

Discrete Computational Structures – Network

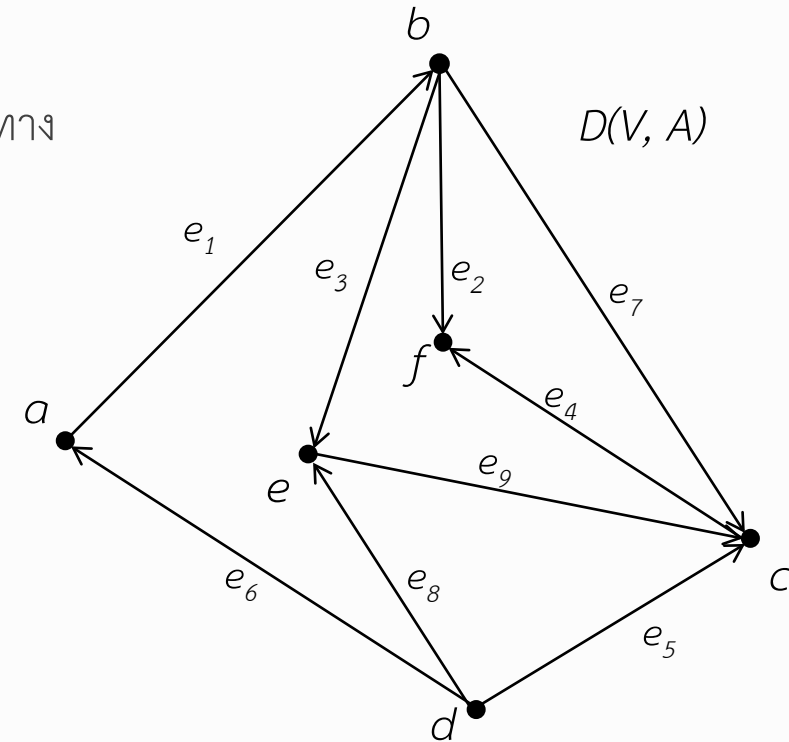
อ. ภูริวัจน์ วรวิชัยพัฒน์

อ้างอิงจากหนังสือ: Discrete Computational Structure, คทา ประดิษฐ์วงศ์

ทบทวนคาบที่แล้ว (Recap)

กราฟทิศทาง, directed graph

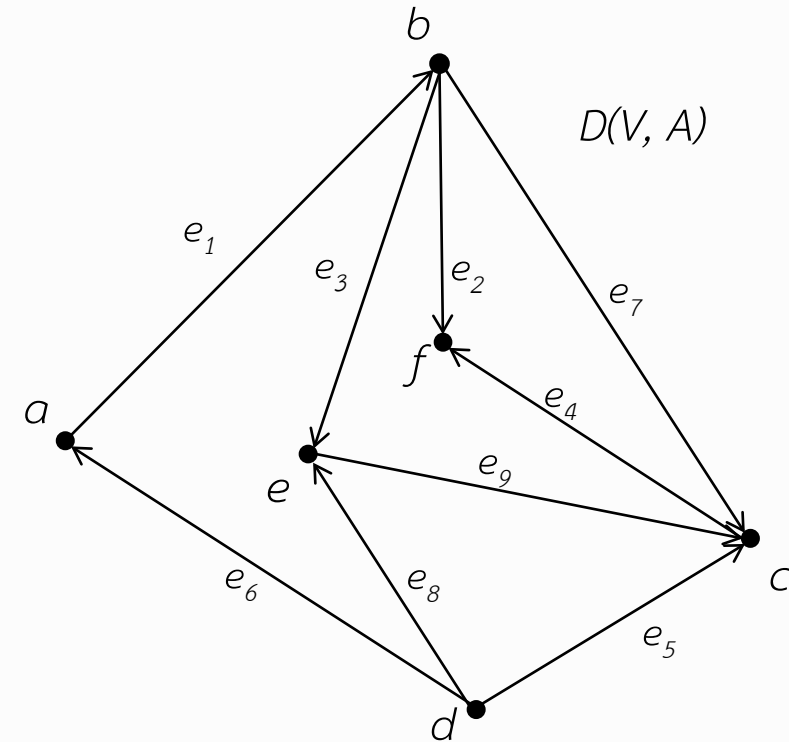
- $D(V, A)$ เป็นกราฟทิศทาง ที่ V เป็นเซตของจุดยอด, A (arc) เป็นเซตของเส้นเชื่อมทิศทาง
- $e = (u, v)$ โดย u จะเป็นหางลูกศร และ v จะเป็นหัวลูกศร
 - การประชิดระหว่าง nodes และ การตกกระทบของจุดยอด e จาก & ไป
- ทุกๆกราฟทิศทางจะมี กราฟโครงสร้าง (underlying graph) อยู่ภายใต้เสมอ
- คุณสมบัติ “ผลรวม degree เข้า = ผลรวม degree ออก”
- ชนิดกราฟทิศทาง เชิงเดียว simple, หลายทิศทาง multigraph, และ เทียม pseudo



ทบทวนคาบที่แล้ว (Recap)

กราฟทิศทาง, directed graph

- การเดิน walk เช่น การเดินจาก a ไป c , $W_1 = ae_1be_7c$, จุดยอด เส้น จุดยอด
- การเชื่อมโยงของกราฟทิศทาง
 - การเชื่อมโยงแบบอ่อน -> เช็คว่ากราฟโครงสร้างเป็นกราฟเชื่อมโยงหรือไม่
 - กราฟเชื่อมโยงแบบแข็งแรง -> เช็คว่า จุดยอดเข้าถึงได้จากจุดอื่นๆ หรือไม่ (เช็คทุกจุดยอด)
- กราฟทิศทางพ้องรูป, กราฟทิศทางคู่หนึ่งที่มี V และ A พ้องกัน
- เมตริกซ์ประชิด (โฟกัสที่จุดยอด) และ เมตริกซ์อุบัติการณ์ (โฟกัสที่เส้นเชื่อมทิศทาง)



เนื้อหาปลายภาค - Overview

- ต้นไม้, Tree
- กราฟทิศทาง, Directed graph
- ข่ายงาน และการประยุกต์ใช้ข่ายงาน, Network **TODAY**
- การหาเส้นทางที่สั้นที่สุด Shortest path, Dijkstra's algorithm
- การหาต้นไม้ทอดข้ามที่น้อยที่สุด Kruskal's algorithm & Prim's algorithm

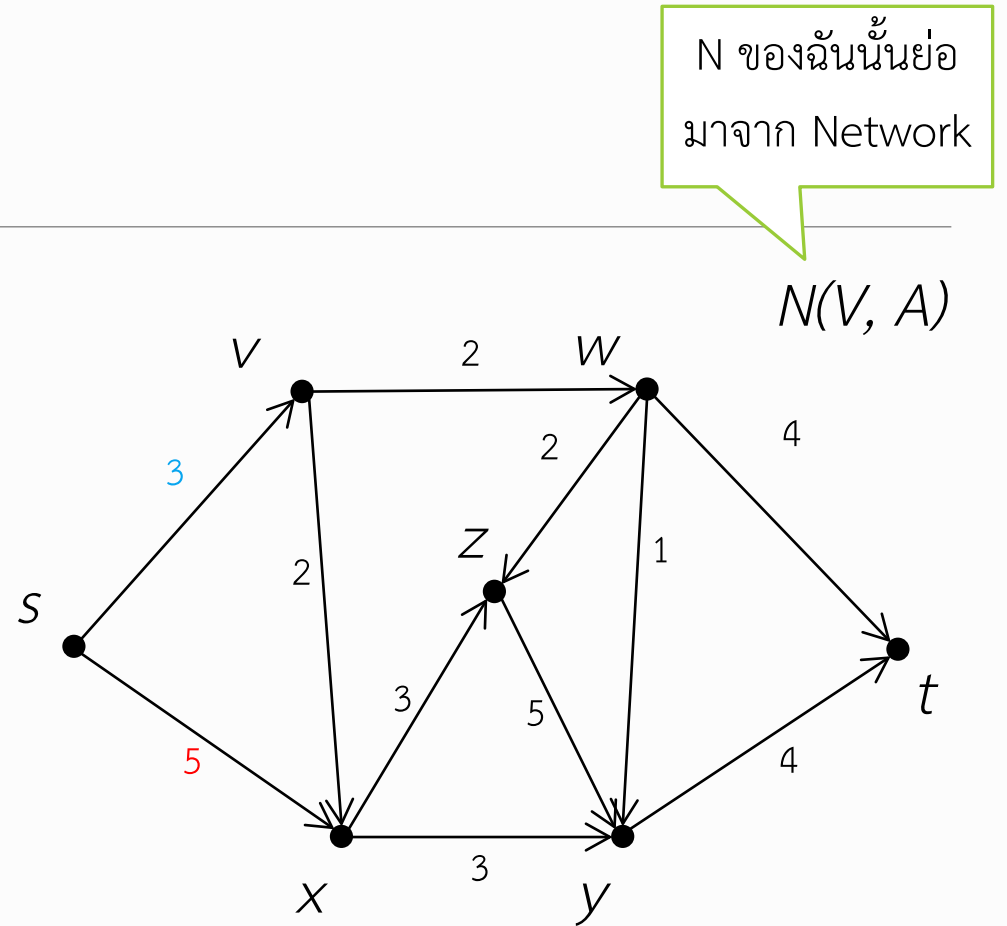
ข่ายงาน หรือ Network

นิยาม: ข่ายงาน (Network) แทนด้วย $N(V, A)$

คือกราฟทิศทางเชิงเดียวที่มีการเชื่อมโยงแบบอ่อน (weakly connected simple graph) ซึ่งเส้นเชื่อมทิศทางทุกเส้นจะมีค่าความจุกำกับไว้ โดยความจุ (capacity) เป็นค่าจำนวนเต็มที่ไม่เป็นลบ

