Dynamic Programming

การอบรมคอมพิวเตอร์โอลิมปิก สอวน. ค่ายที่ 2
ปีการศึกษา 2564

Pisit Makpaisit

Dynamic Programming

- เทคนิคการแก้ปัญหาด้วยการแบ่งปัญหาออกเป็นปัญหาย่อย (Subproblem)
- เก็บคำตอบที่ดีที่สุดของปัญหาย่อย เพื่อนำกลับมาใช้อีกครั้ง
- ลดเวลาจากการทำงานที่ซ้ำซ้อนลง

Fibonacci Sequence

0 1 1 2 3 5 8 13 21 34 55 89 …

Recurrence Relation:

$$F_n = F_{n-1} + F_{n-2}$$

$$F_0 = 0, F_1 = 1$$

Recursive Fibonacci Sequence

Algorithm 31 recursiveFibonacci

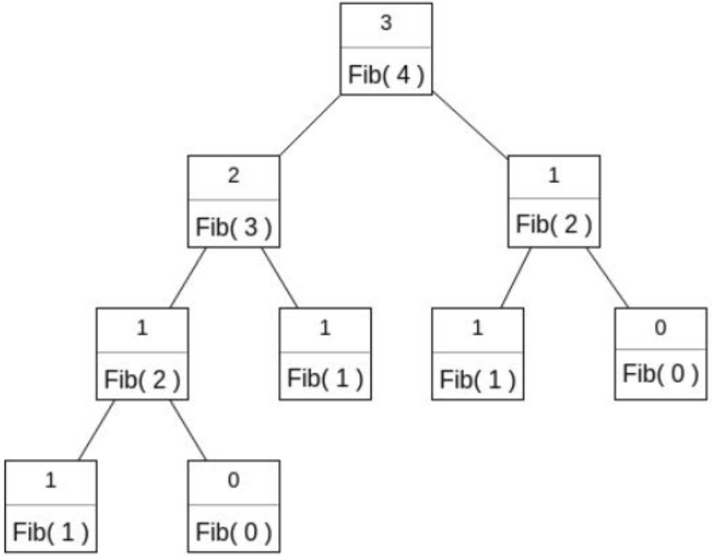
function Fib(n)
    if $n \leq 1$ **then**
        return n
    else
        return Fib($n-1$) + Fib($n-2$)

เขียนตาม recurrence relation ได้โดยตรง ด้วย recursive function

Recursive Fibonacci Sequence

เวลาการทำงานเป็น Exponential

(แต่ละฟังก์ชันเรียกไปอีกเฉลี่ยประมาณ 2 ครั้ง)



Memoization Fibonacci Sequence

Algorithm 32 memoizationFibonacci

Initial array F with -1
function Fib(n)
    if $n \leq 1$ **then**
        return n
    if $F[n] = -1$ **then**
        $F[n] \leftarrow \text{Fib}(n-1) + \text{Fib}(n-2)$
    return $F[n]$

เก็บค่าที่คำนวนไว้แล้วใน memory (อาร์เรย์) จะได้ไม่ต้องคำนวณใหม่ (เวลา Θ(n))

เรียกวิธีนี้ว่า Memoization หรือ Dynamic Programming แบบ Top down

Dynamic Programming Fibonacci

Algorithm 33 bottomUpDpFibonacci

function Fib(n)
    Initial array F of size $n+1$
    $F[0] = 0, F[1] = 1$
    for $i = 2$ **to** $n+1$ **do**
        $F[i] \leftarrow F[i-1] + F[i-2]$
    return $F[n]$

Bottom up dynamic programming ใช้การเติมตารางเพื่อหาคำตอบ (เวลา Θ(n))

n :	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	...
F :	0	1	1	2	3	5	8	13	21	34	55	...

Assignment 0

เขียนโปรแกรมหาค่า Fibonacci ลำดับที่ n ด้วยเทคนิค Memoization และ Dynamic programming แบบ Bottom up

Binomial Coefficient

- จำนวนวิธีในการเลือกของ k ชิ้นจากของ n ชิ้น
- ค่าสัมประสิทธิ์ของแต่ละพจน์ในการกระจาย $(x + y)^n$

$$\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!}$$

Recurrence Relation:

$$\binom{n}{k} = \begin{cases} \binom{n-1}{k-1} + \binom{n-1}{k} & \text{if } n, k > 0 \\ 1 & \text{if } k = 0 \text{ or } n = k \end{cases}$$

Binomial Coefficient

Algorithm 34 recursiveBinomialCoefficient

function C(n, k)
    if $k = 0$ or $k = n$ **then**
        return 1
    if $k < 0$ or $k > n$ **then**
        return 0
    return C($n - 1, k - 1$) + C($n - 1, k$)

