการมีตัวตนของอุปกรณ์นั้นๆ ตัวข้อมูลที่ส่งระหว่างอุปกรณ์จะเรียกว่า Broadcasting message

เมื่อใครได้รับตัวข้อมูลนี้จะทำการส่งต่อ หรือ repeat ข้อความนี้ไปยังอุปกรณ์อื่นๆ แต่จะเห็นได้ว่าถ้า network นั้นถูกต่อให้อยู่ในรูปแบบตามแผนภาพด้านขวา จะเกิดการส่งข้อความเป็นลูปและไม่มีทางจบสิ้น

ปัญหาที่ตามมาคือ ระบบล่ม, CPU เกิน, ความร้อน ฯลฯ

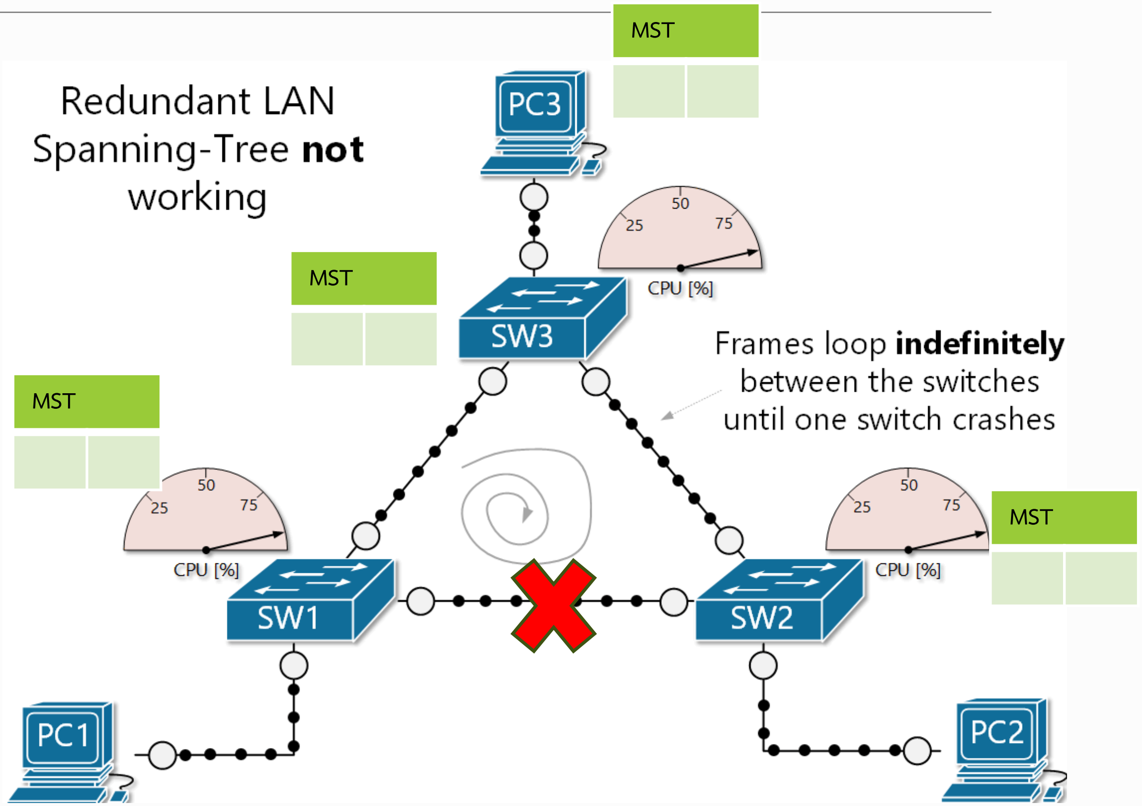


REF: Why do we need Spanning-Tree? | NetworkAcademy.io

ต้นไม้ทอดข้าม, spanning tree

วิธีแก้ปัญหาคือใช้ ต้นไม้ทอดข้าม หรือ spanning tree ซึ่งจะทำให้การส่ง Broadcasting ข้อความไม่เกิดปัญหา (มีวงจร) อีกต่อไป

โดยแต่ละอุปกรณ์จะคำนวณตาราง spanning tree และพ่วงความรู้นี้ไปพร้อมกับข้อความ ตารางนี้จะกำหนดเส้นทางที่อุปกรณ์นั้นส่งได้ เป็นการรับประกันให้การส่งข้อความไม่เกิด loop นั่นเอง

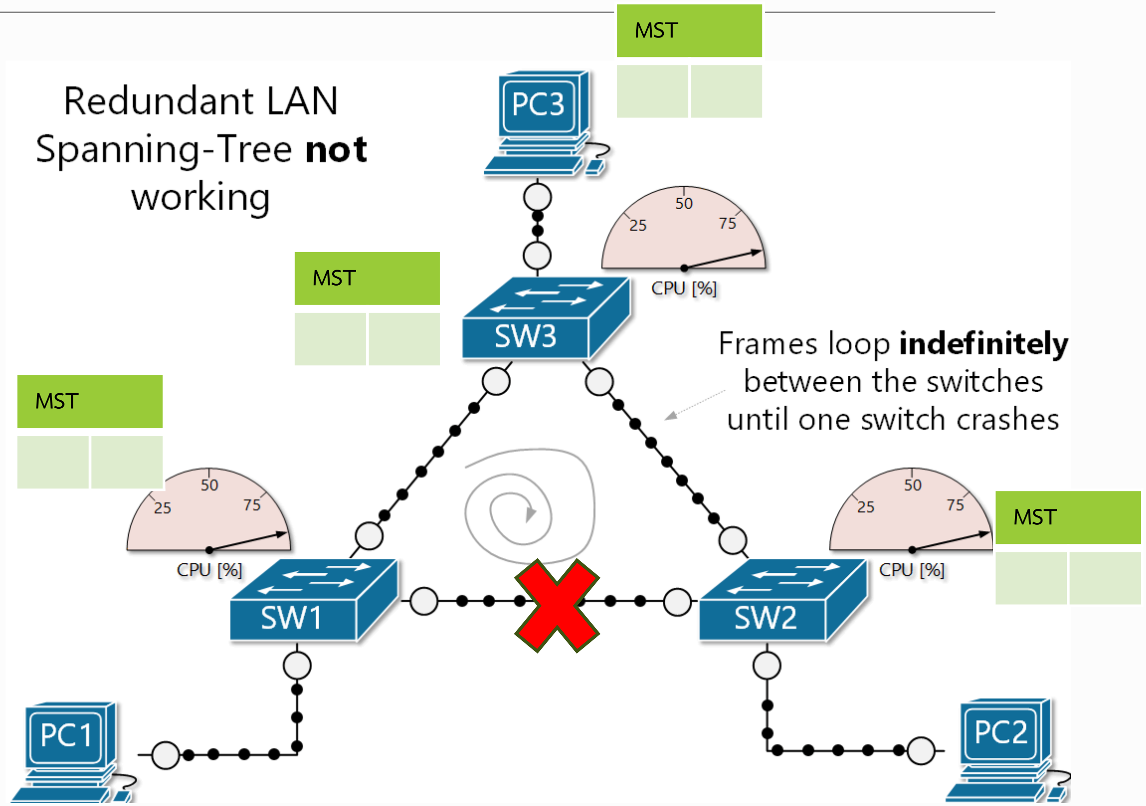


REF: Why do we need Spanning-Tree? | NetworkAcademy.io

ต้นไม้ทอดข้ามที่เล็กที่สุด, minimum spanning tree

นอกเหนือจากจุดมุ่งหมายแรกที่ ต้องการหาต้นไม้ทอดข้ามที่จุดต้นทางสามารถเดินไปยังจุดยอดใดๆโดยไม่เป็นวงจรแล้ว อีกจุดมุ่งหมายหนึ่งที่สำคัญพอๆกันคือต้องการให้ต้นไม้ทอดข้ามนั้นเป็นเส้นทางที่เล็กที่สุดด้วย เพื่อให้การทอดข้ามนั้นมีประสิทธิภาพ, ประหยัดพลังงาน, และ ใช้ทรัพยากรณ์น้อยที่สุดด้วย เราจะเรียกต้นไม้ทอดข้ามนั้นว่า "**ต้นไม้ทอดข้ามที่เล็กที่สุด**" หรือ minimum spanning tree (MST)

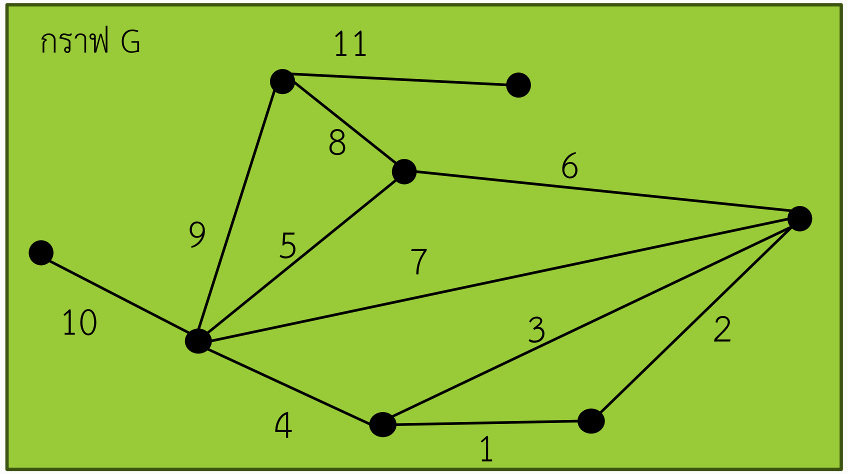
นิยาม: ต้นไม้ทอดข้ามที่มีผลรวมของน้ำหนักน้อยที่สุด



REF: Why do we need Spanning-Tree? | NetworkAcademy.io

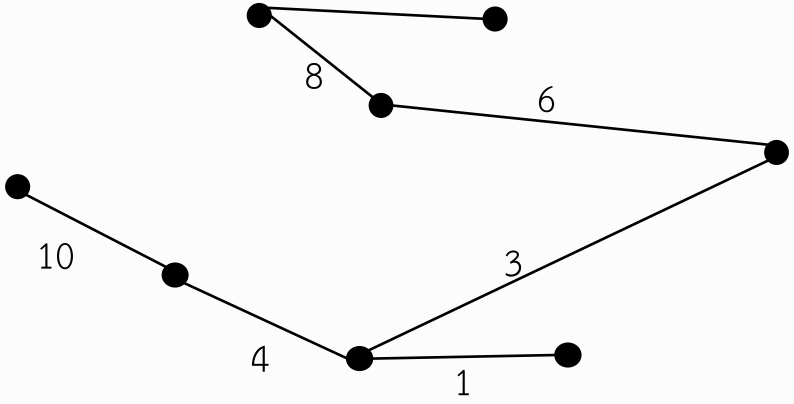
ต้นไม้ทอดข้ามที่เล็กที่สุด, minimum spanning tree

ตัวอย่าง

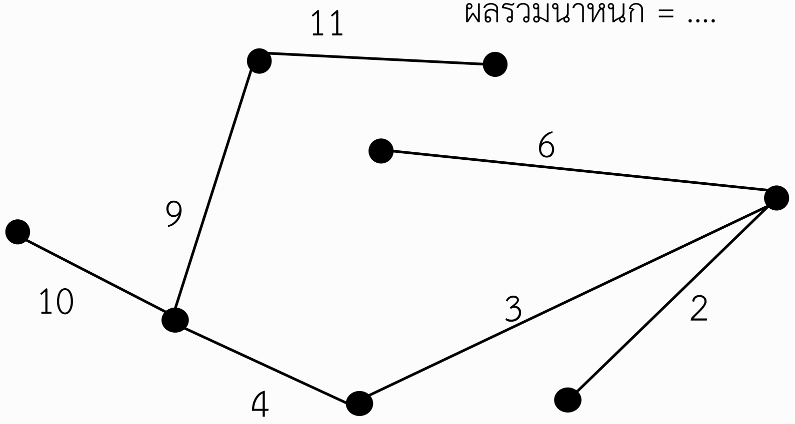


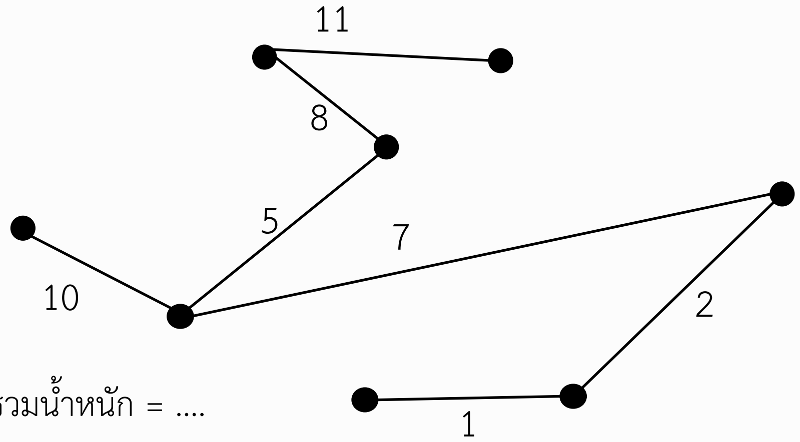
ต้นไม้ใดเป็นต้นไม้ทอดข้ามที่เล็กที่สุด (minimum spanning tree)

ผลรวมน้ำหนัก = ...