เขียนแทนด้วย $c(a)$ ซึ่งเป็นค่าความจุของเส้นเชื่อม a ยกตัวอย่างเช่น

$$c(sv) = 3 \text{ และ } c(sx) = 5$$



ข่ายงาน หรือ Network

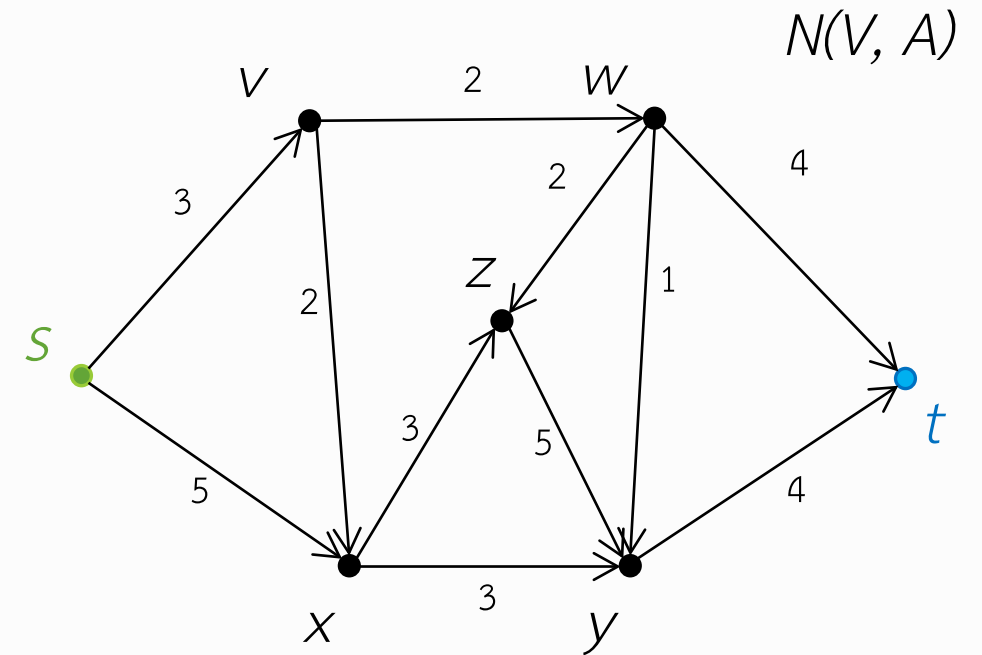
ซึ่งข่ายงานจะมีจุดยอด 3 แบบด้วยกัน

1. จุดยอดที่ไม่เป็นจุดสิ้นสุดหรือหัวลูกศรของเส้นเชื่อมใดๆ, $\text{indeg}(v) = 0$, เรียกว่า แหล่งต้นทาง (source)
2. จุดยอดที่ไม่เป็นจุดเริ่มต้นหรือหางลูกศรของเส้นเชื่อมใดๆ, $\text{outdeg}(v) = 0$, เรียกว่า แหล่งปลายทาง (sink)
3. จุดยอดที่เป็นทั้งหัวลูกศรและหางลูกศร เรียกว่า จุดยอดระหว่างทาง (intermediate vertex)

จากตัวอย่างด้านขวา

- แหล่งต้นทาง คือ s เพราะเป็นหางลูกศรอย่างเดียว
- แหล่งปลายทาง คือ t เพราะเป็นหัวลูกศรอย่างเดียว
- จุดระหว่างทาง คือ v, w, x, y, z

เพื่อความเข้าใจง่าย ณ ตอนนี้ ข่ายงานจะมีเพียง แหล่งต้นทาง 1 แหล่ง และ แหล่งปลายทาง 1 แหล่ง เท่านั้น

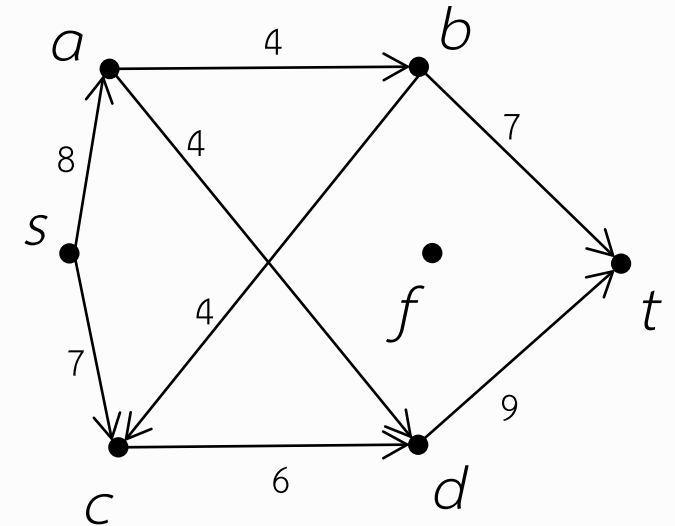
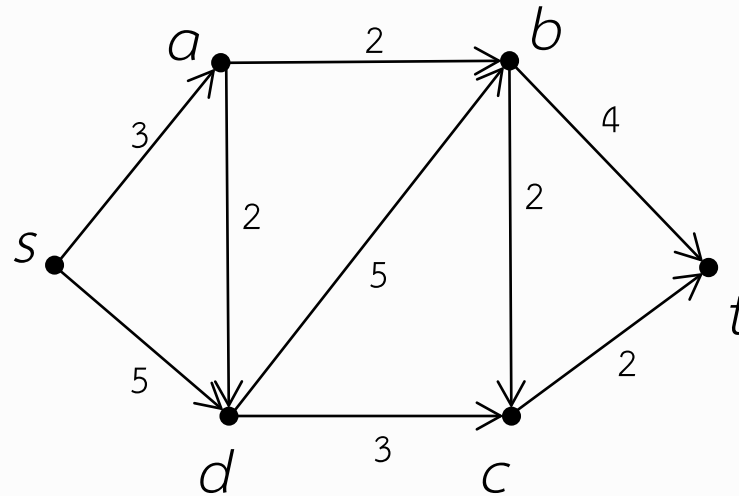
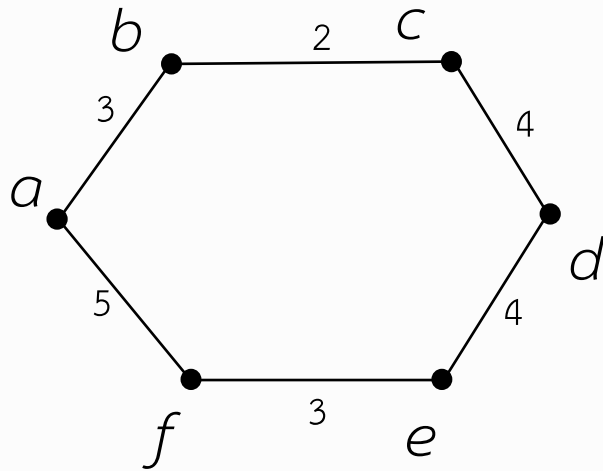


แบบฝึกหัด - ข่ายงาน

สิ่งที่ต้องเช็ค

1. เป็นกราฟทิศทาง + เชื่อมโยงแบบอ่อน + เส้นเชื่อมมีค่าความจุ
2. มีจุดยอดสามแบบ แหล่งต้นทาง, แหล่งปลายทาง, และ จุดระหว่างทาง

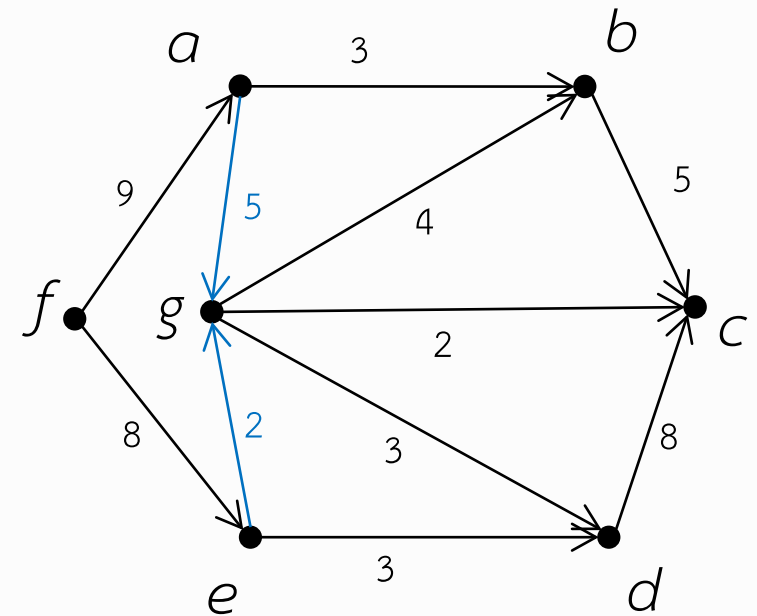
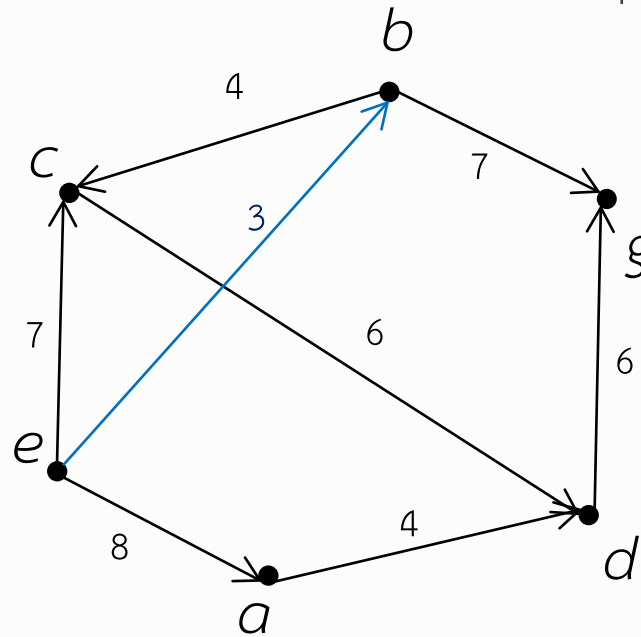
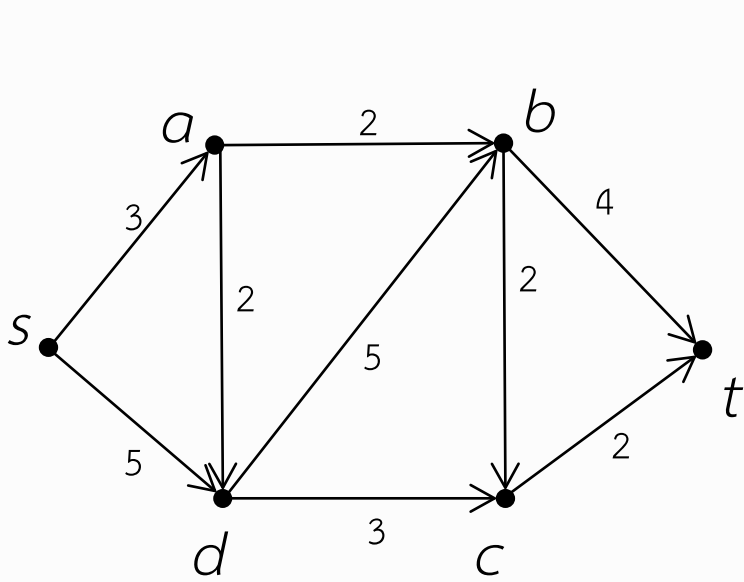
กราฟใดต่อไปนี้เป็นข่ายงาน? เพราะเหตุใด?