คำตอบย่อยที่เป็นไปได้มีค่าได้ตั้งแต่ 0 - n และ 0 - k ซึ่งเป็นข้อมูลใน 2 มิติ ดังนั้นอาร์เรย์ที่ใช้สำหรับเก็บคำตอบย่อยจะต้องมีขนาด (n + 1) x (k + 1)

Assignment 1

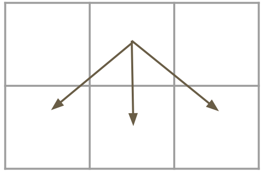
เขียนโปรแกรมสำหรับหาค่า Binomial Coefficient (รับค่า n, k เข้ามาในโปรแกรม และแสดงค่า C(n,k) ออกมาทางหน้าจอ) โดยใช้การเขียนแบบ Top down dynamic programming

Assignment 2

เขียนโปรแกรมสำหรับหาค่า Binomial Coefficient (รับค่า n, k เข้ามาในโปรแกรม และแสดงค่า C(n,k) ออกมาทางหน้าจอ) โดยใช้การเขียนแบบ Bottom up dynamic programming

Assignment 3

เกม Puzzle หนึ่งต้องเริ่มเดินจากแถวบนสุด (ช่องใดก็ได้) และลงมายังแถวล่างสุด (ช่องได้ก็ได้) โดยที่ผลรวมของค่าแต่ละช่องที่เดิมผ่านมากที่สุด เขียนโปรแกรมสำหรับหาผลรวมที่มากที่สุด เงื่อนไขการเดินคือสามารถเดินลงไปยังช่องด้านล่างตามรูปเท่านั้น



34	21	22	34
45	70	43	65
25	62	15	26
15	19	32	24
30	60	50	80

0/1 Knapsack Problem

มีของ n ชิ้น ชิ้นที่ i มีน้ำหนัก w_i และมีมูลค่า v_i มีเป้อยู่หนึ่งใบที่สามารถรับน้ำหนักได้ W ให้หามูลค่ารวมของสิ่งของสูงสุดที่สามารถใส่ลงในเป้ได้ โดยที่น้ำหนักไม่เกินน้ำหนักที่เป้จะรับได้

0/1 Knapsack Problem

สมมติให้ **OPT(i,j)** แทน มูลค่ารวมของสิ่งของทั้งหมดในเป้ เมื่อพิจารณาสิ่งของตั้งแต่ชิ้นที่ 1 ถึงชิ้นที่ i และน้ำหนักที่รับได้ของเป้เป็น j

- OPT(4, 30) = มูลค่ารวมสูงสุด ถ้าคิดแค่ของชิ้นที่ 1-4 และกระเป๋ารับน้ำหนักได้ 30
- OPT(1, 22) = มูลค่ารวมสูงสุด ถ้าคิดแค่ของชิ้นที่ 1 และกระเป๋ารับน้ำหนักได้ 22
- OPT(8, 0) = มูลค่ารวมสูงสุด ถ้าคิดแค่ของชิ้นที่ 1-8 และกระเป๋ารับน้ำหนักได้ 0

คำตอบของปัญหาคือการหา OPT(n, W)
(ปัญหานี้มีของทั้งหมด n ชิ้น และเป้รับน้ำหนักได้ไม่เกิน W)

0/1 Knapsack Problem

Base case

กรณีที่ W = 0 หรือเป้รับน้ำหนักไม่ได้เลย มูลค่ารวมจะเป็น 0

$$OPT(i,0) = 0$$

ของทั้งหมดมี 0 ชิ้นมูลค่ารวมก็จะต้องได้ 0 เช่นกัน เพราะไม่มีสิ่งของให้ใส่

$$OPT(0,j) = 0$$

0/1 Knapsack Problem

General Case

สมมติว่ามีของทั้งสิ้น i ชิ้น และเราสนใจเพียงแค่ว่าจะเอาชิ้นที่ i นี้ใส่ลงในเป้หรือไม่ เราไม่สามารถรู้คำตอบได้ทันทีว่าควรที่จะนำใส่เข้าไปในเป้หรือไม่ แต่เราสามารถดูจากคำตอบของปัญหาย่อยได้ว่าใส่หรือไม่ใส่จะได้มูลค่ามากกว่ากัน

เอาชิ้นที่ i ใส่เป้ จะได้มูลค่าที่ดีที่สุดคือ v_i + OPT(i-1,j-w_i)

มูลค่าที่ดีที่สุด ได้จาก มูลค่าของของชิ้นที่ i บวกด้วยมูลค่ารวมของสิ่งของทั้งหมดในเป้ เมื่อพิจารณาสิ่งของตั้งแต่ชิ้นที่ 1 ถึงชิ้นที่ i-1 และน้ำหนักที่รับได้ของเป้เป็น j-w_i ที่ต้องเป็น i-1 เพราะเราเลือกของชิ้นที่ i มาแล้วทำให้ไม่ต้องสนใจอีก ส่วนน้ำหนักของเป้ที่รับได้ก็จะต้องลดลงไปเท่ากับน้ำของของชิ้นที่ i (w_i)