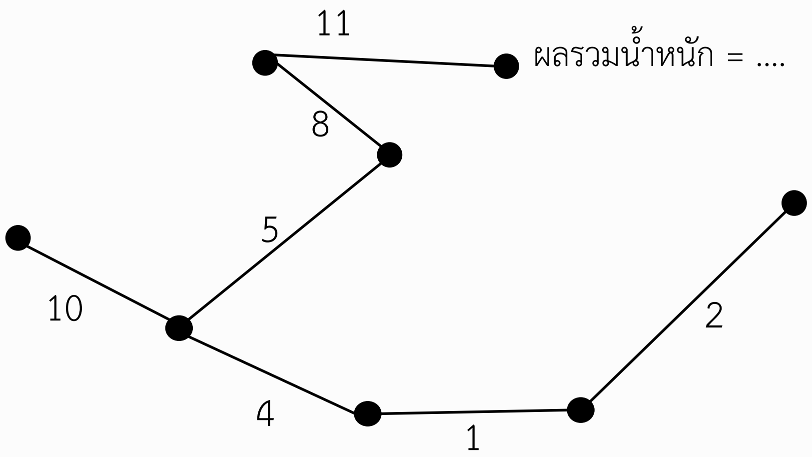
ผลรวมน้ำหนัก = ...





ผลรวมน้ำหนัก = ...

ผลรวมน้ำหนัก = ...



ต้นไม้ทอดข้ามที่เล็กที่สุด, minimum spanning tree

จะเห็นได้ว่าจริงๆแล้วต้นไม้ทอดข้ามของกราฟใดๆสามารถมีได้หลายรูปแบบมากๆ และจะเป็นเรื่องยากที่จะทำการตรวจสอบทุกๆความเป็นไปได้ เพื่อที่จะหาว่าต้นไม้ทอดข้ามแบบใดเป็นต้นไม้ทอดข้ามที่เล็กที่สุด

อัลกอริทึมที่จะช่วยในการหาต้นไม้ทอดข้ามที่เล็กที่สุดมีอยู่ 2 วิธี:

1. อัลกอริทึมของครูสกัล, Kruskal’s Algorithm

2. อัลกอริทึมของพริม, Prim’s Algorithm

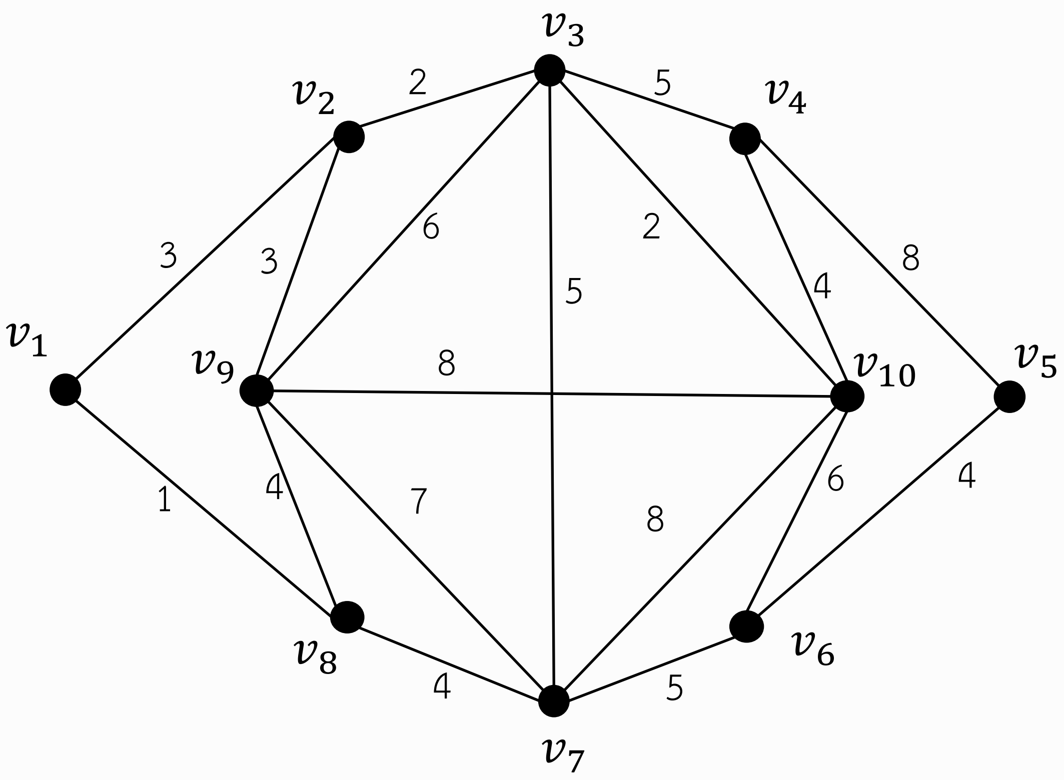
ผลลัพธ์ที่ได้: ต้นไม้ทอดข้ามที่เล็กที่สุดโดยที่ผลรวมของน้ำหนักของต้นไม้มีค่าน้อยที่สุด

อัลกอริทึมของครูสกัล, Kruskal's Algorithm

ให้ $G(V,E)$ เป็นกราฟที่มี n จุดยอด และ T เป็นต้นไม้แบบทอดข้าม

1. ให้ $T \coloneqq \emptyset$ และ $A \coloneqq E$

2. ถ้าจำนวนสมาชิกของ T น้อยกว่า $n-1$ ให้ทำ
   - 2.1 หา e ที่เป็นเส้นเชื่อมที่มีน้ำหนักน้อยที่สุดใน A
   - 2.2 $T \coloneqq T \cup \{e\}$ ถ้า $T \cup \{e\}$ ไม่ก่อให้เกิดวงจร
   - 2.3 ลบ e ออกจาก A



อัลกอริทึมของครูสกัล, Kruskal’s Algorithm

ลำดับ	เส้นเชื่อม	น้ำหนัก	การเลือก
1	v_1v_8	1	เลือก

ขั้นตอน (1.)

$T = \{\}$

$A = E$ เส้นเชื่อมทุกเส้นในกราฟ

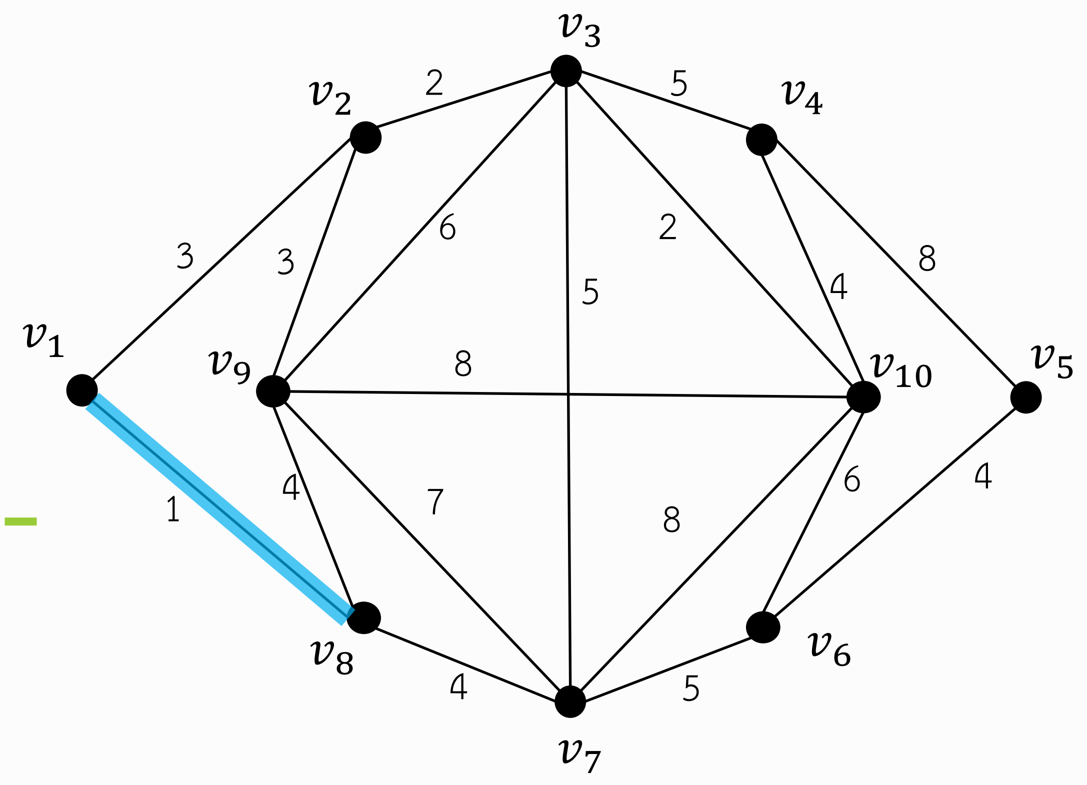
ขั้นตอน (2.1, 2.2, และ 2.3)

$T = \{v_1v_8\}$

$A = E - \{v_1v_8\}$

คำอธิบาย

1. ให้ $T \coloneqq \emptyset$ และ $A \coloneqq E$
2. ถ้าจำนวนสมาชิกของ T น้อยกว่า $n-1$ ให้ทำ
   - 2.1 หา e ที่เป็นเส้นเชื่อมที่มีน้ำหนักน้อยที่สุดใน A
   - 2.2 $T \coloneqq T \cup \{e\}$ ถ้า $T \cup \{e\}$ ไม่ก่อให้เกิดวงจร
   - 2.3 ลบ e ออกจาก A



อัลกอริทึมของครูสกัล, Kruskal’s Algorithm

ลำดับ	เส้นเชื่อม	น้ำหนัก	การเลือก
1	v_1v_8	1	เลือก
2	v_2v_3	2	เลือก
3	v_3v_{10}	2	เลือก

ขั้นตอนก่อนหน้า

$T = \{v_1v_8\}$

$A = E - \{v_1v_8\}$

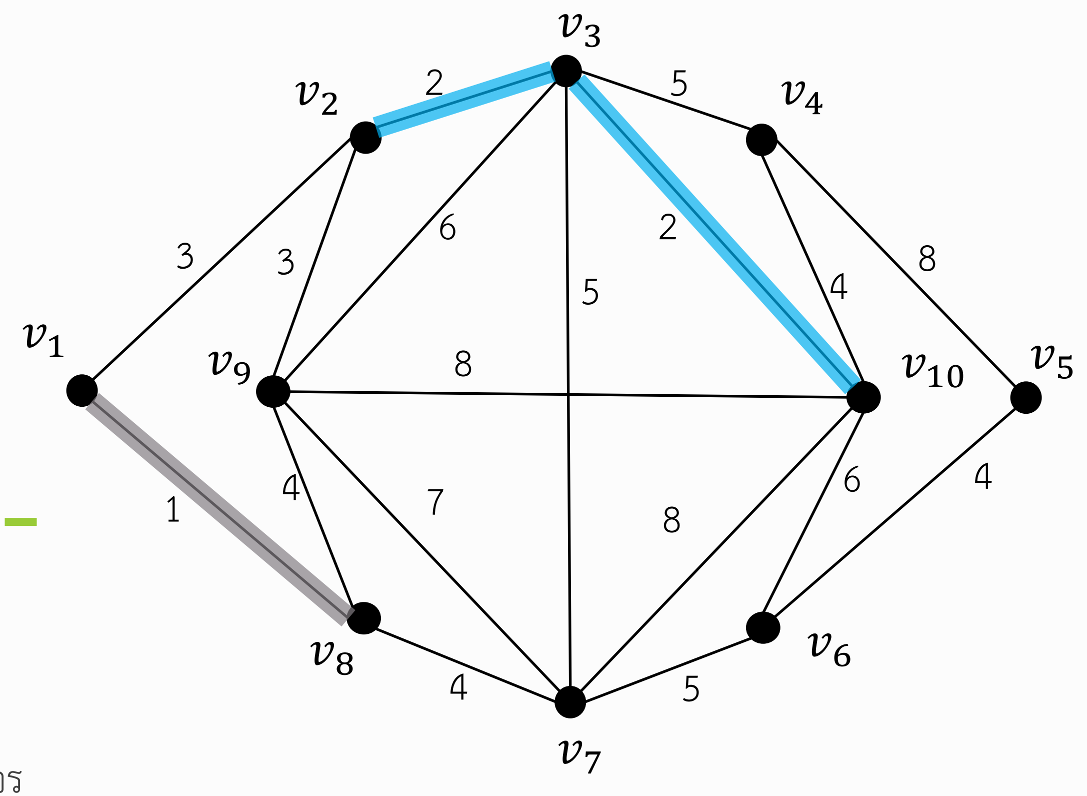
ขั้นตอน (2.1, 2.2, และ 2.3)