แบบฝึกหัด - ข่ายงาน

ถ้าเอาเส้นทิศทางสีน้ำเงินออกจะเกิดอะไรขึ้น แหล่งต้นทาง เปลี่ยนไปไหม?

จากข่ายงานต่อไปนี้จงบอกว่า แหล่งต้นทาง, แหล่งปลายทาง, และ จุดระหว่างทางคือจุดใดบ้าง



การไหล - Flow

การไหล (flow) คือฟังก์ชัน $f: V \times V \rightarrow \mathbb{R}$ เป็นฟังก์ชันที่ส่งผ่านจากเส้นเชื่อมไปจำนวนจริง โดยจำนวนนั้นบอกถึงความสามารถของการส่งผ่านของเส้นเชื่อมทุกเส้นภายในข่ายงาน โดยเริ่มจากแหล่งต้นทางไปยังแหล่งปลายทาง ซึ่งการไหลนั้นจะเป็นค่าจำนวนเต็มไม่เป็นลบ และต้องสอดคล้องกับเงื่อนไข 3 ข้อต่อไปนี้

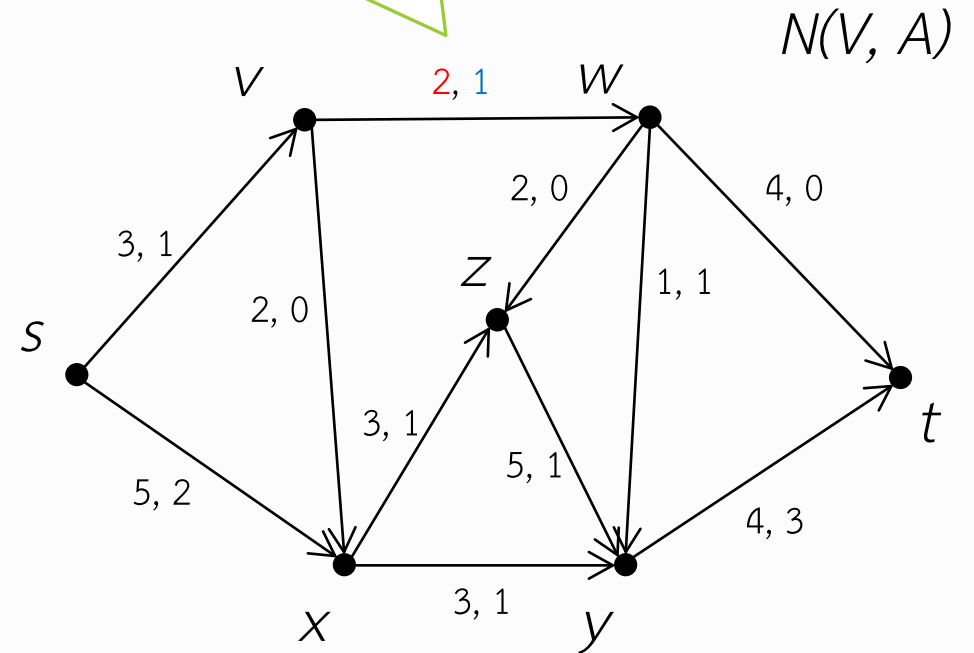
1. สำหรับเส้นเชื่อมทุกเส้น a การไหล $f(a)$ ต้องไม่มากกว่าค่าความจุ $c(a)$ นั่นคือ

$$0 \leq f(a) \leq c(a)$$

2. ผลรวมของการไหลออกของแหล่งต้นทาง (s) ต้องเท่ากับผลรวมของการไหลเข้าของแหล่งปลายทาง (t)

3. ที่จุดระหว่างทางผลรวมของการไหลเข้าต้องเท่ากับผลรวมของการไหลออก

ตัวเลขบนเส้นนั้นเขียนอยู่ในรูปแบบ ความจุ, การไหล



การไหล - Flow

จากตัวอย่างด้านขวา

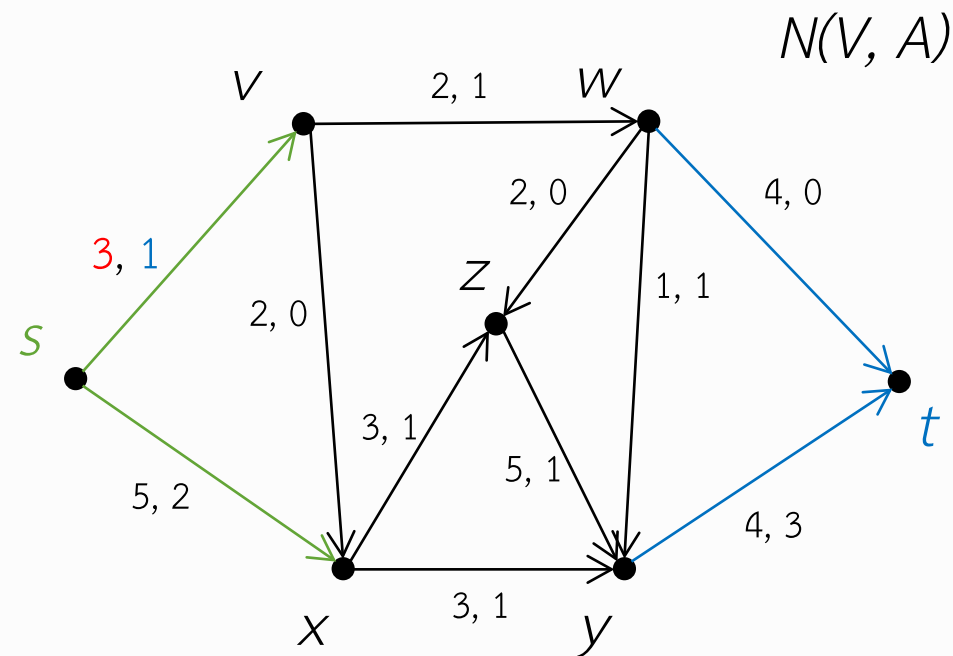
เส้นเชื่อม sv มีความจุเท่ากับ 3, $c(sv) = 3$, และการไหลเท่ากับ 1, $f(sv) = 1$, พิจารณาการไหลพบว่าการไหลน้อยกว่าความจุเป็นจริงสำหรับเส้นเชื่อมทุกเส้นและการไหลมีค่ามากกว่าหรือเท่ากับศูนย์ จากนั้นพิจารณาการไหลออกของแหล่งต้นทาง

$$f(sv) + f(sx) = 1 + 2 = 3$$

การไหลเข้าของแหล่งปลายทางคำนวณได้ดังนี้

$$f(wt) + f(yt) = 0 + 3 = 3$$

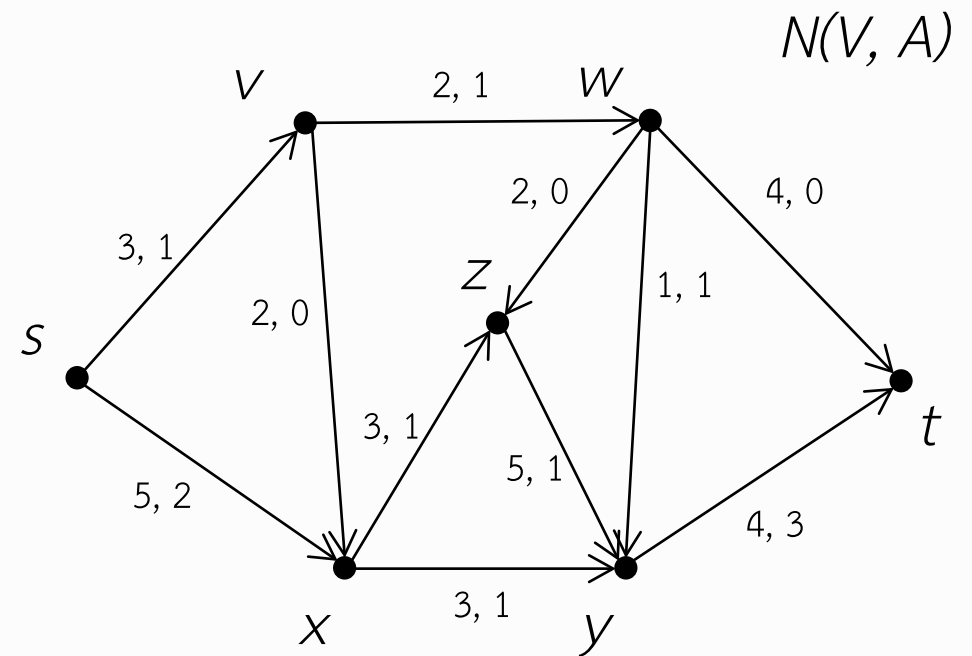
อีกนัยหนึ่งคือ $\text{Outdeg}(s) = \text{Indeg}(t)$