0/1 Knapsack Problem

ไม่เอาของชิ้นที่ i ใส่เป้ มูลค่าที่ดีที่สุดก็ให้พิจารณาจากมูลค่าที่ดีที่สุดเมื่อพิจารณาของตั้งแต่ชิ้นที่ 1 จนถึงชิ้นที่ i-1 หรือก็คือ

$$OPT(i-1,j)$$

ดังนั้นรูปทั่วไปก็คือการหาว่ามูลค่าระหว่างการเลือกหรือไม่เลือกของชิ้นที่ i แบบไหนจะดีกว่า จึงได้ว่า

$$OPT(i,j) = \max(OPT(i-1,j),\ v_i+OPT(i-1,j-w_i)) \qquad \text{if } i > 0 \text{ and } j \geq w\_i$$

0/1 Knapsack Problem

Recurrence relation

$$OPT(i,j) = \begin{cases} max(OPT(i-1,j), v_i + OPT(i-1, j-w_i)) & \text{if } i > 0 \text{ and } j \geq w_i \\ OPT(i-1,j) & \text{if } j < w_i \\ 0 & \text{if } i = 0 \text{ or } j = 0 \end{cases}$$

0/1 Knapsack Problem

Algorithm 35 discreteKnapsack

function Knapsack(v, w, W)
  for $i = 0$ **to** $n + 1$ **do** $T[i][0] \leftarrow 0$
  for $j = 0$ **to** $W + 1$ **do** $T[0][j] \leftarrow 0$
  for $i = 1$ **to** $n + 1$ **do**
    for $j = 1$ **to** $W + 1$ **do**
      if $j < w_i$ **then**
        $T[i][j] \leftarrow T[i-1][j]$
      else
        $T[i][j] \leftarrow$ Max$(T[i-1][j], v_i + T[i-1][j-w_i])$
  return $T[n][W]$

0/1 Knapsack Problem

- โปรแกรมจะทำการไล่เติมคำตอบในแถวที่ 0 และหลักที่ 0 ก่อน
- จากนั้นก็เติมคำตอบในแถวที่ 1, 2, 3, ..., n
- คำตอบจะอยู่ช่อง T[n][W] ซึ่งแทนค่าของ OPT(n, W)
- เวลาการทำงานของโปรแกรมคือการเติมตารางขนาด (n + 1) x (W + 1) นั่นคือใช้เวลาเท่ากับ Θ(nW)

0/1 Knapsack Problem Example

W = 7,   v = [1, 4, 5, 7],   w = [1, 3, 4, 5]

	0	1	2	3	4	5	6	7(W)
0								
1								
2								
3								
4(n)								

for $i = 0$ to $n + 1$ do $T[i][0] \leftarrow 0$

for $j = 0$ to $W + 1$ do $T[0][j] \leftarrow 0$

for $i = 1$ to $n + 1$ do

  for $j = 1$ to $W + 1$ do

    if $j < w_i$ then

      $T[i][j] \leftarrow T[i-1][j]$

    else

      $T[i][j] \leftarrow \text{Max}(T[i-1][j], v_i + T[i-1][j-w_i])$

0/1 Knapsack Problem Example

W = 7,   v = [1, 4, 5, 7],   w = [1, 3, 4, 5]

	0	1	2	3	4	5	6	7(W)
0	0							
1	0							
2	0							
3	0							
4(n)	0							

$\boxed{\text{for } i = 0 \text{ to } n+1 \text{ do } T[i][0] \leftarrow 0}$

for $j = 0$ to $W + 1$ do $T[0][j] \leftarrow 0$

for $i = 1$ to $n + 1$ do

  for $j = 1$ to $W + 1$ do

    if $j < w_i$ then

      $T[i][j] \leftarrow T[i-1][j]$

    else

      $T[i][j] \leftarrow \text{Max}(T[i-1][j], v_i + T[i-1][j-w_i])$

0/1 Knapsack Problem Example

W = 7, v = [1, 4, 5, 7], w = [1, 3, 4, 5]

	0	1	2	3	4	5	6	7(W)
0	0	0	0	0	0	0	0	0
1	0							
2	0							
3	0							
4(n)	0							

for $i = 0$ to $n + 1$ do $T[i][0] \leftarrow 0$

$\boxed{\text{for } j = 0 \text{ to } W + 1 \text{ do } T[0][j] \leftarrow 0}$

for $i = 1$ to $n + 1$ do

  for $j = 1$ to $W + 1$ do

    if $j < w_i$ then

      $T[i][j] \leftarrow T[i-1][j]$

    else

      $T[i][j] \leftarrow \text{Max}(T[i-1][j], v_i + T[i-1][j-w_i])$

0/1 Knapsack Problem Example

W = 7,   v = [1, 4, 5, 7],   w = [1, 3, 4, 5]