$T = \{v_1v_8, v_2v_3, v_3v_{10}\}$

$A = E - \{v_1v_8, v_2v_3, v_3v_{10}\}$

คำอธิบาย

2. ถ้าจำนวนสมาชิกของ T น้อยกว่า $n-1$ ให้ทำ
   - 2.1 หา e ที่เป็นเส้นเชื่อมที่มีน้ำหนักน้อยที่สุดใน A
   - 2.2 $T := T \cup \{e\}$ ถ้า $T \cup \{e\}$ ไม่ก่อให้เกิดวงจร
   - 2.3 ลบ e ออกจาก A



อัลกอริทึมของครูสกัล, Kruskal's Algorithm

ลำดับ	เส้นเชื่อม	น้ำหนัก	การเลือก
1	v_1v_8	1	เลือก
2	v_2v_3	2	เลือก
3	v_3v_{10}	2	เลือก
4	v_1v_2	3	เลือก
5	v_2v_9	3	เลือก

ขั้นตอนก่อนหน้า

$T = \{v_1v_8, v_2v_3, v_3v_{10}\}$

$A = E - \{v_1v_8, v_2v_3, v_3v_{10}\}$

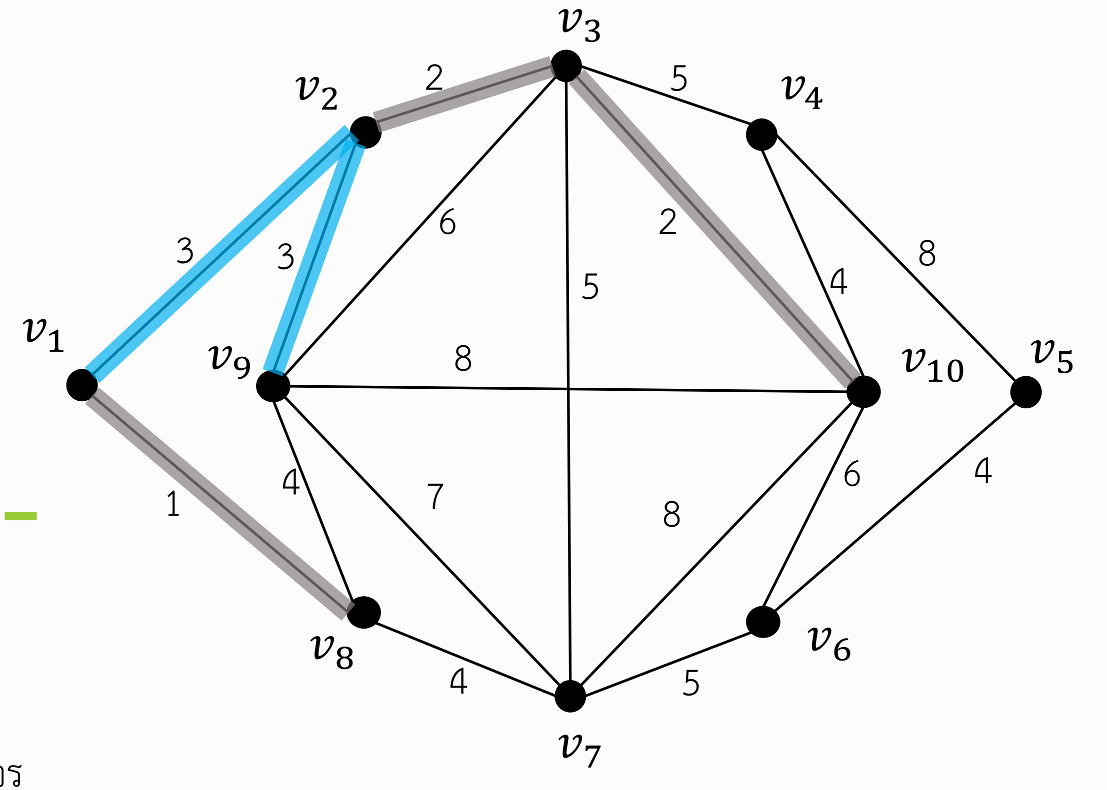
ขั้นตอน (2.1, 2.2, และ 2.3)

$$T = \begin{Bmatrix} v_1v_8, v_2v_3, v_3v_{10} \\ v_1v_2, v_2v_9 \end{Bmatrix}$$

$$A = E - \begin{Bmatrix} v_1v_8, v_2v_3, v_3v_{10} \\ v_1v_2, v_2v_9 \end{Bmatrix}$$

คำอธิบาย

2. ถ้าจำนวนสมาชิกของ T น้อยกว่า $n-1$ ให้ทำ
   - 2.1 หา e ที่เป็นเส้นเชื่อมที่มีน้ำหนักน้อยที่สุดใน A
   - 2.2 $T := T \cup \{e\}$ ถ้า $T \cup \{e\}$ ไม่ก่อให้เกิดวงจร
   - 2.3 ลบ e ออกจาก A



อัลกอริทึมของครูสกัล, Kruskal's Algorithm

ลำดับ	เส้นเชื่อม	น้ำหนัก	การเลือก
1	v_1v_8	1	เลือก
2	v_2v_3	2	เลือก
3	v_3v_{10}	2	เลือก
4	v_1v_2	3	เลือก
5	v_2v_9	3	เลือก
6	v_4v_{10}	4	เลือก
7	v_5v_6	4	เลือก
8	v_7v_8	4	เลือก
9	v_8v_9	4	ไม่เลือก

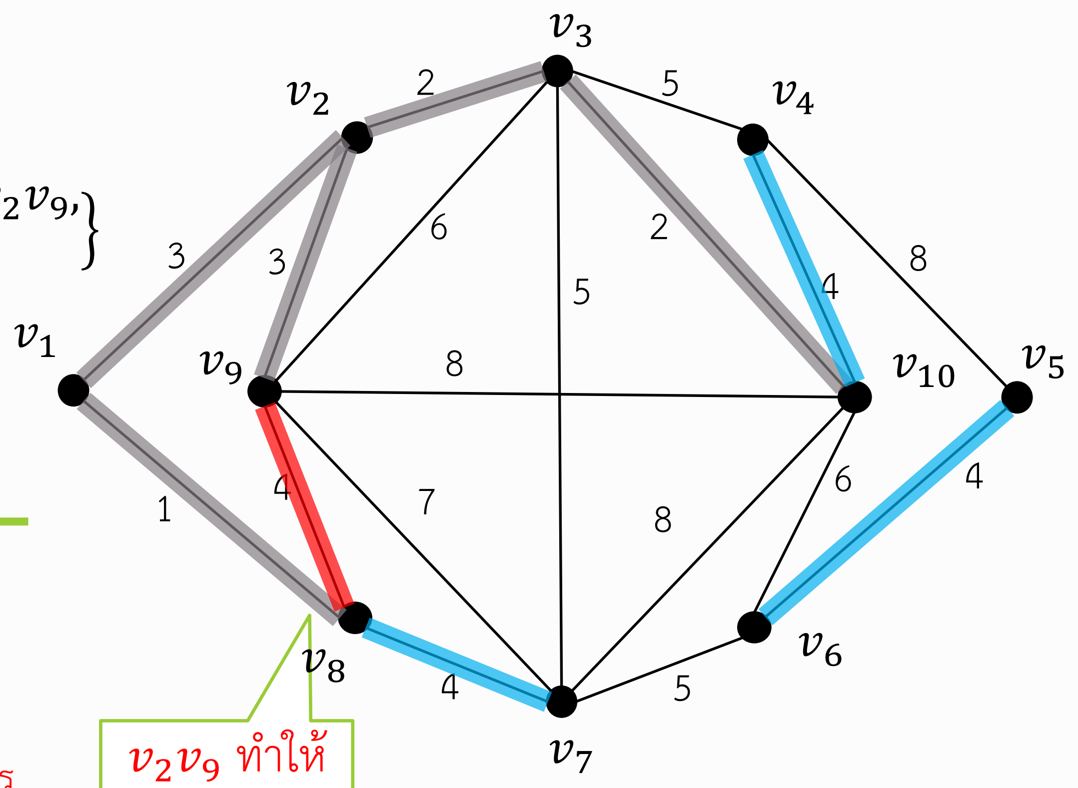
ขั้นตอน (2.1, 2.2, และ 2.3)

$$T = \left\{ \begin{matrix} v_1v_8, v_2v_3, v_3v_{10}, v_1v_2, v_2v_9, \\ v_4v_{10}, v_5v_6, v_7v_8 \end{matrix} \right\}$$

$$A = E - \left\{ \begin{matrix} v_1v_8, v_2v_3, v_3v_{10}, v_1v_2, v_2v_9, \\ v_4v_{10}, v_5v_6, v_7v_8 \end{matrix} \right\}$$

คำอธิบาย

2. ถ้าจำนวนสมาชิกของ T น้อยกว่า $n-1$ ให้ทำ
- 2.1 หา e ที่เป็นเส้นเชื่อมที่มีน้ำหนักน้อยที่สุดใน A
- 2.2 $T := T \cup \{e\}$ ถ้า $T \cup \{e\}$ ไม่ก่อให้เกิดวงจร
- 2.3 ลบ e ออกจาก A



v_2v_9 ทำให้เกิดวงจร

อัลกอริทึมของครูสกัล, Kruskal's Algorithm

ลำดับ	เส้นเชื่อม	น้ำหนัก	การเลือก
1	v_1v_8	1	เลือก
2	v_2v_3	2	เลือก
3	v_3v_{10}	2	เลือก
4	v_1v_2	3	เลือก
5	v_2v_9	3	เลือก
6	v_4v_{10}	4	เลือก
7	v_5v_6	4	เลือก
8	v_7v_8	4	เลือก
9	v_8v_9	4	ไม่เลือก
10	v_3v_4	5	ไม่เลือก
11	v_3v_7	5	ไม่เลือก
12	v_6v_7	5	เลือก

ขั้นตอน (2.1, 2.2, และ 2.3)

$$T = \left\{\begin{matrix} v_1v_8, v_2v_3, v_3v_{10}, v_1v_2, v_2v_9, \\ v_4v_{10}, v_5v_6, v_6v_7 \end{matrix}\right\}$$