การไหล - Flow

จุดยอด	การไหลเข้า	การไหลออก
v	$f(sv) = 1$	$f(vw) + f(vx) = 1$
w	$f(vw) = 1$	$f(wz) + f(wy) + f(wt) = 1$
x	$f(sx) + f(vx) = 2$	$f(xz) + f(xy) = 2$
y	$f(wy) + f(xy) + f(zy) = 3$	$f(yt) = 3$
z	$f(wz) + f(xz) = 1$	$f(zy) = 1$

พิจารณาจุดระหว่างทางทั้งหมด พบว่าการไหลเข้าเท่ากับการไหลออก ดังนั้น ค่าที่ได้เป็นการไหล



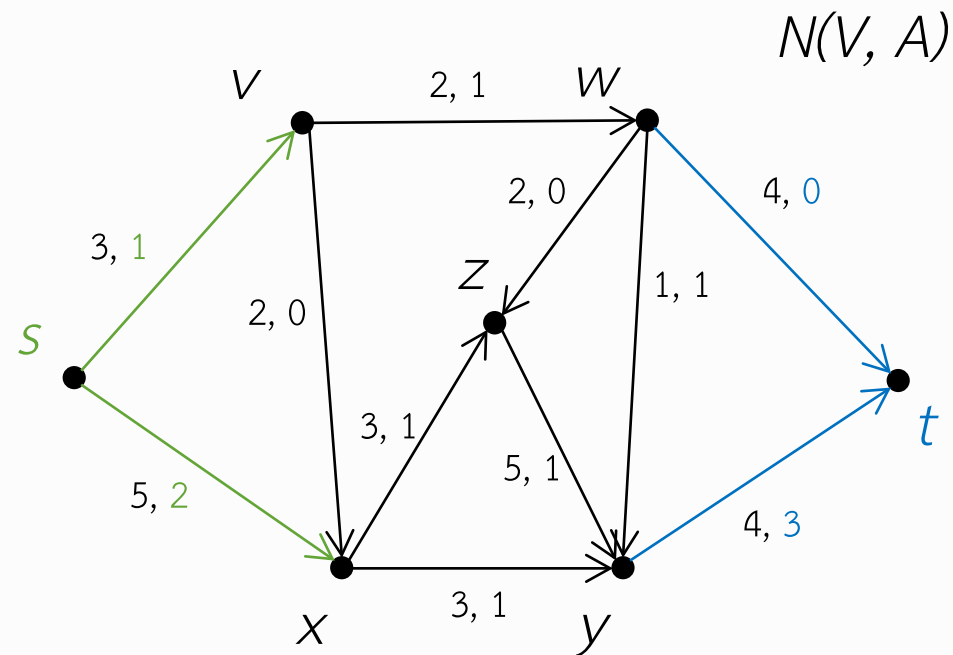
ค่าการไหล – Value of Flow

ค่าการไหล (value of flow) ของข่ายงาน คือ ผลรวมของการไหลออกของแหล่งต้นทาง (s) ซึ่งเท่ากับผลรวมของการไหลเข้าของแหล่งปลายทาง (t) ค่าการไหลแทนด้วย d จะได้สมการดังนี้

$$d = \sum_{a \in \text{outdeg}(s)} f(a) = \sum_{a \in \text{indeg}(t)} f(a)$$

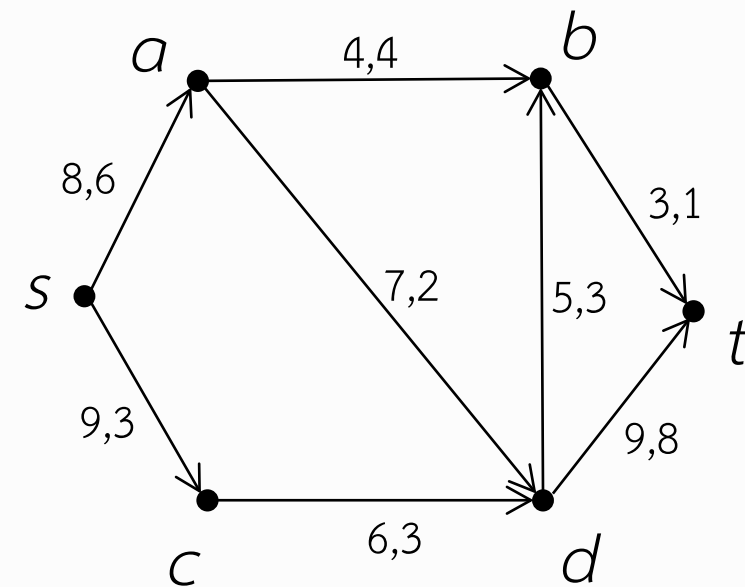
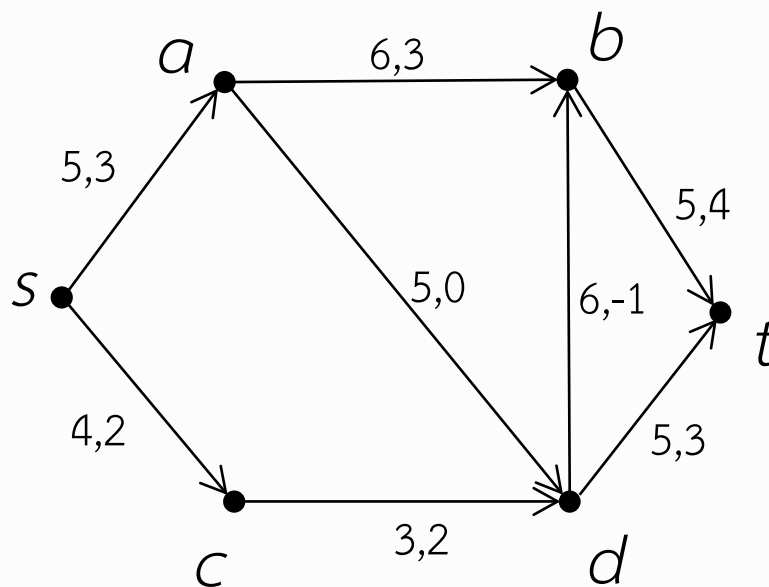
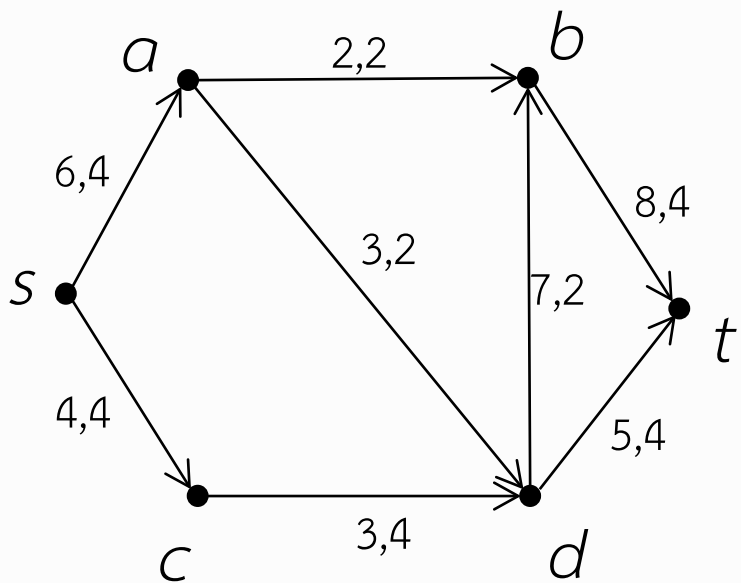
การไหลสูงสุด (maximum flow) ถ้าไม่มีการไหลอื่นมีค่ามากกว่านี้ การไหลสูงสุดนั้นมีความสำคัญ เพราะจะสามารถบอกถึงความสามารถในการขนส่งสิ่งของในข่ายงาน

****ตัวอย่างนี้ยังไม่ถือว่าเป็นข่ายงานที่มีการไหลสูงสุด**



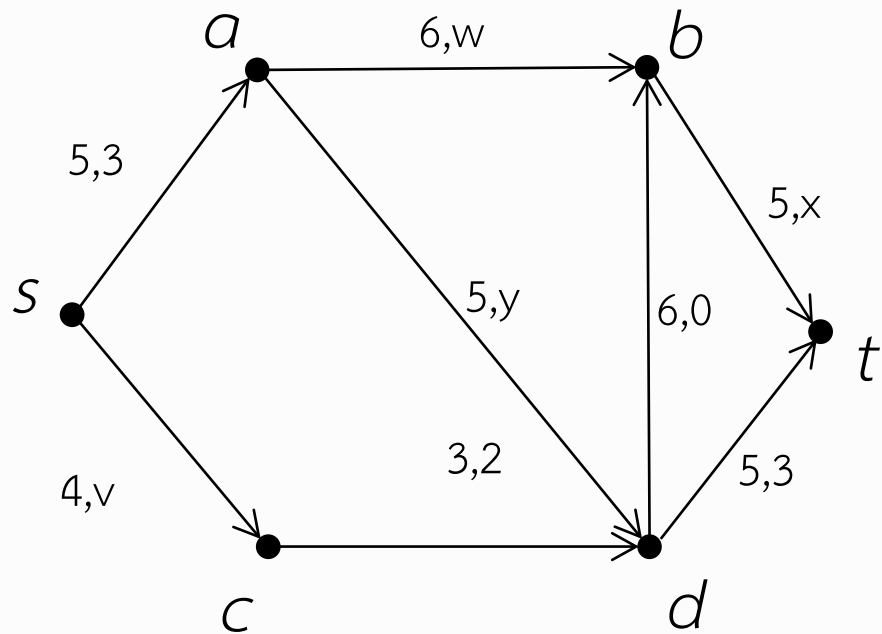
แบบฝึกหัด - การไหล

จากข่ายงานต่อไปนี้ ตัวเลขที่กำหนดบนเส้นเชื่อมเป็นค่าการไหลหรือไม่ พร้อมทั้งเหตุผล