	0	1	2	3	4	5	6	7(W)
0	0	0	0	0	0	0	0	0
1	0	1						
2	0							
3	0							
4(n)	0							

for $i = 0$ to $n+1$ do $T[i][0] \leftarrow 0$

for $j = 0$ to $W+1$ do $T[0][j] \leftarrow 0$

for $i = 1$ to $n+1$ do

  for $j = 1$ to $W+1$ do

    if $j < w_i$ then

      $T[i][j] \leftarrow T[i-1][j]$

    else

      $\boxed{T[i][j]} \leftarrow \text{Max}(\boxed{T[i-1][j]}, v_i + \boxed{T[i-1][j-w_i]})$

0/1 Knapsack Problem Example

W = 7,   v = [1, 4, 5, 7],   w = [1, 3, 4, 5]

	0	1	2	3	4	5	6	7(W)
0	0	0	0	0	0	0	0	0
1	0	1	1					
2	0							
3	0							
4(n)	0							

for $i = 0$ to $n + 1$ do $T[i][0] \leftarrow 0$

for $j = 0$ to $W + 1$ do $T[0][j] \leftarrow 0$

for $i = 1$ to $n + 1$ do

  for $j = 1$ to $W + 1$ do

    if $j < w_i$ then

      $T[i][j] \leftarrow T[i-1][j]$

    else

      $\boxed{T[i][j]} \leftarrow \text{Max}(\boxed{T[i-1][j]}, v_i + \boxed{T[i-1][j-w_i]})$

0/1 Knapsack Problem Example

W = 7, v = [1, 4, 5, 7], w = [1, 3, 4, 5]

	0	1	2	3	4	5	6	7(W)
0	0	0	0	0	0	0	0	0
1	0	1	1	1	1	1	1	1
2	0							
3	0							
4(n)	0							

for $i = 0$ to $n + 1$ do $T[i][0] \leftarrow 0$

for $j = 0$ to $W + 1$ do $T[0][j] \leftarrow 0$

for $i = 1$ to $n + 1$ do

  for $j = 1$ to $W + 1$ do

    if $j < w_i$ then

      $T[i][j] \leftarrow T[i-1][j]$

    else

      $\boxed{T[i][j]} \leftarrow \text{Max}(\boxed{T[i-1][j]}, v_i + \boxed{T[i-1][j-w_i]})$

0/1 Knapsack Problem Example

W = 7,   v = [1, 4, 5, 7],   w = [1, 3, 4, 5]

	0	1	2	3	4	5	6	7(W)
0	0	0	0	0	0	0	0	0
1	0	1	1	1	1	1	1	1
2	0	1						
3	0							
4(n)	0							

for $i = 0$ to $n+1$ do $T[i][0] \leftarrow 0$

for $j = 0$ to $W+1$ do $T[0][j] \leftarrow 0$

for $i = 1$ to $n+1$ do

  for $j = 1$ to $W+1$ do

    if $j < w_i$ then

      $\boxed{T[i][j]} \leftarrow \boxed{T[i-1][j]}$

    else

      $T[i][j] \leftarrow \text{Max}(T[i-1][j], v_i + T[i-1][j-w_i])$

0/1 Knapsack Problem Example

W = 7, v = [1, 4, 5, 7], w = [1, 3, 4, 5]

	0	1	2	3	4	5	6	7(W)
0	0	0	0	0	0	0	0	0
1	0	1	1	1	1	1	1	1
2	0	1	1	4				
3	0							
4(n)	0							

for $i = 0$ to $n+1$ do $T[i][0] \leftarrow 0$

for $j = 0$ to $W+1$ do $T[0][j] \leftarrow 0$

for $i = 1$ to $n+1$ do

  for $j = 1$ to $W+1$ do

    if $j < w_i$ then

      $T[i][j] \leftarrow T[i-1][j]$

    else

      $\boxed{T[i][j]} \leftarrow \text{Max}(\boxed{T[i-1][j]}, v_i + \boxed{T[i-1][j-w_i]})$

0/1 Knapsack Problem Example

W = 7,   v = [1, 4, 5, 7],   w = [1, 3, 4, 5]

	0	1	2	3	4	5	6	7(W)
0	0	0	0	0	0	0	0	0
1	0	1	1	1	1	1	1	1
2	0	1	1	4	5	5	5	5
3	0	1	1	4	5	6	6	9
4(n)	0	1	1	4	5	7	8	9

คำตอบ

0/1 Knapsack Problem Example

เขียน Pseudo-code ของ DP Knapsack problem ถ้าเขียนแบบ Memoization

W = 7,   v = [1, 4, 5, 7],   w = [1, 3, 4, 5]