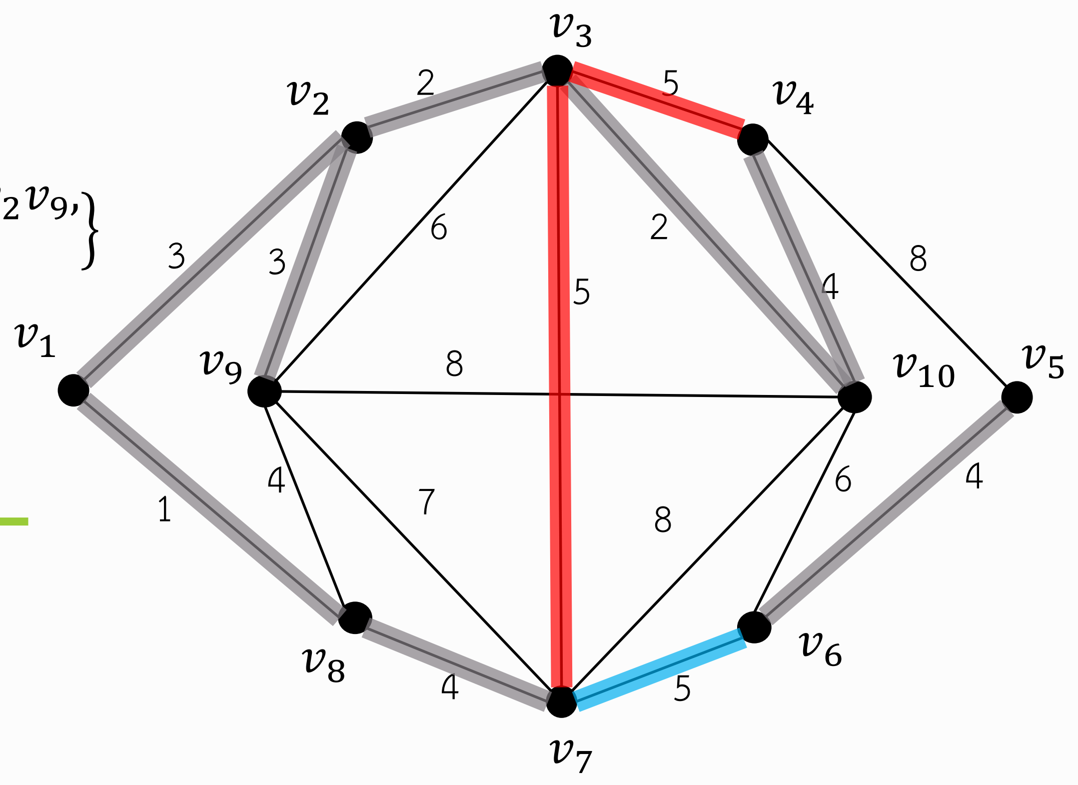
$$A = E - \left\{\begin{matrix} v_1v_8, v_2v_3, v_3v_{10}, v_1v_2, v_2v_9, \\ v_4v_{10}, v_5v_6, v_6v_7 \end{matrix}\right\}$$

คำอธิบาย

2. ถ้าจำนวนสมาชิกของ T น้อยกว่า $n-1$ ให้ทำ

(หยุดทำงาน เส้นเชื่อม = 9)

- 2.1 หา e ที่เป็นเส้นเชื่อมที่มีน้ำหนักน้อยที่สุดใน A
- 2.2 $T := T \cup \{e\}$ ถ้า $T \cup \{e\}$ ไม่ก่อให้เกิดวงจร
- 2.3 ลบ e ออกจาก A



อัลกอริทึมของครูสกัล, Kruskal's Algorithm

ลำดับ	เส้นเชื่อม	น้ำหนัก	การเลือก
1	v_1v_8	1	เลือก
2	v_2v_3	2	เลือก
3	v_3v_{10}	2	เลือก
4	v_1v_2	3	เลือก
5	v_2v_9	3	เลือก
6	v_4v_{10}	4	เลือก
7	v_5v_6	4	เลือก
8	v_7v_8	4	เลือก
9	v_8v_9	4	ไม่เลือก
10	v_3v_4	5	ไม่เลือก
11	v_3v_7	5	ไม่เลือก
12	v_6v_7	5	เลือก

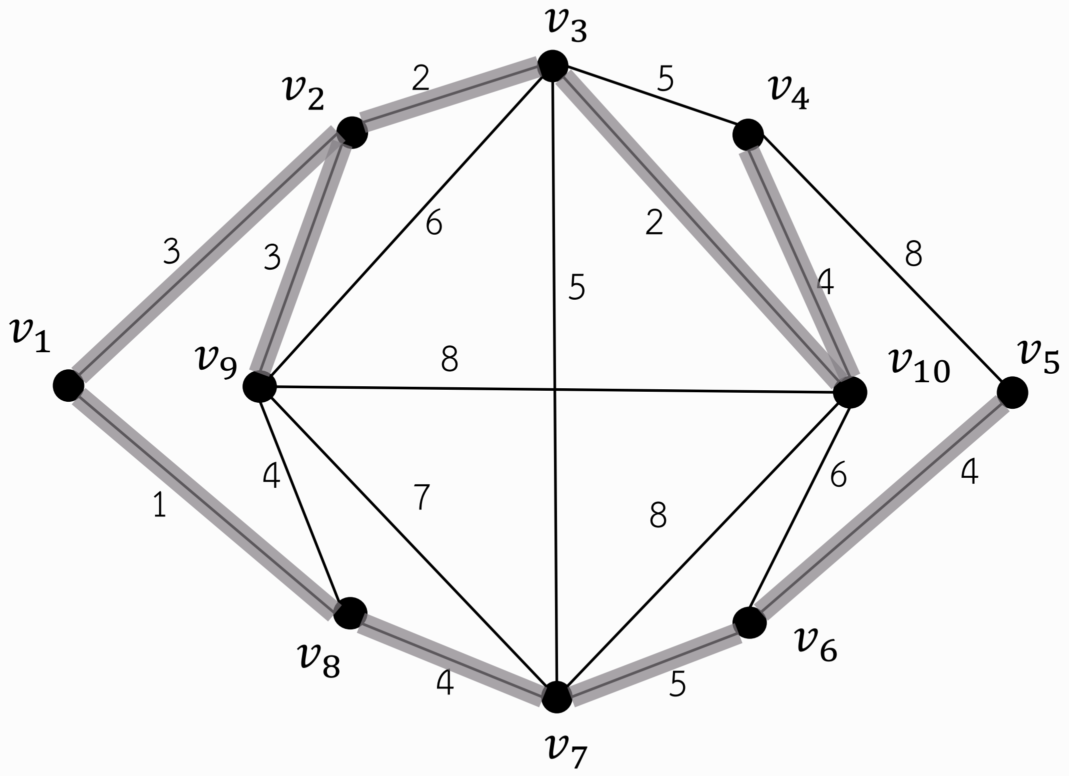
ขั้นตอน (2.1, 2.2, และ 2.3)

$$T = \left\{\begin{matrix} v_1v_8, v_2v_3, v_3v_{10}, v_1v_2, v_2v_9, \\ v_4v_{10}, v_5v_6, v_6v_7 \end{matrix}\right\}$$

ผลลัพธ์ T ที่ได้จากการทำอัลกอริทึมของครูสกัล คือ ต้นไม้ที่เป็นต้นไม้ทอดข้ามที่สั้นที่สุด ซึ่งจะมีน้ำหนักรวมน้อยที่สุดเช่นกัน น้ำหนักรวมของต้นไม้ทอดข้ามนี้มีค่าเท่ากับ 28

โดยน้ำหนักรวมของต้นไม้สามารถดูได้จาก

1. น้ำหนักรวมของเส้นเชื่อมในต้นไม้ทอดข้าม หรือ
2. น้ำหนักของเส้นเชื่อมที่ถูกเลือกจากตาราง

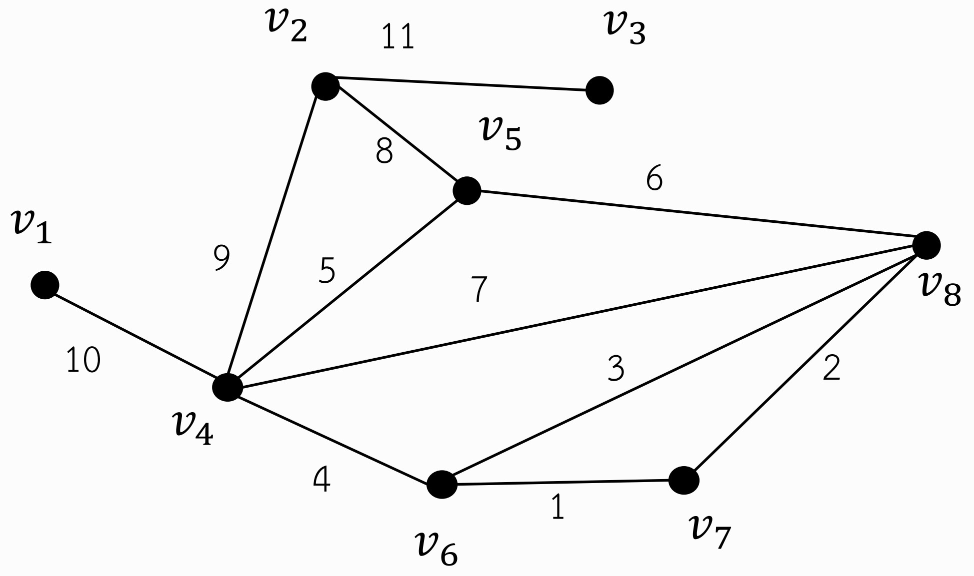


แบบฝึกหัด

จงใช้อัลกอริทึมของครูสกัล, Kruskal’s Algorithm, โดยใช้ตารางด้านซ้ายมือและหาต้นไม้ทอดข้ามที่สั้นที่สุดของกราฟต่อไปนี้

ลำดับ	เส้นเชื่อม	น้ำหนัก	การเลือก

$T = \{ \qquad \}$

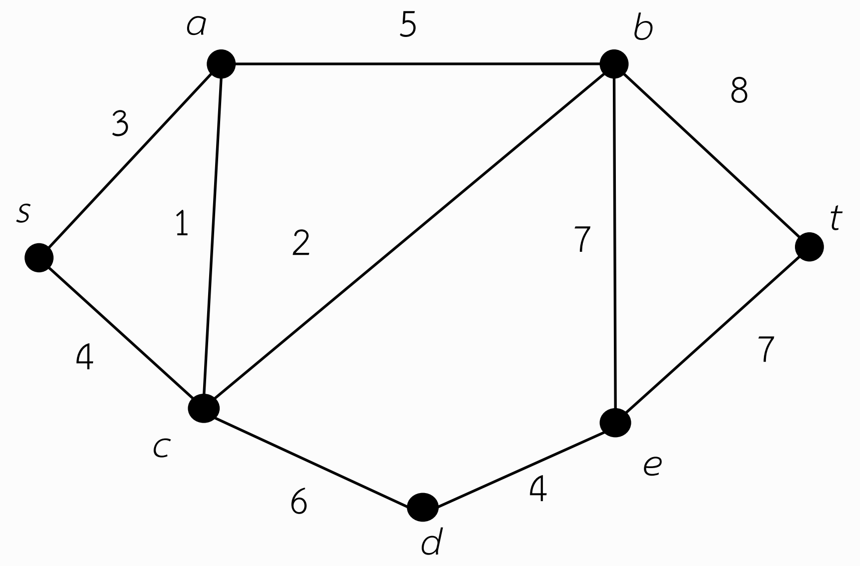


แบบฝึกหัด

จงใช้อัลกอริทึมของครูสกัล, Kruskal's Algorithm, เติมตารางด้านซ้ายมือและหาต้นไม้ทอดข้ามที่สั้นที่สุดของกราฟต่อไปนี้

ลำดับ	เส้นเชื่อม	น้ำหนัก	การเลือก

$T = \{ \qquad \}$

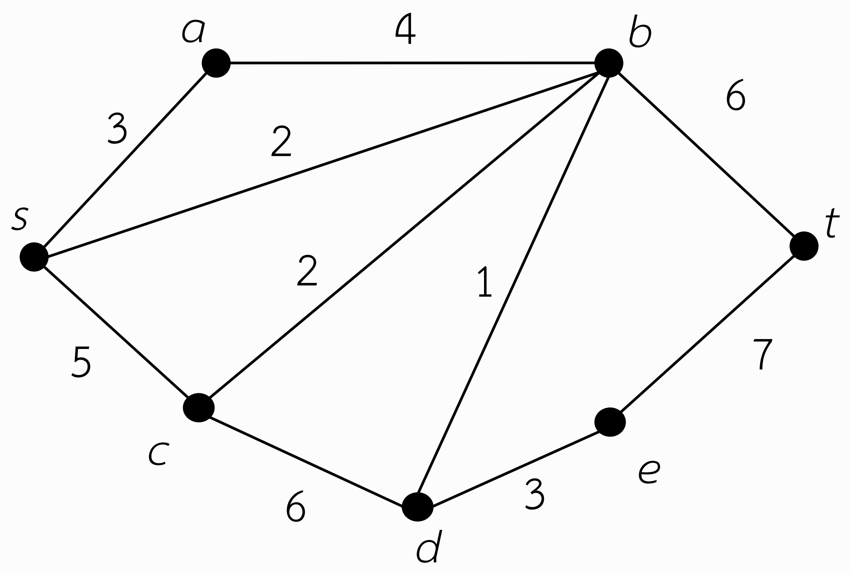


แบบฝึกหัด

จงใช้อัลกอริทึมของครูสกัล, Kruskal’s Algorithm, เติมตารางด้านซ้ายมือและหาต้นไม้ทอดข้ามที่สั้นที่สุดของกราฟต่อไปนี้