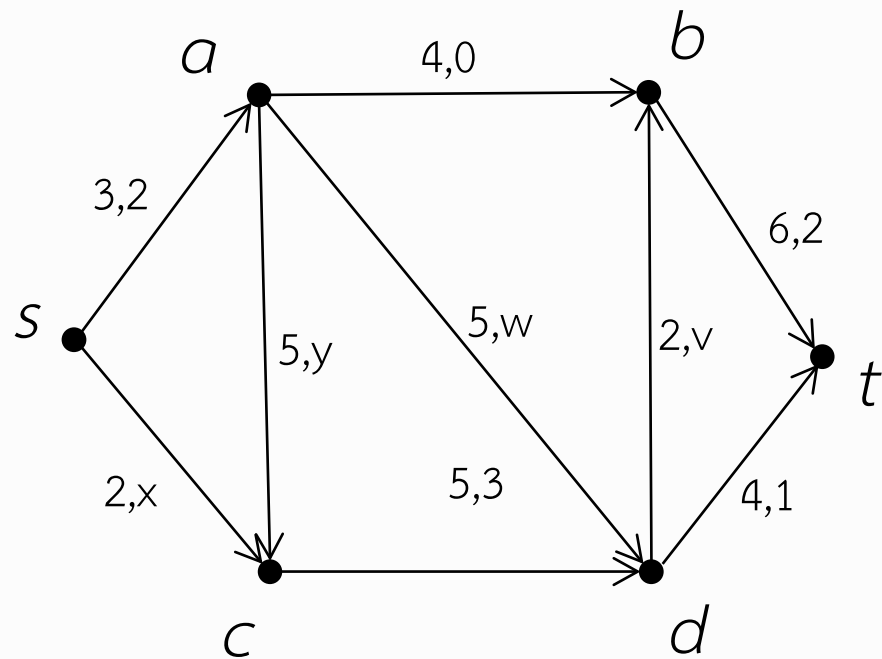
แบบฝึกหัด - การไหล

จงหาค่าของ v , w , x , และ y เพื่อสร้างการไหลอย่างถูกต้องในข่ายงานต่อไปนี้



แบบฝึกหัด - การไหล

จงหาค่าของ v , w , x , และ y เพื่อสร้างการไหลอย่างถูกต้องในข่ายงานต่อไปนี้



ส่วนตัด - Cut

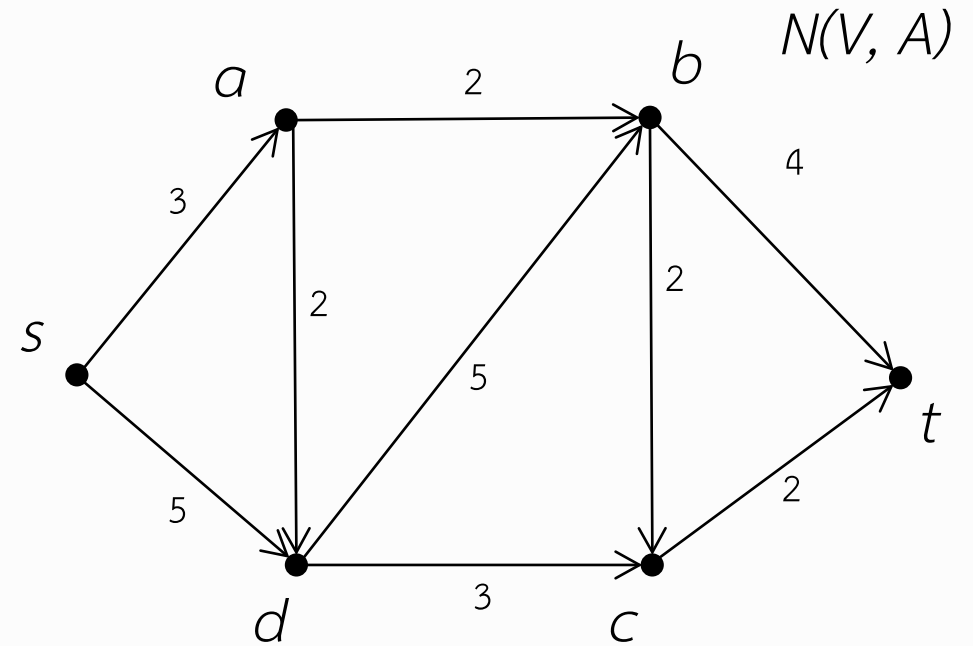
$$\begin{aligned} X &= \{s, \quad \quad \quad \} \\ \bar{X} &= \{t, \quad \quad \quad \} \\ \text{ส่วนตัด } A(X, \bar{X}) &= \{ \quad \quad \quad \} \end{aligned}$$

ส่วนตัด (cut) คือเซตของเส้นเชื่อมจากจุด X ไปยังจุดใน \bar{X} เขียนแทนด้วย $A(X, \bar{X})$ โดยที่ X และ \bar{X} คือเซตย่อยของจุดข่ายงาน $N(V, A)$ โดยที่

X จะต้องมีส่วนต้นทางเป็นสมาชิกเสมอและห้ามมีส่วนปลายทางเป็นสมาชิก นั่นคือ $s \in X$ และ $t \notin X$ โดยที่ s คือ ส่วนต้นทาง และ t คือ ส่วนปลายทาง

สำหรับ \bar{X} คือ ส่วนเติมเต็มของ X ใน V และ \bar{X} จะมีส่วนปลายทางเป็นสมาชิกเสมอ ($t \in \bar{X}$)

สำหรับจุดระหว่างทางนั้นจะอยู่ในเพียงเซตเดียวระหว่าง X หรือ \bar{X}

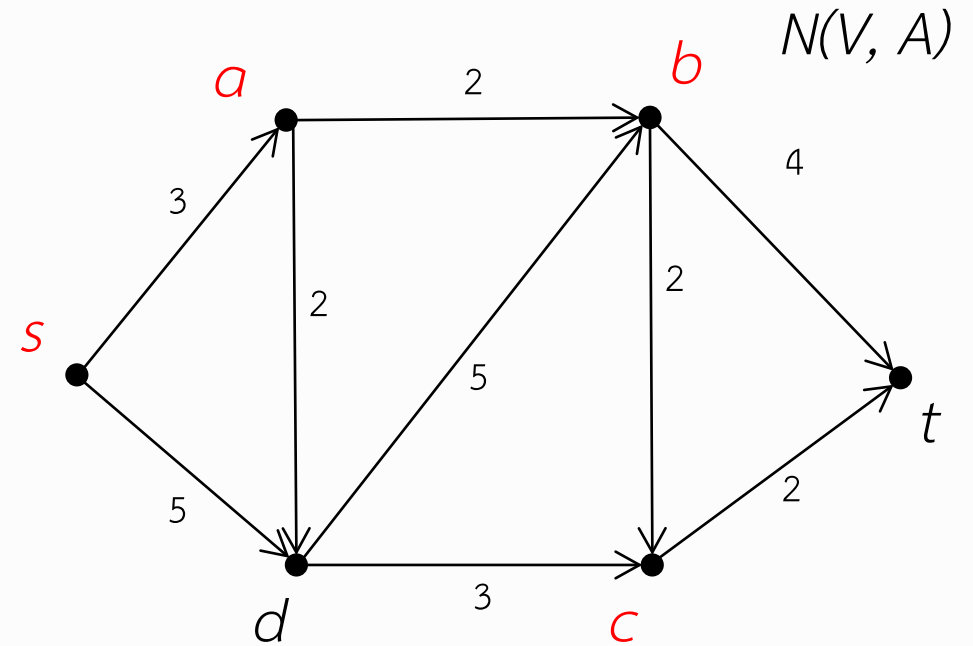


ความจุส่วนตัด

ความจุของส่วนตัด, $c(X, \bar{X})$ คือผลรวมความจุของเส้นเชื่อมระหว่างจุด X ไปยังจุด \bar{X} (ขาลูกศรออกเท่านั้น)

$$c(X, \bar{X}) = \sum_{a \in A(X, \bar{X})} c(a)$$

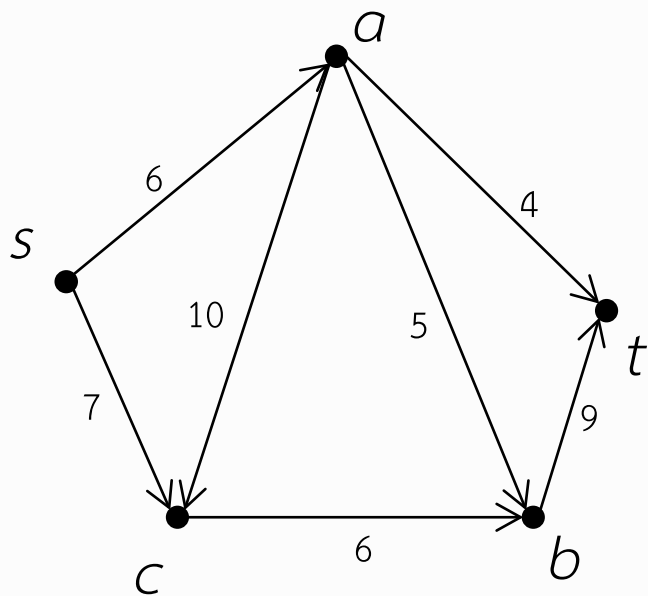
จงหาค่าความจุส่วนตัด $c(X, \bar{X})$ โดยให้ $X = \{s, a, b, c\}$ ของข่ายงาน