จำลองการทำงานและเติมคำตอบลงในตารางของ Pseuso-code นี้

Dynamic Programming

- DP แบบ bottom-up จะต้องระวังเรื่องการเติมตารางให้ดี จะต้องตรวจสอบการขึ้นต่อกันของข้อมูลให้ดีก่อนว่าจะต้องเติมช่องไหนก่อน เพราะหากเติมผิดลำดับคำตอบที่ได้ก็จะไม่ถูกต้อง
- ตรงข้ามกับการเขียนแบบ top-down ที่เราไม่ต้องกังวลเรื่องลำดับ

Dynamic Programming

ขั้นตอนในการแก้ปัญหาด้วย Dynamic programming

1	ทำความเข้าใจปัญหา จุดประสงค์ของปัญหา และแทนด้วยสัญลักษณ์	ยากในขั้นตอนการของแปลงปัญหาเป็นสัญลักษณ์
2	เขียน recurrence relation	base case ที่จะหยุดการคำนวณต่อและส่วนของ general case ที่อธิบายความสัมพันธ์ระหว่างปัญหาและปัญหาย่อย ปัญหาย่อยแต่ละปัญหาสามารถรวมคำตอบกันได้อย่างไร
3	เขียนโปรแกรมตาม recurrence relation	Top down หรือ Bottom up

Assignment 4

เขียนโปรแกรมแก้ปัญหา Knapsack problem แบบ top down และ bottom up
โปรแกรมสามารถกรอกข้อมูลของน้ำหนักสูงสุดที่รับได้ W รวมทั้งน้ำหนักและมูลค่าของของแต่ละชิ้น

(ส่งเป็น 2 โปรแกรม)

Coin Changing Problem (Minimum Number of Coins)

ปัญหาการทอนเหรียญ

มีเหรียญทั้งหมด n ชนิด เหรียญชนิดที่ i มีมูลค่า v_i ต้องการทอนเหรียญเป็นจำนวนเงิน C โดยใช้เหรียญให้น้อยที่สุด จะต้องใช้กี่เหรียญในการทอน

https://moneyhub.in.th/article/%E0%B9%80%E0%B8%AB%E0%B8%A3%E0%B8%B5%E0%B8%A2%E0%B8%8D%E0%B8%9A%E0%B8%B2%E0%B8%97-%E0%B8%81%E0%B9%87%E0%B9%80%E0%B8%87%E0%B8%B4%E0%B8%99-%E0%B8%97%E0%B8%B3%E0%B9%84%E0%B8%A1%E0%B8%9A%E0%B8%B2%E0%B8%87/

Coin Changing Problem

M(i, j) แทนจำนวนเหรียญที่น้อยที่สุดในการทอนเงิน j โดยใช้เหรียญแบบที่ 1 - i ดังนั้นคำตอบของปัญหานี้คือการหาค่าของM(n, C)

Coin Changing Problem

Base Case

เนื่องจากเราทราบว่าในการทอนเงิน 0 บาทจะใช้ 0 เหรียญจะได้ว่า

$$M(i,0) = 0$$

ถ้าไม่มีเหรียญเลยก็จะทอนไม่ได้ (ให้เป็นค่า infinity)

$$M(0,j) = \infty$$

Coin Changing Problem

General Case

ในรูปทั่วไปเราจะต้องคำนึงถึงความสัมพันธ์ของปัญหาและปัญหาย่อย จำนวนเหรียญที่น้อยที่สุดในการทอนเมื่อพิจารณา i เหรียญมีความสัมพันธ์อย่างไรกับ i-1 เหรียญ ซึ่งปัญหานี้จะใกล้เคียงกับปัญหา Knapsack คือให้เราพิจารณาว่าจะใช้เหรียญที่ i ในการทอนหรือไม่

ถ้าใช้แสดงว่าจำนวนเหรียญที่น้อยที่สุดในการแทนก็จะเป็น

$$M(i,j) = 1 + M(i,j-v_i)$$

ถ้าไม่ใช้

$$M(i,j) = M(i-1,j)$$

Coin Changing Problem

ซึ่งเราจะต้องหาค่าที่น้อยกว่าระหว่างสองค่านี้ (เพราะเราต้องการค่าน้อยสุดที่เป็นไปได้ของจำนวนเหรียญที่จะทอน) และเราจะต้องคิดถึงกรณีที่เหรียญที่ i มีมูลค่าสูงกว่าเงินที่ต้องการทอน j ซึ่งในกรณีนี้ค่าที่ได้จะมาจาก M(i-1,j) เท่านั้น