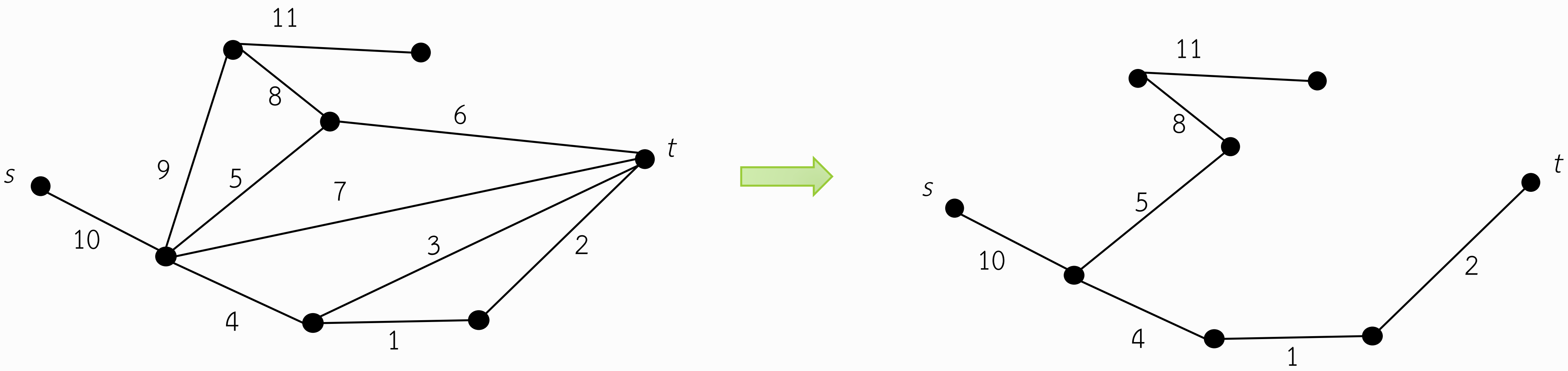
ลำดับ	เส้นเชื่อม	น้ำหนัก	การเลือก

$T = \{ \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad \}$



อัลกอริทึมของพริม, Prim’s Algorithm

อัลกอริทึมของพริม นั้นเป็นอีกอัลกอริทึมที่ใช้หาต้นไม้ทอดข้ามที่เล็กที่สุด และสิ่งที่จำเป็นของอัลกอริทึมนี้คือต้องการกราฟน้ำหนัก แต่อัลกอริทึมของพริมนั้นแตกต่างจากของครูสกัลตรงที่ต้องมีจุดเริ่มต้นมาด้วย



อัลกอริทึมของพริม, Prim's Algorithm

ถ้าให้ $G(V,E)$ เป็นกราฟที่มีจุดยอด n จุดยอด ให้ T เป็นต้นไม้แบบทอดข้าม จุดยอด v คือจุดยอดเริ่มต้น เซต N เก็บจุดยอดที่อยู่ในต้นไม้แบบทอดข้าม และเซต A เก็บจุดยอดที่ยังไม่ได้อยู่ในต้นไม้แบบทอดข้าม

1. ให้ $T \coloneqq \emptyset,\ N = \{v\}$ และ $A \coloneqq V - \{v\}$

2. ถ้าจำนวนสมาชิกของ T น้อยกว่า $n-1$ ให้ทำ
   - 2.1 หาจุดยอด u ใน A ที่ประชิดกับจุดยอดใน w ใน N และเส้นเชื่อม uw เป็นเส้นเชื่อมที่มีน้ำหนักน้อยที่สุด (ในกรณีที่มีน้ำหนักเท่ากันให้เลือกมาเพียง 1 เส้นเชื่อม)
   - 2.2 $T \coloneqq T \cup \{uw\}$ และ $N \coloneqq N \cup \{u\}$
   - 2.3 ลบ u ออกจาก A

V คือ เส้นเชื่อมทุกเส้นในกราฟ

หาต้นไม้ทอดข้ามที่เล็กที่สุดของกราฟ ด้วยอัลกอริทึมของพริม ให้จุดเริ่มต้นที่ v_{10}

ขั้นตอน (1.)

$T = \{ \quad \}, N = \{v_{10}\}$
$A = V - \{v_{10}\}$

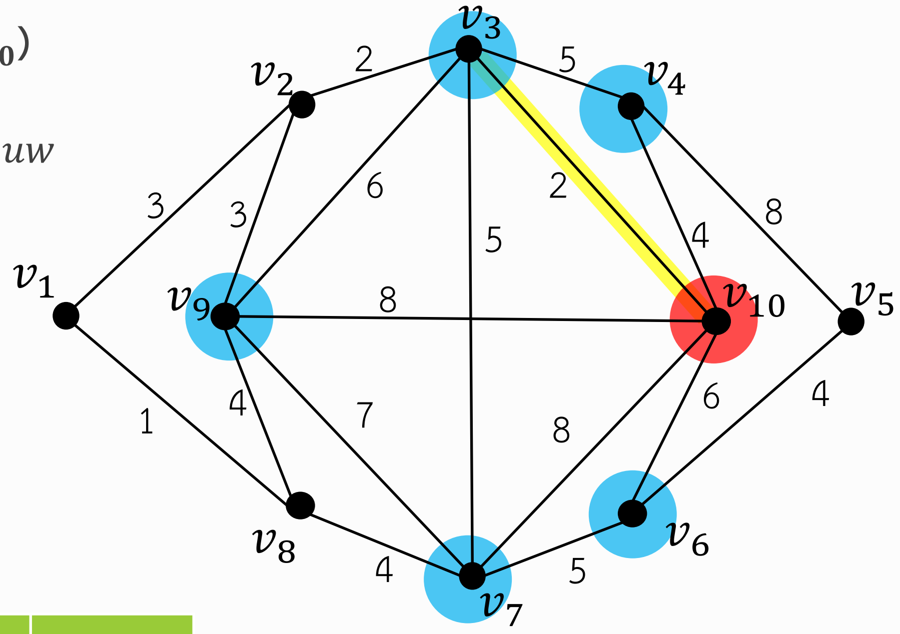
ขั้นตอน (2.1, 2.2, และ 2.3)

$T = \{v_3 v_{10}\}, N = \{v_{10}, v_3\}$
$u = v_3$
$A = V - \{v_{10}, v_3\}$

คำอธิบาย

1. ให้ $T := \emptyset,\ N = \{v\}$ และ $A := V - \{v\}$ (v = จุดเริ่มต้น v_{10})
2. ถ้าจำนวนสมาชิกของ T น้อยกว่า $n - 1$ ให้ทำ
   - 2.1 หาจุดยอด u ใน A ที่ประชิดกับจุดยอดใน w ใน N และเส้นเชื่อม uw เป็นเส้นเชื่อมที่มีน้ำหนักน้อยที่สุด
   - 2.2 $T := T \cup \{uw\}$ และ $N := N \cup \{u\}$
   - 2.3 ลบ u ออกจาก A

u ที่เป็นไปได้ $\{v_3, v_4, v_6, v_7, v_9\}$
เลือกให้ $u = v_3$ เพราะเส้นเชื่อม uw มีน้ำหนักน้อยสุด



N	v_1	v_2	v_3	v_4	v_5	v_6	v_7	v_8	v_9	v_{10}
v_{10}	∞	∞	$2, v_{10}$	$4, v_{10}$	∞	$6, v_{10}$	$8, v_{10}$	∞	$8, v_{10}$	$-$

V คือ เส้นเชื่อมทุกเส้นในกราฟ

หาต้นไม้ทอดข้ามที่เล็กที่สุดของกราฟ ด้วยอัลกอริทึมของพริม ให้จุดเริ่มต้นที่ v_{10}

ขั้นตอนก่อนหน้า

$T = \{v_3v_{10}\}, N = \{v_{10}, v_3\}$

$u = v_3$

$A = V - \{v_{10}, v_3\}$

ขั้นตอน (2.1, 2.2, และ 2.3)

$T = \{v_3v_{10}, v_2v_3\}$

$N = \{v_{10}, v_3, v_2\}$

$u = v_2$

$A = V - \{v_{10}, v_3, v_2\}$

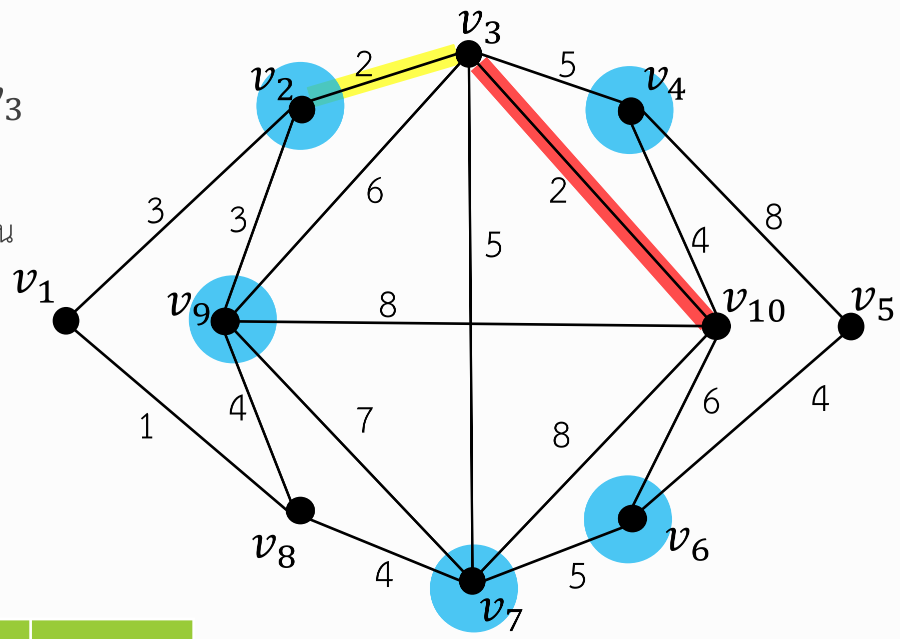
คำอธิบาย

จะต้องปรับค่าน้ำหนักน้อยที่สุดระหว่างจุดที่อยู่ในเซต A และเซต N เนื่องจากมีจุดใหม่ v_3 ในเซต N เช่นจุดยอด v_2 ที่สามารถเชื่อมผ่าน v_3

2. ถ้าจำนวนสมาชิกของ T น้อยกว่า $n-1$ ให้ทำ
   - 2.1 หาจุดยอด u ใน A ที่ประชิดกับจุดยอดใน w ใน N และเส้นเชื่อม uw เป็นเส้นเชื่อมที่มีน้ำหนักน้อยที่สุด

     u ที่เป็นไปได้ $\{v_2, v_4, v_6, v_7, v_9\}$

     เลือกให้ $u = v_2$ เพราะเส้นเชื่อม uw มีน้ำหนักน้อยสุด
   - 2.2 $T := T \cup \{uw\}$ และ $N := N \cup \{u\}$
   - 2.3 ลบ u ออกจาก A



N	v_1	v_2	v_3	v_4	v_5	v_6	v_7	v_8	v_9	v_{10}
v_{10}	∞	∞	$2, v_{10}$	$4, v_{10}$	∞	$6, v_{10}$	$8, v_{10}$	∞	$8, v_{10}$	$-$
v_3	∞	$2, v_3$	$-$	$4, v_{10}$	∞	$6, v_{10}$	$5, v_3$	∞	$6, v_3$	$-$

V คือ เส้นเชื่อมทุกเส้นในกราฟ

หาต้นไม้ทอดข้ามที่เล็กที่สุดของกราฟ ด้วยอัลกอริทึมของพริม ให้จุดเริ่มต้นที่ v_{10}