แบบฝึกหัด - ส่วนตัด

จงหาความจุของส่วนตัดต่อไปนี้

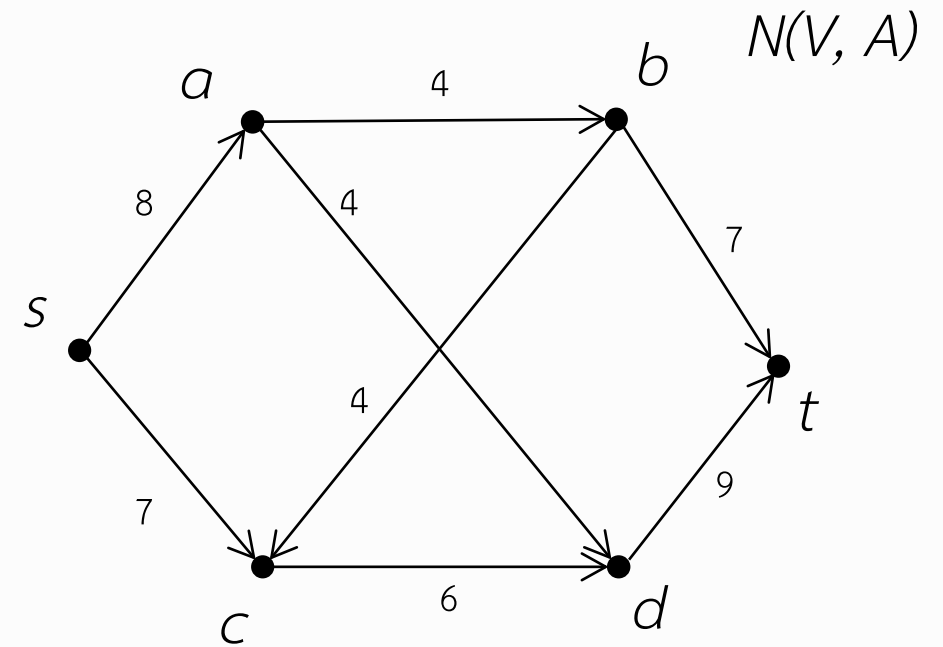
1. $X = \{s\}$ 2. $X = \{s, a\}$ 3. $X = \{s, b, c\}$



ส่วนตัดน้อยที่สุด – minimum cut

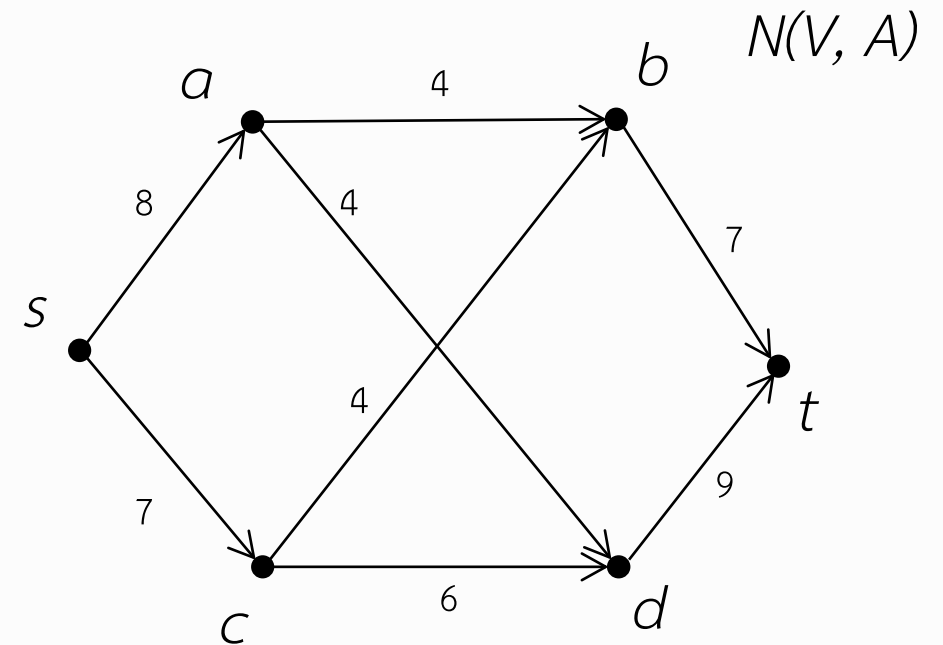
ส่วนตัดที่น้อยที่สุดสามารถคำนวณได้ โดย

1. หาจำนวนของส่วนตัด X ทั้งหมดที่เป็นไปได้ มีจำนวนเท่ากับ $2^{\text{จำนวนจุดยอด}-2}$
จากตัวอย่างด้านขวา จะได้ $2^{6-2} = 2^4 = 16$
2. หาค่าความจุส่วนตัดของทุกส่วนตัดที่เป็นไปได้ในข้อ 1. และเปรียบเทียบหาส่วนตัดที่น้อยที่สุด



ส่วนตัดน้อยที่สุด – minimum cut

X	$c(X, \bar{X})$	X	$c(X, \bar{X})$
$\{s\}$	15	$\{s, a, d\}$	20
$\{s, a\}$	15	$\{s, b, c\}$	21
$\{s, b\}$	22	$\{s, b, d\}$	31
$\{s, c\}$	18	$\{s, a, b, c\}$	17
$\{s, d\}$	24	$\{s, a, b, d\}$	24
$\{s, a, b\}$	18	$\{s, a, c, d\}$	17
$\{s, c, b\}$	21	$\{s, b, c, d\}$	24
$\{s, a, c\}$	18	$\{s, a, b, c, d\}$	16



ซึ่งค่าส่วนตัดที่น้อยที่สุดคือ 15 นั่นคือจะเป็นค่ามากที่สุดของการไหลที่เป็นไปได้

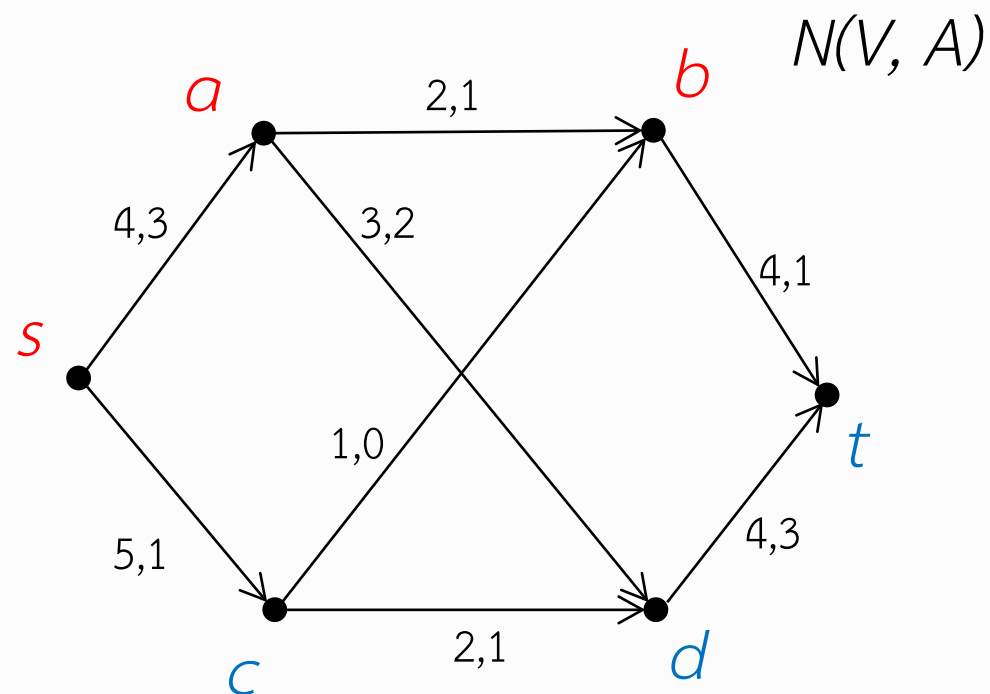
ค่าการไหลส่วนตัด

ค่าการไหลของส่วนตัดคือ ผลรวมการไหลออกจากจุดใน X ไปยังจุดใน \bar{X} ลบด้วย ผลรวมการไหลออกจากจุด \bar{X} ไปยังจุดใน X

$$\text{ค่าการไหลส่วนตัด} = f(X, \bar{X}) - f(\bar{X}, X)$$

จงหาค่าการไหลของส่วนตัด $X = \{s, a, d\}$ ในข่ายงานที่ให้มา

$$\begin{aligned}\text{ค่าการไหลส่วนตัด} &= f(X, \bar{X}) - f(\bar{X}, X) \\ &= f(s, c) + \dots\end{aligned}$$



การหาการไหลสูงสุด

อัลกอริทึมฟอร์ดและฟูลเกอร์สัน (Ford and Fulkerson Algorithm) เป็นอัลกอริทึมหนึ่งที่ใช้ในการหาการไหลสูงสุด *แต่มีข้อแม้ว่าแหล่งต้นทางและแหล่งปลายทางมีได้เพียงอย่างละหนึ่งจุดเท่านั้น โดยมีขั้นตอนคือ