Recurrence relation ที่ได้จึงเป็น

$$M(i,j) = \begin{cases} min(M(i-1,j), 1 + M(i, j - v_i)) & \text{if } i > 0 \text{ and } j \geq v_i \\ M(i-1,j) & \text{if } j < v_i \\ 0 & \text{if } j = 0 \\ \infty & \text{if } i = 0 \end{cases}$$

Assignment 5

เขียนโปรแกรมแก้ปัญหาการทอนเหรียญด้วยวิธี Dynamic programming โดยรับจำนวนเงินที่ต้องทอน และมูลค่าของเหรียญต่างๆ ที่มี

Dynamic Programming

Dynamic programming ลดเวลาการทำงานด้วยการเก็บคำตอบที่จะต้องคำนวณซ้ำเอาไว้ แต่ไม่ใช่ทุกปัญหาที่สามารถใช้เทคนิคนี้เพื่อเพิ่มความเร็วได้

ปัญหาที่จะใช้ DP ได้ จะต้องมีคุณสมบัติ 2 อย่าง

1. คำตอบที่ดีที่สุดของปัญหาจะต้องสามารถหาได้จากคำตอบที่ดีที่สุดของปัญหาย่อย (Optimal substructure)
   a. เช่น ในตัวอย่างของ Fibonacci และ Binomial coefficient ปัญหาขนาด n และ n, k สามารถหาคำตอบได้จากปัญหาขนาด n-1 และ n - 1, k - 1
2. ปัญหาย่อยที่เกิดขึ้นจะต้องมีการคำนวณซ้ำ (Overlapping subproblems)

Longest Common Subsequence

subsequence ส่วนหนึ่งของสตริงที่เรียงลำดับกันแต่ไม่ต้องต่อเนื่องกัน เช่น PSEUDO มี subsequence หลายคำ เช่น PSUO, SUD, PED, UO, E, SEDO เป็นต้น

common subsequence คือ subsequence ของ 2 สตริง ที่เหมือนกัน เช่น กำหนดให้มีคำว่า ANALYSIS และ ALGORITHMS จะพบว่า subsequence ของทั้งสองคำที่เหมือนกัน เช่น AL, ALI, ALS, IS, ALIS เป็นต้น

longest common subsequence หมายถึง common subsequence ที่ยาวที่สุด ของทั้ง 2 สตริง เช่นจากตัวอย่างที่แล้ว LCS คือ ALIS

Longest Common Subsequence

Longest common subsequence

กำหนดให้สตริง $X = (x_1, x_2, x_3, ..., x_n)$ และ $Y = (y_1, y_2, y_3, ..., y_m)$ จงหาความยาวของ common subsequence ของ X และ Y ที่ยาวที่สุด

Longest Common Subsequence

- วิธี brute force คือการหา subsequence ทั้งหมดของ X และ Y และนำมาเปรียบเทียบกันว่ามีคู่ใดที่เหมือนกันและยาวที่สุด
- เปรียบเทียบได้กับการหาสับเซต ซึ่งมีความเป็นได้ทั้งหมด 2^n และ 2^m สำหรับ X และ Y ซึ่งจะใช้ไม่ได้ในทางปฏิบัติเมื่อสตริงทั้งสองมีความยาวมาก

Longest Common Subsequence

ให้ LCS(i,j) เป็น longest common subsequence ของสตริง X ความยาว i และสตริง Y ความยาว j

คำตอบที่ต้องการคือการหา LCS(n,m)

Longest Common Subsequence

Base Case

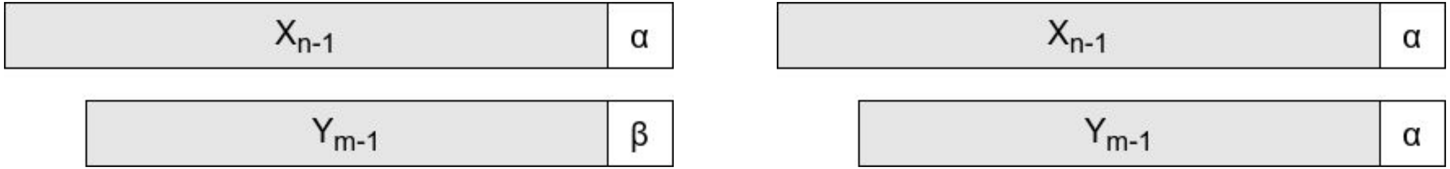
กรณีที่ X หรือ Y ตัวใดตัวหนึ่งมีความยาว 0 จะทำให้ LCS ของทั้งคู่จะกลายเป็น 0 นั่นคือ

$$LCS(i,j) = 0 \qquad \text{if } i = 0 \text{ or } j = 0$$

Longest Common Subsequence

General Case

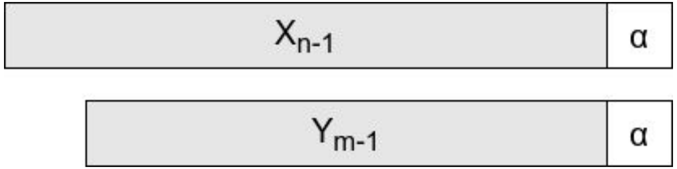
กรณีทั่วไปของความสัมพันธ์จะแบ่งออกเป็น 2 กรณี คือ กรณีที่ตัวสุดท้ายของทั้งคู่เท่ากัน และกรณีที่ตัวสุดท้ายของทั้งคู่ไม่เท่ากัน