ขั้นตอน (2.1, 2.2, และ 2.3)

$T = \{v_3v_{10}, v_2v_3, v_2v_9\}$
$N = \{v_{10}, v_3, v_2, v_9\}$
$u = v_9$
$A = V - \{v_{10}, v_3, v_2, v_9\}$

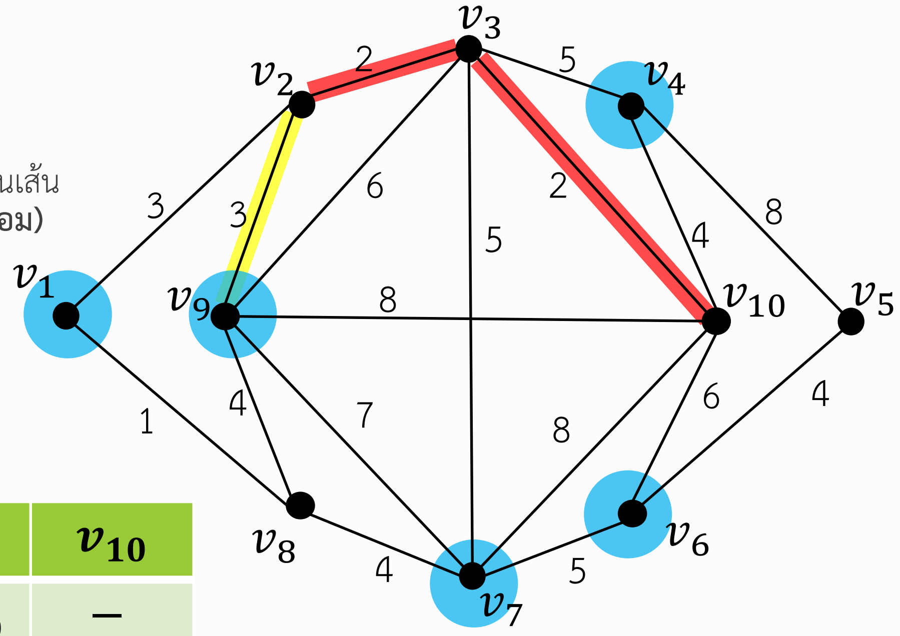
คำอธิบาย
จะต้องปรับค่าน้ำหนักน้อยที่สุดระหว่างจุดที่อยู่ในเซต A และเซต N

2. ถ้าจำนวนสมาชิกของ T น้อยกว่า $n-1$ ให้ทำ

- 2.1 หาจุดยอด u ใน A ที่ประชิดกับจุดยอดใน w ใน N และเส้นเชื่อม uw เป็นเส้นเชื่อมที่มีน้ำหนักน้อยที่สุด **(ในกรณีที่มีน้ำหนักเท่ากันให้เลือกมาเพียง 1 เส้นเชื่อม)**

u ที่เป็นไปได้ $\{v_1, v_4, v_6, v_7, v_9\}$
เลือกให้ $u = v_9$ เพราะเส้นเชื่อม uw มีน้ำหนักน้อยสุด

- 2.2 $T \coloneqq T \cup \{uw\}$ และ $N \coloneqq N \cup \{u\}$
- 2.3 ลบ u ออกจาก A



N	v_1	v_2	v_3	v_4	v_5	v_6	v_7	v_8	v_9	v_{10}
v_{10}	∞	∞	$2, v_{10}$	$4, v_{10}$	∞	$6, v_{10}$	$8, v_{10}$	∞	$8, v_{10}$	$-$
v_3	∞	$2, v_3$	$-$	$4, v_{10}$	∞	$6, v_{10}$	$5, v_3$	∞	$6, v_3$	$-$
v_2	$3, v_2$	$-$	$-$	$4, v_{10}$	∞	$6, v_{10}$	$5, v_3$	∞	$3, v_2$	$-$

V คือ เส้นเชื่อมทุกเส้นในกราฟ

หาต้นไม้ทอดข้ามที่เล็กที่สุดของกราฟ ด้วยอัลกอริทึมของพริม ให้จุดเริ่มต้นที่ v_{10}

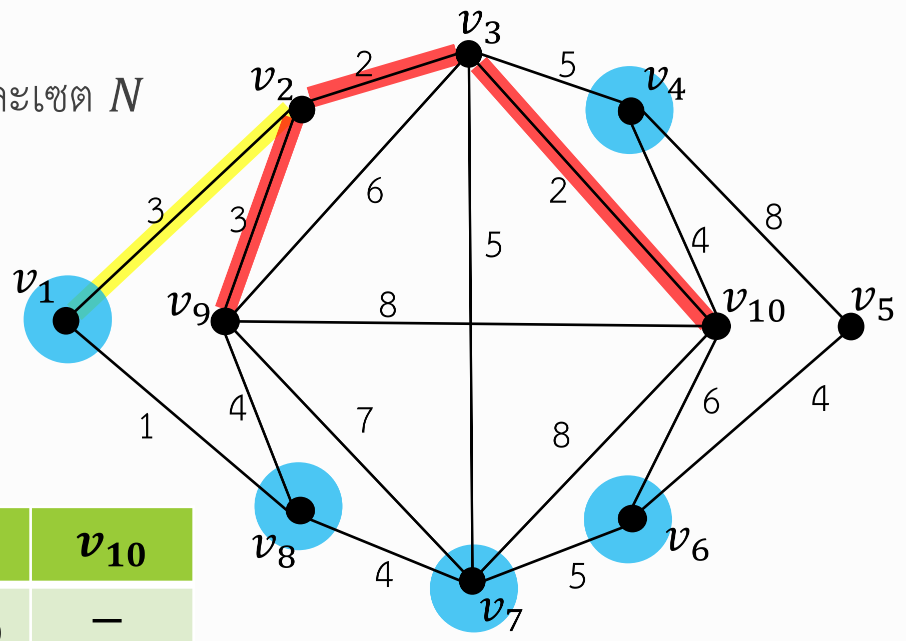
ขั้นตอน (2.1, 2.2, และ 2.3)

$T = \{v_3v_{10}, v_2v_3, v_2v_9, v_1v_2\}$
$N = \{v_{10}, v_3, v_2, v_9, v_1\}$
$u = v_1$
$A = V - \{v_{10}, v_3, v_2, v_9, v_1\}$

คำอธิบาย

จะต้องปรับค่าน้ำหนักน้อยที่สุดระหว่างจุดที่อยู่ในเซต A และเซต N

u ที่เป็นไปได้ $\{v_1, v_4, v_6, v_7, v_8\}$
เลือกให้ $u = v_1$ เพราะเส้นเชื่อม uw มีน้ำหนักน้อยสุด



N	v_1	v_2	v_3	v_4	v_5	v_6	v_7	v_8	v_9	v_{10}
v_{10}	∞	∞	$2, v_{10}$	$4, v_{10}$	∞	$6, v_{10}$	$8, v_{10}$	∞	$8, v_{10}$	$-$
v_3	∞	$2, v_3$	$-$	$4, v_{10}$	∞	$6, v_{10}$	$5, v_3$	∞	$6, v_3$	$-$
v_2	$3, v_2$	$-$	$-$	$4, v_{10}$	∞	$6, v_{10}$	$5, v_3$	∞	$3, v_2$	$-$
v_9	$3, v_2$	$-$	$-$	$4, v_{10}$	∞	$6, v_{10}$	$5, v_3$	$4, v_9$	$-$	$-$

V คือ เส้นเชื่อมทุกเส้นในกราฟ

หาต้นไม้ทอดข้ามที่เล็กที่สุดของกราฟ ด้วยอัลกอริทึมของพริม ให้จุดเริ่มต้นที่ v_{10}

ขั้นตอน (2.1, 2.2, และ 2.3)

$T = \begin{Bmatrix} v_3v_{10}, v_2v_3, v_2v_9, v_1v_2 \\ v_1v_8 \end{Bmatrix}$

$N = \{v_{10}, v_3, v_2, v_9, v_1, v_8\}$

$u = v_8$

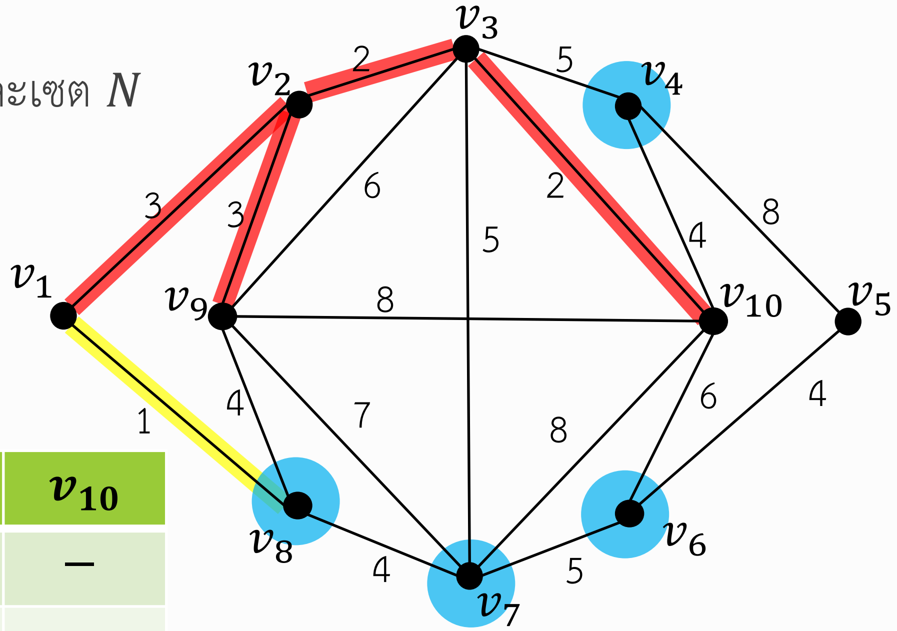
$A = V - \{v_{10}, v_3, v_2, v_9, v_1, v_8\}$

คำอธิบาย

จะต้องปรับค่าน้ำหนักน้อยที่สุดระหว่างจุดที่อยู่ในเซต A และเซต N

u ที่เป็นไปได้ $\{v_4, v_6, v_7, v_8\}$

เลือกให้ $u = v_8$ เพราะเส้นเชื่อม uw มีน้ำหนักน้อยสุด



N	v_1	v_2	v_3	v_4	v_5	v_6	v_7	v_8	v_9	v_{10}
v_{10}	∞	∞	$2, v_{10}$	$4, v_{10}$	∞	$6, v_{10}$	$8, v_{10}$	∞	$8, v_{10}$	$-$
v_3	∞	$2, v_3$	$-$	$4, v_{10}$	∞	$6, v_{10}$	$5, v_3$	∞	$6, v_3$	$-$
v_2	$3, v_2$	$-$	$-$	$4, v_{10}$	∞	$6, v_{10}$	$5, v_3$	∞	$3, v_2$	$-$
v_9	$3, v_2$	$-$	$-$	$4, v_{10}$	∞	$6, v_{10}$	$5, v_3$	$4, v_9$	$-$	$-$
v_1	$-$	$-$	$-$	$4, v_{10}$	∞	$6, v_{10}$	$5, v_3$	$1, v_1$	$-$	$-$

V คือ เส้นเชื่อมทุกเส้นในกราฟ

หาต้นไม้ทอดข้ามที่เล็กที่สุดของกราฟ ด้วยอัลกอริทึมของพริม ให้จุดเริ่มต้นที่ v_{10}

ขั้นตอน (2.1, 2.2, และ 2.3)

$$T = \begin{Bmatrix} v_3v_{10}, v_2v_3, v_2v_9, v_1v_2, \\ v_1v_8, v_7v_8 \end{Bmatrix}$$