1. ปรับการไหลให้เริ่มต้นที่ 0 ทั้งหมด
2. ถ้าหาเส้นทางที่ยังเพิ่มการไหลได้ ทำซ้ำ 2.1 – 2.3, ทำซ้ำมากที่สุด $N - 1$ รอบ
 - 2.1 หาเส้นทางที่เพิ่มการไหลได้ โดยเริ่มจากแหล่งต้นทาง ผ่านจุดระหว่างทางเรื่อยๆ จุดต่อจุด จนถึงแหล่งปลายทาง (ยังไม่เต็มความจุ)
 - 2.2 หาการไหลที่เป็นที่เพิ่มได้น้อยที่สุด (คอขวด, bottleneck) ของเส้นทาง 2.1
 - 2.3 ปรับค่าการไหลของเส้นทางที่เจอตามค่า คอขวด โดย ลูกศรขาไปจะบวก(+) และ ลูกศรสวนทางจะลบ(-)
3. หยุดการทำงาน

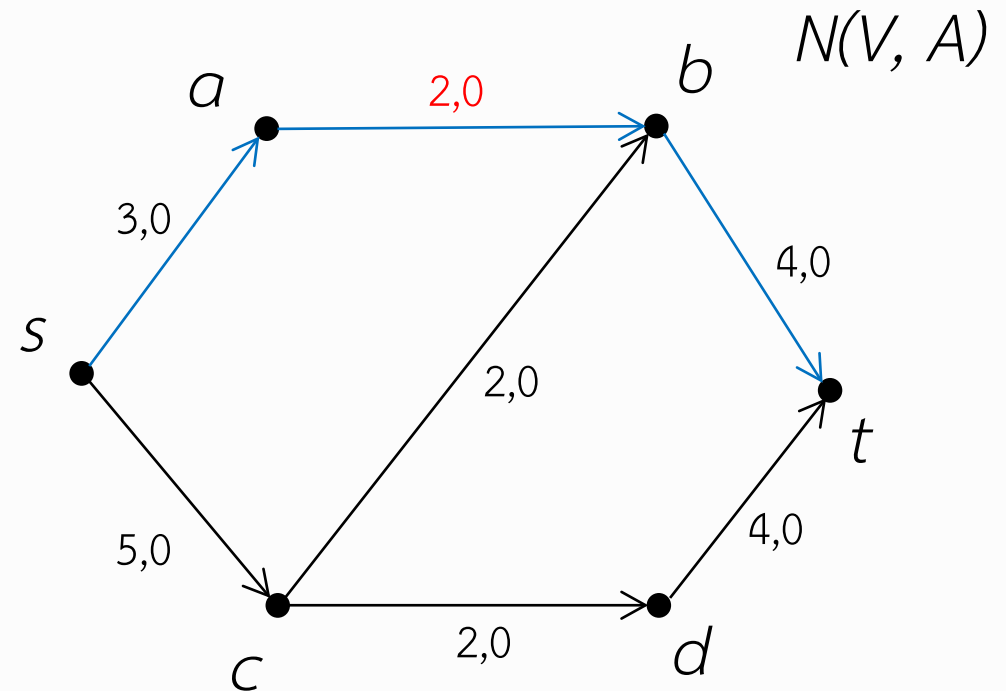
ตัวอย่างที่1 – การหาการไหลสูงสุด (รอบ 1)

1. ปรับการไหลให้เริ่มต้นที่ 0 ทั้งหมด

2. หาเส้นทางที่ยังเพิ่มการไหลได้

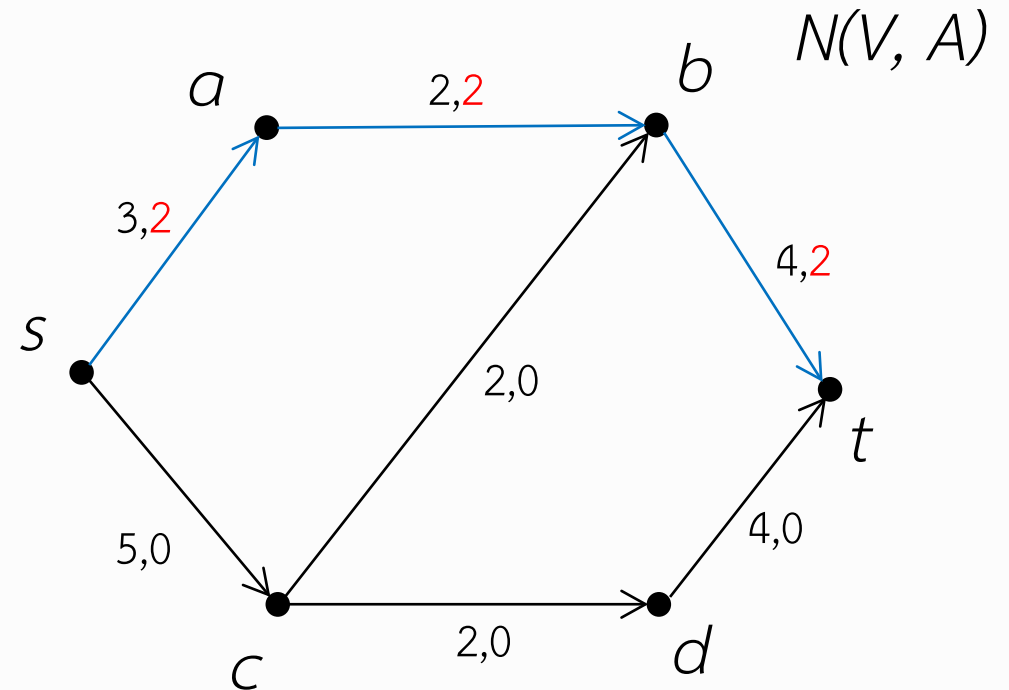
◦ $s \rightarrow a \rightarrow b \rightarrow t$

◦ คอขวด = 2



ตัวอย่างที่1 – การหาการไหลสูงสุด (รอบ 1)

1. ปรับการไหลให้เริ่มต้นที่ 0 ทั้งหมด
2. หาเส้นทางที่ยังเพิ่มการไหลได้
 - $s \rightarrow a \rightarrow b \rightarrow t$
 - คอขวด = 2
 - ปรับค่าการไหล
ลูกศรขาไปจะบวก(+) และ ลูกศรสวนทางจะลบ(-)



ตัวอย่างที่1 – การหาการไหลสูงสุด (รอบ 2)

1. ปรับการไหลให้เริ่มต้นที่ 0 ทั้งหมด

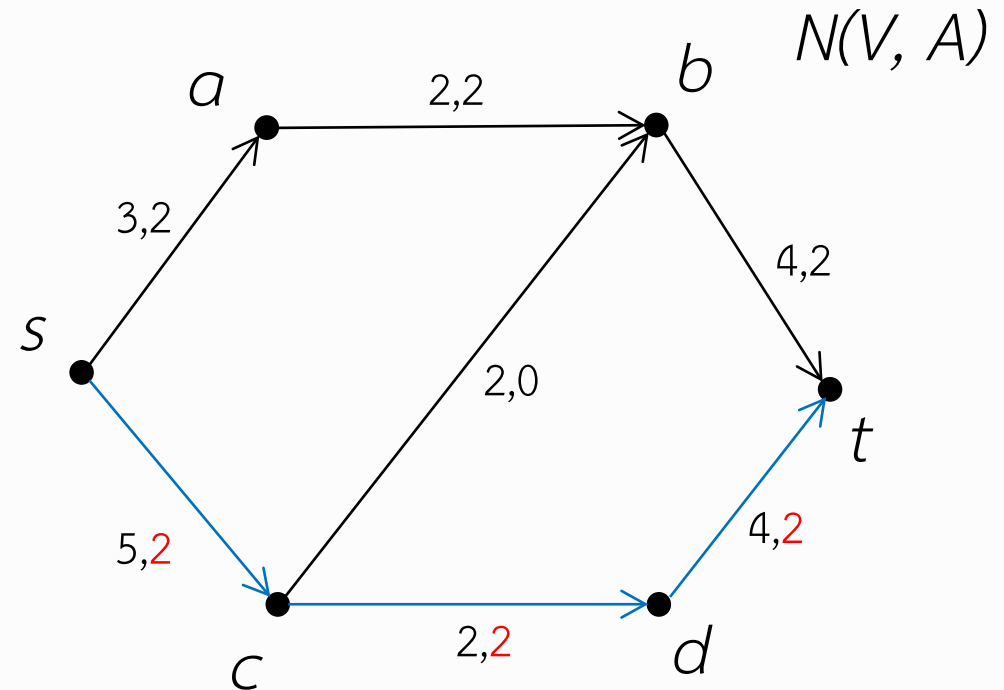
2. หาเส้นทางที่ยังเพิ่มการไหลได้

- $s \rightarrow c \rightarrow d \rightarrow t$

- คอขวด = 2

- ปรับค่าการไหล

ลูกศรขาไปจะบวก(+) และ ลูกศรสวนทางจะลบ(-)



ตัวอย่างที่1 – การหาการไหลสูงสุด (รอบ 3)