Longest Common Subsequence

ถ้าหากตัวสุดท้ายเท่ากัน longest common subsequence ก็จะมีค่าอย่างน้อย 1 แน่นอน จากตัวอักษรที่เหมือนกัน ส่วนที่เหลือก็ให้ LCS ไปหาต่อในขนาดของสตริงที่เล็กลง นั่นคือ

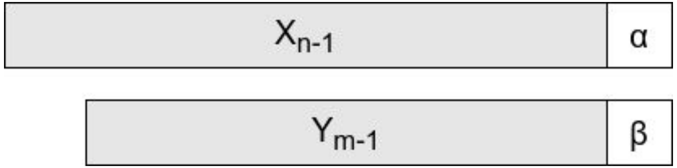
$$LCS(i,j) = 1 + LCS(i-1,j-1) \quad \text{if } x_i = y_j$$



Longest Common Subsequence

ส่วนกรณีที่ตัวสุดท้ายไม่เท่ากันนั้นจะต้องนำ 2 แบบมาเทียบกันว่าแบบไหนให้ค่าดีกว่ากัน ระหว่างการตัดตัวสุดท้ายของ X ออกหรือการตัดตัวสุดท้ายของ Y ออก นั่นคือ

$$LCS(i,j) = \max(LCS(i-1,j), LCS(i,j-1)) \qquad \text{if } x_i \neq y_j$$



Longest Common Subsequence

Algorithm 36 longestCommonSubsequence

function LCS($X[1..n], Y[1..m]$)
    for $i = 0$ **to** $n + 1$ **do** $T[i][0] \leftarrow 0$
    for $j = 0$ **to** $m + 1$ **do** $T[0][j] \leftarrow 0$
    for $i = 1$ **to** $n + 1$ **do**
        for $j = 1$ **to** $m + 1$ **do**
            if $X_i = Y_j$ **then**
                $T[i][j] \leftarrow 1 + T[i-1][j-1]$
            else
                $T[i][j] \leftarrow \text{Max}(T[i-1][j], T[i][j-1])$
    return $T[n][m]$

สตริง X และ Y จะเริ่มตัวแรกที่ตำแหน่ง 1 ซึ่งต่างจากสตริงในภาษา C/C++ ดังนั้นเมื่อนำไปเขียนโปรแกรมจริง จะต้องระวังเรื่องตำแหน่งของตัวอักษรให้ถูกต้อง เวลาการทำงานจะเป็น Θ(nm) หรือเท่ากับการเติมตาราง T ทั้งหมดนั่นเอง

Assignment 6

เขียนโปรแกรมที่รับสตริงทั้งหมด 2 สตริง และแสดงค่าของ Longest Common Subsequence ของทั้งสองตัว

Assignment 7

เขียน recurrence relation ของปัญหาต่อไปนี้ พร้อมทั้งวิเคราะห์ความซับซ้อนของเวลาในการทำงาน

1. Friends Pairing - มีกลุ่มเพื่อน n คน สามารถแบ่งเป็นกลุ่มละ 1 หรือ 2 คนได้ทั้งหมดกี่แบบ เช่น n = 3 สามารถแบ่งเป็น A/B/C, AB/C, AC/B, A/BC ทั้งหมด 4 แบบ
2. Subset Sum - ตอบแค่ True/False ว่ามี subset ที่มีผลรวมเท่ากับ k หรือไม่

Matrix Chain Multiplication

กำหนดให้เมทริกซ์ A ขนาด n x m และเมทริกซ์ B ขนาด m x p

ให้ C เป็นผลคูณของเมทริกซ์ A และ B (C = A x B)

การคูณเมทริกซ์ขนาด n x m และ m x p จะเกิดการคูณสเกลาร์ทั้งหมด n x m x p และได้ผลลัพท์เป็นเมทริกซ์ขนาด n x p

$$\overset{4\times 2 \text{ matrix}}{\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ \cdot & \cdot \\ a_{31} & a_{32} \\ \cdot & \cdot \end{bmatrix}} \overset{2\times 3 \text{ matrix}}{\begin{bmatrix} \cdot & b_{12} & b_{13} \\ \cdot & b_{22} & b_{23} \end{bmatrix}} = \overset{4\times 3 \text{ matrix}}{\begin{bmatrix} \cdot & c_{12} & c_{13} \\ \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & c_{32} & c_{33} \\ \cdot & \cdot & \cdot \end{bmatrix}}$$

https://en.wikipedia.org/wiki/Matrix_multiplication

Matrix Chain Multiplication

หากต้องการคูณเมทริกซ์ $A_1A_2A_3...A_n$ ที่มีขนาดเท่ากับ $p_0 \times p_1$, $p_1 \times p_2$, $p_2 \times p_3$, ..., $p_{n-1} \times p_n$ จะเกิดการคูณสเกลาร์กี่ครั้ง ?