$N = \{v_{10}, v_3, v_2, v_9, v_1, v_8, v_7\}$

$u = v_7$

$A = \{v_4, v_5, v_6, v_7\} - \{v_7\}$

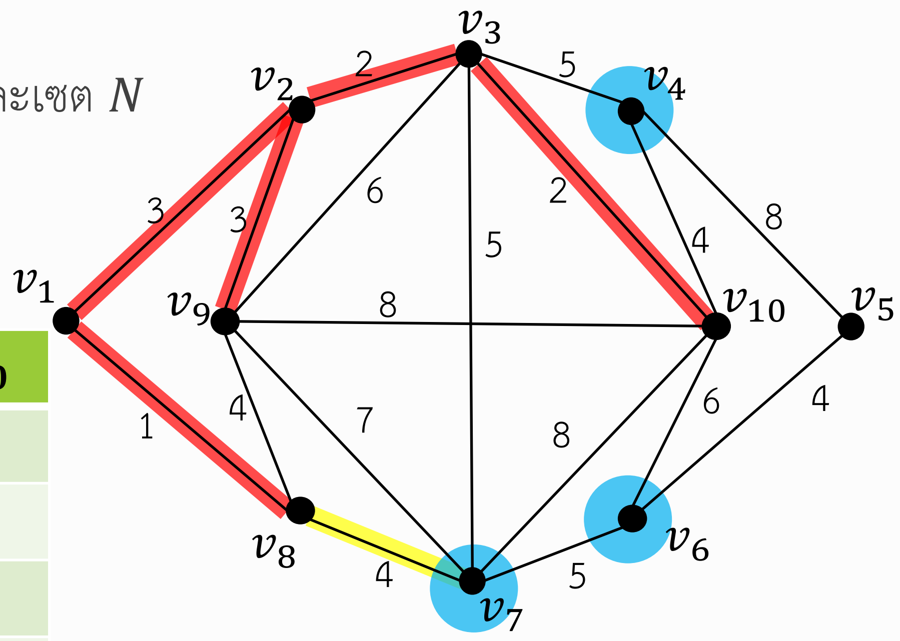
คำอธิบาย

จะต้องปรับค่าน้ำหนักน้อยที่สุดระหว่างจุดที่อยู่ในเซต A และเซต N

u ที่เป็นไปได้ $\{v_4, v_6, v_7\}$

เลือกให้ $u = v_7$ เพราะเส้นเชื่อม uw มีน้ำหนักน้อยสุด

เลือกมาหนึ่งจุดยอด



N	v_1	v_2	v_3	v_4	v_5	v_6	v_7	v_8	v_9	v_{10}
v_{10}	∞	∞	$2, v_{10}$	$4, v_{10}$	∞	$6, v_{10}$	$8, v_{10}$	∞	$8, v_{10}$	$-$
v_3	∞	$2, v_3$	$-$	$4, v_{10}$	∞	$6, v_{10}$	$5, v_3$	∞	$6, v_3$	$-$
v_2	$3, v_2$	$-$	$-$	$4, v_{10}$	∞	$6, v_{10}$	$5, v_3$	∞	$3, v_2$	$-$
v_9	$3, v_2$	$-$	$-$	$4, v_{10}$	∞	$6, v_{10}$	$5, v_3$	$4, v_9$	$-$	$-$
v_1	$-$	$-$	$-$	$4, v_{10}$	∞	$6, v_{10}$	$5, v_3$	$1, v_1$	$-$	$-$
v_8	$-$	$-$	$-$	$4, v_{10}$	∞	$6, v_{10}$	$4, v_8$	$-$	$-$	$-$

V คือ เส้นเชื่อมทุกเส้นในกราฟ

หาต้นไม้ทอดข้ามที่เล็กที่สุดของกราฟ ด้วยอัลกอริทึมของพริม ให้จุดเริ่มต้นที่ v_{10}

ขั้นตอน (2.1, 2.2, และ 2.3)

$T = \begin{Bmatrix} v_3v_{10}, v_2v_3, v_2v_9, v_1v_2, \\ v_1v_8, v_7v_8, v_4v_{10} \end{Bmatrix}$

$N = \begin{Bmatrix} v_{10}, v_3, v_2, v_9, v_1, v_8, v_7, \\ v_4 \end{Bmatrix}$

$u = v_4$

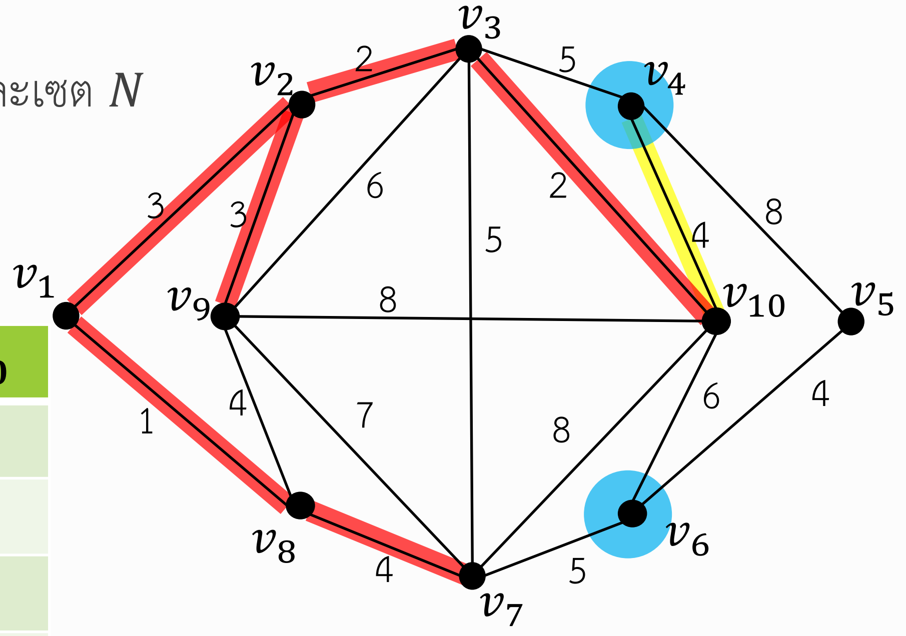
$A = \{v_4, v_5, v_6\} - \{v_4\}$

คำอธิบาย

จะต้องปรับค่าน้ำหนักน้อยที่สุดระหว่างจุดที่อยู่ในเซต A และเซต N

u ที่เป็นไปได้ $\{v_4, v_6\}$

เลือกให้ $u = v_4$ เพราะเส้นเชื่อม uw มีน้ำหนักน้อยสุด



N	v_1	v_2	v_3	v_4	v_5	v_6	v_7	v_8	v_9	v_{10}
v_{10}	∞	∞	$2, v_{10}$	$4, v_{10}$	∞	$6, v_{10}$	$8, v_{10}$	∞	$8, v_{10}$	$-$
v_3	∞	$2, v_3$	$-$	$4, v_{10}$	∞	$6, v_{10}$	$5, v_3$	∞	$6, v_3$	$-$
v_2	$3, v_2$	$-$	$-$	$4, v_{10}$	∞	$6, v_{10}$	$5, v_3$	∞	$3, v_2$	$-$
v_9	$3, v_2$	$-$	$-$	$4, v_{10}$	∞	$6, v_{10}$	$5, v_3$	$4, v_9$	$-$	$-$
v_1	$-$	$-$	$-$	$4, v_{10}$	∞	$6, v_{10}$	$5, v_3$	$1, v_1$	$-$	$-$
v_8	$-$	$-$	$-$	$4, v_{10}$	∞	$6, v_{10}$	$4, v_8$	$-$	$-$	$-$
v_7	$-$	$-$	$-$	$4, v_{10}$	∞	$5, v_7$	$-$	$-$	$-$	$-$

V คือ เส้นเชื่อมทุกเส้นในกราฟ

หาต้นไม้ทอดข้ามที่เล็กที่สุดของกราฟ ด้วยอัลกอริทึมของพริม ให้จุดเริ่มต้นที่ v_{10}

ขั้นตอน (2.1, 2.2, และ 2.3)

$$T = \begin{Bmatrix} v_3v_{10}, v_2v_3, v_2v_9, v_1v_2, \\ v_1v_8, v_7v_8, v_4v_{10}, v_6v_7 \end{Bmatrix}$$

$$N = \begin{Bmatrix} v_{10}, v_3, v_2, v_9, v_1, v_8, v_7, \\ v_4, v_6 \end{Bmatrix}$$

$u = v_6$

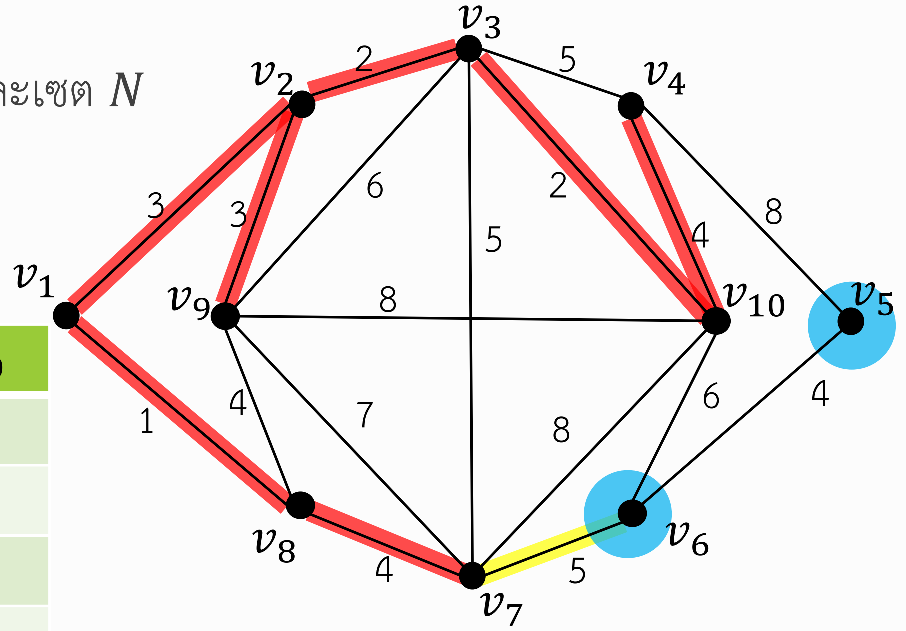
$A = \{v_5, v_6\} - \{v_6\}$

คำอธิบาย

จะต้องปรับค่าน้ำหนักน้อยที่สุดระหว่างจุดที่อยู่ในเซต A และเซต N

u ที่เป็นไปได้ $\{v_5, v_6\}$

เลือกให้ $u = v_6$ เพราะเส้นเชื่อม uw มีน้ำหนักน้อยสุด



N	v_1	v_2	v_3	v_4	v_5	v_6	v_7	v_8	v_9	v_{10}
v_{10}	∞	∞	$2, v_{10}$	$4, v_{10}$	∞	$6, v_{10}$	$8, v_{10}$	∞	$8, v_{10}$	$-$
v_3	∞	$2, v_3$	$-$	$4, v_{10}$	∞	$6, v_{10}$	$5, v_3$	∞	$6, v_3$	$-$
v_2	$3, v_2$	$-$	$-$	$4, v_{10}$	∞	$6, v_{10}$	$5, v_3$	∞	$3, v_2$	$-$
v_9	$3, v_2$	$-$	$-$	$4, v_{10}$	∞	$6, v_{10}$	$5, v_3$	$4, v_9$	$-$	$-$
v_1	$-$	$-$	$-$	$4, v_{10}$	∞	$6, v_{10}$	$5, v_3$	$1, v_1$	$-$	$-$
v_8	$-$	$-$	$-$	$4, v_{10}$	∞	$6, v_{10}$	$4, v_8$	$-$	$-$	$-$
v_7	$-$	$-$	$-$	$4, v_{10}$	∞	$5, v_7$	$-$	$-$	$-$	$-$
v_4	$-$	$-$	$-$	$-$	$8, v_4$	$5, v_7$	$-$	$-$	$-$	$-$

V คือ เส้นเชื่อมทุกเส้นในกราฟ

หาต้นไม้ทอดข้ามที่เล็กที่สุดของกราฟ ด้วยอัลกอริทึมของพริม ให้จุดเริ่มต้นที่ v_{10}

ขั้นตอน (2.1, 2.2, และ 2.3)

$$T = \begin{Bmatrix} v_3v_{10}, v_2v_3, v_2v_9, v_1v_2, \\ v_1v_8, v_7v_8, v_4v_{10}, v_6v_7, v_5v_6 \end{Bmatrix}$$

$$N = \begin{Bmatrix} v_{10}, v_3, v_2, v_9, v_1, v_8, v_7, \\ v_4, v_6, v_5 \end{Bmatrix}$$