1. ปรับการไหลให้เริ่มต้นที่ 0 ทั้งหมด

2. หาเส้นทางที่ยังเพิ่มการไหลได้

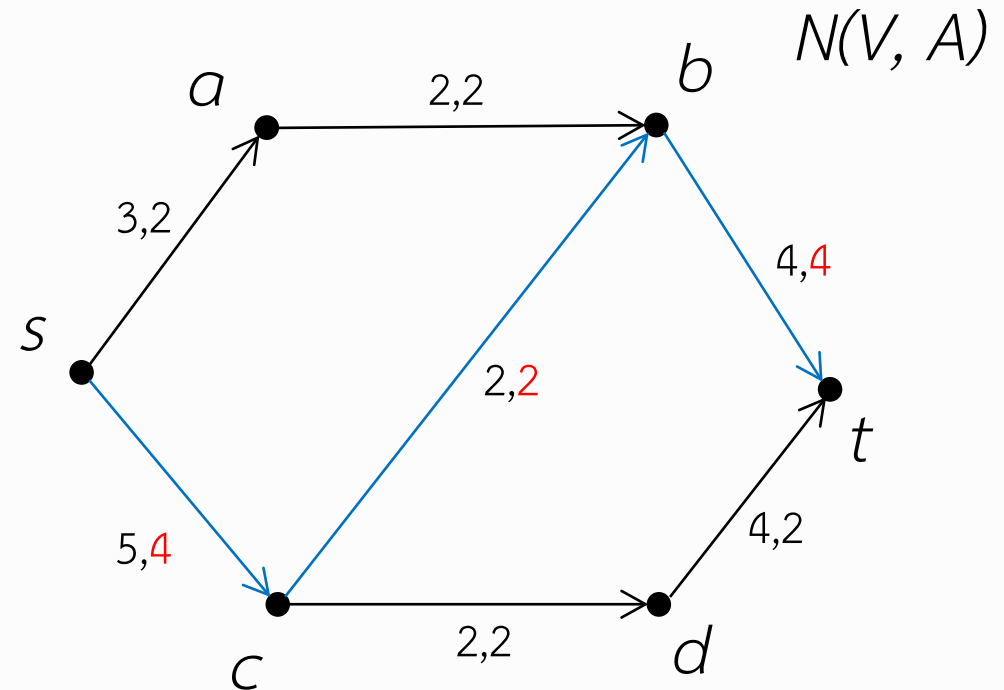
- $s \rightarrow c \rightarrow b \rightarrow t$

- คอขวด = 2

- ปรับค่าการไหล

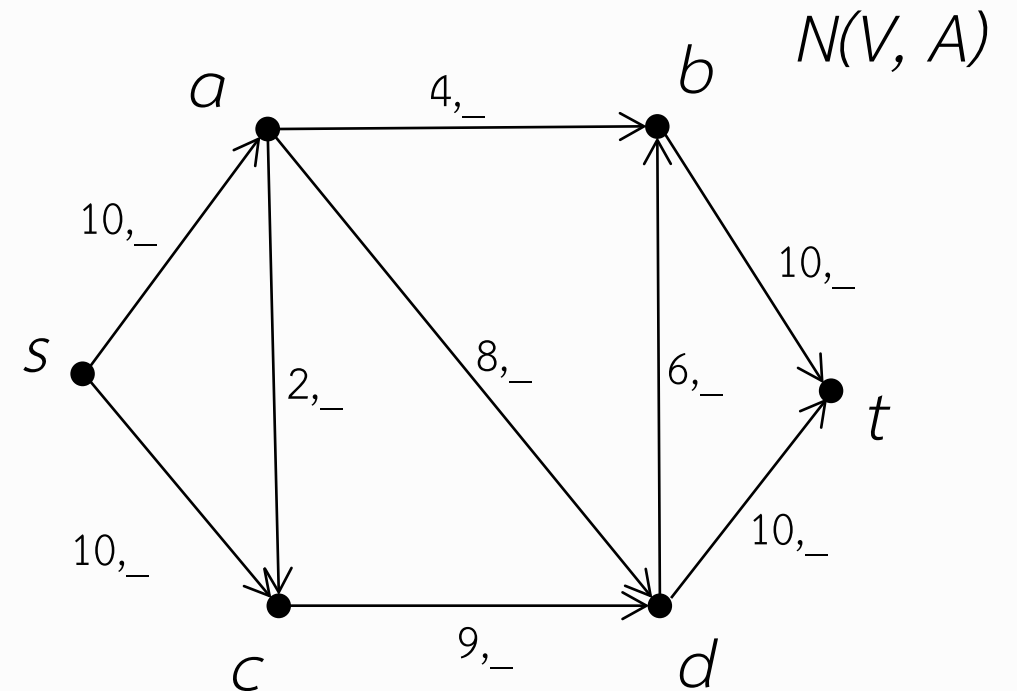
ลูกศรขาไปจะบวก(+) และ ลูกศรสวนทางจะลบ(-)

3. หาเส้นทางที่เพิ่มการไหลไม่ได้แล้ว



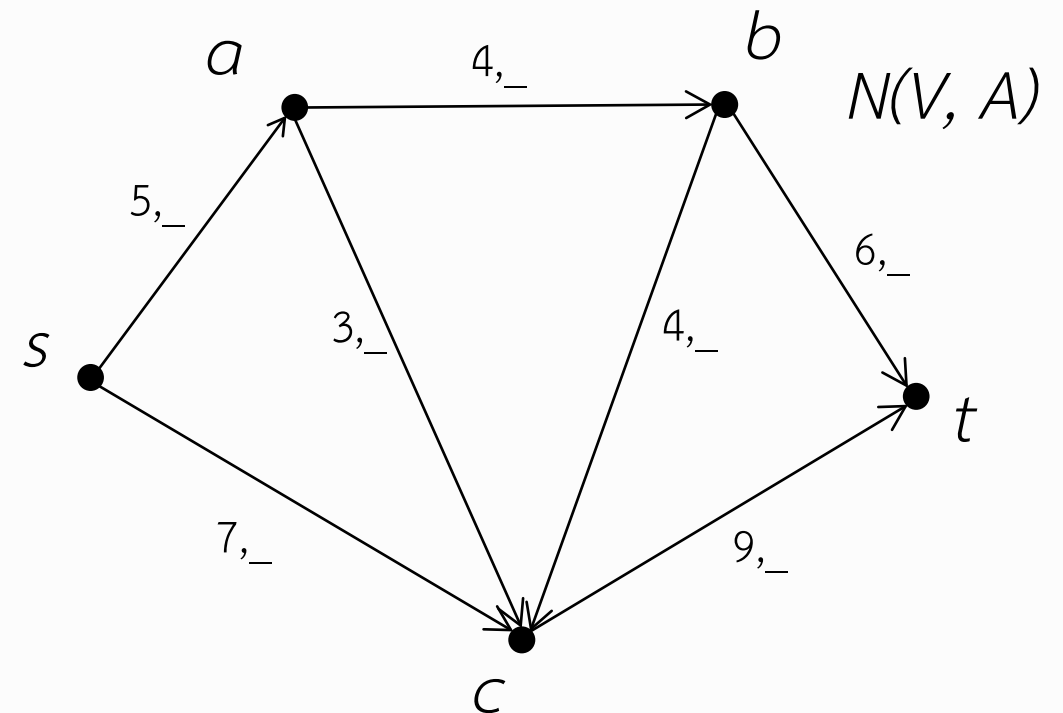
ตัวอย่างที่2 – การหาการไหลสูงสุด

เส้นทางที่ค่าการไหลได้	คอขวด
$s \rightarrow a \rightarrow b \rightarrow t$	4



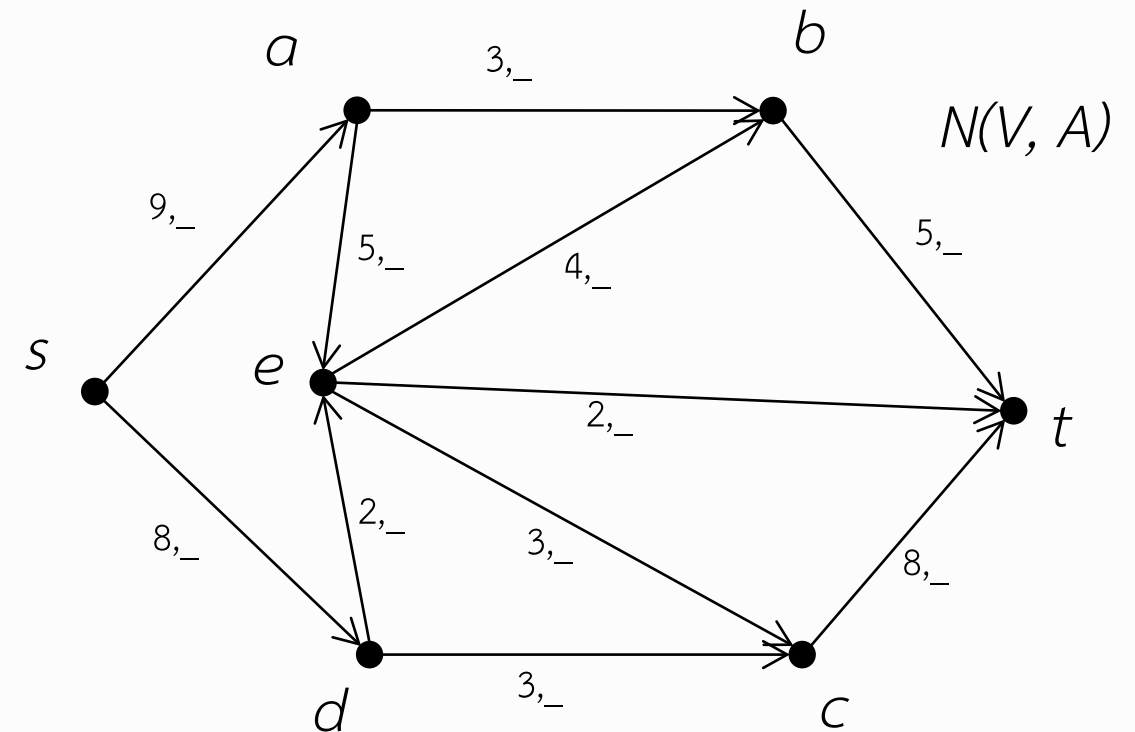
แบบฝึกหัด 1 – การหาการไหลสูงสุด

เส้นทางที่ค่าการไหลได้	คอขวด



แบบฝึกหัด 2 – การหาการไหลสูงสุด

เส้นทางที่ค่าการไหลได้	คอขวด



สรุป

- นิยามของข่ายงาน; กราฟทิศทาง+การเชื่อมโยงแบบอ่อน
- ความจุ capacity, การไหล flow
- ส่วนตัด, ค่าความจุของส่วนตัด
- วิธีการไหลสูงสุดของข่ายงาน
 - Ford and Fulkerson Algorithm