เนื่องจากการคูณเมทริกซ์มีคุณสมบัติการเปลี่ยนหมู่ (Associative Property) ซึ่งหมายถึงว่า ไม่ว่าจะคูณคู่ใดก่อนก็จะให้คำตอบที่เท่ากัน ดังนั้นเราจะได้ว่า

$$(A(BC)) = ((AB)C)$$

จำนวนการคูณสเกลาร์ที่เกิดขึ้นของทั้งสองแบบเท่ากันหรือไม่ ?

Matrix Chain Multiplication

สมมติเมทริกซ์

A ขนาด 5 x 100

B ขนาด 100 x 10

C ขนาด 10 x 50

(A(BC))

B x C 100 x 10 x 50 = 50000 => 100 x 50

A x (BC) 5 x 100 x 50 = 25000

50000 + 25000 = 75000

((AB)C)

A x B 5 x 100 x 10 = 5000 => 5 x 10

(AB) x C 5 x 10 x 50 = 2500

5000 + 2500 = 7500

Matrix Chain Multiplication

ปัญหา Matrix Chain Multiplication

หากต้องการคูณเมทริกซ์ $A_1A_2A_3 \ldots A_n$ ที่มีขนาดเท่ากับ $p_0 \times p_1$, $p_1 \times p_2$, $p_2 \times p_3$, ..., $p_{n-1} \times p_n$ จะเกิดการคูณสเกลาร์น้อยที่สุดกี่ครั้ง ถ้าทำการจัดกลุ่มการคูณอย่างถูกต้อง

Matrix Chain Multiplication

ให้ M(i,j) เป็นจำนวนการคูณสเกลาร์ที่น้อยที่สุดของการคูณเมทริกซ์ A_i จนถึง A_j

คำตอบที่ต้องการคือ M(1,n)

Matrix Chain Multiplication

Base case

มีเมทริกซ์เพียงตัวเดียว จะไม่เกิดการคูณใดๆ

$$M(i,j) = 0 \qquad \text{if } i = j$$

Matrix Chain Multiplication

General case

หาจำนวนการคูณที่น้อยที่สุดของการคูณเมทริกซ์ตัวที่ i ถึง j ด้วยการลองทดสอบแบ่งครึ่งการคูณทุกแบบและดูว่าวิธีการแบ่งแบบไหนที่ทำให้เกิดการคูณน้อยที่สุด

$$M(i,j) = \min_{i \le k < j} M(i,k) + M(k+1,j) + (p_{i-1} \times p_k \times pj), \qquad \text{if } i < j$$

Matrix Chain Multiplication

Algorithm 38 MatrixChainMultiplication

function MCM($p[0..n]$)
    for $i = 1$ **to** n **do** $M[i][i] \leftarrow 0$
    for $L = 2$ **to** n **do** ▷ L แทนความยาวของ chain
        for $i = 1$ **to** $n - L + 1$ **do**
            $j \leftarrow i + L - 1$
            $M[i][j] \leftarrow \infty$
            for $k \leftarrow i$ **to** j - 1 **do**
                $q \leftarrow M[i][k] + M[k+1][j] + (p[i-1] \times p[k] \times p[j])$
                if $q < M[i][j]$ **then**
                    $M[i][j] \leftarrow q$
    return $M[1][n]$

Matrix Chain Multiplication

A_1 ขนาด 2 x 4
A_2 ขนาด 4 x 2
A_3 ขนาด 2 x 1
A_4 ขนาด 1 x 5
A_5 ขนาด 5 x 2

	j = 1	j = 2	j = 3	j = 4	j = 5
i = 1					
i = 2					
i = 3					
i = 4					
i = 5					

M(1,4) จะต้องใช้ข้อมูลจาก M(1,1), M(2,4), M(1,2), M(3,4), M(1,3), M(4,4)

Matrix Chain Multiplication

A_1 ขนาด 2 x 4
A_2 ขนาด 4 x 2
A_3 ขนาด 2 x 1
A_4 ขนาด 1 x 5
A_5 ขนาด 5 x 2

	j = 1	j = 2	j = 3	j = 4	j = 5
i = 1					
i = 2					
i = 3					
i = 4					
i = 5					