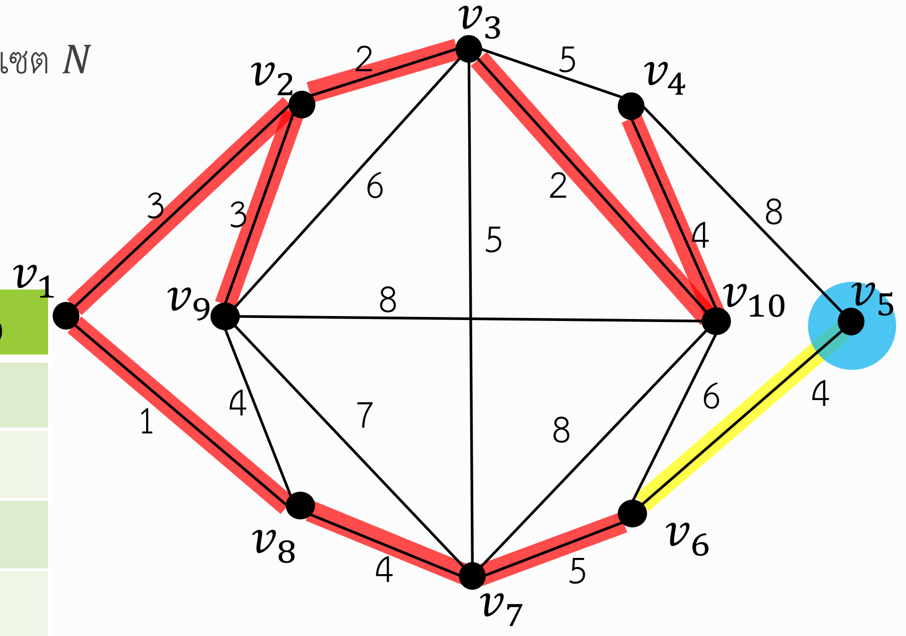
$u = v_5,\quad A = \{v_5\} - \{v_5\}$

คำอธิบาย

จะต้องปรับค่าน้ำหนักน้อยที่สุดระหว่างจุดที่อยู่ในเซต A และเซต N

u ที่เป็นไปได้ $\{v_5\}$

เลือกให้ $u = v_5$

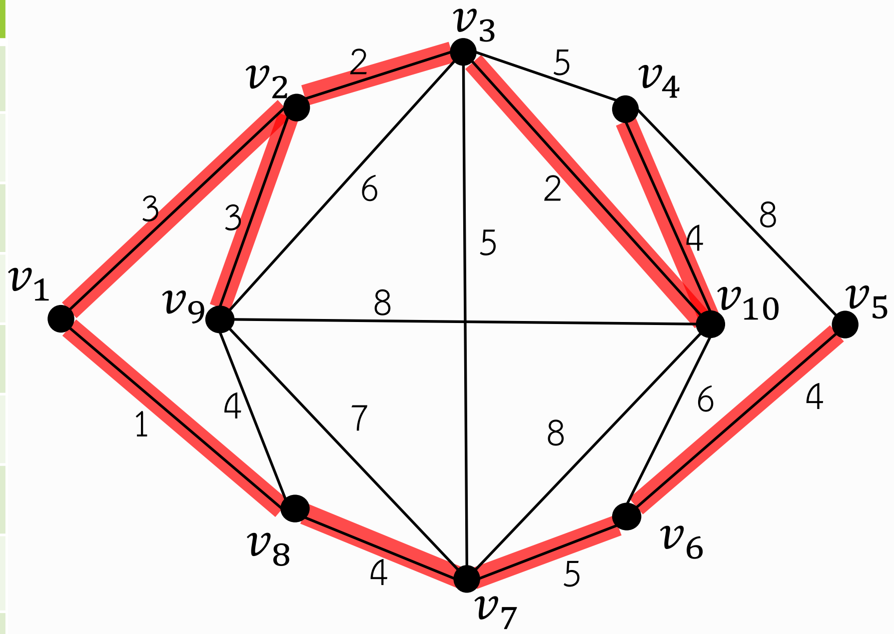


N	v_1	v_2	v_3	v_4	v_5	v_6	v_7	v_8	v_9	v_{10}
v_{10}	∞	∞	$2, v_{10}$	$4, v_{10}$	∞	$6, v_{10}$	$8, v_{10}$	∞	$8, v_{10}$	$-$
v_3	∞	$2, v_3$	$-$	$4, v_{10}$	∞	$6, v_{10}$	$5, v_3$	∞	$6, v_3$	$-$
v_2	$3, v_2$	$-$	$-$	$4, v_{10}$	∞	$6, v_{10}$	$5, v_3$	∞	$3, v_2$	$-$
v_9	$3, v_2$	$-$	$-$	$4, v_{10}$	∞	$6, v_{10}$	$5, v_3$	$4, v_9$	$-$	$-$
v_1	$-$	$-$	$-$	$4, v_{10}$	∞	$6, v_{10}$	$5, v_3$	$1, v_1$	$-$	$-$
v_8	$-$	$-$	$-$	$4, v_{10}$	∞	$6, v_{10}$	$4, v_8$	$-$	$-$	$-$
v_7	$-$	$-$	$-$	$4, v_{10}$	∞	$5, v_7$	$-$	$-$	$-$	$-$
v_4	$-$	$-$	$-$	$-$	$8, v_4$	$5, v_7$	$-$	$-$	$-$	$-$
v_6	$-$	$-$	$-$	$-$	$4, v_6$	$-$	$-$	$-$	$-$	$-$

V คือ เส้นเชื่อมทุกเส้นในกราฟ

หาต้นไม้ทอดข้ามที่เล็กที่สุดของกราฟ ด้วยอัลกอริทึมของพริม ให้จุดเริ่มต้นที่ v_{10}

N	v_1	v_2	v_3	v_4	v_5	v_6	v_7	v_8	v_9	v_{10}
v_{10}	∞	∞	$2, v_{10}$	$4, v_{10}$	∞	$6, v_{10}$	$8, v_{10}$	∞	$8, v_{10}$	$-$
v_3	∞	$2, v_3$	$-$	$4, v_{10}$	∞	$6, v_{10}$	$5, v_3$	∞	$6, v_3$	$-$
v_2	$3, v_2$	$-$	$-$	$4, v_{10}$	∞	$6, v_{10}$	$5, v_3$	∞	$3, v_2$	$-$
v_9	$3, v_2$	$-$	$-$	$4, v_{10}$	∞	$6, v_{10}$	$5, v_3$	$4, v_9$	$-$	$-$
v_1	$-$	$-$	$-$	$4, v_{10}$	∞	$6, v_{10}$	$5, v_3$	$1, v_1$	$-$	$-$
v_8	$-$	$-$	$-$	$4, v_{10}$	∞	$6, v_{10}$	$4, v_8$	$-$	$-$	$-$
v_7	$-$	$-$	$-$	$4, v_{10}$	∞	$5, v_7$	$-$	$-$	$-$	$-$
v_4	$-$	$-$	$-$	$-$	$8, v_4$	$5, v_7$	$-$	$-$	$-$	$-$
v_6	$-$	$-$	$-$	$-$	$4, v_6$	$-$	$-$	$-$	$-$	$-$



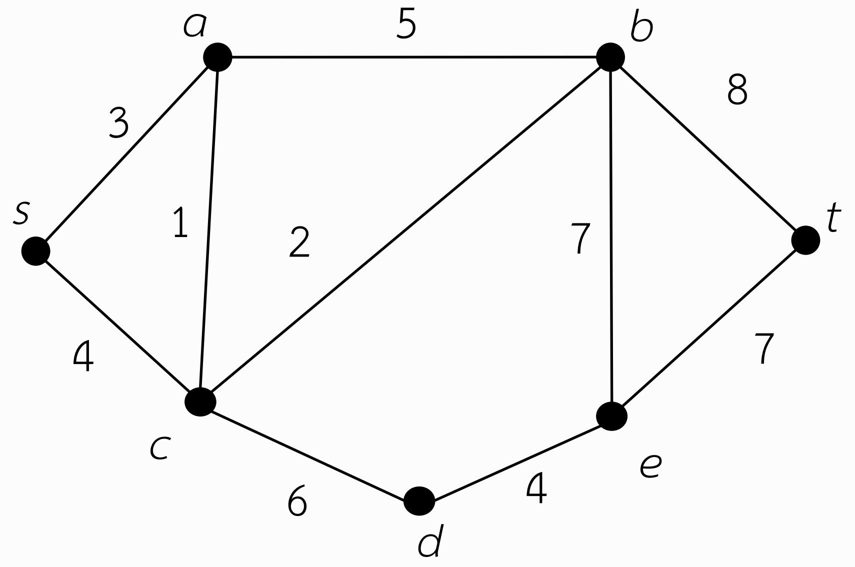
$$T = \left\{ \begin{matrix} v_3v_{10}, v_2v_3, v_2v_9, v_1v_2, \\ v_1v_8, v_7v_8, v_4v_{10}, v_6v_7, v_5v_6 \end{matrix} \right\}$$ เนื่องจาก T มีขนาดเท่ากับ $n-1$ อัลกอริทึมขิงพริมจึงหยุดทำงาน

เซต T ที่ได้เป็นผลลัพธ์นั้นคือต้นไม้ทอดข้ามที่เล็กที่สุด(อยู่ในรูปด้านขวา) ซึ่งน้ำหนักรวมของต้นไม้เป็น 28

แบบฝึกหัด

จงใช้อัลกอริทึมของพริม, Prim’s Algorithm, เติมตารางด้านซ้ายมือและหาต้นไม้ทอดข้ามที่สั้นที่สุดของกราฟต่อไปนี้

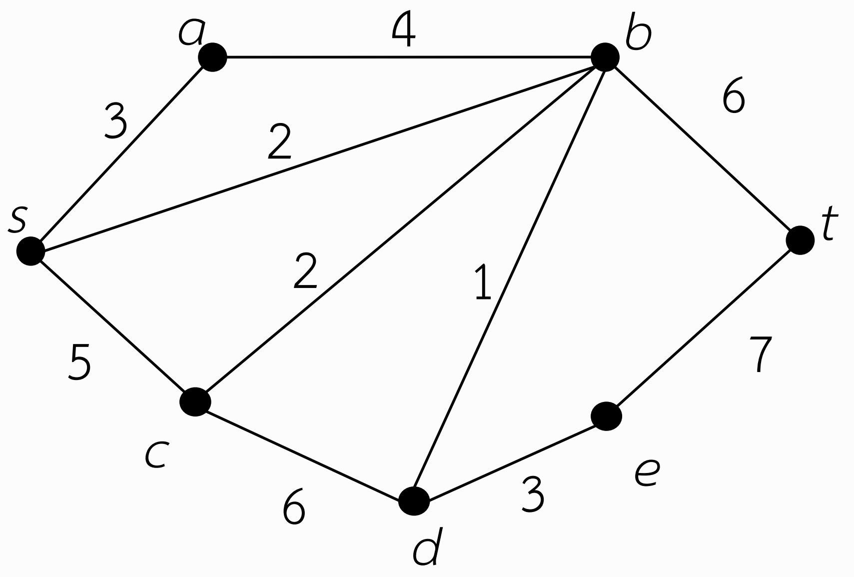
N	***s***	***a***	***b***	***c***	***d***	***e***	***t***



แบบฝึกหัด

จงใช้อัลกอริทึมของพริม, Prim’s Algorithm, เติมตารางด้านซ้ายมือและหาต้นไม้ทอดข้ามที่สั้นที่สุดของกราฟต่อไปนี้

N	***s***	***a***	***b***	***c***	***d***	***e***	***t***



สรุป

อัลกอริทึมของครูสกัลป์, Kruskal’s Algorithm

- หาเส้นเชื่อมที่มีน้ำหนักน้อยที่สุด
- ถ้าไม่ก่อให้เกิดวงจร เพิ่มเส้นเชื่อมนั้นใส่ต้นไม้ทอดข้าม

อัลกอริทึมของพริม, Prim’s Algorithm

- ขยายต้นไม้ทอดข้ามไปเรื่อยๆ เริ่มจากจุดเริ่มต้น
- เลือกเส้นเชื่อมที่น้ำหนักน้อยที่สุดที่เชื่อมไปยังต้นไม้ทอดข้ามปัจจุบัน

ผลลัพธ์ที่ได้: ต้นไม้ทอดข้ามที่เล็กที่สุดโดยที่ผลรวมของน้ำหนักของต้นไม้มีค่าน้อยที่สุด